

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Osman UYAR

**EVRENSEL GROBNER BAZININ VARLIĞININ BİR
TOPOLOJİK İSPATI**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2013

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EVRENSEL GROBNER BAZININ VARLIĞININ BİR TOPOLOJİK İSPATI

Osman UYAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 28/02/2013 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

.....
Doç. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
ÜYE

.....
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. Mustafa GÖK
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EVRENSEL GROBNER BAZININ VARLIĞININ BİR TOPOLOJİK İSPATI

Osman UYAR

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Yıl : 2013, Sayfa: 41
Jüri : Doç. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
: Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

Bu çalışmada bir yarı grup üzerindeki sol sıralamaların kümesi üzerine konulan bir topolojiden bahsedildi ve bu uzayın kompakt olduğu gösterildi. Serbest abelyen gruplar üzerindeki sol sıralamaların bu topoloji ile Cantor kümesine homeomorf olduğu gösterildi ve polinom halkalarında evrensel Grobner bazının varlığı için yeni bir ispat verildi.

Anahtar Kelimeler: Sol ve sağ sıralamalar, Tamamen bağlantısız uzay, Cantor kümesi, Grobner bazı

ABSTRACT

MSc. THESIS

**A TOPOLOGICAL PROOF FOR EXISTENCE OF UNIVERSAL
GROBNER BASES**

Osman UYAR

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Year : 2013, Pages: 41
Jury : Assoc. Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Doğan Dönmez
: Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

In this thesis, it is mentioned about a topology on left orderings of any arbitrary semi group and it is shown that this space is compact and for free abelian group, it is shown to be homemorphic to the Cantor set. An application of this result is a new proof of the existence of universal Grobner bases.

Keywords: Left and right orderings, Totally disconnected space, Cantor set, Grobner bases

TEŞEKKÜR

Bu çalıőmanın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aőamasında yardımlarını esirgemeyen ve değerli zamanlarını ayırarak çalıőmanın tamamlanmasını sağlayan kiőilięiyle, dehasıyla ve çok yönlülüğüyle kendisini örnek aldığım saygıdeğer hocam Sayın Doç. Dr. Ali Arslan ÖZKURT'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Bu çalıőmanın baőından sonuna kadar sorularımı geri çevirmeyen, bilgi ve kiőilięiyle kendilerini örnek aldığım saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ'e ve Doç. Dr. Fikret KUYUCU'ya sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca Ar. Gör. Mehmet ONAT'a ve tüm Matematik Bölümü akademik personeline bu çalıőmanın oluőmasında yardımlarını esirgemedikleri için çok teşekkür ederim.

Desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen her zaman yanımda olan Rabia ÖZEN'e ve aileme sonsuz sevgi ve teőekkürlerimi sunarım.

Son olarak bana her konuda yardımcı olan arkadaşlarım İna ETİ'ye ve Musa YILMAZEL'e sevgi ve teőekkürlerimi sunarım.

| İÇİNDEKİLER | SAYFA |
|-------------------------------------|--------------|
| ÖZ..... | I |
| ABSTRACT..... | II |
| TEŞEKKÜR..... | III |
| İÇİNDEKİLER..... | IV |
| 1.GİRİŞ..... | 1 |
| 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER..... | 3 |
| 2.1. Temel Yapılar..... | 3 |
| 2.2. Cantor Kümesi..... | 9 |
| 2.3. Monomial Sıralamaları..... | 16 |
| 3. YARI GRUPLARDA SIRALAMA..... | 19 |
| 4. İKİ TARAFLI SIRALAMALAR..... | 27 |
| 5. GROBNER BAZINA BİR UYGULAMA..... | 33 |
| KAYNAKLAR..... | 39 |
| ÖZGEÇMİŞ..... | 41 |

1.GİRİŞ

Bir polinom halkasında bir idealin bir Grobner bazı bu polinom halkasındaki monomialler üzerindeki sıralamaya bağılı olarak değişir. Fakat sıralamaya bağılı kalmaksızın o idealin Grobner bazı olan bir küme vardır. Bu kümeye o idealin evrensel Grobner bazı denir. Evrensel Grobner bazının varlığının tamamı ile cebirsel bir ispatı vardır. (N. Schwartz, 1998)

Bu tezde evrensel Grobner bazının varlığını topolojik argümanlarla ispatlayan, (Adam S. Sikora, 2004) Adam S. Sikora tarafından yazılmış bir makale incelenmiştir.

Tez iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde temel tanım ve teoremler ile birlikte Cantor kümesi incelenmiştir. İkinci bölümde ise herhangi bir yarı grup üzerindeki sol sıralamalar üzerinde özel bir topolojiden bahsedildi ve bu topoloji ile serbest abelyen gruplar üzerindeki sol sıralamaların Cantor kümesine homeomorf olduğu gösterildi. Son olarak evrensel Grobner bazının varlığının topolojik bir ispatı verildi.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Temel Yapılar

Tanım 2.1.1: G boş olmayan bir küme olmak üzere $G \times G$ den G ye tanımlı bir

$$* : G \times G \rightarrow G, (a, b) \rightarrow a * b$$

fonksiyonuna G üzerinde bir *ikili işlem* denir. Eğer $*$, G üzerinde bir ikili işlem ise $(G, *)$ ifadesine G de bir *cebirsal yapı* denir.

Tanım 2.1.2: G boştan farklı bir küme ve $*$, G kümesi üzerinde bir ikili işlem olsun. Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ oluyorsa $*$ ikili işlemi *assosyatif özelliğe sahiptir* denir.

Tanım 2.1.3: Boştan farklı G kümesi üzerinde tanımlanan $*$ ikili işlemi assosyatif özelliğe sahip ise $(G, *)$ cebirsal yapısına *yarı grup* denir.

Tanım 2.1.4: G yarı grubu birim elemana sahipse bu yarı gruba *monoid* denir.

Tanım 2.1.5: (A, \leq) bir kısmi sıralı küme olsun. Her $x, y \in A$ için $x < y$, $x = y$ ya da $y < x$ koşullarından biri gerçekleşiyorsa bu \leq kısmi sıralama bağıntısına *tam(lineer) sıralama bağıntısı* denir.

Tanım 2.1.6: X boştan farklı herhangi bir küme olsun. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

- i) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) \geq 0$
- ii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$
- iii) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- iv) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

koşullarını sağlıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine ise bir metrik uzay denir.

Tanım 2.1.7: (X, d) bir metrik uzay olsun. $a \in X$ ve $r > 0$ için $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$ kümesine a merkezli r yarıçaplı bir açık yuvar denir.

Tanım 2.1.8: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x, y \in A$ olmak üzere $\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ olarak tanımlanan $\delta(A)$ sayısına A kümesinin çapı denir.

Tanım 2.1.9: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $A = \emptyset$ ve ya her $a \in A$ için $B(a, r) \subset A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı bulunabiliyorsa A kümesine (X, d) metrik uzayında d metriğine göre bir açık küme denir

Tanım 2.1.10: (X, d) bir metrik uzay ve $B \subset X$ olsun. Eğer $X - B$ tümleyen kümesi (X, d) metrik uzayında d metriğine göre bir açık küme ise B kümesine (X, d) metrik uzayında d metriğine göre bir kapalı küme denir.

Tanım 2.1.11: X boştan farklı bir küme olsun. $\tau \subset P(X)$ küme ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa τ ailesine X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine ise topolojik uzay denir.

- i) $X, \emptyset \in \tau$
- ii) τ ailesinin sonlu tane elemanlarının arakesiti yine τ 'ya ait
- iii) τ ailesinin herhangi sayıdaki elemanlarının birleşimi yine τ 'ya ait

Tanım 2.1.12: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. τ 'nun her bir elemanına (X, τ) topolojik uzayında bir açık küme denir.

Tanım 2.1.13: (X, τ) bir topolojik uzay ve $B \subset X$ olsun. Eğer $X - B$ tümleyen kümesi (X, τ) topolojik uzayında bir açık küme ise B kümesine (X, τ) topolojik uzayında bir *kapalı küme* denir.

Tanım 2.1.14: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. x_0 noktasını eleman kabul eden X 'in her A açık kümesine x_0 noktasının bir *açık komşuluğu* denir.

Tanım 2.1.15: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. x_0 noktasının bir açık komşuluğunu alt küme kabul eden X 'in her U alt kümesine x_0 noktasının bir *komşuluğu* denir.

Tanım 2.1.16: (X, τ) bir topolojik uzay ve $\emptyset \neq \mathfrak{B} \subseteq \tau$ olsun. Eğer τ 'nun her elemanı \mathfrak{B} 'deki bazı elemanların birleşimi şeklinde yazılabiliyor ve $x \in B_1 \cap B_2$ iken $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$ olacak şekilde $B_3 \in \mathfrak{B}$ bulunabiliyorsa \mathfrak{B} 'ye bir *topoloji tabanı* ve ya kısaca *taban* denir.

Tanım 2.1.17: (X, τ) bir topolojik uzay ve $Y \subset X$ olsun. Y 'nin alt kümelerinin $\tau_Y = \{A' \mid \text{Her } A \in \tau \text{ için } A' = A \cap Y\}$ ailesi Y üzerinde bir topolojidir. İşte bu τ_Y topolojisine *bünyesel(indirgenen)topoloji*, (Y, τ_Y) topolojisine ise (X, τ) topolojik uzayının *alt uzayı* denir.

Tanım 2.1.18: X ve Y iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer $f(x_0)$ noktasının her V komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak x_0 noktasının bir U komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında *süreklidir* denir.

Tanım 2.1.19: X ve Y iki topolojik uzay, $f: X \rightarrow Y$ bire-bir ve örten fonksiyon olsun. Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli ise f 'ye bir *homeomorfizm*, X ve Y topolojik uzaylarına da *homeomorfurlar* denir.

Tanım 2.1.20: (X, τ) bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer x_0 noktasının her U komşuluğuna karşılık her $n > n_0$ olduğunda $x_n \in U$ olacak şekilde en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabiliyorsa $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi x_0 noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 2.1.21: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X 'in her farklı x, y noktalarının ayırık birer komşulukları bulunabiliyorsa (X, τ) topolojik uzayına *Hausdorff uzayı* denir.

Tanım 2.1.22: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayının alt kümelerinden oluşan bir \mathcal{A} ailesinin elemanlarının birleşimi X 'e eşitse \mathcal{A} ailesine X uzayının bir *örtüsü* denir. Eğer \mathcal{A} ailesinin elemanları açık ise \mathcal{A} ailesine X uzayının bir *açık örtüsü* denir.

Tanım 2.1.23: Eğer bir topolojik uzayın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa bu uzaya *kompakt uzay* denir.

Teorem 2.1.24: Bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul kapalı ve sınırlı olmasıdır.

Teorem 2.1.25: X kompakt bir uzay olsun. X uzayının kapalı her alt uzayı da kompaktır.

Tanım 2.1.26: Bir (X, τ) topolojik uzayında X 'den ve boş kümeden farklı hem açık hem kapalı hiçbir alt küme yoksa bu uzaya *bağlantılı uzay* denir.

Tanım 2.1.27: (X, τ) bir topolojik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. x_0 noktasını içeren X 'in bütün bağlantılı alt kümelerinin birleşimi olan $C(x_0)$ kümesine x_0 noktasının *bağlantılı bileşeni* denir.

Tanım 2.1.28: $R \neq \emptyset$ bir küme ve R üzerinde " $+$ " ve " \cdot " ikili işlemleri tanımlanmış olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir *halka* denir.

- i) $(R, +)$ bir değişmeli gruptur.
- ii) Her $a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ dır.
- iii) Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dir.

Tanım 2.1.29: Birimli, değişmeli ve sıfırdan farklı her elemanın çarpmaya göre tersi varsa o zaman bu halkaya bir *cisim* denir.

