



T.C.
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$y^2 = x^n + a$ ŞEKLİNDEKİ DENKLEMLERİN
ARİTMETİK ÖZELLİKLERİNİN
İNCELENMESİ

Kevser AKTAŞ

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Şubat-2013
KONYA
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Kevser AKTAŞ tarafından hazırlanan “ $y^2 = x^n + a$ ” Şeklindeki Denklemlerin Aritmetik Özelliklerinin İncelenmesi” adlı tez çalışması 05/02/2013 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan ve Danışman
Prof. Dr. Hasan ŞENAY

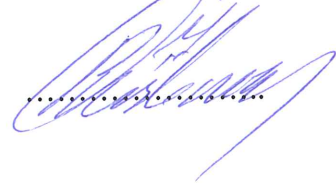
Üye
Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Üye
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Üye
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Üye
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

İmza



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Aşir Genç
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Kevser AKTAŞ

Tarih: 05.02.2013

ÖZET

DOKTORA TEZİ

$y^2 = x^n + a$ ŞEKLİNDEKİ DENKLEMLERİN ARİTMETİK ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Kevser AKTAŞ

**Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

2013, 34 Sayfa

Jüri

**Danışman Prof. Dr. Hasan ŞENAY
Prof. Dr. Dursun TAŞCI
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK
Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN**

$y^2 = x^n + a$, $a \neq 0$, $n \geq 5$ afın denklemi ile verilen hipereliptik eğrilerin aritmetik özellikleri, bu eğrilerin otomorfizma gruplarının yapısı kullanılarak çalışılmıştır. Bu eğrilerin, Lang'ın örtü yarıçapı ile ilgili tahminini özel bir örtü dönüşümü için doğruladığı gösterilmiştir. Daha küçük cinsli eğrilerin L – serilerine göre, $L_X(s)$ nin açık bir tanımını yapmak için özel otomorfizmaların sebep olduğu Jakobiyeen ayrışmasının nasıl olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hipereliptik eğriler, Jakobiyeen, Lang's tahmini, L – serisi.

ABSTRACT

Ph.D THESIS

**ON THE ARITHMETIC PROPERTIES OF EQUATIONS
OF THE FORM $y^2 = x^n + a$**

Kevser AKTAŞ

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
SELÇUK UNIVERSITY
THE DEGREE OF DOCTOR OF PHILOSOPHY
IN MATHEMATICS**

Advisor: Prof. Dr. Hasan ŞENAY

2013, 34 Pages

Jury

Advisor Prof. Dr. Hasan ŞENAY

Prof. Dr. Dursun TAŞCI

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

We study the arithmetic properties of hyperelliptic curves given by the affine equation $y^2 = x^n + a$, $a \neq 0$, $n \geq 5$ by exploiting the structure of the automorphism groups. We show that these curves satisfy Lang's conjecture about the covering radius (for some special covering maps). We also indicate how the decomposition of the Jacobian imposed by special automorphisms lead to an explicit description of $L_X(s)$ in terms of L – series of curves of lower genera.

Keywords: Hyperelliptic curves, Jacobian, Lang's conjecture, L – series.

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Prof. Dr. Hasan ŞENAY danışmanlığında yapılarak Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne doktora tezi olarak sunulmuştur.

Çalışmamdaki yardımlarından dolayı başta saygıdeğer hocam Prof. Dr. Hasan ŞENAY olmak üzere, özellikle desteklerini esirgemeyen Ortadoğu Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Hurşit ÖNSİPER hocama ve önerileriyle yol gösteren tez izleme komitemdeki hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmayı beraber yürüttüğümüz arkadaşım Arş. Gör. Özhan GENÇ'e de teşekkürler...

Doktora çalışmam boyunca bana destek veren TÜBİTAK'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Bu aşamaya gelene kadar maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme de teşekkürü borç bilirim.

Kevser AKTAŞ

KONYA-2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
3. TEORİK ESASLAR.....	6
3.1. Hipereliptik Eğriler ile İlgili Genel Bilgiler.....	6
3.2. Belyi Yüzeyi ve Lang Tahmini	9
3.3. Eğrinin L-Serisi ve Jakobiyeni	10
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA	15
4.1. $\bar{X}_{n,a}$ Hipereliptik Eğrisinin Otomorfizma Grubu.....	15
4.2. $\bar{X}_{n,a}$ Eğrisi ve Lang Tahmini	18
4.3. $L_X(s)$ Üzerine Hatırlatmalar.....	21
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	26
5.1 Sonuçlar	26
5.2 Öneriler	26
KAYNAKLAR	27
ÖZGEÇMİŞ.....	29

SİMGELER

Çalışmada aşağıdaki standart notasyon kullanılmıştır.

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cisimidir.

$D_n = \langle a, b \mid a^2 = b^n = (ab)^2 \rangle$: mertebesi n olan dihedral gruptur.

$D(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$: yarıçapı r olan disk.

$g(\bar{X}_{n,a})$: $\bar{X}_{n,a}$ eğrisinin cinsini gösterir.

G : $\bar{X}_{n,a}$ eğrisinin otomorfizma grubudur.

$\bar{G}$: $Aut(\bar{X}_{n,a})/\langle \tau_h \rangle$ şeklinde verilen bölüm grubudur.

J_X : X eğrisinin Jakobiyenidir.

K : Herhangi bir sayı cisimidir.

K^* : K cisminin sıfırdan farklı elemanları kümesidir.

$\bar{K}$: K cisminin cebirsel kapanışıdır.

L_X : X eğrisinin L -serisidir.

$\mathbb{Q}$: Rasyonel sayılar cisimidir.

$\mathcal{O}_K$: K cisminin tamsayılar halkasıdır.

$\mathbb{P}^1$: Projektif doğrudur.

τ_h : Hipereliptik eğrinin hipereliptik involusyonudur.

$\bar{X}_{n,a}$: Derecesi n , sabit katsayısı $a \in K$ olan ve $y^2 = x^n + a$, $a \neq 0$ afin

denklemleri ile verilen hipereliptik bir eğri belirtir.

$\mathbb{Z}_n$: Tamsayıların mod n ye göre çarpımsal grubudur.

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, $n \geq 5$ ve K bir sayı cismi, $a \in K^*$ olmak üzere,

$$y^2 = x^n + a \quad (1.1)$$

denklemleriyle verilen hipereliptik eğrilerin aritmetik özelliklerinin incelenmesidir. Genel olarak,

$$y^2 = f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i) \quad (1.2)$$

şeklinde verilen hipereliptik eğrilerin çok özel bir sınıfını (ξ_n birimin n .kökü ve

$x_i = \left| a \right|^{\frac{1}{n}} \xi_n^i, i = 1, \dots, n$) teşkil eden bu eğrilerin aritmetik özellikleri, eğrinin otomorfizma grubu kullanılarak araştırılmıştır. Elde edilen temel sonuç, bu eğrilerin evrensel örtü tasvirlerinin Lang tahminini sağladığının ispatıdır. Ayrıca, incelenen eğrinin, otomorfizma grubunun alt gruplarının etkisine bölünmesi yoluyla elde edilen eğriler, Jakobiyen varyetelerinin yapısını anlamakta kullanılmıştır; bu klasik metot, özellikle eğrinin L -serisinin belirlenmesi aşamasında önemli rol oynamıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde konuyla doğrudan ilgili kaynaklar kısaca açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde, çalışmanın teorik açıklaması yapılmış, konuyla ilgili teorik bilgilere yer verilmiştir.

- a) Kompakt hipereliptik eğrilerin inşası ile ilgili metot hatırlatılmış,
- b) $y^2 = x^n + a$ denklemi ile inşa edilen eğrinin Weierstrass noktaları ve
- c) Weierstrass noktalarından yararlanılarak eğrinin otomorfizma grubu belirlenmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen teorik esaslara dayanarak, eğrinin indirgenmiş otomorfizma grubu belirlenmiş, otomorfizma grubu etkisi kullanılarak, eğrinin Jakobiyen varyetelerinin ve evrensel örtüsünün yapısı incelenerek, aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Önerme 1.1. $a, b \in K^*$ için, n çift ise, $\bar{X}_{n,a}$ ve $\bar{X}_{n,b}$, $K\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}\right)$ cismi üzerinde n tek

ise, $K\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}, \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\right)$ cismi üzerinde izomorftur.

Önerme 1.2. İndirgenmiş otomorfizma grubu için aşağıda verilen eşitlik geçerlidir.

$$\bar{G} \cong \begin{cases} D_n, & n \text{ çift sayı ise} \\ \mathbb{Z}_n, & n \text{ tek sayı ise} \end{cases} \quad (1.3)$$

Önerme 1.3. $\bar{X}_{n,a}$ eğrisi bir Belyi yüzeyidir.

Önerme 1.4. $\bar{X}_{n,a}$ eğrisinin otomorfizma grubu “büyüktür”.

Sonuç 1.5. $\Phi(0)$, β Belyi dönüşümünün bir dallanma noktası olacak şekilde, normalize edilmiş

$$\Phi : D(r) \rightarrow \bar{X}_{n,a} \quad (1.4)$$

örtü dönüşümleri olmak üzere, Lang tahmini $\bar{X}_{n,a}$ eğrisi için geçerlidir.

