

**T.C.
SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KEMER VE KUBBE GEOMETRİSİNİN İTERATİF FÜNİKÜLER
ANALİZİ İLE OPTİMİZASYONU**

Osman KELLE

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa TÜRKMEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
ISPARTA – 2012**

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	i
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	vii
SİMGELER DİZİNİ	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
TABLolar DİZİNİ	xii
1. GİRİŞ	1
1.1. Kağır Kemer	1
1.2. Kağır Kubbe	3
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
2.1. Mohrmann Tablosu	5
2.2. Wolf Metodu	5
2.3. Membran Teorisi	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	10
3.1. Füniküler Eğrisi ve Füniküler Poligonu	10
3.2. Füniküler Poligonunun İşlevi	12
3.3. İp Probleminden Kemere Geçiş	15
4. KEMER GEOMETRİSİ OPTİMİZASYONU	17
4.1. Kağır Kemer Hesaplarında Kullanılan Varsayımlar	17
4.2. Göçme Mekanizması	20
4.3. Güvenlik Faktörü	21
4.3.1. Mevcut kemer analizi	24
4.4. Kemer Geometrisi Optimizasyon Hiyerarşisi	28
4.4.1. Optimum Füniküler Eğrisinin Bulunması	28
4.4.2. Mesnetleri Ordinatları Farklı Optimum Füniküler Eğrisinin Bulunması	32
4.4.3. Mesnet Noktaları Farklı Olan Kemer Optimizasyonu	39
4.5. Taşıyıcı Kemer Kalınlığının Belirlenmesi	44
4.6. Mevcut Kemer Köprünün Tasarım Yüküne Göre Güvenlik Faktörünün Bulunması	55
5. KUBBE GEOMETRİSİ OPTİMİZASYONU	59
5.1. Kubbenin Yapısal Özellikleri	59
5.2. Füniküler Analiz Yönteminin Kubbeye Uygulanması	60
5.3. Kubbe Probleminin İki Boyuta İndirgenmesi	62
5.3.1. Kubbe Taşlarının Ağırlık Merkezlerinin Bulunması:	64
5.3.2. Kubbe Taş Alanlarının Bulunması:	65
5.3.3. Çember Kuvvetlerinin Bulunması	65
5.4. Optimizasyonda Kullanılacak Metodun Membran Teorisiyle Karşılaştırılması	66
5.5. Kubbe Geometrisi Optimizasyonu	73
5.6. Füniküler Analiz metodunun Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Karşılaştırılması (Membran)	80
6. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	86
7. SONUÇ	88

KAYNAKLAR	90
ÖZGEÇMİŞ	91

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KEMER VE KUBBE GEOMETRİSİNİN İTERATİF FÜNİKÜLER ANALİZİ İLE OPTİMİZASYONU

Osman KELLE

Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mustafa TÜRKMEN

Bu tez çalışmasında kagir yapıların temel yapısal elemanları olan kemer ve kubbe geometrisinin belirli yükler altında optimizasyonu yapılmıştır. İteratif füniküler analiz metodu ile yeni tasarımlar yapılacağı gibi mevcut kemer ve kubbenin de üzerindeki statik yükler sonucu oluşan füniküler eğrileri bulunabilmekte ve statik denge durumu, güvenlik faktörü tespit edilebilmektedir. Optimizasyonda kemer ve kubbenin merkez hattını temsil eden füniküler eğrileri kullanılmıştır.

Yol geometrisine bağlı hesaplanan ve buna benzer yükler altında açıklık, yükseklik, mesnet farkı gibi temel özellikleri bilinen kemer optimizasyonu yapılmıştır. Mesnet noktaları arasında tahmini başlangıç füniküler eğrisi çizilip, bu eğri ile yol arasındaki statik yükler dilimler halinde füniküler eğrisine etkililir. Bu yükler altında oluşan, tepe noktası belirlenen seviyede olmasını sağlayan yatay tepki kuvveti bölüm 4.4.1'deki metotla bulunur. Bulunan füniküler eğrisi ile yol arasındaki yeniden şekillenen yükler altında aynı metotla yeni bir füniküler eğrisi bulunur. İteratif bir metotla bulunan füniküler eğrileri belirli bir aşamadan sonra sabitleşecektir. Bulunan bu son füniküler eğrisi o yükler altındaki optimum kemerin merkez hattını verecektir. Ölü yükler altında optimize edilmiş kemerin kalınlığı, tasarım hareket yükü ve güvenlik faktörüne göre bölüm 4.5'te belirlenmiştir.

Kubbe optimizasyonunda ise çember ve meridyen kuvvetleri taşların ağırlık merkezinden birbirlerine etkililip üç boyutlu bir füniküler eğri ağı elde edilir. Bölüm 5.3'te ki metotla problem 2 boyuta indirgenip çember kuvvetine karşılık gelen

denklemleri maksimize etmek için “MATLAB Optimization Toolbox” kullanılmıştır. Kullanılan metodun geçerliliğini sınamak için, küresel kubbe üzerinde uygulanıp membran teorisiyle sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kemer optimizasyonu, kubbe optimizasyonu, füniküler analiz, füniküler eğrisi, füniküler poligonu

2012, 91 sayfa

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

OPTIMIZATION OF ARCH AND DOME GEOMETRY USING ITERATIVE FUNICULAR ANALYSIS

Osman KELLE

**Süleyman Demirel University
Graduate School of Applied and Natural Sciences
Civil Engineering Department**

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Mustafa TÜRKMEN

In this thesis being a major structural component of masonry structure, arch and dome are optimized under external loads. By using iterative funicular analysis one can find funicular shapes of arch and dome under given loading and determine the statical condition, safety factors besides optimizing and designing new arch or dome. In optimization the center line of arch and dome is used as funicular shape.

Under given loading, the arch geometry is optimized with given parameter such as span length, height and support difference. A straight line is drawn between arch supports, the loads that comes from the fill between the road and funicular shape are calculated and applied to the funicular shape as slices. Using the method in section 4.4.1 the required thrust force that gives the required funicular shape is found. With new funicular shape the loads are re-calculated and the new funicular shape is found. This iterative process is continued until the funicular shape is fixed. That last funicular shape is the center line of optimum arch under that loading. The thickness of that optimized arch is determined according to design live load and factor of safety. That process is explained in section 4.5.

As for the dome geometry optimization, the meridional and hoop forces are applied to the center of gravity of each stone. This yields the 3-D funicular shape. With the method in section 5.3 problem is reduced to 2-D. Using the “MATLAB Optimization Toolbox” the optimum dome profile is found which makes the hoop forces

maximum in compression. This method is tested on hemispherical dome and compared to the membrane theory.

Key Words: Arch optimization, dome optimization, iterative funicular analysis, funicular polygon

2012, 91 pages

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezini hazırlamamı sağlayan etkin araştırma tekniğini bana kazandırdığı için lisans eğitimindeki hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim. Yine bu tezin teorik kısmını geliştirip sınamak için gerekli olan bilgisayar programlama tekniklerini öğreten; C, MATLAB gibi programları etkin bir şekilde kullanabilmemi sağlayan Orta Doğu Teknik Üniversitesi'ne ve değerli hocalarına ve Süleyman Demirel Üniversitesi'ndeki değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Mustafa TÜRKMEN'e teşekkürü bir borç bilirim.

SİMGELER DİZİNİ

R	Reaksiyon kuvveti
H	Kemer yatay itki kuvveti, kubbe çember kuvveti
H_b	Birim uzunluğa etki eden çember kuvveti, çember gerilmesi
σ	Gerilme
M	Moment
I	Atalet momenti
e	Eksentrisite
d	Füniküler eğrisi tepe nokta ordinatı
θ	Küresel kubbe çember açısı
Φ	Küresel kubbe meridyen açısı
α	Kubbe birim halka açısı
A	Kubbe taş alanları
qx	Kubbe taşları tepe nokta apsisleri
qy	Kubbe taşları tepe nokta ordinatları
cx	Kubbe taşları ağırlık merkezi apsisleri
cy	Kubbe taşları ağırlık merkezi ordinatları
a_i	Kubbe taşları üst kenar uzunlukları
b_i	Kubbe taşları alt kenar uzunlukları
l_i	Kubbe planı üzerinde ki eğim için gerekli uzunluklar
w	Küresel kubbe birim alan ağırlığı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Kemere ait tanımlar.....	1
Şekil 1.2 Edwards'ın günümüze ulaşan 4. köprüsü	3
Şekil 1.3 Kubbedeki içi kuvvetler.....	4
Şekil 1.4 Küresel kubbede ki çekme çatlakları	4
Şekil 2.1 Mohrmann tablosu	5
Şekil 2.2 Wolf Metodu.....	6
Şekil 2.3 Membran teorisine göre kabuk eleman üzerindeki küçük parçanın dengesi (Heyman 1977)	7
Şekil 2.4 Küresel kubbede çember kuvvetinin meridyen açısına göre değişimi.....	9
Şekil 2.5 Küresel kesik kubbe üzerinde çember kuvvetlerinin dağılımı.....	9
Şekil 3.1 Düşey Kuvvet Sistemi	10
Şekil 3.2 Belirli bir H değerine göre çizilmiş funiküler eğrisi.....	11
Şekil 3.3 T_1 ve T_2 ip parçalarının eğimlerin bulunuşu.....	11
Şekil 3.4 Funiküler Poligonu	12
Şekil 3.5 "O" Poligonun yatay yönde yer değiştirmesiyle oluşan yeni funiküler poligonu ve funiküler eğrisi	13
Şekil 3.6 Her iki sistemde A noktasında ki kuvvetler dengesi.....	13
Şekil 3.7 "O" Poligonun düşey yönde yer değiştirmesiyle oluşan yeni funiküler poligonu ve poligona bağlı funiküler eğrisi	14
Şekil 3.8 Basınç kuvvetlerinin etkisindeki funiküler eğrisi ve funiküler poligonu....	16
Şekil 3.9 F_1, F_2, F_3 Kuvvetlerinin etkisindeki funiküler eğrisinin iki yönde ötelenmesiyle oluşturulan optimum kemer.....	16
Şekil 4.1. 5 eşit kuvvet etkisindeki kemer ve funiküler eğrisi	18
Şekil 4.2 Yeni kuvvet sistemi altındaki kemer ve funiküler eğrisi	19
Şekil 4.3 İkinci kuvveti $6F$ çıkarılan kemer ve funiküler eğrisi.....	20
Şekil 4.4 İkinci kuvvetin maksimum değeri $9.5 F$ ve bu yük altında oluşan funiküler eğrisi.....	21
Şekil 4.5 Göçme mekanizmasının oluşumu	21
Şekil 4.6 Eksentrisite ile birlikte değişen tepki kuvvetleri.....	22
Şekil 4.7 Üçlü ortası kuralının gösterimi	23
Şekil 4.8 Kemerdeki güvenlik faktörünün gösterimi	23
Şekil 4.9 Güvenlik faktörü 3 olan kemer ve funiküler eğrisi.....	24
Şekil 4.10 Taşıyıcı kemer ve üzerindeki dolgu malzemesi.....	24
Şekil 4.11 Mevcut kemerin dolgu malzemesinden gelen yüklerin 10 eşit parça olarak taşıyıcı kemere etki ettirilmesi.	25
Şekil 4.12 Mevcut yükler altında sadece H tepki kuvvetinin değiştirilmesiyle elde edilen 3 funiküler eğrisi. Çizilen funiküler eğrilerinin hiç biri kemer içerisinden geçememektedir.....	26
Şekil 4.13 Mevcut yükler altında H tepki kuvvetinin ve reaksiyon kuvvetleri ordinatlarının değiştirilmesiyle elde edilen 3 funiküler eğrisi.	27
Şekil 4.14 Funiküler eğrisinin A noktasındaki düşey yer değiştirmesi.....	27
Şekil 4.15. F_1, F_2, F_3 Kuvvetlerinin etkisindeki sistem. b)reaksiyon kuvvetleri ve dış kuvvetlere göre kesme kuvveti diyagramı c) tepe noktasının ordinatı d olan funiküler eğrisi	29
Şekil 4.16 Funiküler eğrisinin $ AB $ ve $ BC $ parçaları	30

Şekil 4.17 F_1, F_2, F_3 kuvvetlerinin etkisindeki kuvvet sistemi.....	31
Şekil 4.18 Füniküler eğrisinin tepe noktası olan C noktasının ordinatını $5x$ yapan H değeri ve bu değere göre çizilen füniküler eğrisi.....	32
Şekil 4.19 Mesnetleri arasında kot farkı olan kemer başlangıç füniküler eğrisi.....	33
Şekil 4.20 $2x$ uzunluğunda mesnet farkı olan tepe noktasının ordinatı $5x$ olan füniküler eğrisi.....	35
Şekil 4.21 sabit bir yol altında mesnet noktaları belli tepe noktası $4x$ olması istenen optimum kemer geometrisi problemi.....	36
Şekil 4.22 1. İterasyon sonucu hesaplanmış füniküler eğrisi.....	37
Şekil 4.23 2. İterasyon sonucu hesaplanmış füniküler eğrisi.....	37
Şekil 4.24 3. İterasyon sonucu hesaplanmış füniküler eğrisi.....	38
Şekil 4.25 4. İterasyon sonucu hesaplanmış füniküler eğrisi.....	38
Şekil 4.26 Mesnet nokta ordinatları farklı füniküler eğrisi ve yol.....	40
Şekil 4.27 Birinci optimizasyon sonucu oluşan füniküler eğrisi.....	41
Şekil 4.28 İkinci iterasyon sonucu oluşan füniküler eğrisi.....	42
Şekil 4.29 Üçüncü iterasyon sonucu oluşan füniküler eğrisi.....	43
Şekil 4.30 Optimum füniküler eğrisi.....	43
Şekil 4.31 Optimize edilmiş füniküler eğrisinin ötelenmesiyle oluşan kemer.....	44
Şekil 4.32 B noktasına etkitilen hareketli yük ve oluşan füniküler eğrisi.....	45
Şekil 4.33 C noktasına etkitilen hareketli yük ve oluşan füniküler eğrisi.....	46
Şekil 4.34 D noktasına etkitilen hareketli yük ve oluşan füniküler eğrisi.....	47
Şekil 4.35 E noktasına etkitilen hareketli yük ve oluşan füniküler eğrisi.....	48
Şekil 4.36 F noktasına etkitilen hareketli yük ve oluşan füniküler eğrisi.....	49
Şekil 4.37 H20-44 kamyon yük dağılımı.....	50
Şekil 4.38 Hareketli yük ve kemerin hesap kesiti.....	50
Şekil 4.39 Kemer merkez hattının bulunuşu.....	51
Şekil 4.40 Hareketli yükün etkitilmesi ve kemerin hesap dilimleri.....	51
Şekil 4.41 Güvenlik Faktörünün 1 olduğu kemer kalınlığı ve kritik durumu.....	53
Şekil 4.42 Güvenlik faktörünün 3 olduğu kemer kalınlığı ve kritik durumu.....	54
Şekil 4.43 Malabadi Köprüsü.....	55
Şekil 4.44 Köprünün Hesap Kesiti.....	56
Şekil 4.45 Malabadi Köprüsünün ön ve kesit görünüşü.....	56
Şekil 4.46 Köprünün 1 m.'lik dilimlere ayrılması.....	57
Şekil 4.47 Kritik yükleme ve füniküler eğrisi.....	58
Şekil 5.1 Kubbe parametrik tanımını için gerekli θ ve Φ açıları.....	59
Şekil 5.2 Kubbede oluşan meridyen ve çember kuvvetleri.....	59
Şekil 5.3 Taşları şaşırtmalı biçimde yerleştirilmiş bir kubbenin plan ve görünüşü... ..	60
Şekil 5.4 Kubbenin bir parçasına etki eden kuvvetlerin plan görünüşü ve detayı.....	61
Şekil 5.5 Kubbe taşına etki eden kuvvetler.....	61
Şekil 5.6 Füniküler analizde kullanılacak koordinat sistemi.....	62
Şekil 5.7 Kubbe taşına etki eden çember kuvvetlerinin bileşkesi.....	63
Şekil 5.8 Kubbe optimizasyonunda kullanılacak parametreler.....	63
Şekil 5.9 Kubbe taşlarının parametreleri.....	64
Şekil 5.10 Taş alanlarının bulunması.....	65
Şekil 5.11 3 boyutlu füniküler eğri hattı.....	65
Şekil 5.12 Düğüm noktası detayı.....	66
Şekil 5.13 Küresel kubbenin düşey dilimlere ayrılması.....	68
Şekil 5.14 Taşların ağırlık merkezi ve füniküler hattı.....	69

Şekil 5.15 Taşların alt ve üst uzunlukları.....	70
Şekil 5.16 Eğim için kullanılacak plan uzunlukları	70
Şekil 5.17 Küresel kubbede ki Φ açısı	72
Şekil 5.18 Membran teorisi ile föniküler analiz karşılaştırması	72
Şekil 5.19 1000 açısai,100 meridyenel dilime bölünmüş küresel kubbenin membran teorisi ve föniküler analiz sonuçlarının karşılaştırılması	73
Şekil 5.20 Optimizasyon sürecinde 11 iterasyona karşılık gelen kubbe kesiti koordinatları.....	78
Şekil 5.21 Optimize edilmiş kubbenin kesiti	79
Şekil 5.22 Sabit açıklıklı 20 farklı yüksekliğe ait optimum kubbe kesitleri	80
Şekil 5.23 Optimize edilmiş kubbenin kesiti	81
Şekil 5.24 Global ve uyarlanmış koordinat sistemleri	82
Şekil 5.25 Global ve uyarlanmış koordinat sistemi ve mesnet şartları	83
Şekil 5.26 Membran kubbe analiz sonucu gerilme dağılımı.....	83
Şekil 5.27 Membran ve föniküler analiz sonuçlarının grafiksel gösterimi	84
Şekil 7.1 Küresel kubbe föniküler analiz ve membran metodu karşılaştırması.....	89

TABLÖLAR DİZİNİ

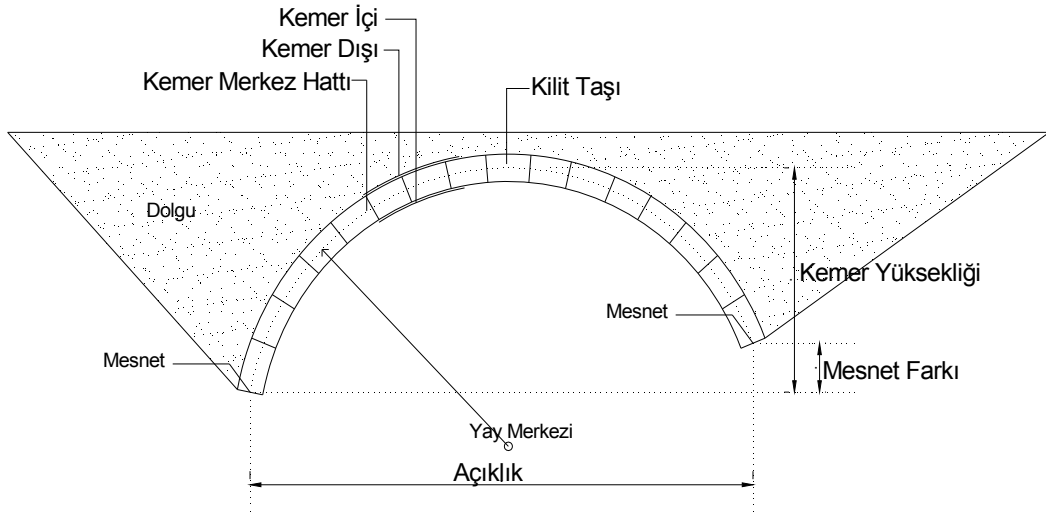
Tablo 5.1 Membran ve Füniküler Analize göre bulunan çember kuvvetleri.....	84
--	----

1. GİRİŞ

Betonarme, çelik gibi çekme kuvvetini ve momenti etkin şekilde karşılayabilen yapı tekniklerinin olmadığı dönemlerde sadece basınç kuvvetleriyle çalışabilecek açıklık geçme ve mekan örtü sistemleri geliştirilmiştir. Bu bağlamda tarihi kagir yapıların vazgeçilmez iki taşıyıcı unsuru kagir kemer ve kubbedir. Bu tezde kagir kemer ve kubbenin belirli yükler altındaki geometrik optimizasyonu yapılacaktır.