Tanım 2.1.30: R bir halka ve $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer S kümesi R halkasındaki işlemlerle birlikte bir halka oluyorsa S kümesine R halkasının bir *alt halkası* denir.

Tanım 2.1.31: R bir halka ve I, R nin bir alt halkası olsun. Eğer her $r \in R$ ve her $a \in I$ için $r \cdot a \in I$ ve $a \cdot r \in I$ ise I ya R nin bir *ideali* denir.

Tanım 2.1.32: R bir halka ve $(M, +)$ abelyen bir grup olsun. Eğer her $r \in R, m \in M$ için, $f: R \times M \rightarrow M, (r, m) \rightarrow f(r, m) = r \cdot m$ olarak tanımlanan f fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, M 'ye R halkası üzerinde bir *sol R -modül* denir.

Her $r, r_1, r_2 \in R$ ve her $m, m_1, m_2 \in M$ için,

- i) $r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$
- ii) $(r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$
- iii) $(r_1 r_2) \cdot m = r_1 \cdot (r_2 \cdot m)$

Sağ R -modül de benzer şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.33: A, B ve C üç abelyen grup olsun. $h: A \times B \rightarrow C$ fonksiyonu

- i) Her $a_1, a_2 \in A$ ve $b \in B$ için, $h(a_1 + a_2, b) = h(a_1, b) + h(a_2, b)$
- ii) Her $a \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ için, $h(a, b_1 + b_2) = h(a, b_1) + h(a, b_2)$

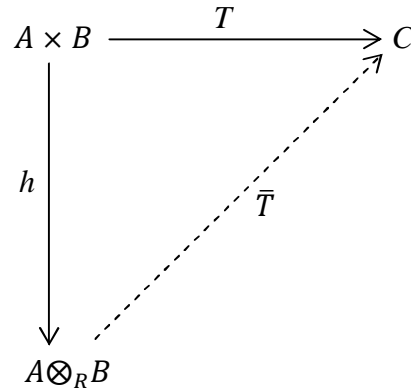
koşullarını sağlıyorsa h fonksiyonuna *bilineer fonksiyon* denir.

Tanım 2.1.34: R birimli bir halka, A bir sağ R -modül, B bir sol R -modül ve C bir abelyen grup olsun. Eğer $h: A \times B \rightarrow C$ fonksiyonu her $r \in R, a \in A, b \in B$ için,

$$h(ar, b) = h(a, rb)$$

koşulunu sağlıyor ise h fonksiyonuna *dengeli (balanced) fonksiyon* denir.

Tanım 2.1.35: R birimli bir halka, A , bir sağ R -modül, B , bir sol R -modül, $A \otimes_R B$ bir abelyen grup ve $h: A \times B \rightarrow A \otimes_R B$ bilinear ve dengeli bir fonksiyon olsun. Eğer her C abelyen grubu ve her $T: A \times B \rightarrow C$ bilinear ve dengeli dönüşümü için



diagramı değişmeli olacak şekilde bir tek $\bar{T}: A \otimes_R B \rightarrow C$ grup homomorfizmi varsa $(A \otimes_R B, h)$ ikilisine (veya kısaca $A \otimes_R B$ grubuna) A ile B nin R üzerinde *tensor çarpımı* denir. $h(a, b) = a \otimes b$ olarak yazılır.

Tanım 2.1.36: M bir R -modül ve $B \subset M$ olsun. Her $m \in M$ elemanı $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$ olmak üzere $m = r_1 b_1 + r_2 b_2 + \dots + r_n b_n$ şeklinde yazılabiliyorsa B 'ye M 'nin *üreteç kümesidir* denir.

Tanım 2.1.37: G bir lineer sıralı yarı grup, P bir K -cebiri ve her $\alpha \in G$ için P^α K -modül olsun. Eğer

- i) $P = \bigcup_{\alpha \in G} P^\alpha$
- ii) $\alpha \leq \beta$ için $P^\alpha \subseteq P^\beta$
- iii) $P^\alpha P^\beta \subseteq P^{\alpha+\beta}$
- iv) $\bigcap_{\alpha \in G} P^\alpha = \{0\}$

koşulları sağlanıyorsa $\{P^\alpha : \alpha \in G\}$ K -modül ailesine P 'nin *bir artan filtrasyonu* denir.

Benzer şekilde *azalan filtrasyon* da tanımlanabilir.

Tanım 2.1.38: G bir abelyen grup olsun. $T(G) = \{g \mid g \in G \text{ ve bir } n \in \mathbb{Z} \text{ için } ng = 0\}$ G 'nin bir alt grubudur. Bu alt gruba G 'nin *torsiyon alt grubu* denir.

2.2. Cantor Kümesi

Tanım 2.2.1: (X, τ) bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $A \subset X$ olsun. Eğer x_0 noktasının her U komşuluğunda x_0 noktasından farklı A kümesine ait en az bir eleman bulunabiliyorsa x_0 noktasına A kümesinin *bir yığılma noktası* denir.

Tanım 2.2.2: Bir kümenin her elemanı aynı zamanda o kümenin yığılma noktası da oluyorsa bu kümeye *perfect küme* denir.

Tanım 2.2.3: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \in X$ iken $\{x\}$, x 'i içeren en geniş bağlantılı küme ise X uzayına *tamamen bağlantısız uzay* denir.

Önerme 2.2.4: (X, τ) bir topolojik uzay, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Eğer $x \in U$ ve $y \notin U$ olacak şekilde hem açık hem kapalı bir $U \subset X$ varsa (X, τ) topolojik uzayı *tamamen bağlantısız uzay* olur.

Tanım 2.2.5: $I = [0,1]$ kapalı aralığını alalım. Bu aralığı üç eşit parçaya bölelim ve $[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$ kapalı aralıklarını elde edelim. $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ kümesini oluşturalım. Daha sonra $[0, 1/3]$ ve $[2/3, 1]$ kapalı aralıklarını üçer eşit parçaya bölelim ve $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ kümesini oluşturalım. Bu şekilde devam ederek $C_1 \supset C_2 \supset \dots \supset C_n \dots$ kümelerini oluşturalım. $C = \bigcap \{C_n | n \in \mathbb{N}\}$ kümesine *Cantor kümesi* denir.

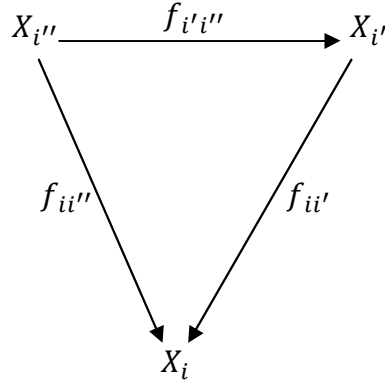
Cantor kümesinin tamamen bağlantısız olduğunu gösterelim. $x, y \in C$ ve $x \neq y$ olsun. $x < y$ olduğunu varsayabiliriz. $z \notin C$ ve $x < z < y$ olmak üzere $G = (-\infty, z) \cap C$ ve $H = (z, \infty) \cap C$ açık kümeleri için $x \in G \subset C$, $y \in H \subset C$ ayrıca $G \cup H = C$ ve $G \cap H = \emptyset$ olup *Cantor kümesi tamamen bağlantısız uzay* olur.

Cantor kümesinin bir perfect küme olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $1/3^{n_0} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ alalım. $x \in C$ iken $y \in (x - 1/3^{n_0}, x + 1/3^{n_0}) \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ olacak şekilde $\exists y \in C$ var olup $x \in C'$ olur. Buna göre *Cantor kümesi perfect küme* olur.

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ aralığı kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır. $C \subset [0,1]$ kapalı olduğundan *Cantor kümesi kompakttır*. Ayrıca $C \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ olduğundan \mathbb{R} üzerindeki metriğe göre *Cantor kümesi metrik uzaydır*.

Tanım 2.2.6: I bir kısmi sıralı küme olsun. $i, i' \in I$ için $i \leq i''$ ve $i' \leq i''$ olacak şekilde bir $i'' \in I$ varsa I 'ya *yönlendirilmiş küme* denir.

Tanım 2.2.7: I bir yönlendirilmiş küme olsun. Her $i \in I$ için X_i topolojik uzaylar ve $i \leq i'$ ise $f_{ii'}: X_{i'} \rightarrow X_i$ sürekli fonksiyonlar olsun. Öyle ki $i \leq i' \leq i''$ için,



diagramı değişmeli ve her $i \in I$ için $f_{ii}: X_i \rightarrow X_i$ birim fonksiyon ise $\{X_i, f_{ii'}\}$ sistemine *ters(projektif) sistem* denir.

Tanım 2.2.8: $X_\infty = \{(x_i)_{i \in I} | x_i \in X_i \text{ ve } i \leq i' \text{ için } x_i = f_{ii'}(x_{i'})\}$ olmak üzere $X_\infty \subset \prod X_i$ alt uzayına $\{X_i, f_{ii'}\}$ ters(projektif) sisteminin *ters(projektif) limiti* denir ve $X_\infty = \varprojlim X_i$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 2.2.9: $\{C_s\}_{s \in S}$, X topolojik uzayının bir continuum(kompakt, bağlantılı ve Hausdorff) ailesi olsun. Eğer her $s_1, s_2 \in S$ için $C_{s_3} \subset C_{s_1} \cap C_{s_2}$ olacak şekilde bir $s_3 \in S$ varsa, $\bigcap_{s \in S} C_s$ continuum olur.

Teorem 2.2.10: $\{X_i, f_{ii'}\}_{i, i' \in I}$ continuum uzayların bir ters(projektif) sistemi ise $X_\infty = \varprojlim X_i$ bir continuumdur.

İspat: $X = \prod X_i$, her $i \in I$ için $Y_i = \{(x_i) | i \leq i' \text{ için } f_{i'i}(x_{i'}) = x_i\}$ ve $I_i = I \setminus \{j \in I | j \leq i\}$ olmak üzere $f: \prod_{j \in I_i} X_j \rightarrow X$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$f(x_j) = \begin{cases} z_j & , j \in I_i \\ f_{ij}(x_j) & , j \geq i \end{cases}$$

Buna göre $f(\prod_{j \in I_i} X_j) = Y_i$ olup her $i \in I$ için Y_i 'ler continuum olur. $i \leq j$ ise $Y_i \subset Y_j$ olduğundan $Y_i = Y_i \cap Y_j$ olup Yardımcı Teorem 2.2.9'dan $X_\infty = \prod_{i \in I} Y_i$ continuum olur.

Tanım 2.2.11: $\{X_i, f_{ii'}\}_{i, i' \in I}$ ve $\{Y_i, g_{ii'}\}_{i, i' \in I}$ iki ters(projektif) sistem ve $i \leq i' \leq i''$ olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
 \dots X_{i''} & \xrightarrow{f_{i'i''}} & X_{i'} & \xrightarrow{f_{ii'}} & X_i \\
 \downarrow \varphi_{i''} & & \downarrow \varphi_{i'} & & \downarrow \varphi_i \\
 \dots Y_{i''} & \xrightarrow{g_{i'i''}} & Y_{i'} & \xrightarrow{g_{ii'}} & Y_i
 \end{array}$$

olacak şekilde $\Phi = \{\varphi_i: X_i \rightarrow Y_i\}$ fonksiyonlar ailesi var ise $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ ailesine bu iki ters(projektif) sistem arasında bir fonksiyon denir. Böylece bu Φ ailesi ters(projektif) limitler arasında $\bar{\Phi}: \varprojlim X_i \rightarrow \varprojlim Y_i$ fonksiyonunu belirler.

Teorem 2.2.12: $\{X_i, f_{ii'}\}_{i, i' \in I}$ ve $\{Y_i, g_{ii'}\}_{i, i' \in I}$ iki ters(projektif) sistem ve $\Phi = \{\varphi_i\}_{i \in I}$ bu iki ters(projektif) sistem arasında bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar gerçekleşir.