Not: Otomorfizma grubu “büyüktür” ifadesi, literatürde yer alan “*has many automorphisms*” kavramına karşılık olarak kullanılmıştır. Bu kavram Tanım 3.2.4. de açıklanmıştır.

$\bar{X}_{n,a}$ ($n = 2p$, p tek asal sayı) hipereliptik eğrisinin L –serisini daha küçük dereceli eğrilerin L –serilerinin bir çarpımı olarak yazmak için Jakobiyeen ayrışması kullanılmıştır. Buna göre, için açık olarak $\bar{X}_{2p,a}/\langle \sigma \rangle$ eğrisi $\bar{X}_{p,a}$ olup,

$$J_{\bar{X}_{2p,a}} \sim J_{\bar{X}_{p,a}}^2 \quad (1.5)$$

şeklinde. Buradan, $\bar{X}_{2p,a}$ nın L –serisi, $\bar{X}_{p,a}$ nın L –serisinin karesi olup,

$$L_{\bar{X}_{2p,a}}(s) = L_{\bar{X}_{p,a}}^2(s) \quad (1.6)$$

şeklinde.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

x, y pozitif tamsayılar ve $n \geq 3$ olduğu durumlarda $x^2 + C = y^n$, $C \in \mathbb{Z}$ şeklindeki denklem yıllarca çalışılmış, fakat genel bir n değeri için sonuç son zamanlarda bulunmuştur. Bu konuyla ilgili ilk kaynak Fermat'a aittir. Fermat, $C = 2$ ve $C = 3$ için $x^2 + 2 = y^3$ durumunda denklemin çözümü üzerine iddia ortaya atmıştır. Bunun ispatı Euler tarafından yayınlanmıştır. Genel bir n değeri için ilk sonuç Lebesgue tarafından verilmiştir. Lebesgue (1850) çalışmasında, $C = 1$ için, $x^2 + 1 = y^n$ denkleminin aşikar çözümden başka çözümünün olmadığını göstermiştir. $C = 3$ ve $C = 5$ için, $x^2 + 3 = y^n$ ve $x^2 + 5 = y^n$ denklemleri sırasıyla Nagell'in (1923) ve (1948) çalışmalarında yer almıştır. Cohn (1993) çalışmasında, $1 \leq C \leq 100$ aralığında olan 77 değer için bu denklemin çözümlerine çalışmıştır. Daha sonra $x^2 + 2^k = y^n$ denklemi Arif-Muriefah (1997), Cohn (1999) ve Mauhua Le (2002) tarafından çalışılmıştır. Liqun Tao' nun (2008) ve (2009) çalışmalarında, $x^2 + 3^k = y^n$ ve $x^2 + 5^k = y^n$ denklemleri yer almaktadır. Çalışmalar daha sonra Luca (2002) tarafından $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, Luca ve Togbe (2008) tarafından $x^2 + 2^a 5^b = y^n$, Goins, Luca ve Togbe (2008) tarafından $x^2 + 2^a 5^b 13^c = y^n$ denklemlerinin çözümleri üzerine yapılan çalışmalarla devam etmiştir. Bütün bu çalışmaların amacı, C nin genel bir değeri için bu tür denklemin çözümlerinin olup olmayacağını tespit etmektir.

Daha genel bir problem olarak $a \in K^*$ olmak üzere

$$y^2 = x^n + a \tag{2.1}$$

denkleminin aritmetik özelliklerini ele almak doğaldır. Bu problem, yapısı itibarıyla daha kavramsal geometri kullanılmasını gerektirmektedir. Afın düzlemde, $n \geq 5$ ve $a \in K^*$ olmak üzere (2.1) denklemiyle verilen eğri hipereliptik bir eğridir.

Hipereliptik eğrilerin genel teorisi, cebirsel eğriler ve kompakt Riemann yüzeyleri ile ilgili hemen her kitapta detaylı olarak incelenmiştir.

Bu çalışmada, Mumford'un (1981) kitabını ana kaynak olarak kullandık. Ayrıca, Litaka (1982) ve Farkas-Kra'nın (1981) kitaplarından yararlandık. Bu kaynaklarda hipereliptik eğrilerin inşası, Weierstrass noktalarının belirlenmesi ve Jakobiye varyetelerinin yapısı ele alınmıştır. Wolfart'ın (1997) çalışmasında Belyi fonksiyonlarının, Lang tahminine uygulamaları ile ilgili önemli sonuçlar yer almaktadır.

Tez çalışmasında, Wolfart'ın (1984) makalesinde, Wolfart'da (1997) tanımlanan “büyük” otomorfizma kavramına ilişkin örnekler, Birkenhake ve Lange'nin (2004) çalışmasında açık denklemlerle verilmiş hipereliptik eğrilerden elde edilmiştir.

Wolfart ve Wüstholz'un (1985) çalışmalarında, hipereliptik Riemann yüzeyleri içinde Lang Tahmininin geçerli olabileceği durumları açıklayıcı bilgiler yer almıştır.

Manin'in (2005) kitabında, zeta fonksiyonları, L -serilerinin elde edilmesi, Jakobiye ile ilgili özellikler tanımlanmıştır. Kompleks çarpmaya sahip eğrilerin Grössenkarakter yardımıyla tarif edilen L -serilerinin yazılabilmesi için ihtiyaç duyulan Grössenkarakter yapısı, Adel halkası ve idel grubu tarif edilerek tanımlanmıştır. Ayrıca Lang'ın (1978) kitabında da kompleks çarpma ile ilgili bilgiler yer almaktadır.

A. Weil'in (1952) çalışmasında, $2 \leq l \leq k$ olacak şekilde $l, k \in \mathbb{Z}$ ve $a, b \in K^*$ olmak üzere

$$y^l = ax^k + b \quad (2.2)$$

şeklindeki bütün eğrilerde kompleks çarpmanın var olduğu ve böylece bu tip eğrilerin L -serilerinin, Grössenkarakter yardımıyla tarif edilen L -serileri ile yazılabileceği gösterilmiştir. İncelediğimiz eğrilerin L -serilerini Grössenkarakter yardımıyla ifade edebilmek için, eğrinin Jakobiye varyetesi kullanılmıştır. Bu noktada Jakobiye varyetesinin parçalanabilmesi önemli kolaylıklar sağlamaktadır.

Paulhus'un (2007) tezinde, Kani ve Rosen (1989) tarafından verilen bir teorem yardımıyla bir eğrinin Jakobiye'nin, daha küçük eğrilerin Jakobiye'lerine parçalanması suretiyle nasıl yazılabileceği ile ilgili durumlar verilmiştir.

Ireland ve Rosen'ın (1998) kitabında, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ cismi üzerinde, kompleks çarpmaya sahip

$$y^2 = x^3 + a \quad (2.3)$$

şeklinde verilen eliptik eğrinin Grössenkarakter kullanarak tarif edilen L -serisinin yazılabilmesi için gerekli bilgiler yer almaktadır.

Silverman'ın (2009) kitabında, eliptik eğrilerin aritmetik özellikleri ile ilgili bilgiler yer almaktadır. Eliptik eğriler için lokal ve global L -serilerinin yazılması, Grössenkarakter kullanarak L -serilerinin yazılması konuları üzerinde bilgi verilmiştir. Kompleks çarpmanın tanımlanabilmesi için gerekli endomorfizm halkası tanımlanmış, bir eliptik eğri için Grössenkarakter tanımı verilmiştir.

Silverman'ın (1994) kitabında, Grössenkarakter ile tanımlanan L – serilerinin kompleks düzlem üzerinde aldığı her değer için analitik genişlemesinin olduğu belirtilmiştir.

3. TEORİK ESASLAR

3.1. Hipereliptik Eğriler ile İlgili Genel Bilgiler

Bu bölümde kompakt hipereliptik eğrilerin inşası ile ilgili metotlar hatırlatılmıştır. Araştırma sonuçları kısmında üzerinde durulacak $y^2 = x^n + a$ denklemi ile inşa edilen eğrinin Weierstrass noktaları ve eğrinin indirgenmiş otomorfizma grubu yapısı ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Tanım 3.1.1. X ve Y düzgün, projektif eğriler olmak üzere, derecesi r olan örten $f : X \rightarrow Y$ morfizmasına r -katlı örtü denir. Özel olarak, iki katlı örtüye *çift örtü* denir (Litaka, 1982, syf. 216).

Düzgün projektif X eğrisinin üzerindeki holomorfik 1- formların sonlu bir vektör uzayı olduğu bilinmektedir. X in cinsi bu uzayın boyutu olarak tanımlanır. $g(X)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.2. (Riemann-Hurwitz Formülü)

Eğer $f : X \rightarrow Y$ morfizmasının r -katlı örtüsü varsa; $e(p)$, f örtüsünün p noktasındaki dallanma indeksi olmak üzere,

$$2g(X) - 2 = r(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (e(p) - 1) \quad (3.1)$$

dir (Litaka, 1982, syf. 216-217).

Hatırlatma 3.1.3. Riemann-Hurwitz formülü, Riemann yüzeylerinin bir örtüsü içinde diğer değişmezler ile cins arasındaki bağıntıyı verir.

Tanım 3.1.4. $g(X) \geq 2$ olmak üzere, $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ çift örtüsü varsa, X eğrisine *hipereliptik eğri* denir.

$\bar{X}_{n,a}$ hipereliptik bir eğri olmak üzere, aşağıda verilen özellikler, hipereliptik eğrilerin genel teorisinden bilinmektedir.