1.1. Kagir Kemer

Kagir kemer, taşların veya tuğlaların geçici eğri bir kalıp üzerine harç gibi yapıştırıcı bir malzemeyle birleştirilmesiyle oluşan açıklık geçme sistemidir. Kemerler genellikle köprülerde görüldüğü gibi diğer yapılarda da açıklık geçmek için kullanılmıştır. Ayrıca kemerler ayak, sütun gibi iki tekil eleman üzerinde de yer almıştır. Yapılardaki pencere kapı boşluğu gibi küçük açıklıklar blok taşlar, lentolarda geçilebildiği gibi kemerle de geçilmiştir. Şekil 1.1'de kemere ait tanımlamalar yer almaktadır.



Şekil 1.1 Kemere ait tanımlar

Kemerin yan yana gelmesiyle oluşan mekan örtü sistemine tonoz denmektedir. Bu tezde tonoz yerine kemer kullanılmasının nedeni tonozun birim kemerlerden oluşmasıdır.

Kagir kemerler tarih boyunca uygulanmıştır, fakat günümüze ulaşabilen şanslı kemer köprülerin dışında daha yapım aşamasında veya yapımından bir süre sonra yıkılan çok sayıda kemer köprü vardır. Bu kemerler yapım kolaylığı, tecrübe gibi unsurların birleşmesiyle yapılmış olup deneme yanılma yönteminden başarıyla çıkabilen köprüler günümüze ulaşabilmiştir. J. Heyman (1982) bu durumu gerçek bir örnekle açıklamıştır:

“1746’da taş ustası William Edwards 500£ karşılığında Taff nehri üzerine bir köprü yapmayı taahhüt etti. İlk köprü 3 veya 4 açıklıklı olan, 2 ay 2 gün ayakta kalabilen köprüydü. Köprünün en azından bir ayağı nehrin içindeydi ve selin temeli aşındırmasıyla köprü yıkıldı. Kontratı yerine getirmek zorunda olan Edward bu sefer 7 yıl ayakta kalacak olan 42 m. üzerinde tek açıklıklı kemer köprüyü yaptı. Bu köprü tamamlanmak üzereyken ya üzerindeki kemerin ağırlığından ya da selin etkisiyle ahşap kalıp çöktü. Üçüncü köprü 1754’te daha dayanıklı kalıp üzerine daha hafif kagir olacak şekilde yapıldı. Kemer eylül ayında tamamlanıp kalıp kaldırıldı ve üst duvar ve yol işlemleri devam etti. Bu çalışmalar devam ederken kasım ayında köprü kilit taşının yukarıya doğru zorlanmasıyla köprü yıkıldı. Hatanın kemer mesnetlerinde ya da aşırı yüklemekten değil, köprünün kendi ağırlığını bile taşıyamayan yanlış geometrisinden olduğu açıktı. Edwards sonunda hatasını anlayıp hala ayakta olan 4. Köprüsünü yapmıştı. Kilit taşı üzerindeki yükü artırıp kenarlarda ise silindirik boşluklarla yükü azalttı. Yani kemer 760 mm.’lik çita kısmıyla ve biraz daha kalın gövdesiyle çok narindi“(J. Heyman,1982).



Şekil 1.2 Edwards'ın günümüze ulaşan 4. Köprüsü (Heyman, 1982)

3. Köprü'nün çökmesi malzemenin aşırı yüklenmesi değil, yanlış geometriydi. Yani problem modern yapı teorisi olan 'gerilme-şekil değiştirme' problemi değildi. Bu tezin amacı başta geometri olmak üzere günümüz analiz tekniklerini kullanarak optimum kemer geometrisini bulmaktır.

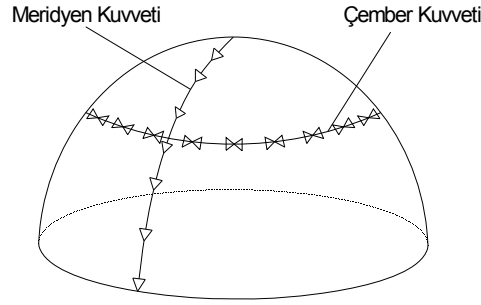
Şekil 1.2 de görüldüğü gibi günümüze ulaşan Edwards'ın 4. Köprüsü yarım çemberin bir parçasını teşkil etmektedir. Bunun nedeni kemer inşasında geometriyi kolayca elde edebilmektir. Çember merkezine sabitlenmiş yarıçapı belli bir ip ile kolaylıkla istenilen geometri elde edilebilmektedir. Fakat bulunan bu geometri köprü için optimum geometri olmadığı açıktır. Bu geometri ile köprüyü ayakta tutabilmek için Edwards bazı kagir köprülerde de uygulanan yöntemlere başvurmuştur. Bu yöntem kemerin iki yakasında pencere boşlukları açarak yükleri azaltıp funiküler eğrisinin kemer içerisinden geçmesini sağlamaktır. (Funiküler eğrisi bölüm 3.1 de açıklanacaktır.)

Bu tezde deneme yanılma yöntemiyle bulunmaya çalışılan optimum kemer geometrileri, iteratif funiküler analiz metodunu kullanarak analitik olarak saptanacaktır.

1.2. Kagir Kubbe

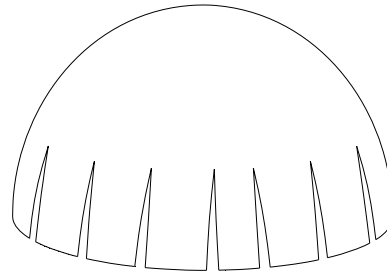
Kubbe simetrik bir eğrinin simetri aksı etrafında döndürülmesiyle oluşan mekan örtü sistemidir. Kagir kubbe kemerde olduğu gibi geçici bir kalıp üzerine kubbeyi

oluşturan taşların harçla yapıştirılmasıyla oluşur. Kemerde olduğu gibi kubbede üzerindeki yükler mesnete iletir. Kemerden farklı olarak kubbelerde iki çeşit kuvvet oluşmaktadır. Kubbe tepesinden başlayıp mesnete kadar artarak devam eden meridyen kuvvetlerinin yanı sıra meridyen kuvvetlerine dik çember kuvvetleri oluşmaktadır.



Şekil 1.3 Kubbedeki içi kuvvetler

Kemerde olduğu gibi kubbe inşasında da kolay geometriler kullanılagelmiştir. En yaygın kubbe geometrisi kesiti yarım çember şeklinde olan küresel kubbedir. Küresel kubbede çember kuvvetlerinin bir seviyeden aşağısında basınç kuvvetinden çekmeye geçtiği için çatlaklar görülmekte, yapısal problemler ortaya çıkmaktaydı. Bu problemi aşmak için kubbe tam yarım çember şeklinde yapılmayıp belli bir seviyede kesilmiştir, yani daha basık kubbe elde edilmiştir.



Şekil 1.4 Küresel kubbede ki çekme çatlakları

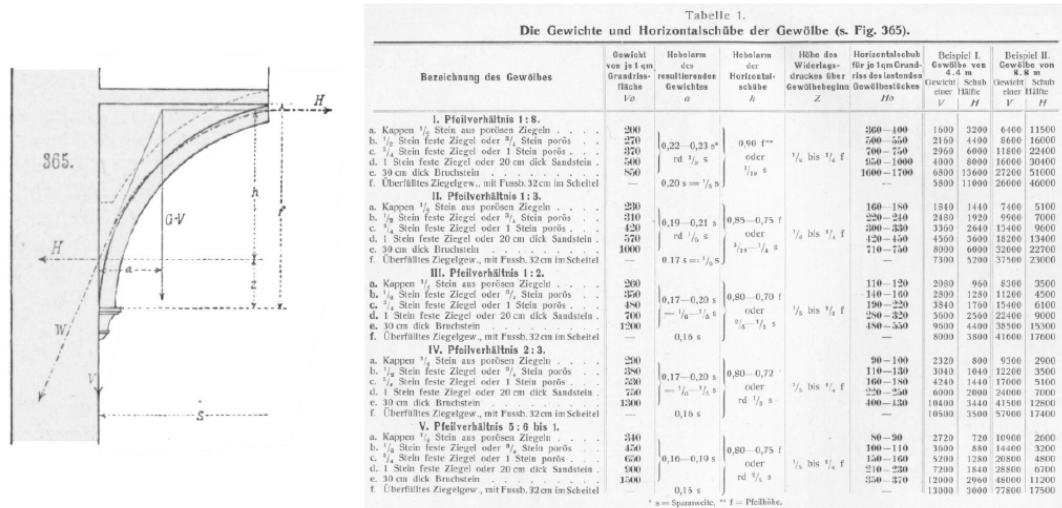
Bu tezde istenilen açıklık ve yüksekliğe sahip optimum kubbe geometrisi elde edilmiştir. Kemer optimizasyonunda kullanılan füniküler analiz metodu kubbeye uygulanmıştır. 3 boyutlu füniküler eğri ağı elde edilip bu ağ kubbenin simetri özelliğinden faydalanılarak 2 boyuta indirgenmiştir. Daha sonra çember kuvvetlerini maksimum değerinde basınç kuvveti yapabilmek amacıyla optimizasyon yapılmıştır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Bu bölümde kagir yapıların analizinde ve tasarımda kullanılagelmiş metotlar anlatılacaktır.

2.1. Mohrmann Tablosu

“Manual of Gothic Construction” (Ungewitter,1890) adlı kitapta Prof. Mohrmann’a ait belirli birkaç parametreye bağlı olarak yatay itki kuvvetini veren tablolar mevcuttur. Bu tablolar sayesinde hızlı bir şekilde kemer mesnetlerinde oluşacak yatay itki kuvveti tahmin edilebilmekteydi. Fakat belirli geometrideki sınırlı elemanlar için kullanılabilmekteydi. Bu tablo şekil 1.4 te gözükmektedir.

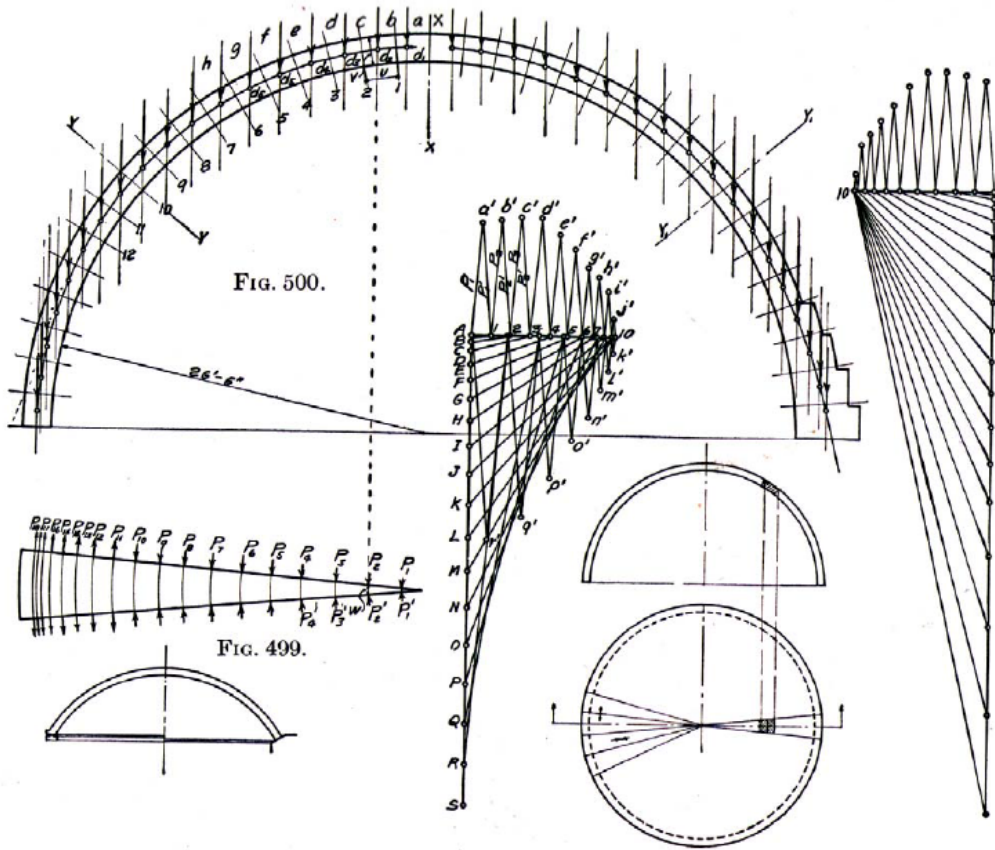


Şekil 2.1 Mohrmann tablosu (Block,2009)

2.2. Wolf Metodu

Wolfe kubbeyi düşey dilimler halinde analiz etmiştir. Bu dilimlere etki eden iç kuvvetleri ölçekli biçimde kuvvet poligonuna yerleştirmiştir. Kubbe dilimini a,b,c...,x diye adlandırdığı eşit uzunluklara bölmüştür. Kubbe dilimi tabana doğru genişlediği için dilimlerin ağırlığı tabana doğru gittikçe artmaktadır. Kubbenin sadece ölü yükü altında olduğunu varsayarak her bir taşta 5 adet kuvvet etkimektedir: taş ağırlığı, alt ve üst kısmında basınca çalışan meridyen kuvvetleri ve kubbe

dilimine dik çember kuvvetleri. Her bir taşın ağırlığı belirlenir. Bu ağırlıklar noktasal yük olarak her bir bölümün ağırlık merkezine etki ettirilir. Bu kuvvetler yardımıyla kuvvet poligonunun düşey çizgileri AB,BC... şeklinde ölçekli olarak çizilir. (Wolfe 1921,p.251). Bu kuvvet poligonu yardımıyla mevcut kubbedeki meridyen ve çember kuvvetlerini bulmayı amaçlamıştır. Fakat kagir kubbede taşların şaşırtmalı dizilimi göz önüne alınırsa dilim şeklindeki parçayı analiz etmek gerçeği tam olarak yansıtmamaktadır.



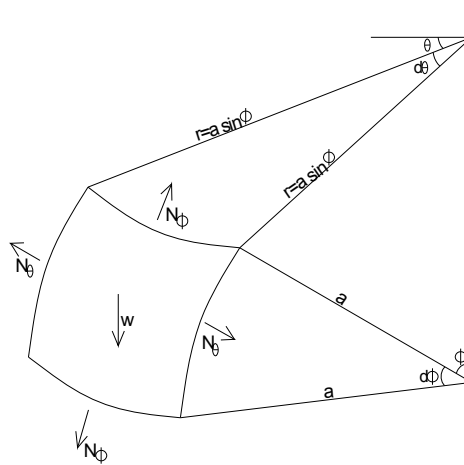
Şekil 2.2 Wolf Metodu (Block, 2009)

2.3. Membran Teorisi

Johann Schwedler tarafından 1866 yılında bulunan membran teorisi kabuklu yapıların analizinde kullanılır. Kubbede bir kabuk elemanın membran teorisiyle meridyen ve çember gerilmeleri bulunabilir. Membran teorisinin dört adet varsayımı vardır.

1. Membran elemanına uygulanan kuvvetler eğilme direnci olmayan kabuk tarafından, sadece çekme veya basınç kuvveti olarak taşınabilir.
2. Simetrik ve düzgün yüklenmiş kubbeye iç kuvvetler birbirine dik yöndedir. (Meridyen ve çember kuvvetleri)
3. İç kuvvetler ko-planardır yani membranın kalınlığı yoktur.
4. Membran plakası kubbenin kalınlığının merkezinden geçer buna orta yüzey denir.

Membran teorisi ile bir kabuk elemanı analiz edilirken, çok küçük bir parçanın denge denklemleri yazılarak istenilen gerilmeler bulunmaya çalışılır. Bu bölümde membran teorisine göre küresel kubbenin membran ve çember kuvvetlerini kubbe yarıçapı, birim alana etki eden kuvvete karşılık gelen w , kubbeye herhangi bir noktanın merkeze göre parametrik noktasını gösteren Φ ve θ açıları ile gösterilecektir.



Şekil 2.3 Membran teorisine göre kabuk eleman üzerindeki küçük parçanın dengesi (Heyman 1977)

Membran durumunun geçerli olması için aşağıdaki koşulların sağlanması lazımdır:

1. Kabuk orta yüzey eğriliğinin sürekli ve düzgün olması,
2. Kabuk rijitliğinin değişimin sürekli ve yavaş olması,
3. Dış yükün değişimin sürekli ve yavaş olması,
4. Kabuğa büyük tekil yüklerin etkimesinin önlenmesi,
5. Mesnetlendirmenin sürekli olması,
6. Mesnetlendirmede kabuğun deformasyonuna yol açacak rijit bağlantıların yapılmaması.

Meridyen kuvveti N_θ ile plan üzerindeki yarıçap olan $a * \sin\theta$ değerleri θ açısına göre artış gösterir. Bu artışın birim miktarı $\frac{d}{d\theta} N_\theta r d\theta d\theta$ kadardır. Çember kuvvetleri elemanın uçlarına dik yönde etki etmektedir. Bu küçük parçadaki denge denklemleri yazılırsa (Heyman 1977):

Kabuk eleman düzleminde denge denklemi:

$$\frac{d}{d\theta} (N_\theta r) d\theta d\theta - N_\theta a d\theta d\theta \cos \theta = -w r d\theta a d\theta \sin \theta \quad (2.1)$$

Yarıçap r yerine $a \sin \theta$ konursa:

$$\frac{d}{d\theta} (N_\theta \sin \theta) - N_\theta \cos \theta = -w a \sin^2 \theta \quad (2.1)$$

Kabuk elemanının düzlemine dik yöndeki denge denklemi:

$$(N_\theta r d\theta) d\theta + N_\theta a d\theta d\theta \sin \theta = -w r d\theta a d\theta \cos \theta \quad (2.2)$$

Yarıçap r yerine $a \sin \theta$ konursa:

$$N_\theta + N_\theta = -w a \cos \theta \quad (2.3)$$

Denklem 2.1 ve 2.3 ün birlikte çözümünden N_θ bulunur:

$$N_\theta = -\frac{w a (\cos \theta + C)}{\sin^2 \theta} \quad (2.4)$$

Denklem 2.4 i $\theta=0^\circ$ değeri tanımsız yapmaktadır. Onun için integral sabitinin -1 olması lazım. Bu durumda meridyen kuvveti denklem 2.5 da ki gibi bulunur.

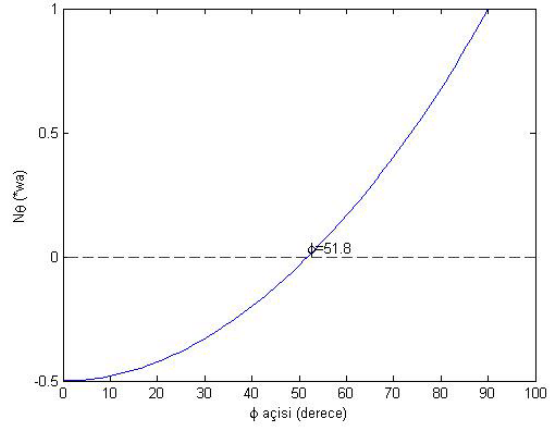
$$N_\theta = -\frac{w a}{1 + \cos \theta} \quad (2.5)$$

Denklem 2.3 den çember kuvveti N_θ bulunur:

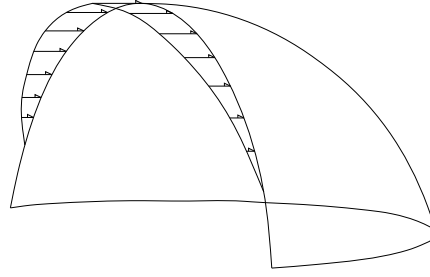
$$N_\theta = w a \left[\frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right] \quad (2.6)$$

Denklem 2.6 incelenirse $\theta=51.8^\circ$ de çember kuvvetinin işaret değiştirdiği görülür. Yani küresel kubbede $\theta=51.8$ den sonra çember kuvvetleri çekme kuvvetine

gececektir. Küresel kagir kubbelerde çekme kuvveti taşınamayacağı kubbe altlarında çatlaklar görülmektedir.