- i) Eğer Φ sürekli ise $\bar{\Phi}$ de sürekli olur.
- ii) Eğer Φ örten ise $\bar{\Phi}$ de örten olur.

Tanım 2.2.13: X bir topolojik uzay olsun. X 'i örten ayrık kümelerin bir \mathcal{U} ailesine X 'in bir parçalanışı denir.

Tanım 2.2.14: \mathcal{U} ve \mathcal{V} , X 'in bir parçalanışı olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $U \subset V$ olacak şekilde $V \in \mathcal{V}$ varsa \mathcal{U}, \mathcal{V} 'yi rafine eder denir. Ve $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ şekline gösterilir.

Teorem 2.2.15: X tamamen bağlantısız, kompakt, metrik uzay olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $U \in \mathcal{U}_n$ iken $\delta(U) = \text{Sup}\{d(x, y) | x, y \in U\} < 1/2^n$ ve $\mathcal{U}_{n+1} < \mathcal{U}_n$ olacak şekilde sonlu ayrık açık \mathcal{U}_n örtüsü vardır. Ayrıca $\mathcal{U}_{n+1} \rightarrow \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}_{n-1} \rightarrow \dots$ projektif limiti X 'e homeomorfiktir.

İspat: İkinci kısmı ispatlayacağız. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\Psi_n: X \rightarrow \mathcal{U}_n$ ($x \rightarrow U$) fonksiyonunu tanımlayalım. $x \in X$ alalım. O halde bir tek $U \in \mathcal{U}_n$ için $x \in U$ olur. $f_{n+1}(\Psi_{n+1}(x)) = f_{n+1}(U) = V = \Psi_n(x)$ olup $x \in U \subset V$ olduğundan $x \in V \in \mathcal{U}_n$ olur. O halde $\bar{\Phi} = \{\Psi_n\}$ bu iki projektif sistem arasında sürekli ve örten fonksiyon olur. $\bar{\Phi}: X = \varprojlim X \rightarrow \varprojlim \mathcal{U}_n$ ve $X = \varprojlim X$ kompakt, $\varprojlim \mathcal{U}_n$ Hausdorff olduğundan $\bar{\Phi}$ kapalıdır. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. $d(x, y) = \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ vardır. $1/2^n < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ alırsak $\Psi_n(x) \neq \Psi_n(y)$ olur. O halde $\bar{\Phi}(x) \neq \bar{\Phi}(y)$ olup $\bar{\Phi}$ bire-bir bir fonksiyondur. Böylece $\mathcal{U}_{n+1} \rightarrow \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{U}_{n-1} \rightarrow \dots$ projektif limiti X 'e homeomorfik olur.

Yardımcı Teorem 2.2.16: X herhangi bir kompakt, tamamen bağlantısız, perfect T_2 -uzayı ve U, X içinde boştan farklı açık bir küme ve n herhangi bir pozitif tamsayı ise $U = U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ olacak şekilde boş olmayan U_1, U_2, \dots, U_n ayrık açık kümeleri seçilebilir.

İspat: İspatı $n = 2$ durumu için yapmak yeterlidir. $\emptyset \neq U \subset X$ açık kümesini alalım. X perfect olduğundan $x \in X$ için x 'in her komşuluğu x 'den farklı bir eleman içerir. Dolayısıyla bir $y \neq x$ olan $y \in U$ vardır. O halde U tek nokta olamaz. p ve q noktaları U 'nun farklı noktaları ise $V \subseteq X$ açık-kapalı alt kümesi için $p \in V$

ve $q \notin V$ olur. $U_1 = U \cap V$ ve $U_2 = U - V$ olmak üzere $p \in U_1$, $q \in U_2$ olduğundan U_1, U_2 boştan farklı olur. Ayrıca $U = U_1 \cup U_2$ olur.

Teorem 2.2.17: Herhangi iki tamamen bağlantısız, perfect, kompakt, metrik uzay homeomorfiktir.

İspat: X ve Y bunun gibi uzaylar olsun. (\mathcal{U}_n) ve (\mathcal{V}_n) sırasıyla X ve Y uzaylarının ayrık açık sonlu örtülerinin dizileri olsun. \mathcal{U}_n ve \mathcal{V}_n 'nin herhangi bir n için aynı sayıda elemana sahip olduğunu varsayabiliriz. Eğer $\mathcal{U}_1 = \{U_{1_1}, \dots, U_{1_n}\}$ ve $\mathcal{V}_1 = \{V_{1_1}, \dots, V_{1_n}\}$ ise herhangi U_{i_j}, \mathcal{U}_2 'nin elemanlarının bir birleşimidir. Benzer şekilde herhangi bir V_{i_j}, \mathcal{V}_2 'nin elemanlarının bir birleşimidir. U_{1_j} ve V_{1_j} sırasıyla \mathcal{U}_2 ve \mathcal{V}_2 'nin aynı sayıda elemanlarının birleşimidir olduğunu varsayabiliriz öyle ki $V_{2_k} \subset V_{1_j} \Leftrightarrow U_{2_k} \subset U_{1_j}$ olur. Bu şekilde her n için \mathcal{U}_n ve \mathcal{V}_n 'nin örtüleri eşleştirilir. $U_0 \xleftarrow{f_1} U_1 \xleftarrow{f_2} \dots$ ve $V_0 \xleftarrow{g_1} V_1 \xleftarrow{g_2} \dots$ sırasıyla \mathcal{U}_n ve \mathcal{V}_n 'nin türetilmiş dizileri verilsin. $\varphi_n(U_{n_j}) = V_{n_j}$ olarak tanımlayalım. Her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $s_n: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ $s_n(U_{n_j}) = V_{n_j}$ tersine $t_n: \mathcal{U}_n \rightarrow \mathcal{V}_n$ $t_n(V_{n_j}) = U_{n_j}$ olup $st = \mathbf{1}_Y$ ve $ts = \mathbf{1}_X$ olacak şekilde t ve s homeomorfizmalarını belirler. O halde $\varphi_n: X_n \rightarrow Y_n$ ve $\varphi: X_\infty \rightarrow Y_\infty$ bir homeomorfizmadır ve X_∞, X 'e Y_∞, Y 'ye homeomorfiktir.

Sonuç 2.2.18: Tamamen bağlantısız, perfect, kompakt, metrik uzay sadece C Cantor kümesidir.(Homeomorfizm ile)

Sonuç 2.2.19: C Cantor kümesi 2^{N_0} 'a ve C^{N_0} 'a homeomorfiktir.

Teorem 2.2.20: Her X kompakt metrik uzay Cantor kümesinin bir sürekli görüntüsüdür.

İspat: $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots$ X 'in açık kümelerinin kapanışlarından oluşan sonlu örülerinin bir dizisi olsun öyle ki $U \in \mathcal{U}_n$ kümesi için $\delta(U) < 1/2^n$ ve $n = 2, 3, \dots$ için

$\mathcal{U}_n < \mathcal{U}_{n-1}$ koşulları sağlansın. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\mathcal{U}_n = \{U_{n_1}, \dots, U_{n_{k_n}}\}$ olsun. Böylece $\mathcal{U}_1 = \{U_{1_1}, \dots, U_{1_{k_1}}\}$ olur. Herhangi bir $U_{1_i} \in \mathcal{U}_1$ için $V_{1_i} = \{(u, i) | u \in U_{1_i}\}$ olarak tanımlanır ve $V_1 = V_{1_1} \cup \dots \cup V_{1_{k_1}}$, \mathcal{U}_1 'nin ayrık birleşimidir. $\mathcal{U}_2 = \{U_{2_1}, \dots, U_{2_{k_2}}\}$ olur. $V_{2_{ij}} = \{(u, i, j) | u \in U_{2_j}\}$ olarak tanımlanır ve $V_2 = \bigcup_{j=1}^{k_2} \bigcup_{U_{1_i} \supset U_{2_j}} V_{2_{ij}}$, U_{2_j} 'lerin ayrık birleşimidir. $\mathcal{U}_3 = \{U_{3_1}, \dots, U_{3_{k_3}}\}$ olur. $V_{3_{ijk}} = \{(u, i, j, k) | u \in U_{3_k}\}$ olarak tanımlanır ve $V_3 = \bigcup_{k=1}^{k_3} \bigcup_{U_{2_j} \supset U_{3_k}} \bigcup_{U_{1_i} \supset U_{2_j}} V_{3_{ijk}}$, U_{3_k} 'ların ayrık birleşimidir. Şimdi $f_2: V_2 \rightarrow V_1$ ve $f_3: V_3 \rightarrow V_2$ fonksiyonlarını sırasıyla $f_2((u, i, j)) = (u, i)$ ve $f_3((u, i, j, k)) = (u, i, j)$ olarak tanımlayalım. f_2 fonksiyonu $V_{2_{ij}}$ parçası üzerinde böylelikle V_2 üzerinde, f_3 fonksiyonu $V_{3_{ijk}}$ parçası üzerinde böylelikle V_3 üzerinde süreklidir. Bu şekilde devam edersek $V_n \xrightarrow{f_n} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots \xrightarrow{f_3} V_2 \xrightarrow{f_2} V_1$ projektif sistemi elde edilir. Ayrıca $\varphi_1: V_1 \rightarrow X$ ve $\varphi_2: V_2 \rightarrow X$ fonksiyonları sırasıyla $\varphi_1(u, i) = u$ ve $\varphi_2(u, i, j) = u$ olarak genel ifadeyle $\varphi_n: V_n \rightarrow X$ fonksiyonu $\varphi_n(u, i_{k_1}, \dots, i_{k_n}) = u$ olarak tanımlanır. Dolayısıyla $\{\varphi_n\}$ fonksiyonları $\varphi: \varprojlim V_i \rightarrow \varprojlim X = X$ fonksiyonunu belirler. φ_n 'ler sürekli ve örten olduğundan φ sürekli ve örtendir. **1**, X üzerinde belirlenmiş dönüşüm iken aşağıdaki diyagram elde edilir.

$$\begin{array}{ccccc}
 \dots V_3 & \xrightarrow{f_3} & V_2 & \xrightarrow{f_2} & V_1 \\
 \downarrow \varphi_3 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_1 \\
 \dots X & \xrightarrow{\mathbf{1}} & X & \xrightarrow{\mathbf{1}} & X
 \end{array}$$

$a, b \in V_1$ alalım. $a = (a, i)$ ve $b = (b, j)$ şeklindedir ve $a \in U_{1_i}$, $b \in U_{1_j}$ olur. d , X üzerinde bir metrik iken V_1 üzerindeki bir metrik $d_n((a, i), (b, j)) = d(a, b)$ şeklindedir. Benzer şekilde V_2, V_3, \dots üzerindeki metrikler belirlenir. Eğer (x_1, x_2, \dots) ,

$(y_1, y_2, \dots) \in V_\infty$ ise $z_x = \varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2) = \dots$ ve $z_y = \varphi_1(y_1) = \varphi_2(y_2) = \dots$ olur. (u, i) ve (u, j) için $d(u, u) = \mathbf{0}$ olur fakat $d_n((u, i), (u, j)) \neq \mathbf{0}$ olduğundan $d_n(x_n, y_n) \geq d(z_x, z_y)$ olduğu açıktır. Şimdi de V_∞ 'un bir Cantor kümesi olduğunu gösterelim. Herhangi bir V_n kompakt olduğundan V_∞ kompakttır. $\prod_{n=1}^{\infty} V_n$ metrik uzayının bir alt kümesi olduğundan V_∞ metrik uzaydır. V_∞ 'un tamamen bağlantısız olduğunu gösterelim. $x = (x_0, x_1, \dots)$, $y = (y_0, y_1, \dots) \in V_\infty$ ve $x \neq y$ olsun. Bir n için $x_n \neq y_n$ olur. $\varphi_n: V_n \rightarrow X$ için $z_x = \varphi_n(x_n) \neq \varphi_n(y_n) = z_y$ olur. Eğer d_m, V_m üzerindeki bir metrik ise her $m \geq n$ için $d_m(x_m, y_m) \geq d(z_x, z_y)$ olur. O halde $V_m = V_{m_1} \cup \dots \cup V_{m_{k_m}}$ olur. Buna göre $\delta(V_{m_1}) = \dots = \delta(V_{m_{k_m}}) < 1/2^m$ olur. O halde $m \rightarrow +\infty$ iken $\delta(V_{m_{k_m}}) \rightarrow \mathbf{0}$ olur. Dolayısıyla bir $N \in \mathbb{N}$ var ki $m \geq N$ iken $x_m \in V_{m_1}$, $y_m \notin V_{m_1}$ olur. $V_{m_1} \subset V_m$ kümesi hem açık hem kapalıdır. Dolayısıyla $x \in \{(z_0, z_1, \dots) \in V_\infty \mid z_m \in V_{m_1}\}$ ve $y \notin \{(z_0, z_1, \dots) \in V_\infty \mid z_m \in V_{m_1}\}$ olduğu için V_∞ tamamen bağlantısızdır. V_∞ kümesi perfect olmayabilir. Fakat C Cantor kümesi olmak üzere $V_\infty \times C$ kümesi perfect kümedir. Ayrıca $V_\infty \times C$ kümesi kompakt, tamamen bağlantısız ve metriktir. Böylece $V_\infty \times C$ kümesi Cantor kümesidir. $V_\infty \times C \xrightarrow{\pi_1} V_\infty \xrightarrow{\varphi} X$ ve π_1, φ örten olduğundan X bir Cantor kümesinin sürekli görüntüsüdür.