- $$\begin{aligned} \varphi: \bar{X}_{n,a} &\rightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x, y) &\rightarrow x \end{aligned} \quad (3.2)$$

biçimindeki çift örtü tektir ve $\tau_h \in \text{Aut}(\bar{X}_{n,a})$ tarafından belirlenir. Burada $\bar{X}_{n,a}$ eğrisini 1 boyutlu projektif bir doğruya taşımaktaki amaç, sonsuzdaki noktaları da dahil etmektir. Bu amaçla, $x' = \frac{1}{x}$ ve $y' = \frac{y}{x^m}$ olmak üzere, $y^2 = f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ denklemi yeniden yazılırsa,

$$\begin{aligned} (y'x^m)^2 &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{x'} - x_i \right) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1 - x_i x'}{x'} \right) \\ (y')^2 x^{2m} &= (y')^2 \frac{1}{(x')^{2m}} = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1 - x_i x'}{x'} \right) \\ \frac{(y')^2}{(x')^{2m}} &= \frac{1}{(x')^n} \prod_{i=1}^n (1 - x_i x') \\ \frac{(y')^2 (x')^n}{(x')^{2m}} &= \prod_{i=1}^n (1 - x_i x') \end{aligned} \quad (3.3)$$

olup buradan,

$$\begin{aligned} n = 2m \text{ için, } (y')^2 &= \prod_{i=1}^n (1 - x_i x') \\ n = 2m - 1 \text{ için, } (y')^2 &= x' \prod_{i=1}^n (1 - x_i x') \end{aligned} \quad (3.4)$$

bulunur. Buna göre, n çift ise, $x' = 0, y' = \pm 1$ için sonsuzda iki nokta vardır. n tek ise, $x' = 0, y' = 0$ için sonsuzda bir nokta vardır (Mumford, 1984, syf. 12-13).

- Riemann-Hurwitz Formülü ile $y^2 = f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ hipereliptik eğri

denkleminin $\mathbb{P}^1$ projektif doğrusuna çift örtü tanımlanabildiğinden,

$$\begin{aligned} n = 2m - 1 &\Rightarrow 2g(\bar{X}_{n,a}) - 2 = 2(g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{i=1}^{n+1} 1 \\ &\Rightarrow 2g(\bar{X}_{n,a}) - 2 = -4 + 2m \\ &\Rightarrow g(\bar{X}_{n,a}) = m - 1 \\ &\Rightarrow g(\bar{X}_{n,a}) = \frac{n-1}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ve

$$\begin{aligned}
n = 2m &\Rightarrow 2g(\bar{X}_{n,a}) - 2 = 2(g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{i=1}^n 1 \\
&\Rightarrow 2g(\bar{X}_{n,a}) - 2 = -4 + 2m \\
&\Rightarrow g(\bar{X}_{n,a}) = m - 1 \\
&\Rightarrow g(\bar{X}_{n,a}) = \frac{n-2}{2}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

cinsleri elde edilir. Yani, derecenin tek veya çift olma durumuna göre eğrinin cinsleri bu şekilde bulunur. Örneğin, $\bar{X}_{5,p} : y^2 = x^5 + p$ ve $\bar{X}_{6,p} : y^2 = x^6 + p$ eğrilerinin cinsleri bulunurken Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak,

$n = 5$ için,

$$\begin{aligned}
2g - 2 &= 2(g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{i=1}^{n+1} 1 \\
g &= 2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$n = 6$ için,

$$\begin{aligned}
2g - 2 &= 2(g(\mathbb{P}^1) - 2) + \sum_{i=1}^n 1 \\
g &= 2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

bulunur. ■

- φ çift örtüsü, $\omega_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)}$ ($k = 1, \dots, n$) olmak üzere,
 n çift sayı iken, tam olarak $(\omega_k, 0)$ Weierstrass noktalarında dallanır.
 n tek sayı iken, tam olarak $(\omega_k, 0)$ ve ∞ Weierstrass noktalarında dallanır.
- $\tau_h, \bar{X}_{n,a}$ nın otomorfizma grubunun merkezinin elemanıdır.

Tanım 3.1.5. İndirgenmiş otomorfizma grubu, $\bar{G} = \text{Aut}(\bar{X}_{n,a}) / \langle \tau_h \rangle$ bölüm grubu şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.6. M , cinsi $g \geq 2$ olan hipereliptik bir Riemann yüzeyi olsun. $\varphi : M \rightarrow \mathbb{P}^1$ hipereliptik morfizmasının dallanma noktaları tam olarak M nin Weierstrass noktalarıdır. Cinsi $g \geq 2$ olan hipereliptik Riemann yüzeylerinin tam olarak $2g + 2$ tane Weierstrass noktası vardır (Farkas ve Kra, 1981, syf. 95).

3.2. Belyi Yüzeyi ve Lang Tahmini

Tahmin 3.2.1. (Lang Tahmini) X , herhangi bir sayı cismi üzerinde tanımlı cinsi $g \geq 2$ olan projektif, düzgün, bir eğri; sabit $\Phi(0) \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ ve $d\Phi_0 : T_0 D_r \rightarrow T_{\Phi(0)} X$ diferansiyeli cebirsel olmak üzere, $\Phi : D(r) \rightarrow X$ normalize edilmiş evrensel örtü dönüşümü olsun. O halde,

- i) r yarıçapı transandant bir sayıdır.
- ii) $\alpha \in D_r(\overline{\mathbb{Q}})$, $\alpha \neq 0$ için $\Phi(\alpha) \notin X(\overline{\mathbb{Q}})$ dir.

Lang'ın bu tahmini $\overline{X}_{n,a}$ eğrileri üzerinde incelemek için öncelikle eğri üzerinde bir Belyi fonksiyonunun tanımlı olduğunu ve bununla birlikte eğrinin otomorfizma grubunun “büyük” olması ile olan ilişkisi incelenecektir.

Tanım 3.2.2. Eğer f fonksiyonu, X kompakt Riemann yüzeyi üzerinde en fazla üç nokta üzerinde dallanan, sabitten farklı bir meromorfik fonksiyon ise, f fonksiyonuna X üzerinde bir *Belyi fonksiyonu* denir (Wolfart, 1997, syf. 97).

Tanım 3.2.3. Eğer X kompakt Riemann yüzeyinin yukarıdaki tanımda verilen koşulları gerçekleyen bir Belyi fonksiyonu varsa, X e *Belyi yüzeyi* denir (Wolfart, 1997, syf. 98).

Tanım 3.2.4. X cinsi $g > 1$ olan bir kompakt Riemann yüzeyi, $Aut(X)$ X in otomorfizma grubu olsun. M_g modül uzayı üzerinde X e karşılık gelen p noktasının bir U komşuluğu içinde, her $q \neq p$ için, q ya karşılık gelen Y Riemann yüzeyinin otomorfizma grubu için, $|Aut(Y)| < |Aut(X)|$ eşitsizliği gerçekleşiyorsa, X in otomorfizma grubu “büyüktür” denir (Wolfart, 1997, syf. 106).

Örnek 3.2.5. $Aut(\overline{X}_{6,-1})$ eğrisi “büyük” gruptur. Bu Riemann yüzeyi için, Tanım 3.2.4. deki gösterimde, p_1 ve p_2 noktaları sırasıyla $y^2 = x(x^4 - 1)$ ve $y^2 = x(x^5 - 1)$ eğrileri ile ilgili noktalar olmak üzere $U = M_2 - \{p_1, p_2\}$ alt uzayı olarak alınır. Çünkü

$Aut(\bar{X}_{6,-1})$, $y^2 = x(x^4 - 1)$ ve $y^2 = x(x^5 - 1)$ eğrileri dışındaki cinsi 2 olan tüm diğer eğrilerin otomorfizma grubundan kesinlikle “büyüktür” (Birkenhake ve Lange, 2004, syf. 340).

Teorem 3.2.6. Cinsi $g > 1$ olan kompakt bir X Riemann yüzeyinin otomorfizma grubu $Aut(X)$ in “büyük” olması için gerek ve yeter şart normal bir örtü olarak tanımlanan bir $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ Belyi fonksiyonunun var olmasıdır (Wolfart, 1997, syf. 107).

3.3. Eğrinin L-Serisi ve Jakobiyesi

Bir X eğrisi için aşağıdaki notasyon kullanılacaktır.

- X eğrisi, bir K sayı cismi üzerinde tanımlıdır.
- $\mathcal{O}_K$, K cisminin tamsayılar halkasıdır.
- $\rho \subset \mathcal{O}_K$ bir asal idealdir.

Tanım 3.3.1. Bir K cismi üzerindeki *değişmeli varyete*, cisim üzerinde indirgenemez projektif değişmeli bir cebirsel gruptur.

Hatırlatma 3.3.2. Bilindiği gibi A, B değişmeli varyeteleri arasında sadece 0_A elemanını 0_B elemanına götüren morfizmalar ele alınmaktadır. $\lambda : A \rightarrow B$ şeklinde bir varyete morfizmasının grup yapılarıyla uyumlu olması için gerek ve yeter şart $\lambda(0_A) = 0_B$ olmasıdır.

Tanım 3.3.3. A ve B değişmeli ve boyutları aynı varyeteler olmak üzere, $\lambda : A \rightarrow B$ örten morfizmasına *izojeni*, A ve B ye de *izojenik değişmeli varyeteler* denir.