Şekil 2.4 Küresel kubbeye çember kuvvetinin meridyen açısına göre değişimi



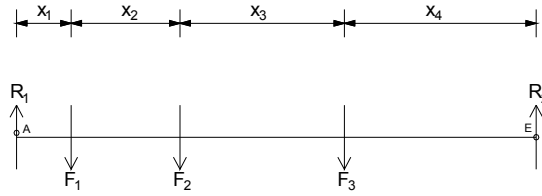
Şekil 2.5 Küresel kesik kubbe üzerinde çember kuvvetlerinin dağılımı

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Kemer ve kubbe geometrisi optimizasyonunda kullanılacak ana metot fönüküler analiz metodudur. Bu metot genellikle mevcut yapıların analizinde kullanılmıştır. Bu bölümde fönüküler analiz metodunun tarifi ve uygulanması anlatılacaktır. Sonraki bölümlerde ise optimizasyon için gerekli değışiklikler ve metotlar gösterilecektir.

3.1. Fönüküler Eğrisi ve Fönüküler Poligonu

Kâgir kemerlerin analizinde kullanılan fönüküler eğrisi, kuvvetler dengesinin geometrik olarak gösterimidir. Fönüküler eğrisinin oluşturulması şekil 3.1'deki örnekle açıklanabilir.



Şekil 3.1 Düşey Kuvvet Sistemi

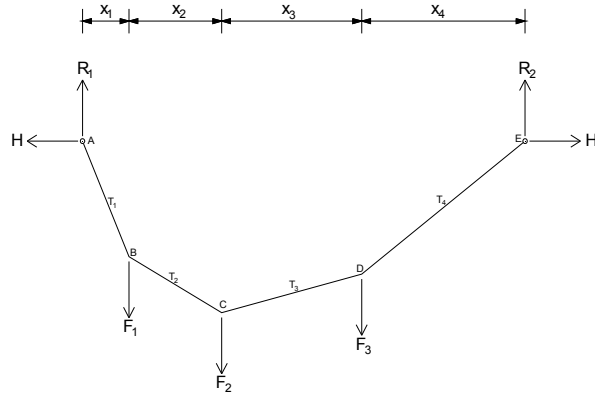
Şekil 1.1 de F_1 F_2 F_3 kuvvetleriyle buna karşı koyan R_1 ve R_2 tepki kuvvetleri gözükmektedir. Sistem dengesinden düşey kuvvet eşitliği yazılır:

$$R_1 + R_2 = F_1 + F_2 + F_3 \quad (3.1)$$

Reaksiyon kuvvetlerinin bulunabilmesi için ikinci bir denkleme ihtiyaç vardır. Bu ikinci denklem ise herhangi bir noktaya göre moment eşitliği olacaktır. A noktasına göre moment denklemi yazılır:

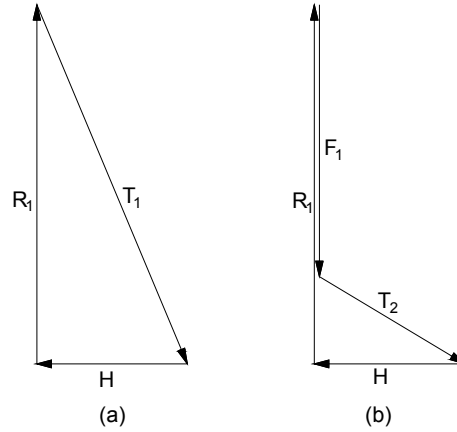
$$F_1 * x_1 + F_2 * (x_1 + x_2) + F_3 * (x_1 + x_2 + x_3) = R_2 * (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \quad (3.2)$$

Denklem 3.1 ve 3.2'nin ortak çözümünden R_1 ve R_2 reaksiyon kuvvetleri bulunur. F_1, F_2, F_3 kuvvetlerinin ağırlıksız bir ipe etkidiğı düşünülerek reaksiyon kuvvetlerinin bulunmasından sonra herhangi bir yatay itki kuvvetine (H) göre ipin alacağı şekil çizilebilir. İpin aldığı bu şekil F_1, F_2, F_3 kuvvetleri altındaki fönüküler eğrisidir.



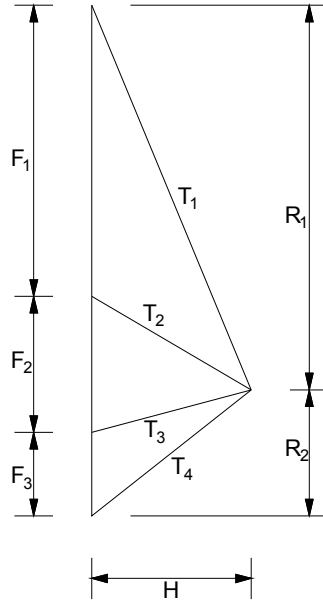
Şekil 3.2 Belirli bir H değerine göre çizilmiş füniküler eğrisi

İp hiçbir noktasında moment alamayacağı için büküm noktaları kuvvetlerin uygulanma noktaları olacaktır. Şekil 3.2’de ipin alacağı şekli A noktasından başlayarak çizilmeye başlanabilir. H yatay itki kuvvetinin R_1 reaksiyon kuvvetiyle bileşkesi ipin AB parçasının eğimini verecektir.



Şekil 3.3 T_1 ve T_2 ip parçalarının eğimlerin bulunuşu

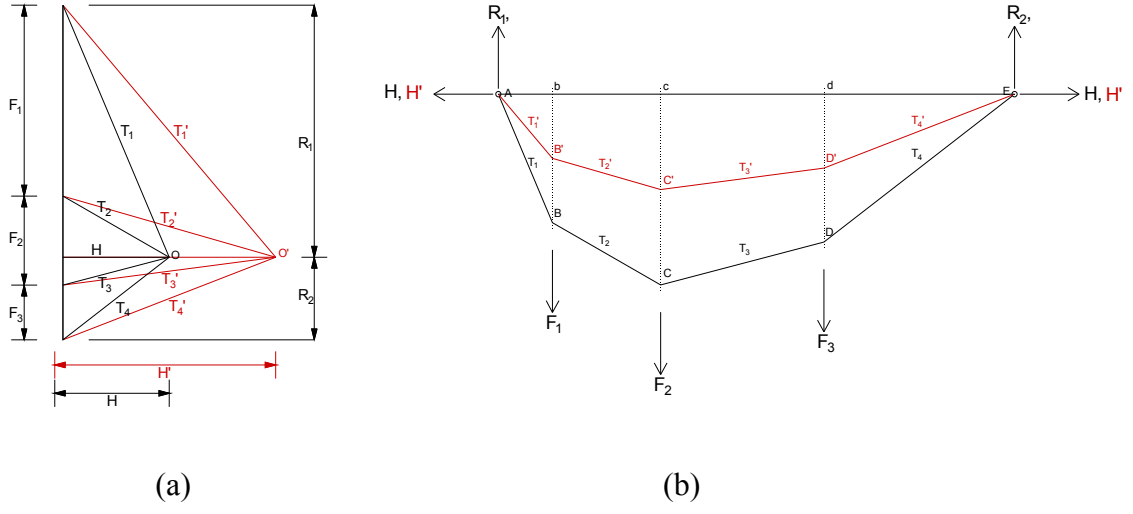
İpin BC parçasına aynı yatay kuvvet (H) etki etmekte olup düşey kuvvet ($R_1 - F_1$) değerine düşecektir (şekil 3-3(a)). İp boyunca yatay kuvvet sabit olduğu için her düğüm noktasında statik denklemler kullanılarak ipin alacağı şekil oluşturulabilir. Bu şekilde belirlenen H kuvvetine göre ipin alacağı şekil bulunur. Her bir parça için oluşturulan geometrik denge sistemleri birleştirilerek, kemer analizinde kullanılan füniküler poligonu oluşturulur:



Şekil 3.4 Füniküler Poligonu

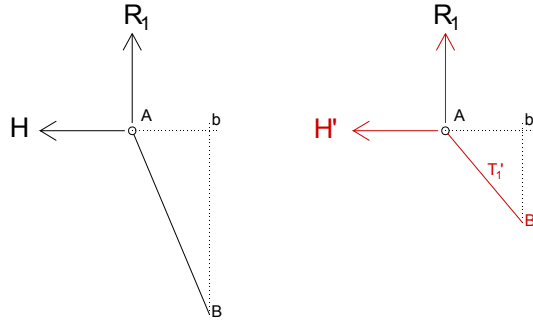
3.2. Füniküler Poligonunun İşlevi

Füniküler poligonunda görüldüğü üzere ip parçalarının eğimleri, reaksiyon kuvvetleri ve dış kuvvetler aynı şekil üzerinde ölçekli olarak gösterilmektedir. Füniküler poligonun kullanışlı tarafı ise funiküler eğrisi üzerinde yapılan değişikliklerle birlikte oluşan yeni şekil kolayca bulunabilmektedir. Şekil 3.2'deki ipte dış kuvvetleri sabit tutarak H yatay kuvvetini artırdığımızı düşünelim. Bu durumda A noktasında başlayarak bütün denge denklemlerini yazmak zorunda kalınır. Fakat funiküler poligonunda bu değişiklik kolayca işlenebilir ve ipin aldığı yeni şekil kolayca bulunabilir. Şekil 3.5'te funiküler poligonunda "O" poligonun yatay yönde sündürülmesiyle ip parçalarının eğimleri kolayca oluşmuştur. Yeni ip eğimleriyle şekil (3.5-b)'deki funiküler eğrisi çizilebilir.



Şekil 3.5 “O” Poligonun yatay yönde yer değiştirmesiyle oluşan yeni funiküler poligonu ve funiküler eğrisi

Yeni oluşan şekil üzerinde detaylı bir inceleme yapılırsa, her iki şekil arasında bir orantı olduğu görülür. Şekil 3.6’daki A noktasındaki kuvvet üçgenleri inceleyelim:



Şekil 3.6 Her iki sistemde A noktasında ki kuvvetler dengesi

$$\frac{H}{R_1} = \frac{\overline{Ab}}{\overline{Bb}} \quad (3.3)$$

$$\frac{H'}{R_1} = \frac{\overline{Ab}}{\overline{B'b}} \quad (3.4)$$

Denklem 3.3 ve denklem 3.4 birlikte çözülürse:

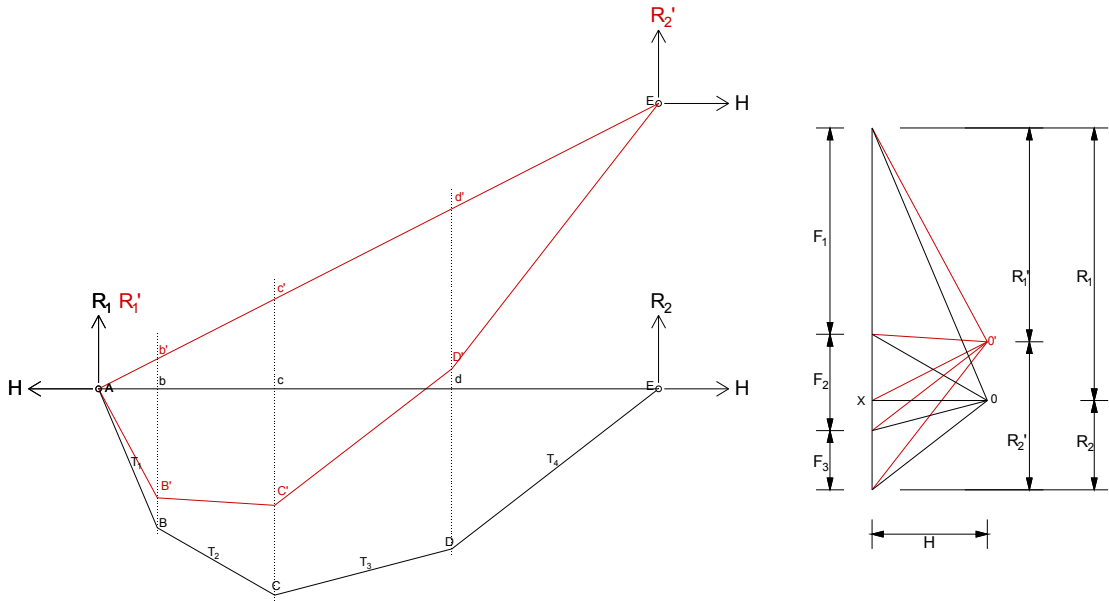
$$\overline{Ab} * R_1 = H * \overline{Bb}, \quad \overline{Ab} * R_1 = H' * \overline{B'b}$$

$$\frac{H}{H'} = \frac{\overline{B'b}}{\overline{Bb}} \quad (3.5)$$

Görüldüğü üzere funiküler eğrisinin düğüm noktalarının ordinatları H kuvvetiyle ters orantılıdır. Yani basık kemer yüksek yatay tepki kuvveti oluştururken, sivri kemer daha düşük yatay kuvvetle dengeye gelmektedir. Pratik bir örnek olarak, H yatay kuvveti 2 katına çıkarılırsa, funiküler eğrisinin düğüm noktalarının ordinatları yarıya inecektir.

$$\frac{H}{H'} = \frac{\overline{B'b} \cdot \overline{C'c} \cdot \overline{D'd}}{\overline{Bb} \cdot \overline{Cc} \cdot \overline{Dd}} \quad (3.6)$$

Funiküler poligonundaki “O” noktasının yatay yöndeki yer değiştirmesiyle, yatay kuvvet (H) değişmekte funiküler eğrisinin yeni formu ortaya çıkmaktadır. A ve B mesnet noktalarıyla, F_1, F_2, F_3 kuvvetlerinin etkiye noktası sabit kaldığı için reaksiyon kuvvetleri R_1 ve R_2 'de herhangi bir değişiklik olamamaktadır. Funiküler poligonundaki “O” noktasının düşey yönde yer değiştirmesinin neye karşılık geldiğini analiz edelim:



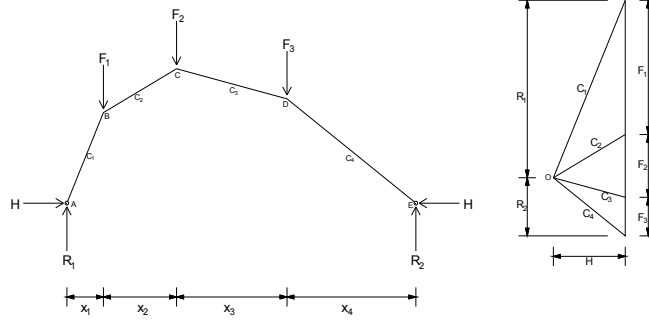
Şekil 3.7 “O” Poligonun düşey yönde yer değiştirmesiyle oluşan yeni funiküler poligonu ve poligona bağlı funiküler eğrisi

Füniküler poligonun O noktasının düşey yöndeki yer değiştirmesi reaksiyon kuvvetlerini doğrudan etkilemiştir. Füniküler poligonundaki $\overline{O'X}$ doğrusu füniküler eğrisindeki $\overline{AE'}$ doğrusunu vermektedir. Yeni oluşan şekil A noktası üzerinde bir açısız dönmeye uğramış olup düğüm noktaları ile mesnetleri birleştiren doğru arasındaki uzaklık sabit kalmıştır.

$$\frac{\overline{bB}}{\overline{b'B'}} = \frac{\overline{cC}}{\overline{c'C'}} = \frac{\overline{dD}}{\overline{d'D'}} = 1 \quad (3.7)$$

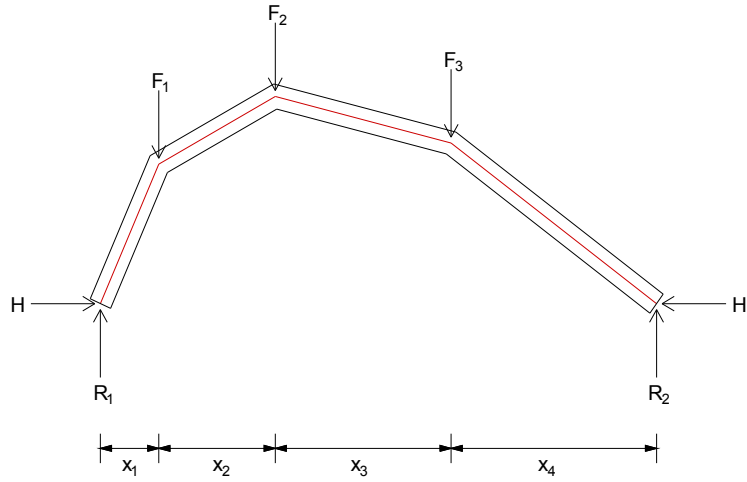
3.3. İp Probleminden Kemere Geçiş

Statik açıdan sarkık ip ile kâgir kemer problemleri benzerdir. Şekil 3.2'deki \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} ve \overline{DE} ip parçaları uçları mafsallı olup F_1 , F_2 , F_3 kuvvetlerinin etkileriyle üzerinde sadece çekme kuvvetleri oluşmaktadır. İp parçalarını çubuk eleman olarak düşünürsek aynı sistemi F_1 , F_2 , ve F_3 kuvvetlerini taşıyan bir kemer olarak görebiliriz. Çubuklarda ve mesnet kuvvetlerinde çekme yerine basınç kuvvetleri oluşacaktır. Oluşan bu form kemerdeki basınç hattını verecektir. Yeni sistem statik açıdan kararsızdır (unstable), fakat gerçek kemerdeki basınç hattı belirli bir kalınlığı olan taşların içinden geçmekte olup, bu kalınlık sistemi kararlı hale getirmektedir. “O” poligonunun düşey ve yatay yöndeki yer değiştirmesiyle füniküler eğrisinde oluşacak değişimler sarkık ip örneğiyle aynı mantıktadır. Basık kemer daha yüksek yatay tepki kuvveti oluştururken, dik kemer daha düşük yatay tepki kuvvetiyle dengeye gelmektedir. “O” poligonunun düşey yöndeki hareketiyle mesnetlerin ordinatları belirlenmekte. Bu durumda reaksiyon kuvvetleri değişmektedir. (Ordinatı artan mesnedin taşıdığı yük azalacak, diğerinin taşıdığı yük artacaktır.)



Şekil 3.8 Basınç kuvvetlerinin etkisindeki fönüküler eğrisi ve fönüküler poligonu

Üç kuvvetin etkisinde belirli bir H kuvvetine göre çizilmiş fönüküler eğrisinin ötelenmesiyle oluşan şekil 3.9'daki kemer bu kuvvetler bütünü için ideal kemer formunu oluşturmuştur. Fönüküler eğrisi bu yükler için basınç hattını temsil etmektedir. Kuvvet sayısı arttıkça kemer eğrisel bir form alacaktır.



Şekil 3.9 F_1, F_2, F_3 Kuvvetlerinin etkisindeki fönüküler eğrisinin iki yönde ötelenmesiyle oluşturulan optimum kemer

4. KEMER GEOMETRİSİ OPTİMİZASYONU

4.1. Kâgir Kemer Hesaplarında Kullanılan Varsayımlar

Kâgir kemerler açıklık geçmek için tarih boyunca kullanılan taşıyıcı bir sistemdir. Kâgir kemerler mimari alanda bir çok kullanımı olmasına karşın bu bölümde kâgir kemer köprüler temel alınacaktır. Kâgir kemer köprüler geçici bir kalıp üzerine taşıyıcı kemerin harçla birbirine yapıştırılarak yerleştirilmesiyle oluşur. Taşıyıcı kemer üzerine dolgu malzemesiyle istenilen yol geometrisi elde edilir. Dolgu malzemesi ve hareketli yükten dolayı kemere etki eden kuvvetler basınç hattıyla mesnet noktalarına iletilir. Kâgir kemer analizinde kabul edilen 3 varsayım aşağıda ki gibidir:

1.Kayma göçmesi oluşmaz:

Taşıyıcı kâgir kemerdeki taşlar arasındaki sürtünme kuvvetinin, taşların birbirine kenetlenmesi için yeterli olduğu varsayılmıştır. Gerçekte taşlar arasında kaymadan dolayı çatlaklar görülebilmeye rağmen göçme mekanizmasının asıl sebebi kaymadan dolayı olmadığı için bu varsayım tutarlıdır.

2.Kâgir malzemenin çekme dayanımı yoktur:

Kâgir malzemenin kendisinin belirli bir çekme dayanımı olmasına rağmen, taşları birleştiren harcın çekme dayanımı ihmal edilebilir. Bu madde çekme kuvvetinin kâgir kemer boyunca iletilemeyeceğini vurgulamaktadır.

