T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDO-KOMPLEKS LİE GRUPLARININ EĞRİLİKLERİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Talat KÖRPINAR
(08221202)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Essin TURHAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 16 Ocak 2013

ŞUBAT-2013

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PSEUDO-KOMPLEKS LİE GRUPLARININ EĞRİLİKLERİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Talat KÖRPINAR
(08221202)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 16 Ocak 2013
Tezin Savunulduğu Tarih : 13 Şubat 2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Essin TURHAN (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Sadık KELEŞ (İ.Ü)
Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü)
Prof. Dr. Vedat ASİL (F.Ü)
Doç. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (A.Ü)

ŞUBAT-2013

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımda bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Doç. Dr. Essin TURHAN 'a, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT 'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Talat KÖRPINAR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{C}^n$	:n-boyutlu Kompleks Uzay
$\mathbb{H}_{2n+1}$	: Genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg grubu
$GL(n,\mathbb{R})$	:Genel Lineer grup
∇	: Levi-Civita konneksiyonu
S	: Şekil Operatörü
R	: Eğrilik tensör alanı
ρ	: Ricci eğrilik tensörü
r	: Skalar eğrilik

ÖZET

PSEUDO-KOMPLEKS LİE GRUPLARININ EĞRİLİKLERİ ÜZERİNE

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, Lie grupları üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verildi.

İkinci bölümde; grup teorisi , manifoldlar, Lie gruplar ve kompleks manifoldlar için kullanılan temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg grubun temel yapısı ifade edildi ve Lie grup üzerinde üstel dönüşüm yardımıyla komutatör eğriler incelendi.

Dördüncü ve beşinci bölüm ise çalışmanın orijinal kısımnı kapsamaktadır.

Dördüncü bölümde; Genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg grubu yardımıyla $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubu ifade edilerek bu grup üzerinde üstel dönüşüm yardımıyla komutatör eğriler elde edildi.

Beşinci bölümde; $\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks manifoldu oluşturularak aynı zamanda bir pseudo-kompleks Lie grubu olan bu manifoldun skaler eğrilikleri, holomorfik kesit eğrilikleri ile Riemann eğrilikleri arasındaki bazı yeni bağıntılar ifade ve ispat edildi. Son olarak, $\mathbb{M}^{2n+2}$, üzerinde üstel dönüşüm yardımıyla komutatör eğrilerin bir karakterizasyonu verildi.

Altıncı bölüm ise; çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Lie Grupları, Lie Cebirleri, Genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg Grup, Komutatör Eğri, Üstel Dönüşüm, Holomorfik Kesit Eğriliği, Ricci Eğriliği.

SUMMARY

ON THE CURVATURES OF PSEUDO-COMPLEX LIE GROUPS

This thesis consist of six chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems of Lie groups, Lie algebras and the theory of the complex manifolds are given.

In the third chapter is constructed that generalized Lorentzian Heisenberg group. After, it is studied that comutator curves in terms of exponential maps in the generalized Lorentzian Heisenberg group.

The fourth and fifth chapters contain original part of our study.

In the fourth chapter; Lie group $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ is constructed by generalized Lorentzian Heisenberg group. Moreover, it is studied that comutator curves in terms of exponential maps in the $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$.

In the fifth chapter; we construct almost pseudo-complex manifold $\mathbb{M}^{2n+2}$ which is also pseudo-complex Lie group. Then, express and prove some new relations about scalar curvatures, holomorphic sectional curvatures and Riemannian curvatures of this manifold. Finally, it is studied that comutator curves in terms of exponential maps in the $\mathbb{M}^{2n+2}$.

The sixth chapter has been devoted to the conclusion.

Keywords: Lie groups, Lie Algebras, Generalized Lorentzian Heisenberg Group, Comutator Curve, Holomorphic Sectional Curvature and Ricci Curvature.

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Lie grupları, grup işlemi üzerinde diferensiyelenebilir manifoldlardır. Bu durumda Lie grubu aynı zamanda bir grup, bir topolojik uzay ve bir manifolddur, [19].

Lie grupları, modern teorik fizikte ve matematikte yapıların ve matematiksel nesnelerin sürekli simetrisinin iyi gelişmiş bir teorisini temsil eder. Bu gruplar, Galois teorisinde diferensiyel denklemlerin sürekli simetrilerinin analizi için temel bir çerçeve sağlamaktadır.

Lie grupları teorisi, matematiğin diferensiyel geometri, analiz, topoloji ve cebir gibi birçok dalında uygulamalara sahiptir. Bu teori son otuz yıl içerisinde gerek matematiksel fizikte, gerekse mühendislikteki pek çok probleme başarı ile uygulanmıştır. Özellikle, lineer olmayan bir kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklem sisteminin analitik çözümlerinin elde edilmesinde literatürdeki en önemli çözüm yöntemlerinden biridir.

Diferensiyel denklem sistemlerinin integrasyonu ile ilgili çalışmalarda, Lie grupları Norveç'li matematikçi Sophus Lie (1842-1899) tarafından geliştirilmiştir. Sophus Lie tarafından ortaya konulan, diferansiyel denklemin simetri analizi, Lie simetri grubu adı verilen, denklemin tanımlandığı manifoldu değişmez bırakan yerel dönüşüm gruplarının bulunmasıyla, diferansiyel denklemlerin yeni çözümlerinin sistematik bir prosedürle oluşturulmasını sağlayan bir teoridir. Bu teorinin, fizikte, özellikle hidrodinamikte, mekanikte, elektrodinamikte, kuantum teorisinde, istatistiksel mekanikte, cisim teorisinde, tanecik fiziğinde, vb. uygulamaları vardır.

Herbir Lie grubuna eşlik eden sonlu boyutlu bir Lie cebiri vardır. Bu nedenle Lie grupları teorisi Lie cebirleri ile Lie grupları arasındaki ilişkiye önemli bir yer ayırır.

Yani, Lie grubunun özellikleri bu gruba karşılık gelen Lie cebirine birer özellik olarak aksettirilir. Bu teoride, örneğin, irtibatlı, basit irtibatlı Lie grupları, birer izomorfizm altında kendilerine ait olan Lie cebirleri tarafından tamamen belirtilebilirler. Bunun için bu cins Lie gruplarını incelemek yerine onların Lie cebirlerini incelemek mümkün olur, [19].

Bir Lie grup üzerinde inşa edilen üstel dönüşümler yardımıyla bu grubun Lie cebirinin birçok topolojik ve analitik özellikleri belirlenebilmektedir. Cebirsel geometri ve çok değişkenli kompleks fonksiyonlar teorisinde de Lie gruplarının geniş uygulamaları vardır.

Calvaruso ve Marinosci; Homojen pseudo-Riemann manifoldlarda homojen geodezikler için temel tanım ve teoremleri verdiler. Elde ettikleri bu temel tanım ve teoremler yardımıyla üç boyutlu unimodüler Lorentz Lie gruplarındaki homojen geodezikleri sınıflandırdılar, [12].

Berdinsky ve Taimanov; üç boyutlu Lie gruplarında yüzeyler için Weierstrass temsil formüllerini elde ettiler ve bu Lie gruplarında minimal yüzeyler için temel denklemler oluşturdular. Ayrıca Dirac operatörünün spektral özelliklerini kullanarak, üç boyutlu Lie gruplarında bu yüzeyler için karakterizasyonlar verdiler, [5].

Riemannian geometride sol invaryant Riemann metrikler ile verilen çözülebilir ve nilpotent Lie gruplar önemli rol oynar. Her irtibatlı homojen Riemann manifold sol invaryant metrik ile verilen irtibatlı Lie grup olarak temsil edilebilir, [20].

Nilpotent Lie gruplar arasında en büyük öneme sahip olanı iki adımda çözülebilenlerdir. Genelleştirilmiş Heisenberg gruplar, sol invaryant metrik ile verilen basit irtibatlı iki adımda nilpotent Lie gruplarının bir alt sınıfını oluşturur, [6].

Genelleştirilmiş Heisenberg gruplar, A. Kaplan tarafından, kısmi diferensiyel denklemler hakkındaki araştırması ile tanıtılmıştır. Kaplan, Kuadratik formlar ve iki adımda nilpotent Lie gruplar yardımıyla Genelleştirilmiş Heisenberg grubun temel yapısını oluşturdu, [17].

Batat ve Rahmani; Heisenberg grup üzerinde oluşturulan üç metrik yardımıyla bu grubun izometri gruplarını tanımladılar. Elde ettikleri bu üç metrikten yalnızca birinin flat olduğunu gösterdiler. Ayrıca bu metrikler için Jacobi vektör alanları ve geodezik eğriler için açık formüller elde ettiler, [4].

Chen ve Qui; üç boyutlu Heisenberg grubunda yüzeyler için Gauss dönüşümünü ve ortalama eğrilik vektörünü kullanarak çeşitli karakterizasyonlar verdiler. Daha sonra Gauss dönüşümü için ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemler elde ettiler. Ayrıca minimal yüzeyler ve sabit ortalama eğrilikli yüzeyler için birçok örnek oluşturdular, [13].

Turhan; $n-$boyutlu Lie grup üzerinde sol ötelemeler altında invaryant kalan vektör alanlarının cümlesinden bir Lie cebiri oluşturmuş ve bu Lie grubu üzerinde tanımladığı metrik yardımıyla eğrilikleri elde etmiştir. Ayrıca bu Lie grubunun unimodular olması için bir lineer dönüşüm yardımıyla gerek ve yeter şartlar vermiştir. Daha sonra bazı Lie gruplarının teşkili ve kompleks lineer temsilleri ile ilgili ifadeler oluşturmuş ve Hermityen metriğin sağladığı bazı eğrilik bağıntıları vermiş ve ispat etmiştir, [29].

Bu çalışmada ise $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubu yardımıyla $\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks manifoldu oluşturularak aynı zamanda bir pseudo-kompleks Lie grubu olan bu manifoldun skaler eğrilikleri, holomorfik kesit eğrilikleri ile Riemann eğrilikleri arasındaki bazı yeni bağıntılar ifade ve ispat edildi ve $\mathbb{M}^{2n+2}$ üzerinde üstel dönüşüm ve komutatör eğriler oluşturuldu.

2. BÖLÜM

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1.

Reel sayılar cismi üzerinde, $r-$tane vektör uzayı, $V_1, V_2, ..., V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $1 \leq i \leq r$, için $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f(v_1, ..., v_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, ..., v_r) &= af(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_r) \\ &\quad + bf(v_1, ..., v_{i-1}, u_i, v_{i+1}, ..., v_r) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı ise f ye r-lineer fonksiyon denir, [19].

Tanım 2.1.2.

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v \in V$ için

i) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$,

ii) $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$,

$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$

özelliklerine sahip ise $\langle , \rangle$ dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir, [24].

$\langle , \rangle$, V vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun. Bu simetrik bilineer form üç değişik durum altında incelenebilir;

1) Tanımlı Durum: Eğer,

i) $\forall v \in V$, $v \neq 0$ için $\langle v, v\rangle > 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

ii) $\forall v \in V$, $v \neq 0$ için $\langle v, v\rangle < 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

denir.

2) Semi-tanımlı Durum: Eğer,

i) $\forall v \in V$ için $\langle v, v\rangle \geq 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna pozitif semi-tanımlı,

ii) $\forall v \in V$ için $\langle v, v\rangle \leq 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna negatif semi-tanımlı,

denir.

3) Non-dejenere Durum: Eğer,

$\forall w \in V$ için $\langle v, w\rangle = 0$ iken $v = 0$ ise $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna non-dejenere simetrik form denir, [24].

Tanım 2.1.3.

$V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün $r-$lineer fonksiyonların cümlesini

$$L\left(V_1, V_2, ..., V_r; \mathbb{R}\right)$$

ile gösterelim. Bu cümlede toplama ve skalarla çarpma işlemleri, sırasıyla, $\forall\left(u_1, u_2, ..., u_r\right) \in V_1 \times V_2 \times ... \times V_r$ için

$$\left(f_1 + f_2\right)\left(u_1, u_2, ..., u_r\right) = f_1\left(u_1, u_2, ..., u_r\right) + f_2\left(u_1, u_2, ..., u_r\right)$$

ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\left(\lambda f\right)\left(u_1, u_2, ..., u_r\right) = \lambda f\left(u_1, u_2, ..., u_r\right)$$

şeklinde tanımlanırsa, bu iki işleme göre $L(V_1, V_2, ..., V_r; \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olur. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, ..., V_r^*$ dual vektör uzaylarının tensör çarpımı denir ve

$$L(V_1, V_2, ..., V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$$

ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$ tensör uzayının herbir elemanına r. dereceden bir tensör denir. Eğer

$$V_1 = V_2 = ... = V_r = V$$

ise $V^* \otimes V^* \otimes ... \otimes V^*$ uzayına bir kovaryant tensör uzayı ve bu uzayın herbir elemanına r. dereceden bir kovaryant tensör denir, $T^r(V)$ veya $\otimes^r V^*$ ile gösterilir, [19].

Tanım 2.1.4.

Kovaryant tensörler için verilen tanımda V yerine V^* (V nin dual uzayı) alınırsa $(V^*)^*$ uzayı V ye izomorf olduğundan V^* üzerinde $s-$ lineer fonksiyonların vektör uzayını elde ederiz. Bu uzaya kontravaryant uzay denir ve $T_s(V^*)$ veya $\otimes^s V$ ile gösterilir. Bu uzayın elemanlarına s. dereceden kontravaryant tensörler denir, [19].

Tanım 2.1.5.

Reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı V ve V^*, V nin duali olsun.

$$L(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{f | f : V^r \times V^{*s} \to \mathbb{R}, r + s\text{-lineer}\}$$

cümlesi toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. Bu uzaya r. dereceden kovaryant ve s. dereceden kontravaryant tensör uzayı denir. Bu uzayın elemanlarına da (r, s)-tipinden tensör denir ve

$$T^r(V) \otimes T_s(V^*) = \otimes^r(V^*) \otimes \otimes^s(V) \text{ veya } T_s^r(V)$$

ile gösterilir, [19].

Tanım 2.1.6.

$\forall \sigma \in S_r$ permütasyonu ve bir V vektör uzayı üzerindeki bir $r-$lineer f fonksiyonu için

i)

$$\sigma f = f$$

yani

$$f\left(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, ..., u_{\sigma(r)}\right) = f\left(u_1, u_2, ..., u_r\right)$$

ise $r-$ lineer f fonksiyonuna bir simetrik r-lineer fonksiyon veya r. mertebeden simetrik kovaryant tensör denir.

ii)

$$\sigma f = (sgn\sigma)\, f$$

yani

$$f\left(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, ..., u_{\sigma(r)}\right) = (sgn\sigma)\, f\left(u_1, u_2, ..., u_r\right)$$

ise $r-$ lineer f fonksiyonuna bir alterne r-lineer fonksiyon veya r. mertebeden alterne kovaryant tensör denir, [19].

Tanım 2.1.7.

V bir reel vektör uzayı ve

$$\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

simetrik bilineer form olsun. $W \subset V$ olmak üzere

$$\langle , \rangle |_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formun indeksi denir, [24].

Tanım 2.1.8.

M, C^∞ manifold olmak üzere;

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M; \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere fonksiyona M üzerinde metrik tensör denir. Bu metrik tensörün indeksine M manifoldunun indeksi denir, [24].

Tanım 2.1.9.

M, C^∞ manifold ve $\langle , \rangle$ de M üzerinde sabit indeksli metrik tensör olmak üzere $(M, \langle , \rangle)$ çiftine bir Semi-Riemann manifold denir, [24].

Tanım 2.1.10.

$(M, \langle , \rangle)$ bir Semi-Riemann manifold olsun. $\forall v \in M$ olmak üzere,

$\langle v, v \rangle > 0$ ise v ye space-like vektör,

$\langle v, v \rangle < 0$ ise v ye time-like vektör,

$\langle v, v \rangle = 0$, $v \neq 0$, ise v ye light-like veya null vektör denir, [24].

Tanım 2.1.11.

D, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemi üzerinde açık bir cümle olsun. Eğer $z_0 \in D$, $h \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

mevcut ise D üzerinde tanımlı f kompleks değerli fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında holomorfiktir denir, [29].

Tanım 2.1.12.

Eğer $\phi : D \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ bir dönüşüm ise

$$\phi(z) = \left(\phi^1(z), \phi^2(z), ..., \phi^m(z)\right)$$

şeklinde yazılabilir ve her ϕ^i, D üzerinde bir kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere, eğer her ϕ^i, D üzerinde holomorfik ise ϕ ye holomorfik dönüşüm denir, [33].

Tanım 2.1.13.

M bir Hausdorff uzay ve $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, M nin bir açık örtüsü olsun.

$$\psi_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha \subset \mathbb{C}^n$$

homeomorfik dönüşümü $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\beta\alpha} &= \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n, \\ f_{\alpha\beta} &= \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{C}^n \end{aligned}$$

fonksiyonlarının her ikiside holomorfik olsun.

Eğer M bu özellikle birlikte $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ dönüşümlerinin cümlesine ve $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ açık örtüsüne sahip ise M ye n-kompleks boyutlu kompleks manifold ve $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ye de M nin bir holomorfik koordinat komşuluk sistemi denir, [19].

Tanım 2.1.14.

$k \leq n$ olmak üzere M bir k-manifold ve $\bar{M}$ de bir n-manifold olsun. $\forall p \in M$ noktası için $\bar{M}$ de bir $\bar{U}$ ve M de bir U koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \left\{m \in \bar{U} : \bar{x}_{k+1}(m) = ... = \bar{x}_n(m) = 0\right\}$$

ise M ye $\bar{M}$ nin bir alt manifoldu denir. Burada

$$\{\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n\}$$

koordinat sistemi $\bar{U}$ de ve

$$\{x_1 = \bar{x}_1 \mid_U, ..., x_k = \bar{x}_k \mid_U\}$$

da U daki koordinat sistemidir, [19].

Tanım 2.1.15.

M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere;

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M), (X, Y) \to \nabla_X Y$$

dönüşümü

i. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, R)$ için

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

ii. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall f \in C^\infty(M, R)$ için

$$\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + (Xf) Y$$

özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üstünde bir afin koneksiyon ve ∇_X e de X e göre kovaryant türev operatörü denir, [19].

Tanım 2.1.16.

M bir manifold ve ∇, M üstünde bir afin konneksiyon olsun. Eğer aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa ∇ koneksiyonuna M üzerinde bir Riemann koneksiyonu ve ∇_X e de X e göre Riemann anlamında kovaryant türev operatörü adı verilir.

i. ∇, C^{∞} sınıfındandır,

ii. M nin bir A bölgesi üzerinde, C^{∞} olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

dir,

iii. M nin bir A bölgesi üzerinde , C^{∞} olan $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall p \in A$ için

$$X_p \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle |_p + \langle Y, \nabla_X Z \rangle |_p$$

dir, [19].

Tanım 2.1.17.

M ve M', sırasıyla, n ve m boyutlu C^{∞} sınıfından manifoldlar olsun. Eğer $\varphi : M \to M'$ diferensiyellenebilir dönüşümü birebir, φ^{-1} dönüşümü mevcut ve diferensiyellenebilir ise φ ye M den M' ye bir diffeomorfizm denir. M ve M' manifoldlarına da diffeomorfik manifoldlar denir, [19].

Tanım 2.1.18.

M, $n-$boyutlu bir C^{∞} sınıfından manifold ve $f : M \to R$ fonksiyonu verilsin. $a \in M$ noktasının bir komşuluğunda, f fonksiyonu $(x_i - a_i)$ nin yakınsak kuvvet serisi yardımıyla ifade edilebiliyorsa f fonksiyonu a noktasında analitiktir denir, [19].

Tanım 2.1.19.

M, $n-$boyutlu bir C^{∞} sınıfından manifold ve $p \in M$ olsun. $a(p)$ de p deki analitik fonksiyonların bir sınıfı olsun.

$$v : a(p) \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa v ye M nin p noktasındaki tanjant vektörü adı verilir.

$f, g \in a(p)$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

i. $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$,

ii. $v(fg) = v(f)\, g(p) + f(p)\, v(g)$, [29].

Tanım 2.1.20.

∇, M üzerinde bir afin konneksiyon ve f, M nin bir diffeomorfizmi olsun. M üzerinde bir diğer ∇' afin koneksiyonu

$$\nabla'_X Y = f_*^{-1} \left(\nabla_{f_* X} f_* X\right)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $\nabla' = \nabla$ ise ∇ ya f altında invaryanttır denir. Bu durumda f ye M nin bir afin dönüşümü adı verilir, [19].

Tanım 2.1.21.

M diferensiyellenebilir bir kompleks manifold ve $(G, \cdot)$ bir grup olsun. Eğer

i. M nin noktaları ile G nin elemanları eşlenebiliyor ve

ii.

$$\begin{array}{ccccc} G & \times & G & \to & G \\ (a & , & b) & \to & ab \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ a & \to & a^{-1} \end{array}$$

dönüşümlerinin her ikiside holomorfik ise (M, G) ikilisine bir kompleks Lie grubu adı verilir. Burada M ye kompleks Lie grubunun temel manifoldu, G ye de temel grubu denir, [20].

Tanım 2.1.22.

G bir analitik grup olsun. G nin bir σ noktasındaki tanjant uzayı T_σ olsun. $\sigma, \tau \in G$ ise bunları bir ρ elemanına götüren

$$(\sigma, \tau) \to \rho \xrightarrow{\phi} \tau\sigma^{-1}$$

şeklinde bir sol öteleme mevcuttur. Bunu $\phi_\rho = \phi_{\tau\sigma^{-1}}$ şeklinde gösterelim.

Eğer G üstünde bir X vektör alanı, her $\sigma, \tau \in G$ için

$$d\phi_{\tau\sigma^{-1}} X_\sigma = X_\tau$$

özelliğini sağlıyor ise X vektör alanına bir sol invaryant vektör alanı denir, [20].

Tanım 2.1.23.

M, $n+p-$boyutlu M' manifoldunun n boyutlu bir alt manifoldu olmak üzere M nin $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_p$ normal vektör alanları için

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & : & T(M) & \times & T(M) & \longrightarrow & T(M) \\ & & (X & , & Y) & \longrightarrow & \alpha(X,Y) \end{array} = \sum_{i=1}^{p} h^i(X,Y)\,\zeta_i$$

şeklinde tanımlı dönüşüme M alt manifoldunun II. temel formu adı verilir (burada h^i ler $\chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ şeklindeki bir dönüşümün bileşenleridir.), [24].

Tanım 2.1.24.

M, g metriği ile bir pseudo-Riemann manifoldu olmak üzere $\forall X, Y \in T(M)$ için

$$g(JX, JY) = g(X, Y)$$

ise g ye M üzerinde bir pseudo-hermityen metrik ve üzerinde tanımlandığı M manifoldunada pseudo-hermityen manifold adı verilir, [34].

Tanım 2.1.25.

