BAZI İKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

Nezakat JAVANSHİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık, 2011
ANKARA

Nezakat JAVANSHİR tarafından hazırlanan BAZI İKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylıyorum.

Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU ……………………………….

Tez danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma jürimiz tarafından oy birliği ile matematik anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Erdal GÜNER …………………………………….

Matematik anabilim dalı, Ankara üniversitesi

Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU …………………………………….

Matematik anabilim dalı, Gazi üniversitesi

Doç. Dr. Çetin VURAL

Matematik anabilim dalı, Gazi üniversitesi …………………………………..

Tarih: 25/12/2011

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

Prof. Dr. Bilal TOKLU …………………………………….

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ BiLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Nezakat JAVANSHİR

BAZI İKİLİ SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

Nezakat JAVANSHİR

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2011

ÖZET

Bu çalışmada, metrik uzayda karışık monoton özelliği olan bir dönüşüm için ikili sabit nokta teoremleri ve uygulamaları verildi. Ayrıca kısmi metrik uzayda Matthew'nun teoremi ile kısmi metriğin ürettiği topoloji ve karışık monoton özelliği olan dönüşümler için ikili sabit nokta teoremleri incelendi.

Bilim kodu : 204.1.132
Anahtar kelimeler : Metrik uzay, Kısmi metrik uzay, karışık monoton Özelliği, Konik metrik uzay
Sayfa Adedi : 52
Tez yöneticisi : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

SOME COUPLED FIXED POINT THEOREMS AND APPLICATIONS

(M. Sc Thesis)

Nezakat JAVANSHİR

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCINCE AND TECHNOLOGY

December 2011

ABSTRACT

In this study, coupled fixed point theorems and applications for mapping having mixed monotone property on metric space have been given. Also Matthew's Theorem on partial metric space has been given and partial metric topology, coupled fixed point theorems and application for mapping having mixed monotone property on partial metric space have been given.

Science code : 204.1.132

Key words : Metric space, Partial metric space, Mixed monotone Property, Cone metric space

Page Number : 52

Supervisor : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU’na teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER **sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
	Metrik uzay
	Kısmi metrik uzay
	Dizi
	dizisi e yakınsar
$\subset$	Altküme
	Eleman
	En az
	Her (Herhangi)
	Konik
	Reel Banach uzay
	Topoloji
	Topolojik uzay

1.Giriş

X boştan farklı bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $x = Tx$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktasına T dönüşümünün sabit noktası denir. Örneğin,
$X = (0, 1]$ olsun. $T: X \to X$, $Tx = x^2$ için $x_0 = 1$ bir sabit noktadır.
$X = (-\infty, +\infty)$ olsun. $T: X \to X$, $Tx = x^3$ için $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ sabit noktalardır.

$X = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ olsun. $T: X \to X$, $Tx = \sin x$ için $x_0 = 0$ bir sabit noktdır.

Bir $x \in X$ için $T(x) \subset X$ bir küme ise yani, T bir çoğul değerli dönüşüm ise o zaman $x \in Tx$ olacak şekilde $x \in X$ noktasına T çoğul değerli dönüşümünün bir sabit noktası denir
.
(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ ise T ye büzülme denir.

Her $x, y \in X$ ve $0 \leq k < \infty$ için $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ ise T ye Lipschitz sürekli, $0 \leq k < 1$ için T ye k-büzülme, $k = 1$ ise T ye genişlemeyen (nonexpansive) büzülme denir. Genişlemeyen büzülmelerde her $\varepsilon > 0$ için $d(x, y) < \delta \Longrightarrow d(Tx, Ty) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir δ vardır, böylece genişlemeyen büzülmeler süreklidir.

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teoremi çalışmaları Banach ile başlamıştır. Banach büzülme dönüşüm prensibi olarak da bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir.

"(X, d) bir tam metrik uzay ve $f: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve bir $\alpha \in [0, 1)$ için $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğini sağlıyorsa f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $y_n = f^n x$ şeklinde tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi z noktasına yakınsar."

Bir P koniği, E Banach uzayının bir altkümesidir öyle ki

(i) P Kapalı, boştan farklı ve $P \neq \{0\}$

(ii) a, b negatif olmayan reel sayılar ve $x, y \epsilon P$ ise, o zaman $ax + by \epsilon P$

(iii) $P \cap (-P) = \{0\}$

dır.

$M0$ bir sabit ve $x, y \epsilon E$ olsun. Her $0 \leq x \leq y$ için $x \leq My$ şartı sağlanıyorsa P bir normal koniktir denir.

1992 de Matthews kısmi metriği uzaklık fonksiyonunun bir genelleştirilmiş hali olarak tanımladı [1], [7], [8], [10], [12]. Metrik tanımında $x = y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ olduğunu biliyoruz ama kısmi metrik de $x = y$ olduğu zaman $p(x, y)$ sıfırdan farklı olabilir. Matthews kısmi metrik uzayı için Banach sabit nokta teoremini ispatladı. Kısmi metrik kavramı özellikle Bilgisayar, enformasyon ve Biyoloji bilimlerinde önemli role sahiptir [9].

Matthew, Banach büzülme teoremini kısmi metrik uzaylarında genişletilmiştir. [1], [7], [8], [10], [12].

2. Bazı Temel Kavramlar ve Teoremler

Bu bölümde ileride kullanacağımız bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilecektir.

2. 1. Tanım

$F: X \times X \to X$ bir dönüşüm ve $(x, y) \epsilon X \times X$ olsun. Eğer
$F(x, y) = x$ ve $F(y, x) = y$
ise, o zaman (x, y) ikilisi F dönüşümünün ikili sabit noktasıdır denir.

2. 1. Örnek

(1) $X = [0, 1]$ olsun. $F: X \times X \to X,\ F(x, y) = \sqrt{xy}$ dönüşümünü tanımlayalım. O zaman $F(0, 0) = 0$ ve $F(1, 1) = 1$ dir, yani $(0, 0)$ ve $(1, 1)$ ikilileri F nin ikili sabit noktalarıdır.
(2) $X = [-1, 0)$ ve $F: X \times X \to X,\ F(x, y) = \frac{x+y}{2}$ olsun. Bu durumda $(x, y) = (-1, -1)$ bu dönüşümün ikili sabit noktasıdır.
(3) $X = (0, 1)$ ve $F: X \times X \to X,\ F(x, y) = \frac{x-y}{2}$ olsun. Bu durumda F nin X de sabit noktası yoktur.

2. 2. Tanım

$(X, \leq)$ kısmen sıralı küme ve $F: X \times X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$x_1, x_2 \in X \text{ ve } x_1 \leq x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y),$$

$$y_1, y_2 \in X \text{ ve } y_1 \leq y_2 \Rightarrow F(x, y_2) \leq F(x, y_1)$$

koşulları sağlanıyorsa, F, X de karışık monoton özelliğine sahiptir denir.

2. 3. Tanım

$(X, \leq)$ kısmen sıralı küme, $F: X \times X \to X$ ve $g : X \to X$ olsun. Her $x, y \in X$ için

$$x_1, x_2 \in X, \quad g(x_1) \leq g(x_2) \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y),$$
$$y_1, y_2 \in X, \quad g(y_1) \leq g(y_2) \Rightarrow F(x, y_1) \geq F(x, y_2)$$

koşulları sağlanıyorsa, F karışık g-monoton özelliğine sahiptir denir.

2. 4. Tanım

$F: X \times X \to X$ ve $g : X \to X$ iki dönüşüm olsun.

$$F(x, y) = g(x), \qquad F(y, x) = g(y)$$

olacak şekilde $(x, y) \epsilon X \times X$ varsa, (x, y) ikilisine F ve g nin çakışık ikili noktasıdır denir.

2. 2. Örnek

$X = [-1, 1]$ olsun. $F: X \times X \to X$, $F(x, y) = \frac{x+y}{2}$ ve $g : X \to X$, $g(x) = x^2$ iki dönüşüm olsun. $F(1, 1) = 1$ ve $g(1) = 1$ dir, yani $(1, 1)$ ikilisi F ve g nin çakışık ikili noktasıdır.

2. 5. Tanım

Boş olmayan bir X kümesi ve bir $d: X \times X \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to d(x, y)$ dönüşümü verilsin. Eğer d dönüşümü her $x, y, z \in X$ için

(d1) $d(x, y) \geq 0$,

(d2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(d3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(d4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır ve bu durumda (X, d) ikilisine bir metrik uzay denir.

Bu tanımda $\mathbb{R}$ yerine E Banach uzayı yazılmış olsaydı (X, d) ikilisi Banach değerli metrik uzayı adını alacaktı.

2. 1. Önerme

Eğer d fonksiyonu (d1), (d3), (d4) aksiyomlarını ve (d2)'nin yalnızca yeter şartını sağlıyorsa, d metriğine X üzerinde bir **pseudo metrik** (yarı metrik) denir.

2. 3. Örnek

$X = \{a, b\}$ ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu alalım. $d = \{((a, a), 0), ((b, b), 0), ((a, b), 1), ((b, a), 1)\}$
metrik olma şartlarını sağlar, dolayısıyla (X, d) bir metrik uzaydır.

2. 6. Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. x'in d metrik uzayında sırayla açık ve kapalı komşulukları
$B(x, \varepsilon) = \{y \in X\colon\ d(x, y) < \varepsilon\}$, $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X\colon\ d(x, y) \leq \varepsilon\}$
ile tanımlanır.

2. 7. Tanım

$\{x_n\}, (X, d)$ metrik uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için, bir $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq m$ için $d(x, x_n) < \varepsilon$ oluyorsa $\{x_n\}$, x noktasına yakınsıyor denir ve $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

2. 8. Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\varepsilon > 0$ için, $m,n > N$ olmak üzere
$d(x_n, x_m) < \varepsilon$
şartını sağlayan bir $N = N(\varepsilon)$ varsa $\{x_n\}$ dizisine **Cauchy** dizisi denir.

2. 9. Tanım

Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi uzayın bir elemanına yakınsıyorsa, X uzayına **tam metrik uzay** denir. X de her $\{x_n\}$ dizisinin bir altdizisi $\{x_{n_i}\}$ olsun öyle ki $\{x_{n_i}\}$, X de yakınsak ise, o zaman (X,d) metrik uzayına dizisel kompakttır denir.

2. 1. Önerme

(X,d) bir metrik uzay olsun. $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ olacak şekilde X' de iki dizi olsun. O zaman $n \to \infty$ iken $d(x_n, y_n) = d(x,y)$ dır.

2. 10. Tanım

(X,d) bir Banach değerli metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. X de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x)$$

oluyorsa T süreklidir.

Huang ve Zhang E Banach uzayı üzerinde aşağıdaki teoremi ispatlamışlar.

2. 1. Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay ve P, M sabitli bir normal konik olsun. $k \in [0,1)$ sabiti için $T: X \to X$ dönüşümü her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

koşulunu sağlıyorsa T nin X de bir tek sabit noktası vardır ve her $x \in X$ için iterasyon $\{T^n x\}$ dizisi bir tek noktaya yakınsar.

3. METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3. 1. Metrik Uzayda İkili Sabit Nokta Teoremleri

F. Sabetghadam ikili sabit nokta için aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

3. 1. Teorem

(X, d) tam metrik uzay olsun. $F: X \times X \to X$ dönüşümü, k, l negatif olmayan sabitler ve $k + l < 1$ olmak üzere, her $x, y, u, v \in X$ için
$d\big(F(x,y), F(u,v)\big) \leq kd(x,u) + ld(y,v)$ (3.1)
koşulunu sağlıyorsa, F nin X de bir ikili sabit noktası vardır.
Bu teoremin bir sonucu aşağıda verilmiştir

3. 1. Sonuç

(X, d) bir tam metrik uzayı olsun. Her bir $x, y, u, v \epsilon X$ için $F: X\ X \to X$ dönüşümü, $k \epsilon [0,1)$ bir sabit olmak üzere,

$$d\big(F(x,y), F(u,v)\big) \leq \frac{k}{2}\big(d(x,u) + d(y,v)\big), \qquad (3.\ 2)$$

şartını sağlıyorsa F nin bir tek sabit noktası vardır.

3. 1. Örnek

$E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) \epsilon \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, ve $X = [0,1]$ olsun.
$d: X\ X \to E,\ d(x,y) = (|\ x - y\ |, |\ x - y\ |)$ tanımlayalım. O zaman (X, d) bir tam Banach değerli metrik uzaydır. $F: X\ X \to X,\ F(x,y) = (x+y)/6$ dönüşümünü gözönüne alırsak F , $k = 1/3$ için (3. 2) deki büzülme koşulunu sağlar, gerçekten

$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) = d\left(\frac{x+y}{6},\frac{u+v}{6}\right) = \frac{1}{6}d(x+y,u+v) = \frac{1}{6}[(|x+y-u-v|,|x+y-u-v|)] = \frac{1}{6}[| x-u+y-v |,| x-u+y-v |] \le \frac{1}{6}[| x-u | + | y-v |,| x-u | + | y-v |] = \frac{1}{6}\big(d(x,u)+d(y,v)\big)$.