3.Kâgir malzeme sonsuz basınç dayanımına sahiptir:

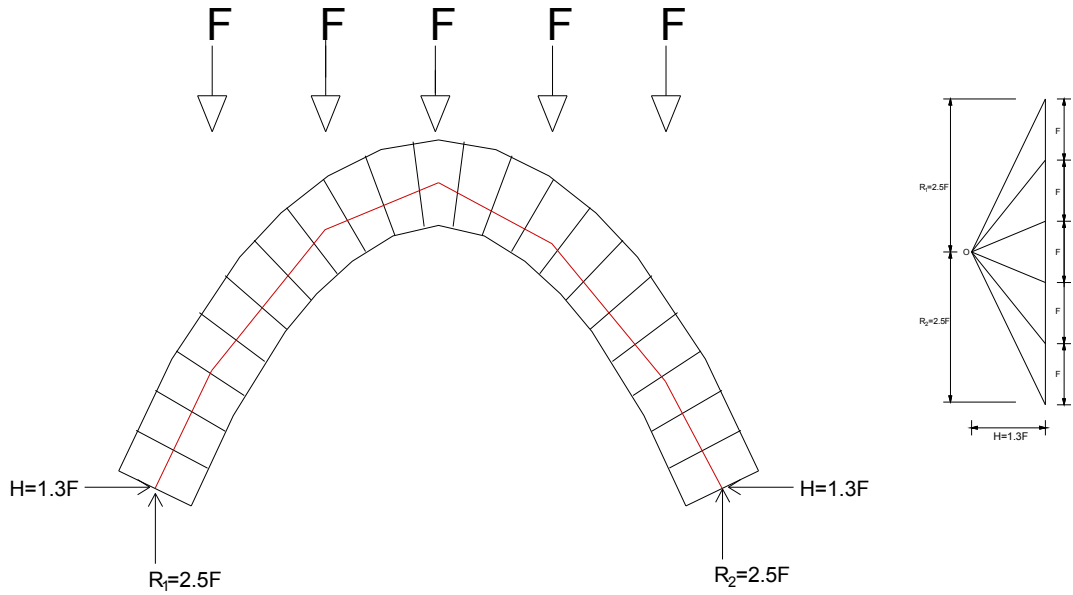
Bu madde kâgir kemerdeki basınç gerilmelerinin malzeme dayanımının çok altında olduğunu vurgulamaktadır. Yani malzemede ezilme olmayacaktır. Yine de kâgir kemer hesabında gerilmeler kontrol edilmelidir.

Kâgir kemeri oluşturan taşlar rijit bloklar olarak alınabilir, herhangi bir deformasyona uğramaz ama uç noktaları etrafında dönerek mafsal oluşturabilir, dolayısıyla kâgir kemer elastik bir yaklaşımla çözülemez.

Kagir kemer analizinin temelini oluşturan “safe” teoremine göre bir kemerin içerisinde geçebilen füniküler eğrisi bulunabiliyor ise o kemerin dengede olduğu ve o yükler altında göçmeyeceği anlamına gelir. (J.Heyman,1982)

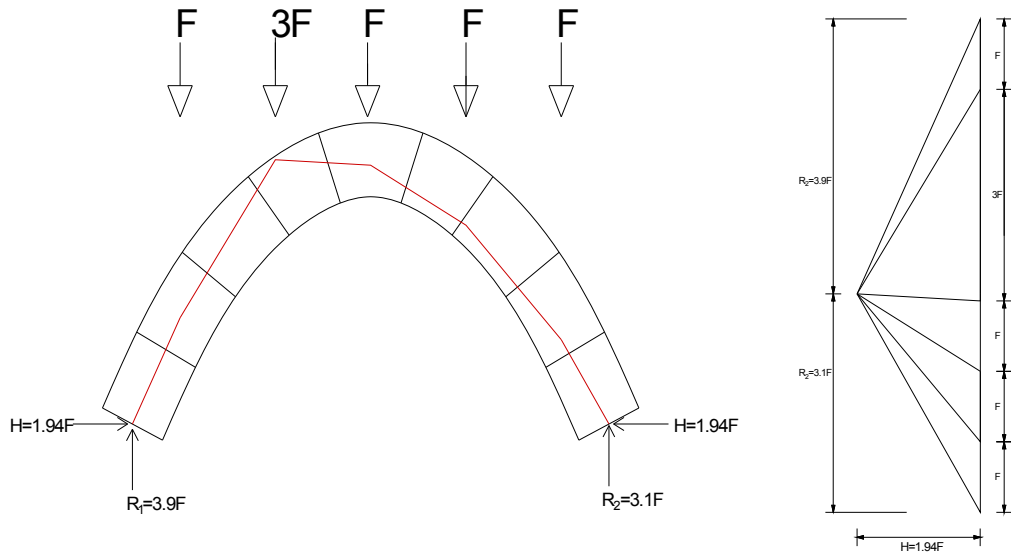
Kagir kemerler için idealize edilmiş 3 madde ve “safe” teoremi ışığında denilebilirki; kagir kemerlerin modellenmesi ve analizi bir geometri problemidir, malzeme problemi değildir bir başka deyişle elastik bir çözüm değildir.

Şekil 4.1’deki kagir bir kemere etki eden 5 eşit kuvvet gözükmektedir. Bu 5 kuvvet altında oluşan füniküler eğrisi ve füniküler poligonu gözükmektedir.



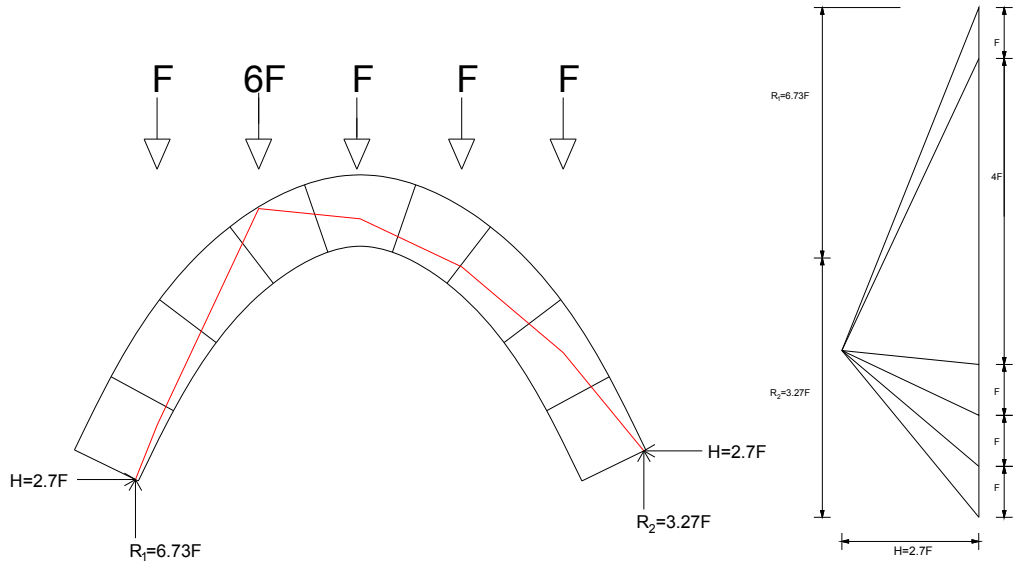
Şekil 4.1. 5 eşit kuvvet etkisindeki kemer ve füniküler eğrisi

Şekil 4.2 de ise kemere etki eden 5 eşit kuvvetten ikincisinin 3 katına çıkması sonucu oluşan ve kemer içerisinde geçen füniküler eğrisi bulunmuştur. Yatay H kuvvetinin değiştirilmesiyle kemer içerisinde geçen bir füniküler eğrisi bulunabilmiştir. Yani kemer bu kuvvet sisteminde dengede kalacaktır.



Şekil 4.2 Yeni kuvvet sistemi altındaki kemer ve funiküler eğrisi

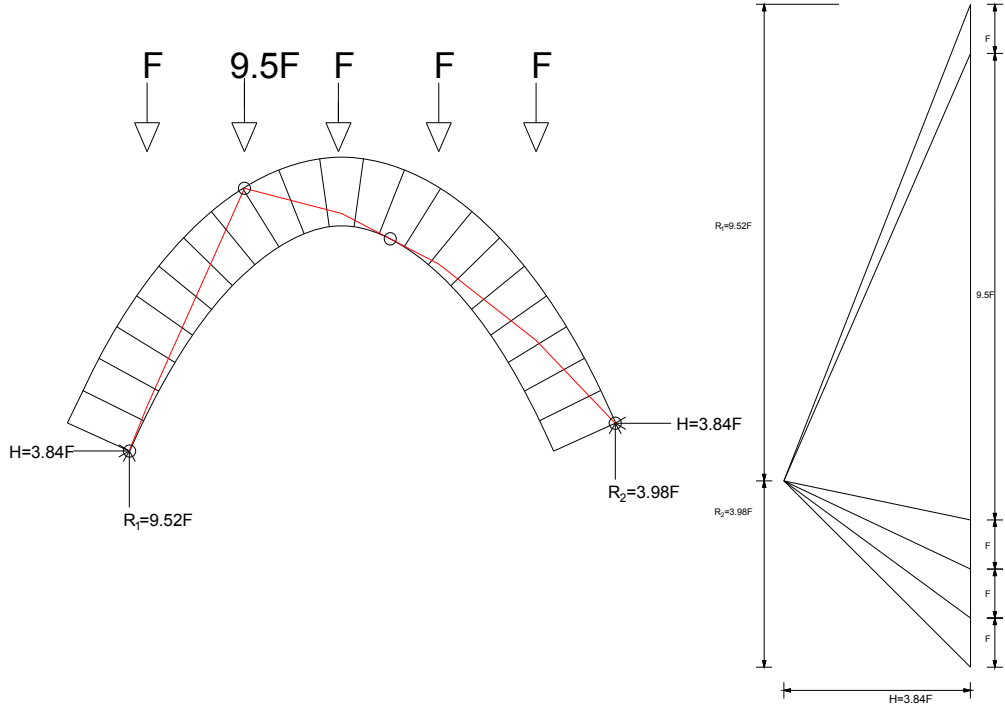
Sadece yatay itki kuvveti H değerini değiştirmek uygun funiküler eğrisini bulabilmek için yeterli olmayabilir. Şekil 4.2’de mesnet noktalarının sabit tutulmasıyla oluşturulmuş uygun funiküler eğrisi bulunmuştur. Bu sistemde 2. düşey kuvvetin maksimum $3F$ değerine çıkmasına izin vermiştir. $3F$ ’ten daha büyük bir kuvvette kemer bu yükü taşıyamayacak gibi gözükebilir. Fakat funiküler poligonunda “O” noktasının düşey yönde yer değiştirmesi ile $6F$ kuvvetine karşılık gelen funiküler eğrisi kolaylıkla kemer içerisinden geçmiştir (şekil 4.3). Yeni sistemde mesnet noktaları değişmiş olup yeni kuvvetler rahatlıkla taşınabilmektedir.



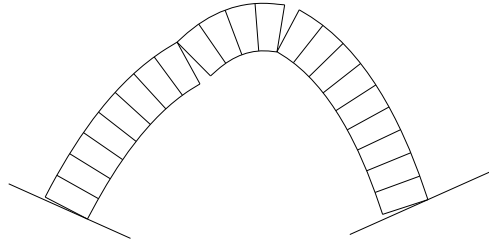
Şekil 4.3 İkinci kuvveti $6F$ çıkarılan kemer ve funiküler eğrisi

4.2. Göçme Mekanizması

Şekil 4.3’de $6F$ kuvvetiyle birlikte funiküler eğrisi kritik noktalarda kemerin dışına yaklaşmıştır. Bir başka deyişle yaklaşan bu noktalarda mafsallaşmalar oluşmaya başlamaktadır. Statik açıdan 3 mafsallı kemer izostatik bir sistemdir, fakat dördüncü bir mafsalın yerleşmesiyle sistem dengesiz hale gelir (unstable). Şekil 4.4’deki örnek kemerimizde ikinci kuvvetin $9.5F$ değerine geldiğinde 4 mafsal oluşumu görülür ve sistem göçme mekanizmasına geçer. Şekil 4.5’te göçme mekanizmasının oluşumu gösterilmiştir.



Şekil 4.4 İkinci kuvvetin maksimum değeri $9.5 F$ ve bu yük altında oluşan funiküler eğrisi

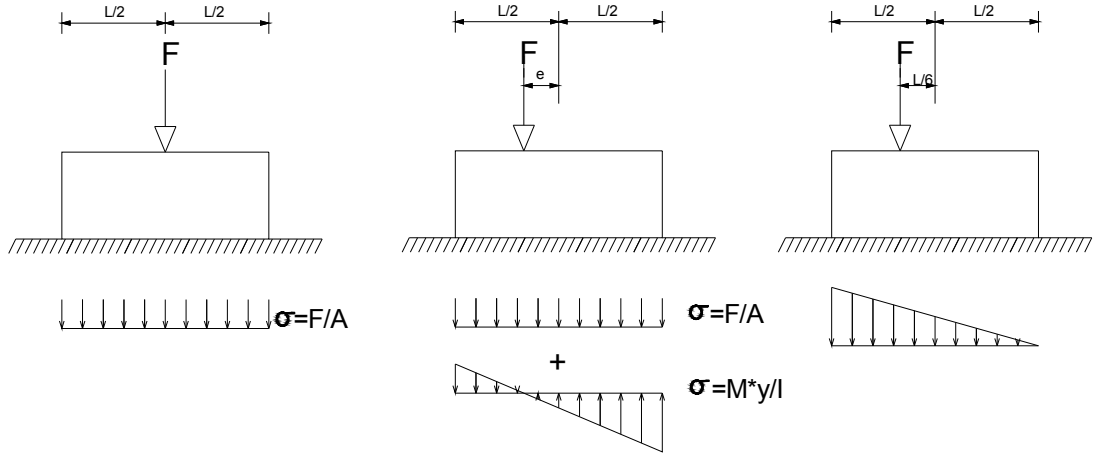


Şekil 4.5 Göçme mekanizmasının oluşumu

4.3. Güvenlik Faktörü

Kâgir kemerlerin funiküler eğrisiyle analizinde, güvenlik faktörü terimi yine geometrik bir yaklaşımın sonucunda ortaya çıkmaktadır. Kemer üzerindeki yükler sonucu oluşan funiküler eğrisi kemer içinde basınç hattı oluşturarak dengede kaldığını kabul ederek şekil 4.6'daki örneği inceleyelim. Şekil 4.6'daki F kuvvetinin rijit plakaya etkimektedir. Kuvvet plakanın merkezinden etkidiği için zeminde düzgün bir gerilme dağılımı olacaktır. Kuvvet merkezden uzaklaştıkça, basınç gerilmelerinin yanı sıra, oluşan moment dolayısıyla ikinci bir gerilme diyagramı

oluşacaktır. Net gerilme bu iki gerilmenin toplamı kadar olacaktır. Kuvvet ile plaka ağırlık merkezi arasındaki uzaklık arttıkça basınç gerilmeleri kuvvetin kaydığı yönde artarak diğer tarafta azalarak devam etmektedir



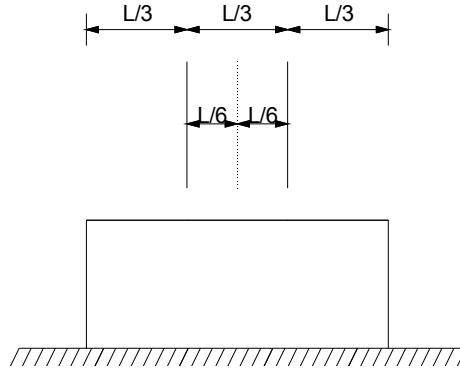
Şekil 4.6 Eksentrisite ile birlikte değişen tepki kuvvetleri

$$\sigma = \frac{F}{A} \pm \frac{M*y}{I} \quad (4.1)$$

Formül 4.1’de F kuvvetinin yapmış olduğu gerilmeyle moment dolayısıyla oluşan gerilme eşitlenirse, sınır değer $e=L/6$ olduğu görülmektedir. Yani kuvvet merkezde L/6 kadar uzaklaşırsa plakanın diğer ucu çekme kuvvetine geçecektir. Kemer örneğine geri dönersek kâgir kemerde çekme kuvveti taşınamayacağı varsayımı üzerine, basınç hattının bu sınır değerler arasında kalması istenir. Kâgir kemerlerde alt sınır olan bu güvenlik faktörü 3 olup “üçlü ortası” olarak geçmektedir.

$$\frac{F}{B * L} - \frac{F * e * \left(\frac{L}{2}\right)}{\left(\frac{1}{12}\right) * B * L^3} = 0 \quad (4.2)$$

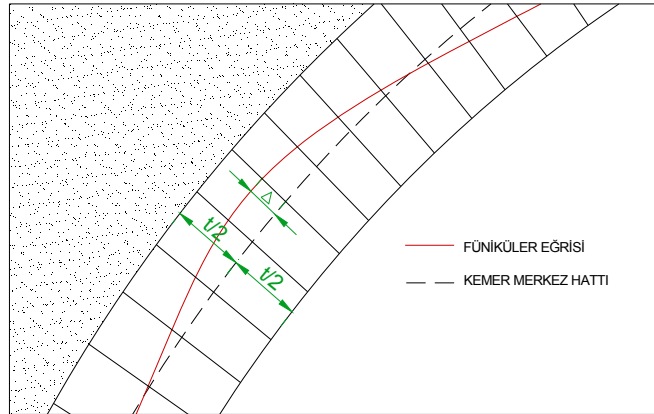
Denklem 4.2’nin çözümünden sınır değer $e=L/6$ olduğu görülür.



Şekil 4.7 Üçlü ortası kuralının gösterimi

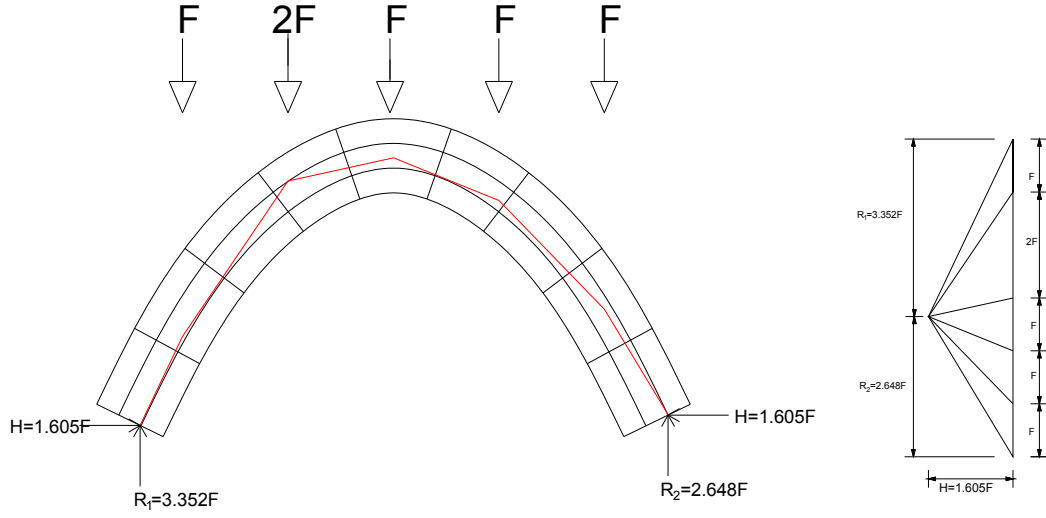
Şekil 4.8’de taşıyıcı kemer içerisinde geçen föniküler eğrisi ve kemer merkez hattı gözükmemektedir. Taşıyıcı kemerin kalınlığı t birim ve föniküler eğrisinin merkez hattı arasında maksimum fark Δ birimdir. Geometrik güvenlik faktörü denklem 4.3’te verilmiştir.

$$G.F = \frac{t/2}{\Delta} \quad (4.3)$$



Şekil 4.8 Kemerdeki güvenlik faktörünün gösterimi

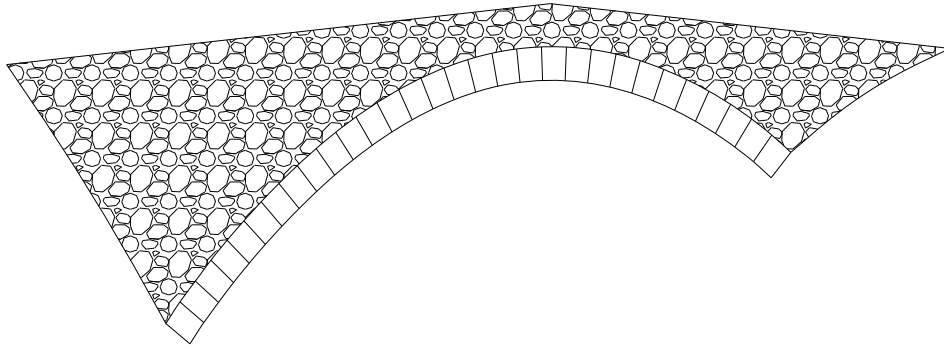
Şekil 4.9’deki 5 kuvvetin etkisindeki kemeri ele alır isek. Güvenlik faktörünün 3 olabilmesi için ikinci kuvvet maksimum $2F$ olacaktır.