2.3. Monomial Sıralamaları

Tanım 2.3.1: $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, bir \mathbb{K} cismi üzerinde bir polinom halkası olsun. Bu polinom halkası içindeki bir $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ elemanına bir *monomial*, $c \in \mathbb{K} - \{0\}$ olmak üzere bir $cx_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ elemanına ise *terim* denir.

Tanım 2.3.2: $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, bir \mathbb{K} cismi üzerinde bir polinom halkası olsun. Bu polinom halkası içindeki monomiallerin kümesini \mathcal{M} ile gösterelim. \mathcal{M} üzerindeki bir $<$ sıralaması aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde tanımlanır.

- i) Herhangi bir $(m_1, m_2) \in \mathcal{M}$ için ya $m_1 < m_2$ ya $m_2 < m_1$ ya da $m_1 = m_2$ olur.
- ii) Herhangi $m_1, m_2, m_3 \in \mathcal{M}$ için eğer $m_1 < m_2$ ve $m_2 < m_3$ ise $m_1 < m_3$ olur.
- iii) $m \neq 1$ olan herhangi bir $m \in \mathcal{M}$ için $1 < m$ olur.
- iv) Herhangi bir $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ için eğer $m_1 < m_2$ ise herhangi bir $m \in \mathcal{M}$ için $mm_1 < mm_2$ olur.

Örnek 2.3.3: \mathcal{M} üzerinde *lexicographic sıralama*: $m, n \in \mathcal{M}$ alalım. $m = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ ve $n = x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ şeklinde olsun. $m < n \Leftrightarrow$ bir k için $i_1 = j_1, \dots, i_k = j_k, i_{k+1} < j_{k+1}$ olması anlamına gelir. Bu sıralama kısaca *Lex.* ile gösterilir.

Örnek 2.3.4: \mathcal{M} üzerinde *degree lexicographic sıralama*: $m, n \in \mathcal{M}$ alalım. $m = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ ve $n = x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ şeklinde olsun. $m < n \Leftrightarrow i_1 + \dots + i_n < j_1 + \dots + j_n$ ve ya $i_1 + \dots + i_n = j_1 + \dots + j_n$ olması anlamına gelir. Bu sıralama kısaca *Deglex.* olarak gösterilir.

Örnek 2.3.5: \mathcal{M} üzerinde *reverse lexicographic sıralama*: $m, n \in \mathcal{M}$ alalım. $m = x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ ve $n = x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}$ şeklinde olsun. $m < n \Leftrightarrow i_1 + \dots + i_n < j_1 + \dots + j_n$ ve ya $i_1 + \dots + i_n = j_1 + \dots + j_n$ ve bir k için $i_n = j_n, i_{n-1} = j_{n-1}, \dots, i_k = j_k, i_{k-1} > j_{k-1}$ olması anlamına gelir. Bu sıralama kısaca *Degrevlex.* olarak gösterilir.

3. YARI GRUPLARDA SIRALAMA

Assosyatif ikili işleme sahip G yarı grubu verilsin. G üzerindeki bir lineer ' $<$ ' sıralaması $a, b \in G$ olmak üzere her $c \in G$ için eğer $a < b$ iken $ca < cb$ oluyorsa sol sıralama, eğer $a < b$ iken $ac < bc$ oluyorsa sağ sıralama olarak tanımlanır. G yarı grubunun tüm sol ve sağ sıralamalarının kümesi sırasıyla $LO(G)$ ve $RO(G)$ ile gösterilir. Buna göre $LO(G) = \{< \mid <, G \text{ yarı grubu üzerinde bir sol sıralamadır}\}$ ve $RO(G) = \{< \mid <, G \text{ yarı grubu üzerinde bir sağ sıralamadır}\}$ şeklinde gösterilir. Eğer G bir grup ise $LO(G)$ ve $RO(G)$ kümeleri arasında her sol sıralamaya bir sağ sıralamayı karşılık getiren bire-bir eşleme vardır. Yani $a <_r b \Leftrightarrow a^{-1} <_l b^{-1}$ olur.

Tanım 3.1.1: $U_{a,b} = \{< \in LO(G) \mid a, b \in G \text{ için } a < b\} \subset LO(G)$ olsun. $LO(G)$ üzerine $U_{a,b}$ kümelerini açık kabul eden en küçük topolojiyi koyalım. Bu topolojideki her açık küme $U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ şeklindeki kümelerin bir birleşimidir.

Tanım 3.1.2: G 'nin alt kümelerinin $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G$ olan keyfi tam filtrasyonu ($\bigcup_{i \in I} G_i = G$) verilsin. $<_1, <_2 \in LO(G)$ için $\rho: LO(G) \times LO(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu

$$\rho(<_1, <_2) = \begin{cases} 1/2^r, & r = \max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a, b \in G_r, a <_1 b \Leftrightarrow a <_2 b\} \text{ ise} \\ 0, & \max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a, b \in G_r, a <_1 b \Leftrightarrow a <_2 b\} \text{ yoksa} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Önerme 3.1.3: ρ , $LO(G)$ üzerinde bir metriktir ve bu metriğin oluşturduğu $LO(G)$ üzerindeki topoloji ile Tanım 3.1.1'de tanımlanan topoloji çakışır. Dolayısıyla bu topoloji filtrasyonun seçiminden bağımsızdır.

İspat: Öncelikle Tanım 3.1.2'de tanımlanan ρ fonksiyonunun $LO(G)$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

- i) $\langle_1, \langle_2 \in LO(G)$ için $\rho(\langle_1, \langle_2) = 1/2^r$ ve ya $\rho(\langle_1, \langle_2) = 0$ olduğu için daima $\rho(\langle_1, \langle_2) \geq 0$ olur.
- ii) $\langle_1, \langle_2 \in LO(G)$ için $\rho(\langle_1, \langle_2) = 0 \Leftrightarrow \langle_1 = \langle_2$ olduğunu göstermeliyiz. $\langle_1 = \langle_2$ olsun. Her $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\langle_1 |G_r = \langle_2 |G_r$ olur. Dolayısıyla $\max\{r | \langle_1 |G_r = \langle_2 |G_r\}$ yoktur ve $\rho(\langle_1, \langle_2) = 0$ olur. $\rho(\langle_1, \langle_2) = 0$ olsun. O halde $\max\{r | \langle_1 |G_r = \langle_2 |G_r\}$ yoktur. Her $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\langle_1 |G_r = \langle_2 |G_r$ olup $G = \bigcup_{r=0}^{\infty} G_r$ olduğundan $\langle_1 = \langle_2$ olur. Sonuç olarak $\rho(\langle_1, \langle_2) = 0 \Leftrightarrow \langle_1 = \langle_2$ olur.
- iii) $\langle_1, \langle_2 \in LO(G)$ için $\rho(\langle_1, \langle_2) = \rho(\langle_2, \langle_1)$ olduğunu göstermeliyiz. $\rho(\langle_1, \langle_2) = 0$ olsun. O halde $\langle_1 = \langle_2$ olup $\rho(\langle_1, \langle_2) = \rho(\langle_2, \langle_1)$ olur. $\rho(\langle_1, \langle_2) \neq 0$ olsun. O halde $r = \max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} | a, b \in G_r, a \langle_1 b \Leftrightarrow a \langle_2 b\}$ olmak üzere $\rho(\langle_1, \langle_2) = 1/2^r$ ve $s = \max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} | a, b \in G_r, a \langle_2 b \Leftrightarrow a \langle_1 b\}$ olmak üzere $\rho(\langle_2, \langle_1) = 1/2^s$ olup $r = s$ olmalıdır. Sonuç olarak $\rho(\langle_1, \langle_2) = \rho(\langle_2, \langle_1)$ olur.
- iv) $\langle_1, \langle_2, \langle_3 \in LO(G)$ için $\rho(\langle_1, \langle_2) \leq \rho(\langle_1, \langle_3) + \rho(\langle_2, \langle_3)$ olduğunu göstermeliyiz. $\rho(\langle_1, \langle_2) = 0$ ise $\rho(\langle_1, \langle_2) \leq \rho(\langle_1, \langle_3) + \rho(\langle_2, \langle_3)$ olduğu açıktır. $\rho(\langle_1, \langle_2) \neq 0$ olsun. $q = \max\{r | \langle_1 |G_r = \langle_2 |G_r\}$ olmak üzere $\rho(\langle_1, \langle_2) = 1/2^q$ olur. Bu durumda $\rho(\langle_1, \langle_3) = 0$ ise $\langle_1 = \langle_3$ olup $q = \max\{r | \langle_1 |G_r = \langle_2 |G_r\} = \max\{r | \langle_3 |G_r = \langle_2 |G_r\}$ olur. Dolayısıyla $\rho(\langle_2, \langle_3) = 1/2^q$ olur. $\rho(\langle_2, \langle_3) = 0$ ise $\langle_2 = \langle_3$ olup $q = \max\{r | \langle_1 |G_r = \langle_2 |G_r\} = \max\{r | \langle_1 |G_r = \langle_3 |G_r\}$ olur. Böylelikle $\rho(\langle_3, \langle_1) = 1/2^q$ olur. Şimdi $\rho(\langle_1, \langle_3) \neq 0$ olsun. O halde $s = \max\{r | \langle_1 |G_r = \langle_3 |G_r\}$ olmak üzere $\rho(\langle_1, \langle_3) = 1/2^s$ olur. Eğer $\rho(\langle_2, \langle_3) \neq 0$ ise $t = \max\{r | \langle_2 |G_r = \langle_3 |G_r\}$ olmak üzere $\rho(\langle_2, \langle_3) = 1/2^t$ olur. $1/2^q \leq 1/2^s + 1/2^t$ olduğunu göstermeliyiz. $s \geq t$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $q \geq s$ ise $1/2^q \leq 1/2^s$ olup eşitsizlik sağlanır. Şimdi $q < s$ olsun. $t < q < s$ ise $\langle_2 |G_q = \langle_3 |G_q$ olup $t = \max\{r | \langle_2 |G_r = \langle_3 |G_r\}$ olmasıyla çelişir. $t = q$ ise $1/2^q \leq 1/2^s + 1/2^t$ eşitsizliği sağlanır. $t > q$ ise $\langle_1 |G_t = \langle_2 |G_t$ olup

$q = \max\{r | \langle_1 |_{G_r} = \langle_2 |_{G_r}\}$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $\rho(\langle_1, \langle_2) \leq \rho(\langle_1, \langle_3) + \rho(\langle_2, \langle_3)$ olur.