Böylece sonuç 3. 1 den F nin bir ikili sabit noktası vardır ki o nokta $(0,0)$ dır. Eğer $F: X \times X \to X$, $F(x,y) = \frac{x+y}{2}$ şeklinde tanımlansaydı F fonksiyonu $k = 1$ için (3.2) koşulunu sağlayacaktı,

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \le \frac{1}{2}\big(d(x,u)+d(y,v)\big) \qquad (3.4)$$

$$F(1,1) = 1$$

Buradan $(0,0)$ ve $(1,1)$ noktaları F nin ikili sabit noktaları olur böylece F nin ikili sabit noktası birden fazla olacaktı, yani sonuç 3. 1 ve Teorem 3. 1 de F nin bir tek sabit noktası olması için $k < 1$ ve $k + l < 1$ koşullarının sağlanması gerekir.

Şimdi bu çalışmadaki teoremlerin ispatında kullanılan Bhaskar ve Lakshmikantham teoremlerini ifade edelim.

3. 2. Teorem

(Bhaskar ve Lakshmikantham Teoremi 1) $(X,\le)$ kısmen sıralı küme, (X,d) tam metrik uzay, $F: X \times X \to X$, X üzerinde karışık monoton özelliği olan sürekli bir dönüşüm olsun. $k \in [0,1)$ ve her $x \ge u$, $y \le v$ için

$$d\big(F(x,y),F(u,v)\big) \le \frac{k}{2}[d(x,u)+d(y,v)]$$

olsun. $x_0 \le F(x_0,y_0)$ ve $y_0 \ge F(y_0,x_0)$ olacak şekilde $x_0,y_0 \in X$ varsa, o zaman $x = F(x,y)$ ve $y = F(y,x)$ olacak şekilde $x,y \in X$ vardır.

$\dot{I}spat$

$x_0 \leq F(x_0, y_0) = x_1$ ve $y_0 \geq F(y_0, x_0) = y_1$ diyelim. $x_2 = F(x_1, y_1)$ ve $y_2 = F(y_1, x_1)$ dersek

$$F^2(x_0, y_0) = F\big(F(x_0, y_0), F(y_0, x_0)\big) = F(x_1, y_1) = x_2$$
$$F^2(y_0, x_0) = F\big(F(y_0, x_0), F(x_0, y_0)\big) = F(y_1, x_1) = y_2.$$

F nin karışık monoton özelliği olduğundan

$$x_2 = F^2(x_0, y_0) = F(x_1, y_1) \geq F(x_0, y_0) = x_1$$

ve

$$y_2 = F^2(y_0, x_0) = F(y_1, x_1) \leq F(y_0, x_0) = y_1$$

elde edilir. Böylece her $n = 1,2,3, \ldots$ için

$$x_{n+1} = F^{n+1}(x_0, y_0) = F\big(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)\big)$$

ve

$$y_{n+1} = F^{n+1}(y_0, x_0) = F\big(F^n(y_0, x_0), F^n(x_0, y_0)\big).$$

yani

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) = x_1 \leq F^2(x_0, y_0) = x_2 \leq \cdots \leq F^{n+1}(x_0, y_0) \leq \cdots$$

ve

$$y_0 \geq F(y_0, x_0) = y_1 \geq F^2(y_0, x_0) = y_2 \geq \cdots \geq F^{n+1}(y_0, x_0) \geq \cdots$$

elde edilir. İddia ediyoruz ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d\big(F^{n+1}(x_0, y_0), F^n(x_0, y_0)\big) \leq \frac{k^n}{2}[d(F(x_0, y_0), x_0) + d(F(y_0, x_0), y_0)] \quad (3.\ 5)$$

ve

$$d\big(F^{n+1}(y_0, x_0), F^n(y_0, x_0)\big) \leq \frac{k^n}{2}[d(F(y_0, x_0), y_0) + d(F(x_0, y_0), x_0)] \quad (3.\ 6)$$

$n = 1$ için $x_0 \leq F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \geq F(y_0, x_0)$ olduğundan

$$d\big(F^2(x_0,y_0),F(x_0,y_0)\big)=d\big(F(F(x_0,y_0),F(y_0,x_0)\ ),F(x_0,y_0)\big) \quad \text{(hipotezden)}$$
$$\leq \frac{k}{2}[d(d(F(x_0,y_0),x_0)+d(F(y_0,x_0),y_0)].$$

elde edilir. Benzer olarak

$$d\big(F^2(y_0,x_0),F(y_0,x_0)\big)=d\big(F(F(y_0,x_0),F(x_0,y_0)\ ),F(y_0,x_0)\big)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \frac{k}{2}[d(d(F(y_0,x_0),y_0)+d(F(x_0,y_0),x_0)].$$

(3. 5), (3. 6) ve

$F^{n+1}(x_0,y_0)\geq F^n(x_0,y_0)$

Ve

$F^{n+1}(y_0,x_0)\leq F^n(y_0,x_0)$

olduğundan

$$d\big(F^{n+2}(x_0,y_0),F^{n+1}\,(x_0,y_0)\big)$$
$$=d(F\big(F^{n+1}\,(x_0,y_0),F^{n+1}\,(y_0,x_0)\big),F(F^n\,(x_0,y_0),F^n\,(y_0,x_0)))$$
$$\leq \frac{k}{2}\big[d\big(F^{n+1}\,(x_0,y_0),F^n\,(x_0,y_0)\big)+d(F^{n+1}\,(y_0,x_0),F^n\,(y_0,x_0))\big]$$
$$\leq \frac{k^{n+1}}{2}[d(F(x_0,y_0),x_0)+d(F(y_0,x_0),y_0)].$$

elde edilir. Benzer olarak

$$d\big(F^{n+2}(y_0,x_0),F^{n+1}\,(y_0,x_0)\big)\leq \frac{k^{n+1}}{2}[d(F(y_0,x_0),y_0)+d(F(x_0,y_0),x_0)].$$

Şimdi $\{F^n(x_0,y_0)\}$ ve $\{F^n\,(y_0,x_0)\}$, X de Cauchy dizisi olduklarını gösterelim. $m>n$ olsun.

$$d\big(F^n(x_0,y_0),F^m\,(x_0,y_0)\big)\leq d\big(F^m\,(x_0,y_0),F^{m-1}\,(x_0,y_0)\big)$$
$$+\cdots+d\big(F^{n+1}\,(x_0,y_0),F^n\,(x_0,y_0)\big)$$
$$\leq \frac{(k^{m-1}+\cdots+k^n)}{2}[d(F(y_0,x_0),y_0)+\ \ d(F(x_0,y_0),x_0)].$$

$$< \frac{k^n}{2(1-k)}[d(F(y_0, x_0), y_0) + d(F(x_0, y_0), x_0)].$$

elde edilir. $k < 1$ olduğundan $\{F^n(y_0, x_0)\}$, X de Cauchy dizisidir. Benzer olarak $\{F^n(y_0, x_0)\}, X$ de Cauchy dizisidir. X tam metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x_0, y_0) = x \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} F^n(y_0, x_0) = y$$

olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. $\varepsilon > 0$ olsun. F, (x, y) de sürekli olduğundan $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ için $d(x, u) + d(y, v) < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır ve $d(F(x, y), F(u, v)) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir.

$\{F^n(x_0, y_0)\} \to x$ ve $\{F^n(y_0, x_0)\} \to y$ olduğundan, $\mu = \min\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}\right) > 0$ için n_0, m_0 vardır öyle ki $n \geq n_0$ ve $m \geq m_0$ için

$$d(F^n(x_0, y_0), x) < \mu \quad \text{ve} \quad d(F^n(y_0, x_0), y) < \mu.$$

Şimdi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq max\{n_0, m_0\}$ için

$$\begin{aligned} d(F(x, y), x) &\leq d\big(F(x, y), F^{n+1}(x_0, y_0)\big) + d(F^{n+1}(x_0, y_0), x) \\ &= d\Big(F(x, y), F\big(F^n(x_0, y_0), F^n(y_0, x_0)\big)\Big) + d(F^{n+1}(x_0, y_0), x) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \mu \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

ε keyfi olduğundan $F(x, y) = x$. Benzer olarak $F(y, x) = y$. □

3. 3. Teorem

(Bhaskar ve Lakshmikantham Teoremi 2) $(X, \leq)$ kısmen sıralı küme, (X, d) tam metrik uzay olsun. X, (i) ve (ii) koşullarını sağlasın:

(i) $\{x_n\}$ azalmayan dizisi x noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $x_n \leq x$,

(ii) $\{y_n\}$ artmayan dizisi y noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $y \le y_n$.

$F: X \times X \to X$, X üzerinde karışık monoton özelliği olan bir dönüşüm olsun. $k \in [0,1)$ ve her $x \ge u$, $y \le v$ için

$$d\big(F(x,y), F(u,v)\big) \le \frac{k}{2}[d(x,u) + d(y,v)]$$

olsun.

$x_0 \le F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \ge F(y_0, x_0)$

olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ varsa, o zaman $x = F(x,y)$ ve $y = F(y,x)$ olacak şekilde $x, y \in X$ vardır.

3. 2. İkili Sabit Nokta Teoremlerin İntegral Denkleminde Uygulaması

⍰ aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonların kümesi olsun

(i) φ sürekli ve azalmayandır,

(ii) $\varphi(t) = 0$ ancak ve ancak $t = 0$

(iii) $\forall\, t, s \in [0,\infty)$ için $\varphi(t+s) \le \varphi(t) + \varphi(s)$

Ψ aşağıdaki koşulları sağlayan ψ : $[0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonların kümesi olsun

$\forall\, r > 0$ için $\lim_{r\to t}\psi(t) > 0$ ve $\lim_{t\to 0^+}\psi(t) = 0$.

Örneğin, $\varphi_1 = kt$, $k > 0$, $\varphi_2(t) = \frac{t}{t+1}$, $\varphi_3(t) = \ln(t+1)$ ve $\varphi_4(t) = min\{t, 1\}$ fonksiyonları ⍰ ye aittir.

$\psi_1 = kt$, $k > 0$, $\psi_2 = \frac{\ln(2t+1)}{2}$ fonksiyonları ise Ψ ye aittir.

3. 4. Teorem

$(X, \le)$ bir kısmen sıralı küme, (X, d) bir tam metrik uzay ve $F: X \times X \to X$, X üzerinde karışık monoton özelliği olan bir dönüşüm olsun. $x_0,\ y_0 \in X$ ve

$x_0 \le F(x_0, y_0)$ ve $y_0 \ge F(y_0, x_0)$

olsun. Her $x, y, u, v \in X$, $x \ge u$ ve $y \le v$ için

$$\varphi\big(d(F(x,y),F(u,v))\big) \leq \frac{1}{2}\varphi\big(d(x,u)+d(y,v)\big) - \psi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2}) \quad (2.1)$$

koşulunu sağlayacak şekilde $\varphi \in \phi$ ve $\psi \in \Psi$ var olsun. Kabul edelim ki

(a) F süreklidir

veya

(b) X aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(i) $\{x_n\}$ azalmayan dizisi x noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $x_n \leq x$,

(ii) $\{y_n\}$ artmayan dizisi y noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $y \leq y_n$.

özellikleri sağlansın. O zaman $x = F(x,y)$ ve $y = F(y,x)$ olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. Yani F nin X de ikili sabit noktası vardır.

3. 2. Sonuç

$(X, \leq)$ bir kısmen sıralı küme, (X,d) bir tam metrik uzay ve $F: X \times X \to X$, X üzerinde karışık monoton özelliği olan bir dönüşüm olsun. $x_0,\ y_0 \in X$ ve

$$x_0 \leq F(x_0,y_0) \quad \text{ve} \quad y_0 \geq F(y_0,x_0)$$

olsun. Her $x, y, u, v \in X,\ x \geq u$ ve $y \leq v$ için

$$d(F(x,y),F(u,v)) \leq \frac{1}{2}\big(d(x,u)+d(y,v)\big) - \psi(\frac{d(x,u)+d(y,v)}{2})$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $\psi \in \Psi$ var olsun. Kabul edelim ki

(a) F süreklidir

veya

(b) X aşağıdaki özellikleri sağlıyor:

(i) $\{x_n\}$ azalmayan dizisi x noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $x_n \leq x$,

(ii) $\{y_n\}$ artmayan dizisi y noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $y \leq y_n$.

özellikleri sağlansın. O zaman $x = F(x,y)$ ve $y = F(y,x)$olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. Yani F nin X de ikili sabit noktası vardır

3. 3. Sonuç

$(X, \leq)$ bir kısmen sıralı küme, (X, d) bir tam metrik uzay ve $F: X \times X \to X$, X üzerinde karışık monoton özelliği olan bir dönüşüm olsun. $x_0,\ y_0 \in X$ ve

$$x_0 \leq F(x_0, y_0) \quad \text{ve} \quad y_0 \geq F(y_0, x_0)$$

olsun. Her $x, y, u, v \in X$, $x \geq u$ ve $y \leq v$ için

$$d(F(x,y), F(u,v)) \leq \frac{k}{2}[d(x,u) + d(y,v)]$$

olacak şekilde bir $k \in [0, \infty)$ var olsun. kabul edelim ki

(a) F süreklidir

veya

(b) X aşağıdaki özellikleri sağlıyor:

(i) $\{x_n\}$ azalmayan dizisi x noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $x_n \leq x$,

(ii) $\{y_n\}$ artmayan dizisi y noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $y \leq y_n$.