Tanım 3.3.4. A dan A ya tanımlanan (grup yapısıyla uyumlu) her morfizmaya A nın bir *endomorfizması* denir ve $End(A)$ ile gösterilir. Endomorfizma cümlesi üzerinde $\alpha, \beta \in End(A)$ için,

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)(x) &= \alpha(x) + \beta(x) \\
(\alpha \cdot \beta)(x) &= \alpha(\beta(x))
\end{aligned} \tag{3.9}$$

işlemleri ile belirlenen tabii bir halka yapısı vardır.

Tanım 3.3.5. Eğer boyutu g olan A değişmeli varyetesi için derecesi $2g$ olan bir K sayı cismi ve bir $\iota: K \rightarrow \text{End}(A) \otimes \mathbb{Q}$ gömmesi varsa, “ A değişmeli varyetesinin K cismi üzerinde *kompleks çarpması* vardır” denir (Silverman, 2009, syf. 69-70).

Örnek 3.3.6. $E: y^2 = x^3 - x$ denklemi ile verilen E/K eliptik eğrisi için, $\text{char}(K) \neq 2$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere $i \in \bar{K}$ birimin ilkel dördüncü kökü olacak şekilde, $[i]$ ile gösterilen

$$[i]: (x, y) \rightarrow (-x, iy) \tag{3.10}$$

dönüşümü vardır. Bu dönüşüm vasıtasıyla tanımlanan

$$\begin{aligned}
i: \mathbb{Q}(i) &\rightarrow \text{End}(E) \otimes \mathbb{Q} \\
i &\mapsto [i]
\end{aligned} \tag{3.11}$$

gömmesi, E eliptik eğrisinin kompleks çarpması olduğunu gösterir (Silverman, 2009, syf. 69-70).

Tanım 3.3.7. Değişmeli bir R halkasının (R den farklı) bütün asal ideallerinin kümesine R nin *spektrumu* denir ve $\text{Spec}(R)$ ile gösterilir. $x \in \text{Spec}(R)$ elemanına *spektrumun bir noktası* denir ve bununla ilgili ideal $\rho_x \subset R$ ile gösterilir (Manin, 2005, syf. 193).

Hatırlatma 3.3.8. Bilindiği gibi herhangi bir $\rho \subset R$ idealinin asal olması için gerek ve yeter şart R/ρ bölüm halkasının sıfır bölensiz olmasıdır.

$\mathcal{O}_K$, K cisminin tamsayılar halkası olmak üzere, $\mathcal{O}_K$ nın spektrumu $\text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ ile gösterilir. Burada K cismi üzerinde tanımlı, boyutu d olan projektif bir X eğrisi düşünelim. Zeta fonksiyonu yardımıyla X üzerindeki K - rasyonel noktaları incelemek için, $\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ *arimetik şeması* tanımlanır (Manin, 2005, syf. 196-197).

$\mathcal{X} \rightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$, tamsayılar halkası $\mathcal{O}_K$ olan bir K sayı cismi üzerinde $X = \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} K$, boyutu d olan düzgün, projektif bir varyete olacak şekilde bir aritmetik şema ve $X_\rho = \mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K/\rho)$, X in bir maksimal $\rho \subset \mathcal{O}_K$ ideali moduna indirgenmesi olmak üzere, X_ρ varyetesinin zeta fonksiyonu; X_ρ^0 , X_ρ varyetesinin kapalı noktalarının kümesi olacak şekilde ve $N(x) = |\mathcal{O}_K/\rho|$ olmak üzere,

$$\zeta_{X_\rho}(s) = \prod_{x \in X_\rho^0} \frac{1}{1 - N(x)^{-s}} \quad (3.12)$$

şeklinde verilir. $\mathcal{X}$ şemasının Zeta fonksiyonu,

$$\zeta_X(s) = \prod_{\rho} \zeta_{X_\rho}(s) \quad (3.13)$$

dir (Manin, 2005, syf. 261).

Teorem 3.3.9. $\mathcal{X}$ in zeta fonksiyonu; $\dim \mathcal{X}$, $\mathcal{X}$ in boyutu olmak üzere, $\text{Re}(s) > \dim \mathcal{X}$ değerleri için yakınsaktır (Manin, 2005, syf. 261).

$K(\rho)$ sonlu cismi üzerinde tanımlı X_ρ -şemasının zeta fonksiyonu olan $\zeta_{X_\rho}(s)$ için aşağıdaki özellikler bilinmektedir.

- $\zeta_{X_\rho}(s) = \exp \left(\sum_1^\infty N(r) \frac{q^{-sr}}{r} \right)$ (3.14)
- Holomorfik metotlar vasıtasıyla $N(r)$ daha açık bir şekilde yazılırsa, yukarıdaki ifade,

$$\zeta_{X_\rho}(s) = \prod_0^{2d} L_{X_{\rho,i}}(s)^{(-1)^{i+1}} \quad (3.15)$$

şeklinde (Manin, 2005, syf. 291).

Tanım 3.3.10. X_ρ , $\rho \in \text{Spec}(\mathcal{O}_K)$ kapalı noktaları üzerinde singüler olmayan bir lif ise iyi indirgenmesi vardır. X_ρ , singüler bir lif ise kötü indirgenmesi vardır (Manin, 2005, syf. 212).

Tanım 3.3.11. X eğrisi, K cismi üzerinde tanımlı düzgün, projektif bir eğri olsun. X üzerinde, derecesi 0 olan öyle bir değişmeli varyete vardır ki, bu değişmeli varyeteye X in Jakobiyesi denir ve J_X ile gösterilir (Manin, 2005, syf. 228).

Bir eğrinin Jakobiyesinin bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

- $\dim(J_X) = g$ (X eğrisinin cinsi)
- K nin her L cisim genişlemesi için $J_X(L)$ grubu, L ye genişleyen X üzerinde, derecesi 0 olan bölen sınıflarının grubu ile kanonik olarak izomorftur.
- Eğer X eğrisinin cebirsel K sayı cismi üzerinde bir mod $\rho \subset \mathcal{O}_K$ asal idealine göre iyi indirgenmesi varsa, J_X in de iyi indirgenmesi vardır (Manin, 2005, syf. 228-229).
- Kötü asallardan gelen faktörler ihmal edilirse, X eğrisinin L – serisinin, J_X Jakobiye varyetesinin L – serisi ile çakıştığı görülür.

Teorem 3.3.12. Herhangi bir X eğrisi verilsin. $i \neq j$ olmak üzere $H_i \cap H_j = 1_G$ şartını sağlayan $H_i \leq G$ altgrupları için $G = H_1 \cup \dots \cup H_t$ olacak şekilde $G \leq \text{Aut}(X)$ sonlu grubu olsun. O halde $g = |G|$, $h_i = |H_i|$ ve J^m , J Jakobiyesinin m defa kendisi ile çarpımını göstermek üzere,

$$J_X^{t-1} \times J_{X/G}^g \sim J_{X/H_1}^{h_1} \times \dots \times J_{X/H_t}^{h_t} \quad (3.16)$$

izojeni bağıntısı vardır (Kani ve Rosen, 1989).

G nin eşlenik altgrupları ile ilgili bir sonuç kullanılarak bazı bölüm Jakobiyelelerini birleştiren önerme şu şekildedir.

Önerme 3.3.13. H_1 ve H_2 , G nin altgrupları olmak üzere birbirlerinin eşleniği olsunlar. O halde, $X/H_1 \cong X/H_2$ dir (Paulhus, 2007).

$L_X(s)$ serisinin meromorfik bir fonksiyon olarak verilmesi zor bir problemdir. Ancak özel hallerde X eğrisinin Jakobiyesi J_X e ait L – serisi ile irtibatlandırılarak açık ifadesi elde edilebilir. Bilindiği gibi,

$$y^l = ax^k + b \quad (3.17)$$

şeklindeki bütün eğrilerde kompleks çarpma vardır ve böylece bu tip eğrilerin L – serisi, Grössenkarakter yardımıyla tarif edilen Hecke L – serisi vasıtasıyla yazılabilir (Weil, 1952, syf. 492).

Tanım 3.3.14. $\mathbb{A}_K$ Adel halkası; $\sum$ indeks kümesi K cisminin bütün yerlerini göstermek üzere, $\prod_{v \in \sum} K_v$ çarpımın alt halkası olarak

$$\mathbb{A}_K = \left\{ \alpha = (\alpha_v) \in \prod_{v \in \sum} K_v \mid \alpha_v \in \mathcal{O}_v \text{ sonlu sayıda, } v \text{ hariç} \right\} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanır (Manin, 2005, syf. 147).

Tanım 3.3.15. $\mathbb{A}_K$ adel halkasının tersinir elemanlarının $\mathbb{A}_K^*$ topolojik grubuna, K cisminin *idel grubu* denir (Manin, 2005, syf. 149).

Tanım 3.3.16. $\psi(K^*) = 1$ olacak şekildeki $\psi : \mathbb{A}_K^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ sürekli homomorfizmasına K sayı cismi üzerinde *Grössenkarakter* denir (Silverman, 1994, syf. 165).