Şekil 4.9 Güvenlik faktörü 3 olan kemer ve funiküler eğrisi

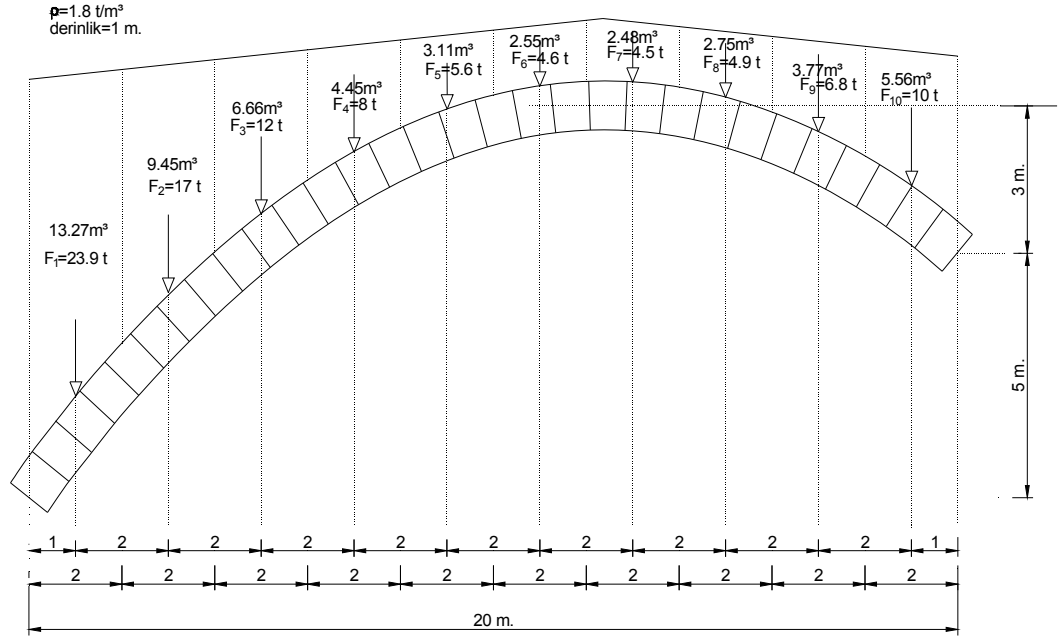
4.3.1. Mevcut kemer analizi

Bilinen yükler altında bir kemerin içinden geçen funiküler eğrileri deneme yanılma yöntemiyle bulunabilir. Yatay kuvvet H ve mesnet nokta koordinatlarındaki oynamalar ile uygun funiküler eğrisi bulunabilir. Geometrisi ve üzerine uygulanan yükler bilinen bir kemerin içinden geçen uygun funiküler eğrisi bulmak çok uzun denemeler gerektirebilir. Şekil.4 10' daki örneği ele alalım.



Şekil 4.10 Taşıyıcı kemer ve üzerindeki dolgu malzemesi

Funiküler eğrisini çizebilmek için kemeri 10 eşit parçaya bölelim. Kemerin 1 m' lik birim genişliği için hesap yapılır ise her bir dilimin ağırlığı $\text{alan(m}^2\text{)} * 1\text{m} * 1.8 \text{ t/m}^3$ olacaktır. Bu kuvvetler dilimlerin orta noktasından kemere etki edecektir.



Şekil 4.11 Mevcut kemerin dolgu malzemesinden gelen yüklerin 10 eşit parça olarak taşıyıcı kemere etki ettirilmesi.

Reaksiyon kuvvetlerini bulabilmek için A noktasına göre moment eşitliğini yazalım:

$$23.9 t * 1m + 17 t * 3m + 12 t * 5m + \dots \dots \dots 10 t * 19m + H * 5m = R_1 * 20m$$

$$R_1 + R_2 = 97.3 t$$

Reaksiyon kuvvetlerini bulabilmek için H yatay kuvvetini bilmek gerekmektedir. H=50 t. Tahmini değer ile funiküler eğrisini çizelim:

$$H=50 t, R_1= 73.3 t, R_2= 24 t$$

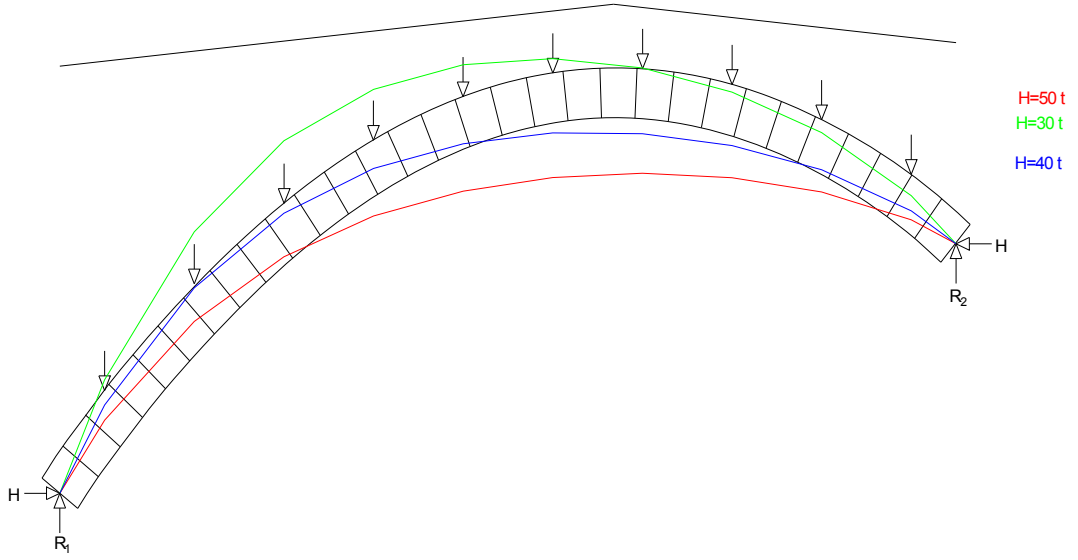
H=50 t. değerine karşılık gelen funiküler eğrisi şekil 4.12'de kırmızı renkle gösterilmiştir. Kemerin altında kalan funiküler eğrisi daha düşük bir yatay kuvvetle funiküler eğrisini oluşturmamız gerektiğini bize söylemektedir. Çünkü basık kemer büyük yatay kuvvetle, sivri kemer ise düşük yatay kuvvetle dengededir. H=30 ton için funiküler eğrisi:

$$H=30 t, R_1=68.3 t, R_2=29 t$$

H=30 t değeri ise çok sivri bir funiküler eğrisinin oluşmasını sağladı. H=40 t değerine göre:

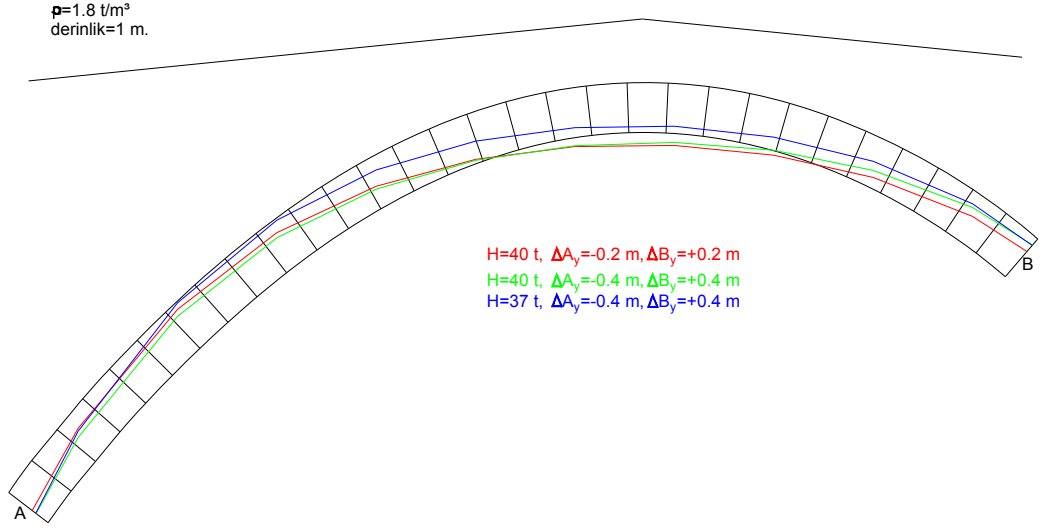
$$H=40 \text{ t } R_1=70.83 \text{ t}, R_2=27 \text{ t}$$

H=40 t değerine karşılık gelen fönüküler eğrisi mavi renkle gösterilmiştir. Mesnet noktalarının sabit tutulmasıyla bu yüklere karşılık gelen uygun fönüküler eğrisi çizilemeyecektir. Çünkü H=40 tona karşılık gelen fönüküler eğrisinde F_2 ye karşılık gelen noktada eğri kemerin üst sınırına dayanmış iken F_6 - F_7 - F_8 noktalarında ise kemerin alt sınırının da aşağısında kalmıştır. Sadece H kuvvetini değiştirmek eğrinin düşey yönde ötelenmesi demektir.

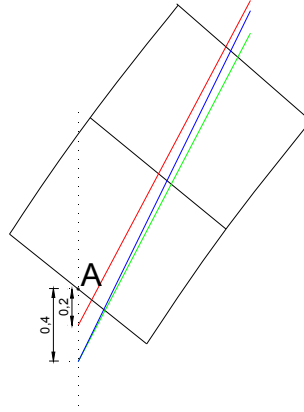


Şekil 4.12 Mevcut yükler altında sadece H tepki kuvvetinin değiştirilmesiyle elde edilen 3 fönüküler eğrisi. Çizilen fönüküler eğrilerinin hiç biri kemer içerisinden geçememektedir.

Mesnet noktalarının da değiştirilerek, bir başka deyişle fönüküler poligonundaki “O” noktasının düşey yönde hareketiyle uygun fönüküler eğrisi bulunmaya devam edilecektir. Çözüme en yakın fönüküler eğrisi H=40 t olan mavi eğridir. Bu eğriden yola çıkarak sol mesnetin aşağı yönde, sağ mesnetin ise yukarı yönde hareketiyle uygun fönüküler eğrisi var ise bulunabilir. A mesnetinin 0.2 m aşağı yönde B mesnetinin 0.2 m yukarı yönde yer değiştirmesiyle oluşan fönüküler eğrisini bulalım. H=40 t olarak denemeye başlayalım:



Şekil 4.13 Mevcut yükler altında H tepki kuvvetinin ve reaksiyon kuvvetleri ordinatlarının değiştirilmesiyle elde edilen 3 funiküler eğrisi.



Şekil 4.14 Füniküler eğrisinin A noktasındaki düşey yer değiştirilmesi

A mesnetinin 0.40 m. aşağı yönde, B mesnetinin ise 0.40 m. yukarı yöndeki yer değiştirilmesiyle birlikte H=37 ton'a karşılık gelen funiküler eğrisi kemerin içerisinden geçmiştir. Yani kemer bu yükler altında dengede kalacaktır.

Ölü yükler (dolgu malzemesi, kemer ağırlığı) haricinde hareketli yüklerin etkisinde kemer analiz edilmelidir. Bu durumda tasarım hareket yükünün her bir dilime etkitip yukarıdaki prosedür uygulanmalıdır. Görüldüğü üzere mevcut bir kemerin analizi ağır bir işlem yükünü gerektirmektedir.

4.4. Kemer Geometrisi Optimizasyon Hiyerarşisi

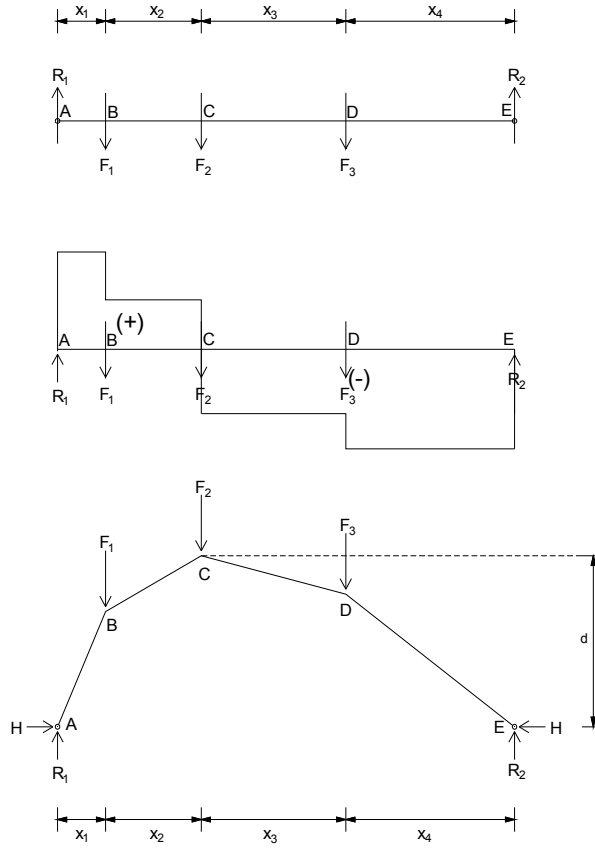
Geometrisi bilinen bir kemerin üzerinde ki yükler sonucu oluşan fönüküler eğrisi yatay kuvvet H değeri ve mesnet nokta koordinatlarının değıştirilmesiyle bulunabilmekteydi. Kemerin içinden geçen fönüküler eğrisi bulunabilir ise o kemerin stabil olacağını bir önceki bölümde anlatılmıştır. Ölü yükler haricinde hareketli yükün de etkisiyle kemerin içerisinde geçen fönüküler eğrisi bulabilmek zor olabilmektedir. Bulunamaz ise kemer göçme mekanizmasına geçecek demektir.

Bu bölümde ölü yükler altında oluşan fönüküler eğrisinin kemerin merkez hattının olması sağlanacaktır. Ölü yükler altında fönüküler eğrisi ile kemer merkez hattı arasındaki fark (Δ)=0 olduğu için denklem 4.3'e göre güvenlik faktörü teorik olarak sonsuz olacaktır. Hareketli yük taşıma kapasitesi maksimum değerine çıkacaktır.

4.4.1. Optimum Fönüküler Eğrisinin Bulunması

Fönüküler eğrisini oluştururken H kuvvetine ihtiyacımız olduğunu biliyoruz. H değerine göre fönüküler eğrisinin (bu bölümde aynı zamanda kemer geometrisi) şekli ortaya çıkmaktadır. Fakat tasarımcı için kemerin geometrisi (açıklığı ve yüksekliği) kemer içerisindeki yatay H kuvvetinden daha önemlidir. Köprü tasarımcısı için köprünün yüksekliği üzerinden geçecek olan yola bağlı olduğu için aynı zamanda açıklık ve yükseklik oranının estetik bir değer taşımından dolayı tasarımın başında belirlenmesi gerekir. Aşağıda açıklanacak yöntemle istenilen kemer yüksekliği için gerekli H değeri bulunacaktır:

Şekil 4.15'deki verilen F_1, F_2, F_3 kuvvetlerinin etkisindeki tepe noktasının koordinatı "d" olan fönüküler eğrisini bulalım:



Şekil 4.15. F_1, F_2, F_3 Kuvvetlerinin etkisindeki sistem. b) reaksiyon kuvvetleri ve dış kuvvetlere göre kesme kuvveti diyagramı c) tepe noktasının ordinatı d olan funiküler eğrisi

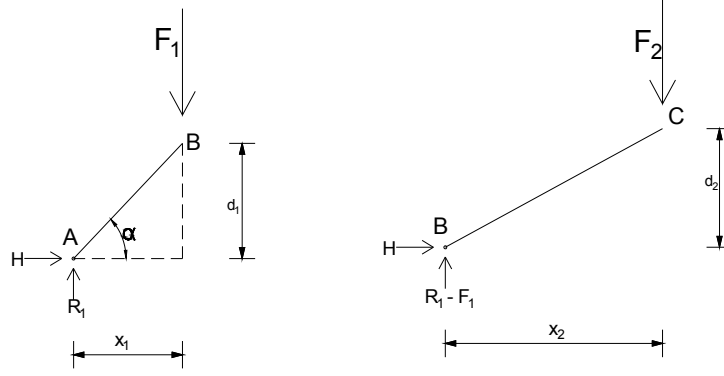
Reaksiyon kuvvetleri düşey kuvvet eşitliği ve moment denkliğinden bulunur:

$$R_1 = \frac{F_3 \cdot x_4 + F_2 \cdot (x_4 + x_3) + F_1 \cdot (x_4 + x_3 + x_2)}{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)} \quad (4.4)$$

$$R_2 = F_1 + F_2 + F_3 - R_1 \quad (4.5)$$

Funiküler eğrisinin tepe noktasını belirleyen; reaksiyon kuvvetleri ile kemere etki eden kuvvetlerdir. R_1 kuvvetini hesapladıktan sonra A noktasından itibaren funiküler eğrisi parçalarının eğimini kullanarak her parçadaki yükseltiyi H cinsinden yazabiliriz. H kuvveti sabit olduğu için eğimi değiştirecek olan düşey kuvvettir. Yani düşey kuvvetin yönünü değiştiren F değerine kadar bu işlem yapılmalıdır. Şekil 4.16 de görüldüğü üzere F_2 kuvvetinin uygulandığı C noktasında kesme kuvveti işaret

değiştirmektedir. Yani funiküler eğrisinin tepe noktası C noktasıdır. \overline{AB} ve \overline{BC} parçalarının yükseltileri istenilen “d” yüksekliğine eşitlenirse aranan yatay H kuvveti bulunur.