Özellikleri sağlansın. O zaman $x = F(x,y)$ ve $y = F(y,x)$olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. Yani F nin X de ikili sabit noktası vardır

Şimdi ikili sabit noktaların tek olduklarını gösterelim

3.5. Teorem

Teorem (3. 4) in hipotezinde her $(x,y), (z,t) \in X \times X$ için (x,y) ve (z,t) ile kıyaslanacak şekilde bir $(u,v) \in X \times X$ var olsun. O zaman F nin bir tek ikili sabit noktası vardır.

3. 4. Sonuç

Sonuç 3. 2 nin hipotezinde $X \times X$ de ki her (x,y) ve (z,t) için (x,y) ve (z,t) ile kıyaslanabilir bir $(u,v) \in X \times X$ varsa o zaman F nin bir tek ikili sabit noktası vardır.

3. 6. Teorem

Teorem 3. 4 de x_0 ve y_0 kıyaslanabilir ise zaman F nin sabit noktası vardır.

3. 5. Sonuç

Sonuç 3. 2 nin hipotezinde x_0 ve y_0 kıyaslanabilir ise zaman F nin sabit noktası vardır.
Şimdi yukarıdaki teoremler ve sonuçların bir integral denkleminin çözümünde kullanımını görelim.

Nguyen Van Luong ve Nguyen Xuan Thuan yukarıdaki teoremleri kullanarak aşağıdaki integral denklemini çözmüşlerdir.

Ɵ , aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $\theta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarını göstersin

(i) θ artandır.

(ii) Bir $\psi \in \boldsymbol{\Psi}$ vardır öyle ki her $x \in [0, \infty)$ için
$\theta(x) = \frac{x}{2} - \psi(\frac{x}{2})$.

Örneğin $0 \leq k < \frac{1}{2}$ iken $\theta_1(x) = kx$, $\theta_2(x) = \frac{x^2}{2(x+1)}$ ve $\theta_3(x) = \frac{x}{2} - \frac{\ln(x+1)}{2}$ fonksiyonları Ɵ fonksiyonlardır. Aşağıdaki integral denklemini göz önüne alalım. $t \in I = [a, b]$ için

$$x(t) = \int_a^b \big(k_1(t,s) + k_2(t,s)\big)\Big(f\big(s, x(s)\big) + g\big(s, x(s)\big)\Big)\, ds + h(t) \qquad (3.7)$$

integral denklemi 3.1. Varsayımı sağlasın.

3. 1. Varsayım

(i) $k_1(s,t) \geq 0$ ve her $t, s \in [a, b]$ için $k_2(s,t) \leq 0$.

(ii) Bir λ , $\mu > 0$ ve $\theta \in$ vardır öyle ki her $x, y \in \mathbb{R}$, $x \geq y$ için
$0 \leq f(t,x) - f(t,y) \leq \lambda\theta(x - y)$

ve

$$-\mu\theta(x-y) \leq g(t,x) - g(t,y) \leq 0$$

(iii) $\quad \max\{\lambda,\mu\} sup_{t\in I} \int_a^b (k_1(t,s) - k_2(t,s))ds \leq \frac{1}{2}$.

3. 1. Tanım

Her $t \in [a,b]$ için $\alpha(t) \leq \beta(t)$,

$$\alpha(t) \leq \int_a^b k_1(t,s)(f(s,\alpha(s)) + g(s,\beta(s)))ds$$
$$+ \int_a^b k_2(t,s)(f(s,\beta(s)) + g(s,\alpha(s)))ds + h(t)$$

ve

$$\beta(t) \geq \int_a^b k_1(t,s)(f(s,\beta(s)) + g(s,\alpha(s)))ds$$
$$+ \int_a^b k_2(t,s)(f(s,\alpha(s)) + g(s,\beta(s)))ds + h(t)$$

oluyorsa, $(\alpha,\beta) \in C(I,\mathbb{R}) \times C(I,\mathbb{R})$ elemanı (3.7) integral denkleminin ikili alt ve üst çözümüdür denir.

3. 7. Teorem

(3. 7) integral denkleminde $k_1, k_2 \in C(I \times I,\mathbb{R})$, $f, g \in C(I \times \mathbb{R},\mathbb{R})$ ve $h \in C(I,\mathbb{R})$ olsun ve varsayım (3. 1) sağlansın. (3.7) denkleminin ikili alt ve üst çözümü varsa , (3. 7) denkleminin $C(I, \mathbb{R})$ de bir tek çözümü vardır.

İ$spat$

$X = C(I, \mathbb{R})$ olsun ve X üzerinde her $t \in [a,b]$ için

$x, y \in C(I, \mathbb{R})$, $\quad x \leq y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t)$

ilişkisini tanımlayalım. (X,d) bir tam metrik uzay ve

$d(x,y) = sup_{t\in I}|x(t) - y(t)|$, $\qquad \forall\, x, y \in C(I, \mathbb{R})$.

olsun. $\{u_n\}$,X de bir monoton azalmayan dizi olsun ve $u \in X$ noktasına yakınsasın. O zaman her $t \in I$ için reel değerli

$$u_1(t) \leq u_2(t) \leq \cdots \leq u_n(t) \leq \cdots$$

dizisi, $u(t)$ ye yakınsıyor. Bu nedenle her $t \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $u_n(t) \leq u(t)$ dir. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \leq u$ dir.

Benzer olarak $\{v_n\}$, X de bir monoton artmayan dizi $v \in X$ e yakınsasın ve her $t \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $v(t) \leq v_n(t)$ dir.

Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $v_n \leq v$ dir. Böylece sonuç (3. 2) deki (b) şartı sağlanır.

Ayrıca $X \times X = C(I, \mathbb{R}) \times C(I, \mathbb{R})$ kısmen sıralı bir kümedir böylece her $t \in I$ için

$$(x, y), (u, v) \in X \times X, \ (x, y) \leq (u, v) \Leftrightarrow x(t) \leq u(t) \text{ ve } y(t) \geq v(t)$$

sağlanır. Her $x, y \in X$ için maks$\{x(t), y(t)\}$ ve min$\{x(t), y(t)\}$ sırasıyla her $t \in I$ için X de üst ve alt sınırlar olsun. O zaman her $(x, y), (u, v) \in X \times X$ için bir (max$\{x(t), y(t)\}, \min\{x(t), y(t)\}) \in X \times X$ vardır öyle ki (x, y) ve (u, v) ile kıyaslanabilirdir. Her $t \in [a, b]$ için

$$F: X \times X \to X$$

$$F(x, y)(t) = \int_a^b k_1(t, s)(f(s, x(s)) + g(s, y(s)))ds$$
$$+ \int_a^b k_2(t, s)(f(s, y(s)) + g(s, x(s)))ds + h(t)$$

tanımlayalım.

Şimdi F nin karışık monoton özelliği olduğunu gösterelim. Her $x_1 \leq x_2$ ve her $t \in [a, b]$ için $x_1(t) \leq x_2(t)$ olduğunu biliyoruz. Şimdi varsayım (3. 1) de f ve g nin özelliklerinden

$$\begin{aligned} F(x_1, y)(t) - F(x_2, y)(t) &= \int_a^b k_1(t, s)(f(s, x_1(s)) + g(s, y(s)))ds \\ &+ \int_a^b k_2(t, s)(f(s, y(s)) + g(s, x_1(s)))ds + h(t) \\ &- \int_a^b k_1(t, s)\ (f(s, x_2(s)) + g(s, y(s)))ds \\ &- \int_a^b k_2(t, s)(f(s, y(s)) + g(s, x_2(s)))ds - h(t) \\ &= \int_a^b k_1(t, s)(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s)))ds \\ &+ \int_a^b k_2(t, s)(\ g\big(s, x_1(s)\big) - g(s, x_2(s)))ds \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $t \in [a, b]$ için $F(x_1, y)(t) \leq F(x_2, y)(t)$ dır . Yani $F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$ dir.

Benzer olarak $y_1 \geq y_2$ ise o zaman $t \in [a,b]$ için $y_1(t) \geq y_2(t)$ dir. Şimdi varsayım (3. 1) de f ve g nin özelliklerinden

$$F(x,y_1)(t) - F(x,y_2)(t) = \int_a^b k_1(t,s)(f(s,x(s)) + g(s,y_1(s)))ds$$

$$+ \int_a^b k_2(t,s)(f(s,y_1(s)) + g(s,x(s)))ds + h(t)$$

$$- \int_a^b k_1(t,s)(f(s,x(s)) + g(s,y_2(s)))ds$$

$$- \int_a^b k_2(t,s)(f(s,y_2(s)) + g(s,x(s)))ds - h(t)$$

$$= \int_a^b k_1(t,s)(g(s,y_1(s)) - g(s,y_2(s)))ds$$

$$+ \int_a^b k_2(t,s)(f(s,y_1(s)) - f(s\,,y_2(s)))ds \leq 0$$

elde edilir. Böylece her $t \in [a,b]$ için $F(x,y_1)(t) \leq F(x,y_2)(t)$ dir. Dolayısıyla $F(x,y_1) \leq F(x,y_2)$ dir, yani $F(x,y)\,, x$ de azalmayan ve y de artmayandır.

Şimdi her $x \geq u\,, y \leq v$, yani $t \in [a,b]$ olmak üzere her $x(t) \geq u(t)$ ve $y(t) \leq v(t)$ için

$$d(F(x,y), F(u,v) = sup_{t\in I}|F(x,y)(t) - F(u,v)(t)|$$

$$= sup_{t\in I}\,|\, \int_a^b k_1(t,s)\left(f\big(s,x(s)\big) + g\big(s,y(s)\big)\right)ds$$

$$+ \int_a^b k_2(t,s)\left(f\big(s,y(s)\big) + g\big(s,x(s)\big)\right)ds + h(t)$$

$$- \int_a^b k_1(t,s)f\big(s,\ u(s)\big) + g(s,v(s)))ds$$

$$+ \int_a^b k_2(t,s)f\big(s,v(s)\big) + g(s,u(s)))ds - h(t)\,|$$

$$= sup_{t\in I}\,|\, \int_a^b k_1(t,s)\left[\left(f\big(s,x(s)\big) - f\big(s,u(s)\big) + g\big(s,y(s)\big) - g\big(s,v(s)\big)\right)\right]ds$$

$$+ \int_a^b k_2(t,s)\left[\left(f\big(s,y(s)\big) - f\big(s,v(s)\big) + g\big(s,x(s)\big) - g\big(s,u(s)\big)\right)\right]ds\,|$$

$$= sup_{t\in I}\,|\, \int_a^b k_1(t,s)\big[\big(f\big(s,x(s)\big) - f\big(s,u(s)\big) - g\big(s,v(s)\big) - g\big(s,y(s)\big)\big)\big]ds$$

$$- \int_a^b k_2(t,s)\big[(f\big(s,v(s)\big) - f\big(s,y(s)\big) - g\big(s,x(s)\big) - g(s,u(s)))\big]ds\,|$$

$$\leq sup_{t\in I}\,|\, \int_a^b k_1(t,s)\big[\lambda\theta\big(x(s) - u(s)\big) + \mu\theta\big(v(s) - y(s)\big)\big]ds$$

$$- \int_a^b k_2(t,s)\big[\lambda\theta\big(v(s) - y(s)\big) + \mu\theta(x(s) - u(s))\big]ds\,|$$

$$\leq maks\{\lambda,\mu\}sup_{t\in I}\int_a^b\big(k_1(t,s) - k_2(t,s)\big)\big[\theta\big(x(s) - u(s)\big) + \theta\big(v(s) - y(s)\big)\big]ds$$

elde edilir. θ artan bir fonksiyon ve $x \geq y$ ve $y \leq v$ olduğundan her $s \in [a,b]$ için $\theta\big(x(s)-u(s)\big) \leq \theta(d(x,u),\ \theta(v(s)-y(s)) \leq \theta(d(v,y))$ dir. Böylece

$$d(F(x,y),F(u,v)) \leq maks\{\lambda\,,\mu\} sup_{t\in I} \int_a^b (k_1(t,s)-k_2(t,s))$$
$$\times \left[\theta\big(x(s)-u(s)\big)+\theta(v(s)-y(s))\right]ds$$
$$\leq maks\{\lambda\,,\mu\}.\left[\theta\big(d(x,u)\big)+\theta(d(v,y))\right].sup_{t\in I}\int_a^b(k_1(t,s)$$
$$-k_2(t,s))ds$$
$$\leq \frac{1}{2}\Big(\theta\big(d(x,u)+d(v,y)\big)\Big)$$
$$\leq \theta(d(x,u)+d(v,y))$$
$$= \frac{d(x,u)+d(v,y)}{2} - \psi(\frac{d(x,u)+d(v,y)}{2})$$

olur. Böylece her $x \geq y$ ve $y \leq v$ için

$$d(F(x,y),F(u,v)) \leq \frac{d(x,u)+d(v,y)}{2} - \psi(\frac{d(x,u)+d(v,y)}{2}$$

olur. Şimdi (α,β) (3. 7) integral denkleminin ikili alt ve üst çözümü olsun. O zaman her $t \in I$ için $\alpha(t) \leq F(\alpha,\beta)$, $\beta(t) \geq F(\alpha,\beta)$dır, yani $\alpha \leq F(\alpha,\beta)$ ve $\beta \geq F(\alpha,\beta)$ dır. Sonuç olarak sonuç (3. 2) ve sonuç (3. 4) den $(x,y), F$ nin bir tek ikili sabit noktasıdır. $\alpha \leq \beta$ olduğundan sonuç (3. 5) in hipotezi sağlanır, yani $t \in I$ için $x(t) = y(t)$ dir. Böylece $x = F(x,x)$ ve $x(t)$ bir (3. 7) integral denkleminin bir tek çözümüdür. □

4. Kısmi Banach Değerli Metrik Uzayda İkili Sabit Nokta Teoremleri

4. 1. Kısmi Banach Değerli Metrik Uzayda Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, kısmi Banach değerli metrik uzaylarda bazı temel tanımlar, örnekler ve teoremlere yer verilecektir.