Tanım 3.3.17. Bir ψ Grössenkarakterine karşılık gelen Hecke L – serisi, $\psi : \mathbb{A}_K^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ Grössenkarakter olmak üzere

$$L(s, \psi) = \prod_{\rho} \left(1 - \psi(\rho) N(\rho)^{-s} \right)^{-1} \quad (3.19)$$

şeklinde, Euler çarpımıyla tanımlanır (Silverman, 1994, syf.173).

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

4.1. $\bar{X}_{n,a}$ Hipereliptik Eğrisinin Otomorfizma Grubu

Hipereliptik eğriler, aritmetik ve geometrik problemlerle ilgili çalışmalarda özel bir yer tutmaktadır. Bunun nedeni, afin düzlemde

$$y^2 = f(x) \quad (4.1)$$

şeklinde ifade edilen bu eğrilerin elementer tekniklerle incelenmesinin mümkün olmasıdır. Özellikle, otomorfizma gruplarının birden fazla eleman içermesi durumu, çalışmalarda kolaylık sağlamaktadır. Aşağıda ilk olarak, $\bar{X}_{n,a}$ eğrisinin otomorfizma grubu belirlenmiştir. Literatürde çeşitli kaynaklarda yer alan bu sonuç,

$$\varphi: \bar{X}_{n,a} \rightarrow \mathbb{P}^1 \quad (4.2)$$

çift örtüsü kullanılarak farklı bir yoldan elde edilmiştir.

Önerme 4.1.1. $a, b \in K^*$ için, n çift ise $\bar{X}_{n,a}$ ve $\bar{X}_{n,b}$, $K\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ cismi üzerinde, n

tek ise $K\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$ cismi üzerinde izomorftur.

İspat:

$$\begin{aligned} \Psi: \bar{X}_{n,a} &\rightarrow \bar{X}_{n,b} \\ (x, y) &\rightarrow \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} x, \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} y \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm,

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} x \right)^n + b &= \frac{bx^n}{a} + b \\ &= \frac{b}{a}(x^n + a) \\ &= \frac{b}{a}y^2 = \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2}} y \right)^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

olduğundan, iyi tanımlıdır. Bu dönüşüm tersinir bir dönüşümdür ve n çift ise $K\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}\right)$ üzerinde; n tek ise, $K\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n}, \left(\frac{b}{a}\right)^{1/2}\right)$ üzerinde tanımlıdır. Öyleyse bu dönüşüm bir izomorfizmadır. ■

Önerme 4.1.2. İndirgenmiş otomorfizma grubu için aşağıda verilen eşitlik geçerlidir.

$$\bar{G} \cong \begin{cases} D_n, & n \text{ çift sayı ise} \\ \mathbb{Z}_n, & n \text{ tek sayı ise} \end{cases} \quad (4.5)$$

İspat:

Önerme 4.1.1. den ispat özel olarak $\bar{X}_{n,1}$ eğrisi üzerinden yapılacaktır.

n çift ise, $\sigma \in \bar{G}$ olsun. O halde, σ Weierstrass noktaları permütasyon olarak etki eder. Diğer taraftan σ , τ_h ile değişmeli olduğundan, σ nın x koordinatı üzerindeki etkisi bir $T_\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ elemanı belirler. T_σ lineer kesir transformasyonu $|x|=1$ i kendine dönüştürür. Böylece, T_σ dönüşümünün birim diski kendi üzerine götürdüğünü kabul edebiliriz. Şimdi, n -genin ω_k köşe noktaları ile ilgili permütasyon etkisinin bir dönme olduğunu söylemek zor değildir. Öyleyse $a(z) = \frac{1}{z}$ ve $b(z) = \xi_n z$ olmak üzere,

$$\sigma \in \text{Aut}(n\text{-gen}) = D_n = \langle a, b : a^2 = b^n = (ab)^2 \rangle \quad (4.6)$$

dir. Bu durumda, $\bar{G} \leq D_n$ elde edilir. $\bar{G} \cong D_n$ olduğunu ispatlamak için, her $h \in D_n$ elemanının $\text{Aut}(\bar{X}_n)$ içinde bir σ_h elemanı tanımladığını kontrol etmek gerekir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \sigma_h : \bar{X}_n &\rightarrow \bar{X}_n \\ (x, y) &\mapsto (hx, y) \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece,

$$\begin{aligned} D_n &\hookrightarrow \bar{G} \\ h &\mapsto \sigma_h \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. Bu tanımın doğru olduğunu göstermek için, sadece D_n kümesinin tanımını kullanarak a ve b elemanlarını kontrol etmek yeterlidir. Buna göre, $a, b \in D_n$ için, $(x, y) \in \bar{X}_{n,1}$ olmak üzere,

$$(b(x))^n + 1 = (\xi_n x)^n + 1 = x^n + 1 = y^2 \quad (4.8)$$

olup, $(b(x), y) \in \bar{X}_{n,1}$ dir.

$$\begin{aligned} (a(x))^n + 1 &= \left(\frac{1}{x}\right)^n + 1 = \frac{1+x^n}{x^n} \\ &= \frac{y^2}{x^n} \\ &= \left(\frac{y}{x^{n/2}}\right)^2 = y'^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

olduğundan $(a(x), y) \in \bar{X}_{n,1}$ dir.

Böylece,

$$\bar{G} \cong D_n \quad (4.10)$$

dir.

n nin tek olması durumu, n nin çift olması durumuyla benzerdir. Öyleyse,

$$\bar{G} \leq D_n \quad (4.11)$$

dir. Burada, $b \in D_n$ için, $(x, y) \in \bar{X}_{n,1}$ olmak üzere,

$$(b(x))^n + 1 = (\xi_n x)^n + 1 = x^n + 1 = y^2 \quad (4.12)$$

dir. Fakat $a \in D_n$ için,

$$a(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (4.13)$$

olup, bu nokta bir Weierstrass noktası olmadığından, $(a(x), y) \notin \bar{X}_{n,1}$ dir. Bu durumda,

$a \in D_n$, $\bar{G}$ bölüm grubunun bir elemanı değildir. Böylece,

$$\bar{G} = \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_n \quad (4.14)$$

bulunur. ■

Hatırlatma 4.1.3. İndirgenmiş otomorfizma grupları farklı olduğundan $i \neq j$ ise, $\bar{X}_{i,a}$

ve $\bar{X}_{j,b}$ ler izomorf değildirler.

4.2. $\bar{X}_{n,a}$ Eğrisi ve Lang Tahmini

Lang'ın örtü yarıçapı ile ilgili tahmini $\bar{X}_{n,a}$ eğrileri için incelenirken Wolfart'a ait olan ve Teorem 3.2.6. de verilen sonuç kullanılmıştır. Bunun için öncelikle eğri üzerinde bir Belyi fonksiyonunun tanımlı olduğu ve dolayısıyla eğrinin Belyi yüzeyi olduğu gösterilmiştir.

Önerme 4.2.1. $\bar{X}_{n,a}$ eğrisi bir Belyi yüzeyidir.

İspat: Önerme 4.1.1. den dolayı ispatı $\bar{X}_{n,-1}$ için yapmak yeterlidir.

n sayısının tek olduğu durumlarda:

$$\begin{aligned} b: \bar{X}_{n,-1} &\rightarrow \bar{X}_{n,-1} \\ (x, y) &\rightarrow (\xi_n x, y) \end{aligned} \quad (4.15)$$

dönüşümünün $Aut(\bar{X}_{n,-1})$ nin bir elemanı olduğu Önerme 4.1.2. de ifade edilmişti. O halde, $\langle b \rangle = H$, $Aut(\bar{X}_{n,-1})$ nin mertebesi n olan alt grubu olup, buradan

$$\begin{aligned} f: \bar{X}_{n,-1} &\rightarrow \bar{X}_{n,-1}/H \\ (x, y) &\rightarrow [x, y] \end{aligned} \quad (4.16)$$

holomorfik dönüşümü elde edilir. Bu dönüşüm, H etkisinin ilgili yörüngesinin uzunluğu n den küçükse, bir nokta üzerinde dallanır. Böylece f dönüşümünün $[x, y]$ üzerinde dallanması için gerek ve yeter şart bazı l, t sayıları için $s = l - t$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} b^l(x, y) = b^t(x, y) &\leftrightarrow (\xi_n^l x, y) = (\xi_n^t x, y) \\ &\leftrightarrow \xi_n^l x = \xi_n^t x \\ &\leftrightarrow \xi_n^s x = x \end{aligned} \quad (4.17)$$

olmasıdır. O halde, $x = 0$ veya $x = \infty$ dur ($x' = 0$).

Eğer $x = 0$ ise, $y^2 = -1$ dir. Eğer, $x = \infty$ ise, $y = \infty$ dur ($y' = 0$). Öyleyse f dönüşümü $[0, i], [0, -i], \infty$ olmak üzere üç noktada dallanır. Bu dönüşüm, $Aut(\bar{X}_{n,-1})$ nin bir alt grubunun etkisi tarafından uyarıldığından normal örtüdür.