Şekil 4.16 Füniküler eğrisinin |AB| ve |BC| parçaları

$$\tan \alpha = \frac{R_1}{H} \quad (4.6)$$

$$d_1 = \tan \alpha * x_1 = \frac{R_1}{H} \quad (4.7)$$

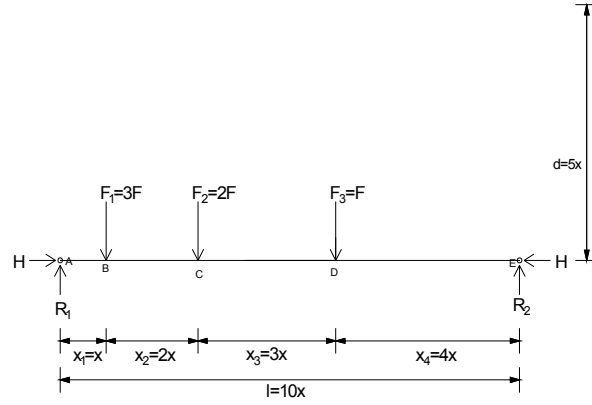
$$d_2 = \frac{R_1 - F_1}{H} * x_2 \quad (4.8)$$

$$d = d_1 + d_2 = \frac{R_1}{H} * x_1 + \frac{R_1 - F_1}{H} * x_2 \quad (4.9)$$

Denklem 4.9'un çözümüyle yatay kuvvet H değeri bulunur:

$$H = \frac{R_1 * x_1 + (R_1 - F_1) * x_2}{d}$$

Örnek 1: Şekil 4.17'de 3 kuvvetin etkisinde olan tepe noktası 5x olacak şekilde funiküler eğrisini ve H yatay kuvvetini bulalım:



Şekil 4.17 F_1, F_2, F_3 kuvvetlerinin etkisindeki kuvvet sistemi

Reaksiyon kuvvetleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$R_1 = \frac{3F * 9x + 2F * 7x + F * 4x}{10x} = 4.5 F$$

$$R_2 = 6F - 4.5F = 1.5 F$$

Kesme kuvvetinin işaret değiştirdiği nokta C noktası olduğu için tepe noktası bu nokta olacaktır. Füniküler eğrisinin \overline{AB} ve \overline{BC} parçalarının yükseltileri $5x$ değerine eşitlenip H kuvveti bulunacak.

$$d_1 = \frac{4.5F}{H} * x$$

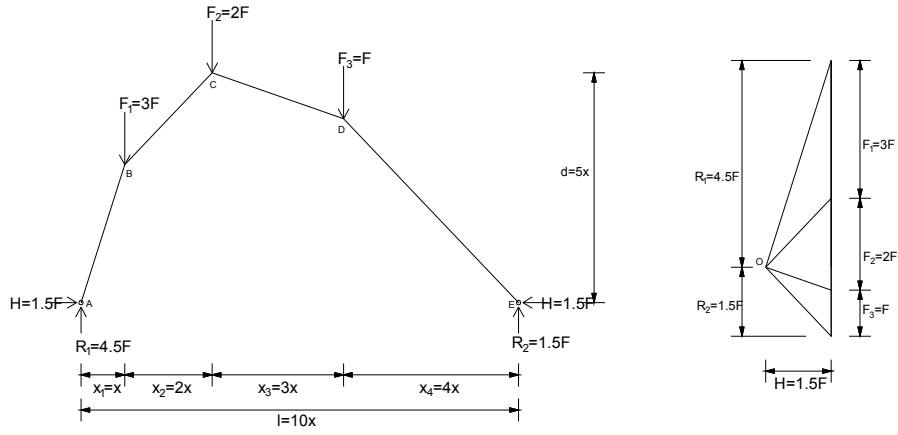
$$d_2 = \frac{4.5F - 3F}{H} * 2x$$

$$d = d_1 + d_2$$

$$5x = \frac{4.5F}{H} * x + \frac{4.5F - 3F}{H} * 2x, \quad 5x = \frac{7.5 * F * x}{H}$$

$H = 1.5 F$ olarak bulunur.

$H=1.5 F$ değerine göre füniküler eğrisi çizilebilir. Çizilen füniküler eğrisinde görüldüğü üzere füniküler eğrisinin tepe noktası olan C noktasının ordinatı istenilen $5x$ değerini almıştır.

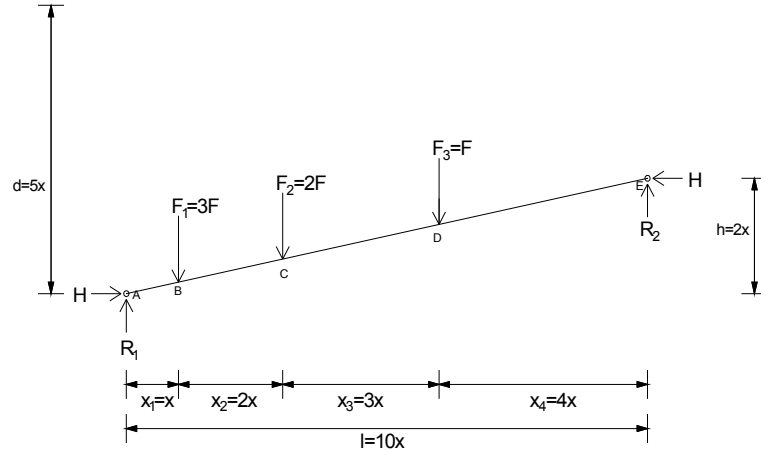


Şekil 4.18 Füniküler eğrisinin tepe noktası olan C noktasının ordinatını $5x$ yapan H değeri ve bu değere göre çizilen füniküler eğrisi.

4.4.2. Mesnetleri Ordinatlari Farkli Optimum Füniküler Eğrisinin Bulunması

Kemer füniküler eğrisinin mesnet noktaları her zaman aynı ordinata sahip olmayabilir. Şekil 4.19’da görüldüğü üzere mesnet noktaları arasında $2x$ birim uzaklığı olan füniküler eğrisinin tepe noktası A mesnetine göre $5x$ birim yüksekliği olacak şekilde optimize edilmek istenebilir. Bu durumda bir önceki örnekten farklı olarak reaksiyon kuvvetleri de H yatay kuvvetine bağlı olacaktır. Füniküler eğrisinin tepe noktasının hangi noktada olacağı ilk anda bilinmemektedir. Bu durumda her adımda bir noktanın tepe noktası olacağı varsayılarak hesaplamalar yapılır, bulunan H yatay kuvveti yardımıyla reaksiyon kuvvetleri bulunur. Eğer bulunan reaksiyon kuvvetleri sonucu kabul edilen tepe noktasında düşey kuvvet yön değiştiriyor ise kabul doğrudur. Eğer tepe noktası kabul edilen yerde düşey kuvvet yön değiştirmiyor ise kabul yanlıştır. Bir sonraki nokta tepe noktası kabul edilerek hesaplamalara devam edilmelidir.

Örnek 2:



Şekil 4.19 Mesnetleri arasında kot farkı olan kemer başlangıç funiküler eğrisi

$$R_1 = \frac{3F * 9x + 2F * 7x + F * 4x + H * 2x}{10x} = 4.5F + 0.2H$$

$$R_2 = 6.5F - R_1 = 1.5F - 0.2H$$

Funiküler eğrisinin tepe noktasını başlangıçta bilemediğimiz için adım adım sınavarak tepe noktası bulunacak. A noktasından yükselti hesabına başlayalım. R_1 kuvveti $4.5F+0.2H$ olduğunu ve pozitif bir değer olduğunu biliyoruz. Eğrinin \overline{AB} parçasının yükseltisi hesaplanır:

$$d_1 = \frac{R_1}{H} * x_1 = \frac{4.5F + 0.2H}{H} * x$$

Funiküler eğrisinin tepe noktasının B noktası olduğu düşünülebilir, bu durumda B noktasındaki $3F$ kuvveti düşey kuvvetin işaretini değiştirmesi gerekir.

$R_1 - F_1 = 4.5F + 0.2H - 3F = 1.5F + 0.2H$ değerinin 0 dan küçük olamayacağı kesindir. Bu sebeple eğrinin \overline{BC} parçasının da eğimi pozitif olacaktır.

$$d_2 = \frac{R_1 - F_1}{H} * x_2 = \frac{4.5F + 0.2H - 3F}{H} * 2x$$

C noktasına gelindiğinde :

$R_1-F_1-F_2=4.5F+0.2H-3F-2F= - 0.5F+0.2H$ değerinin negatif olup olmadığına karar verememekteyiz. C noktasının tepe noktası olduğunu varsayarak H değeri bulunur. Eğer H değeri $R_1-F_1-F_2=-0.5F+0.2H$ denklemini negatif yapıyor ise varsayım doğru olacaktır.

$$d_3 = \frac{R_1-F_1-F_3}{H} * x_3 = \frac{4.5F+0.2H-3F-2F}{H} * 3x \quad (4.5F+0.2H-3F-2F>?0)$$

$$d=d_1+d_2+d_3$$

$$5x = \frac{4.5Fx + 0.2Hx + 3Fx + 0.4Hx - 1.5Fx + 0.6Hx}{H}$$

$$H=1.5789F$$

$$0.2H-0.5F= - 0.11578F<0$$

$d_1+d_2+d_3$ değerini istenilen kemer yüksekliği olan d değerine eşitlediğimizde bulunan H değeriyle bulunan $R_1-F_1-F_2$ değeri negatif çıkmıştır. Yani kemerin CD parçasının eğimi negatiftir. Bu sonuç D noktasının kemerin tepe noktası olamayacağını göstermiştir. Tepe noktası C noktası olacaktır.

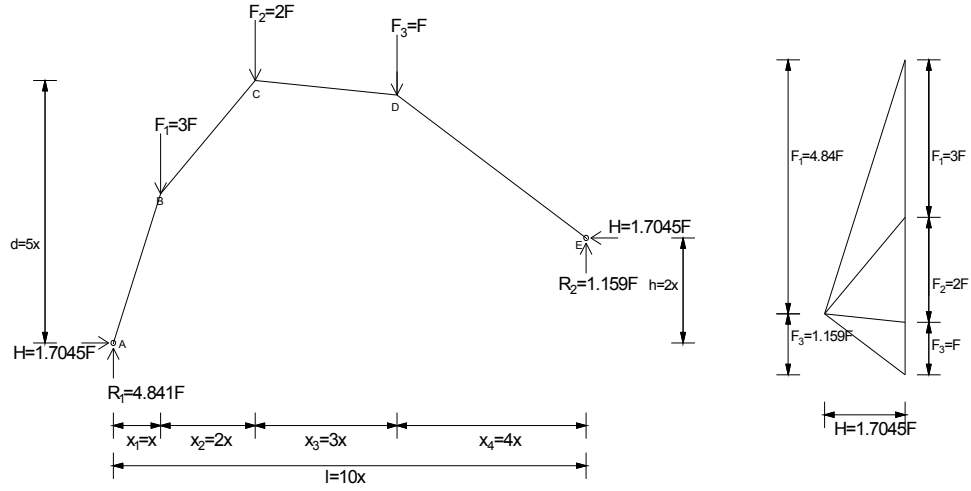
$$d = d_1 + d_2$$

$$5x = \frac{4.5Fx + 0.2Hx + 3Fx + 0.4Hx}{H}$$

$$H = 1.7045F$$

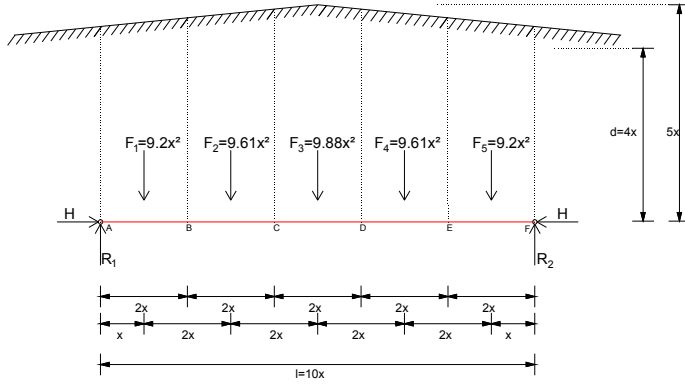
$$R1 = 4.841F$$

$$R2 = 1.159F$$



Şekil 4.20 $2x$ uzunluğunda mesnet farkı olan tepe noktasının ordinatı $5x$ olan funiküler eğrisi

Yukarıdaki örneklerde sabit yükler altında istenilen yüksekliğe sahip funiküler eğrisi bulunmuştur. bulunan funiküler eğrileri o yükler altındaki kemerin optimum geometrisini verecektir. Gerçek bir kemerdeki ölü yükler üzerindeki dolgu malzemesinden gelmektedir. Tasarımcı olarak bir köprü yapılıyor ise köprü'nün başlangıç, bitiş noktaları ile köprü üzerindeki yolun eğimi önem arz etmektedir. funiküler eğrisini oluşturan yükler funiküler eğrisiyle doğrudan ilişkilidir. Yol ile tahmini funiküler eğrisi arasında kalan yüke göre oluşturulan yeni funiküler eğrisi, yol ile yeni funiküler eğrisi arasındaki alan değiştiği için artık o yükler altında uygun funiküler eğrisi olmayacaktır. Sabit bir yol altında optimum funiküler eğrisini bulmak iteratif bir metot gerektirmektedir. Şekil 4.21'deki sabit yol geometrisi altında tepe noktası $4x$ yüksekliğinden geçen funiküler eğrisini optimize edelim. 5 adet dilime etki eden yükleri her bir dilimin alanı şeklinde alabiliriz. Kemerin üzerindeki dolgu malzemesinin yoğunluğu ve kemer derinliği sabit olduğu için alanları üzerinde hesap yapmakta bir sorun olmayacaktır.



Şekil 4.21 sabit bir yol altında mesnet noktaları belli tepe noktası $4x$ olması istenen optimum kemer geometrisi problemi

İterasyon 1:

$$R_1 = \frac{9.2x^2 * x + 9.61x^2 * 3x + 9.88x^2 * 5x + 9.61x^2 * 7x + 9.2x^2 * 9x}{10x} = 23.75 x^2$$

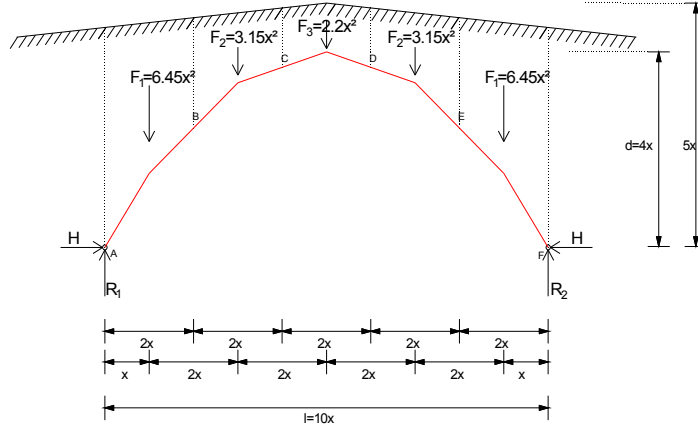
$$R_2 = 23.75 x^2$$

Yükler simetrik olduğu için funiküler eğrisinin tepe noktası F_3 yükünün uygulandığı nokta olacaktır.

$$4x = \frac{23.75x^2}{H} * x + \frac{23.75x^2 - 9.2x^2}{H} * 2x + \frac{23.75x^2 - 9.2x^2 - 9.61x^2}{H} * 2x$$

$$H = 15.682x^2$$

Bulunan H değerine göre funiküler eğrisi şekil 4.22'de çizilmiştir. Görüldüğü üzere yeni sistemde yol ile taşıyıcı kemer arasında kalan yükler değişmiş olup bu funiküler eğrisi optimum eğri olmayacaktır. Yeni yükler için funiküler eğrisini oluşturalım;



Şekil 4.22 1. İterasyon sonucu hesaplanmış funiküler eğrisi

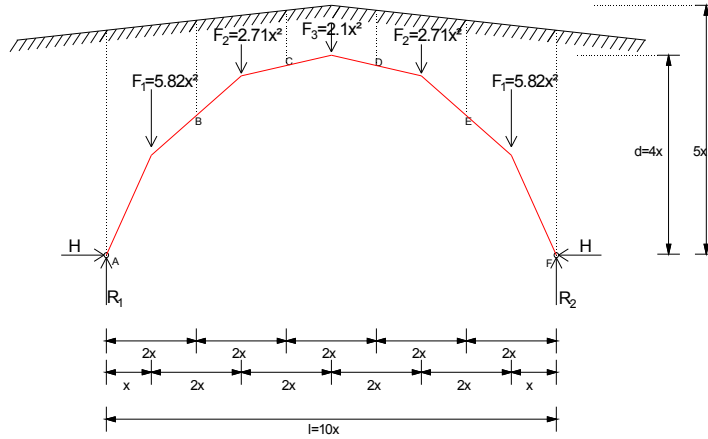
İterasyon 2:

$$R_1 = \frac{6.45x^2 * x + 3.15x^2 * 3x + 2.2x^2 * 5x + 3.15x^2 * 7x + 6.45x^2 * 9x}{10x} = 10.70x^2$$

$$R_2 = 10.70x^2$$

$$4x = \frac{10.70x^2}{H} * x + \frac{10.70x^2 - 6.45x^2}{H} * 2x + \frac{10.70x^2 - 6.45x^2 - 3.15x^2}{H} * 2x$$

$$H = 5.35x^2$$



Şekil 4.23 2.İterasyon sonucu hesaplanmış funiküler eğrisi

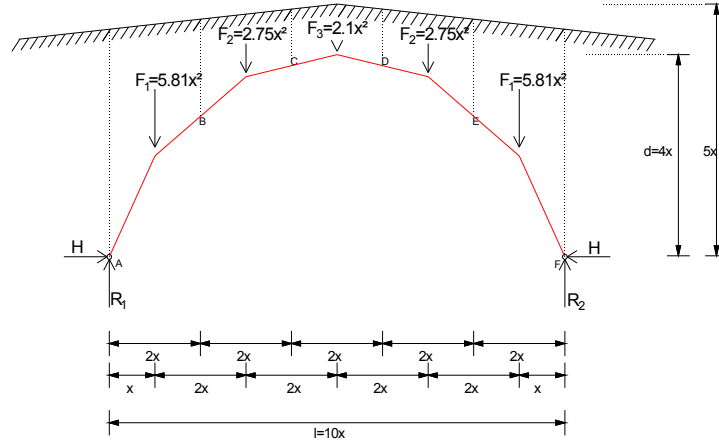
İterasyon 3:

$$R_1 = \frac{5.82x^2 * x + 2.71x^2 * 3x + 2.1x^2 * 5x + 2.71x^2 * 7x + 5.82x^2 * 9x}{10x} = 9.58x^2$$

$$R_2 = 9.58x^2$$

$$4x = \frac{9.58x^2}{H} * x + \frac{9.58x^2 - 5.82x^2}{H} * 2x + \frac{9.58x^2 - 5.82x^2 - 2.71x^2}{H} * 2x$$

$$H = 4.8x^2$$



Şekil 4.24 3. İterasyon sonucu hesaplanmış füniküler eğrisi

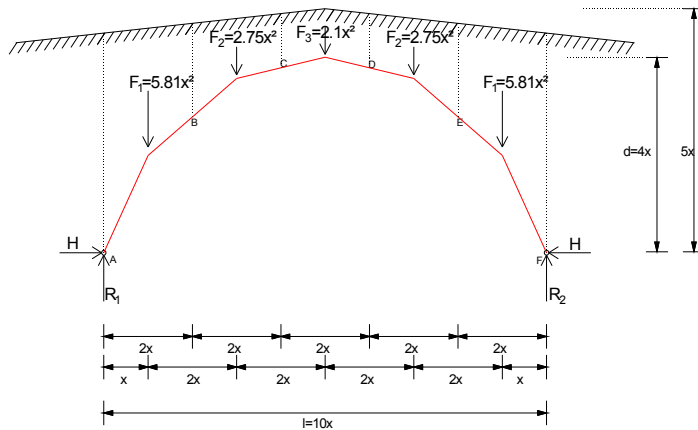
İterasyon 4:

$$R1 = \frac{5.81x^2 * x + 2.75x^2 * 3x + 2.1x^2 * 5x + 2.75x^2 * 7x + 5.81x^2 * 9x}{10x} = 9.61x^2$$

$$R2 = 9.61x^2$$

$$4x = \frac{9.61x^2}{H} * x + \frac{9.61x^2 - 5.81x^2}{H} * 2x + \frac{9.61x^2 - 5.81x^2 - 2.75x^2}{H} * 2x$$

$$H = 4.82x^2$$



Şekil 4.25 4. İterasyon sonucu hesaplanmış füniküler eğrisi

$$R1 = \frac{5.81x^2 * x + 2.75x^2 * 3x + 2.1x^2 * 5x + 2.75x^2 * 7x + 5.81x^2 * 9x}{10x} = 9.61 x^2$$

$$R2 = 9.61x^2$$

$$4x = \frac{9.61x^2}{H} * x + \frac{9.61x^2 - 5.81x^2}{H} * 2x + \frac{9.61x^2 - 5.81x^2 - 2.75x^2}{H} * 2x$$

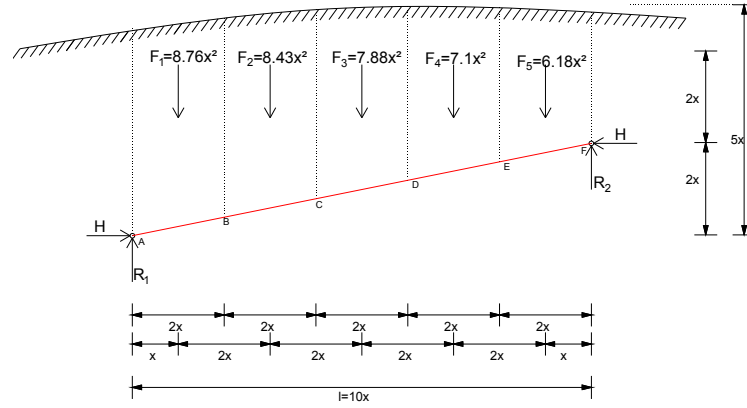
$$H = 4.82 x^2$$

Görüldüğü üzere H tepki kuvveti ve kemer üzerindeki yükler bir önceki iterasyonla aynıdır. Yani problem çözüm noktasına yakınsayarak gelmiştir. Sabit yol altında istenilen geometride funiküler eğrisi yani taşıyıcı kemer merkez hattı bulunmuştur. Bu merkez hattının ötelenmesiyle oluşacak taşıyıcı kemer ölü yükler altında teorik olarak sonsuz güvenlik faktörüyle çalışacaktır. Çünkü kemer merkez hattı ile funiküler eğrisi arasındaki fark $\Delta=0$ olacaktır. Denklem 4.3 e göre güvenlik faktörü:

$$G.F = \frac{t/2}{\Delta} = \frac{t/2}{0} = \infty$$

4.4.3. Mesnet Noktaları Farklı Olan Kemer Optimizasyonu

Kemerler her zaman ordinatları aynı olan iki noktayı birleştirmezler. Bazı gereksinimlerden dolayı kemerin mesnet noktaları arasında kot farkı olması istenebilir. Aşağıdaki örnekte sabit bir yol altında mesnet noktaları arasında 2x kot farkı olan tepe noktasının A mesnetine göre 4x yüksekliğinden geçmesi istenen funiküler eğrisi (kemer) optimize edilecektir.