4. 1. Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $p: X \times X \to \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(p1) $x = y$ ancak ve ancak $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$;

(p2) $0 \leq p(x,x) \leq p(x,y)$;

(p3) $p(x,y) = p(y,x)$;

(p4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$

koşuları sağlanıyorsa p ye bir kısmi metrik denir. Bu tanımda $\mathbb{R}$ yerine E Banach uzayı yazılmış olsaydı (X,p) ikilisi Banach değerli kısmi metrik uzayı olacaktı.

$X \neq \emptyset$ ve p kısmi Banach değerli metrik olmak üzere (X,p) ikilisine kısmi Banach değerli metrik uzay denir.

$p(x,y) = 0$ ise o zaman (p1), (p2) ve (p3) den $x = y$ elde edilir, fakat $x = y$ ise o zaman $p(x,y)$, 0 dan farklı olabilir.

Her metrik uzay kısmi metrik uzaydır, fakat her kısmi metrik uzay metrik uzay olmayabilir.

4. 1. Örnek

$E = \mathbb{R}^2$, $P = \{(x,y) \in E:\ x,y \geq 0\}$, $X = \mathbb{R}^+$ ve $p: X \times X \to E$, $p(x,y)$ =(maks$\{x,y\}$, αmaks$\{x,y\}$) ve $\alpha \geq 0$ olsun. (X,p) kısmi Banach değerli metrik uzay olduğunu gösterelim.

1) $x = y$ ancak ve ancak $p(x,x) = p(x,y) = p(y,x)$ durumunu inceleyelim.

$$p(x,x) = (\text{maks}\{x,x\}, \alpha\text{maks}\{x,x\}) = (x, \alpha x)$$
$$= p(x,y) = (\text{maks}\{x,y\}, \alpha\text{maks}\{x,y\})$$
$$= p(y,y) = (\text{maks}\{y,y\}, \alpha\text{maks}\{y,y\})$$

ancak ve ancak $x = y$;

2) $0 \leq p(x,x) \leq p(x,y)$ durumunu inceleyelim.

$0 \leq \rho(x,x) = (x, \alpha x) \leq (\text{maks}\{x,y\}, \alpha\text{maks}\{x,y\}) = p(x,y)$ dir;

3) $p(x,y) = p(y,x)$ durumunu inceleyelim.

$p(x,y)$ =(maks$\{x,y\}$, αmaks$\{x,y\}$)=(maks$\{y,x\}$, αmaks$\{y,x\}$)= $p(y,x)$ dir;

4) $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) - p(z,z)$ durumunu inceleyelim.

$x \leq y \leq z$ ise

$p(x,z) = (\text{maks}\{x,z\}, \alpha\text{maks}\{x,z\}) = (z, \alpha z)$

$p(x,y)$ =(maks$\{x,y\}$, αmaks$\{x,y\}$)= $(y, \alpha y)$

$p(y,z) = (\text{maks}\{y,z\}, \alpha\text{maks}\{y,z\}) = (\text{z}, \alpha z)$

$p(z,z) = (\text{maks}\{z,z\}, \alpha\text{maks}\{z,z\}) = (\text{z}, \alpha z)$

şimdi

$(y, \alpha y) \leq (z, \alpha z) + (\text{z}, \alpha z) - (z, \alpha z)$ dır. Diğer durumlarda benzer olarak gösterilir. Şimdi (X,p) nin kısmi Banach değerli metrik uzay olmadığını gösterelim.

Banach değerli metrik uzayın (1) şartına göre $\forall\ x,y \epsilon X$ için $0 \leq p(x,y)$ ve $p(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$ olmalıdır fakat X de $x = y$ ise $p(x,y)$ sıfırdan farklı olabilir.

4. 2. Tanım

(X, p) bir kısmi metrik uzay, $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. p kısmi metrik uzay için sırayla açık ve kapalı komşuluklar

$B_\varepsilon(x) = \{y \in X\colon\ p(x, y) < \varepsilon\}$, $\bar{B}_\varepsilon(x) = \{y \in X\colon\ p(x, y) \leq \varepsilon\}$

ile tanımlanır.

4. 1. Lemma

(X, p) kısmi metrik uzayda, her $x \in X$ için $B_{p(x,x)}(x)$ açık komşuluğu boştur.

$\text{İ}spat$

Komşuluk tanımından $B_{p(x,x)}(x) = \{y \in X\colon\ p(x, y) < p(x, x)\}$ dir. Kısmi metrik uzay tanımına göre her $x, y \in X$ için $p(x, x) \leq p(x, y)$ olduğundan $B_{p(x,x)}(x)$ açık komşuluğu boştur.

4. 2. Örnek

$p\colon \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^+$, her $x, y \in \mathbb{R}^-$ için, $p(x, y) = -\min\{x, y\}$, ile tanımlanan bir fonksiyon olsun. $(\mathbb{R}^-, p)$ bir kısmi metrik uzaydır. Her $x, y, z \in \mathbb{R}^-$ için

(p1) $p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$ ise, o zaman $-x = -y$ dir. Böylece $x = y$ dir.

(p2) $\min\{x, y\} \leq x$, dolayısıyla $p(x, y) \geq p(x, x) = -x$.

(p3) $p(x, y) = p(y, x)$ olduğu aşikardır.

(p4) $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(z, z)$ ipatlamak için

$\min\{x, z\} \geq \min\{x, y\} + \min\{y, z\} - \min\{z, z\}$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \leq y \leq z$ durumunda

$x = \min\{x, z\} \geq x + y - z$ olduğu aşikardır. Diğer durumlarda benzer olarak gösterilir.

Şimdi tanımladığımız kısmi metrik uzayın açık komşuluğunu inceleyelim.

$B_\varepsilon(x) = \{y \in X: -\min\{x, y\} < \varepsilon\} = (-\varepsilon, 0)$ ve $x \geq -\varepsilon$ dur. Çünkü $x < -\varepsilon$ olduğunu kabul edersek, o zaman $p(x, x) = -x > \varepsilon$ ve $B_\varepsilon(x)$ boş küme oluyor. $y \in B_\varepsilon(x)$ olsun. O zaman $-\min\{x, y\} < \varepsilon$ ve dolayısıyla $\min\{x, y\} > -\varepsilon$ elde edilir, yani $y > -\varepsilon$.

4. 3. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $|.|$ bir ağırlık olsun. Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq |x| - |y|$ oluyorsa $(X, d, |.|)$ üçlüsüne ağırlıklı metrik uzay denir.

4. 2. Lemma

$(X, d, |.|)$ ağırlıklı metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(x, y) = \frac{d(x, y) + |x| + |y|}{2}$$

tanımlayalım. O zaman $p(x, y)$ kısmi metrik uzaydır ve $= p(x, x) = |x|$dir.

4. 3. Lemma

$p(x, y)$ kısmi metrik uzay olsun.

$$d(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

$$p(x, x) = |x|$$

diyelim. O zaman $(X, d, |.|)$ ağırlıklı metrik uzaydır.

4. 4. Tanım

q, X de bir yarı metrik ve $|.|$ bir ağırlık olsun. Her $x, y \in X$ için

$$|x| + q(x, y) = |y| + q(y, x)$$

oluyorsa $(X, q, |.|)$ üçlüsüne ağırlıklı yarı metrik uzay denir.

4. 4. Lemma

$(X, q, |.|)$ ağırlıklı yarı metrik uzay olsun. Her $x, y \in X$ için

$$p(x, y) = |x| + q(x, y)$$

tanımlayalım. O zaman $p(x, y)$ kısmi metrik uzaydır ve $= p(x, x) = |x|$ dir.

İ$spat$

(p1→) Aşikardır.

(p1←) $\forall\, x, y \in X,\ p(x, x) = p(x, y) = p(y, y)$

$\Rightarrow |x| = q(x, y) + |x| = |y|$

$\Rightarrow \quad |x| = q(x, y) + |x| = q(y, x) + |y| = |y|$

$\Rightarrow q(x, y) = q(y, x) = 0$

$\Rightarrow x = y,$

(p2) $\forall\, x, y \in X,\ 0 \leq q(x, y)$

$\Rightarrow \forall\, x, y \in X,\ |x| \leq q(x, y) + |x|$

$\Rightarrow \forall\, x, y \in X,\ p(x, x) \leq p(x, y),$

(p3) $\forall\, x, y \in X,\ q(x, y) + |x| = q(y, x) + |y|$

$\Rightarrow \forall\, x, y \in X,\ p(y, x) = p(x, y),$

(p4) $\forall\, x, y, z \in X,\ q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z)$

$\Rightarrow \forall\, x, y, z \in X,\ q(x, z) + |x| \leq q(x, y) + |x| + (q(y, z) + |y|) - |y|$

$\Rightarrow \forall\, x, y, z \in X,\ p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z) - p(y, y).$

4. 5. Lemma

$p(x, y)$ kısmi metrik uzay olsun.

$$q(x, y) = p(x, y) - p(x, x)$$

$$p(x, x) = |x|$$

diyelim. O zaman $(X, q, |.|)$ ağırlıklı yarı metrik uzaydır.

4. 5. Tanım

X boştan farklı bir küme, τ, X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir altkümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir topoloji denir.

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) Her $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau$ için $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,

(iii) Her $\{A_i\}_{i\in I} \subset \tau$ için $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau$ dır.

τ nun elemanlarına X in açık altkümeleri, (X,τ) ikilisine topolojik uzay denir.

4. 6. Tanım

(X,τ) topolojik uzay ve $\beta \subseteq \tau$ olsun. Her $T \in \tau$ ve $x \in T$ için $x \in B \subseteq T$ olacak şekilde bir $B \in \beta$ varsa β kümesine τ topolojisinin bir tabanı denir.

4. 6. Lemma

(X,p) kısmi metrik uzayda, açık komşulukların kümesi, X üzerinde bir τ topolojisi için bir tabandır. Bu topolojiye kısmi metrik topoloji denir ve $\boldsymbol{\tau}[p]$ ile gösterilir. Ayrıca bu topoloji ayrıktır.

İspat

$x \in B_{p(x,x)+1}$ olduğundan, $X = \bigcup_{x\in X} B_{p(x,x)+1}(x)$ aşikardır. $B_\varepsilon(x)$ ve $B_\delta(y)$, (X,p) de iki komşuluk ve $z \in B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$ olsun.

$\mu = p(z,z) + \min\{\varepsilon - p(x,z),\ \delta - p(y,z)\}$

diyelim. $\varepsilon - p(x,z) > 0$ ve $\delta - p(y,z) > 0$ olduğundan $p(z,z) < \mu$ ve $z \in B_\mu(z)$ elde edilir.

$\acute{z} \in B_\mu(z)$ alalım. $\acute{z} \in B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$ olduğunu gösterelim. (p4) den

$$\begin{aligned} p(x,\acute{z}) &\leq p(x,z) + p(z,\acute{z}) - p(z,z) \\ &< \mu - p(z,z) + p(x,z) \\ &\leq \varepsilon - p(x,z) + p(x,z) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\acute{z} \in B_\varepsilon(x)$ dır. Benzer olarak

$$p(y,\acute{z}) \leq p(y,z) + p(z,\acute{z}) - p(z,z)$$
$$\ldots\ldots < \mu - p(z,z) + p(y,z)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \delta - p(y,z) + p(y,z) = \delta.$$

$\acute{z} \in B_\delta(y)$ dır. Sonuç olarak $\acute{z} \in B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$ dir. Dolayısıyla $B_\mu(z) \subset B_\varepsilon(x) \cap B_\delta(y)$.

Böylece (X,p) kısmi metrik uzayda, açık komşuluklar kümesi X üzerinde bir topoloji için bir tabandır.

$\tau[p]$ nin ayrık topoloji olduğunu gösterelim. $x,y \in X$ iki ayrık nokta olsun. $p(x,x) < p(x,y)$ dir. $\varepsilon = {(p(x,y) + p(x,x))}/_2 > 0$ alırsak $x \in B_\varepsilon(x)$ ve $y \notin B_\varepsilon(x)$ elde edilir.