$\bar{X}_{n,-1}/H$ nin cinsini belirlemek için

$$\begin{aligned}
(0, i) &= b(0, i) = b^2(0, i) = \dots = b^{n-1}(0, i) \\
(0, -i) &= b(0, -i) = b^2(0, -i) = \dots = b^{n-1}(0, -i) \\
(\infty, \infty) &= b(\infty, \infty) = b^2(\infty, \infty) = \dots = b^{n-1}(\infty, \infty)
\end{aligned} \tag{4.18}$$

f dönüşümünün üç noktada dallandığı gözlemlenir. Bu yüzden Riemann-Hurwitz formülü yardımıyla,

$$2\left(\frac{n-1}{2}\right) - 2 = n(2g - 2) + 3(n-1) \tag{4.19}$$

bulunur ve buradan $g=0$ olduğu görülür. Böylece f dönüşümü, $\bar{X}_{n,-1}$ üzerinde bir Belyi fonksiyonudur.

n sayısının çift sayı olduğu durumlarda:

$$\begin{aligned}
b: \bar{X}_{n,-1} &\rightarrow \bar{X}_{n,-1} \\
(x, y) &\rightarrow (\xi_n x, y)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tau_h: \bar{X}_{n,-1} &\rightarrow \bar{X}_{n,-1} \\
(x, y) &\rightarrow (x, -y)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

dönüşümlerinin $Aut(\bar{X}_{n,-1})$ nin elemanları olduğunu Önerme 4.1.2. den hatırlayalım. O halde, $\langle b, \tau \rangle = H$, $Aut(\bar{X}_{n,-1})$ nin mertebesi $2n$ olan bir alt grubudur. $\tau_h b = b \tau_h$ ve $\tau_h^2 = b^n = 1$ olduğundan, $|H| = 2n$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
f: \bar{X}_{n,-1} &\rightarrow \bar{X}_{n,-1}/H \\
(x, y) &\rightarrow [x, y]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

holomorfik bir dönüşüm bulunur. f dönüşümünün $[x, y]$ üzerinde dallanması için gerek ve yeter şart

$$(\xi_n^l x, y) = (\xi_n^t x, y) \tag{4.23}$$

veya

$$(\xi_n^l x, y) = (\xi_n^t x, -y) \tag{4.24}$$

olmasıdır.

Eğer $(\xi_n^l x, y) = (\xi_n^t x, y) \leftrightarrow (x, y) = (\xi_n^s x, y)$ ise, $x=0$ veya $x=\infty$ dur.

Eğer $x=0$ ise, $y=i$ veya $y=-i$ dir. Fakat $[0, i] \equiv [0, -i]$ dir.

Eğer $(x' = 0$ olacak şekilde) $x = \infty$ ise, $(y' = \pm 1$ olacak şekilde) $y = \pm \infty$ dur. Fakat $[\infty, +\infty] \equiv [\infty, -\infty]$ dur.

Eğer $(\xi_n^l x, y) = (\xi_n^l x, -y)$ ise, $y = 0$ dır. $y = 0$ olduğundan, $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $x = \xi_n^k$ dır. Böylece f dönüşümü $[0, i]$, $[\infty, \infty]$ ve $[\xi_n, 0]$ noktaları olmak üzere 3 noktada dallanır.

$$f: \bar{X}_{n,-1} \rightarrow \bar{X}_{n,-1}/H \quad (4.25)$$

normal bir örtüdür.

Riemann-Hurwitz formülü yardımıyla,

$$2\left(\frac{n-2}{2}\right) - 2 = 2n(2g-2) + 2(n-1) + 2(n-1) + n \text{ ve } g=0 \text{ bulunur.}$$

Böylece f dönüşümünün $\bar{X}_{n,-1}$ üzerinde bir Belyi fonksiyonu olduğu görülür. ■

Önerme 4.2.2. $\bar{X}_{n,a}$ eğrisinin otomorfizma grubu “büyüktür”.

İspat: Önerme 4.2.1. den $\bar{X}_{n,a}$ eğrisi bir Belyi yüzeyi olup Teorem 3.2.6. gereği $Aut(\bar{X}_{n,a})$ “büyük” olmak şartını sağlar. ■

Sonuç 4.2.3. $\Phi(0)$, β Belyi dönüşümünün bir dallanma noktası olacak şekilde normalize edilmiş

$$\Phi: D(r) \rightarrow \bar{X}_{n,a} \quad (4.26)$$

örtü dönüşümleri olmak üzere, Lang tahmini $\bar{X}_{n,a}$ için geçerlidir.

İspat: Wolfart ve Wüstholtz (1985)’un çalışmasında “Satz 5” de verilen sonuç uygulandığında Sonuç 4.2.3. elde edilir. ■

Örnek 4.2.4. Wolfart (1984)’ın çalışmasında “Satz 2” de

$$x^3 = uv^2, \quad y^2 = u^2 + v^2 \quad (4.27)$$

şeklinde ifade edilen eğriler için verilen sonuç, $v=1$ alınarak $y^2 = x^6 + 1$ eğrisine uygulanır ve

$$\Phi: D(r) \rightarrow \bar{X}_{n,a} \quad (4.28)$$

normalize edilmiş örtü dönüşümünde r yarıçapının transdant bir sayı olduğu görülür.

4.3. $L_X(s)$ Üzerine Hatırlatmalar

Öncelikle, $y^2 = x^n + a$ eğri denkleminin bir ρ asal ideale göre indirgenmesinin singüler olduğu tüm durumları inceleyelim.

- $\rho|a$ ve $n = 2m$ ise, eğri denklemi için

$$\begin{aligned} y^2 &= x^{2m} \\ y^2 - (x^m)^2 &= 0 \\ (y - x^m)(y + x^m) &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

olduğundan, bu durumda eğri iki indirgenemez, düzgün eğrinin kesişmesi şeklinde singüler eğridir.

- $p \in \mathbb{Z}$, $p|\rho$ ve $b \equiv a \pmod{\rho}$ olacak şekilde $p|n$ ise, $|\mathcal{O}_K/\rho| = |\mathbb{F}_q| = q = p^r$ olmak üzere $b^q \equiv b \pmod{\rho}$ kullanılarak $y^2 = x^{mp} + b^{p^r}$ elde edilir. Denklemi düzenlersek:

$$y^2 = (x^m + b^{p^{r-1}})^p \quad (4.30)$$

elde edilir ki, bu da singüler bir eğridir.

$y^2 = x^n + a$ şeklindeki hipereliptik eğrilerin L – serileri,

$$L_{\bar{X}_{n,a}}(s) = \prod_{\text{iyi asallar}} L_{\bar{X}_{\rho n,a}}(s) \prod_{\text{kötü asallar}} L_{\bar{X}_{\rho n,a}}(s) \quad (4.31)$$

şeklindedir.

Kompleks çarpmaya sahip bir eğrinin Jakobiyeinin L – serisinin, Grössenkarakter ile tanımlanan L – serisi olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla, Silverman (1994) daki Teorem 10.3 e göre, ψ Grössenkarakteri yardımıyla yazılan $L(s, \psi)$ serisinin kompleks düzlem boyunca bütün s değerleri için bir analitik genişlemesi vardır.

p tek bir asal sayı olmak üzere, $n = 2p$ için $L_{\bar{X}_{n,a}}(s)$ nin L – serisini daha düşük dereceli eğrilerin L – serilerinin çarpımı şeklinde yazmak için Jakobiyeinin ayrışması kullanılmıştır. Bu amaçla, Paulhus (2007)’un tekniklerinden yararlanılmıştır.

Öncelikle p tek asal olmak üzere, $n=2p$ durumu için, $\bar{X}_{n,-1}$ eğrisinin Jakobiyeinin daha küçük cinsli eğrilerin Jakobiyeinlerinin çarpımı olacak şekilde nasıl ayrıştığını gözlemleyelim. Bu durumu örneklerle inceleyeceğiz. Sonrasında bu sonuçlar $g=2,3,4$ için $\bar{X}_{n,-1}$ eğrisinin L -serisini belirlemek için kullanılacaktır.

- $n=6$ için, $\bar{X}_{6,-1} : y^2 = x^6 - 1$ eğrisinin otomorfizma grupları $\tau_h(x, y) = (x, -y)$ ve $\sigma(x, y) = (-x, y)$ olsunlar. Burada $|\langle \tau_h \rangle| = |\langle \sigma \rangle| = 2$ olup Teorem 3.3.12. gereği,

$$J_{\bar{X}_{6,-1}} \times J_{\bar{X}_{6,-1}/\langle \tau_h, \sigma \rangle}^2 \sim J_{\bar{X}_{6,-1}/\langle \tau_h \rangle} \times J_{\bar{X}_{6,-1}/\langle \sigma \rangle} \times J_{\bar{X}_{6,-1}/\langle \tau_h \sigma \rangle} \quad (4.32)$$

elde edilir. $\tau_h \sigma$ ve σ aynı eşlenik sınıfından olduklarından, $\bar{X}_{6,-1}/\langle \tau_h \sigma \rangle$ ve $\bar{X}_{6,-1}/\langle \sigma \rangle$ izomorftur. Ayrıca $\bar{X}_{6,-1}/\langle \tau_h \rangle$ eğrisinin cinsi, τ_h otomorfizmasının hipereliptik bir involusyon olmasından dolayı 0 olduğundan, $\bar{X}_{6,-1}/\langle \sigma \rangle : y^2 = x^3 - 1$ şeklinde verilen eliptik eğri olmak üzere,

$$J_{\bar{X}_{6,-1}} \sim J_{\bar{X}_{6,-1}/\langle \sigma \rangle}^2 \quad (4.33)$$

bulunur. Öyleyse, $\bar{X}_{6,-1}$ eğrisinin L -serisi, $y^2 = x^3 - 1$ eliptik eğrisinin L -serisinin karesidir. $C : y^2 = x^3 - 1$ eliptik eğrisinin L -serisi, $\mathcal{O}_K$ tamsayılar halkasının bir ρ asalı, $\rho \nmid 6$ ve $\rho = (\pi)$, $\pi \equiv 2 \pmod{3}$ olmak üzere

$$L_{C/\mathbb{Q}}(s) = \prod_{\substack{\pi \in \mathcal{O}_K \text{ asal} \\ \pi \equiv 2 \pmod{3}}} \left(1 + \left(\frac{4}{\pi} \right)_6 \pi^{1-s} \bar{\pi}^{-s} \right)^{-1} \quad (4.34)$$

şeklindedir. Öyleyse,

$$L_{\bar{X}_{6,-1}}(s) = \left(\prod_{\substack{\pi \in \mathcal{O}_K \text{ asal} \\ \pi \equiv 2 \pmod{3}}} \left(1 + \left(\frac{4}{\pi} \right)_6 \pi^{1-s} \bar{\pi}^{-s} \right)^{-1} \right)^2 \quad (4.35)$$

ve C eğrisinin j -invariantı 0 olduğundan ve bundan dolayı kompleks çarpmaya sahip olduğundan s nin her değeri için seri yakınsaktır.