V bir reel vektör uzayı ve V nin bir J lineer endomorfizmi $J^2 = -I$ şartını sağlıyorsa J ye V üzerinde bir kompleks yapı adı verilir. Burada I, V nin özdeşlik dönüşümüdür, [34].

Tanım 2.1.26.

M, $n-$boyutlu bir kompleks analitik manifold olsun.

$$\begin{aligned} J: \; T_X(M) &\rightarrow T_X(M) \\ X &\rightarrow JX \end{aligned}$$

lineer endomorfizmi $J^2 = -1$ şartını sağlıyorsa J ye M üzerinde bir yaklaşık kompleks yapı ve M manifolduna da bir yaklaşık pseudo-kompleks manifold adı verilir, [34].

Tanım 2.1.27.

$f : M \rightarrow M'$ bir birebir immersiyon olacak şekilde n-boyutlu bir M manifoldu, $m-$boyutlu bir M' manifoldunun bir alt manifoldu olsun $(m \geq n)$. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ de $T_p(M)$ nin bir ortonormal bazı olacak şekilde, $T_{f(p)}(M')$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_m\}$ olsun. Böylece $\{e_{n+1}, ..., e_m\}$, $T_p(M)^{\perp}$ in bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\mu = \frac{1}{n}(izB) = \frac{1}{n}\sum_i B(e_i, e_i)$$

vektörüne ortalama eğrilik vektörü adı verilir.

Eğer $\mu = 0$ ise M ye M' nün bir minimal alt manifoldu adı verilir, [9].

Tanım 2.1.28.

F cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı $(V, \oplus, F, +, ., \odot)$ olsun. $\circledast$ işlemi

$$\begin{array}{rcccc} \circledast : & V & \times & V & \longrightarrow & V \\ & (\alpha & , & \beta) & \longrightarrow & \alpha \circledast \beta \end{array}$$

olmak üzere,

(i) $\forall\ \alpha, \beta \in V$ ve $\forall\ a \in F$ için $(a \odot \alpha) \circledast \beta = a \odot (\alpha \circledast \beta)$

(ii) $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $(\alpha \oplus \beta) \circledast \gamma = (\alpha \circledast \gamma) \oplus (\beta \circledast \gamma)$

(iii) $\forall\ \alpha, \beta, \gamma \in V$ için $\alpha \circledast (\beta \oplus \gamma) = (\alpha \circledast \beta) \oplus (\alpha \circledast \gamma)$ özellikleri sağlanıyorsa $(V, \oplus, F, +, \cdot, \odot, \circledast)$ cebirsel yapısına *cebir* denir.

Eğer $\forall\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in V$ için

(i) $\alpha \circledast (\beta \circledast \gamma) = (\alpha \circledast \beta) \circledast \gamma$ sağlanıyorsa V ye *birleşimli cebir*,

(ii) $\gamma \circledast \beta = \beta \circledast \gamma$ sağlanıyorsa V ye *değişimli cebir*,

(iii) $\gamma \circledast e = e \circledast \gamma = \gamma$ sağlanıyorsa V ye *birimli cebir* denir, [33].

Tanım 2.1.29.

V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümüde

i. 2-lineer,

ii. Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = -[Y, X]$),

iii. Jakobi özdeşliğini sağlar. Yani $\forall X, Y, Z \in V$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne, V üstünde bir *Lie operatörü* denir. (Bu takdirde V vektör uzayına bir *Lie cebiri* denir.) ,[20].

$\forall X, Y \in V$ için $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ olarak yazılır.

Tanım 2.1.30.

M, n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $X, Y \in T_M(p)$ olmak üzere

$$\begin{array}{ccccccccccc} R & : & T_M(p) & \times & T_M(p) & \times & T_M(p) & \times & T_M(p) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (X_p & , & Y_p & , & Z_p & , & W_p) & \longrightarrow & R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) \end{array}$$

$$R(X_p, Y_p, Z_p, W_p) =< R(X_p, Y_p)Z_p, W_p >$$

şeklinde tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensör alanına *Riemann eğrilik tensör alanı* ve bunun bir $p \in M$ noktasındaki değerine de *Riemann eğriliği* denir ve

$$K(p) =< R(X, Y)X, Y >$$

biçiminde gösterilir, [33].

Tanım 2.1.31.

$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, M pseudo-Riemann manifoldunun $T_x(M)$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı ise $X, Y \in T_x(M)$ için

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i, X)Y, E_i)$$

S fonksiyonuna Ricci tensörü denir, [24].

Tanım 2.1.32.

$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$, M pseudo-Riemann manifoldunun $T_X(M)$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı ise S Ricci tensörü olmak üzere $X, Y \in T_X(M)$ için

$$\sum_{i=1}^{n} S(E_i, E_i)$$

toplamına M nin x noktasındaki skalar eğriliği denir, [21].

Tanım 2.1.33.

M manifoldunun $T_x(M)$ tanjant uzayında lineer bağımsız iki tanjant vektör X ve Y olsun. X ile Y nin gerdiği $Sp\{X, Y\}$ uzayı P düzlemini göstermek üzere,

$$R(X, Y, X, Y) = < R(X, Y)X, Y >$$

değerine M manifoldunun P düzlemi ile elde edilmiş kesit eğriliği denir ve $\kappa(X, Y)$ ile gösterilir, [34].

Tanım 2.1.34.

Eğer P düzlemi J altında invaryant ise o taktirde $\kappa(P)$ ye P düzlemi tarafından belirlenen holomorfik kesit eğriliği adı verilir, [34].

Tanım 2.1.35.

Eğer M nin tüm x noktaları ve $T_x(M)$ nin tüm P düzlemi için $\kappa(P)$ kesit eğriliği sabit ise M ye sabit eğrilikli uzay yada bir uzay formu denir. Eğer bu sabit eğrilik her $\kappa(P)$ için sıfır ise bu manifolda flat veya düzlemseldir denir, [34].

Tanım 2.1.36.

$$\begin{aligned} GL\left(n,\mathbb{C}\right) &= \{A : A = [a_{ij}]_{n\times n}, a_{ij} \in C, \det A \neq 0\}, \\ U\left(n\right) &= \left\{X \in GL\left(n,\mathbb{C}\right) : \overline{X^t} = X^{-1}\right\}, \\ SL\left(n,\mathbb{C}\right) &= \{X \in GL\left(n,\mathbb{C}\right) : \det X = 1\} \end{aligned}$$

olmak üzere;

$$SU\left(n\right) = U\left(n\right) \cap SL\left(n,\mathbb{C}\right)$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} gl\left(n,\mathbb{C}\right) &= \{X : X \in GL\left(n,\mathbb{C}\right)\}, \\ u\left(n\right) &= \left\{X \in gl\left(n,\mathbb{C}\right) : \overline{X^t} = X^{-1}\right\}, \\ sl\left(n,\mathbb{C}\right) &= \{X \in gl\left(n,\mathbb{C}\right) : izX = 0\}, \\ so\left(n,\mathbb{R}\right) &= \left\{X \in gl\left(n,\mathbb{R}\right) : X^t = -X\right\} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$su\left(n\right) = u\left(n\right) \cap sl\left(n,\mathbb{C}\right)$$

dir, [20].

Tanım 2.1.37.

g bir Lie cebiri olsun. Eğer $\forall x \in g$ için $iz\left(\mathbf{ad}_x\right) = 0$ oluyorsa g ye unimodular cebir denir, [20].

Tanım 2.1.38.

Bir g Lie cebirinin herhangi bir u elemanı için

$$\begin{aligned} \phi = \mathbf{ad}_u : \; g &\to g \\ v &\to [u,v] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşüm $\mathbf{ad}_u$ olarak isimlendirilir, [20].

Tanım 2.1.39.

G, g Lie cebiri ile birlikte bir Lie grup ve $a \in G$ için

$$\begin{array}{rccc} \phi(a): & G & \to & G \\ & x & \to & axa^{-1} \end{array}$$

şeklinde bir iç otomorfizm tanımlı olsun. Bu taktirde

$$\begin{array}{rccc} Ad: & G & \to & GL(g) \\ & a & \to & (T(\phi(a)))(e) \end{array}$$

dönüşümüne G nin bir lineer temsili adı verilir. Buna göre $\forall x \in G$ için

$$Ad(x) = Ad(e^x) = e^{\mathbf{ad}x}$$

dır, [20].

Tanım 2.1.40.

G bir topolojik grup olsun. Eğer $\forall a, x, y \in G$ için

$$g(ax, ay) = g(x, y)$$

oluyorsa G üzerinde tanımlı g metriğine sol invaryant metrik denir. Eğer $\forall a, x, y \in G$ için

$$g(xa, ya) = g(x, y)$$

oluyorsa G üzerinde tanımlı g metriğine sağ invaryant metrik denir. Eğer g hem sol hemde sağ invaryant metrik ise g ye bi-invaryant metrik denir.

Tanım 2.1.41.

M bir Hausdorff topolojik uzay ve G bir topolojik grup olsun.

$$\begin{array}{ccccc} G & \times & M & \longrightarrow & M \\ (g & , & p) & \longrightarrow & g.p \end{array}$$

örten dönüşümünde

(i) $\forall\ g_1, g_2 \in G$ ve $p \in M$ için

$$(g_1.g_2)\,.p = g_1.\,(g_2.p)$$

(ii) e, G grubunun birimi olmak üzere

$$e.p = p$$

şartları sağlanıyorsa G, M üzerine etki ediyor denir, [6].

Tanım 2.1.42.

$\forall\ p, q \in M$ için $g.p = q$ olacak şekilde $g \in G$ mevcut ise G, M üzerinde geçişli etki ediyor denir, [6].

Tanım 2.1.43.

$$\begin{array}{ccccc} G & \times & M & \longrightarrow & M \\ (g & , & p) & \longrightarrow & g.p \end{array}$$

dönüşümü sürekli ise G, M *üzerinde sürekli etki ediyor* denir, [6].

Eğer G, M üzerinde sürekli etki ediyor ise G ye topolojik öteleme grubu denir, [6].

Tanım 2.1.44.

$\forall\ p \in M$ için $a.p = p$, $a = e$ yi sağlıyorsa G ye efektiftir denir, [6].

Tanım 2.1.45.

p, M de sabit bir nokta olsun. $G(p) = \{g \in G \mid g.p = p\}$ grubuna, G nin p noktasındaki izotropi grubu denir, [6].

Tanım 2.1.46.

p, M de sabit bir nokta olsun. $G_p = \{g.p \in M \mid g \in G\}$ cümlesine G nin yörüngesi denir, [6].

Tanım 2.1.47.

g ve h iki cebir olmak üzere

$$\varphi : g \to h$$

dönüşümü lineer olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in g$ için

$$\varphi(X, Y) = (\varphi X)(\varphi Y)$$

şartı sağlanıyorsa φ ye bir cebir homomorfizmi denir.

Eğer φ dönüşümü aynı zamanda birebir ve örten ise φ ye bir cebir izomorfizmi denir, [20].

Tanım 2.1.48.

g, karakteristiği sıfır olan bir K cismi üzerinde bir Lie cebiri ve

$$\rho : g \to gl(g)$$

g nin sonlu boyutlu bir temsili olsun. O taktirde g üzerinde

$$\begin{array}{ccccccl} \tau & : & g & \times & g & \longrightarrow & K \\ & & (X & , & Y) & \longrightarrow & iz \left(\mathbf{ad}\,(X)\,\mathbf{ad}\,(Y)\right) \end{array}$$

şeklinde tanımlı simetrik bilineer forma bir Killing formu denir ve $\mathrm{Kill}(X,Y)$ ile gösterilir, [20].

Tanım 2.1.49.

(x^i) lokal koordinat sistemine göre bir Γ lineer koneksiyonunun Christoffel sembolleri Γ^i_{jk} ile gösterilir. Buna göre:

$$\nabla_{X_j} X_i = \sum_k \Gamma^k_{ji} X_k$$

yazılır, [19].

Tanım 2.1.50.

R^h_{ijk}, j ve k ya göre anti-simetrik eğrilik tensörü olmak üzere Ω^j eğrilik formu

$$\Omega^j_i = \frac{1}{2} R^j_{ikl} w^k \wedge w^l$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{w^i\}$ 1-formları, lokal $\{e_i\}$ bazının dual bazıdır, [34].

Tanım 2.1.51.

(M,∇) ve $\left(\tilde{M},\tilde{\nabla}\right)$, sırasıyla, ∇, $\tilde{\nabla}$ afin koneksiyonları ile birlikte n ve $(n+p)$-boyutlu iki diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$x \rightarrow N_x \subset T_{f(x)}\tilde{M}$$

şeklinde tanımlı p boyutlu normal altuzay için

$$T_{f(x)}\tilde{M} = f_*\left(T_x M\right) + N_x$$

eşitliği mevcut ise $f : M \to \tilde{M}$ immersiyonuna afin immersiyon denir.

Her x noktasında $\alpha(X, Y) \in N_x$ ve $\nabla_X Y \in T_x M$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_{f_* X} f_* Y = f_* \nabla_X Y + \alpha(X, Y)$$

şeklinde tanımlı ise N_x e M nin x noktasındaki normal uzayı denir, [20].

Tanım 2.1.52.

M ve M', m ve n-boyutlu iki manifold ve B ile B' de, sırasıyla, M ve M' nin temel topolojik uzayları olsun. $B \times B'$ bir irtibatlı topolojik uzay olup bir manifoldun temel uzayı adını alır.

$(p, q) \in B \times B'$ olmak üzere $a(p)$, $a'(p)$, sırasıyla, B ve B' üzerinde p ve q noktalarındaki analitik fonksiyon sınıfları olsun.

$$\bar{w}_1 : B \times B' \to B \text{ ve } \bar{w}_2 : B \times B' \to B'$$

izdüşümleri

$$\bar{w}_1(p, q) = p \text{ ve } \bar{w}_2(p, q) = q$$

şeklinde tanımlansın. $f \in a(p)$ ve $g \in a(q)$ olmak üzere $C(p, q)$ da

$$f \circ \bar{w}_1 \text{ ve } g \circ \bar{w}_2$$

şeklinde fonksiyonlar ile bunlara (p, q) komşuluğunda analitik olarak bağımlı bütün fonksiyonların sınıfı olmak üzere

$$(p, q) \to C(p, q)$$

eşlemesi, temel uzayı $B \times B'$ olan, bir manifold tanımlar. Bu tanımlanan manifolda M ve M' nin çarpım manifoldu adı verilir ve $M \times M'$ ile gösterilir, [20].

Tanım 2.1.53.

G bir grup ve H, G nin bir altgrubu olmak üzere $\forall a \in G$ için,

$$aHa^{-1} \subset H$$

oluyorsa H ya G nin bir normal altgrubu denir ve $H \lhd G$ şeklinde gösterilir.

H, G nin bir normal altgrubu olmak üzere

$$G/H = \{Hg : g \in G\}$$

grubuna G nin H ile bölüm grubu denir, [33].

Tanım 2.1.54.

A, α çarpımsal fonksiyonu ile birleşimli olmayan bir cebir ve D, A nın bir ideali olsun. O zaman

$$\bar{A} = A/D = \left\{\bar{X} = X + D : X \in A\right\}$$

olmak üzere

$$\bar{\alpha} : \bar{A} \times \bar{A} \to \bar{A}, \bar{\alpha}\left(\bar{X}, \bar{Y}\right) = \alpha\left(X, Y\right) + D = \overline{\alpha\left(X, Y\right)}$$

şeklinde tanımlı işlemle birlikte, $\bar{A}$ cebirine bölüm cebiri denir, [33].

Tanım 2.1.55.

G bir Lie grubun temel grubu olsun. Eğer $C^0G = G$ ve $C^{n+1}G = (G, C^nG)$ olmak üzere

$$G = C^0G \lhd C^1G \lhd ... \lhd C^pG = \{e\}$$

olacak şekilde bir p pozitif tamsayısı mevcut ise G grubuna n-adımda Nilpotent grup denir, [33].

Tanım 2.1.56.

G bir Lie grup olsun. $G^{(1)} = (G, G)$ ve $G^{(k+1)} = \left(G^{(k)}, G^{(k)}\right)$ olmak üzere normal alt gruplardan oluşan

$$G \rhd G^{(1)} \rhd G^{(2)} \rhd ...$$

serisini gözönüne alalım. Eğer $G^{(n)} = \{e\}$ olacak şekilde bir n sayısı varsa G ye $n-$adımda çözülebilirdir denir, [33].

Tanım 2.1.57.

Bir G grubunun bir a elemanı için $a^m = e$ olacak şekilde bir m doğal sayısı bulunamıyorsa a elemanı sonsuz mertebedendir. Bu elemanlara serbest eleman denir.

Eğer bir sonsuz devirli grubun elemenlarının tamamı serbest ise bu gruba serbest grup adı verilir, [33].

Tanım 2.1.58.

Bir M manifoldu üzerindeki bir X vektör alanı $\forall Y, Z \in \chi(M)$ için

$$L_X g(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

şartı sağlanıyor ise X e M üzerinde bir Killing vektör alanı denir, [33].

3. BÖLÜM

Bu bölümde $\mathbb{H}_{2n+1}$ genelleştirilmiş Heisenberg grubunun temel yapısı incelenerek bu grubun 2-adım nilpotent olduğu gösterildi. Bu grup üzerinde sol invaryant Lorentz metrik ve ortonormal baz sistemi oluşturuldu. Daha sonra Coshul formülü yardımıyla baz vektörlerinin birbirleri yönündeki kovaryant türevleri elde edildi. Ayrıca $\mathbb{H}_{2n+1}$ genelleştirilmiş Heisenberg grubunda üstel dönüşüm formülleri oluşturuldu ve bu formüller kullanılarak komutatör eğriler karakterize edildi.

3.1. Genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg Grubun Yapısı

$$\mathbb{H}_{2n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} = \{(z,t) : z \in \mathbb{C}^n, t \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi verilsin. Bu cümle üzerinde

$$\begin{aligned} & (x_1, y_1, ..., x_n, y_n, t) \circ (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, , ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, t) \\ = \ & (x_1 + \tilde{x}_1, y_1 + \tilde{y}_1, ..., \tilde{t} + t + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y_i - \tilde{y}_i x_i)) \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

"$\circ$" işlemi tanımlansın. O zaman $\mathbb{H}_{2n+1}$ cümlesi bu işlemle birlikte bir grup olur.

Bu grubun birim elemanı $0 = (0, 0, ..., 0)$ ve herhangi bir $(z, t) = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n, t)$ elemanının tersi

$$(z,t)^{-1} = (-z, -t) = (-x_1, -y_1, -x_2, -y_2, ..., -x_n, -y_n, -t)$$

şeklinde tanımlıdır.

Herhangi $\xi, \eta \in \mathbb{H}_{2n+1}$ elemanlarının komütatörü

$$[\xi, \eta] = \xi \circ \eta \circ \xi^{-1} \circ \eta^{-1} \tag{3.1.2}$$

dir. Buna göre

$$\xi = (x_1, y_1, , ..., x_n, y_n, t), \ \eta = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{t}) \in \mathbb{H}_{2n+1}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}[\xi,\eta] &= (x_1,y_1,...,x_n,y_n,t)\circ(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,...,\tilde{x}_n,\tilde{y}_n,\tilde{t}) \\ &\quad \circ(x_1,y_1,...,x_n,y_n,t)^{-1}\circ(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,...,\tilde{x}_n,\tilde{y}_n,\tilde{t})^{-1}.\end{aligned}$$

olur. (3.1.2) den

$$\begin{aligned}[\xi,\eta] &= (x_1,y_1,...,x_n,y_n,t)\circ(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1,...,\tilde{x}_n,\tilde{y}_n,\tilde{t}) \\ &\quad \circ(-x_1,-y_1,...,-x_n,-y_n,-t)\circ(-\tilde{x}_1,-\tilde{y}_1,...,-\tilde{x}_n,-\tilde{y}_n,-\tilde{t})\end{aligned}$$

yazılabilir. (3.1.2) işlemi kullanılarak

$$\begin{aligned}[\xi,\eta] &= (x_1+\tilde{x}_1,y_1+\tilde{y}_1,...,x_n+\tilde{x}_n,y_n+\tilde{y}_n-y_n-\tilde{y}_n,\tilde{t}+t+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y-\tilde{y}_i x_i)) \\ &\quad \circ(-x_1-\tilde{x}_1,-y_1-\tilde{y}_1,...,-x_n-\tilde{x}_n,-y_n-\tilde{y}_n,-\tilde{t}-t+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y-\tilde{y}_i x_i)) \\ &= (x_1+\tilde{x}_1-x_1-\tilde{x}_1,y_1+\tilde{y}_1-y_1-\tilde{y}_1,...,x_n+\tilde{x}_n-x_n-\tilde{x}_n \\ &\quad ,y_n+\tilde{y}_n-y_n-\tilde{y}_n,\tilde{t}+t-\tilde{t}-t+\frac{1}{2}\sum_{i=}^{n}(\tilde{x}_i y-\frac{1}{2}\tilde{y}_i x_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y-\tilde{y}_i x_i) \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(-x_i-\tilde{x}_i)(y_i+\tilde{y}_i)-(-y_i-\tilde{y}_i)(x_1+\tilde{x}_1)))\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$[\xi,\eta]=(0,0,...,\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y-\tilde{y}_i x_i)) \tag{3.1.3}$$

bulunur.

Burada $[\xi,\eta]\neq 0$ dır. Dolayısıyla $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubu değişimli değildir.

Teorem 3.1.1.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ grubu, 2-adım nilpotent Lie grubudur.

İspat.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ grubunun elemanları ξ, η, σ, sırasıyla,

$$\xi = (x_1, y_1, , ..., x_n, y_n, t), \ \eta = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{t}), \ \sigma = (\hat{x}_1, \hat{y}_1, , ..., \hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{t})$$

şeklinde verilsin.

(3.1.3) den $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubunun elemanlarının ikili komütatörü;

$$[[\xi, \eta], \sigma] = [(0, 0, ..., \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y - \tilde{y}_i x_i)), (\hat{x}_1, \hat{y}_1, , ..., \hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{t})]$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}[[\xi, \eta], \sigma] &= (0, 0, ..., \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y - \tilde{y}_i x_i)) \circ (\hat{x}_1, \hat{y}_1, , ..., \hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{t}) \\ &\quad \circ (0, 0, ..., \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y - \tilde{y}_i x_i))^{-1} \circ (\hat{x}_1, \hat{y}_1, , ..., \hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{t})^{-1}\end{aligned}$$

elde edilir. Ters eleman özelliğinden

$$\begin{aligned}[[\xi, \eta], \sigma] &= (0, 0, ..., \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y - \tilde{y}_i x_i)) \circ (\hat{x}_1, \hat{y}_1, , ..., \hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{t}) \\ &\quad \circ (0, 0, ..., -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i y - \tilde{y}_i x_i)) \circ (-\hat{x}_1, -\hat{y}_1, , ..., -\hat{x}_n, -\hat{y}_n, -\hat{t}) \\ &= (\hat{x}_1, \hat{y}_1, , ..., \hat{x}_n, \hat{y}_n, \hat{t} + \frac{1}{2}\sum_{i=}^{n}(\tilde{x}_i y - \tilde{y}_i x_i)) \\ &\quad \circ (-\hat{x}_1, -\hat{y}_1, , ..., -\hat{x}_n, -\hat{y}_n, -\hat{t} - \frac{1}{2}\sum_{i=}^{n}(\tilde{x}_i y - \tilde{y}_i x_i)) \\ &= (0, 0, ..., 0)\end{aligned}$$

bulunur.