4. 7. Lemma

Her p kısmi metrik, $B_\varepsilon(a)$ açık komşuluğu ve $x \in B_\varepsilon(a)$ için, $x \in B_\delta(x) \subseteq B_\varepsilon(a)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

İ$spat$

$x \in B_\varepsilon(a)$ olduğundan $p(x,a) < \varepsilon$ olduğunu görüyoruz. $\delta = \varepsilon - p(x,a) + p(x,x)$ alalım. $p(x,a) < \varepsilon$ olduğundan $\delta > 0$ dır. Ayrıca $p(x,a) < \varepsilon$ olduğundan $p(x,x) < \delta$ elde edilir. Böylece $x \in B_\delta(x)$ dır. $y \in B_\delta(x)$ alalım. O zaman

$$p(x,y) < \delta \Longrightarrow$$
$$p(x,y) < \varepsilon - p(x,a) + p(x,x) \Longrightarrow$$
$$p(x,y) + p(x,a) - p(x,x) < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$p(y,a) < \varepsilon \Longrightarrow$$
$$y \in B_\varepsilon(a).$$

Böylece $B_\delta(x) \subseteq B_\varepsilon(a)$ dır.

4. 8. Lemma

(X,p) bir kısmi metrik uzay olsun. $d_p: X \times X \to \mathbb{R}^+$, $d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon X üzerinde bir kısmi yarı metriktir ve $\tau_p = \tau_{d_p}$ dir.

İ$spat$

$x, y \in X$ alalım. $p(x,x) \leq p(x,y)$ olduğundan $0 \leq d_p(x,y)$ dır. Şimdi d_p nin X üzerinde bir yarı metrik olduğunu gösterelim. $x,y,z \in X$ olsun. Eğer $x = y$ ise, o zaman $d_p(x,y) = d_p(y,x) = 0$ olduğunu görüyoruz. Eğer $d_p(x,y) = d_p(y,x) = 0$ ise, o zaman $p(x,y) - p(x,x) = p(y,x) - p(y,y) = 0$ dır. Böylece $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$ elde edilir ve kısmi metrik tanımından $x = y$ olduğunu görüyoruz.
Şimdi $\tau_p = \tau_{d_p}$ olduğunu gösterelim. $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $y \in B_{d_p}(x,\varepsilon)$ olsun. O zaman $d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x) < \varepsilon$ dır. Böylece $p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon$ ve $y \in B_p(x,\varepsilon)$ dır. O zaman $\tau_p \supseteq \tau_{d_p}$ dır.
$y \in B_p(x,\varepsilon)$ alırsak $p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon$ olduğu aşikardır. O zaman $d_p(x,y) = p(x,y) - p(x,x) < \varepsilon$ ve $y \in B_{d_p}(x,\varepsilon)$ olduğunu görüyoruz. Böylece $\tau_p \subseteq \tau_{d_p}$dır. Sonuç olarak $\tau_p = \tau_{d_p}$ dır. □

4. 7. Tanım

(X,p) kısmi metrik uzayda $\{x_n\}$ dizisini alalım. $x \in X$ olsun. Eğer
$\forall\, \varepsilon > 0$ ve $x \in B_\varepsilon(x)$ için $\exists\, N \geq 1 \ni n \geq N$ için $x_n \in B_\varepsilon(x)$,
ise, o zaman $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

4. 1. Önerme

(X,p) kısmi metrik uzayında $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsıyor ancak ve ancak $p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n\,, x)$.

$\text{İ}spat$

$x_n \to x$ olsun. O zaman her $\varepsilon > 0$ için bir $N \geq 1$ vardır öyle ki her $n \geq N$ için $x_n \in B_\varepsilon(x)$. Yani $0 \leq p(x_n, x) < \varepsilon$ dur. Kısmi metrik tanımından $p(x,x) \leq p(x_n, x) < \varepsilon < p(x,x) + \varepsilon$ dur. Böylece $0 \leq p(x_n, x) - p(x,x) < \varepsilon$ elde edilir. $n \to +\infty$ iken $0 \leq \lim_{n\to+\infty} p(x_n, x) - p(x,x) < \varepsilon$ ve ε keyfi olduğundan $\lim_{n\to+\infty} p(x_n, x) = p(x,x)$ elde edilir.
Şimdi $\lim_{n\to+\infty} p(x_n, x) = p(x,x)$ olduğunu varsayalım. O zaman her $\varepsilon_1 > 0$ için bir $N \geq 1$ vardır öyle ki her $n \geq N$ için $p(x_n, x) < p(x,x) + \varepsilon_1$ dır. $\varepsilon > 0$ olsun, $\varepsilon_1 = \varepsilon - p(x,x)$ alalım. O zaman $x_n \in B_\varepsilon(x)$ dir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için bir $N \geq 1$ vardır öyle ki her $n \geq N$ için $x_n \in B_\varepsilon(x)$ dır, yani $x_n \to x$.

4. 1. Teorem

$\{x_n\}$, (X,p) kısmi metrik uzay üzerinde bir dizi olsun. $x_n \to x \in X$ ve $p(x,y) = p(y,y)$ oluyorsa o zaman y, $\{x_n\}$ dizisinin limit noktasıdır.

$\text{İ}spat$

$x_n \to x \in X$ ve $p(x,y) = p(y,y)$ olsun. Her $c \in \text{int}\, P$ için bir N vardır öyle ki her $n > N$ için

$$p(x_n, y) \leq p(x_n, x) + p(x,y) - p(x,x) \ll c + p(y,y)$$

elde edilir, böylece $x_n \to y$. □

4. 8. Tanım

(X, p) bir metrik uzay olsun;

(i) $\lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ varsa $\{x_n\}$ dizisi (X, p) kısmi metrik uzayında bir Cauchy dizisidir.

(ii) Eğer X de her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsıyorsa ve $p(x, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m)$ ise o zaman (X, p) metrik uzayı tamdır denir.

(iii) $F: X \to X$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $F\left(B_p(x_0, \delta)\right) \subseteq B_p(Fx_0, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa o zaman F, x_0 noktasında süreklidir.

(X, p) bir kısmi metrik uzay olsun.

$$p^s: X \times X \to \mathbb{R}^+$$
$$p^s(x, y) = 2p(x, y) - p(x, x) - p(y, y)$$

fonksiyonu X üzerinde bir metriktir.

4. 2. Önerme

(X, p) kısmi metrik uzay olsun.

(a) $\{x_n\}$ dizisi (X, p) de Cauchy dizisidir ancak ve ancak $\{x_n\}$ dizisi (X, p^s) de Cauchy dizisi ise.

(b) (X, p) kısmi metrik uzayı tamdır ancak ve ancak (X, p^s) uzayı tamdır. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} p^s(x_n, x) = 0$ ancak ve ancak $p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_m)$.

4. 9. Lemma

$\lim_{n\to\infty} p^s(x_n, x) = 0 \Leftrightarrow p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_n)$.

$\dot{\mathrm{I}}spat$

$\lim_{n\to\infty} p^s(x_n\,, x) = 0$
$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} 2p(x_n, x) - p(x_n, x_n) - p(x, x) = 0$
$\Leftrightarrow (\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) - \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)) + (\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) - \lim_{n\to\infty} p(x, x)) = 0$
$\Leftrightarrow p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n\,, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n\,, x_n)$.□

4. 3. Önerme

(X, p) kısmen sıralı bir kısmi metrik uzayı ve $T\colon X \to X$ bir dönüşüm olsun. T, $x_0 \in X$ noktasında süreklidir eğer X de ki her $\{x_n\}$ dizisi için

(a) (X, p) de x_n, x_0 noktasına yakınsıyorsa (X, p) de Tx_n, Tx_0 noktasına yakınsıyor.

(b) (X, p) de x_n, x_0 noktasına düzgün yakınsıyorsa (X, p) de Tx_n, Tx_0 noktasına düzgün yakınsıyor.

Eğer T her $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise T, X de süreklidir denir.

4. 9. Tanım

(X_1, p_1) ve (X_2, p_2) iki kısmi metrik uzay ve $\tau(p_1)$ ve $\tau(p_2)$ sırayla bu uzayların ürettiği topolojiler olsun. Eğer $T\colon (X_1, \tau(p_1)) \to (X_2, \tau(p_2))$ ve $T\colon (X_1, \tau({p_1}^s)) \to \left(X_2, \tau({p_2}^s)\right)$ dönüşümleri sürekli ise o zaman $T\colon (X_1, p_1) \to (X_2, p_2)$ süreklidir.

4. 10. Tanım

$(X, \leq)$ kısmen sıralı küme ve $f\colon X \to X$ olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $x \leq y$ için $fx \leq fy$ oluyorsa, f ye monoton azalmayandır denir.

4. 11. Tanım

(X,p) bir kısmi metrik uzay ve $F: X \to X$ bir dönüşüm olsun. $c \in [0,1)$ olmak üzere her $x,y \in X$ için
$p\big(F(x),F(y)\big) \leq cp(x,y)$
oluyorsa F dönüşümü bir büzülmedir denir.

4. 2. Teorem (Matthews)

(X,p) tam kısmi metrik uzay üzerindeki her F büzülmesi için $F(x) = x$ olacak şekilde bir tek $x \in X$ sabit noktası vardır ayrıca $p(x,x) = 0$ dır.

4. 3. Teorem

(X,p) bir tam kısmi metrik uzay, P, K sabitli bir normal kon olsun. $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun ve her $x,y \in X$ için $c \in (0,1)$ olmak üzere
$p(Tx,Ty) \leq cp(x,y)$
sağlansın. O zaman T nin X de bir tek sabit noktası var ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ itarsyon dizisi bir sabit noktaya yakınsıyor.

$\dot{\text{I}}spat$

$x_0 \in X$ alalım. $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1 = T^2x_0$, …, $x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$, … dizisini tanımlayalım. Her $m,n,\ m > n$ için kısmi metrik uzay tanımının (4) şıkkından

$$\begin{aligned} p(x_m,x_n) &\leq p(x_m,x_{m-1}) + p(x_{m-1},x_{m-2}) + \cdots + p(x_{n+2},x_{n+1}) + p(x_{n+1},x_n) \\ &\quad - \textstyle\sum_{k=1}^{m-n-1} p(x_{m-k},x_{m-k}) \\ &\leq (c^{m-1} + c^{m-2} + \cdots + c^n)p(x_1,x_0) \\ &= c^n \tfrac{1-c^{m-n}}{1-c} p(x_1,x_0) \leq c^n \tfrac{1}{1-c} p(x_1,x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. P, K sabitli bir normal kon olduğundan

$$\|p(x_m, x_n)\| \le c^n K \frac{1}{1-c} \|p(x_1, x_0)\|$$

elde edilir. Böylece (X,p) de $(T^n x)$ bir Cauchy dizisidir öyleki (X,p) de $\lim_{n,m\to\infty} p(T^m x_0, T^n x_0) = 0$ dır ve (X,p) tam uzay olduğundan $(T^n x_0)$ bir $x \in X$ noktasına yakınsıyor.

$$\lim_{n,m\to\infty} p(T^m x_0, T^n x_0) = p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(T^n x_0, x) =$$
$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, T^n x_0) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$$

dır. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} p(Tx,x) &\le p(Tx, T^{n+1}x_0) + p(T^{n+1}x_0, x) - p(T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_0) \\ &\le cp(x, T^n x_0) + p(T^{n+1}x_0, x) \end{aligned}$$

ve

$$\|p(Tx,x)\| \le Kc\|p(x, T^n x_0)\| + \|p(T^{n+1}x_0, x)\| \to 0$$

elde edilir. Böylece $p(Tx,x) = 0$ dır. Fakat $0 \le p(Tx,Tx) \le cp(x,x) = 0$ olduğundan

$$p(Tx,Tx) = p(Tx,x) = p(x,x) = 0$$

kısmi metrik uzay tanımının (1) şıkkından $Tx = x$ olur. y, T nin başka bir sabit noktası olsun. O zaman

$$p(x,y) = p(Tx,Ty) \le cp(x,y)$$

ve $c < 1$ olduğundan $p(x,y) = 0$ olmalıdır, diğer yandan y ve x, $p(x,x) = p(Tx,x) = 0$ ve $p(y,y) = p(Ty,y) = 0$ dır, dolayısıyla $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$ dir. Böylece $x = y$ dir. □

4. 4. Teorem

(X,p) bir tam kısmi Banach değerli metrik uzay, P, K sabitli bir normal kon ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için $k \in (0, \frac{1}{2})$ olmak üzere

$$p(Tx,Ty) \le k\big(p(Tx,x) + p(Ty,y)\big)$$

sağlansın. O zaman T nin X de bir tek sabit noktası var ve her $x \in X$ için $(T^n x)$ itarsyon dizisi sabit noktaya yakınsıyor.