Şekil 4.26 Mesnet nokta ordinatları farklı funiküler eğrisi ve yol

Mesnetler arasında kot farkı olduğundan dolayı reaksiyon kuvvetleri H yatay kuvvetine bağlı olacaktır.

$$R1 = \frac{6.18x^2 * x + 7.1x^2 * 3x + 7.88x^2 * 5x + 8.43x^2 * 7x + 8.76x^2 * 9x + H * 2x}{10x} = 20.473 x^2 + 0.2H$$

$$R2 = 17.877x^2 - 0.2H$$

R_1 ve R_2 kuvvetleri H değerine bağlı olduğu için tepe noktasını tahmin ederek tepki kuvvetlerini bulacağız. Tepe noktası varsaydığımız noktada düşey kuvvetin yön değiştirmesi lazımdır. A noktasından denemeye başlayalım:

F1 kuvvetinin uygulandığı uzaklığın tepe noktası varsayarsak:

$$R_1 - F_1 = 20.473x^2 + 0.2H - 8.76x^2 = 11.713x^2 + 0.2H > 0$$

$R_1 - F_1$ değeri 0 dan küçük olamayacağı için bu bir sonraki nokta olan C noktasına geçilir. F_2 kuvvetinin uygulandığı uzaklığın tepe noktası varsayarsak:

$$R_1 - F_1 - F_2 = 20.473x^2 + 0.2H - 8.76x^2 - 8.43x^2 = 3.283x^2 + 0.2H > 0$$

$R_1 - F_1 - F_2$ değeri 0 dan küçük olamayacağı için bu bir sonraki nokta olan C noktasına geçilir. F_3 kuvvetinin uygulandığı uzaklığın tepe noktası varsayarsak:

$$R_1 - F_1 - F_2 - F_3 = 20.473x^2 + 0.2H - 8.76x^2 - 8.43x^2 - 7.88x^2 = -4.597x^2 + 0.2H < 0$$

F_3 kuvvetinin tepe noktası varsayımıyla H kuvvetini bulacağız. Eğer H kuvveti $R_1 - F_1 - F_2 - F_3$ değerini negatif yapıyor ise varsayımımız doğru demektir. Çünkü tepe noktasında düşey kuvvet yön değiştirecektir. Aranılan H değeri burada hesaplanan değer olacaktır.

$$4x = \frac{20.473x^2 + 0.2H}{H} * x + \frac{20.473x^2 + 0.2H - 8.76x^2}{H} * 2x + \frac{20.473x^2 + 0.2H - 8.76x^2 - 8.43x^2}{H} * 2x$$

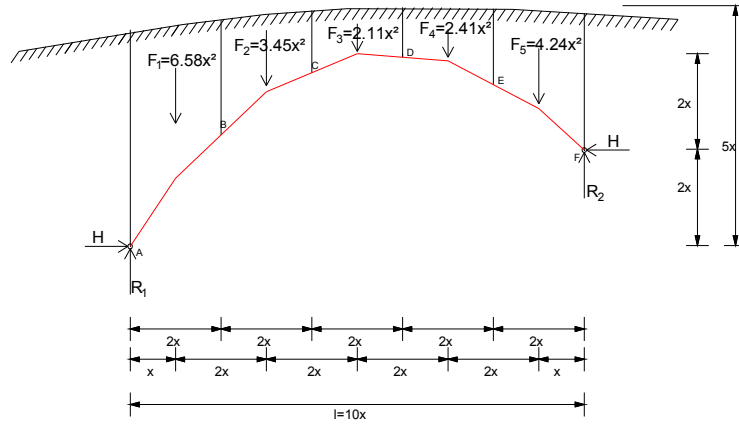
$$H = 16.8217 x^2$$

$$R_1 - F_1 - F_2 - F_3 = 20.473x^2 + 0.2 * 16.8217 - 8.76x^2 - 8.43x^2 - 7.88x^2 = -1.2327x^2 < 0$$

Tepe noktası A noktasından $5x$ kadar uzaklıkta olacaktır. Bulunan H değerine göre yeni funiküler eğrisi ve yük dağılımı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$R_1 = 23.8373 x^2$$

$$R_2 = 14.5127 x^2$$



Şekil 4.27 Birinci optimizasyon sonucu oluşan funiküler eğrisi

$$R_1 = \frac{4.24x^2 * x + 2.41x^2 * 3x + 2.11x^2 * 5x + 3.45x^2 * 7x + 6.58x^2 * 9x + H * 2x}{10x} = 10.539 x^2 + 0.2H$$

$$R_2 = 8.251x^2 - 0.2H$$

Yeni sistemde funiküler eğrisinin tepe noktasının yine F_3 kuvvetinin uygulandığı uzaklıkta olduğunu varsayalım:

$$R_1 - F_1 - F_2 - F_3 = 10.539x^2 + 0.2H - 6.58x^2 - 3.45x^2 - 2.11x^2 = -1.601x^2 + 0.2H <? 0$$

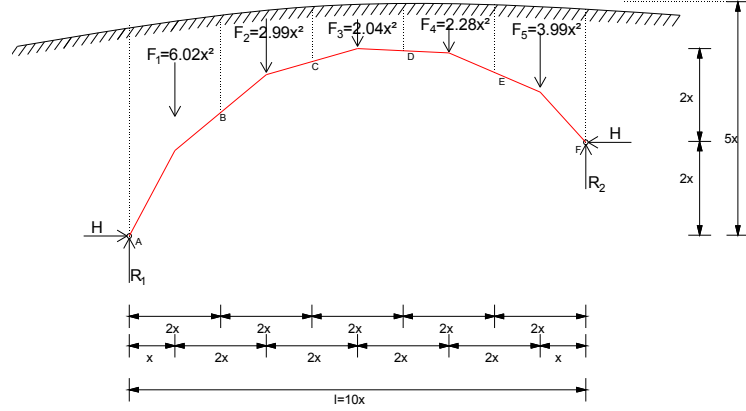
$$4x = \frac{10.539x^2 + 0.2H}{H} * x + \frac{10.539x^2 + 0.2H - 6.58x^2}{H} * 2x + \frac{10.539x^2 + 0.2H - 6.58x^2 - 3.45x^2}{H} * 2x$$

$$H = 6.4917 x^2$$

$$R_1 - F_1 - F_2 - F_3 = 10.539x^2 + 0.2 * 6.4917x^2 - 6.58x^2 - 3.45x^2 - 2.11x^2 = -0.3027x^2 < 0$$

$$R_1 = 11.8373 x^2$$

$$R_2 = 6.9527 x^2$$



Şekil 4.28 İkinci iterasyon sonucu oluşan funiküler eğrisi

$$R_1 = \frac{3.99x^2 * x + 2.28x^2 * 3x + 2.04x^2 * 5x + 2.99x^2 * 7x + 6.02x^2 * 9x + H * 2x}{10x} = 9.614 x^2 + 0.2H$$

$$R_2 = 7.706x^2 - 0.2H$$

Yeni sistemde funiküler eğrisinin tepe noktasının yine F3 kuvvetinin uygulandığı uzaklıkta olduğunu varsayalım:

$$R_1 - F_1 - F_2 - F_3 = 9.614x^2 + 0.2H - 6.02x^2 - 2.99x^2 - 2.04x^2 = -1.436x^2 + 0.2H <? 0$$

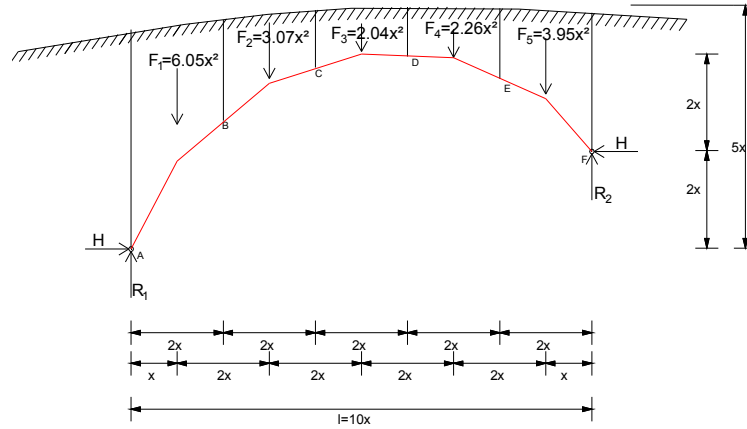
$$4x = \frac{9.614x^2 + 0.2H}{H} * x + \frac{9.614x^2 + 0.2H - 6.02x^2}{H} * 2x + \frac{9.614x^2 + 0.2H - 6.02x^2 - 2.99x^2}{H} * 2x$$

$$H = 6.0033 x^2$$

$$R_1 - F_1 - F_2 - F_3 = 9.614x^2 + 0.2 * 6.0033x^2 - 6.02x^2 - 2.99x^2 - 2.04x^2 = -0.2353x^2 < 0$$

$$R_1 = 10.8147 x^2$$

$$R_2 = 6.5053 x^2$$



Şekil 4.29 Üçüncü iterasyon sonucu oluşan funiküler eğrisi

$$R_1 = \frac{3.95x^2 * x + 2.26x^2 * 3x + 2.04x^2 * 5x + 3.07x^2 * 7x + 6.05x^2 * 9x + H * 2x}{10x} = 9.687x^2 + 0.2H$$

$$R_2 = 7.683x^2 - 0.2H$$

Yeni sistemde funiküler eğrisinin tepe noktasının yine F3 kuvvetinin uygulandığı uzaklıkta olduğunu varsayalım:

$$R_1 - F_1 - F_2 - F_3 = 9.687x^2 + 0.2H - 6.05x^2 - 3.07x^2 - 2.04x^2 = -1.473x^2 + 0.2H <? 0$$

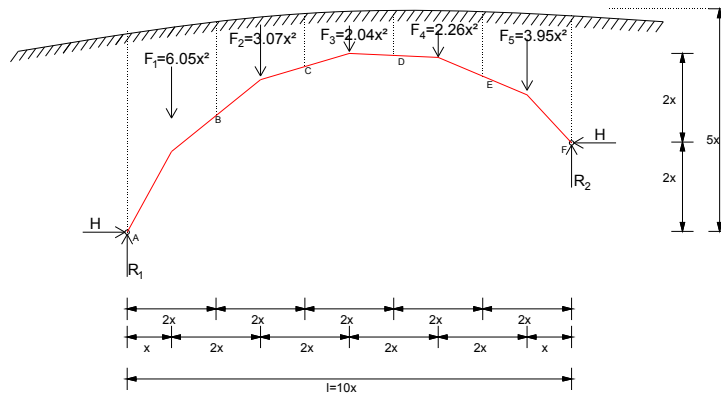
$$4x = \frac{9.687x^2 + 0.2H}{H} * x + \frac{9.687x^2 + 0.2H - 6.05x^2}{H} * 2x + \frac{9.687x^2 + 0.2H - 6.05x^2 - 3.07x^2}{H} * 2x$$

$$H = 6.0317x^2$$

$$R_1 - F_1 - F_2 - F_3 = 9.687x^2 + 0.2 * 6.0317x^2 - 6.05x^2 - 3.07x^2 - 2.04x^2 = -0.2667x^2 < 0$$

$$R_1 = 10.8933x^2$$

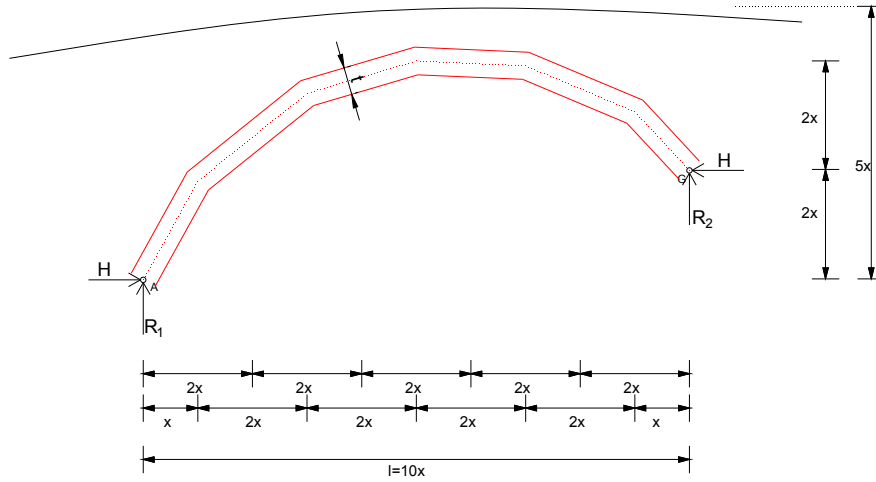
$$R_2 = 6.4767x^2$$



Şekil 4.30 Optimum funiküler eğrisi

4.5. Taşıyıcı Kemer Kalınlığının Belirlenmesi

10x birim açıklıkta 2x birim mesnet farkı olan 4x birim yüksekliğindeki funiküler eğrisi sabit bir yol altında optimize edilmiştir. Bu eğri ölü yükler altında optimum kemerin merkez hattını verecektir. Kemerin oluşturmak için funiküler eğrisinin belirli bir kalınlıkta içe ve dışa ötelenmesiyle oluşacaktır. Fakat kemerin kalınlığının ne olması gerektiğine bu noktada karar verilemez. Çünkü kemer sonsuz güvenlik faktörüyle çalışmaktadır, statik olarak kararsızlıktan kurtaracak ölçülebilir bir kalınlık yeterli olacaktır.

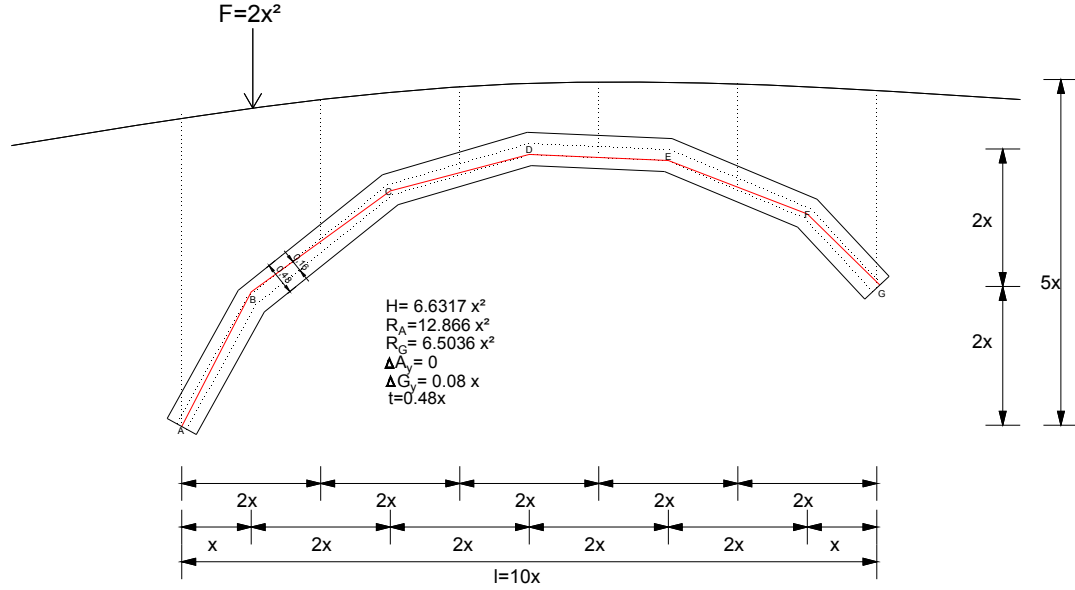


Şekil 4.31 Optimize edilmiş funiküler eğrisinin ötelenmesiyle oluşan kemer

Bilindiği üzere kemere etki eden yükler sadece kemerin ve dolgu malzemesinin ağırlığından gelen ölü yükler olmayıp, yol üzerinden geçecek olan taşıtların oluşturduğu hareketli yüklerde olacaktır. Funiküler eğrisi oluşturulurken kemeri böldüğümüz dilim sayısınca hareketli yük sırasıyla bu noktalara etkitilecektir. Örneğimizde hesap kolaylığı açısından 5 eşit parçaya böldüğümüz için, funiküler eğrisinin kırım noktaları bu noktalar olacaktır. Dolayısıyla hareketli yükte bu 5 noktaya sırasıyla etkitilecektir. Gerçek bir tasarımda kemer yeterince küçük dilimlere ayrılmalıdır.

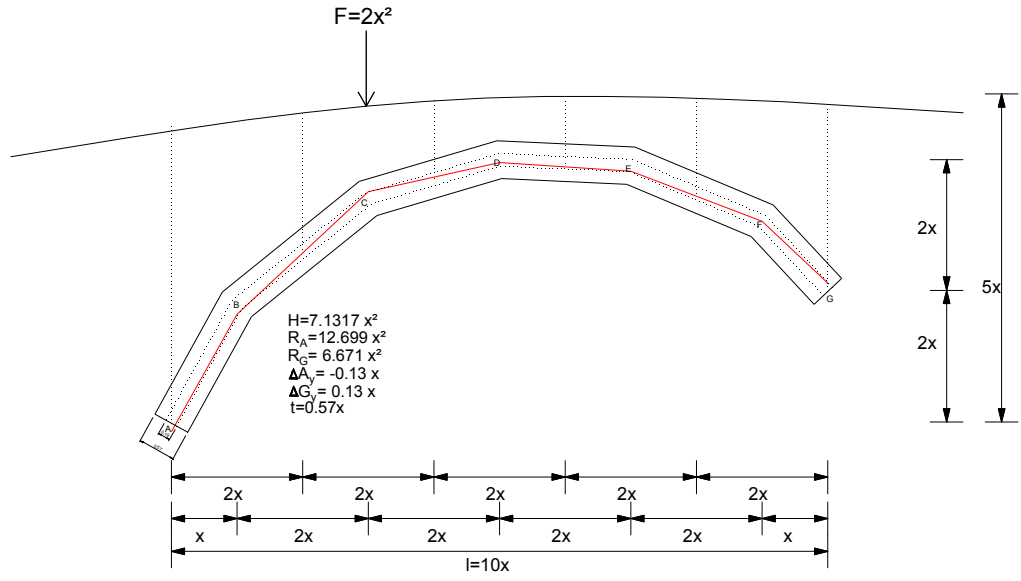
Mesnetleri farklı funiküler eğrisi optimizasyonunda bulduğumuz son şekil üzerinde $2x^2$ 'lik hareketli yükü sırasıyla etkitererek güvenlik faktörü 3 olacak şekilde kemer

kalınlığını bulalım. Füniküler eğrisini şekil 4.30 da ki kemer merkez hattına en yakın yapan H yatay kuvvetini ve mesnet sapmaları denemelerle bulunacaktır.