Bu da $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubunun, 2-adım nilpotent Lie grubu olması demektir.□

$\mathbb{H}_{2n+1}$ grubunda bir g Lorentz metrik oluşturup, bu grubun ortonormal bazı yardımıyla baz vektör alanlarının birbirine göre kovaryant türevlerini hesaplayalım.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ grubu için g metriği [6];

$$g = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + \sum_{i=1}^{n} dy_i^2 - (dt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i dx_i - x_i dy_i))^2 \tag{3.1.4}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubunun Lie cebiri h_{2n+1} olsun. Bu taktirde

$$\mathbf{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2}y_i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{Y}_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2}x_i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{3.1.5}$$

olmak üzere $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}\}$ ortonormal bir baz olur. Bu bazın duali de

$$\theta^i_{\mathbf{X}_i} = dx_i, \quad \theta^i_{\mathbf{Y}_i} = dy_i, \quad \theta_{\mathbf{T}} = dt + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_i dx_i - x_i dy_i) \tag{3.1.6}$$

dir. Ayrıca $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ vektör alanları için (3.1.4) den

$$g(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i) = g(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_i) = 1 \text{ ve } g(\mathbf{T}, \mathbf{T}) = -1 \tag{3.1.7}$$

dir.

$\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ vektör alanları için bracket operatörü,

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i] = \mathbf{T},\ [\mathbf{X}_i, \mathbf{T}] = 0,\ [\mathbf{Y}_i, \mathbf{T}] = 0,\ 1 \leq i \leq n. \tag{3.1.8}$$

(3.1.2) den $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i$ vektör alanlarının komütatörü:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i] &= \mathbf{X}_i \mathbf{Y}_i \mathbf{X}_i^{-1} \mathbf{Y}_i^{-1} \\
&= (0,0,...,1,0,...,0,0,-\frac{1}{2}y_i) \circ (0,0,...,0,1,...,0,0,\frac{1}{2}x_i) \\
&\quad \circ (0,0,...,1,0,...,0,0,-\frac{1}{2}y_i)^{-1} \circ (0,0,...,0,1,...,0,0,\frac{1}{2}x_i)^{-1} \\
&= (0,0,...,1,0,...,0,0,-\frac{1}{2}y_i) \circ (0,0,...,0,1,...,0,0,\frac{1}{2}x_i) \\
&\quad \circ (0,0,...,-1,0,...,0,0,\frac{1}{2}y_i) \circ (0,0,...,0,-1,...,0,0,-\frac{1}{2}x_i) \\
&= (0,0,...,1,1,...,0,0,\frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2}) \qquad (3.1.9) \\
&\quad \circ (0,0,...,-1,-1,...,0,0,\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}) \\
&\quad (0,0,...,1-1,1-1,...,0,0,\frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}y_i + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}x_i + \frac{1}{2}) \\
&= (0,0,...,0,0,...,0,1) \\
&= \mathbf{T},
\end{aligned}$$

olur. Yani

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i] = \mathbf{T}, \; 1 \leq i \leq n \qquad (3.1.10)$$

dır.

Benzer hesaplamalarla

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{T}] = [\mathbf{Y}_i, \mathbf{T}] = 0, \; 1 \leq i \leq n \qquad (3.1.11)$$

elde edilir.

Şimdi $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubu için g metriğinin Levi-Civita koneksiyonlarını hesaplayalım: $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubunda X, Y, Z vektör alanları için Coshul formülü

$$2g(\nabla_X Y, Z) = g([X,Y], Z) - g([Y,Z], X) + g([Z,X], Y) \qquad (3.1.12)$$

biçimde tanımlanır, [20]. Burada $X = \mathbf{X}_i$, $Y = \mathbf{X}_i$ vektör alanları kullanılarak,

$$2g(\nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{X}_i, Z) = g([\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i], Z) - g([\mathbf{X}_i, Z], \mathbf{X}_i) + g([Z, \mathbf{X}_i], \mathbf{X}_i) \qquad (3.1.13)$$

elde edilir. (3.1.13) eşitliğinde, (3.1.8) kullanılır ve braket operatörünün anti-simetrik olduğu gözönüne alınırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i, Z\right) = -2g\left([\mathbf{X}_i, Z], \mathbf{X}_i\right)$$

bulunur.

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i] = \mathbf{T},\ \ [\mathbf{T}, \mathbf{X}_i] = 0$$

eşitliklerinden ve (3.1.5) den

$$g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i, Z\right) = 0$$

elde edilir. $Z \neq 0$ ve g Lorentz metriği non-dejenere olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i = 0 \tag{3.1.14}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{Y}_i = 0 \text{ ve } \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0 \tag{3.1.15}$$

olduğu gösterilebilir.

$\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j$ birer vektör alanı ve $i \neq j$ olsun.

Bu durumda (3.1.12) de $X = \mathbf{X}_i$ ve $Y = \mathbf{X}_j$ alınırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j, Z\right) = g\left([\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j], Z\right) - g\left([\mathbf{X}_j, Z], \mathbf{X}_i\right) + g\left([Z, \mathbf{X}_i], \mathbf{X}_j\right)$$

elde edilir. Burada (3.1.9) ve (3.1.11) gözönüne alınırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i, Z\right) = -g\left([\mathbf{X}_j, Z], \mathbf{X}_i\right) + g\left([Z, \mathbf{X}_i], \mathbf{X}_j\right) \tag{3.1.16}$$

bulunur. Eğer (3.1.8) sistemi (3.1.16) eşitliğinin sağ tarafında kullanılırsa

$$g\left([\mathbf{X}_j, Z], \mathbf{X}_i\right) = 0 \text{ ve } g\left([Z, \mathbf{X}_i], \mathbf{X}_j\right) = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j, Z\right) = 0$$

elde edilir. $Z \neq 0$ ve g Lorentz metriği non-dejenere olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j = 0 \tag{3.1.17}$$

bulunur. Ayrıca $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = 0$ ve Tanım 2.1.30 dan

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j - \nabla_{\mathbf{X}_j}\mathbf{X}_i = 0$$

olur. Buradan

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j = \nabla_{\mathbf{X}_j}\mathbf{X}_i$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\nabla_{\mathbf{X}_j}\mathbf{X}_i = 0 \tag{3.1.18}$$

bulunur.

Diğer taraftan benzer yöntemle

$$\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{Y}_j = \nabla_{\mathbf{Y}_j}\mathbf{Y}_i = 0 \tag{3.1.19}$$

elde edilir.

Şimdi $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ vektör alanlarının kovaryant türevinin sıfırdan farklı olduğu durumları inceleyelim:

i) $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{X}_i = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T} = \frac{1}{2}\mathbf{Y}_i$ dir. Gerçekten;

$X = \mathbf{X}_i$, $Y = \mathbf{T}$, $Z = \mathbf{Y}_i$ vektör alanları (3.1.12) de verilen Coshul formülünde yerine yazılırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i\right) = g\left([\mathbf{X}_i, \mathbf{T}], \mathbf{Y}_i\right) - g\left([\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i], \mathbf{X}_i\right) + g\left([\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i], \mathbf{T}\right) \tag{3.1.20}$$

olur. (3.1.11) dan $[\mathbf{X}_i, \mathbf{T}] = 0$, $[\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i] = 0$ olduğu (3.1.20) da göz önüne alınırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i\right) = g\left([\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i], \mathbf{T}\right) \tag{3.1.21}$$

bulunur. (3.1.9) dan braket operatörünün anti-simetrik özelliğinden $[\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i] = -\mathbf{T}$ olur. Bu değer (3.1.21) da yerine yazılırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i\right) = -g\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}\right) \tag{3.1.22}$$

elde edilir. (3.1.5) den $g\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}\right) = -g\left(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_i\right)$ olduğundan

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i\right) = g\left(\mathbf{Y}_i, \mathbf{Y}_i\right)$$

yazılır.

Benzer şekilde

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T}, \mathbf{X}_i\right) = 0$$

bulunur. (3.1.5) den

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T}, \mathbf{X}_i\right) = g\left(\mathbf{Y}_i, \mathbf{X}_i\right) \tag{3.1.23}$$

yazılır. Yine benzer düşünceyle (3.1.5) kullanılarak

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T}, \mathbf{T}\right) = g\left(\mathbf{Y}_i, \mathbf{T}\right) \tag{3.1.24}$$

elde edilir. (3.1.22), (3.1.23), (3.1.24) ifadelerinden her $C \in \{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}\}$ vektör alanı için

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T}, \mathbf{C}\right) = g\left(\mathbf{Y}, \mathbf{C}\right) \tag{3.1.25}$$

olur. (3.1.25) eşitliğinden

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T} = \frac{1}{2}\mathbf{Y}_i \tag{3.1.26}$$

bulunur. Tanım 2.1.30 da

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$$

olduğu göz önüne alınır ve $[\mathbf{X}_i, \mathbf{T}] = 0$ olduğu (3.1.26) da kullanılırsa

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}_i \tag{3.1.27}$$

olur. Dolayısıyla (3.1.26) ve (3.1.27) den

$$\nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}_i = \nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T} = \frac{1}{2}\mathbf{Y}_i$$

elde edilir.

ii) $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{Y}_i = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\mathbf{X}_i$ dır. Gerçekten;

$X = \mathbf{Y}_i$, $Y = \mathbf{T}$, $Z = \mathbf{X}_i$ vektör alanları kullanılarak, Coshul formülünden

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T}, \mathbf{X}_i\right) = g\left([\mathbf{Y}_i, \mathbf{T}], \mathbf{X}_i\right) - g\left([\mathbf{T}, \mathbf{X}_i], \mathbf{Y}_i\right) + g\left([\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i], \mathbf{T}\right)$$

yazılabilir. (3.1.11) değerleri burada gözönüne alınırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T}, \mathbf{X}_i\right) = g\left([\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i], \mathbf{T}\right) \tag{3.1.28}$$

bulunur. (3.1.9), (3.1.28) de kullanılırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T}, \mathbf{X}_i\right) = g\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}\right)$$

elde edilir. (3.1.5) den $g\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i\right) = -g\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}\right)$ olduğundan

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T}, \mathbf{X}_i\right) = -g\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i\right) \tag{3.1.29}$$

yazılır.

(3.1.5) kullanılarak

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i\right) = 0$$

bulunur. Benzer şekilde (3.1.5) kullanılırsa, sırasıyla,

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i\right) = g\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i\right), \tag{3.1.30}$$

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T}, \mathbf{T}\right) = g\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{T}\right) \tag{3.1.31}$$

yazılır. (3.1.28), (3.1.29), (3.1.30), (3.1.31), den $\forall C \in \{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}\}$ vektör alanı için

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T}, \mathbf{C}\right) = g\left(\mathbf{Y}, \mathbf{C}\right)$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\mathbf{X}_i \tag{3.1.32}$$

bulunur.

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$$

eşitliğinden ve $[\mathbf{Y}_i, \mathbf{T}] = 0$ olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{Y}_i = 0 \tag{3.1.33}$$

olur. O halde (3.1.32) ve (3.1.33) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{Y}_i = \nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\mathbf{X}_i$$

elde edilir.

(i) ve (ii) ye benzer şekilde

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Y}_i = \frac{1}{2}\mathbf{T}$$

bulunur.

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i] = \nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{X}_i$$

eşitliğinden

$$\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{X}_i = -\frac{1}{2}\mathbf{T}$$

olur.

Böylece göre elde edilen hesaplamalar sonucu,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i &= \nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{Y}_i = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0, \\
\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{X}_i &= \nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{T} = \frac{1}{2}\mathbf{Y}_i, \\
\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{T}}\mathbf{Y}_i &= \nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\mathbf{X}_i, \\
\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Y}_i &= -\nabla_{\mathbf{Y}_i}\mathbf{X}_i = \frac{1}{2}\mathbf{T}
\end{aligned} \tag{3.1.34}$$

yazılır.

Buna göre $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubunda eğrilik tensör alanlarıyla ilgili

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{3.1.35}$$

formülünü kullanarak hesaplayalım:

Bunun için (3.1.35) de $X = Z = \mathbf{T}$,$Y = \mathbf{X}_i$ yazılırsa

$$R(\mathbf{T},\mathbf{X}_i)\mathbf{T} = \nabla_{\mathbf{T}} \nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{T} - \nabla_{\mathbf{X}_i} \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T} - \nabla_{[\mathbf{T},\mathbf{X}_i]} \mathbf{T}. \tag{3.1.36}$$

elde edilir.

(3.1.36) da (3.1.34) ve $[\mathbf{T},\mathbf{X}_i] = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$R(\mathbf{T},\mathbf{X}_i)\mathbf{T} = \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{Y}_i = -\frac{1}{4} \mathbf{X}_i \tag{3.1.37}$$

bulunur.

Benzer şekilde, (3.1.35) de $X = Z = \mathbf{T}$,$Y = \mathbf{Y}_i$ alınırsa

$$R(\mathbf{T},\mathbf{Y}_i)\mathbf{T} = \nabla_{\mathbf{T}} \nabla_{\mathbf{Y}_i} \mathbf{T} - \nabla_{\mathbf{Y}_i} \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{T} - \nabla_{[\mathbf{T},\mathbf{Y}_i]} \mathbf{T} \tag{3.1.38}$$

olur. (3.1.38) de (3.1.34) ve $[\mathbf{T},\mathbf{Y}_i] = 0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$R(\mathbf{T},\mathbf{Y}_i)\mathbf{T} = -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{X}_i = -\frac{1}{4} \mathbf{Y}_i \tag{3.1.39}$$

elde edilir. Benzer düşünceyle (3.1.35) de $X = \mathbf{T}$,$Y = \mathbf{X}_i, Z = \mathbf{X}_j$ alınarak

$$R(\mathbf{T},\mathbf{X}_i)\mathbf{X}_j = \nabla_{\mathbf{T}} \nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{X}_j - \nabla_{\mathbf{X}_i} \nabla_{\mathbf{T}} \mathbf{X}_j - \nabla_{[\mathbf{T},\mathbf{X}_i]} \mathbf{X}_j = -\frac{1}{4} \mathbf{T} \tag{3.1.40}$$

bulunur. Buna göre sıfırdan farklı olan diğer eğrilik vektör alanları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{X_i},\mathbf{X}_j)\mathbf{Y}_k &= \frac{1}{4}\delta_{jk}\mathbf{Y_i} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\mathbf{Y}_j, \\
R(\mathbf{Y_i},\mathbf{Y}_j)\mathbf{X}_k &= \frac{1}{4}\delta_{jk}\mathbf{X_i} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\mathbf{X}_j, \\
R(\mathbf{X}_j,\mathbf{Y}_k)\mathbf{X_i} &= -\frac{1}{2}\delta_{jk}\mathbf{Y_i} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\mathbf{Y}_j, \\
R(\mathbf{X}_j,\mathbf{Y}_k)\mathbf{Y_i} &= \frac{1}{2}\delta_{jk}\mathbf{X_i} + \frac{1}{4}\delta_{ij}\mathbf{X}_k, \\
R(\mathbf{T},\mathbf{X}_j)\mathbf{X}_k &= -\frac{1}{4}\delta_{jk}\mathbf{T}
\end{aligned} \tag{3.1.41}$$

şeklinde elde edilir, [3].

Teorem 3.1.2.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg grubunda $\{x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n, t\}$ koordinat sistemi olmak üzere sol invaryant g metriği için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

i)
$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = 1 - \frac{1}{4}y_i^2,\ g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\frac{1}{4}y_i y_j,$$

ii)
$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{1}{4}x_i y_i,\ g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{1}{4}x_j y_i,$$

iii)
$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -\frac{1}{2}y_i,\quad g\left(\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}x_i,$$

iv)

$$g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = -1.$$

İspat. i) $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubu için bir ortonormal baz sistemi $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}\}$ olmak üzere (3.1.5) den

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{2}y_i\frac{\partial}{\partial t},\\
\mathbf{Y}_i &= \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{1}{2}x_i\frac{\partial}{\partial t},\\
\mathbf{T} &= \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i} &= \mathbf{X}_i + \frac{1}{2}y_i\mathbf{T},\\
\frac{\partial}{\partial y_i} &= \mathbf{Y}_i - \frac{1}{2}x_i\mathbf{T},\\
\frac{\partial}{\partial t} &= \mathbf{T}
\end{aligned} \tag{3.1.42}$$

eşitlikleri elde edilir. (3.1.42) den $i = j$ için,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = g(\mathbf{X}_i + \frac{1}{2}y_i\mathbf{T}, \mathbf{X}_i + \frac{1}{2}y_i\mathbf{T})$$

olur. g lineer olduğundan

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = g\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i\right) + \frac{1}{4}y_i^2 g\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}\right)$$

yazılır. Buradan da

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = 1 - \frac{1}{4}y_i^2 \tag{3.1.43}$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.1.42) den $i \neq j$ için,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = g(\mathbf{X}_i + \frac{1}{2}y_i\mathbf{T}, \mathbf{X}_j + \frac{1}{2}y_j\mathbf{T})$$

ya da

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{1}{4}y_i y_j g\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}\right)$$

yazılır. Buradan

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\frac{1}{4}y_i y_j$$

dır.

ii) (3.1.42) den $i = j$ için

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = g\left(\mathbf{X}_i + \frac{1}{2}y_i\mathbf{T}, \mathbf{Y}_i - \frac{1}{2}x_i\mathbf{T}\right)$$

ya da

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{1}{4}x_i y_i g\left(\mathbf{T}, \mathbf{T}\right)$$

yazılır. Buradan

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \frac{1}{4}x_i y_i$$

dir. Benzer şekilde (3.1.42) den $i \neq j$ için,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = g\left(\mathbf{X}_i + \frac{1}{2}y_i\mathbf{T}, \mathbf{Y}_j - \frac{1}{2}x_j\mathbf{T}\right).$$

Ayrıca g lineer olduğundan

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial y_j}\right)=\frac{1}{4}x_jy_i$$

bulunur.

iii) (3.1.42) den

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial t}\right)=g\left(\mathbf{X}_i+\frac{1}{2}y_i\mathbf{T},\mathbf{T}\right)$$

ya da

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial t}\right)=-\frac{1}{2}y_i$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$g\left(\frac{\partial}{\partial y_i},\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{1}{2}x_i,$$

olur.

iv) (3.1.42) den

$$g\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial t}\right)=-1$$

yazılır. Bu da ispatı tamamlar.□

3.2. Genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg Grubunda Üstel Dönüşümler ve Taylor Formülü

Tanım 3.2.1.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunun Lie cebiri $\mathfrak{h}_{2n+1}$ olsun.

$$\begin{array}{rccc}\exp: & \mathfrak{h}_{2n+1} & \rightarrow & \mathbb{H}_{2n+1}\\ & X & \rightarrow & \exp X\end{array}$$

dönüşümü, $\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunda üstel dönüşüm olarak adlandırılır ve $\forall s,t\in\mathbb{R}$ için

$$\exp\left(t+s\right)X=\exp tX\exp sX \tag{3.2.1}$$

yazılır, [20].

$p \in \mathbb{H}_{2n+1}$ ve $f \in C^{\infty}(\mathbb{H}_{2n+1})$ olsun. $\theta(t) = \exp tX$ homomorfizmi için $\theta'(0) = X$ olduğundan

$$\tilde{X}_p f = X(f \circ L_p) = \left\{ \frac{d}{dt} f(p \exp tX) \right\}_{t=0} \tag{3.2.2}$$

yazılabilir, [20].

(3.2.2) den $\tilde{X} f$ in $(p \exp uX)$ deki değeri

$$\left[\tilde{X} f\right](p \exp uX) = \left\{ \frac{d}{dt} f(p \exp uX \exp tX) \right\}_{t=0} = \frac{d}{du} f(p \exp uX)$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde $\tilde{X}^m f$ in $(p \exp uX) \in \mathbb{H}_{2n+1}$ deki değeri

$$\left[\tilde{X}^m f\right](p \exp uX) = \frac{d^m}{du^m} f(p \exp uX)$$

olur.

Şimdi kabul edelimki $f \in C^{\infty}(\mathbb{H}_{2n+1})$ fonksiyonu p de analitik olsun. O zaman $\mathfrak{h}_{2n+1}$ Lie cebirinde sıfırın ın bir N_0 komşuluğuda

$$f(p \exp tX) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\tilde{X}^m f\right](g) \tag{3.2.5}$$

bulunur, [20]. Bu da N_0 komşuluğuda Taylor açılımı (formülü) dır.

Teorem 3.2.2

$\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}, (1 \leq i \leq n)$, $\mathbb{H}_{2n+1}$ de ortonormal baz vektör alanları, $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i, \gamma, \xi \in C^{\infty}(\mathbb{H}_{2n+1})$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $\mathbb{H}_{2n+1}$ deki $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{K}$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} \exp(t\mathbf{E}) \exp(t\mathbf{K}) &= \exp\{t \sum_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i + \lambda_i) \mathbf{X}_i + (\beta_i + \mu_i) \mathbf{Y}_i + (\gamma + \xi) \mathbf{T}\right] \\ &\quad + \frac{t^2}{2} \gamma \mathbf{T}(\xi) \mathbf{T} - \frac{t^2}{2} \boldsymbol{\xi} \mathbf{T}(\gamma) \mathbf{T} + \frac{t^2}{2} \mathbf{\Pi}\} \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

dir. Burada

$$
\begin{aligned}
\mathbf{\Pi} \;=\; & [\sum_{i=1,j=1}^{n} [\alpha_i \mathbf{X}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i \mu_i \mathbf{T} - \mu_j \mathbf{Y}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i \\
& + \alpha_i \mathbf{X}_i(\xi)\mathbf{T} - \xi \mathbf{T}(\alpha_i)\mathbf{X}_i - \beta_i \lambda_i \mathbf{T} + \beta_i \mathbf{Y}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i \\
& + \beta_i \mathbf{Y}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j - \mu_j \mathbf{Y}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i + \beta_i \mathbf{Y}_i(\xi)\mathbf{T} - \xi \mathbf{T}(\beta_i)\mathbf{Y}_i \\
& + \gamma \mathbf{T}(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\gamma)\mathbf{T} + \gamma \mathbf{T}\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j + \alpha_i \mathbf{X}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j - \mu_j \mathbf{Y}_j(\gamma)\mathbf{T}]
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ $\mathbb{H}_{2n+1}$ de ortonormal baz vektör alanları, $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i, \gamma, \xi \in C^{\infty}(\mathbb{H}_{2n+1})$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\mathbb{H}_{2n+1}$ deki bu bazlar cinsinden $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{K}$ vektör alanları

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{X}_i + \beta_i \mathbf{Y}_i + \gamma \mathbf{T}, \\
\mathbf{K} &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{X}_j + \mu_j \mathbf{Y}_j + \xi \mathbf{T}
\end{aligned}
$$

şeklinde olsun. Kabul edelimki $f \in C^{\infty}(\mathbb{H}_{2n+1})$ fonksiyonu sıfırda analitik olsun.

$$
\left[\tilde{\mathbf{E}}^n f\right](p \exp t\mathbf{E}) = \frac{d^n}{dt^n} f(p \exp t\mathbf{E}) \tag{3.2.7}
$$

bulunur. (3.2.7) formülünde $\tilde{\mathbf{K}}$ vektör alanı göz önüne alınırsa,

$$
\left[\tilde{\mathbf{E}}^n \tilde{\mathbf{K}}^m f\right](0) = \left[\frac{d^n}{dt^n}\frac{d^m}{dt^m} f(\exp t\mathbf{E} \exp s\mathbf{K})\right]_{s=0,t=0}
$$

elde edilir. O halde $f(\exp t\mathbf{E} \exp s\mathbf{K})$ fonksiyonu için Taylor serisi, yeterince küçük s ve t ler için

$$
f(\exp t\mathbf{E} \exp s\mathbf{K}) = \sum_{m,n \geq 0} \frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!}\left[\tilde{\mathbf{E}}^n \tilde{\mathbf{K}}^m f\right](0) \tag{3.2.8}
$$

olur. $t = 0$ da analitik olan $\mathbb{H}_{2n+1}$ de herhangi bir $B(t)$ fonksiyonu için

$$
\exp t\mathbf{E} \exp t\mathbf{K} = \exp B(t) \tag{3.2.9}
$$

olsun. $B\left(t\right)$ fonksiyonunun bileşenlerini (3.2.9) ifadeleri kullanarak hesaplayalım.