$\text{İ}spat$

$x_0 \in X$ alalım. $x_1 = Tx_0,\, x_2 = Tx_1 = T^2x_0,\, \dots,\, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0,\, \dots$ dizisini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} p(x_{n+1}, x_n) &= p(Tx_n, Tx_{n-1}) \\ &\leq k\big(p(Tx_n, x_n) + p(Tx_{n-1}, x_{n-1})\big) \\ &= k(p(x_{n+1}, x_n\ ) + p(x_n, x_{n-1})) \end{aligned}$$

böylece $c = \frac{k}{1-k}$ dersek,

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \frac{k}{1-k} p(x_n, x_{n-1})$$

elde edilir. Her $m > n$ için

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) &\leq p(x_m, x_{m-1}) + p(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + p(x_{n+2}, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_n) \\ &- \textstyle\sum_{k=1}^{m-n-1} p(x_{m-k}, x_{m-k}) \\ &\leq (c^{m-1} + c^{m-2} + \dots + c^n) p(x_1, x_0) \\ &\leq c^n \tfrac{1}{1-c} p(x_1, x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. P, K sabitli bir normal kon olduğundan

$$\|p(x_m, x_n)\| \leq c^n K \frac{1}{1-c} \|p(x_1, x_0)\|$$

elde edilir, yani $m, n \to \infty$ iken $p(x_m, x_n) \to 0$ dir. Böylece (x_n) bir Cauchy dizisidir. X tam uzay olduğundan $n \to \infty$ iken $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} p(Tx, x) &\leq p(Tx, Tx_n) + p(Tx_n, x) - p(Tx_n, Tx_n) \\ &\leq k[p(Tx, x) + p(Tx_n, x_n)] \end{aligned}$$

ve

$$p(Tx, x) \leq \frac{1}{k-1} [kp(Tx_n, x_n) + p(x_{n+1}, x)]$$

$$\|p(Tx, x)\| \leq K \frac{1}{k-1} (k\|p(x_{n+1}, x_n)\| + \|p(x_{n+1}, x)\|) \to 0$$

böylece $p(Tx, x) = 0$ dır. Fakat

$$p(Tx, Tx) \leq k[p(Tx, x) + p(Tx, x)] = 2kp(Tx, x) = 0$$

olduğundan $p(Tx,Tx)=p(Tx,x)=p(x,x)=0$ elde edilir. Kısmi metrik tanımından $Tx=x$ dir. Yani x, T nin bir sabit noktasıdır. y,T nin başka bir sabit noktası olsun.
$p(x,y)=p(Tx,Ty)\leq k[p(Tx,x)+p(Ty,y)]=0$
böylece

$p(x,y)=p(x,x)=p(y,y)=0$ dir yani $x=y$ dir. □

4. 2. Kısmi Banach Değerli Metrik Uzayda İkili Sabit Nokta Teoremleri

Bu bölümde kısmi metrik uzayda ikili sabit nokta teoremlerine yer verilecektir. H. Aydi, Sabetghadam'in teoremini genişleterek kısmi metrik uzayda aşağıdaki teoremleri ispatlamıştır.

4. 5. Teorem

(X,p) bir tam kısmi Banach değerli metrik uzay ve $T: X\times X\rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y,u,v\in X$ için $0<a,b$ ve $0<a+b<1$ olmak üzere
$p(T(x,y),T(u,v))\leq ap(x,u)+bp(y,v)$
sağlansın. O zaman T nin X de bir tek ikili sabit noktası var.

İspat

$x_0,y_0\in X$ alalım. $x_1=T(x_0,y_0), y_1=T(y_0,x_0)$, $x_2=T(x_1,y_1), y_2=T(y_1,x_1)$ $\ldots$, $x_{n+1}=T(x_n,y_n)$, $y_{n+1}=T(y_n,x_n)$, $\ldots$ dizisini tanımlayalım. $n>0$ ve $n\in\mathbb{N}$ olsun. Hipotezden

$$\begin{aligned} p(x_n,x_{n+1}) &= p(T(x_{n-1},y_{n-1}),T((x_n,y_n)) \\ &\leq ap(x_{n-1},x_n)+bp(y_{n-1},y_n) \qquad (1) \end{aligned}$$

ve

$$p(y_n, y_{n+1}) = p(T(y_{n-1}, x_{n-1}), T((y_n, x_n))$$
$$\leq ap(y_{n-1}, y_n) + bp(x_{n-1}, x_n) \qquad (2)$$

yazabiliriz. $p_n = p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1})$ ve $\delta = a + b$ diyelim. (1) ve (2) den

$p_n = p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1}) \leq \delta(\, p(x_{n-1}, x_n) + p(y_{n-1}, y_n))= \delta p_{n-1}$
ve
$p_n \leq \delta p_{n-1} \leq \delta^2 p_{n-2} \leq \cdots \leq \delta^n p_0$
elde edilir. Eğer $p_0 = p(x_0, x_1) + p(y_0, y_1) = 0$ ise, o zaman kısmi metriğin tanımından $p(x_0, x_1) = p(y_0, y_1) = 0$ dır. Kısmi metriğin ikinci özelliğinden

$$0 \leq p(x_0, x_0) \leq p(x_0, x_1) = 0 \rightarrow p(x_0, x_0) = p(x_0, x_1) = 0 \qquad (3)$$

(3) den ve kısmi metriğin ikinci ve üçüncü özeliğinden
$$0 \leq p(x_1, x_1) \leq p(x_1, x_0) = p(x_0, x_1) = 0 \rightarrow p(x_1, x_1) = p(x_0, x_1) = 0 \qquad (4)$$

Böylece $p(x_1, x_1) = p(x_0, x_1) = p(x_0, x_0)$ dir. Kısmi metriğin tanımından $x_0 = x_1$ ve benzer olarak $y_0 = y_1$ elde edilir. Şimdi

$$x_1 = x_0 = T(x_0, y_0), \qquad y_1 = y_0 = T(y_0, x_0)$$

elde edilir, yani (x_0, y_0), T nin ikili sabit noktasıdır. Eğer $p_0 > 0$ ise, o zaman her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m \leq n$ için

$$p(x_m, x_n) \leq p(x_n, x_{n-1}) + p(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + p(x_{m+2}, x_{m+1}) + p(x_{m+1}, x_m)$$
$$- \sum_{k=1}^{n-m-1} p(x_{n-k}, x_{n-k}) \qquad (5)$$
ve
$$p(y_m, y_n) \leq p(y_n, y_{n-1}) + p(y_{n-1}, y_{n-2}) + \cdots + p(y_{m+2}, y_{m+1}) + p(y_{m+1}, y_m)$$
$$- \sum_{k=1}^{n-m-1} p(y_{n-k}, y_{n-k}) \qquad (6)$$
(5) ve (6) dan

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) + p(y_m, y_n) &\leq p_{n-1} + p_n + + \cdots + p_m \\ &\quad - \textstyle\sum_{k=1}^{n-m-1} (p(x_{n-k}, x_{n-k}) + p(y_{n-k}, y_{n-k})) \\ &\leq p_{n-1} + p_n + + \cdots + p_m \end{aligned}$$

böylece

$$\begin{aligned} p(x_m, x_n) + p(y_m, y_n) &\leq (\delta^{n-1} + \delta^{n-2} + \cdots + \delta^m) p_0 \\ &\leq \frac{\delta^m}{1-\delta} p_0, \end{aligned}$$

p^s tanımından $p^s(x, y) \leq 2p(x, y)$ dir. Her $n \geq m$ için

$$p^s(x_m, x_n) + p^s(y_m, y_n) \leq 2p(x_m, x_n) + 2p(y_m, y_n) = 2\frac{\delta^m}{1-\delta} p_0$$

elde edilir. $0 \leq \delta < 1$ olduğundan $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dizileri (X, p^s) da Cauchy dizilerdir. Önerme 4. 2 den (X, p) tam olduğundan (X, p^s) tamdır, dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} p^s(x_n, x) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} p^s(y_n, y) = 0$ olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. Önerme 4. 2 den

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} p(y_n, y) = p(y, y) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, y_n) = 0$$

Şimdi

$$\begin{aligned} 0 \leq p(T(x, y), x) &< p(T(x, y), x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq p(T(x, y), T(x_n, y_n)) + p(x_{n+1}, x) \\ &\leq ap(x, x_n) + bp(y, y_n) + p(x_{n+1}, x) \end{aligned}$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken limit alırsak $p(T(x, y), x) = 0$ olur, diğer taraftan

$$0 \leq p(T(x, y), T(x, y)) \leq ap(x, x) + bp(y, y) = 0,$$

yani $p(T(x, y), T(x, y)) = p(T(x, y), x) = p(x, x)$ dir dolayısıyla $T(x, y) = x$ dir. Benzer olarak $T(y, x) = y$ dir. Böylece (x, y), T nin ikili sabit noktasıdır. (u, v), T nin bir başka ikili sabit noktası olsun. ($x \neq u, \quad y \neq v$)

$$0 \leq p(x, u) = p\big(T(x, y) + T(u, v)\big) \leq ap(x, u) + bp(y, v)$$

$$0 \leq p(y, v) = p\big(T(y, x) + T(v, u)\big) \leq ap(y, v) + bp(x, u)$$

İki tarafı toplarsak

$0 \leq p(x,u) + p(y,v) \leq (a+b)(ap(x,u) + bp(y,v))$

elde edilir. $0 < a+b < 1$ olduğundan $p(x,u) + p(y,v) = 0$ ve böylece $p(x,u) = p(y,v) = p(x,x) = p(y,y) = 0$ dır. Şimdi

$p(u,u) = p\big(T(u,v), T(u,v)\big) \leq ap(u,u) + bp(v,v)$

$p(v,v) = p\big(T(v,u), T(v,u)\big) \leq ap(v,v) + bp(u,u)$

iki tarafı toplarsak

$p(u,u) + p(v,v) \leq (a+b)(p(u,u) + p(v,v))$

elde edilir. $0 < a+b < 1$ olduğundan $p(u,u) + p(v,v) = 0$ ve böylece $p(u,u) = p(v,v) = 0$ dır. Şimdi $p(u,u) = p(x,u) = p(x,x)$ olduğundan $x = u$ ve $p(v,v) = p(v,y) = p(y,y)$ olduğundan $v = y$ dir yani T nin bir tek ikili sabit noktası vardır.□

4. 6. Teorem

(X,p) bir tam kısmi Banach değerli metrik uzay ve$T: X \times X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için k, l negatif olmayan değerler ve $k + l < 1$ olmak üzere

$p(T(x,y), T(u,v)) \leq kp(T(x,y), x) + lp(T(u,v), u)$

sağlansın. O zaman T nin X de bir tek ikili sabit noktası vardır.

İspat

$x_0, y_0 \in X$ alalım. $x_1 = T(x_0, y_0)$, $y_1 = T(y_0, x_0)$, $x_2 = T(x_1, y_1), y_2 = T(y_1, x_1)$ $\ldots$, $x_{n+1} = T(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = T(y_n, x_n)$, $\ldots$ dizisini tanımlayalım. $n \in \mathbb{N}$ ve $n > 0$ olsun. Hipotezden

$$\begin{aligned} p(x_n, x_{n+1}) &= p(T(x_{n-1}, y_{n-1}), T(x_n, y_n)) \\ &\leq kp(T(x_{n-1}, y_{n-1}), x_{n-1}) + lp(T(x_n, y_n), x_n) \\ &= kp(x_n, x_{n-1}) + lp(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

böylece $\delta = \frac{k}{1-l}$ dersek, $p(x_n, x_{n+1}) \leq \delta\, p(x_n, x_{n-1})$ elde edilir. Benzer olarak $p(y_n, y_{n+1}) \leq \delta\, p(y_n, y_{n-1})$ elde edilir. Böylece yukarıdaki teoremin ispatı gibi

$\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilei (X,p) da Cauchy dizileridir. (X,p) tam uzay olduğundan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ve $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ olacak şekilde $x,y \in X$ vardır ve

$$\lim_{n\to\infty} p(x_n,x) = p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n,x_n) = 0$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} p(y_n,y) = p(y,y) = \lim_{n\to\infty} p(y_n,y_n) = 0 \; .$$

Hipotezden ve kısmi metrik tanımından

$$\begin{aligned} \ldots\ldots \;\; 0 &\le p(T(x,y),x) \\ &\le p(T(x,y),T(x_n,y_n)) + p(T(x_n,y_n),x) - p(T(x_n,y_n),T(x_n,y_n)) \\ &\le kp(T(x,y),x) + lp(x_{n+1},x_n) + p(x_{n+1},x) \end{aligned}$$

elde edilir. $n\to\infty$ iken $lp(x_{n+1},x_n) + p(x_{n+1},x) = 0$ olacak ve $0 < k$ olduğu için $p(T(x,y),x) = 0$ dır. Hipotezden

$$p\big(T(x,y),T(x,y)\big) \le (k+l)p(T(x,y),x)$$

elde edilir ve $0 < k + l < 1$ olduğundan $p\big(T(x,y),T(x,y)\big) = 0$ elde edilir. Şimdi

$$p\big(T(x,y),T(x,y)\big) = p(T(x,y),x) = p(x,x) = 0$$

olduğundan ve kısmi metrik özelliğinden $T(x,y) = x$ elde edilir. Benzer olarak $T(y,x) = y$ dir. Böylece $(x,y), T$ nin ikili sabit noktasıdır. □

4. 7. Teorem

(X,p) bir kısmi metrik uzay ve $F\colon X \to X$ bir dönüşüm olsun. $\varphi(t)\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ dönüşümü sürekli, azalmayan ve her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ olsun. Her $x,y \in X$ için

$$p\big(F(x),F(y)\big) \le \varphi\big(p(x,y)\big)$$

oluyorsa F dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

4. 8. Teorem

$(X,\le)$ sıralı küme, (X,p) tam kısmi uzay ve $F\colon X \times X \to X$ dönüşümü X üzerinde karışık monoton özelliği olsun. $x_0 \le F(x_0,y_0)$ ve $y_0 \ge F(y_0,x_0)$ olacak şekilde $x_0, y_0 \in X$ olsun. $\psi : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ sürekli ve azalmayan fonksiyonu ve $]0,+\infty[$ aralığında pozitif olsun ve $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t)$ her $t>0$ için yakınsak olsun. Her $x,y,u,v \in X$, $x \geq u$ ve $y \leq v$ için

$$p\big(F(x,y),F(u,v)\big) \leq$$
$$\frac{1}{2}\psi\Big(maks\Big\{p(x,u)+p(y,v), p\big(x,F(x,y)\big)+p\big(y,F(y,x)\big), p\big(u,F(u,v)\big)+$$
$$p\big(v,F(v,u)\big), \frac{1}{2}\big[p\big(x,F(u,v)\big)+p\big(u,F(x,y)\big)+p\big(v,F(y,x)\big)+p\big(y,F(v,u)\big)\big]\Big\}\Big)$$

(4. 1)

(a) F sürekli

veya

(b) X aşağıdaki özellikleri sağlıyor

(i) Eğer $\{x_n\}$ azalmayan dizisi x noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $x_n \leq x$,

(ii) Eğer $\{y_n\}$ artmayan dizisi y noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $y \leq y_n$.