Bu önerme ile birlikte iki durum ortaya çıkar.

1. Her $B(\langle_0, 1/2^r)$ açık yuvarı Tanım 3.1.1'de tanımlanan topolojiye göre açıktır.

İspat: $\langle_1 \in B(\langle_0, 1/2^r) \Leftrightarrow \rho(\langle_1, \langle_0) < 1/2^r \Leftrightarrow \langle_1 |_{G_{r+1}} = \langle_0 |_{G_{r+1}}$ olup $a, b \in G_{r+1}$ olmak üzere $B(\langle_0, 1/2^r) = \bigcap_{a <_0 b} U_{a,b}$ olur.

2. Her $U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ kümesi ρ metriğine göre açıktır. Yani her $\langle_0 \in U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ için $B(\langle_0, 1/2^r) \subset U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ olan r değeri vardır.

İspat: $\emptyset \neq U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ açık kümesi için $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in G_r$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{N}$ vardır. $\langle_0 \in U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ alalım. $B(\langle_0, 1/2^r) \subset U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ olduğunu gösterelim. $\langle_1 \in B(\langle_0, 1/2^r)$ alalım. $\langle_1 |_{G_{r+1}} = \langle_0 |_{G_{r+1}}$ olur. Dolayısıyla her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $a_i <_1 b_i$ olur. O halde $\langle_1 \in U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ olup $B(\langle_0, 1/2^r) \subset U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ olur.

Teorem 3.1.4: $LO(G)$ kompakttır, tamamen bağlantısız topolojik uzaydır.

İspat: Önce $LO(G)$ 'nin tamamen bağlantısız olduğunu gösterelim. $\langle_1 \neq \langle_2$ olmak üzere $\langle_1, \langle_2 \in LO(G)$ alalım. $\langle_1 \in U_{a,b}$, $\langle_2 \in U_{b,a}$, $U_{a,b} \cup U_{b,a} = LO(G)$ ve $U_{a,b} \cap U_{b,a} = \emptyset$ olacak şekilde $a \neq b$ olan $a, b \in G$ olduğunu göstereceğiz. $\langle_1 \neq \langle_2$ olan \langle_1, \langle_2 lineer sıralamaları için $a \neq b$ olan $\exists (a, b) \in G \times G$ vardır öyle ki $a <_1 b$ ise $b <_2 a$ olur. O halde $\langle_1 \in U_{a,b}$ ve $\langle_2 \in U_{b,a}$ olur. Ayrıca $U_{a,b} \cup U_{b,a} = LO(G)$ ve $U_{a,b} \cap U_{b,a} = \emptyset$ olup $LO(G)$ tamamen bağlantısızdır.

Şimdi de $LO(G)$ 'nin kompakt olduğunu gösterelim. $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_r \subset \dots$ olmak üzere $\langle_n: \langle_1, \langle_2, \dots, \langle_n, \dots \in LO(G)$ dizisini alalım. (\langle_n) dizisinin G_1 'de

aynı olan $(\langle_{i_n}^1)$ alt dizisi, G_2 'de aynı olan $(\langle_{i_n}^2)$ alt dizisi vardır. Bu şekilde devam edersek her $r \in \mathbb{N}$ için G_1, G_2, \dots, G_r 'ler sonlu elemanlı olmak üzere (\langle_n) dizisinin G_r 'de aynı olan $(\langle_{i_n}^r)$ alt dizisi vardır

$$\langle_{i_1}^1, \langle_{i_2}^1, \langle_{i_3}^1, \dots$$

$$\langle_{i_1}^2, \langle_{i_2}^2, \langle_{i_3}^2, \dots$$

.

.

.

$$\langle_{i_1}^r, \langle_{i_2}^r, \langle_{i_3}^r, \dots$$

olmak üzere (\langle_n) dizisinin $\langle_{k_n} = \langle_{i_n}^n$ şeklindeki (\langle_{k_n}) alt dizisini düşünelim. Yani $\langle_{k_n} : \langle_{i_1}^1, \langle_{i_2}^2, \langle_{i_3}^3, \dots$ şeklindedir. (\langle_{k_n}) alt dizisini $\langle^1, \langle^2, \langle^3, \dots$ ile gösterelim. Aşağıdaki lemma ile bu dizinin yakınsak olduğunu göstereceğiz. Böylece $LO(G)$ 'nin kompakt olduğunu göstermiş olacağız.

Lemma 3.1.5: $\langle^1, \langle^2, \langle^3, \dots$ dizisi, $a \langle^\infty b \Leftrightarrow a \langle^n b$ (sonlu tane n dışında) olarak tanımladığımız \langle^∞ sıralamasına yakınsar.

İspat: Önce yukarıda tanımladığımız \langle^∞ sıralaması için aşağıdaki özellikleri gösterelim.

i) \langle^∞ sıralaması bir tam sıralamadır.

$a, b \in G$ olsun. $\exists r \in \mathbb{N}$ için $a, b \in G_r$ olur. $\langle^r = \langle_{i_n}^r$ olmak üzere $(\langle_{i_n}^r : (\langle_n)$ dizisinin G_r 'de aynı olan alt dizisi)

$$\langle_{i_1}^1, \langle_{i_2}^1, \dots, \langle_{i_n}^1, (\langle_n) \text{ dizisinin } G_1 \text{'de aynı olan alt dizisi}$$

$$\langle_{i_1}^2, \langle_{i_2}^2, \dots, \langle_{i_n}^2, (\langle_n) \text{ dizisinin } G_2 \text{'de aynı olan alt dizisi}$$

.

.

.

$\langle_{i_1}^r, \langle_{i_2}^r, \dots, \langle_{i_n}^r, (\langle_n)$ dizisinin G_r 'de aynı olan alt dizisi

$\langle_{i_1}^{r+1}, \langle_{i_2}^{r+1}, \dots, \langle_{i_n}^{r+1}, (\langle_n)$ dizisinin G_{r+1} 'de aynı olan alt dizisi

olup $j > r$ için G_r 'de aynı olan $(\langle_{i_n}^j)$ alt dizisinin terimleri G_j 'de aynı olur. $G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_{r-1} \subset G_r \subset \dots \subset G_j$ olduğundan G_0, G_1, \dots, G_j 'de aynı olur. O halde $a, b \in G_r$ için (\langle_n) dizisinin $i > r$ için tüm terimleri G_r 'de aynı olur. Buna göre $i > r$ için ya $a <^i b$ ya da $b <^i a$ olup ya $a <^\infty b$ ya da $b <^\infty a$ olur. Böylece $<^\infty$ sıralaması bir tam sıralamadır.

ii) $<^\infty$ sıralaması bir sol sıralamadır.

$a, b \in G$ olmak üzere $a <^\infty b$ ise $a <^n b$ (sonlu tane n dışında) olur. O halde her $c \in G$ için $ca <^n cb$ (sonlu tane n dışında) olup $ca <^\infty cb$ olur. Böylece $<^\infty$ sıralaması bir sol sıralamadır.

Şimdi $\langle_{k_n} \rightarrow <^\infty$ olduğunu gösterelim. $r = \max\{r | \langle_n | G_r = <^\infty | G_r\}$ olmak üzere $a, b \in G_r$ alalım. O halde $a <^r b \Leftrightarrow a <^\infty b$ olur. $a <^\infty b \Leftrightarrow a <^n b$ (sonlu tane n dışında) fakat $a <^r b$ 'dir. $\rho(\langle_n, <^\infty) = 1/2^r \leq 1/2^n$ olup $\rho(\langle_n, <^\infty) \leq 1/2^n$ olur. Böylece $\langle_{k_n} \rightarrow <^\infty$ olur.

Sonuç 3.1.6: $LO(G)$ Cantor kümesidir \Leftrightarrow

i) $LO(G) \neq \emptyset$

ii) Her $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in G$ için $U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n} = \emptyset$ ve ya sonsuz elemanlıdır.

İspat: ii) koşulu $LO(G)$ kümesinin perfect olduğunu söyler. Dolayısıyla boştan farklı her kompakt, metrik, perfect ve tamamen bağlantısız uzay Cantor kümesine homeomorf olduğundan ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.7: $n > 1$ için $LO(\mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorfiktir.

İspat: Varsayalım ki bir $m > 1$ için $LO(\mathbb{Z}^m)$ Cantor kümesine homeomorf olmasın. $n = \min\{m | m > 1 \text{ ve } LO(\mathbb{Z}^m) \text{ Cantor kümesine homeomorf değildir}\}$ olsun. $LO(\mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorf olmadığından Sonuç 3.1.6'dan $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_s, b_s) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ vardır öyle ki $U_{a_1, b_1} \cap U_{a_2, b_2} \cap \dots \cap U_{a_s, b_s} = \{\langle \in LO(\mathbb{Z}^n) | \text{her } i \in \{1, 2, \dots, s\} \text{ için } a_i < b_i\}$ sonlu bir kümedir. Gerektiğinde sonlu sayıda farklı nokta çifti ekleyerek genelliği bozmaksızın $U_{a_1, b_1} \cap U_{a_2, b_2} \cap \dots \cap U_{a_s, b_s}$ kümesini tek elemanlı varsayabiliriz. Öte yandan $i \neq j$ iken $(b_j - a_j)$ vektörünün $(b_i - a_i)$ vektörünün bir rasyonel katı olmadığını varsayabiliriz. Yani $i \neq j$ iken $m(b_j - a_j) = n(b_i - a_i)$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ yoktur. $U_{a_1, b_1} \cap U_{a_2, b_2} \cap \dots \cap U_{a_s, b_s} = \{\langle\}$ olsun. $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}^n$ alalım. $v_1 < v_2 \Leftrightarrow \text{her } n \in \mathbb{Z}^n \text{ için } nv_1, nv_2 \in \mathbb{Z}^n \text{ olmak üzere } nv_1 < nv_2 \text{ olur. Böylelikle } < \text{ sıralamasını } \mathbb{Q}^n \text{ 'e genişletmiş oluruz. Şimdi } H = \{x \in \mathbb{R}^n | x \text{ 'in } \mathbb{Q}^n \text{ 'deki her komşuluğu pozitif ve negatif elemanlar içerir}\}$ olmak üzere $\mathbb{Q}^n \otimes \mathbb{R} \supset H$ kümesini alalım. Buna göre $x \in H \Leftrightarrow x \in U \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi için bir $v, w \in U \cap \mathbb{Q}^n$ vardır öyle ki $\mathbf{0} < v$ ve $w < \mathbf{0}$ olur. H , \mathbb{R}^n 'de bir hiper düzlemdir. Aslında bir $\alpha \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ vardır öyle ki $H = \{x | \langle \alpha, x \rangle = \mathbf{0}\}$ olur. $H_+ = \{x | \langle \alpha, x \rangle > \mathbf{0}\}$ ve $H_- = \{x | \langle \alpha, x \rangle < \mathbf{0}\}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n \setminus H$, H_+ ve H_- bağlantılı bileşenlerinden oluşur. $\mathbb{R}^n \setminus H = H_+ \cup H_-$ için $x \in H_+$ ise $x > \mathbf{0}$ ve $x \in H_-$ ise $x < \mathbf{0}$ olur. Her $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $a_i < b_i$ idi. $a = \{a_i^1, \dots, a_i^n\} \in \mathbb{Z}^n$ ve $b = \{b_i^1, \dots, b_i^n\} \in \mathbb{Z}^n$ olmak üzere $b_i - a_i = (b_i^1 - a_i^1, \dots, b_i^n - a_i^n) > \mathbf{0}$ olur. $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\}$ olmak üzere $\langle \alpha, b_i - a_i \rangle = \alpha_1(b_i^1 - a_i^1) + \dots + \alpha_n(b_i^n - a_i^n)$ olur. Böylece $b_i - a_i \in H_+$ ya da $b_i - a_i \in H$ olur. $I = \{i | b_i - a_i \in H\}$ olsun. Dikkat edilirse $\{\langle' \in LO(H \cap \mathbb{Z}^n) | \text{Her } i \in I \text{ için } a_i <' b_i\} = \{\langle\}$ olur. Aksi takdirde $\langle' \in LO(H \cap \mathbb{Z}^n)$ ve her $i \in I$ için $a_i <' b_i$ ise \langle' , \mathbb{Z}^n üzerinde dolayısıyla \mathbb{Q}^n üzerinde her $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $a_i < b_i$ olacak şekilde bir sıralamaya