$B\left(t\right)$ fonksiyonu $t=0$ da analitik olduğundan B_1 ve B_2, $\mathbb{H}_{2n+1}$ de keyfi vektörler olmak üzere

$$B\left(t\right)=tB_1+t^2B_2+O\left(t^3\right) \tag{3.2.10}$$

olarak yazılır. Burada $O\left(t^3\right)$, $\epsilon>0$ için $|t|<\epsilon$ olmak üzere serinin analitik kalanıdır. Bu taktirde (3.2.10) dan

$$f\left(\exp B\left(t\right)\right)=f\left(\exp\left(tB_1+t^2B_2\right)\right)+O\left(t^3\right) \tag{3.2.11}$$

olarak elde edilir. (3.2.11) de Taylor formülü kullanılırsa

$$f\left(\exp B\left(t\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left[\left(tB_1+t^2B_2\right)^n f\right](0)+O\left(t^3\right) \tag{3.2.12}$$

bulunur, [20]. Eğer $t=s$ için (3.2.8) ve (3.2.12) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$B_1=\mathbf{E}+\mathbf{K},$$

ve

$$\frac{1}{2}\tilde{B}_1^2+\tilde{B}_2=\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{E}}^2+\tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{K}}+\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{K}}^2$$

elde edilir. Buradan

$$B_1=\mathbf{E}+\mathbf{K},\quad B_2=\frac{1}{2}\left[\mathbf{E},\mathbf{K}\right]$$

bulunur.

Son olarak $[\mathbf{E},\mathbf{K}]$ ifadesini, $\mathbb{H}_{2n+1}$ deki $\mathbf{X}_i,\mathbf{Y}_i,\mathbf{T}$ baz vektörlerinden yararlanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{E},\mathbf{K}] &= \left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i+\beta_i\mathbf{Y}_i+\gamma\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j+\mu_j\mathbf{Y}_j+\xi\mathbf{T}\right]\\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i,\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i,\xi\mathbf{T}\right]\\
&\quad+\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i,\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i,\xi\mathbf{T}\right]\\
&\quad+\left[\gamma\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\right]+\left[\gamma\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\right]+\left[\gamma\mathbf{T},\xi\mathbf{T}\right].
\end{aligned}$$

Eşitliğin sağ tarafındaki braket operatörleri ayrı ayrı hesaplanırsa:

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\right] &= \sum_{i=1,j=1}^{n}\alpha_i\lambda_j\left[\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j\right]+\sum_{i=1,j=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i\\ &= \sum_{i=1,j=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i,\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\right] &= \sum_{i=1,j=1}^{n}\alpha_i\mu_j\left[\mathbf{X}_i,\mathbf{Y}_j\right]+\sum_{i=1,j=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_i\mathbf{T}+\sum_{i=1,j=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i,\xi\mathbf{T}\right] &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi\left[\mathbf{X}_i,\mathbf{T}\right]+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\xi\right)\mathbf{T}-\sum_{i=1}^{n}\xi\mathbf{T}\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\xi\right)\mathbf{T}-\sum_{i=1}^{n}\xi\mathbf{T}\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i,\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\right] &= \sum_{i=1,j=1}^{n}\beta_i\lambda_j\left[\mathbf{Y}_i,\mathbf{X}_j\right]+\sum_{i=1,j=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\beta_i\lambda_i\mathbf{T}+\sum_{i=1,j=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i,\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\right] &= \sum_{i=1,j=1}^{n}\beta_i\mu_j\left[\mathbf{Y}_i,\mathbf{Y}_j\right]+\sum_{i=1,j=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i\\ &= \sum_{i=1,j=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i,\xi\mathbf{T}\right] &= \sum_{i=1}^{n}\beta_i\xi\left[\mathbf{Y}_i,\mathbf{T}\right]+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\xi\right)\mathbf{T}-\sum_{i=1}^{n}\xi\mathbf{T}\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\xi\right)\mathbf{T}-\sum_{i=1}^{n}\xi\mathbf{T}\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\gamma\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\right] &= \sum_{j=1}^{n}\gamma\lambda_j\left[\mathbf{T},\mathbf{X}_j\right]+\sum_{j=1}^{n}\gamma\mathbf{T}\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\gamma\right)\mathbf{T}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\gamma\mathbf{T}\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\gamma\right)\mathbf{T},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\gamma\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\right] &= \sum_{j=1}^{n}\gamma\mu_j\left[\mathbf{T},\mathbf{Y}_j\right]+\sum_{j=1}^{n}\gamma\mathbf{T}\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j-\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\gamma\right)\mathbf{T}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\gamma\mathbf{T}\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j-\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\gamma\right)\mathbf{T},\end{aligned}$$

$$\left[\gamma\mathbf{T},\xi\mathbf{T}\right]=\gamma\xi\left[\mathbf{T},\mathbf{T}\right]+\gamma\mathbf{T}\left(\xi\right)\mathbf{T}-\boldsymbol{\xi}\mathbf{T}\left(\gamma\right)\mathbf{T}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{E},\mathbf{K}\right] = & \sum_{i=1,j=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mu_i\mathbf{T}+\sum_{i=1,j=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j\\ & -\sum_{i=1,j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathbf{X}_i\left(\xi\right)\mathbf{T}-\sum_{i=1}^{n}\xi\mathbf{T}\left(\alpha_i\right)\mathbf{X}_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i\lambda_i\mathbf{T}\\ & +\sum_{i=1,j=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j-\sum_{i=1,j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i+\sum_{i=1,j=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j \qquad (3.2.13)\\ & -\sum_{i=1,j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\xi\right)\mathbf{T}-\sum_{i=1}^{n}\xi\mathbf{T}\left(\beta_i\right)\mathbf{Y}_i+\sum_{j=1}^{n}\gamma\mathbf{T}\left(\lambda_j\right)\mathbf{X}_j\\ & -\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\mathbf{X}_j\left(\gamma\right)\mathbf{T}+\sum_{j=1}^{n}\gamma\mathbf{T}\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j-\sum_{j=1}^{n}\mu_j\mathbf{Y}_j\left(\gamma\right)\mathbf{T}+\gamma\mathbf{T}\left(\xi\right)\mathbf{T}-\boldsymbol{\xi}\mathbf{T}\left(\gamma\right)\mathbf{T}.\end{aligned}$$

Ayrıca $\mathbb{H}_{2n+1}$ grubu 2-adımda nilpotent olduğundan

$$O\left(t^3\right)=0 \qquad (3.2.14)$$

olur.

Bulunan bu ifadeler (3.2.12) de yerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.2.2 göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.3

$\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ $\mathbb{H}_{2n+1}$ de ortonormal baz vektör alanları ve $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

i) $\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{Y}_i) = \exp\left\{t(\mathbf{X}_i + \mathbf{Y}_i) + \frac{t^2}{2}\mathbf{T}\right\}$,

ii) $\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{T}) = \exp t(\mathbf{X}_i + \mathbf{T})$,

iii) $\exp(t\mathbf{Y}_i)\exp(t\mathbf{T}) = \exp t(\mathbf{Y}_i + \mathbf{T})$

dir.

Teorem 3.2.4

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunda $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{K}$ vektör alanları için

$$\exp(-t\mathbf{E})\exp(-t\mathbf{K})\exp(t\mathbf{E})\exp(t\mathbf{K}) = \exp\{t^2\gamma\mathbf{T}(\xi)\mathbf{T} - t^2\boldsymbol{\xi}\mathbf{T}(\gamma)\mathbf{T} + t^2\Pi\}$$

dır. Burada $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i, \gamma, \xi \in C^\infty(\mathbb{H}_{2n+1})$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Pi} \;=\; & [\sum_{i=1,j=1}^{n} [\alpha_i\mathbf{X}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j\mathbf{X}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i\mu_i\mathbf{T} - \mu_j\mathbf{Y}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i \\
& +\alpha_i\mathbf{X}_i(\xi)\mathbf{T} - \xi\mathbf{T}(\alpha_i)\mathbf{X}_i - \beta_i\lambda_i\mathbf{T} + \beta_i\mathbf{Y}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j\mathbf{X}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i \\
& +\beta_i\mathbf{Y}_i(\mu_j)\mathbf{Y}_j - \mu_j\mathbf{Y}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i + \beta_i\mathbf{Y}_i(\xi)\mathbf{T} - \xi\mathbf{T}(\beta_i)\mathbf{Y}_i \\
& +\gamma\mathbf{T}(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j\mathbf{X}_j(\gamma)\mathbf{T} + \gamma\mathbf{T}(\mu_j)\mathbf{Y}_j + \alpha_i\mathbf{X}_i(\mu_j)\mathbf{Y}_j - \mu_j\mathbf{Y}_j(\gamma)\mathbf{T}]
\end{aligned}$$

dir.

İspat. (3.2.6) ifadesine, sırasıyla, $\exp(-t\mathbf{E})$ ve $\exp(-t\mathbf{K})$ uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\exp(-t\mathbf{E})\exp(-t\mathbf{K})\exp(t\mathbf{E})\exp(t\mathbf{K}) = \exp\{t\sum_{i=1}^{n}[(\alpha_i+\lambda_i)\mathbf{X}_i + (\beta_i+\mu_i)\mathbf{Y}_i + (\gamma+\xi)\mathbf{T}] \\
-t\sum_{i=1}^{n}[(\alpha_i+\lambda_i)\mathbf{X}_i + (\beta_i+\mu_i)\mathbf{Y}_i + (\gamma+\xi)\mathbf{T}] + \frac{t^2}{2}[\mathbf{E},\mathbf{K}] + \frac{t^2}{2}[\mathbf{E},\mathbf{K}]\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılır ve (3.2.13) ifadesi bu eşitlikte yerine yazılırsa istenen elde edilir. $\square$

Teorem 3.2.4 gözönüne alındığında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.5.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunda $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}$ baz vektör alanları olmak üzere

i) $\exp(-t\mathbf{X}_i)\exp(-t\mathbf{Y}_i)\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{Y}_i) = \exp\{t^2\mathbf{T}\}$,

ii) $\exp(-t\mathbf{X}_i)\exp(-t\mathbf{T})\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{T}) = \mathbf{1}_{\mathbb{H}_{2n+1}}$,

iii) $\exp(-t\mathbf{Y}_i)\exp(-t\mathbf{T})\exp(t\mathbf{Y}_i)\exp(t\mathbf{T}) = \mathbf{1}_{\mathbb{H}_{2n+1}}$.
dir.

Teorem 3.2.6.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunun Lie cebiri $\mathfrak{h}_{2n+1}$ olmak üzere $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ vektör alanları yardımıyla verilen $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{K}$ vektör alanları için

$$\exp(t\mathbf{E})\exp(t\mathbf{K})\exp(-t\mathbf{E}) = \exp\{t\sum_{j=1}^{n}[\lambda_j\mathbf{X}_j+\mu_j\mathbf{Y}_j]+t\xi\mathbf{T}+\frac{t^2}{2}\gamma\mathbf{T}(\xi)\mathbf{T}-\frac{t^2}{2}\xi\mathbf{T}(\gamma)\mathbf{T}+\frac{t^2}{2}\Pi\}$$

dır. Burada $t \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i, \gamma, \xi \in C^{\infty}(\mathbb{H}_{2n+1})$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Pi} \;=\; & [\sum_{i=1,j=1}^{n}[\alpha_i\mathbf{X}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j\mathbf{X}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i\mu_i\mathbf{T} - \mu_j\mathbf{Y}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i \\
& +\alpha_i\mathbf{X}_i(\xi)\mathbf{T}-\xi\mathbf{T}(\alpha_i)\mathbf{X}_i - \beta_i\lambda_i\mathbf{T} + \beta_i\mathbf{Y}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j\mathbf{X}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i \\
& +\beta_i\mathbf{Y}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j - \mu_j\mathbf{Y}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i + \beta_i\mathbf{Y}_i(\xi)\mathbf{T} - \xi\mathbf{T}(\beta_i)\mathbf{Y}_i \\
& +\gamma\mathbf{T}(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j\mathbf{X}_j(\gamma)\mathbf{T}+\gamma\mathbf{T}\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j + \alpha_i\mathbf{X}_i\left(\mu_j\right)\mathbf{Y}_j - \mu_j\mathbf{Y}_j(\gamma)\mathbf{T}]
\end{aligned}$$

dir.

İspat.

Yeterince küçük $t \in \mathbb{R}$ ler için (3.2.8) göz önüne alınırsa

$$f(\exp(t\mathbf{E})\exp(t\mathbf{K})\exp(-t\mathbf{E})) = \sum_{m,n,p\geq 0} \frac{t^m}{m!}\frac{t^n}{n!}\frac{t^p}{p!}\left[\tilde{\mathbf{E}}^m\tilde{\mathbf{K}}^n\left(-\tilde{\mathbf{E}}^p\right)f\right](0) \quad (3.2.15)$$

yazılır. $t = 0$ da analitik olan herhangi bir $S(t)$ fonksiyonu için

$$\exp(t\mathbf{E})\exp(t\mathbf{K})\exp(-t\mathbf{E}) = \exp S(t)$$

olur, [22]. $\mathbb{H}_{2n+1}$ de iki analitik fonksiyon S_1, S_2 olmak üzere

$$S(t) = tS_1 + t^2S_2 + O\left(t^3\right)$$

dir. Diğer taraftan f fonksiyonu analitik olduğundan

$$f(\exp S(t)) = f\left(\exp\left(tS_1 + t^2S_2\right)\right) + O\left(t^3\right) \quad (3.2.16)$$

olur. (3.1.16) ifadesinde Taylor seri açılımı göz önüne alınırsa

$$f(\exp S(t)) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!}\left[\left(t\tilde{S}_1 + t^2\tilde{S}_2\right)^n f\right](0) + O\left(t^3\right) \quad (3.2.17)$$

bulunur. (3.2.15) ve (3.2.17) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$S_1 = \mathbf{K} \text{ ve } S_2 = [\mathbf{E}, \mathbf{K}]$$

elde edilir. Diğer taraftan $[\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i] = \mathbf{T}$ olduğu (3.2.13) de yerine yazılırsa ispat tamamlanır.□

Teorem 3.2.6 göz önüne alındığında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.7.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunun baz vektör alanları $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}$ olmak üzere

i) $\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{Y}_i)\exp(-t\mathbf{X}_i) = \exp\left\{t\mathbf{Y}_i + \frac{t^2}{2}\mathbf{T}\right\}$,

ii) $\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{T})\exp(-t\mathbf{X}_i) = \exp(t\mathbf{Y}_i)\exp(t\mathbf{T})\exp(-t\mathbf{Y}_i) = \exp\{t\mathbf{T}\}$

dir. Burada $t \in \mathbb{R}$ dir

3.3. Genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg Grubunda Komutatör Eğriler

Tanım 3.3.1.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunda X, Y vektör alanları olmak üzere

$$\begin{array}{rccl} \gamma: & I & \rightarrow & \mathbb{H}_{2n+1} \\ & t & \rightarrow & \gamma(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{2}}X\right)\exp\left(-t^{\frac{1}{2}}Y\right)\exp\left(t^{\frac{1}{2}}X\right)\exp\left(t^{\frac{1}{2}}Y\right), \ t \geq 0 \end{array}$$

biçiminde tanımlanan eğriye bu grubun komutatör eğrisi adı verilir, [27].

Teorem 3.3.2.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunda $\mathbf{X}_i$ ve $\mathbf{Y}_i$ baz vektörleri yardımıyla komutatör eğri

$$\gamma(t) = \exp t\mathbf{T}$$

dir. Özel olarak $t = 0$ daki tanjant vektörü

$$\gamma'(0) = \mathbf{T}$$

dir.

İspat. $\mathbf{X}_i$ ve $\mathbf{Y}_i$ baz vektörleri yardımıyla,

$$\gamma(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}_i\right)\exp\left(-t^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}_i\right)\exp\left(t^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}_i\right)\exp\left(t^{\frac{1}{2}}\mathbf{Y}_i\right)$$

elde edilir. Teorem 3.2.5 ve Tanım 3.3.1 birlikte kullanılarak

$$\gamma(t) = \exp\{t\mathbf{T}\}$$

bulunur. Öte yandan Tanım 3.2.1 den

$$\gamma'(0) = \mathbf{T}$$

olur. Bu da ispatı tamamlar.□

Teorem 3.3.3.

$\gamma(t)$, $\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunun bir komutatör eğrisi ve $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i, \mathbf{T}\}$ de $\mathbb{H}_{2n+1}$ da ortonormal baz sistemi olsun. Buna göre;

i) $\mathbf{X}_i$ ve $\mathbf{T}$ baz vektörleri yardımıyla tanımlanan komutatör eğri regüler değildir.

ii) $\mathbf{Y}_i$ ve $\mathbf{T}$ baz vektörleri yardımıyla tanımlanan komutatör eğri regüler değildir.

İspat. Teorem 3.3.2 ispatına benzer şekilde $[\mathbf{X}_i, \mathbf{T}] = [\mathbf{Y}_i, \mathbf{T}] = 0$ olduğu göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.□

Şimdi keyfi vektör alanları için regülerliği inceleyelim:

Teorem 3.3.4.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunda $\mathbf{E}$ ve $\mathbf{K}$ vektör alanları yardımıyla komutatör eğri

$$\gamma(t) = \exp\{t\gamma\mathbf{T}(\xi)\mathbf{T} - t\xi\mathbf{T}(\gamma)\mathbf{T} + t\Pi\}$$

dır. Burada $t \in \mathbb{R}$, $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i, \gamma, \xi \in C^\infty(\mathbb{H}_{2n+1})$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= [\sum_{i=1,j=1}^{n}[\alpha_i \mathbf{X}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i \mu_i \mathbf{T} \\ &\quad -\mu_j \mathbf{Y}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i \mathbf{X}_i(\xi)\mathbf{T} - \xi \mathbf{T}(\alpha_i)\mathbf{X}_i \\ &\quad -\beta_i \lambda_i \mathbf{T} + \beta_i \mathbf{Y}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i \\ &\quad +\beta_i \mathbf{Y}_i(\mu_j)\mathbf{Y}_j - \mu_j \mathbf{Y}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i + \beta_i \mathbf{Y}_i(\xi)\mathbf{T} \\ &\quad -\xi \mathbf{T}(\beta_i)\mathbf{Y}_i + \gamma \mathbf{T}(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\gamma)\mathbf{T} \\ &\quad +\gamma \mathbf{T}(\mu_j)\mathbf{Y}_j + \alpha_i \mathbf{X}_i(\mu_j)\mathbf{Y}_j - \mu_j \mathbf{Y}_j(\gamma)\mathbf{T}]\end{aligned}$$

dir.

İspat. Teorem 3.2.4 ve Tanım 3.3.1 birlikte kullanılırsa istenen elde edilir.□

Sonuç 3.3.5.

$\mathbb{H}_{2n+1}$ Heisenberg grubunda komutatör eğrinin $t = 0$ daki tanjant vektörü

$$\gamma'(0) = \gamma \mathbf{T}(\xi)\mathbf{T} - \xi \mathbf{T}(\gamma)\mathbf{T} + \Pi$$

dir. Burada $t \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i, \gamma, \xi \in C^\infty(\mathbb{H}_{2n+1})$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır ve

$$\begin{aligned}\mathbf{\Pi} &= [\sum_{i=1,j=1}^{n}[\alpha_i \mathbf{X}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i \mu_i \mathbf{T} \\ &\quad -\mu_j \mathbf{Y}_j(\alpha_i)\mathbf{X}_i + \alpha_i \mathbf{X}_i(\xi)\mathbf{T} - \xi \mathbf{T}(\alpha_i)\mathbf{X}_i \\ &\quad -\beta_i \lambda_i \mathbf{T} + \beta_i \mathbf{Y}_i(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i \\ &\quad +\beta_i \mathbf{Y}_i(\mu_j)\mathbf{Y}_j - \mu_j \mathbf{Y}_j(\beta_i)\mathbf{Y}_i + \beta_i \mathbf{Y}_i(\xi)\mathbf{T} \\ &\quad -\xi \mathbf{T}(\beta_i)\mathbf{Y}_i + \gamma \mathbf{T}(\lambda_j)\mathbf{X}_j - \lambda_j \mathbf{X}_j(\gamma)\mathbf{T} \\ &\quad +\gamma \mathbf{T}(\mu_j)\mathbf{Y}_j + \alpha_i \mathbf{X}_i(\mu_j)\mathbf{Y}_j - \mu_j \mathbf{Y}_j(\gamma)\mathbf{T}]\end{aligned}$$

dir.

4. BÖLÜM

Bu bölümde $\mathbb{H}_{2n+1}$ genelleştirilmiş Heisenberg grubun $\mathbb{R}^{2n+1}$ e diffeomorfik olduğu gösterildi. $\mathbb{H}_{2n+1}$ genelleştirilmiş Heisenberg grubu yardımıyla $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ Lie grubu oluşturuldu. Bu Lie grubu üzerinde tanımlanan metrik yardımıyla kovaryant türevler ve eğrilik tensörleri elde edildi. Daha sonra $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ Lie grubunun Lie cebiri yardımıyla üstel dönüşüm formülleri bulundu. Son olarak bu üstel dönüşümler kullanılarak $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ Lie grubu üzerinde komutatör eğrilerin bir karakterizasyonu incelendi.