- $n=8$ için, cinsi $g=3$ olan $\bar{X}_{8,-1} : y^2 = x^8 - 1$ eğrisinin indirgenmiş otomorfizma grubu

$$\text{Aut}(\bar{X}_{8,-1})/\langle \tau_h \rangle \cong D_8 \quad (4.36)$$

dır. O halde,

$$\text{Aut}(\bar{X}_{8,-1}) \cong V_8 = \langle a, b : a^4, b^8, (ab)^2, (a^{-1}b)^2 \rangle \quad (4.37)$$

olup,

$$J_{\bar{X}_{8,-1}} \times J_{\bar{X}_{8,-1}/\langle a^3b, b^4 \rangle} \sim J_{\bar{X}_{8,-1}/\langle a^3b \rangle} \times J_{\bar{X}_{8,-1}/\langle a^3b^5 \rangle} \times J_{\bar{X}_{8,-1}/\langle b^4 \rangle} \quad (4.38)$$

bulunur. Sağ taraftaki bölüm eğrilerinin cinsi 1 olduğundan, $J_{\bar{X}_{8,-1}}$ in üç tane eliptik eğriye izojenik olması gerekir. a^3b ve a^3b^5 , V_8 in aynı eşlenik sınıfında olduklarından, $\bar{X}_{8,-1}$ eğrisinin bölümlerinden meydana gelen bu eğrilerin her biri izojeniktir. Böylece,

$$J_{\bar{X}_{8,-1}} \sim E_1^2 \times E_2 \quad (4.39)$$

b^4 otomorfizmasıyla elde edilen bölüm eğrisi E_1 , $y^2 = x^4 - 1$ şeklinde, cinsi 1 olan $y^2 = x^3 + 4x$ eğrisine izomorf olan bir eğridir. Bu eğrinin j -invariantı 1728 dir. a^3b otomorfizmasıyla bölümünden elde edilen E_2 eliptik eğrisi $y^2 = x^4 - 4\zeta_8^7 x^2 - 2i$ şeklinde olup j -invariantı 8000 dir (Paulhus, 2007).

$\bar{X}_{8,-1}$ eğrisinin L -serisi, E_1 eğrisinin L -serisinin karesi ve E_2 eğrisinin L -serisinin çarpımına eşittir. E_1 ve E_2 eğrilerinin her ikisinde de kompleks çarpma olup, bu durumda $\bar{X}_{8,-1}$ eğrisinin L -serisi Grössenkarakter kullanılarak yazılabilir. Öyleyse, her s değeri için bu seri yakınsaktır.

- $n=10$ için, cinsi $g=4$ olan $\bar{X}_{10,-1} : y^2 = x^{10} - 1$ eğrisinin otomorfizma grubu V_{10} a izomorftur. Teorem 3.3.12., a^2 ve ab tarafından üretilen alt gruba uygulanarak

$$J_{\bar{X}_{10,-1}} \times J_{\bar{X}_{10,-1}/\langle a^2, b^5 \rangle} \sim J_{\bar{X}_{10,-1}/\langle a^2 \rangle} \times J_{\bar{X}_{10,-1}/\langle b^5 \rangle} \times J_{\bar{X}_{10,-1}/\langle a^2b^5 \rangle} \quad (4.40)$$

elde edilir. a^2 otomorfizması hipereliptik involusyon olduğundan, $\bar{X}_{10,-1}/\langle a^2 \rangle$ nin cinsi 0 dır. a^2b^5 ve b^5 aynı eşlenik sınıfından olduklarından $\bar{X}_{10,-1}/\langle b^5 \rangle$ ve $\bar{X}_{10,-1}/\langle a^2b^5 \rangle$ eğrileri de izomorftur. Öyleyse, (4.40) den $\bar{X}_{10,-1}$ eğrisinin Jakobiyeninin cinsi 2 olan bir eğrinin Jakobiyeninin karesine izojenik olduğu görülür. Cinsi 2 olan bu eğri, otomorfizma grubu $\mathbb{Z}_{10}$ olan $y^2 = x^5 - 1$ eğrisine izomorftur.

$$J_{\bar{X}_{10,-1}} \sim J_{\bar{X}_{5,-1}}^2 \quad (4.41)$$

dir (Paulhus, 2007).

Bu durumda, $\bar{X}_{10,-1}$ eğrisinin L -serisi, $\bar{X}_{5,-1}$ eğrisinin L -serisinin karesine eşittir. $\bar{X}_{5,-1}$ eğrisinde kompleks çarpma olduğundan $L_{\bar{X}_{10,-1}}(s)$, Grössenkarakter kullanılarak yazılabilir ve bundan dolayı her s değeri için seri yakınsaktır.

Genel olarak $Aut(\bar{X}_{2p,a})$ için, $\tau_h(x,y) = (x,-y)$ ve $\sigma(x,y) = (-x,y)$ olacak şekilde τ_h ve σ otomorfizmaları olup Teorem 3.3.12. ya göre,

$$J_{\bar{X}_{2p,a}} \times J_{\bar{X}_{2p,a}/\langle\tau_h,\sigma\rangle}^2 \sim J_{\bar{X}_{2p,a}/\langle\tau_h\rangle} \times J_{\bar{X}_{2p,a}/\langle\sigma\rangle} \times J_{\bar{X}_{2p,a}/\langle\tau_h\sigma\rangle} \quad (4.42)$$

elde edilir. $\tau_h\sigma$ ve σ aynı eşlenik sınıfında olduklarından ve $\bar{X}_{2p,a}/\langle\tau_h\rangle$ ile $\bar{X}_{2p,a}/\langle\tau_h\sigma\rangle$ nin cinsleri 0 olduğundan

$$J_{\bar{X}_{2p,a}} \sim J_{\bar{X}_{2p,a}/\langle\sigma\rangle}^2 \quad (4.43)$$

dir. p tek asalı için, $\bar{X}_{2p,a}/\langle\sigma\rangle$ açık olarak $\bar{X}_{p,a}$ olmak üzere,

$$J_{\bar{X}_{2p,a}} \sim J_{\bar{X}_{p,a}}^2 \quad (4.44)$$

şeklindedir. Öyleyse, $\bar{X}_{2p,a}$ nın L -serisi, $\bar{X}_{p,a}$ nın L -serisinin karesidir.

Örnek 4.3.1. $E: y^2 = x^3 + a$ şeklinde verilen eliptik eğrisi $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ cismi üzerinde $\mathcal{O}_K$ tamsayılar halkası olmak üzere kompleks çarpmaya sahip bir eliptik eğri olsun. $\rho \in \mathcal{O}_K$ asal elemanı, $\rho \nmid 6a$ şeklinde bir asal sayı olsun. $\mathcal{O}_K$ tamsayılar halkası bir esas ideal bölgesi olduğundan, $\rho = (\pi)$ olacak şekilde $\pi \equiv 2 \pmod{3}$ olmak üzere ρ asalı tarafından üretilen bir tek π vardır.

$$\alpha^{(N_{\mathbb{Q}}^K \rho - 1)/6} \equiv \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)_6 \pmod{\pi} \quad (4.45)$$

denklemini sağlayan $\left(\frac{\alpha}{\pi} \right)_6$, birimin 6. kökü olan 6. dereceden kalan sembolü olmak üzere, $\text{mod } \rho$ ye göre indirgenmiş eliptik eğrinin $\mathbb{F}_\rho$ cismi üzerindeki rasyonel noktaların sayısı

$$\# \tilde{E}(\mathbb{F}_\rho) = N_{\mathbb{Q}}^K \rho + 1 + \left(\frac{4a}{\pi} \right)_6 \pi + \left(\frac{4a}{\pi} \right)_6 \bar{\pi} \quad (4.46)$$

şekilde olup bu denklem Jakobi toplamları kullanılarak Ireland ve Rosen (1998)'da gösterilmiştir. Grössenkarakter yardımıyla tarif edilen L -serisi, ya