genişletilebilir. Bu bir çelişkidir. Çünkü \mathbb{Q}^n üzerinde $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $a_i < b_i$ olacak şekilde bir tek sıralama vardır. O halde $H \cap \mathbb{Z}^n$ Sonuç 3.1.6'nın koşulunu sağlamıyor. $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ sonlu bir küme olmak üzere $a_{i_1} < b_{i_1}, \dots, a_{i_k} < b_{i_k}$ olacak şekilde bir tek $<$ sıralaması vardır. Yani öyle $(a_{i_1}, b_{i_1}), \dots, (a_{i_k}, b_{i_k}) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ vardır öyle ki $U_{a_{i_1}, b_{i_1}} \cap \dots \cap U_{a_{i_k}, b_{i_k}}$ sonludur. Öte yandan $H \cap \mathbb{Z}^n \subset H$ ve $\dim(H \cap \mathbb{Z}^n) \leq n - 1$ olur. Ayrıca kabulümüzden $LO(H \cap \mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorfiktir. Dolayısıyla ya $H \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ ya da $H \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}$ olur. Eğer $H \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ ise $I = \emptyset$ olur. Her $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $b_i - a_i \in H_+$ olur. Dolayısıyla sonsuz çoklukta $H' \subset \mathbb{R}^n$ hiper düzlemleri ve bu hiper düzlemlere karşılık gelen \mathbb{Q}^n üzerinde $<'$ sıralamaları vardır öyle ki $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $a_i <' b_i$ olur. Bu bir çelişkidir. Eğer $H \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}$ ise I tek elemanlıdır. Çünkü $i \neq j$ iken $(b_j - a_j)$ vektörü $(b_i - a_i)$ vektörünün rasyonel katı değildi. Bir tek $i_0 \in \{1, 2, \dots, s\}$ için $b_{i_0} - a_{i_0} \in H$ olur. Dolayısıyla sonsuz çoklukta $H' \subset \mathbb{R}^n$ hiper düzlemleri vardır öyle ki $i \in \{1, 2, \dots, s\} - \{i_0\}$ için $(b_{i_0} - a_{i_0})$ ile $(b_i - a_i)$ vektörleri aynı bileşende olur. Dolayısıyla \mathbb{Q}^n üzerinde sonsuz çoklukta $<'$ sıralamaları için $a_i <' b_i$ olurdu ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $H \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$ ve $H \cap \mathbb{Z}^n \neq \mathbb{Z}$ olur. $LO(H \cap \mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorf değildir. Bu bir çelişkidir. Çünkü $(H \cap \mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ olduğundan $1 < \dim(H \cap \mathbb{Z}^n) \leq n - 1$ olur ki $LO(\mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorf olmayacak şekildeki 1'den büyük en küçük doğal sayı n idi.

4. İKİ TARAFLI SIRALAMALAR

Bir iki taraflı sıralama, hem sol sıralama hem de sağ sıralama olan bir lineer sıralamadır. G yarı grubu üzerindeki iki taraflı sıralamaların kümesini $B\dot{I}O(G)$ ile gösteririz. Önerme 3.1.3'e göre $B\dot{I}O(G)$ kümesi $RO(G)$ ve $LO(G)$ 'den aynı topolojiyi alır.

Önerme 4.1.1: $B\dot{I}O(G)$, $LO(G)$ 'nin kapalı alt kümesidir. Böylece $B\dot{I}O(G)$ Cantor kümesidir $\Leftrightarrow B\dot{I}O(G)$ boştan farklıdır ve G 'nin elemanlarından oluşmuş herhangi bir $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ dizisi için $B\dot{I}O(G) \cap U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ kümesi ya boştur ya da sonsuzdur.

İspat: Kabul edelim ki $LO(G)$ üzerinde G 'nin bir filtrasyonu ile oluşturulmuş bir metrik olsun. $\langle_n, B\dot{I}O(G)$ içinde $\langle_\infty \in LO(G)$ limitine sahip bir dizi olsun. Dolayısıyla $a \langle_\infty b \Leftrightarrow a \langle_i b$ (sonlu tane i dışında) olur. $\langle_i \in B\dot{I}O(G)$ olduğundan $a \langle_\infty b$ ise her $c \in G$ için $ac \langle_\infty bc$ olur. Böylece $\langle_\infty \in B\dot{I}O(G)$ olur. O halde $B\dot{I}O(G)$, $LO(G)$ 'nin kapalı alt kümesidir. Hipotezin ikinci kısmı Sonuç 3.1.6 ile aynı ispata sahiptir.

Sanı 4.1.2: $n > 1$ üreteçli F_n serbest grubu için $LO(F_n)$ ve $B\dot{I}O(F_n)$ uzayları Cantor kümesine homeomorfiktir.

G grubunun $\bigcap_{k=0}^{\infty} G^k = \mathbf{1}$ olan $G = G^0 \supset G^1 \supset \dots$ alt merkezi serisi verilsin. G^k/G^{k+1} grupları üzerindeki her \langle_k tam sıralamaları G üzerinde bir tam iki taraflı sıralama belirler öyle ki bu G üzerinde \langle_k 'lar tarafından belirlenen sıralama pozitif olmayı korur. Yani $g \in G^k - G^{k+1}$ ve $g > \mathbf{0} \Leftrightarrow gG^{k+1}$ 'in her elemanı pozitifdir. Diğer bir deyişle her $h \in G^{k+1}$ için $gh > \mathbf{0}$ olur. (Stephen Willard, 1970 , L. Fuchs, 1963 , H. H. Teh, 1961) Öte yandan her torsiyonsuz abelyen grup üzerinde bir tam sıralama vardır. (T. Becker ve V. Weispfenning, 1993) Dolayısıyla eğer her k için G^k/G^{k+1} torsiyonsuz ise her k için G^k/G^{k+1} üzerinde bir \langle_k tam sıralaması vardır.

Böylelikle bu $<_k$ sıralamaları G üzerinde bir iki taraflı sıralama belirler. G üzerindeki bu iki taraflı sıralamalara *standart sıralamalar* denir ve $SBİO(G)$ ile gösterilir.

Eğer $< \in SBİO(G)$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

- i) Her k için G^k/G^{k+1} üzerinde $<_k$ tam sıralaması vardır. ($<: <_k$ 'lar ile belirleniyor)
- ii) $g \in G^k - G^{k+1}$, $h \in G^{k+1}$ olsun. O halde $g \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow gh \geq \mathbf{0}$ olur. (Sonlu üretilmişse torsiyonuna bölerek torsiyonsuz abelyen grup sayabiliriz.)

Önerme 4.1.4:

- i) $SBİO(G)$, $BİO(G)$ 'nin kapalı alt kümesidir.
- ii) Eğer $G \neq \mathbb{Z}$ ve her bir G^k/G^{k+1} faktörü sonlu üretilmiş ise $SBİO(G)$ ya boş kümedir ya da Cantor kümesine homeomorfiktir.

İspat:

- i) Bir $< \notin SBİO(G)$ ise $g \in G^k - G^{k+1}$ ve $h \in G^{k+1}$ vardır. $g > e$ ve $gh < e$ olur. Böylece $<$ 'nin standart olmayan sıralamalarından oluşmuş bir açık komşusu vardır. $< \in U_{gh,e} \cap BİO(G) \subset BİO(G) - SBİO(G)$ olup $BİO(G) - SBİO(G)$ açıktır. O halde $SBİO(G)$ kapalıdır.
- ii) G^k/G^{k+1} gruplarını torsiyonsuz dolayısıyla serbest abelyen grup varsayabiliriz. Aksi halde $SBİO(G) = \emptyset$ olur. Çünkü $\leq \in SBİO(G)$ olsun. $aG^{k+1} \in T_k$ ise bir $n \in \mathbb{N}$ için $na \in G^{k+1}$ olur. O halde $-na \in G^{k+1}$, $a \in G^k - G^{k+1}$ ve $a > \mathbf{0}$ olup $-(n-1)a > \mathbf{0}$ çelişkisi olur. $SBİO(G) \cap U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n} = \emptyset$ ve ya sonsuz elemanlı olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım ki $SBİO(G) \cap U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n} \neq \emptyset$ olsun. Eğer

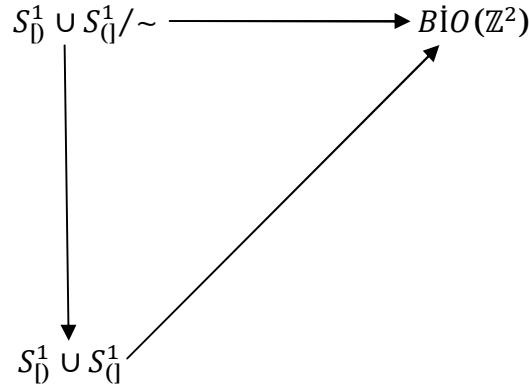
bir k için $G^k/G^{k+1} = \mathbb{Z}^n$ ($n \geq 2$) ise Önerme 3.1.7'nin ispatındaki gibi $U_{a_1, b_1} \cap \dots \cap U_{a_n, b_n}$ içinde sonsuz çoklukta G üzerinde standart sıralama elde edebiliriz. Dolayısıyla şimdi her k için G^k/G^{k+1} 'nin \mathbb{Z} ve ya trivial olduğunu varsayabiliriz. Bu durum aslında her k için $G^k/G^{k+1} = \mathbb{Z}$ olması demektir. Gerçekten bir k için G^k/G^{k+1} trivial grup ise $G^l = G^k$ (her $l \geq k$) için ve $\bigcap_{i=0}^{+\infty} G^i = \{e\}$ olduğundan G nilpotent grup olur. Dolayısıyla $G^k/G^{k+1} = \mathbb{Z}$ olacak şekildeki tek nilpotent grup $G = \mathbb{Z}$ olur. (M. Hall Jr., 1959) Dolayısıyla her k için $G^k/G^{k+1} = \mathbb{Z}$ varsayabiliriz. Her k için $G^k/G^{k+1} = \mathbb{Z}$ tam olarak iki sıralamaya sahip olduğundan $SBİO(G) \approx \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}^{N_0}$ olur.

Örnek 4.1.5: $\mathbb{R}_D = \mathbb{R}$: $\mathfrak{B} = \{[a, b] | a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } a < b\}$ kümesini baz kabul eden topoloji ile ve $\mathbb{R}_Q = \mathbb{R}$: $\mathfrak{B}' = \{(a, b] | a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } b > a\}$ kümesini baz kabul eden topoloji ile olsun. $\mathbb{R}_D/\mathbb{Z} \rightarrow S_D^1 \subset \mathbb{R}^2$ ve $\mathbb{R}_Q/\mathbb{Z} \rightarrow S_Q^1 \subset \mathbb{R}^2$ dönüşümleri için $z \rightarrow e^{2\pi iz}$ sürekli ve örtendir. $(x, y) \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$ için eğer $x/y \in \mathbb{Q}$ ise (x, y) rasyoneldir diyelim. $X = S_D^1 \times S_Q^1 / \sim$ olsun öyle ki $(x_1, y_1) \in S_D^1, (x_2, y_2) \in S_Q^1$ iken $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ve irrasyonel olur. U, X 'in açık kümesidir $\Leftrightarrow U \cap S_D^1$ ve $U \cap S_Q^1$ açıktır.