4.1. $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ Lie Grubunun Oluşumu ve Eğrilik Özellikleri

P ve T, $(n\times 1)$ −mertebeli kolon matrisler ve $Q\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\mathbb{H}_{2n+1}=\left\{\begin{bmatrix} I_n & P & T\\ 0 & 1 & Q\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} : P,T\ \ (n\times 1)-\text{mertebeli kolon matrisler}, Q\in\mathbb{R}\right\}$$

şeklindeki reel matrislerin teşkil ettiği Heisenberg grubu bir Lie grubudur. Ayrıca $\mathbb{H}_{2n+1}$ Lie grubu $\mathbb{R}^{2n+1}$ e diffeomorfiktir. Gerçekten

$$\Psi:\mathbb{R}^{2n+1}\to\mathbb{H}_{2n+1},\quad (X,Y,Z)\to\Psi(X,Y,Z)$$

öyleki

$$X=\begin{bmatrix} X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix},\ Y=\begin{bmatrix} Y_1\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_n\end{bmatrix},\ Z=[Z_1Z_2...Z_n]$$

olmak üzere

$$\Psi(X,Y,Z)=\begin{bmatrix} I_n & -Z^t & X\\ 0 & 1 & Y\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{4.1.1}$$

dönüşümünün bir diffeomorfizm olduğunu gösterelim:

$\mathbb{R}^{2n+1}$ de koordinat fonksiyonları diferensiyellenebilir oldugundan Ψ diferensiyellenebilirdir.

Ψ nin tersinin olması için Ψ nin birebir ve örten olması gerekir. $\forall\left(X,Y,Z\right)$, $\left(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right)\in\mathbb{R}^{2n+1}$ için

$$\Psi\left(X,Y,Z\right)=\Psi\left(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right) \tag{4.1.2}$$

olsun. Gösterelimki $\left(X,Y,Z\right)=\left(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right)$ dir. Bunun için (4.1.1) dan (4.1.2) yardımıyla

$$\begin{bmatrix} I_n & -Z^t & X \\ 0 & 1 & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & -\widetilde{Z}^t & \widetilde{X} \\ 0 & 1 & \widetilde{Y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

yazılır. Matrislerin genel özelliklerinden

$$-Z^t=-\widetilde{Z}^t,\ X=\widetilde{X},\ Y=\widetilde{Y}$$

olduğu elde edilir. Transpoz tanımından

$$Z=\widetilde{Z},\ X=\widetilde{X},\ Y=\widetilde{Y}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\left(X,Y,Z\right)=\left(\widetilde{X},\widetilde{Y},\widetilde{Z}\right)$$

olur. Yani Ψ birebirdir.

$\forall\Omega=\begin{bmatrix} I_n & -Z^t & X \\ 0 & 1 & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\in\mathbb{H}_{2n+1}$ için en az bir $\left(X,Y,Z\right)\in\mathbb{R}^{2n+1}$ vardır öyleki $\Psi\left(X,Y,Z\right)=\Omega$ dır. Böylece Ψ örten bir fonksiyon olur. Sonuç olarak Ψ nin tersi vardır.

Şimdi, Ψ^{-1} dönüşümünün diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim. $\mathbb{H}_{2n+1}$ de bir elemanın tersi $\Psi^{-1} = -\Psi$ olarak tanımlandığından $\forall (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ için

$$\Psi^{-1}(X, Y, Z) = -\begin{bmatrix} I_n & -Z^t & X \\ 0 & 1 & Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & Z^t & -X \\ 0 & 1 & -Y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Ψ diferensiyellenebilir olduğundan dolayı $-\Psi$ de diferensiyellenebilirdir. Yani Ψ^{-1} dönüşümü diferensiyellenebilir olur. O halde $\Psi : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{H}_{2n+1}$ bir diffeomorfizmdir.

Şimdi $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubunun temel yapısını ve cebirsel özelliklerini verelim.

(i), $(n \times 1)$-mertebeli ve **i.** satırındaki elemanı 1 olan bir kolon matrisi göstermek üzere

$$\begin{bmatrix} I_r & (\mathbf{i}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I_r & 0 & (\mathbf{i}) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2n + 1$ tane matrisi göz önüne alalım. Bu durumda $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubu

$$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & a_1^{n+1} & a_1^{n+2} & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_2^{n+1} & a_2^{n+2} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & & & 0 \\ & & & & 1 & a_{n+1}^{n+2} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ & & & & & & \\ 0 & & & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & e^{2\pi i a} \end{pmatrix} : a_i^j, a \in \mathbb{R} \right\}$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu Lie grubu $GL(n+3, \mathbb{C})$ Lie grubunun kapalı irtibatlı bir altgrubuna karşılık gelir, [1].

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ üstündeki koordinat fonksiyonları x_i, y, z_i, t $(1 \leq i \leq n)$ olmak üzere $A \in \mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ için bu koordinat fonksiyonlarını

$$x_i (A) = a_i^{n+1}, \ y (A) = a_{n+1}^{n+2}, \ z_i (A) = a_i^{n+2}, \ t (A) = a$$

şeklinde tanımlayalım.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ grubu için g metriği;

$$g = \sum_{i=1}^{r} \left(\alpha_i^2 + \gamma_i^2\right) - \beta^2 - \eta^2 \tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlanır. Bu taktirde

$$\mathbf{X}_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \ \mathbf{Y} = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \ \mathbf{Z}_i = \frac{\partial}{\partial z_i}, \ \mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial t} \tag{4.1.4}$$

olmak üzere $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ grubunun ortonormal bir bazı olur. Bu bazın duali de

$$\alpha_i = dx_i, \ \beta = dy, \ \gamma_i = dz_i - x_i dy, \ \eta = dt \tag{4.1.5}$$

dir. Ayrıca $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ vektör alanları için

$$g (\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i) = g (\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_i) = 1 \text{ ve } g (\mathbf{T}, \mathbf{T}) = g (\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = -1 \tag{4.1.6}$$

dir.

Buna göre braket bağıntıları $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}] &= \mathbf{Z}_i, \ [\mathbf{T}, \mathbf{X}_i] = 0, \ [\mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i] = 0, \ [\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}] = 0, \\ [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] &= 0, \ [\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_j] = 0, \ [\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}] = 0, \ [\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i] = 0 \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ de A, B, C vektör alanları için Coshul formülü

$$2g (\nabla_A B, C) = g ([A, B], C) - g ([B, C], A) + g ([C, A], B) \tag{4.1.8}$$

biçimde tanımlanır, [20].

Coshul formülü yardımıyla $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ vektör alanlarının birbirine göre kovaryant türevlerini hesaplayalım.

(4.1.8) de $A = B = \mathbf{X}_i$ yazılırsa;

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i, C\right) = g\left([\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i], C\right) - g\left([\mathbf{X}_i, C], \mathbf{X}_i\right) + g\left([C, \mathbf{X}_i], \mathbf{X}_i\right)$$

olur. (4.1.7) ve braket operatörünün anti-simetrik olduğu birlikte kullanılırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i, C\right) = -2g\left([\mathbf{X}_i, C], \mathbf{X}_i\right)$$

bulunur. Ayrıca (4.1.5) ve (4.1.7) den

$$g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i, C\right) = 0$$

elde edilir. $C \neq 0$ ve g, pseudo-Riemann metriği non-dejenere olduğundan

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i = 0$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Y} = 0,\ \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0 \text{ ve } \nabla_{\mathbf{Z}_i}\mathbf{Z}_i = 0$$

dır.

Bu da gösterirki her baz vektörünün kendi yönündeki türevi sıfıra eşittir.

$\mathbf{X}_i$ ve $\mathbf{X}_j$ birer vektör alanı ve $i \neq j$ olsun. Bu durumda (4.1.8) de $A = \mathbf{X}_i$ ve $B = \mathbf{X}_j$ alınırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j, C\right) = g\left([\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j], C\right) - g\left([\mathbf{X}_j, C], \mathbf{X}_i\right) + g\left([C, \mathbf{X}_i], \mathbf{X}_j\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (4.1.7) göz önüne alınırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j, C\right) = -g\left([\mathbf{X}_j, C], \mathbf{X}_i\right) + g\left([C, \mathbf{X}_i], \mathbf{X}_j\right) \tag{4.1.9}$$

bulunur. Ayrıca (4.1.7), (4.1.9) eşitliğinin sağ tarafında göz önüne alınırsa

$$g\left([\mathbf{X}_j, C], \mathbf{X}_i\right) = 0 \text{ ve } g\left([C, \mathbf{X}_i], \mathbf{X}_j\right) = 0 \qquad (4.1.10)$$

olur. (4.1.10) eşitlikleri (4.1.9) da yerine yazılırsa

$$g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j, C\right) = 0$$

elde edilir. O halde

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j = 0 \qquad (4.1.11)$$

bulunur. Diğer taraftan $[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = 0$ ve

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = \nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j - \nabla_{\mathbf{X}_j}\mathbf{X}_i$$

olduğu (4.1.11) ile birlikte göz önüne alınırsa

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_j = \nabla_{\mathbf{X}_j}\mathbf{X}_i \qquad (4.1.12)$$

elde edilir. (4.1.11) ve (4.1.12) den

$$\nabla_{\mathbf{X}_j}\mathbf{X}_i = 0$$

bulunur.

Benzer düşünceyle Coshul formülü ve (4.1.7) birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{Z}_i}\mathbf{Z}_j &= \nabla_{\mathbf{Z}_j}\mathbf{Z}_i = \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Y} = 0, \\ \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{X}_i &= \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{Z}_i = \nabla_{\mathbf{T}}\mathbf{Y} = 0 \end{aligned} \qquad (4.1.13)$$

elde edilir.

Diğer taraftan (4.1.8) de $A = \mathbf{X}_i$ ve $B = \mathbf{Z}_i$ vektör alanları kullanılarak

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}\right) = g\left([\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i], \mathbf{Y}\right) - g\left([\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}], \mathbf{X}_i\right) + g\left([\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i], \mathbf{Z}_i\right) \qquad (4.1.14)$$

bulunur. (4.1.7), (4.1.14) de göz önüne alınırsa

$$2g\left(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}\right) = -g\left(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_i\right)$$

yazılır. (4.1.6) dan $g(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_i) = -g(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$ olduğundan

$$2g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}) = g(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \tag{4.1.15}$$

elde edilir.

(4.1.7) kullanılarak

$$2g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}) = g([\mathbf{T}, \mathbf{X}_i], \mathbf{Z}_i) = 0$$

olur. (4.1.6) dan

$$2g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}) = g(\mathbf{Y}, \mathbf{T}) \tag{4.1.16}$$

yazılır. Benzer şekilde (4.1.7) kullanılırsa, sırasıyla,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i) &= g(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i), & (4.1.17) \\ 2g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_i) &= g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i) & (4.1.18) \end{aligned}$$

bulunur.

(4.1.15)-(4.1.18) den $\forall C \in \{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$ vektör alanı için vektör alanı için

$$2g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i, \mathbf{C}) = g(\mathbf{Y}, \mathbf{C}) \tag{4.1.19}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i = \frac{1}{2}\mathbf{Y} \tag{4.1.20}$$

bulunur. (4.1.7) sistemi ve (4.1.20) birlikte göz önüne alınırsa

$$\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i = \nabla_{\mathbf{Z}_i}\mathbf{X}_i = \frac{1}{2}\mathbf{Y}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Y} &= \frac{1}{2}\mathbf{Z}_i = -\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}_i, \\ \nabla_{\mathbf{Z}_i}\mathbf{Y} &= \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}_i = \frac{1}{2}\mathbf{X}_i \end{aligned}$$

bulunur.

Böylece elde edilen hesaplamalar sonucu,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Z}_i &= \nabla_{\mathbf{Z}_i}\mathbf{X}_i = \frac{1}{2}\mathbf{Y}, \\
\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Y} &= -\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}_i = \frac{1}{2}\mathbf{Z}_i, \\
\nabla_{\mathbf{Z}_i}\mathbf{Y} &= \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}_i = \frac{1}{2}\mathbf{X}_i
\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

dır.

Teorem 4.1.1

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubunda $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{T}\}$ ortonormal baz olmak üzere, bu Lie grubu üzerinde tanımlı eğrilik tensörü için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) &= \frac{1}{4}, \\
R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) &= \frac{3}{4}, \\
R(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_i) &= \frac{1}{4}, \\
R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}) &= -\frac{1}{4}.
\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

İspat. Tanım 2.1.31 de $X = \mathbf{X}_i, Y = \mathbf{Z}_i, Z = \mathbf{X}_i, W = \mathbf{Z}_i$ alınırsa, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ deki eğrilik tensörü,

$$R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) = g(R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i)\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) = g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\nabla_{\mathbf{Z}_i}\mathbf{X}_i - \nabla_{\mathbf{Z}_i}\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i - \nabla_{[\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i]}\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) \tag{4.1.23}$$

elde edilir. (4.1.23) de (4.1.21) sistemi kullanılırsa

$$R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i\right)=\frac{1}{2}g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i) \tag{4.1.24}$$

olur. Aynı zamanda (4.1.24) de (4.1.21) sistemi tekrar kullanılırsa

$$R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i\right)=\frac{1}{4}g(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i) \tag{4.1.25}$$

elde edilir. (4.1.25) de (4.1.6) göz önüne alınırsa

$$R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i\right)=\frac{1}{4}$$

bulunur.

Benzer yöntemle, sırasıyla,

$$\begin{aligned} R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{X}_i,\mathbf{Y}\right) &= \frac{3}{4}, \\ R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i\right) &= \frac{1}{4}, \\ R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y}\right) &= -\frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.□

4.2. $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ Lie Grubunda Üstel Dönüşümler ve Taylor Formülü

Tanım 4.2.1.

$\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ grubunun Lie cebiri $\mathfrak{k}$ olsun .

$$\begin{aligned} \mathfrak{k} &\rightarrow \mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1 \\ X &\rightarrow \exp X \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ grubunda üstel dönüşüm olarak adlandırılır, [20].

Teorem 4.2.2

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubunda exp üstel dönüşüm ve bu Lie grubunda herhangi iki vektör alanı $\mathbf{F}, \mathbf{U}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\exp(t\mathbf{F})\exp(t\mathbf{U}) &= \exp[t\sum_{i=1}^{n}[\left(\mathfrak{f}_i^1+\mathfrak{u}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\left(\mathfrak{f}^2+\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}+\left(\mathfrak{f}_i^3+\mathfrak{u}_i^3\right)\mathbf{Z}_i+\left(\mathfrak{f}^4+\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}\\ &+\frac{t^2}{2}\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}-\frac{t^2}{2}\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\frac{t^2}{2}\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}\\ &-\frac{t^2}{2}\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\frac{t^2}{2}u^{\mathbf{2}}\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^{\mathbf{2}}\right)\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}\digamma+O\left(t^3\right)]\end{aligned}$$

dır. Burada $t\in\mathbb{R}$ ve $\mathfrak{f}_i^k, \mathfrak{u}_j^k \in C^\infty\left(\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$\begin{aligned}\digamma = \sum_{i=1,j=1}^{n}&[\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathfrak{u}^2\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}\\ &-\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}\\ &-\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i-\mathfrak{f}^2\mathfrak{u}_j^1\mathbf{Z}_j+\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}+\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j\\ &+\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}+\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i\\ &+\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}-\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j\\ &-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}+\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}]\end{aligned}$$

dir.

İspat. $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ $(1\le i\le n)$ $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ de ortonormal baz vektör alanları, $\mathfrak{f}_i^k, \mathfrak{u}_j^k \in C^\infty\left(\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. **E** ve **K** vektör alanlarını bu bazlar cinsinden

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i+\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}+\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}^4\mathbf{T}, \qquad (4.2.1)\\ \mathbf{U} &= \sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j+\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}+\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j+\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\end{aligned}$$

olarak göz önüne alalım.

Kabul edelimki f fonksiyonu 0 da analitik olsun. $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ deki $\mathbf{F}$ vektör alanı için

$$\left[\tilde{\mathbf{F}}^n f\right] \left(g \exp t\tilde{\mathbf{F}}\right) = \frac{d^n}{dt^n} f\left(g \exp t\mathbf{F}\right) \tag{4.2.2}$$

yazılır. (4.2.2) formülünde $\mathbf{U}$ vektör alanı göz önüne alınırsa

$$\left[\tilde{\mathbf{F}}^n \tilde{\mathbf{U}}^m f\right](0) = \left[\frac{d^n}{dt^n} \frac{d^m}{dt^m} f\left(\exp t\mathbf{F} \exp s\mathbf{U}\right)\right]_{s=0,t=0} \tag{4.2.3}$$

elde edilir. Bununla birlikte $f\left(\exp t\mathbf{F} \exp s\mathbf{U}\right)$ fonksiyonu için (4.2.3) yardımıyla Taylor serisi, yeterince küçük s ve t ler için

$$f\left(\exp t\mathbf{F} \exp s\mathbf{U}\right) = \sum_{m,n\geq 0} \frac{t^n}{n!} \frac{s^m}{m!} \left[\tilde{\mathbf{F}}^n \tilde{\mathbf{U}}^m f\right](0)$$

olur.

Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\exp\left(t\mathbf{F}\right) \exp\left(t\mathbf{U}\right) = \exp(t\mathbf{F}+t\mathbf{U}+\frac{t^2}{2}\left[\mathbf{F}, \mathbf{U}\right] + O\left(t^3\right)) \tag{4.2.4}$$

olur, [27].

Buna göre $[\mathbf{F}, \mathbf{U}]$ ifadesi $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ deki $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ baz vektörlerinin braket operatöründen yararlanarak hesaplanırsa:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{F},\mathbf{U}] &= \left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i+\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}+\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j+\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}+\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j+\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right]\\
&= \left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i,\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\right]\\
&\quad+\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i,\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right]+\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\right]+\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y},\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\right]+\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\right]\\
&\quad+\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y},\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i,\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\right] \qquad (4.2.5)\\
&\quad+\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\right]+\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i,\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right]+\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\right]\\
&\quad+\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\right]+\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\right]+\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki herbir terime ait braket, sırasıyla, ayrı ayrı hesaplanırsa;

$$
\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\right] = \sum_{i=1,j=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i\right], \qquad (4.2.6)
$$

$$
\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i,\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_i^1\mathfrak{u}^2\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i\right], \qquad (4.2.7)
$$

$$
\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\right] = \sum_{i=1,j=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i\right], \qquad (4.2.8)
$$

$$
\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i,\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}-\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i\right], \qquad (4.2.9)
$$

$$\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\right] = -\sum_{j=1}^{n}\left[\mathfrak{f}^2\mathfrak{u}_j^1\mathbf{Z}_j+\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}\right], \tag{4.2.10}$$

$$\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y},\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\right] = \mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}, \tag{4.2.11}$$

$$\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}\right], \tag{4.2.12}$$

$$\left[\mathfrak{f}^2\mathbf{Y},\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right] = \mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}-\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}, \tag{4.2.13}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\right] = \sum_{i=1,j=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i\right], \tag{4.2.14}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i,\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i\right], \tag{4.2.15}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i,\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\right] = \sum_{i=1,j=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i\right], \tag{4.2.16}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i,\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}-\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i\right], \tag{4.2.17}$$

$$\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}\right], \tag{4.2.18}$$

$$\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\right] = \mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}, \tag{4.2.19}$$

$$\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\right] = \sum_{j=1}^{n}\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}\right], \tag{4.2.20}$$

$$\left[\mathfrak{f}^4\mathbf{T},\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\right] = \mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}-\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T} \tag{4.2.21}$$

bulunur. (4.2.6)-(4.2.21) değerleri (4.2.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
[\mathbf{F},\mathbf{U}] = & \sum_{i=1,j=1}^{n} \mathfrak{f}_i^1 \mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j - \sum_{i=1,j=1}^{n} \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_i^1 \mathfrak{u}^2 \mathbf{Z}_i \\
& + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_i^1 \mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y} - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{u}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i + \sum_{i=1,j=1}^{n} \mathfrak{f}_i^1 \mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j \\
& - \sum_{i=1,j=1}^{n} \mathfrak{u}_j^3 \mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_i^1 \mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T} - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{u}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i \\
& - \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{f}^2 \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{Z}_j + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{f}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j - \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y} + \mathfrak{f}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y} \\
& - \mathfrak{u}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y} + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{f}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j - \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{u}_j^3 \mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y} + \mathfrak{f}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T} \\
& - \mathfrak{u}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y} + \sum_{i=1,j=1}^{n} \mathfrak{f}_i^3 \mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j - \sum_{i=1,j=1}^{n} \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i \qquad (4.2.22) \\
& + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_i^3 \mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y} - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{u}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i + \sum_{i=1,j=1}^{n} \mathfrak{f}_i^3 \mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j \\
& - \sum_{i=1,j=1}^{n} \mathfrak{u}_j^3 \mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{f}_i^3 \mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T} - \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{u}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i \\
& + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{f}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j - \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T} + \mathfrak{f}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y} - \mathfrak{u}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T} \\
& + \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{f}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j - \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{u}_j^3 \mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T} + \mathfrak{f}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T} - \mathfrak{u}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}
\end{aligned}$$

olur. (4.2.22) değeri (4.2.4) denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa istenilen elde edilir.

Böylece teoremin ispatı tamamlanır.□

Sonuç 4.2.3.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubunda exp üstel dönüşüm olmak üzere bu grubun $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ baz vektörleri yardımıyla

i) $\exp\left(t\mathbf{X}_i\right)\exp\left(t\mathbf{Y}\right) = \exp\left\{t\left(\mathbf{X}_i + \mathbf{Y}\right) + \frac{t^2}{2}\mathbf{Z}_i\right\}$,

ii) $\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{T}) = \exp t(\mathbf{X}_i + \mathbf{T})$,

iii) $\exp(t\mathbf{Z}_i)\exp(t\mathbf{T}) = \exp t(\mathbf{Z}_i + \mathbf{T})$,

iv) $\exp(t\mathbf{Y})\exp(t\mathbf{T}) = \exp t(\mathbf{Y} + \mathbf{T})$

dır.