özelliklerini sağlasın. O zaman $x=F(x,y)$ ve $y=F(y,x)$ olacak şekilde $x,y \in X$ vardır. Yani F nin X de ikili sabit noktası vardır.

İspat

ψ tanımından $\psi(t)<t$ olduğu aşikardır. X de $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerini aşağıdaki gibi oluşturalım. Her $n \geq 0$ için

$$x_{n+1}=F(x_n,y_n) \text{ ve } y_{n+1}=F(y_n,x_n). \qquad (4.\ 2)$$

Her $n \geq 0$ için $x_n \leq x_{n+1}$ ve $y_n \geq y_{n+1}$ olduğunu gösterelim.

$n=0$ olsun. $x_0 \leq F(x_0,y_0)$, $y_0 \geq F(y_0,x_0)$, $x_1=F(x_0,y_0)$ ve $y_1=F(y_0,x_0)$ olduğundan $x_0 \leq x_1$ ve $y_1 \leq y_0$ elde edilir. $x_n \leq x_{n+1}$, $y_{n+1} \leq y_n$ve F nin karışık monoton özelliği olduğundan

$$x_{n+2}=F(x_{n+1},y_{n+1}) \geq F(x_n,y_{n+1}) \geq F(x_n,y_n)=x_{n+1} \qquad (4.\ 3)$$

ve

$$y_{n+2}=F(y_{n+1},x_{n+1}) \leq F(y_n,x_{n+1}) \leq F(y_n,x_n)=y_{n+1}. \qquad (4.\ 4)$$

elde edilir. Dolayısıyla her $n \geq 0$ için

$x_{n+1} \leq x_{n+2}$ ve $y_{n+1} \geq y_{n+2}$

olduğunu görüyoruz. Şimdi

$p(x_n, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})$

ve

$p(y_n, y_n) + p(y_{n-1}, y_{n+1}) \leq p(y_{n-1}, y_n) + p(y_n, y_{n+1})$

ve ψ ise azalmayan olduğundan her $n \geq 0$ için

$$p(x_{n+1}, x_n) = p\big(F(x_n, y_n), F(x_{n-1}, y_{n-1})\big)$$
$$\leq \tfrac{1}{2}\psi\big(maks\{p(x_n, x_{n-1}) + p(y_n, y_{n-1}), p(x_n, F(x_n, y_n)) + p(y_n, F(y_n, x_n)),$$
$$p(x_{n-1}, F(x_{n-1}, y_{n-1})) + p(y_{n-1}, F(y_{n-1}, x_{n-1})),$$
$$\frac{1}{2}[p(x_n, F(x_{n-1}, y_{n-1})) + p(x_{n-1}, F(x_n, y_n))$$
$$+p(y_{n-1}, F(y_n, x_n)) + p(y_n, F(y_{n-1}, x_{n-1}))]\}\big)$$
$$= \frac{1}{2}\psi(maks\{p(x_n, x_{n-1}) + p(y_n, y_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1}),$$
$$p(x_{n-1}, x_n) + p(y_{n-1}, y_n),$$
$$\frac{1}{2}[p(x_n, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1}) + +p(y_{n-1}, y_{n+1}) + p(y_n, y_n)]\}\big)$$
$$= \frac{1}{2}\,\psi(\mathrm{maks}\{p(x_n, x_{n-1}) + p(y_n, y_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1})\})$$

(4. 5)

ve benzer olarak

$$p(y_{n+1}, y_n) = p\big(F(y_n, x_n), F(y_{n-1}, x_{n-1})\big)$$
$$\leq \frac{1}{2}\,\psi(\mathrm{maks}\{p(x_n, x_{n-1}) + p(y_n, y_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1})\})$$

(4. 6)

elde edilir.

$p_n = p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1})$ dersek

$p_n \leq \psi(maks\{p_{n-1}, p_n\}) < maks\{p_{n-1}, p_n\}$. (4. 7)

elde edilir. Eğer her n için

$$maks\{p(x_{n-1}, x_n) + p(y_{n-1}, y_n), p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1})\}$$
$$= p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1})$$

olduğunu kabul edersek (4. 7) den

$p_n \leq \psi(p_n) < p_n$

elde edilir ve bu ise $p_n > 0$ olmasıyla çelişir ve

$$maks\{p(x_{n-1}, x_n) + p(y_{n-1}, y_n), p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1})\}$$

$$= p(x_n, x_{n-1}) + p(y_n, y_{n-1}),$$

ve

$p_n \leq \varphi(p_{n-1}) < p_{n-1}$. (4. 8)

elde edilir. Böylece $\{p_n\}$ azalan dizidir ve $p_n \to p^*$ olacak şekilde p^* mevcuttur. (4. 8) de $n \to \infty$ iken

$p^* \leq \varphi(p^*) < p^*$,

ve $p^* = 0$ elde edilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\big(p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1})\big) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, y_{n+1}) = 0 \quad (4.\ 9)$$

elde edilir. Şimdi $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizilerinin Cauchy dizisi olduklarını göstermeliyiz. Her $m > n$ için

$$p(x_n, x_m) + p(y_n, y_m) \leq p(x_{m-1}, x_m) + p(y_{m-1}, y_m)$$

$$+ \cdots + p(x_{n+1}, x_n) + p(y_{n+1}, y_n) - \sum_{k=1}^{m-n-1} p(x_{m-k}, x_{m-k}) + p(y_{m-k}, y_{m-k})$$

$$\leq p(x_{m-1}, x_m) + p(y_{m-1}, y_m) + \cdots + p(x_{n+1}, x_n) + p(y_{n+1}, y_n).$$

p^s tanımından $p^s(x, y) \leq 2p(x, y)$, her $m > n$, $n, m \to \infty$ için

$p^s(x_n, x_m) + p^s(y_n, y_m) \leq 2p(x_n, x_m) + 2p(y_n, y_m) = 0.$

Böylece $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri (X, p^s) uzayda Cauchy dizilerdir. Kısmi metrik uzay tam olduğundan Lemma 4. 2 den (X, p^s) de tamdır dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} p^s(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p^s(y_n, y) = 0$ olacak şekilde $x, y \in X$ vardır. Lemma 4. 2 den

$p(x, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n)$

ve

$p(y, y) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, y) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, y_n)$

elde edilir. (p2) ve(4. 9) dan

$\lim_{n\to\infty} p(y_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} p(y_n, y_{n+1}) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p(y_n, y_n) = 0$

böylece

$p(y,y) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, y) = \lim_{n\to\infty} p(y_n, y_n) = 0.$

Benzer olarak

$p(x,x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x) = \lim_{n\to\infty} p(x_n, x_n) = 0$

elde edilir. Şimdi teoremin (a) şıkkını ispatlayalım.

$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} F(x_{n+1}, y_{n+1}) = F(\lim_{n\to\infty} x_{n+1}, \lim_{n\to\infty} y_{n+1}) =$
$F(x,y)$,

ve

$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} F(y_{n+1}, x_{n+1}) = F(\lim_{n\to\infty} y_{n+1}, \lim_{n\to\infty} x_{n+1}) =$
$F(y,x)$.

böylece $x = F(x,y)$ ve$y = F(y,x)$ elde edilir.

Şimdi (b) şıkkını ispatlayalım. $\{x_n\}$ azalmayan bir dizi ve $x_n \to x$ ve $\{y_n\}$ artmayan bir dizi ve $y_n \to y$ olduğundan (b) şıkkına göre her n için $x_n \leq x$ ve $y_n \geq y$ dır. (4. 1) den

$p\big(F(x,y), F(x_n, y_n)\big)$
$\leq \frac{1}{2}\psi\big(maks\{p(x,x_n) + p(y,y_n), p(x, F(x,y)) + p(y, F(y,x)\big),$
$p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1}),$
$\frac{1}{2}[p(x, x_{n+1}) + p(x_n, F(x,y))$
$+p(y_n, F(y,x)) + p(y_n, y_{n+1})]\})$

$n \to \infty$ alırsak ψ tanımından

$p(F(x,y), x_{n+1}) < \frac{1}{2}(p(x, F(x,y) + p\big(y, F(y,x)\big),$ (4. 10)

ve benzer olarak

$p(F(y,x), y_{n+1}) < \frac{1}{2}(p(x, F(x,y) + p\big(y, F(y,x)\big).$ (4. 11)

Hipotezden ve (4. 10) dan

$p\big(x, F(x,y)\big) \leq p(x, x_{n+1}) + p\big(x_{n+1}, F(x,y)\big) - p(x_{n+1}, x_{n+1})$
$\leq p(x, x_n) + p\big(F(x_n, y_n), F(x,y)\big)$
$< p(x, x_n) + \frac{1}{2}(p(x, F(x,y) + p\big(y, F(y,x)\big).$ (4. 12)

Benzer olarak (4. 11) den

$$p\big(y,F(y,x)\big) \leq p(y,y_{n+1}) + p\big(y_{n+1},F(y,x)\big) - p(y_{n+1},y_{n+1})$$
$$\leq p(y,y_n) + p\big(F(y_n,x_n)\,,F(y,x)\big)$$
$$< p(y,y_n) + \tfrac{1}{2}(p(x,F(x,y) + p\big(y,F(y,x)\big). \qquad (4.\ 13)$$

$n \to \infty$ iken (4. 12), (4. 13) ve her $x,y \in X$ için $0 \leq p(x,y)$ olduğundan

$p(x,F(x,y)) + p\big(y,F(y,x)\big) < p(x,F(x,y)) + p\big(y,F(y,x)\big)$

ve

$p(y,F(y,x) + p\big(x,F(x,y)\big) = 0$

olur ve böylece

$p(y,F(y,x) = p\big(x,F(x,y)\big) = 0$

elde edilir. Dolayısıyla $F(x,y) = x$ ve $F(y,x) = y$ dir. □

Şimdi ispatladığımız teoremle ilgili bir örnek verelim.

4. 3. Örnek

$X = [0,1]$, $(X,\leq)$ kısmen sıralı küme ve $p(x,y) = max\{x,y\}$, X üzerinde kısmi metrik olsun. X aşağıdaki özellikleri sağlasın:

(i) $\{x_n\}$ azalmayan dizisi x noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $x_n \leq x$,

(ii) $\{y_n\}$ artmayan dizisi y noktasına yakınsıyorsa, o zaman her n için $y \leq y_n$.

Her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ve $F\colon X \times X \to X$, $F(x,y) = \frac{x}{4}$ olsun.

F sürekli ve X de monoton özelliği vardır. X de $x_0 = 0, y_0 = \frac{1}{4}$ vardır öyle ki $0 = x_0 \leq F(x_0,y_0) = 0$ ve $\frac{1}{4} = y_0 \geq F(y_0,x_0) = \frac{1}{8}$ dır. $x,y,u,v \in X$ ve $(x,y) \leq (u,v)$ olsun.

$$p\big(F(x,y),F(u,v)\big) = maks\left\{\frac{x}{4},\frac{u}{4}\right\} = \frac{u}{4}$$

$\leq \frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}(maks\{u+y, x+y, u+v, \qquad \frac{1}{2}\left[p\left(x,\frac{u-v}{4}\right) + p\left(u,\frac{x-y}{4}\right) + p\left(v,\frac{y-x}{4}\right) + p(y,\frac{v-u}{4})\right]$

aşikardır dolayısıyla (4. 1) sağlanır. Böylece F nin X de ikili sabit noktası vardır ve $F(0,0) = 0$ dır.