Önerme 4.1.6: $BİO(\mathbb{Z}^2)$ X 'e homeomorfiktir.

İspat: Öncelikle $S_D^1 \cup S_Q^1 \rightarrow BİO(\mathbb{Z}^2)$ 'ye bir dönüşüm kuracağız. $x \in S_D^1$ ile \mathbb{Z}^2 üzerinde bir $<_x$ sıralamasını ilişkilendireceğiz. Bu sıralamaya göre $y \in \mathbb{Z}^2$ pozitifdir $\Leftrightarrow \mathbb{R}^2$ 'deki y ve x vektörleri arasındaki yönlü açı $(\mathbf{0}, \pi]$ aralığındadır. $x \in S_Q^1$ ve \mathbb{Z}^2 üzerinde bir $<^x$ sıralamasını ilişkilendireceğiz. $y \in \mathbb{Z}^2$ pozitifdir $\Leftrightarrow \mathbb{R}^2$ 'deki y ve x vektörleri arasında ki yönelmiş açı $[\mathbf{0}, \pi)$ aralığındadır. $y, z \in \mathbb{Z}^2$ için $y <_x z \Leftrightarrow z - y$ pozitifdir. $(\mathbf{0} <_x z - y) \quad y = (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad x \in S_D^1 \quad \text{ve} \quad p \in \mathbb{Z}^2$ için

$p + z - (p + y) = z - y$ olup $p + y <_x p + z$ olur. $S_0^1 \rightarrow B\dot{I}O(\mathbb{Z}^2)$ ($x \rightarrow <_x$) ve $S_0^1 \rightarrow B\dot{I}O(\mathbb{Z}^2)$ ($x \rightarrow <^x$) dönüşümlerini alalım.



$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ olsun. $(x_1, y_1) \in S_0^1$, $(x_2, y_2) \in S_0^1$, $x = (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ve irrasyonel olsun. Bu durumda $<_x = <^x$ olduğunu gösterelim. $z \in \mathbb{Z}^2$ için $\mathbf{0} <_x z \Leftrightarrow \mathbf{0} <^x z$ olduğunu görmek yeterlidir. Eğer z ile x arasındaki açı $(\mathbf{0}, \pi)$ aralığında ise $\mathbf{0} <_x z \Leftrightarrow \mathbf{0} <^x z$ olur. Varsayalım ki z ile x arasındaki açı π ve ya 0 olsun. $z \parallel x$ ve ya $z \parallel -x$ olur. O halde z irrasyonel olur ki bu bir çelişkidir. Çünkü $z \in \mathbb{Z}^2$ idi. $i: X = S_0^1 \cup S_0^1 / \sim \rightarrow B\dot{I}O(\mathbb{Z}^2)$ dönüşümü şöyle tanımlanır:

$$i([x]) = \begin{cases} [x] \rightarrow <_x, & x \in S_0^1 \\ [x] \rightarrow <^x, & x \in S_0^1 \end{cases}$$

i dönüşümünün bire-bir olduğunu gösterelim. $i([x]) = i([y])$ olsun. Birinci durumda $x \in S_0^1$ ve $y \in S_0^1$ olsun. Bu durumda $i([x]) = <_x$ ve $i([y]) = <_y$ olur. $<_x = <_y$ olsun. Varsayalım ki $x \neq y$ olsun. x ile y vektörleri arasındaki açı $(\mathbf{0}, \pi]$ aralığındadır. $z \in \mathbb{Z}^2$ ve z ile x arasındaki açı θ öyle ki y ile x arasındaki açı α ise $\theta + \alpha > \pi$ ve $\mathbf{0} < \theta < \pi$ olsun. Yani $\pi - \alpha < \theta < \pi$ olsun. Bu durumda $\mathbf{0} <_x z$ olur. $<_x = <_y$ idi. Dolayısıyla $\mathbf{0} <_y z$ çelişkisi oluşur. O halde z ile y arasındaki açı $\theta + \alpha > \pi$ olur. İkinci durumda $x \in S_0^1$ ve $y \in S_0^1$ olsun. Bu durumda $i([x]) = <^x$ ve $i([y]) = <^y$ olsun. Benzer şekilde $x = y$ olduğu gösterilir. Son olarak $x \in S_0^1$ ve

$y \in S_{\mathbb{Q}}^1$ olsun. Bu durumda $i([x]) = i([y])$ olsun. Yani $\langle_x = \langle^x \Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow x = y$ ve ya irrasyonel olur. Böylelikle incelediğimiz bu üç durumla beraber i dönüşümü bire-bir olur. Şimdi i dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. $\langle \in B\dot{I}O(\mathbb{Z}^2)$ bir sıralama olsun. Önerme 3.1.7'den bir $H \subset \mathbb{R}^2$ bir boyutlu alt uzayı vardır öyle ki C_1 ve C_2 $\mathbb{R}^2 - H$ 'nin bağlantılı bileşenleri olmak üzere $\mathbb{R}^2 - H = C_1 \cup C_2$ olur. $x \in C_1$ ise $\mathbf{0} < x$ ve $x \in C_2$ ise $\mathbf{0} > x$ olur. Bir $[y] \in X$ için $i([y]) = \langle$ olduğunu göstermeliyiz. $H \subset \mathbb{R}^2$ bir boyutlu alt vektör uzayı orjinden geçen bir doğru iken H 'ye paralel iki tane birim vektör vardır. x ve $-x$, H doğrusuna paralel (zıt) birim vektörler olsun. $i([x]) = i([-x]) = \langle$ olduğunu iddaa ediyoruz. $x \in S_{\mathbb{D}}^1$ ve ya $x \in S_{\mathbb{Q}}^1$ şeklinde düşünebiliriz. $i([x]) = \langle^x = \langle$ olduğunu gösterelim. $z \in \mathbb{Z}^2$ için $z \in H$ ise z ile x arasındaki açı $[\mathbf{0}, \pi)$ aralığında, $z \in C_2$ ise $-z$ ile x arasındaki açı $(\mathbf{0}, \pi)$ aralığındadır. $\mathbf{0} <^x -z$ olur. Öte yandan $z \in \mathbb{Z}^2$ ise $z < \mathbf{0} \Leftrightarrow -z > \mathbf{0}$ olur. Böylelikle i dönüşümü örtendir. Son olarak i dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. $i^{-1}(U_{0,a}) \subset X$ 'in her $a \in \mathbb{Z}^2$ için açık olduğunu göstermemiz yeterlidir. $U_{0,a} = \{\langle | \mathbf{0} < a\}$ kümesi için $i^{-1}(U_{0,a}) = \{[x] | i([x]) \in U_{0,a}\} = \{x \in S_{\mathbb{D}}^1 | \mathbf{0} <_x a\} \cup \{x \in S_{\mathbb{Q}}^1 | \mathbf{0} <^x a\}$ olur. $A = \{x \in S_{\mathbb{D}}^1 | \mathbf{0} <_x a\}$ olmak üzere A kümesinin açık olduğunu gösterelim. $x_0 \in A$ alalım. $\mathbf{0} <_{x_0} a$ ise a ile x_0 arasındaki açı $(\mathbf{0}, \pi]$ aralığındadır. $x_0 \in U \subset A$ olacak şekilde x_0 'ın bir U komşuluğunu bulmalıyız. $y \in U$ ise a ile y arasındaki açı $(\mathbf{0}, \pi]$ aralığında olur. O halde $\mathbf{0} <_y a$ olup $x_0 \in U \subset A$ olur. Böylece A kümesi açıktır. $B = \{x \in S_{\mathbb{Q}}^1 | \mathbf{0} <^x a\}$ olmak üzere B kümesinin de açık olduğu benzer şekilde gösterilir. Buna göre $i^{-1}(U_{0,a})$ açık bir kümedir. Böylelikle i dönüşümü süreklidir.

Her kompakt kümenin bir Cantor kümesi üzerinde tanımlı sürekli bir dönüşümün görüntüsü olduğu bilinmesine rağmen bu dönüşümü yazmak zordur. Fakat bu dönüşümü Cantor kümesinden S^1 'e örten bir dönüşüm olarak yazabiliriz. $LO(\mathbb{Z}^2)$, $B\dot{I}O(\mathbb{Z}^2)$ 'nin kapalı alt kümesidir. $B\dot{I}O(\mathbb{Z}^2)$ de X 'e homeomorfiktir. Öte yandan $S_{\mathbb{D}}^1$ ve $S_{\mathbb{Q}}^1$ 'nin topolojileri S^1 'in öklidyen topolojisinden daha zengin olduğundan $f: X \rightarrow S^1$ sürekli bir dönüşüm olur. Buna göre X bir Cantor kümesidir.

5. GROBNER BAZINA BİR UYGULAMA

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, bir \mathbb{K} cismi üzerinde bir polinom halkası olsun. $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{Z} \text{ ve } x_i \geq 0\}$ olmak üzere $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası içindeki $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ monomialleri, $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ 'leri (i_1, \dots, i_n) 'e götüren izomorfizma ile $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ 'a izomorfik olan bir monoidi belirler. Buna göre $(x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n})$ ve $(x_1^{j_1}, \dots, x_n^{j_n})$ monomialleri için $(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) \cdot (x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}) = (x_1^{i_1+j_1} \dots x_n^{i_n+j_n})$ olur. Ayrıca $(x_1^0 \dots x_n^0) = 1$, bu monoidin birim elemanıdır. Bir G kümesi üzerindeki bir lineer sıralama, eğer G 'nin her alt kümesi bir en küçük elemana sahipse iyi sıralamadır. G yarı grubu için G 'nin tüm iyi sol sıralamalarının kümesini $LWO(G)$ ile gösteririz. $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ kümesinin elemanları $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ içindeki monomiallerin sıralaması olarak adlandırılır. $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ üzerindeki bir $<$ sol sıralaması bir iyi sıralamadır ancak ve ancak $\mathbf{0}$, $<$ sol sıralaması için en küçük elemandır. Böylece $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n) = LO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n) - (\cup U_{a,0})$ olur. $U_{a,0}$ açık olduğu için aşağıdaki sonucu söyleyebiliriz.

Sonuç 5.1.1: $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$, $LO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ 'ın bir kapalı alt kümesidir. Teorem 3.1.4'e göre $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ kompakttır.

Bunun yanında Önerme 3.1.7'nin ispatında verilen kabul nedeniyle hem $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ hem de $LO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ kümeleri $n > 1$ için Cantor kümesine homeomorfiktir.

Her $w \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinomu, m_i 'ler monomial olmak üzere $\sum_1^d c_i m_i$ olarak ayrıştırılır. $i \neq j$ için $m_i \neq m_j$ 'dir ve sıfırdan farklı c_i 'ler \mathbb{K} cisminde skalerlerdir. $<$, monomialler arasında bir sol sıralama ise $\mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ üzerindeki bir sıralamadır. $(i_1, \dots, i_n) < (j_1, \dots, j_n) \Leftrightarrow (x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}) < (x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n})$ olur. m_i 'ler farklı monomialler olmak üzere $(i \neq j \text{ iken } m_i \neq m_j)$ $w = \sum_1^d c_i m_i$ için $LM(w) = \max\{m_i \mid i = 1, 2, \dots, d\}$ olur. Yani $LM(w) = m_i$ ise her $j \neq i$ için $m_i > m_j$ olur. Böylece $c_i m_i$, w polinomunun en yüksek dereceli terimi olur. $I \triangleleft \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ideali için $LM(I) = \langle m \mid \text{Bir } w \in I \text{ için } m, w \text{'nin en yüksek dereceli monomiali} \rangle$ olur. $LM(I) \triangleleft \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ olduğunu gösterelim.