Teorem 4.2.4.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ grubununda iki vektör alanı $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{U}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \exp(-t\mathbf{F})\exp(-t\mathbf{U})\exp(t\mathbf{F})\exp(t\mathbf{U}) \\ = \; & \exp[t^2\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}(\mathfrak{u}^4)\mathbf{T}+t^2\mathfrak{f}^4\mathbf{T}(\mathfrak{u}^4)\mathbf{T}-t^2\mathfrak{u}^4\mathbf{T}(\mathfrak{f}^4)\mathbf{T}+t^2\mathfrak{f}^4\mathbf{T}(\mathfrak{u}^2)\mathbf{Y}-t^2\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}(\mathfrak{f}^4)\mathbf{T} \\ & -t^2\mathfrak{u}^4\mathbf{T}(\mathfrak{f}^2)\mathbf{Y}+t^2\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}(\mathfrak{u}^2)\mathbf{Y}-t^2u^{\mathbf{2}}\mathbf{Y}(\mathfrak{f}^{\mathbf{2}})\mathbf{Y}+t^2\mathcal{F}+O(\mathbf{t^3})] \end{aligned}$$

dır. Burada $t \in \mathbb{R}$ ve $\mathfrak{f}_i^k, \mathfrak{u}_j^k \in C^\infty(\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \sum_{i=1,j=1}^{n} [\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i(\mathfrak{u}_j^1)\mathbf{X}_j - \mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j(\mathfrak{f}_i^1)\mathbf{X}_i + \mathfrak{f}_i^1\mathfrak{u}^2\mathbf{Z}_i + \mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i(\mathfrak{u}^2)\mathbf{Y} \\ & - \mathfrak{u}^2\mathbf{Y}(\mathfrak{f}_i^1)\mathbf{X}_i + \mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i(\mathfrak{u}_j^3)\mathbf{Z}_j - \mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j(\mathfrak{f}_i^1)\mathbf{X}_i + \mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i(\mathfrak{u}^4)\mathbf{T} \\ & - \mathfrak{u}^4\mathbf{T}(\mathfrak{f}_i^1)\mathbf{X}_i - \mathfrak{f}^2\mathfrak{u}_j^1\mathbf{Z}_j + \mathfrak{f}^2\mathbf{Y}(\mathfrak{u}_j^1)\mathbf{X}_j - \mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j(\mathfrak{f}^2)\mathbf{Y} + \mathfrak{f}^2\mathbf{Y}(\mathfrak{u}_j^3)\mathbf{Z}_j \\ & + \mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i(\mathfrak{u}_j^1)\mathbf{X}_j - \mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j(\mathfrak{f}_i^3)\mathbf{Z}_i - \mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j(\mathfrak{f}^2)\mathbf{Y} + \mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i(\mathfrak{u}^2)\mathbf{Y} - \mathfrak{u}^2\mathbf{Y}(\mathfrak{f}_i^3)\mathbf{Z}_i \\ & + \mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i(\mathfrak{u}_j^3)\mathbf{Z}_j - \mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j(\mathfrak{f}_i^3)\mathbf{Z}_i + \mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i(\mathfrak{u}^4)\mathbf{T} - \mathfrak{u}^4\mathbf{T}(\mathfrak{f}_i^3)\mathbf{Z}_i + \mathfrak{f}^4\mathbf{T}(\mathfrak{u}_j^1)\mathbf{X}_j \\ & - \mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j(\mathfrak{f}^4)\mathbf{T} + \mathfrak{f}^4\mathbf{T}(\mathfrak{u}_j^3)\mathbf{Z}_j - \mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j(\mathfrak{f}^4)\mathbf{T}] \end{aligned}$$

dir.

İspat. Teorem 4.2.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned} \exp(-t\mathbf{F})\exp(-t\mathbf{U})\exp(t\mathbf{F})\exp(t\mathbf{U}) = & \exp\{t\sum_{i=1}^{n}[(\alpha_i+\lambda_i)\mathbf{X}_i + (\beta_i+\mu_i)\mathbf{Y}_i + (\gamma+\xi)\mathbf{T}] \\ & -t\sum_{i=1}^{n}[(\alpha_i+\lambda_i)\mathbf{X}_i + (\beta_i+\mu_i)\mathbf{Y}_i + (\gamma+\xi)\mathbf{T}] + \frac{t^2}{2}[\mathbf{F},\mathbf{U}] + \frac{t^2}{2}[\mathbf{F},\mathbf{U}]\} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan bu ifadenin sağ tarafında $[\mathbf{F},\mathbf{U}]$ nun (4.2.22) de elde edilen değeri göz önüne alınırsa teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Sonuç 4.2.5.

$\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ Lie grubunda exp üstel dönüşüm olmak üzere bu grubun $\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{T}$ baz vektörleri yardımıyla

i) $\exp(-t\mathbf{X}_i)\exp(-t\mathbf{Y})\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{Y})=\exp\{t^2\mathbf{Z}_i\}$,

ii) $\exp(-t\mathbf{X}_i)\exp(-t\mathbf{T})\exp(t\mathbf{X}_i)\exp(t\mathbf{T})=\mathbf{1}_{\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1}$,

iii) $\exp(-t\mathbf{Z}_i)\exp(-t\mathbf{T})\exp(t\mathbf{Z}_i)\exp(t\mathbf{T})=\mathbf{1}_{\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1}$,

iv) $\exp(-t\mathbf{Y})\exp(-t\mathbf{T})\exp(t\mathbf{Y})\exp(t\mathbf{T})=\mathbf{1}_{\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1}$.

dir.

Teorem 4.2.6.

$\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ Lie grubunda exp üstel dönüşüm olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \exp(t\mathbf{F})\exp(t\mathbf{U})\exp(-t\mathbf{F}) \\
= \; & \exp[t\sum_{i=1}^{n}[\mathfrak{u}_i^1\mathbf{X}_i+\mathfrak{u}_i^3\mathbf{Z}_i]+t\mathfrak{u}^4\mathbf{T}+t\mathfrak{u}^{\mathbf{2}}\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T} \\
& -\frac{t^2}{2}\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\frac{t^2}{2}\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T} \\
& -\frac{t^2}{2}\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\frac{t^2}{2}u^{\mathbf{2}}\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^{\mathbf{2}}\right)\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}F+O\left(t^3\right)]
\end{aligned}$$

dır. Burada $t \in \mathbb{R}$ ve $\mathfrak{f}_i^k, \mathfrak{u}_j^k \in C^\infty(\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve

$$\begin{aligned}
\digamma = \sum_{i=1,j=1}^{n} & [\mathfrak{f}_i^1 \mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j - \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i + \mathfrak{f}_i^1 \mathfrak{u}^2 \mathbf{Z}_i + \mathfrak{f}_i^1 \mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y} \\
& - \mathfrak{u}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i + \mathfrak{f}_i^1 \mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j - \mathfrak{u}_j^3 \mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i + \mathfrak{f}_i^1 \mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T} \\
& - \mathfrak{u}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i - \mathfrak{f}^2 \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{Z}_j + \mathfrak{f}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j - \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y} + \mathfrak{f}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j \\
& + \mathfrak{f}_i^3 \mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j - \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i - \mathfrak{u}_j^3 \mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y} + \mathfrak{f}_i^3 \mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y} - \mathfrak{u}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i \\
& + \mathfrak{f}_i^3 \mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j - \mathfrak{u}_j^3 \mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i + \mathfrak{f}_i^3 \mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T} - \mathfrak{u}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i + \mathfrak{f}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j \\
& - \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T} + \mathfrak{f}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j - \mathfrak{u}_j^3 \mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}]
\end{aligned}$$

dir.

İspat. Kabul edelimki f fonksiyonu sıfır da analitik olsun. Yeterince küçük t ler için

$$f\left(\exp\left(t\mathbf{F}\right)\exp\left(t\mathbf{U}\right)\exp\left(-t\mathbf{F}\right)\right) = \sum_{m,n,p\geq 0} \frac{t^m}{m!}\frac{t^n}{n!}\frac{t^p}{p!}\left[\tilde{\mathbf{F}}^m \tilde{\mathbf{U}}^n \left(-\tilde{\mathbf{F}}^p\right) f\right](0) \quad (4.2.23)$$

yazılır. Bu fonksiyon için Taylor seri açılımı kullanılırsa ve $[\mathbf{F}, \mathbf{U}]$ nun (4.2.22) değeri göz önüne alınırsa ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.7.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubunda $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ baz vektörleri olmak üzere

i) $\exp\left(t\mathbf{X}_i\right)\exp\left(t\mathbf{Y}\right)\exp\left(-t\mathbf{X}_i\right) = \exp\left\{t\mathbf{Y} + \frac{t^2}{2}\mathbf{Z}_i\right\}$,
ii) $\exp\left(t\mathbf{Z}_i\right)\exp\left(t\mathbf{Y}\right)\exp\left(-t\mathbf{Z}_i\right) = \exp\left(t\mathbf{T}\right)\exp\left(t\mathbf{Y}\right)\exp\left(-t\mathbf{T}\right) = \exp\left\{t\mathbf{Y}\right\}$,
iii) $\exp\left(t\mathbf{X}_i\right)\exp\left(t\mathbf{T}\right)\exp\left(-t\mathbf{X}_i\right) = \exp\left(t\mathbf{Z}_i\right)\exp\left(t\mathbf{T}\right)\exp\left(-t\mathbf{Z}_i\right) = \exp\left\{t\mathbf{T}\right\}$.
dır.

4.3. $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie Grubunda Komutatör Eğriler

Tanım 4.3.1.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ grubunun Lie cebiri $\mathfrak{k}$ olsun. Bu taktirde $X, Y \in \mathfrak{k}$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & I & \to & \mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1 \\ & t & \to & \gamma(t) = \end{array} \exp\left(-t^{\frac{1}{2}} X\right) \exp\left(-t^{\frac{1}{2}} Y\right) \exp\left(t^{\frac{1}{2}} X\right) \exp\left(t^{\frac{1}{2}} Y\right), \ t \geq 0.$$

biçiminde tanımlanan eğriye $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubunda komutatör eğri denir, [27].

Teorem 4.3.2.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ grubunun bazı $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$ olmak üzere $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}\}$ ikilisi yardımıyla komutatör eğri

$$\gamma(t) = \exp t\mathbf{Z}_i$$

dir. Ayrıca komutatör eğrinin $t = 0$ daki tanjant vektörü

$$\gamma'(0) = \mathbf{Z}_i$$

dir.

İspat. Teorem 4.2.5 ve Tanım 4.3.1 birlikte kullanılırsa

$$\gamma(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}_i\right) \exp\left(-t^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}\right) \exp\left(t^{\frac{1}{2}} \mathbf{X}_i\right) \exp\left(t^{\frac{1}{2}} \mathbf{Y}\right) = \exp\{t\mathbf{Z}_i\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.3.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ grubunun bazı $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$ olmak üzere, $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{T}\}$, $\{\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$, $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i\}$, $\{\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}\}$, $\{\mathbf{Y}, \mathbf{T}\}$ ikilileri yardımıyla tanımlanan komutatör eğri regüler değildir.

İspat.

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{T}] = [\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}] = [\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i] = [\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}, \mathbf{T}] = 0$$

olduğu göz önüne alınırsa Teorem 4.3.2 ispatına benzer şekilde ispat yapılır.

Sonuç 4.3.4.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ grubunda herhangi iki vektör alanı $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{U}$ olmak üzere bu vektörler yardımıyla komutatör eğri

$$\begin{aligned}
\gamma(t) \;=\; & \exp[t\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}+t\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}-t\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}+t\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-t\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T} \\
& -t\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}+t\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-tu^{\mathbf{2}}\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^{\mathbf{2}}\right)\mathbf{Y}+t\digamma+O(t^{\frac{3}{2}})]
\end{aligned}$$

dir. Burada $t \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{f}_i^k, \mathfrak{u}_j^k \in C^\infty\left(\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ de ortonormal baz vektör alanları,

$$\begin{aligned}
\digamma = & \sum_{i=1,j=1}^{n}[\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathfrak{u}^2\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y} \\
& -\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{f}_i^1\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T} \\
& -\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^1\right)\mathbf{X}_i-\mathfrak{f}^2\mathfrak{u}_j^1\mathbf{Z}_j+\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}+\mathfrak{f}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j \\
& +\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^2\right)\mathbf{Y}+\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^2\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{u}^2\mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i \\
& +\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}_i^3\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{u}^4\right)\mathbf{T}-\mathfrak{u}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i+\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^1\right)\mathbf{X}_j \\
& -\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}+\mathfrak{f}^4\mathbf{T}\left(\mathfrak{u}_j^3\right)\mathbf{Z}_j-\mathfrak{u}_j^3\mathbf{Z}_j\left(\mathfrak{f}^4\right)\mathbf{T}]
\end{aligned}$$

dir.

İspat.

Teorem 4.2.4 ve Tanım 4.3.1 birlikte kullanılırsa ispat açıktır. □

Sonuç 4.3.5.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ grubunda herhangi iki vektör alanı $\mathbf{F}$ ve $\mathbf{U}$ olmak üzere bu vektör alanları yardımıyla komutatör eğrinin $t = 0$ daki tanjant vektörü

$$\begin{aligned} \gamma'(0) &= \mathfrak{f}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^4\right) \mathbf{T} + \mathfrak{f}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^4\right) \mathbf{T} - \mathfrak{u}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^4\right) \mathbf{T} + \mathfrak{f}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{u}^2\right) \mathbf{Y} - \mathfrak{u}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^4\right) \mathbf{T} \\ &\quad - \mathfrak{u}^4 \mathbf{T}\left(\mathfrak{f}^2\right) \mathbf{Y} + \mathfrak{f}^2 \mathbf{Y}\left(\mathfrak{u}^2\right) \mathbf{Y} - u^{\mathbf{2}} \mathbf{Y}\left(\mathfrak{f}^{\mathbf{2}}\right) \mathbf{Y} + F + O(t^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

dir. Burada $\mathfrak{f}_i^k, \mathfrak{u}_j^k \in C^\infty\left(\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1\right)$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ de ortonormal baz vektör alanlarıdır.

5. BÖLÜM

Bu bölümde $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubu üzerinde J kompleks yapısı yardımıyla yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubu oluşturuldu. Bu Lie grubu üzerinde kovaryant türevler ve eğrilik tensörleri elde edildi. Baz vektörlerinin oluşturduğu holomorfik düzlemler yardımıyla holomorfik kesit eğrilikleri hesaplandı. Daha sonra $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubunun Lie cebiri yardımıyla üstel dönüşüm formülleri oluşturuldu. Son olarak bu üstel dönüşümler kullanılarak $\mathbb{M}^{2n+2}$ Lie grubu üzerinde komutatör eğrilerin bir karakterizasyonu verildi.

5.1. $\mathbb{M}^{2n+2}$ Yaklaşık Pseudo-Kompleks Lie Grubunun Oluşumu ve Eğrilik Özellikleri

$$\begin{array}{rcl} J: \ T_X(\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1) & \rightarrow & T_X(\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1) \\ X & \rightarrow & JX \end{array}$$

lineer endomorfizmi $J^2 = -1$ şartını sağlıyorsa J ye $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ üzerinde bir yaklaşık kompleks yapı ve $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubuna da bir yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubu denir, [1].

Burada kısalığın hatırı için J lineer endomorfizmi ile verilen $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunu $\mathbb{M}^{2n+2}$ ile gösterelim.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ üzerinde

$$J\mathbf{X}_i = \mathbf{Z}_i, \tag{5.1.1}$$

$$J\mathbf{Z}_i = -\mathbf{X}_i, \tag{5.1.2}$$

$$J\mathbf{Y} = \mathbf{T}, \tag{5.1.3}$$

$$J\mathbf{T} = -\mathbf{Y} \tag{5.1.4}$$

olacak şekilde $(1,1)$ tipinde J tensör alanı yazılılır. Buna göre J nin $\mathbb{M}^{2n+2}$ üstünde bir sol invaryant yaklaşık kompleks yapı tanımladığı ve g nin de J ye göre bir pseudo-hermityen metrik olduğu açıktır. Yani

$$\begin{aligned} g(J\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i) &= g(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i), \\ g(J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i) &= g(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_i), \\ g(J\mathbf{Y}, J\mathbf{Y}) &= g(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}), \\ g(J\mathbf{T}, J\mathbf{T}) &= g(\mathbf{T}, \mathbf{T}) \end{aligned}$$

dir.

Yardımcı Teorem 5.1.1.

J, $\mathbb{M}^{2n+2}$ üstünde bir sol invaryant yaklaşık kompleks yapı olmak üzere

$$\begin{aligned} \nabla_{J\mathbf{X}_i} J\mathbf{Z}_j &= \nabla_{J\mathbf{Z}_j} J\mathbf{X}_i = -\frac{1}{2}\mathbf{Y}, \\ \nabla_{J\mathbf{X}_i} J\mathbf{T} &= \nabla_{J\mathbf{T}} J\mathbf{X}_i = -\frac{1}{2}\mathbf{X}_i, \\ \nabla_{J\mathbf{Z}_i} J\mathbf{T} &= -\nabla_{J\mathbf{T}} J\mathbf{Z}_i = \frac{1}{2}\mathbf{Z}_i \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

dir. Burada $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ in bir bazı ve bu baza karşılık gelen $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bir bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}\}$ dır.

İspat.

Hipotezden J, $\mathbb{M}^{2n+2}$ üstünde bir sol invaryant yaklaşık kompleks yapı tanımlar. $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}\}$, sırasıyla, (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3), (5.1.4) de vektör alanları olsunlar. İlk olarak; $\nabla_{J\mathbf{X}_i} J\mathbf{X}_j$ kovaryant türevi için (5.1.1) kullanılırsa

$$\nabla_{J\mathbf{X}_i} J\mathbf{X}_j = \nabla_{\mathbf{Z}_i} \mathbf{Z}_j = 0$$

bulunur. Benzer biçimde $\nabla_{J\mathbf{Z}_i} J\mathbf{Z}_j, \nabla_{J\mathbf{Y}} J\mathbf{Y}, \nabla_{J\mathbf{T}} J\mathbf{T}$ nin kovaryant türevi için, sırasıyla, (5.1.2), (5.1.3) ve (5.1.4) göz önüne alınırsa

$$\nabla_{J\mathbf{Z}_i} J\mathbf{Z}_j = \nabla_{J\mathbf{Y}} J\mathbf{Y} = \nabla_{J\mathbf{T}} J\mathbf{T} = 0$$

olur. Yine (5.1.1) göz önüne alınırsa, sırasıyla, $\nabla_{J\mathbf{X}_i} J\mathbf{Z}_j, \nabla_{J\mathbf{Z}_j} J\mathbf{X}_i$ ifadelerinin sıfırdan farklı kovaryant türevleri;

$$\nabla_{J\mathbf{X}_i} J\mathbf{Z}_j = -\nabla_{\mathbf{Z}_i} \mathbf{X}_j = -\frac{1}{2}\mathbf{Y},$$

$$\nabla_{J\mathbf{Z}_j} J\mathbf{X}_i = -\nabla_{\mathbf{X}_j} \mathbf{Z}_i = -\frac{1}{2}\mathbf{Y},$$

$$\nabla_{J\mathbf{X}_i} J\mathbf{Z}_j = \nabla_{J\mathbf{Z}_j} J\mathbf{X}_i = -\frac{1}{2}\mathbf{Y}$$

elde edilir. Benzer yöntemle

$$\nabla_{J\mathbf{X}_i} J\mathbf{T} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{JT}} J\mathbf{X_i} = -\frac{1}{2}\mathbf{X}_i$$

$$\nabla_{J\mathbf{Z}_i} J\mathbf{T} = -\nabla_{J\mathbf{T}} J\mathbf{Z}_i = \frac{1}{2}\mathbf{Z}_i,$$

bulunur.

Önerme 5.1.2. J , $\mathbb{M}^{2n+2}$ üstünde bir sol invaryant yaklaşık kompleks yapı olsun. $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin R eğrilik tensörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} R(J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{X}_i) &= \frac{1}{4}, \\ R(J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}) &= \frac{3}{4}, \\ R(J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}) &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

dir. Burada $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ in bir bazı ve bu baza karşılık gelen $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bir bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}\}$ dır.

İspat.

Teorem 4.1.1 ve Yardımcı Teorem 5.1.1 birlikte kullanılırsa ispat açıktır. □

Tanım 2.1.32 kullanılarak, Ricci tensörünü;

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{U},\mathbf{V}) &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{U},\mathbf{X}_i,\mathbf{V},\mathbf{X}_i)+R(\mathbf{U},\mathbf{Z}_i,\mathbf{V},\mathbf{Z}_i)\\ &\quad +R(\mathbf{U},\mathbf{Y},\mathbf{V},\mathbf{Y})+R(\mathbf{U},\mathbf{T},\mathbf{V},\mathbf{T})]\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

olarak yazılır. Burada $\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{T}$ $(1\le i\le n)$ $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ de ortonormal baz vektör alanları ve R eğrilik tensörüdür.

Teorem 5.1.3.

$\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ de $\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{T}$ birer vektör alanı olsun. $\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{T}$ vektör alanlarına göre $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ üstünde ρ Ricci tensörleri;

$$\begin{gathered}\rho(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i)=n,\quad \rho(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i)=0,\\ \rho(\mathbf{Y},\mathbf{Y})=\frac{n}{2},\quad \rho(\mathbf{T},\mathbf{T})=0\end{gathered} \tag{5.1.7}$$

dir.

İspat

(5.1.6) eşitliği hipotezde verilen $\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{T}$ vektör alanlarına göre yazılırsa

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i) &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{X_i},\mathbf{X}_i)+R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X_i},\mathbf{Z}_i)\\ &\quad +R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{X_i},\mathbf{Y})+R(\mathbf{X}_i,\mathbf{T},\mathbf{X_i},\mathbf{T})]\end{aligned}$$

olur.

Burada (4.1.12) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i) &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X_i},\mathbf{Z}_i)+R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{X_i},\mathbf{Y})] \\ &= n \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

elde edilir. Benzer işlemler, sırasıyla, $\rho(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i),\rho(\mathbf{Y},\mathbf{Y}),\rho(\mathbf{T},\mathbf{T})$ için yapılırsa

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i) &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z_i},\mathbf{X}_i)+R(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z_i},\mathbf{Z}_i) \\ &\quad +R(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z_i},\mathbf{Y})+R(\mathbf{Z}_i,\mathbf{T},\mathbf{Z_i},\mathbf{T})] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z_i},\mathbf{X}_i)+R(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z_i},\mathbf{Y})] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{Y},\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{X}_i)+R(\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i) \\ &\quad +R(\mathbf{Y},\mathbf{Y},\mathbf{Y},\mathbf{Y})+R(\mathbf{Y},\mathbf{T},\mathbf{Y},\mathbf{T})] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{Y},\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{X}_i)+R(\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i)] \\ &= \frac{n}{2}, \end{aligned} \tag{5.1.10}$$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{T},\mathbf{T}) &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{T},\mathbf{X}_i,\mathbf{T},\mathbf{X}_i)+R(\mathbf{T},\mathbf{Z}_i,\mathbf{T},\mathbf{Z}_i) \\ &\quad +R(\mathbf{T},\mathbf{Y},\mathbf{T},\mathbf{Y})+R(\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T},\mathbf{T})] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

bulunur. (5.1.8), (5.1.9), (5.1.10) ve (5.1.11) eşitlikleri istenendir. Böylece ispat tamamlanır.□

Sonuç 5.1.4.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ manifoldunun ρ skalar eğriliği

$$\rho=\sum_{i=1}^{n}[\rho(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i)+\rho(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i)+\rho(\mathbf{Y},\mathbf{Y})+\rho(\mathbf{T},\mathbf{T})]=\frac{3n^2}{2} \tag{5.1.12}$$

dır. Burada $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ in bir bazı ve bu baza karşılık gelen $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bir bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}\}$ ve R eğrilik tensörüdür.