4. 9. Teorem

Teorem 4. 8 de $X \times X$ deki her (x, y) ve (z, t) için $X \times X$ de (x, y) ve (z, t) ile kıyaslanabilir (u, v) varsa F nin bir tek ikili sabit noktası vardır.

İspat

Teorem 4. 8 den F nin ikili sabit noktalar kümesi boş değildir. (x, y) ve (z, t) F nin ikili sabit noktaları olsun yani $x = F(x, y), y = F(y, x), z = F(z, t)$ ve $t = F(t, z)$ olsun. $x = z$ ve $y = t$ olduğunu göstermeliyiz. Her $n \geq 0$ için

$$u_0 = u, \quad v_0 = v, \quad u_{n+1} = F(u_n, v_n), \quad v_{n+1} = F(v_n, u_n)$$

olacak şekilde $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizilerini tanımlayalım.

(u, v) ile (x, y) kyaslanabilir olduğundan $(x, y) \geq (u, v) = (u_0, v_0)$ alabiliriz. Tümevarımla her $n \geq 0$ için

$$(x, y) \geq (u_n, v_n) \tag{4. 14}$$

olduğunu görüyoruz. Teorem 4. 8 ispatındaki gibi $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ dizileri (X, p^s) uzayında Cauchy dizileridir. Böylece

$$p(e, e) = \lim_{n\to\infty} p(e, u_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(u_m, u_n) = 0$$

$$(4. 15)$$

$$p(g, g) = \lim_{n\to\infty} p(g, v_n) = \lim_{n,m\to\infty} p(v_m, v_n) = 0$$

olacak şekilde $e, g \in X$ vardır. Her $t \geq 0$ için $\psi(t) < t$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $p(x, x) + p(y, y) \leq p(x, u_n) + p(y, v_n)$ dır. (4. 1) ve (4. 14) den

$$p(x, u_{n+1}) = p(F(x, y), F(u_n, v_n) \leq \frac{1}{2}(\psi(maks\{p(x, u_n) + p(y, v_n),$$

$$p(x, x) + p(y, y), p(u_n, u_{n+1}) + p(v_n, v_{n+1}),$$

$$\frac{1}{2}[p(x,u_n) + p(x, u_{n+1}) + p(y, v_n) + p(y, v_{n+1})]\})) \tag{4. 16}$$

elde edilir. (4. 15) ve (4. 16) dan $n \to \infty$ iken

$$p(x, u_{n+1}) < \frac{1}{2}(p(x, u_n) + p(y, v_n)), \tag{4. 17}$$

ve benzer olarak

$p(y, v_{n+1}) < \frac{1}{2}(p(x, u_n) + p(y, v_n))$ (4. 18)

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} p(u_n, u_{n+1}) + p(v_n, v_{n+1}) = 0$ olduğundan $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} p(x, u_{n+1}) + p(y, v_{n+1}) &\leq p(x, u_n) + p(u_n, u_{n+1}) - p(u_n, u_n) \\ &\quad + p(y, v_n) + p(v_n, v_{n+1}) - p(v_n, v_n) \\ &< p(x, u_n) + p(y, v_n) \qquad (4.\ 19) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\{p(x, u_n) + p(y, v_n)\}$ azalan dizidir ve $\lim_{n\to\infty} p(x, u_n) + p(y, v_n) = \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \geq 0$ vardır. $\alpha = 0$ olduğunu göstermeliyiz. $\alpha > 0$ diyelim. $n \to \infty$ iken (4. 19) dan

$$\alpha < \alpha$$

elde edilir. Böylece $\alpha = 0$ dir ve $\lim_{n\to\infty} p(x, u_n) + p(y, v_n) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} p(x, u_n) = \lim_{n\to\infty} p(y, v_n) = 0$ dır. Şimdi

$0 \leq \lim_{n\to\infty} p(x, x) \leq \lim_{n\to\infty} p(x, u_n) = 0$ (4. 20)

ve

$0 \leq \lim_{n\to\infty} p(u_n, u_n) \leq \lim_{n\to\infty} p(x, u_n) = 0$ (4. 21)

olduğundan, (4. 20) ve (4. 21) den

$\lim_{n\to\infty} p(u_n, u_n) = \lim_{n\to\infty} p(x, u_n) = p(x, x) = 0$ dır. Böylece $u_n \to x$ ve benzer olarak $v_n \to y$ dır. Benzer olarak $u_n \to z$ ve $v_n \to t$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece $x = z$ ve $y = t$ dır. □

4. 9. Teorem

Teorem 4. 8 de x_0 ve y_0 karşılaştırılabilir ve $(x, y), F$ nin ikili sabit noktası ise o zaman $x = y$ dir.

$\text{İ}spat$

$x_0 \leq y_0$ olsun. Her n için $F(x_n, y_n) = x_{n+1}$ ve $F(y_n, x_n) = y_{n+1}$ olmak üzere $x_n \leq y_n$ olduğunu gösterelim. $n = 0$ için $x_n \leq y_n$ sağlanır. F nin karışık monoton özelliği olduğundan

$x_{n+1} = F(x_n, y_n) \leq F(y_n, y_n) \leq F(y_n, x_n) \leq y_{n+1}$

elde edilir, yani her n için $x_n \leq y_n$ dır.

$x_n \leq y_n$ iken (4. 1) den

$p(x_{n+1}, y_{n+1}) = p(F(x_n, y_n), F(y_n, x_n))$

$\leq \frac{1}{2}\boldsymbol{\psi}(maks\{2p(x_n, y_n),\ p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1}), p(x_n, x_{n+1}) + p(y_n, y_{n+1}),$

$\frac{1}{2}[2p(x_n, x_{n+1}) + 2p(y_n, y_{n+1})]\})$

$< p(x_n, y_n)$ (4. 22)

elde edilir. Böylece $\{p(x_n, y_n)\}$ bir azalan dizidir ve $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = r$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ vardır. $n \to \infty$ iken (4. 22) den

$$r < r$$

elde edilir, böylece $r = 0$ dır. Teorem (4. 1) in ispatındaki gibi $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ and $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ dir, yani $\lim_{n\to\infty} p(x_n, y_n) = p(x, y) = 0$ dır. Böylece $x = y$elde edilir. □

5. Sonuç

İlk bölümde sabit nokta kavramı ile kısmi metrik uzayda verilen sabit nokta teoremleri hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde ise metrik uzayda ikili sabit nokta tanımı ve gelecek bölümlerde kullanılacak bazı temel teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde metrik uzayda ikili sabit nokta teoremleri ve bu teoremiın integral denkleminin çözümünde kullanımı verilmiştir.

Dördüncü bölümde kısmi metrik uzayda temel tanımlar, kısmi metrik topolojisi, sabit nokta ve ikili sabit nokta teoremler ve bu teoremle ilgili örnek verilmiştir.

Kaynaklar

1. Fabien Rabarison, E., “Partial Metric”, ***African Institute for Mathematical Sciences***. Supervised by Hans-Peter A. Künzi. University of Cape town (2007).

2. Karapınar, E., “Generalizasion of Caristi Kirk’s Theorem on Partial Metric Space”, ***Fixed Point Theorey and Applications*** 10.1186/1687-1812(2011).

3. Samet, B., Rajovic, M., Lazovic, R., Stoiljkovic, R., “Common Fixed Point Results for Nonlinear Contractions in Ordered Partial Metric Space”, ***Fixed Point Theorey and Applications*** :(2011).

4. Aydi, H., “Some Fixed Point Results in Ordered Partial Metric Space”, ***international journal of mathematics and mathematical sciences*** (20 11).

5. Aydi, H., “Some Coupled Fixed Point Result on Partial Metric Space”, ***international journal of mathematics and mathematical sciences*** (20 11).

6. Altun, I., Erduran, A., “Fixed Point Theorems for Monotone Mappings on Partial Metric Spaces”, ***Hindawi Publishing Corporation*,** 508730, 10(2011).

7. Bukatin, M., Kopperman, R., Matthews, S., Pajoohesh, H., “Partial Metric Spaces”, ***The Mathimatical Association of America*,** (2009).

8. Oltra, S., Valero, O., “Banach’s Fixed Point Theorem for Partial Metric Spaces”, ***Rend Istit. Mat. Univ. Trieste***, 17-26(2004).

9. Sönmez, A., “Fixed Point Theorems in Partial Cone Metric Spaces”, ***Mendeley*** 1101. 2741v1 (2011).

10. Deza, M., “Partial Metrics, Quasi-Metrics and Oriented hypercubes”,***Ecole Normale Superieure Paris, and JAİST, ishiwaka***(20 11)

11. Karapınar, E,. “Weak φ-contraction on Partial Metric Spaces and Existence of Fixed Points in Partially Ordered Sets”, ***Mathematica Aeterna***, 04, 237-244 (2011).

12. Matthews, S., “Mathematics Subjects Classifications, Partial Metric Topology”, ***Annals of the New York Academy of Sciences***, 728, 183-197.

13. Feng, Y., Liu, S., “Fixed Point Theorems for Multi-valued Increasing Operators in Partial Ordered Spaces”, ***Soochow Journal of Mathematics,*** 30, no. 4, 461-469 (2004).

14. Sabetghadam, F., Masiha, H. P., Sanatpour, A. H.,“ Some Coupled Fixed Point Theorems in Cone Metric Spaces”, ***Hindawi Publishing Corporation***, 10.1155/125426(2009).

15. Vn Luong, N., Xuan Thuan, N., “Coupled fixed point theorems in partially ordered metric spaces”, ***Bulletin of Mathematical Analyses and Applications***, 2, 19-24(2010).

16. Bhaskar, T. G., Lakshmikantham, V., “Fixed point theorems in partially spaces and application”, ***Nonlinear Anal***, 65, 1379-1393(2006).

17. Vn Luong, N., Xuan Thuan, N., “Coupled fixed points in partially ordered metric spaces and application”, ***Nonlinear Anal***, vol.74, 983-992 (2011).

18. Harjani, J., Lopez, B., Sadarangani, K., “Fixed Point Theorems for M,xed Monotone Operators and Applications to İntegral Equations”, ***Nonlinear Analysis***, 74,1749-1760(2011).

19. Asadi, M., Soleimani, H., Vaezpour, S. M., “An Order on Subsets of Cone Metric Spaces and Fixed Points of Set-Valued Contractoins”, ***Hindawi Publishing Corporation***, 72203, 8(2009).

20. Mehta, J. G., Joshi, M. L., “ On Coupled Fixed Point Theorems in Partially Ordered Complete Metric Space ”, ***Int. J. Pure Appl. Sci. Technol.,*** 1(2), 87-92(2010).

21. Zhandong, L., Lingling, Z., Shengjia, L., “ Fixed Point Theorems for a Class of Mixed Monotone Operators ”, ***Journal for Analysis and it′sApplications***, 22,:No. 3, 529-542(2003).

22. Ciric, L., “ Coincidence and Fixed Point for Maps on Topological Spaces ”, ***Topology and it′s Applications,*** 3100-3106(2007).

23. Shatanawi, W., “ Some Common Coupled Fixed Point Results in Cone Metric Spaces ”, ***İnt.Journal of Math.Anal***, 4, no. 48, 2381-2388(2010).

24. Lakshmikantham, V., Ciric, L., “ Coupled Fixed Point Theorems for Nonlinear Contractions in Partially Ordered Metric Spaces ”, ***Nonlinear Anal.*** TMA 65, 1379-1393(2006).

25. Nilsrakoo, W., Saejung, S., “ On the Fixed Point Set of a Family of Relatively Nonexpansive and Generalized Nonexpansive Mappings ”, ***Hindawi Publishing Corporation***, 10.1155/414232(2011).

26.. Altun, I., Damjanovic, B., Djoric, D., “ Fixed Point and Common Fixed Point Theorems on Ordered Cone Metric Spaces ”, ***Applied Mathematics Letters***, 23, 310-316(2010).

27. Choudhury, B. S., Kundu, A., “ A Coupled Coincidence Point Result in Partially Ordered Metric Spaces for Compatible Mappings ”, ***Nonlinear anal.***, 73 , 2524-2531(2010).

28. Karapınar, E., “ Coupled Fixed Point on Cone Metric Space ”, ***GUJS***, 24 (1), 51-58 (2011).

29. Shih Du, W., “ Nonlinear Contractive Conditions for Coupled Cone Fixed Point Theorems ”, ***Hindawi Publishing Corporation***, 10.1155/190606(2010).

30. Change, S. S., Cho, Y. J., Huang, N. J., “ Coupled Fixed Point Theorems with Applications ”, ***J. Korean Math. Soc.*** vol. 33, 3, 575-585(1996).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	: JAVANSHİR, Nezakat
Uyruğu	: İran (Azeri)
Doğum tarihi ve yeri	: 21.03.1984, Ardebil, İran
Medeni hali	: Bekar
Telefon	: 05067559900
Email	: nezakat.javanshir@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Muhakkik Devlet Üniversitesi	2008
Lise	Zeynebiyye lisesi	2004

Diller

İngilizce, Türkçe, Azerbaycan Türkçesi, Farsça, Arapça

Hobiler

Saz çalma, Kitap okuma