- i) $f_1, f_2 \in LM(I)$ için $f_1 - f_2 \in LM(I)$ olduğunu gösterelim. $f_1 = \sum_{i=1}^n c_i m_i$ olsun. O halde bir $g_i \in I$ vardır öyle ki m_i, g_i 'nin en büyük monomialidir. $f_2 = \sum_{j=1}^m d_j n_j$ olsun. O halde bir $h_j \in I$ vardır öyle ki n_j, h_j 'nin en büyük monomialidir. $f_1 = c_1 m_1 + \dots + c_n m_n$ ve $f_2 = d_1 n_1 + \dots + d_m n_m$ olarak yazılabilir. $f_1 - f_2 = c_1 m_1 + \dots + c_n m_n - d_1 n_1 - \dots - d_m n_m$ olup $f_1 - f_2$ 'nin bir monomiali bir $k_i \in I$ 'nin en büyük monomiali olur. Böylece $f_1 - f_2 \in LM(I)$ olur.
- ii) Her $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ve her $g \in LM(I)$ için $fg, gf \in LM(I)$ olduğunu gösterelim. $g \in LM(I)$ olduğu için $g = \sum_{i=1}^n c_i m_i$ şeklinde yazılır ve bir $h_i \in I$ vardır öyle ki m_i, h_i 'nin en büyük monomialidir. $f = \sum_{j=1}^m d_j n_j$ şeklindedir. $fg = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n d_j c_i n_j m_i$ olur. $I \triangleleft \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ olduğundan $h_i n_j \in I$ olur. Böylece $n_j m_i, h_i n_j$ 'nin en büyük monomiali olup $fg \in LM(I)$ olur. Benzer şekilde $gf \in LM(I)$ olduğu gösterilir.

$I \triangleleft \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ için eğer $LM(I) = \langle LM(f_1), \dots, LM(f_d) \rangle$ olacak şekilde $\{f_1, \dots, f_d\} \subset I$ varsa $\{f_1, \dots, f_d\}$ kümesine I 'nin bir *Grobner bazı* denir.

Monomialler üzerindeki farklı sıralamalar farklı Grobner bazı verirler. Bunu bir örnekle görelim.

Örnek 5.1.2: $I = \langle x_1^2, x_1 x_3 - x_2^2 \rangle$ olsun. \langle sıralaması, Lex. ve ya Deglex. ise bu sıralamaya göre I 'nin Grobner bazı $\{x_1^2, x_1 x_2^2, x_1 x_3 - x_2^2 x_2^4\}$ olur. \langle sıralaması, Degrevlex. ise bu sıralamaya göre I 'nin Grobner bazı $\{x_1^2, x_2^2 - x_1 x_3\}$ olur.

Tanım 5.1.3: $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkasındaki \langle sıralamasına sahip (f, g) monomial çifti için, LCM en küçük ortak katı göstermek üzere \langle sıralamasındaki (f, g) monomial çiftinin S - polinomu $S(f, g)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$S(f, g) = \frac{LCM(LM(f), LM(g))}{LT(f)} f - \frac{LCM(LM(f), LM(g))}{LT(g)} g$$

Örnek 5.1.4: $(f, g) = (x_1^2, x_1x_2 - x_2^2)$ ve $<$ sıralaması Lex. olsun.

$LM(f) = x_1^2, LM(g) = x_1x_2$ olup $LCM(LM(f), LM(g)) = x_1^2x_2$ olur. Böylece

$$S(f, g) = x_2x_1^2 - x_1(x_1x_2 - x_2^2) = x_1x_2 \text{ olur.}$$

Teorem 5.1.5: $\{f_1, \dots, f_k\}, \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkasındaki monomiallerin sonlu bir kümesi ve $S(f_i, f_j)$, S-polinomları olsun. $\{f_1, \dots, f_k\}, < f_1, \dots, f_k >$ idealinin bir Grobner bazıdır ancak ve ancak her i, j için $S(f_i, f_j)$ S-polinomlarının (f_1, \dots, f_k) 'ya tam bölünebilmesidir.

Önerme 5.1.6: $I \triangleleft \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ve $f_1, \dots, f_s \in I$ olsun. $A = \{\leq \in LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n) \mid \{f_1, \dots, f_s\}, \leq \text{ sıralamasına göre } I \text{ 'nin bir Grobner bazı}\}$ olmak üzere A kümesi, $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ 'in bir açık alt kümesidir.

İspat: $\leq \in LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ alalım. $<$ sıralamasına göre $S(f_i, f_j), (f_1, \dots, f_s)$ 'ye tam bölünür. (f_1, \dots, f_s) 'deki tüm monomialler (m_1, \dots, m_k) olsun. Genelliği bozmaksızın bu sıralamaya göre $m_1 > \dots > m_k$ olsun. Buna göre $\leq \in U = U_{m_2, m_1} \cap U_{m_3, m_2} \cap \dots \cap U_{m_k, m_{k-1}} \subset A$ olup $A, LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ 'in bir açık alt kümesidir.

Teorem 5.1.7: Her $I \triangleleft \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ideali için her monomial sıralamasıyla I 'nin bir Grobner bazı olan bir sonlu $\{f_1, \dots, f_s\} \subset I$ kümesi vardır.

Böyle bir kümeye I 'nin bir evrensel Grobner bazı denir.

İspat: Her $\{f_1, \dots, f_s\} \in I$ için $\{f_1, \dots, f_s\}$ kümesini I 'nin Grobner bazı yapan sıralamaların kümesi $V_{\{f_1, \dots, f_s\}}$ olsun. Yani $V_{\{f_1, \dots, f_s\}} = \{\leq \in LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n) \mid \leq \text{ sıralamasına göre } \{f_1, \dots, f_s\}, I \text{ 'nin bir Grobner bazıdır}\}$ olur. $V_{\{f_1, \dots, f_s\}}$ kümesi boş küme olabilir. Ayrıca Önerme 5.1.6'ya göre $V_{\{f_1, \dots, f_s\}}$ kümesi açıktır. $V_{\{f_1, \dots, f_s\}}$, her monomial sıralamasına göre I 'nin bir Grobner bazıdır. Şimdi $\leq \in LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ alalım. $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n) = \cup_{\{f_1, \dots, f_s\} \subset I} V_{\{f_1, \dots, f_s\}}$ olur. Sonuç 5.1.1'e göre $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ kompakt

olduğundan sonlu bir $V_{\{f_1, \dots, f_{s_1}\}}, V_{\{g_1, \dots, g_{s_2}\}}, \dots, V_{\{h_1, \dots, h_{s_t}\}}$ örtüsü vardır. Buna göre $\{f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2}, \dots, h_1, \dots, h_{s_t}\}$ kümesi I 'nin evrensel Grobner bazıdır.

Aşağıdaki örnek Sonuç 5.1.1'in $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\infty}$ için geçerli olmadığını gösteriyor.

Örnek 5.1.8: $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots]$ içindeki monomiallerin monoidi $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\infty}$ 'a izomorfiktir. $\{x_1, x_2, \dots\}$ kümesi üzerindeki herhangi bir $<$ lineer sıralaması $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots]$ üzerinde aşağıdaki gibi bir lexicographic sıralama meydana getirir.

$m = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots$ ve $n = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots$ $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots]$ içinde keyfi iki monomial olsun. $m_i \neq n_i$ olmak üzere $<$ sıralaması ile x_i en küçük değişken olsun. O zaman $m < n$ ancak ve ancak $m_i < n_i$ olur. L lexicographic anlamına gelmek üzere $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots]$ üzerindeki böyle bir sıralamayı $<_L$ ile gösteririz. $<_L$ sıralaması bir iyi sıralamadır $\Leftrightarrow <$ bir iyi sıralamadır. $<^1, <^2, \dots, <^n, \dots$ iyi sıralamaların bir dizisi olsun. Bir $<^n$ sıralaması için $x_n <^n \dots <^n x_3 <^n x_2 <^n x_1 <^n x_{n+1} <^n \dots$ olsun.

$\mathbb{Z}_{n \geq 0}^{\infty}$ 'in $\{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ filtrasyonunu düşünelim öyle ki $G_n, \{x_1, \dots, x_n\}$ kümesinin toplam derecesi en fazla n olan monomiallerinin kümesi olsun.

$\{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ filtrasyonu $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ üzerinde bir metrik meydana getirir. Bu ρ metriği $<^1, <^2 \in LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^n)$ için,

$$\rho(<^1, <^2) = \begin{cases} 1/2^r, & r = \max\{r \mid <^1 \mid G_r = <^2 \mid G_r\} \text{ ise} \\ 0, & \max\{r \mid <^1 \mid G_r = <^2 \mid G_r\} \text{ yoksa} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

$\{x_1, x_2, \dots\}$ üzerindeki $<^1, <^2, \dots, <^n, \dots$ iyi sıralamaların dizisini düşünelim. Bu dizinin belirlediği $<_L^1, <_L^2, \dots, <_L^n, \dots$ lexicographic iyi sıralamaların dizisi ρ metriğine göre yakınsaktır. Şimdi $\dots X_n <^{\infty} X_{n-1} <^{\infty} \dots <^{\infty} X_2 <^{\infty} X_1$ ile belirli

yeni bir $<_L^\infty$ lexicographic sıralama tanımlayalım. $<_L^1, <_L^2, \dots, <_L^n, \dots$ lexicographic sıralamaların dizisinin $<_L^\infty$ lexicographic sıralamasına yakınsadığını gösterelim. $\varepsilon > 0$ verilsin. $1/2^k < \varepsilon$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ alalım. $n \geq k$ iken $\rho(<_L^\infty, <_L^n) = 1/2^k < \varepsilon$ olup bu dizi $<_L^\infty$ sıralamasına yakınsar. Böylece $i = 1, 2, \dots, n$ için $<_L^\infty |G_i = <_L^n |G_i$ olur. Ayrıca $<_L^\infty$ sıralaması ile bir en küçük eleman olmadığından $<_L^\infty, \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots]$ üzerinde bir iyi sıralama değildir.

Buna göre $LWO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^\infty), LO(\mathbb{Z}_{\geq 0}^\infty)$ 'ın bir kapalı alt kümesi değildir.

KAYNAKLAR

- ADAM S. SIKORA, Topology on the spaces of ordering groups, Bull. London Math. Soc. (2004)
- B. H. NEUMANN, 'On ordered groups', Amer. J. Math. 71 (1949) 202-252
- D. COX, J. LITTLE and D. O'SHEA, Ideals, varieties, and algorithms, an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, 2nd edn (Springer, New York, 1997)
- E. P. SIMBIREVA, 'On the theory of partially ordered groups', Mat. Sbornik 20 (1947) 145-178 (in Russian)
- H. H. TEH, 'Construction of orders in abelian groups', Proc. Camb. Phil. Soc. 57 (1961) 467-482
- L. FUCHS, Partially ordered algebraic systems (Pergamon Press, Oxford, 1963)
- M. HALL JR., The Theory of Groups (Macmillan and Co., New York, 1959)
- N. SCHWARTZ, 'Stability of Grobner bases', J. Pure Appl. Algebra 53 (1998) 171-186
- STEPHEN WILLARD, General Topology, Addison-Wesley Series in Math. (1970)
- T. BECKER and V. WEISPFENNING, Grobner bases, a computational approach to algebra, Grad. Texts in Math. (Springer, 1993)
- W. ADAMS and P. LOUSTAUNAU, An introduction to Grobner bases, Grad. Stud. Math. 3 (Amer. Soc., Providence, RI, 1994)

ÖZGEÇMİŞ

1984 tarihinde Adana'da doğdu. 2002 yılında Adana Özel Akdeniz Lisesi'nden mezun oldu. 2009 yılında Samsun 19 Mayıs Üniversitesi Matematik Bölümünü bitirdi. 2010 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümü Yüksek lisansını kazandı ve aynı yılda Matematik Bölümünde Yüksek lisansa başladı.