İspat. (5.1.7) eşitlikleri kullanılırsa ispat açıktır.□

Tanım 2.1.32 kullanılarak, $*$-Ricci tensörü ρ^*

$$\begin{aligned} \rho^*(\mathbf{U},\mathbf{V}) &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{U},\mathbf{X}_i,J\mathbf{V},J\mathbf{X}_i) + R(\mathbf{U},\mathbf{Z}_i,J\mathbf{V},J\mathbf{Z}_i) \\ &\quad + R(\mathbf{U},\mathbf{Y},J\mathbf{V},J\mathbf{Y}) + R(\mathbf{U},\mathbf{T},J\mathbf{V},J\mathbf{T})] \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

şeklinde verilir. Burada $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ $(1 \leq i \leq n)$ $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ de ortonormal baz vektör alanları ve R ise eğrilik tensörüdür.

Teorem 5.1.5.

$\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ üzerinde $\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}$ birer vektör alanı olsun. Bu vektör alanlarına göre $\mathbb{M}^{2n+2}$ üstünde ρ^*-Ricci tensörleri;

$$\rho^*(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i) = \rho^*(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i) = \rho^*(\mathbf{T},\mathbf{T}) = \rho^*(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) = 0 \tag{5.1.14}$$

dir.

İspat. (5.1.13) eşitliğini $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$ vektör alanlarına göre yazıp, sırasıyla, $\rho^*(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i)$, $\rho^*(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i)$, $\rho^*(\mathbf{T},\mathbf{T})$, $\rho^*(\mathbf{Y},\mathbf{Y})$ değerlerini hesaplayalım: Buna göre

$$\begin{aligned} \rho^*(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i) &= \sum_{i=1}^{n}[R(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i,J\mathbf{X}_i,J\mathbf{X}_i) + R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,J\mathbf{X}_i,J\mathbf{Z}_i) \\ &\quad + R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},J\mathbf{X}_i,J\mathbf{Y}) + R(\mathbf{X}_i,\mathbf{T},J\mathbf{X}_i,J\mathbf{T})] \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

yazılır. Buradan eşitliğin sağ tarafındaki ifadenin bileşenleri ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$R(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i,J\mathbf{X}_i,J\mathbf{X}_i) = R(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i) = -R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i),$$

$$R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,J\mathbf{X}_i,J\mathbf{Z}_i) = -R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_\mathbf{i},\mathbf{X}_i) = R(\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i),$$

$$R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},J\mathbf{X}_i,J\mathbf{Y}\right)=R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{T}\right)=0,$$

$$R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{T},J\mathbf{X}_i,J\mathbf{T}\right)=-R\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{T},\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y}\right)=0$$

olur. Elde edilen ifadeler (5.1.15) de yerine yazılırsa

$$\rho^*\left(\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i\right)=0$$

elde edilir. Diğer taraftan $\rho^*\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i\right)$ için

$$\begin{aligned}\rho^*\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i\right) &= \sum_{i=1}^{n}[R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,J\mathbf{Z}_i,J\mathbf{X}_i\right)+R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i,J\mathbf{Z}_i,J\mathbf{Z}_i\right) \\ &\quad +R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y},J\mathbf{Z}_i,J\mathbf{Y}\right)+R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{T},J\mathbf{Z}_i,J\mathbf{T}\right)]\end{aligned} \tag{5.1.16}$$

yazılır. (5.1.16) nın sağ tarafındaki her terim ayrı ayrı hesaplanırsa;

$$R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,J\mathbf{Z}_i,J\mathbf{X}_i\right)=-R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_i\right)=R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_\mathbf{i},\mathbf{X}_i\right),$$

$$R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i,J\mathbf{Z}_i,J\mathbf{Z}_i\right)=R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_i\right)=-R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_\mathbf{i},\mathbf{Z}_\mathbf{i},\mathbf{X}_i\right),$$

$$\begin{aligned}R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y},J\mathbf{Z}_i,J\mathbf{Y}\right) &= -R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Y},\mathbf{X}_i,\mathbf{T}\right)=0, \\ R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{T},J\mathbf{Z}_i,J\mathbf{T}\right) &= R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{T},\mathbf{X}_i,\mathbf{Y}\right)=0\end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler (5.1.16) da yerine yazılırsa

$$\rho^*\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}[R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i,\mathbf{Z}_\mathbf{i},\mathbf{X}_i\right)-R\left(\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_\mathbf{i},\mathbf{Z}_\mathbf{i},\mathbf{X}_i\right)+0+0]=0$$

olur. Benzer şekilde $\rho^*\left(\mathbf{T},\mathbf{T}\right)$ ve $\rho^*\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right)$ hesaplanırsa

$$\rho^*\left(\mathbf{T},\mathbf{T}\right)=\rho^*\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right)=0$$

elde edilir. □

Sonuç 5.1.6.

$\{\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i\}, \{\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i\}, \{\mathbf{Y}, J\mathbf{Y}\}, \{\mathbf{T}, J\mathbf{T}\}$ vektörlerinin oluşturduğu holomorfik düzlemler, sırasıyla, $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ olmak üzere $\mathbb{M}^{2n+2}$ Lie grubunun holomorfik kesit eğriliği

$$\kappa_{\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i}(\pi_1) = \kappa_{\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i}(\pi_2) = -\frac{1}{4}, \quad \kappa_{\mathbf{Y}, J\mathbf{Y}}(\pi_3) = \kappa_{\mathbf{T}, J\mathbf{T}}(\pi_4) = 0$$

dır.

İspat

Holomorfik kesit eğriliğinin tanımından, $\{\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i\}, \{\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i\}, \{\mathbf{Y}, J\mathbf{Y}\}, \{\mathbf{T}, J\mathbf{T}\}$ vektörlerinin oluşturduğu holomorfik düzlemler için, sırasıyla, $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ olmak üzere bu düzlemler için holomorfik kesit eğriliklerini ayrı ayrı hesaplayalım. R, $\mathbb{M}^{2n+2}$ de eğrilik tensörü olmak üzere

$$\begin{aligned} \kappa_{\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i}(\pi_1) &= R(\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i) \\ &= g(R(\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i) J\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i) \\ &= g(R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i) \\ &= g(R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i) \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

elde edilir. Diğer taraftan (5.1.17) nin sağ tarafındaki ifade hesaplanırsa

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) \mathbf{Z}_i &= \nabla_{\mathbf{X}_i} \nabla_{\mathbf{Z}_i} \mathbf{Z}_i - \nabla_{\mathbf{Z}_i} \nabla_{\mathbf{X}_i} \mathbf{Z}_i - \nabla_{[\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i]} \mathbf{Z}_i \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{Z}_i} \mathbf{Y} \\ &= -\frac{1}{4} \mathbf{X}_i \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

bulunur. (5.1.18), (5.1.17) de yerine yazılırsa

$$\kappa_{\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i}(\pi_1) = -\frac{1}{4} g(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i) = -\frac{1}{4} \tag{5.1.19}$$

olur.

R, $\mathbb{M}^{2n+2}$ de eğrilik tensörü olmak üzere, $\kappa_{\mathbf{Z}_i,J\mathbf{Z}_i}(\pi_2)$ holomorfik kesit eğriliğini hesaplayalım:

$\{\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i\}$ düzlemi için (4.1.6) dan $g(\mathbf{Z}_i,\mathbf{Z}_i)=1$ burada göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\kappa_{\mathbf{Z}_i,J\mathbf{Z}_i}(\pi_2) &= R(\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i) \\
&= g(R(\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i)J\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_i) \\
&= g(R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i)\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) \\
&= g\left(\nabla_{\mathbf{Z}_i}\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{X}_i - \nabla_{\mathbf{X}_i}\nabla_{\mathbf{Z}_i}\mathbf{X}_i - \nabla_{[\mathbf{Z}_i,\mathbf{X}_i]}\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i\right) \\
&= -\frac{1}{2}g(\nabla_{\mathbf{X}_i}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i) \\
&= -\frac{1}{4}g(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Z}_i) \\
&= -\frac{1}{4} \qquad (5.1.20)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.1.19) ve (5.1.20) birlikte göz önüne alınırsa $\{\mathbf{Y}, J\mathbf{Y}\}$, $\{\mathbf{T}, J\mathbf{T}\}$ vektörlerinin oluşturduğu holomorfik düzlemler için benzer işlemler yapılarak

$$\kappa_{\mathbf{Y},J\mathbf{Y}}(\pi_3) = \kappa_{\mathbf{T},J\mathbf{T}}(\pi_4) = 0$$

olduğu görülür. Bu da teoremin ispatını tamamlar.□

Tanım 5.1.7.

$\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$, $\mathbb{M}^{2n+2}$ üzerinde iki vektör alanı olmak üzere Q ve λ fonksiyonları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{u}+J\mathbf{v}) &= R(\mathbf{u}+\mathbf{v}, J(\mathbf{u}+\mathbf{v}), \mathbf{u}+\mathbf{v}, J(\mathbf{u}+\mathbf{v})), \qquad (5.1.21) \\
\lambda(\mathbf{u},\mathbf{v}) &= R(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{v}) - R(\mathbf{u},\mathbf{v},J\mathbf{u},J\mathbf{v}) \qquad (5.1.22)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\lambda, Q \in C^\infty(\mathbb{M}^{2n+2})$ dır, [22].

Teorem 5.1.8.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubu ve $\lambda, Q \in C^{\infty}\left(\mathbb{M}^{2n+2}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}\right) &= \frac{1}{12}[3Q\left(\mathbf{X}_i + J\mathbf{Y}\right) + 3Q\left(\mathbf{X}_i - J\mathbf{Y}\right) - Q\left(\mathbf{X}_i + \mathbf{Y}\right) \\ &\quad -Q\left(\mathbf{X}_i - \mathbf{Y}\right) - 4Q\left(\mathbf{X}_i\right) - 4Q\left(\mathbf{Y}\right)] + \frac{1}{6}[\lambda\left(\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}\right) \\ &\quad +3\lambda\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}\right) - \lambda\left(J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}\right) + \lambda\left(J\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}\right)] \end{aligned} \tag{5.1.23}$$

dir. Burada $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ in bir bazı ve bu baza karşılık gelen $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bir bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}\}$ dır.

İspat

(5.1.21) de $\mathbf{u} = \mathbf{X}_i$ ve $\mathbf{v} = \mathbf{Y}$ yazılırsa,

$$Q\left(\mathbf{X}_i + J\mathbf{Y}\right) = R\left(\mathbf{X}_i + \mathbf{T}, J\left(\mathbf{X}_i + \mathbf{T}\right), \mathbf{X}_i + \mathbf{T}, J\left(\mathbf{X}_i + \mathbf{T}\right)\right)$$

elde edilir. (5.1.1)-(5.1.4) den

$$Q\left(\mathbf{X}_i + J\mathbf{Y}\right) = R\left(\mathbf{X}_i + \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i + \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right)$$

olur. R nin her bileşene göre lineer olması göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} Q\left(\mathbf{X}_i + J\mathbf{Y}\right) &= R\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i + \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) + R\left(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i + \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) \\ &= R\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i + \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) + R\left(\mathbf{X}_i, -\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i + \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) \\ &\quad +R\left(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i + \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) + R\left(\mathbf{T}, -\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i + \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) \\ &= R\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) + R\left(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) \\ &\quad +R\left(\mathbf{X}_i, -\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) + R\left(\mathbf{X}_i, -\mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) \\ &\quad +R\left(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) + R\left(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) \\ &\quad +R\left(\mathbf{T}, -\mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) + R\left(\mathbf{T}, -\mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}\right) \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

elde edilir. (5.1.24) de gerekli hesaplamalar yapılarak yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{X}_i + J\mathbf{Y}) &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) - R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) \\ &\quad + R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i) - R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Y}) \\ &\quad - R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) \\ &\quad - R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Y}) \qquad (5.1.25) \\ &\quad + R(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) - R(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) \\ &\quad + R(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i) - R(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Y}) \\ &\quad - R(\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) \\ &\quad - R(\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan (5.1.25) in sağ tarafındaki sıfır olan bileşenler

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i) = R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Y}) = 0, \\ R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i) = R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Y}) = 0, \\ R(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) &= R(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) = R(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i) = 0, \\ R(\mathbf{T}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Y}) &= R(\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_i) = R(\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Y}) = 0 \end{aligned}$$

ve sıfırdan farklı olan bileşenler

$$R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i), R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y})$$

olduğundan bu ifadeler (5.1.25) de yerine yazılırsa,

$$Q(\mathbf{X}_i + J\mathbf{Y}) = R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) \qquad (5.1.26)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$Q(\mathbf{X}_i - J\mathbf{Y}) = R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) \qquad (5.1.27)$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{X}_i) &= R(\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i) = R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i), \qquad (5.1.28) \\ Q(\mathbf{Y}) &= R(\mathbf{Y}, J\mathbf{Y}, \mathbf{Y}, J\mathbf{Y}) = R(\mathbf{Y}, \mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{T}) = 0 \end{aligned}$$

olur. $Q(\mathbf{X}_i+\mathbf{Y}), Q(\mathbf{X}_i-\mathbf{Y})$ ifadelerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{X}_i+\mathbf{Y}) &= R(\mathbf{X}_i+\mathbf{Y}, J(\mathbf{X}_i+\mathbf{Y}), \mathbf{X}_i+\mathbf{Y}, J(\mathbf{X}_i+\mathbf{Y})) \\ &= R(\mathbf{X}_i+\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i+\mathbf{T}, \mathbf{X}_i+\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i+\mathbf{T}) \\ &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}), \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}) &= R(\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}, J(\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}), \mathbf{X}_i-\mathbf{Y}, J(\mathbf{X}_i-\mathbf{Y})) \\ &= R(\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i-\mathbf{T}, \mathbf{X}_i-\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i-\mathbf{T}) \\ &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}). \end{aligned} \tag{5.1.30}$$

(5.1.29) ve (5.1.30) dan

$$Q(\mathbf{X}_i+\mathbf{Y}) = Q(\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}) = R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{X}_i, \mathbf{Z}_i) + R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}) \tag{5.1.31}$$

bulunur.

Ayrca (5.1.22) den

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}) - R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}) \\ &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}) - R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}) &= \lambda(\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}) = R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_\mathbf{i}, \mathbf{T}) - R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, J\mathbf{Z}_\mathbf{i}, J\mathbf{T}) \\ &= R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_\mathbf{i}, \mathbf{T}) - R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}) &= \lambda(\mathbf{X}_i, \mathbf{T}) = R(\mathbf{X}_i, \mathbf{T}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{T}) - R(\mathbf{X}_i, \mathbf{T}, J\mathbf{X}_\mathbf{i}, J\mathbf{T}) \\ &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{T}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{T}) - R(\mathbf{X}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_\mathbf{i}, -\mathbf{Y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(J\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) &= \lambda(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}) = R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}) - R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_\mathbf{i}, J\mathbf{Y}) \\ &= R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}) - R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, -\mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{T}) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}) &= R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_\mathbf{i}, \mathbf{T}) = R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{T}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}) = 0, \\ R(\mathbf{X}_i, \mathbf{T}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{T}) &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{T}, \mathbf{Z}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}) = R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{T}) = 0 \end{aligned}$$

oldukları göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) &= R(\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{X}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}), \\ \lambda(J\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}) &= R(\mathbf{Z}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_\mathbf{i}, \mathbf{Y}), \\ \lambda(J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}) &= \lambda(\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}) = 0, \end{aligned}$$

olur.

(5.1.25)-(5.1.31) ifadelerinden (5.1.23) elde edilir.□

5.2. $\mathbb{M}^{2n+2}$ Yaklaşık Pseudo-Kompleks Lie Grubunda Üstel Dönüşümler ve Taylor Formülü

Tanım 5.2.1.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunun Lie cebiri $\mathfrak{m}_{2n+2}$ olsun.

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{m}_{2n+2} &\rightarrow \mathbb{M}^{2n+2} \\ X &\rightarrow \exp X \end{aligned}$$

dönüşümü $\mathbb{M}^{2n+2}$ grubunda üstel dönüşüm olarak adlandırılır, [20].

Teorem 5.2.2.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda

$$\begin{aligned}&\exp(t\mathbf{A})\exp(t\mathbf{C})=\exp[t\sum_{i=1}^{n}\left(\mathfrak{A}_i^1+\mathfrak{C}_i^1\right)\mathbf{Z}_i+\left(\mathfrak{A}^2+\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}\\&-\left(\mathfrak{A}_i^3+\mathfrak{C}_i^3\right)\mathbf{X}_i-\left(\mathfrak{A}^4+\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}-\frac{t^2}{2}\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}\\&-\frac{t^2}{2}\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}+\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}-\frac{t^2}{2}\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}\\&+\frac{t^2}{2}\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}-\frac{t^2}{2}\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}\mathfrak{P}+O(t^3)]\end{aligned}$$

dir. Burada $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}$, $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bazı ve $\mathfrak{A}_i^1,\mathfrak{A}^2,\mathfrak{A}_i^3,\mathfrak{A}^4,\mathfrak{C}_i^1,\mathfrak{C}_i^2,\mathfrak{C}_i^3,\mathfrak{C}^4$ holomorfik fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}=&\sum_{i=1,k=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k-\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}\\&-\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i-\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k+\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i-\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}\\&+\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i+\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k+\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}-\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k\\&-\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}-\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k+\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i-\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}\\&+\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k-\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i+\mathfrak{A}_i^3\mathfrak{C}^4\mathbf{Z}_i\\&+\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i-\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k+\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}\\&-\mathfrak{A}^4\mathfrak{C}_k^3\mathbf{Z}_i+\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}\end{aligned}$$

dir.

İspat. $J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}$ $(1\le i\le n)$ $\mathbb{M}^{2n+2}$ de ortonormal baz vektör alanları ve $\mathfrak{A}_i^1,\mathfrak{A}^2,\mathfrak{A}_i^3,\mathfrak{A}^4,\mathfrak{C}_i^1,\mathfrak{C}_i^2,\mathfrak{C}_i^3,\mathfrak{C}^4$ holomorfik fonksiyonlar olsun. $\mathbb{M}^{2n+2}$ de $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{C}$ vektör alanları bu bazlar cinsinden

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1J\mathbf{X}_i+\mathfrak{A}^2J\mathbf{Y}+\mathfrak{A}_i^3J\mathbf{Z}_i+\mathfrak{A}^4J\mathbf{T}, \qquad (5.2.1)\\\mathbf{C}&=\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^1J\mathbf{X}_j+\mathfrak{C}^2J\mathbf{Y}+\mathfrak{C}_k^3J\mathbf{Z}_k+\mathfrak{C}^4J\mathbf{T}\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Buna göre (5.1.1) sistemi (5.2.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i + \mathfrak{A}^2\mathbf{T} - \mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i - \mathfrak{A}^4\mathbf{Y}, \\ \mathbf{C} &= \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k + \mathfrak{C}^2\mathbf{T} - \mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k - \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\end{aligned}$$

elde edilir. $0 = (0,0,...,0) \in \mathbb{M}^{2n+2}$ ve f fonksiyonu sıfır da analitik olan bir fonksiyon olmak üzere Taylor formülünü kullanarak

$$\exp(t\mathbf{A})\exp(t\mathbf{C}) = \exp(t\mathbf{A}+t\mathbf{C}+\frac{t^2}{2}[\mathbf{A},\mathbf{C}] + O\left(t^3\right)) \tag{5.2.2}$$

bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned}[\mathbf{A},\mathbf{C}] &= \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i + \mathfrak{A}^2\mathbf{T} - \mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i - \mathfrak{A}^4\mathbf{Y}, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k + \mathfrak{C}^2\mathbf{T} - \mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k - \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right] \\ &= \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i, \mathfrak{C}^2\mathbf{T}\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{X}_k\right] \\ &\quad - \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i, \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right] + \left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T}, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k\right] + \left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T}, \mathfrak{C}^2\mathbf{T}\right] - \left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T}, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{X}_k\right] \\ &\quad - \left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T}, \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^3 \mathbf{X}_i, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k\right] - \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^3 \mathbf{X}_i, \mathfrak{C}^2\mathbf{T}\right] \qquad 5.2.3 \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^3 \mathbf{X}_i, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{X}_k\right] + \left[\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i^3 \mathbf{X}_i, \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right] - \left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k\right] \\ &\quad - \left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}, \mathfrak{C}^2\mathbf{T}\right] + \left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}, \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{X}_k\right] + \left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}, \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki herbir terime ait braket operatörü, sırasıyla, ayrı ayrı hesaplanırsa;

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i,\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\right] = \sum_{i=1,k=1}^{n}\left[\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k-\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{X}_i\right], \tag{5.2.4}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i,\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}-\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i\right], \tag{5.2.5}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i,\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\right] = \sum_{i=1,k=1}^{n}\left[\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k-\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i\right], \tag{5.2.6}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i,\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i\right], \tag{5.2.7}$$

$$\left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T},\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k-\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}\right], \tag{5.2.8}$$

$$\left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T},\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\right] = \mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}-\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}, \tag{5.2.9}$$

$$\left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T},\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k-\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}\right], \tag{5.2.10}$$

$$\left[\mathfrak{A}^2\mathbf{T},\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right] = \mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}, \tag{5.2.11}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i,\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\right] = \sum_{i=1,k=1}^{n}\left[\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k-\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i\right], \tag{5.2.12}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i,\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left[\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}-\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i\right], \tag{5.2.13}$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i,\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\right] = \sum_{i=1,k=1}^{n}\left[\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k-\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i\right], \tag{5.2.14}$$

$$\begin{aligned}\left[\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i,\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right] &= \sum_{i=1}^{n}[\mathfrak{A}_i^3\mathfrak{C}^4\mathbf{Z}_i+\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y} \\ &\quad -\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i],\end{aligned} \tag{5.2.15}$$

$$\begin{aligned}
\left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y},\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\right] &= \sum_{k=1}^{n}\left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k-\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}\right], && (5.2.16)\\
\left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y},\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\right] &= \mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}-\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}, && (5.2.17)\\
\left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y},\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\right] &= \sum_{i=1}^{n}[-\mathfrak{A}^4\mathfrak{C}_k^3\mathbf{Z}_i+\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{Y} && (5.2.18)\\
&\quad -\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}], &&\\
\left[\mathfrak{A}^4\mathbf{Y},\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\right] &= \mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y} && (5.2.19)
\end{aligned}$$

bulunur. (5.2.4)-(5.2.19) değerleri (5.2.3) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
[\mathbf{A},\mathbf{C}] = & \sum_{i=1,j=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k-\sum_{i=1,j=1}^{n}\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{X}_i+\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}\\
& -\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i-\sum_{i=1,k=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k+\sum_{i=1,k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i\\
& -\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}+\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i+\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k \qquad (5.2.20)\\
& -\sum_{j=1}^{n}\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}+\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}-\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}-\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k\\
& +\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}-\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}+\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}-\sum_{i=1,k=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k\\
& +\sum_{i=1,k=1}^{n}\mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i-\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}+\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i\\
& +\sum_{i=1,k=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k-\sum_{i=1,k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i+\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathfrak{C}^4\mathbf{Z}_i\\
& +\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}-\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i-\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k\\
& +\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}+\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}-\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{A}^4\mathfrak{C}_k^3\mathbf{Z}_i\\
& +\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{Y}-\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}+\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}-\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}
\end{aligned}$$

olur. (5.2.20) değeri (5.2.2) de yerine yazılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa istenen elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.□

Sonuç 5.2.3.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda

$$\begin{aligned}
\textbf{i)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{T}) &= \exp t(\mathbf{Z}_i-\mathbf{Y}),\\
\textbf{ii)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{Y}) &= \exp t(\mathbf{Z}_i+\mathbf{T}),\\
\textbf{iii)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{Z}_i) &= \exp\{t(\mathbf{Z}_i-\mathbf{X}_i)\},\\
\textbf{iv)}\ \exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(tJ\mathbf{T}) &= \exp t(-\mathbf{X}_i-\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}\mathbf{Z}_i),\\
\textbf{v)}\ \exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(tJ\mathbf{Y}) &= \exp t(-\mathbf{X}_i+\mathbf{T}),\\
\textbf{vi)}\ \exp(tJ\mathbf{Y})\exp(tJ\mathbf{T}) &= \exp t(\mathbf{Y}-\mathbf{T})
\end{aligned}$$

dır. Burada $\{\mathbf{X}_i,\mathbf{Y},\mathbf{Z}_i,\mathbf{T}\}$, $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ in bir bazı ve bu baza karşılık gelen $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bir bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}\}$ dır.