$\psi_{E/K}(\rho) = -\overline{\left(\frac{4a}{\pi}\right)}_6 \pi$ yada $\psi_{E/K}(\rho) = -\left(\frac{4a}{\pi}\right)_6 \bar{\pi}$ şeklinde verilir. Grössenkarakterin özelliklerinden, $\rho = (\pi)$ ve $\pi \equiv 2 \pmod{3}$ olmak üzere, K nin en azından derecesi 1 olan bütün ρ asalları için, $\psi_{E/K}(\rho) = -\overline{\left(\frac{4a}{\pi}\right)}_6 \pi$ olduğu görülür. ψ nin sürekliliğinden ve $\left(\frac{\cdot}{\pi}\right)_6$ için kalanlar kanunundan, bu formülün bütün ρ asalları için geçerli olduğu görülür. Kompleks çarpmaya sahip eliptik bir eğrinin Grössenkarakter kullanılarak L – serisinin yazılması durumundan ve $N_{\mathbb{Q}}^K \pi = \pi \bar{\pi}$ olup, kalan sembolleri kullanılarak, K ve $\mathbb{Q}$ cisimleri üzerindeki E eliptik eğrisinin L – serisi,

$$L_{E/K}(s) = \prod_{\substack{\pi \in \mathcal{O}_K \text{ asal} \\ \pi \equiv 2 \pmod{3}}} \left(1 + \overline{\left(\frac{4a}{\pi}\right)}_6 \pi^{1-s} \bar{\pi}^{-s} \right)^{-1} \times \left(1 + \left(\frac{4a}{\pi}\right)_6 \pi^{-s} \bar{\pi}^{1-s} \right)^{-1} \quad (4.47)$$

$$L_{E/\mathbb{Q}}(s) = \prod_{\substack{\pi \in \mathcal{O}_K \text{ asal} \\ \pi \equiv 2 \pmod{3}}} \left(1 + \overline{\left(\frac{4a}{\pi}\right)}_6 \pi^{1-s} \bar{\pi}^{-s} \right)^{-1} \quad (4.48)$$

şeklinde (Silverman, 1994, syf. 177-178).

O halde, $\bar{X}_{6,a}$ eğrisinin L – serisi, $E: y^2 = x^3 + a$ eğrisinin L – serisinin karesine eşit olup,

$$L_{\bar{X}_{6,a}}(s) = \left(L_{E/\mathbb{Q}}(s) \right)^2 = \left(\prod_{\substack{\pi \in \mathcal{O}_K \text{ asal} \\ \pi \equiv 2 \pmod{3}}} \left(1 + \overline{\left(\frac{4a}{\pi}\right)}_6 \pi (\pi \bar{\pi})^{-s} \right)^{-1} \right)^2 \quad (4.49)$$

bulunur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Hipereliptik eğrilerin özel bir sınıfını teşkil eden $y^2 = f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$ şeklindeki eğrilerin aritmetik özellikleri, eğrinin otomorfizma grubu kullanılarak çalışılmıştır. İndirgenmiş otomorfizma grubu tespit edilerek, $\bar{X}_{n,a}$ eğrisinin bir Belyi yüzeyi olduğu gösterilmiştir. Eğrinin otomorfizma grubunun “büyük” olması ile Belyi fonksiyonu arasındaki ilişki incelenmiştir. Bu eğrilerin, Lang’ın örtü yarıçapı ile ilgili tahminini özel bir örtü dönüşümü için doğruladığı gösterilmiştir. $L_X(s)$ nin belirgin bir tanımını, daha küçük cinsli eğrilerin L – serileri yardımıyla yapmak için, özel otomorfizmaların meydana getirdiği Jakobiyeen ayrışmasının nasıl olduğu gösterilmiştir.

5.2 Öneriler

Elde edilen sonuçların daha genel hipereliptik eğrilere genellemesi yapılabilir.

KAYNAKLAR

- Arif, S. and Abu Muriefah, 1997, On the Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$, *Intermat. J. Math. And Math. Sci. Vol. 20 No. 2*, 299-304.
- Birkenhake, C. and Lange, H., 2004, Complex Abelian Varieties, Second edition, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 302. *Springer-Verlag*, Berlin, 340.
- Cohn, J.H.E., 1993, The Diophantine equation $x^2 + C = y^n$, *Acta Arith. 65*, 367-381.
- Cohn, J.H.E., 1999, The Diophantine equation $x^2 + 2^k = y^n$, II, *Int. J. Math. and Math. Sci. 22*, 459-462.
- Farkas, H.M. and Kra, I., 1981, Riemann Surfaces, Graduate Texts in Math., Vol.71, *Springer-Verlag*, New York, 95-96.
- Goins, E., Luca, F. And Togbe, A., 2008, On the Diophantine equation $x^2 + 2^\alpha 5^\beta 13^\gamma = y^n$, *ANTS VIII Proceedings: A. Van der Poorten and A. Stein (eds.), ANTS VIII, Lecture notes in Computer Science 5011*, 430-442.
- Ireland, K. and Rosen, M., 1998, A Classical Introduction to Modern Number Theory, *Springer-Verlag*, New York, 312-314.
- Kani, E. and Rosen M., 1989, Idempotent Relations and Factors of Jacobians, *Math. Ann. 284*, no.2, 307-327.
- Lang, S., 1978, Elliptic curves: Diophantine analysis, volume 231 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], *Springer-Verlag*, Berlin, 193-197.
- Le, M., 2002, On Cohn's conjecture concerning the Diophantine equation $x^2 + 2^m = y^n$, *Arch. Math. (Basel) 78 [1]*, 26-35.
- Lebesgue, V. A., 1850, Sur l'impossibilite en nombres entiers de l'equation $x^m = y^2 + 1$, *Nouvelles Annales des Mathematiques 1 [9]*, 178-181.
- Liquin, T., 2008, On the Diophantine equation $x^2 + 3^m = y^n$, *Integers: Electronic J. Combinatorial Number Theory 8*, 1-7.
- Liquin, T., 2009, On the Diophantine equation $x^2 + 5^m = y^n$, *Ramanujan J. 19*, 325-338.
- Litaka, S., 1982, Algebraic Geometry 'An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties', Graduate Texts in Math., 76, *Springer-Verlag*, New York, 216-217.

- Luca, F., 2002, On the equation $x^2 + 2^a 3^b = y^n$, *Int. J. Math. And Math. Sci.* 29, No 4, 239-244.
- Luca, F. and Togbe A., 2008, On the Diophantine Equation $x^2 + 2^a 5^b = y^n$, *Int. J. Number Th.*, 4 No.6, 973-979.
- Manin, Yu.I. and Panchishkin, A.A., 2005, An Introduction to Modern Number Theory, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg, 147-261.
- Mumford, D., 1984, Tata Lectures on Theta II, Progress in Mathematics 43, *Birkhauser*, pp.12-13.
- Nagell, T., 1923, Sur l'impossibilite de quelques a deux indeterminees, *Norsk Mat. Forenings Skrifter* 13, 65-82.
- Nagell, T., 1948, Losning til oppgave nr 2, 1943, s 29, *Nordisk Mat. Tidskr.* 30, 62-64.
- Paulhus, J., 2007, *Elliptic factors in Jacobians of low genus curves*, Ph.D. thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 10-24.
- Silverman, J.H., 1994, Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves, Graduate Texts in Mathematics, 151. *Springer-Verlag*, New York, 165-178.
- Silverman, J.H., 2009, The Arithmetic of Elliptic Curves (2nd Edition), Graduate Texts in Mathematics, 106. *Springer-Verlag*, New York, 69-70.
- Weil, A., 1952, Jacobi sums as "Größencharactere", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73, 487-495.
- Wolfart, J., 1984, Taylorentwicklungen automorpher Formen und ein Transzendenzproblem aus der Uniformisierungstheorie, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 54, 25-33.
- Wolfart, J., 1997, The 'Obvious' part of Belyi's Theorem and Riemann Surfaces with Many Automorphisms, In Geometric Galois Actions, 1, *volume 242 of London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, Cambridge, 97-112.
- Wolfart, J. and Wüstholz, G., 1985, Der Überlagerungsradius gewisser algebraischer Kurven und die Werte der Betafunktion and rationalen Stellen, *Math. Ann.* 273 no.1, 1-15.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Kevser Aktaş
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : Çorlu, 26/09/1984
Telefon : -
Faks : -
e-mail : kevseraktas@hotmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı, İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Meram Anadolu Lisesi, Selçuklu, Konya	2002
Üniversite	: Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Konya	2006
Yüksek Lisans	: Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Ens., Konya	2008
Doktora	: Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Ens., Konya	2013

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2006-2009	Esentepe İlköğretim Okulu	Matematik Öğrt.

UZMANLIK ALANI

Cebirsel Sayılar Teorisi, Cebirsel Geometri.

YABANCI DİLLER

İngilizce, Almanca

YAYINLAR

- 1) Aktaş, K., Şenay, H., “*Existence of Gaussian Integers in P_k sets.*” XXI. National Mathematics Symposium, September 1-4 Koc University, İstanbul, 2008.
- 2) Koru, G., Aktaş K., “*Matrix Representation on $\mathbb{H}/\mathbb{Z}_p[i]$ Quaternion Algebra*”, International Conference on Applied Analysis and Algebra, 29 June-02 July Yıldız Technical University, İstanbul, 2011.
- 3) Koru, G., Aktaş K., “*Phytagorean Triples on Lonrentzian Plane*”, 24th International Conference of Jangjeon Mathematical Society, 20-23 July Selçuk University, Konya, 2011.