Teorem 5.2.4.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda

$$\begin{aligned}
&\exp(-t\mathbf{A})\exp(-t\mathbf{C})\exp(t\mathbf{A})\exp(t\mathbf{C}) = \exp[t^2\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}\\
&-t^2\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}-t^2\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}+t^2\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T}-t^2\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}+t^2\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}\\
&+t^2\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}-t^2\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}+t^2\mathfrak{P}+O(t^3)]
\end{aligned}$$

dir. Burada $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}$, $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bazı ve $\mathfrak{A}_i^1,\mathfrak{A}^2,\mathfrak{A}_i^3,\mathfrak{A}^4,\mathfrak{C}_i^1,\mathfrak{C}_i^2,\mathfrak{C}_i^3,\mathfrak{C}^4$

holomorfik fonksiyonlar olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{P} = \sum_{i=1,k=1}^{n} & \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i \left(\mathfrak{C}_k^1\right) \mathbf{Z}_k - \mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k \left(\mathfrak{A}_i^1\right) \mathbf{X}_i + \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i \left(\mathfrak{C}^2\right) \mathbf{T} \\
& -\mathfrak{C}^2 \mathbf{T} \left(\mathfrak{A}_i^1\right) \mathbf{Z}_i - \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i \left(\mathfrak{C}_k^3\right) \mathbf{X}_k + \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{X}_k \left(\mathfrak{A}_i^1\right) \mathbf{Z}_i - \mathfrak{A}_i^1 \mathbf{Z}_i \left(\mathfrak{C}^4\right) \mathbf{Y} \\
& +\mathfrak{C}^4 \mathbf{Y} \left(\mathfrak{A}_i^1\right) \mathbf{Z}_i + \mathfrak{A}^2 \mathbf{T} \left(\mathfrak{C}_k^1\right) \mathbf{Z}_k + \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{X}_k \left(\mathfrak{A}^2\right) \mathbf{T} - \mathfrak{A}_i^3 \mathbf{X}_i \left(\mathfrak{C}_k^1\right) \mathbf{Z}_k \\
& -\mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k \left(\mathfrak{A}^2\right) \mathbf{T} - \mathfrak{A}^2 \mathbf{T} \left(\mathfrak{C}_k^3\right) \mathbf{X}_k + \mathfrak{u}_j^1 \mathbf{X}_j \left(\mathfrak{f}_i^3\right) \mathbf{Z}_i - \mathfrak{A}_i^3 \mathbf{X}_i \left(\mathfrak{C}^2\right) \mathbf{T} \\
& +\mathfrak{C}^2 \mathbf{T} \left(\mathfrak{A}_i^3\right) \mathbf{X}_i + \mathfrak{A}_i^3 \mathbf{X}_i \left(\mathfrak{C}_k^3\right) \mathbf{X}_k - \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{X}_k \left(\mathfrak{A}_i^3\right) \mathbf{X}_i + \mathfrak{A}_i^3 \mathfrak{C}^4 \mathbf{Z}_i \\
& +\mathfrak{A}_i^3 \mathbf{X}_i \left(\mathfrak{C}^4\right) \mathbf{Y} - \mathfrak{C}^4 \mathbf{Y} \left(\mathfrak{A}_i^3\right) \mathbf{X}_i - \mathfrak{A}^4 \mathbf{Y} \left(\mathfrak{C}_k^1\right) \mathbf{Z}_k + \mathfrak{C}_k^1 \mathbf{Z}_k \left(\mathfrak{A}^4\right) \mathbf{Y} \\
& -\mathfrak{A}^4 \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{Z}_i + \mathfrak{A}^4 \mathbf{Y} \left(\mathfrak{C}_k^3\right) \mathbf{Y} - \mathfrak{C}_k^3 \mathbf{X}_k \left(\mathfrak{A}^4\right) \mathbf{Y}
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. Teorem 5.2.2 ye, sırasıyla, $\exp(-t\mathbf{A})$ ve $\exp(-t\mathbf{C})$ uygulanır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa istenen elde edilir. □

Sonuç 5.2.5.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubununda

$$
\begin{aligned}
\textbf{i)}\ \exp(-tJ\mathbf{X}_i)\exp(-tJ\mathbf{T})\exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{T}) &= \mathbf{1}_{\mathbb{M}^{2n+2}}, \\
\textbf{ii)}\ \exp(-tJ\mathbf{X}_i)\exp(-tJ\mathbf{Y})\exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{Y}) &= \mathbf{1}_{\mathbb{M}^{2n+2}}, \\
\textbf{iii)}\ \exp(-tJ\mathbf{Z}_i)\exp(-tJ\mathbf{T})\exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(tJ\mathbf{T}) &= \exp\frac{t^2}{2}\mathbf{Z}_i, \\
\textbf{iv)}\ \exp(-tJ\mathbf{Z}_i)\exp(-tJ\mathbf{Y})\exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(tJ\mathbf{Y}) &= \mathbf{1}_{\mathbb{M}^{2n+2}}, \\
\textbf{vi)}\ \exp(-tJ\mathbf{Y})\exp(-tJ\mathbf{T})\exp(tJ\mathbf{Y})\exp(tJ\mathbf{T}) &= \mathbf{1}_{\mathbb{M}^{2n+2}}
\end{aligned}
$$

dır. Burada $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ in bir bazı ve bu baza karşılık gelen $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bir bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}\}$ dır.

Teorem 5.2.6.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda

$$\exp(t\mathbf{A})\exp(t\mathbf{C})\exp(-t\mathbf{A}) = \exp[t\sum_{k=1}^{n}\left[\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k - \mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\right] + t\mathfrak{C}^2\mathbf{T} - t\mathfrak{C}^4\mathbf{Y} + t^2\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}$$
$$-t^2\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T} - t^2\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y} + t^2\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T} - t^2\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T} + t^2\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}$$
$$+t^2\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y} - t^2\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y} + t^2\mathfrak{P} + O(t^3)]$$

dir. Burada $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}$, $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bazı ve $\mathfrak{A}_i^1, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}_i^3, \mathfrak{A}^4, \mathfrak{C}_i^1, \mathfrak{C}_i^2, \mathfrak{C}_i^3, \mathfrak{C}^4$ holomorfik fonksiyonlar olmak üzere

$$\mathfrak{P} = \sum_{i=1,k=1}^{n}\mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k - \mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{X}_i + \mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}$$
$$-\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i - \mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k + \mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i - \mathfrak{A}_i^1\mathbf{Z}_i\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}$$
$$+\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}_i^1\right)\mathbf{Z}_i + \mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k + \mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T} - \mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k$$
$$-\mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T} - \mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k + \mathfrak{u}_j^1\mathbf{X}_j\left(\mathfrak{f}_i^3\right)\mathbf{Z}_i - \mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T}$$
$$+\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i + \mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{X}_k - \mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i + \mathfrak{A}_i^3\mathfrak{C}^4\mathbf{Z}_i$$
$$+\mathfrak{A}_i^3\mathbf{X}_i\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y} - \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}_i^3\right)\mathbf{X}_i - \mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}_k^1\right)\mathbf{Z}_k + \mathfrak{C}_k^1\mathbf{Z}_k\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}$$
$$-\mathfrak{A}^4\mathfrak{C}_k^3\mathbf{Z}_i + \mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}_k^3\right)\mathbf{Y} - \mathfrak{C}_k^3\mathbf{X}_k\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}$$

dir.

İspat. Kabul edelimki f fonksiyonu sıfır da analitik olsun. Yeterince küçük t ler için

$$f(\exp(t\mathbf{A})\exp(t\mathbf{C})\exp(-t\mathbf{A})) = \sum_{m,n,p\geq 0}\frac{t^m}{m!}\frac{t^n}{n!}\frac{t^p}{p!}\left[\tilde{\mathbf{A}}^m\tilde{\mathbf{C}}^n\left(-\tilde{\mathbf{A}}^p\right)f\right](0).$$

Teorem 5.2.2 göz önüne alınırsa ispat tamamlanır. □

Sonuç 5.2.7.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda

$$
\begin{aligned}
\textbf{i)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{T})\exp(-tJ\mathbf{X}_i) &= \exp t(-\mathbf{Y}),\\
\textbf{ii)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{Y})\exp(-tJ\mathbf{X}_i) &= \exp t(\mathbf{T}),\\
\textbf{iii)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(-tJ\mathbf{X}_i) &= \exp\{t(\mathbf{Z}_i-\mathbf{X}_i)\},\\
\textbf{iv)}\ \exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(tJ\mathbf{T})\exp(-tJ\mathbf{Z}_i) &= \exp t\{-\mathbf{Y}+\frac{t^2}{2}\mathbf{Z}_i\},\\
\textbf{v)}\ \exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(tJ\mathbf{Y})\exp(tJ\mathbf{Z}_i) &= \exp t(\mathbf{T}),\\
\textbf{vi)}\ \exp(tJ\mathbf{Y})\exp(tJ\mathbf{T})\exp(-tJ\mathbf{Y}) &= \exp t(-\mathbf{Y})
\end{aligned}
$$

dır. Burada $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$, $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ in bir bazı ve bu baza karşılık gelen $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bir bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{T}\}$ dır.

5.3. $\mathbb{M}^{2n+2}$ Yaklaşık Pseudo-Kompleks Lie Grubunda Komutatör Eğriler

Tanım 5.3.1

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda

$$
\begin{aligned}
\gamma:\ I &\to \mathbb{M}^{2n+2}\\
t &\to \gamma(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{2}}X\right)\exp\left(-t^{\frac{1}{2}}Y\right)\exp\left(t^{\frac{1}{2}}X\right)\exp\left(t^{\frac{1}{2}}Y\right),\ t\geq 0.
\end{aligned}
$$

biçiminde tanımlanan eğriye $\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda kompleks değerli komutatör eğri denir, [27].

Teorem 5.3.2.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunun bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}$ olmak üzere $J\mathbf{Z}_i$ ve $J\mathbf{T}$ vektörleri yardımıyla komutatör eğri

$$\gamma(t) = \exp tJ\mathbf{X}_i$$

dir. Ayrıca komutatör eğrinin $t = 0$ daki tanjant vektörü

$$\gamma'(0) = J\mathbf{X}_i$$

dir.

İspat. Kabul edelimki γ, $\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda komutatör eğri olsun. $J\mathbf{Z}_i$ ve $J\mathbf{T}$ baz vektörleri kullanılırsa

$$\gamma(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{2}}J\mathbf{Z}_i\right)\exp\left(-t^{\frac{1}{2}}J\mathbf{T}\right)\exp\left(t^{\frac{1}{2}}J\mathbf{Z}_i\right)\exp\left(t^{\frac{1}{2}}J\mathbf{T}\right)$$

yazılır. Ayrıca Teorem 5.2.5 ve Tanım 5.3.1 birlikte göz önüne alınırsa

$$\gamma(t) = \exp\{tJ\mathbf{X}_i\}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.□

Sonuç 5.3.3.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunun bazı $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}$ olmak üzere $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}\}, \{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Y}\}, \{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{Z}_i\}, \{J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}, \{J\mathbf{Y}, J\mathbf{T}\}$ baz vektörleri yardımıyla tanımlanan komutatör eğri regüler değildir.

Keyfi vektör alanları için regülerliği inceleyelim:

(5.2.1) deki $\mathbf{A}$ ve $\mathbf{C}$ vektörleri yardımıyla komutatör eğri

$$\begin{aligned}\gamma(t) = \exp[&t\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T} - t\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T} - t\mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y}\\ &+t\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T} - t\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T} + t\mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y}\\ &+t\mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y} - t\mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y} + t\mathfrak{P} + O(t^{\frac{3}{2}})]\end{aligned}$$

dir. Burada $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}$, $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bazı ve $\mathfrak{A}_i^1, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}_i^3, \mathfrak{A}^4, \mathfrak{C}_i^1, \mathfrak{C}_i^2, \mathfrak{C}_i^3, \mathfrak{C}^4$ holomorfik fonksiyonlardır.

Buna göre aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 5.3.4.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunda **A** ve **C** vektörleri yardımıyla verilen komutatör eğrinin $t = 0$ daki tanjant vektörü

$$\begin{aligned}\gamma'(0) = {} & \mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T} - \mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T} - \mathfrak{A}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y} \\ & + \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^2\right)\mathbf{T} - \mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^2\right)\mathbf{T} + \mathfrak{C}^2\mathbf{T}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y} \\ & + \mathfrak{A}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{C}^4\right)\mathbf{Y} - \mathfrak{C}^4\mathbf{Y}\left(\mathfrak{A}^4\right)\mathbf{Y} + \mathfrak{P} + O(t^{\frac{3}{2}})\end{aligned}$$

dir. Burada $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}$, $\mathbb{M}^{2n+2}$ nin bazı ve $\mathfrak{A}_i^1, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}_i^3, \mathfrak{A}^4, \mathfrak{C}_i^1, \mathfrak{C}_i^2, \mathfrak{C}_i^3, \mathfrak{C}^4$ holomorfik fonksiyonlardır.

İspat.

Sonuç 5.3.2 ve Sonuç 5.3.3 birlikte kullanılırsa ispat açıktır. □

6. BÖLÜM

SONUÇ

Genelleştirilmiş Lorentz Heisenberg grubu oluşturulmuş ve bu grup yardımıyla $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubu ifade edilerek bu grup üzerinde üstel dönüşüm tanımlanmıştır. Bu dönüşüm kullanılarak komutatör eğriler elde edilmiştir.

Daha sonra, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ Lie grubu yardımıyla $\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks manifoldu oluşturularak aynı zamanda bir pseudo-kompleks Lie grubu olan bu manifoldun skaler eğrilikleri, holomorfik kesit eğrilikleri ile Riemann eğrilikleri arasındaki bazı yeni bağıntılar ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca $\mathbb{M}^{2n+2}$, üzerinde üstel dönüşüm yardımıyla komutatör eğrilerin bir karakterizasyonu elde edilmiştir.

Teorem 5.1.3 e bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 6.1.1.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ manifoldunun ρ skalar eğriliği, $\mathbb{H}_{2n+1} \times \mathbb{S}^1$ in $\{\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_i, \mathbf{T}\}$ ortonormal bazına göre

$$\rho = \frac{3n^2}{2}$$

dır.

Teorem 5.1.5 e bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 6.1.2.

$\{\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i\}, \{\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i\}, \{\mathbf{Y}, J\mathbf{Y}\}, \{\mathbf{T}, J\mathbf{T}\}$ vektörlerinin oluşturduğu holomorfik düzlemler, sırasıyla, $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ olmak üzere $\mathbb{M}^{2n+2}$ manifoldunun holomorfik kesit eğriliği

$$\kappa_{\mathbf{X}_i, J\mathbf{X}_i}(\pi_1) = \kappa_{\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Z}_i}(\pi_2) = -\frac{1}{4}, \quad \kappa_{\mathbf{Y}, J\mathbf{Y}}(\pi_3) = \kappa_{\mathbf{T}, J\mathbf{T}}(\pi_4) = 0$$

dır.

Teorem 5.2.2 e bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 6.1.3.

$\mathbb{M}^{2n+2}$ yaklaşık pseudo-kompleks Lie grubunun $\{J\mathbf{X}_i, J\mathbf{T}, J\mathbf{Z}_i, J\mathbf{Y}\}$ bazı için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned}
\textbf{i)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{T}) &= \exp t(\mathbf{Z}_i - \mathbf{Y}),\\
\textbf{ii)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{Y}) &= \exp t(\mathbf{Z}_i + \mathbf{T}),\\
\textbf{iii)}\ \exp(tJ\mathbf{X}_i)\exp(tJ\mathbf{Z}_i) &= \exp\{t(\mathbf{Z}_i - \mathbf{X}_i)\},\\
\textbf{iv)}\ \exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(tJ\mathbf{T}) &= \exp t\left(-\mathbf{X}_i - \mathbf{Y} + \frac{t^2}{2}\mathbf{Z}_i\right),\\
\textbf{v)}\ \exp(tJ\mathbf{Z}_i)\exp(tJ\mathbf{Y}) &= \exp t(-\mathbf{X}_i + \mathbf{T}),\\
\textbf{vi)}\ \exp(tJ\mathbf{Y})\exp(tJ\mathbf{T}) &= \exp t(\mathbf{Y} - \mathbf{T}).
\end{aligned}$$

Bu çalışma, sırasıyla, $\mathbb{H}_{2n+1}$, $\mathbb{H}_{2n+1}\times\mathbb{S}^1$ ve $\mathbb{M}^{2n+2}$ Lie gruplarında üstel dönüşüm ve komutatör eğrilerin araştırılmasında önemli bir referans olacaktır. Üstel dönüşüm ve komutatör eğri kavramları kullanılarak Lie grupları ve bu grupların Lie cebirlerinin çeşitli cebirsel ve geometrik özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Abbena, E.**, 1984. An example of an almost Kahler manifold which is not Kahlerian, *Boll. Un. Mat. Ital.* 6 (3), 383-392.

[2] **Auslander, L.**, 1964. The structure of complete locally affine manifolds, *Topology Suppll.* 3(1), 131-139.

[3] **Batat, W. and Rahmani, S.,** 2010. Homogeneous Lorentzian structures on the generalized Heisenberg group, *Differential Geometry - Dynamical Systems*, 12, 12-17.

[4] **Batat, W. and Rahmani, S.,** 2011. Isometries, Geodesics and Jacobi Fields of Lorentzian Heisenberg Group, *Mediterr. J. Math.* 8, 411-430.

[5] **Berdinsky, D.A. and Taimanov, I.A.,** 2005. Surfaces in three-dimensional Lie groups, *Siberian Math. J.* 46, 1005–1019.

[6] **Berndt, J., Tricerri F.and Vanhecke, L.,** 1995. Generalized Heisenberg Groups and Damek-Ricci Harmonic Spaces, Lecture Notes in Mathematics 1598, Springer- Verlag.

[7] **Blair, D. E.,** 1976. Contact Manifolds in Riemannian Geometry, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag 509, Berlin-New York.

[8] **Blair, D.E. and Ianus, S.,** 1986. Critical associated metrics on symplectic manifolds, *Contemp. Math.,* 51, 23–29.

[9] **Citil, M.**, 2004. Bir İrtibatlı Lie Grubunun Homotopi Gruplarının Demeti Üzerinde Bazı Teoremler. *KSU. Journal of Science and Engineering* 7 (2), 26-28.

[10] **Carmo, M. do,** 1992. Riemannian geometry. Birkhauser.

[11] **Cordero, A.L., Fernandez, M. and Leon, M.** 1985. Examples of compact non-Kähler almost Kähler manifolds, *Proc. Am. Math. Soc.,* 95, 282–286.

[12] **Calvaruso, G. and Marinosci, R.,** 2006. Homogeneous geodesics of three-dimensional unimodular Lorentzian Lie groups, *Mediterranean, J. Math.*, 3 (3–4), 467–481.

[13] **Chen, Q. and Qui, H.**, 2010. Weierstrass Representation for Surfaces in the Three-Dimensional Heisenberg Group, *Chin. Ann. Math.*31B(1), 119–132.

[14] **Draghici, T.,** 1995. On some 4-dimensional almost Kähler manifolds, *Kodai Math. J.,* 18, 156–163.

[15] **Draghici, T.**, 1999. Almost Kähler 4-manifolds with J-invariant Ricci tensor, *Houston J. Math.,* 25, 133–145.

[16] **Gray, A.,** 1976. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds, *Tohoku Math. J.,* 28, 601–612.

[17] **Kaplan, A.** 1981. Riemannian nilmanifolds attached to Clifford modules, *Geom. Ded.,* 11. 127-136.

[18] **Kutsal, B.,** 2005 İstisnai Lie gruplarının self homotopi gruplarının demeti, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[19] **Hacısalihoğlu, H. H.,** 1980. Yüksek Diferensiyel geometriye Giriş, İstanbul.

[20] **Helgason, S.,** 1978. Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces. Academic Press.

[21] **Kobayashi, S. and Nomizu, K.,** 1963. Foundations of differential geometry, I. Wiley– Interscience.

[22] **Kobayashi, S. and Nomizu, K., 1969.** Foundations of differential geometry, II. Wiley– Interscience.

[23] **Milnor, J.,** 1976. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.,* 21 (3), 293–329.

[24] **O'Neill, B.,** 1983. Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York.

[25] **Rahmani, N. and Rahmani, S.,** 1994. Structures homogenes Lorentziennes sur le groupe de Heisenberg I, *J. Geom. Phys.* 13, 254-258.

[26] **Rahmani, N. and Rahmani, S.,** 2006. Lorentzian Geometry of the Heisenberg group, *Geom. Dedicata,* 118, 133–140.

[27] **Sagle, A.A. and Walde, R.E.,** 1973. Introduction to Lie Groups and Lie Algebras, Academic Press, New York.

[28] **Tricerri, F. and Vanhecke, L.,** 1981. Curvature tensors on almost Hermitian manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc,* 267, 365–398.

[29] **Turhan, E.,** 1997. The curvature properties of some complex Lie groups, Ph. D. Thesis, Fırat University.

[30] **Vezzoni, L.,** 2007. On the Hermitian curvature of symplectic manifolds, *Adv. Geom.,* 7, 207–214.

[31] **Warner, F.W.**, 1971. Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois.

[32] **Weyl, H.,** 1997. The classical groups. Their invariants and representations, Princeton Univ. Press.

[33] **Yano, K.,** 1965. Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces, New York, Pergamon Press.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Sivas'da doğmuşum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Sivas'da tamamladım. 1999 yılında Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 2003 yılında Matematik Bölümünden mezun oldum. 2006 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladım. 2009 yılında yüksek lisansı tamamladım. 2009 yılında Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktoraya başladım. Fırat Üniversitesi Rektörlüğünde memur olarak görev yapmakta olup evli ve bir çocuk babasıyım.