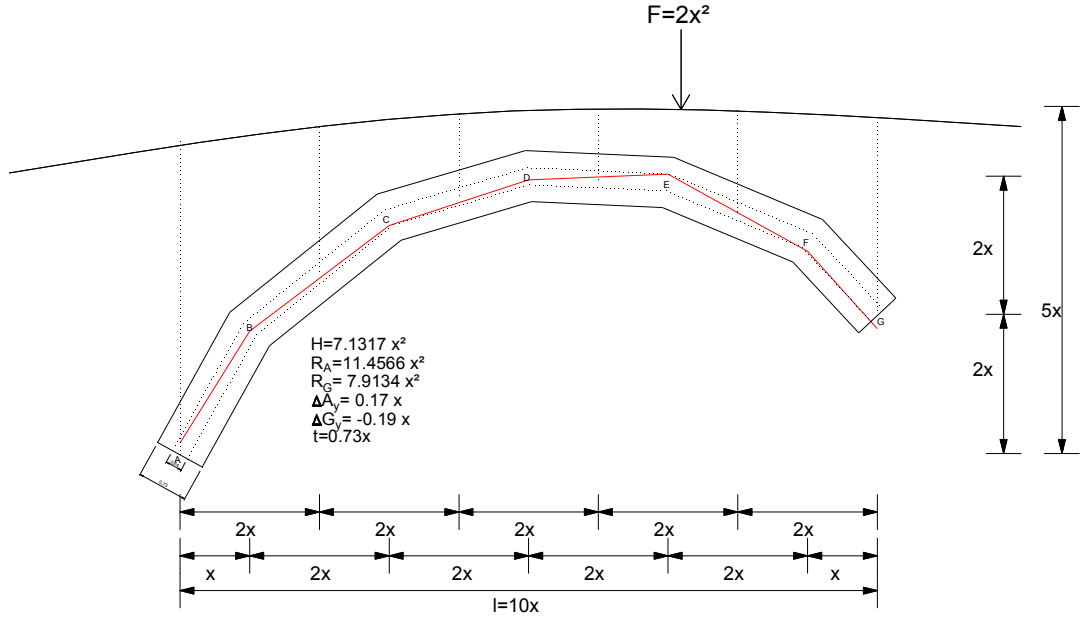
Şekil 4.32 B noktasına etkililen hareketli yük ve oluşan füniküler eğrisi

$2x^2$ 'lik hareketli yük B noktasına etkitildiğinde yatay itki kuvveti H değeri ve mesnet noktalarının ordinatlarında değişimlerle kemer merkez hattına en yakın füniküler eğrisi bulunmuştur. Kemer merkez hattına en yakın füniküler eğrisi $H=6.6317x^2$ kuvvetiyle ve G mesnetinin $0.08x$ kadar yukarı sapmasıyla oluşur. Bulunan füniküler eğrisinin kemer merkez hattıyla arasında maksimum 0.08 m'lik fark oluşmaktadır. Güvenlik faktörünün 3 olabilmesi için kemerin kalınlığının $0.08*6=0.48$ m olması gerekir. (şekil 4.32)



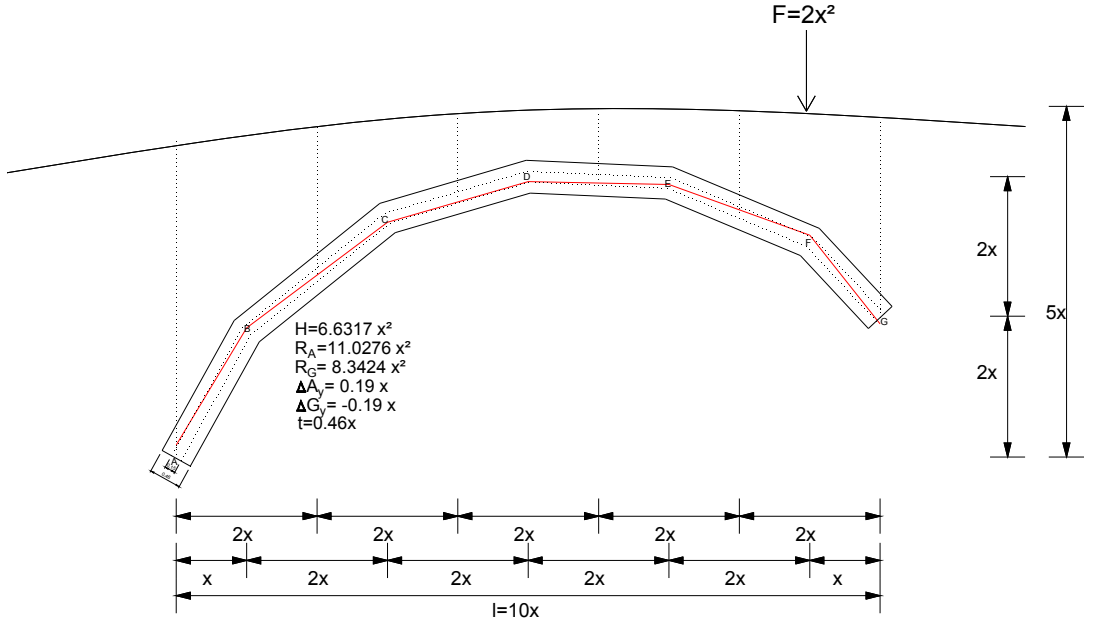
Şekil 4.33 C noktasına etkitilen hareketli yük ve oluşan fönüküler eğrisi

$2x^2$ 'lik hareketli yük C noktasına etkitildiğinde Kemer merkez hattına en yakın fönüküler eğrisi $H=7.1317x^2$ kuvvetiyle ve A mesnetinin $0.13x$ aşağı yönde, G mesnetinin $0.08x$ kadar yukarı yönde sapmasıyla oluşur. Bulunan fönüküler eğrisinin kemer merkez hattıyla arasında maksimum 0.095 m'lik fark oluşmaktadır. Güvenlik faktörünün 3 olabilmesi için kemerin kalınlığının $0.095*6=0.57$ m olması gerekir.



Şekil 4.35 E noktasına etkililen hareketli yük ve oluşan funiküler eğrisi

$2x^2$ 'lik hareketli yük E noktasına etkilendiğinde Kemer merkez hattına en yakın funiküler eğrisi $H=7.1317x^2$ kuvvetiyle ve A mesnetinin $0.17x$ yukarı yönde, G mesnetinin $0.19x$ kadar aşağı yönde sapmasıyla oluşur. Bulunan funiküler eğrisinin kemer merkez hattıyla arasında maksimum 0.1217 m'lik fark oluşmaktadır. Güvenlik faktörünün 3 olabilmesi için kemerin kalınlığının $0.1217*6=0.73$ m olması gerekir.



Şekil 4.36 F noktasına etkitilen hareketli yük ve oluşan funiküler eğrisi

Son olarak $2x^2$ 'lik hareketli yük F noktasına etkitildiğinde Kemer merkez hattına en yakın funiküler eğrisi $H=6.6317 x^2$ kuvvetiyle ve A mesnetinin $0.19x$ yukarı yönde, G mesnetinin $0.19x$ kadar aşağı yönde sapmasıyla oluşur. Bulunan funiküler eğrisinin kemer merkez hattıyla arasında maksimum 0.0767 m'lik fark oluşmaktadır. Güvenlik faktörünün 3 olabilmesi için kemerin kalınlığının $0.0767*6=0.46$ m olması gerekir. $2x^2$ lik hareketli yükü sırasıyla 5 adet düğüm noktasına etkitildi. En kritik nokta olan E noktasında güvenlik faktörünün 3 olabilmesi için kemerin kalınlığının 0.73 m olması gerekmektedir.

Gerçek bir kemerde bu analiz yapılırken kemer olabildiğince çok sayıda dilimlere ayrılmalı ve tasarım hareket yükü bu noktalara çeşitli kombinasyonlar şeklinde etkitilmelidir. Şekil 4.37 de gerçek bir tasarım problemi gözükmektedir. Kemere ait tasarım bilgileri aşağıdaki gibidir:

Açıklık: 20 m

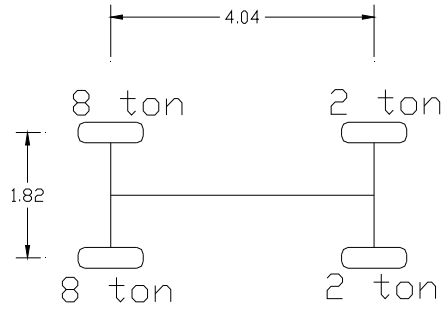
Mesnet Ordinat Farkı: 0 m

Kemer Yüksekliği= 6 m

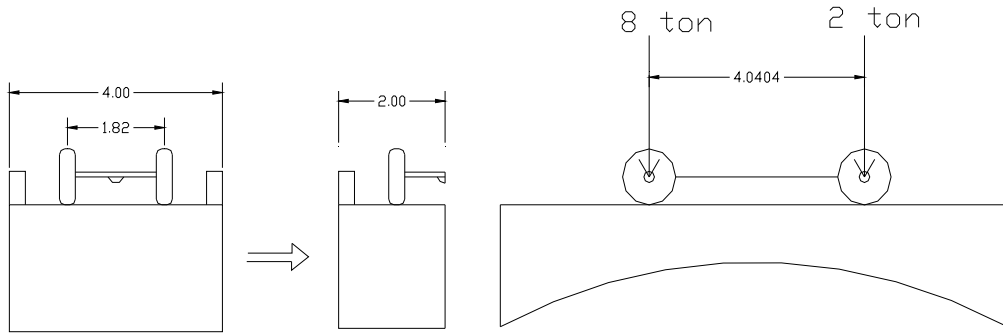
Yol Eğimi= % 0

Taç yüksekliği=1 m
Güvenlik Faktörü= 3
Kemer derinliği=4 m
Dolgu yoğunluğu= 1.8 t/m³
Hareketli yük: H20-44

İki boyutlu düzlemle hesaplar yapılacağı için kamyonun yarısını alıp (1 arka ve 1 ön teker) 4 m.'lik kemerinde yarısını alarak hesaplar yapılacaktır. (Şekil 4.38)



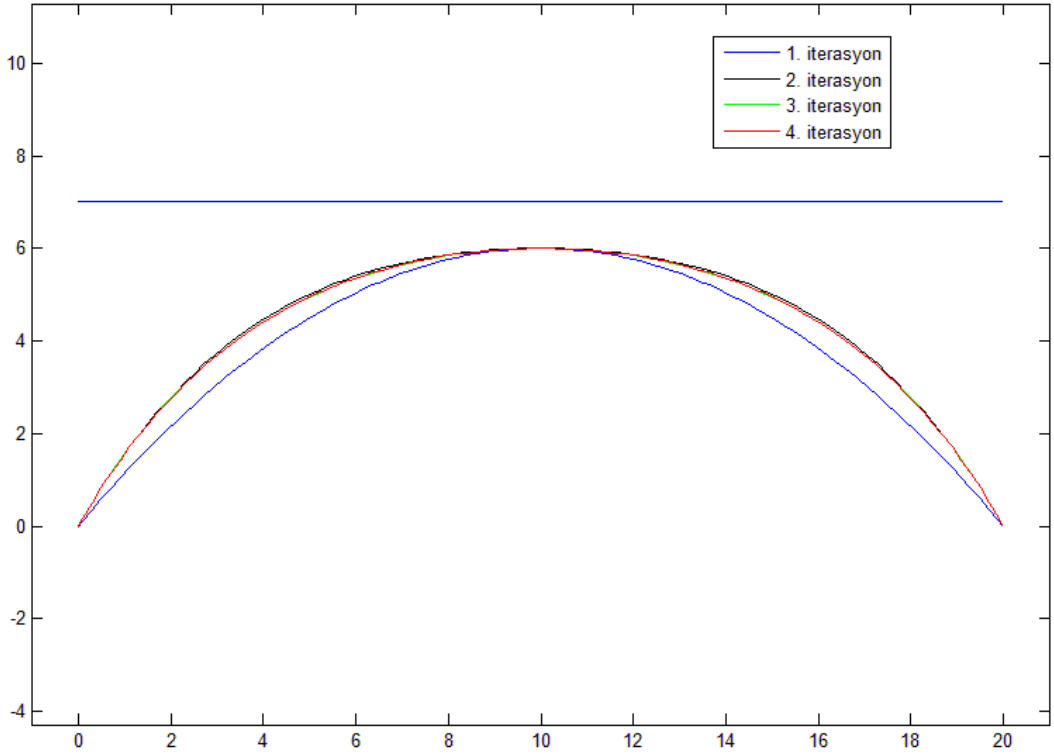
Şekil 4.37 H20-44 kamyonu yük dağılımı



Şekil 4.38 Hareketli yük ve kemerin hesap kesiti

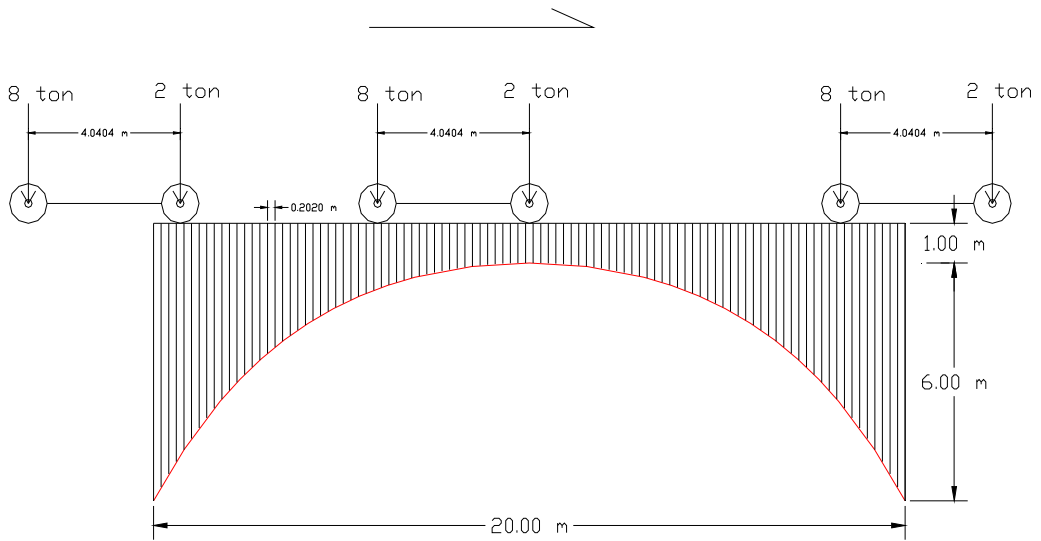
20 m açıklık 99 adet dilime bölünmüştür. Her bir dilimin genişliği 0.2020 m.'dir. Hesapta kullanılacak plan derinliği ise 2 m. olduğu için her bir dilime karşılık gelen ağırlık bulunabilir. (0.2020m*h*2m*1.8 t/m³)

Bölüm 4.4.1'e göre ölü yükler altındaki optimum funiküler eğrisi şekil 4.39'daki gibi olacaktır. 4. iterasyon sonucu kemer merkez hattı bulunmuştur.



Şekil 4.39 Kemer merkez hattının bulunuşu

Şekil 4.40'ta hareketli yükün şematik olarak kemere etkilmesi gösterilmiştir. Hareketli yük 99 adet dilimin her noktasına sırasıyla etkilmiştir. Her bir durumda funiküler eğrisini kemer merkez hattına en yakın durumu sağlayacak yatay itki kuvveti (H) ve mesnet saptmaları iteratif olarak MATLAB programıyla bulunmuştur.



Şekil 4.40 Hareketli yükün etkilmesi ve kemerin hesap dilimleri

99 adet noktaya etki ettirilen hareketli yükün oluşturduğu fönüküler eğrilerinin kemer merkez hattıyla arasındaki en fazla sapma 0.095 m ile arka tekerin başlangıçtan 14.2424 m uzaklıktayken meydana gelmektedir. Denklem 4.3'e göre fönüküler eğrisinin geçebileceği minimum kemer kalınlığı (G.F=1) $0.095*2=0.19$ m'dir. Fakat kagir kemer köprülerde güvenlik faktörü minimum 3 alınmaktadır. Bunun için kemer kalınlığı 0.542 m olarak bulunur. (Kalınlığı artan kemerin ağırlığı da hesapta dikkate alındığı için yeni kalınlık $0.19*3=0.57$ m çıkmamıştır.) 10 tonluk hareketli yük kritik noktada iken mesnetlere gelen yükler aşağıdaki gibidir:

$$R_1=109.8328 \text{ ton}, \quad H=66.7821 \text{ ton}$$

$$R_2=116.2807 \text{ ton}, \quad H=66.7821 \text{ ton}$$

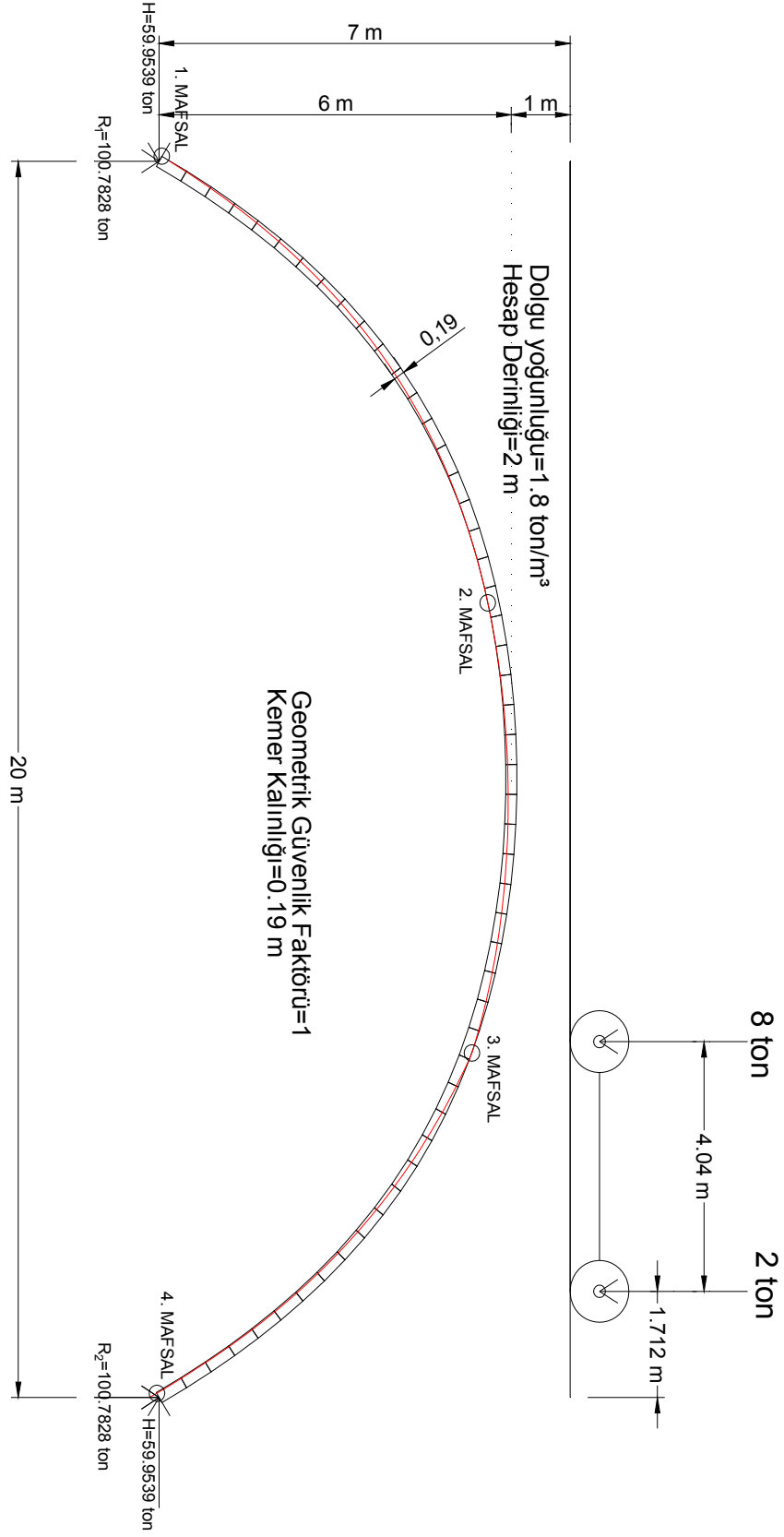
En kritik düşey gerilme 2. Mesnettedir:

$$N = \sqrt{R_2^2 + H^2}=134 \text{ ton}$$

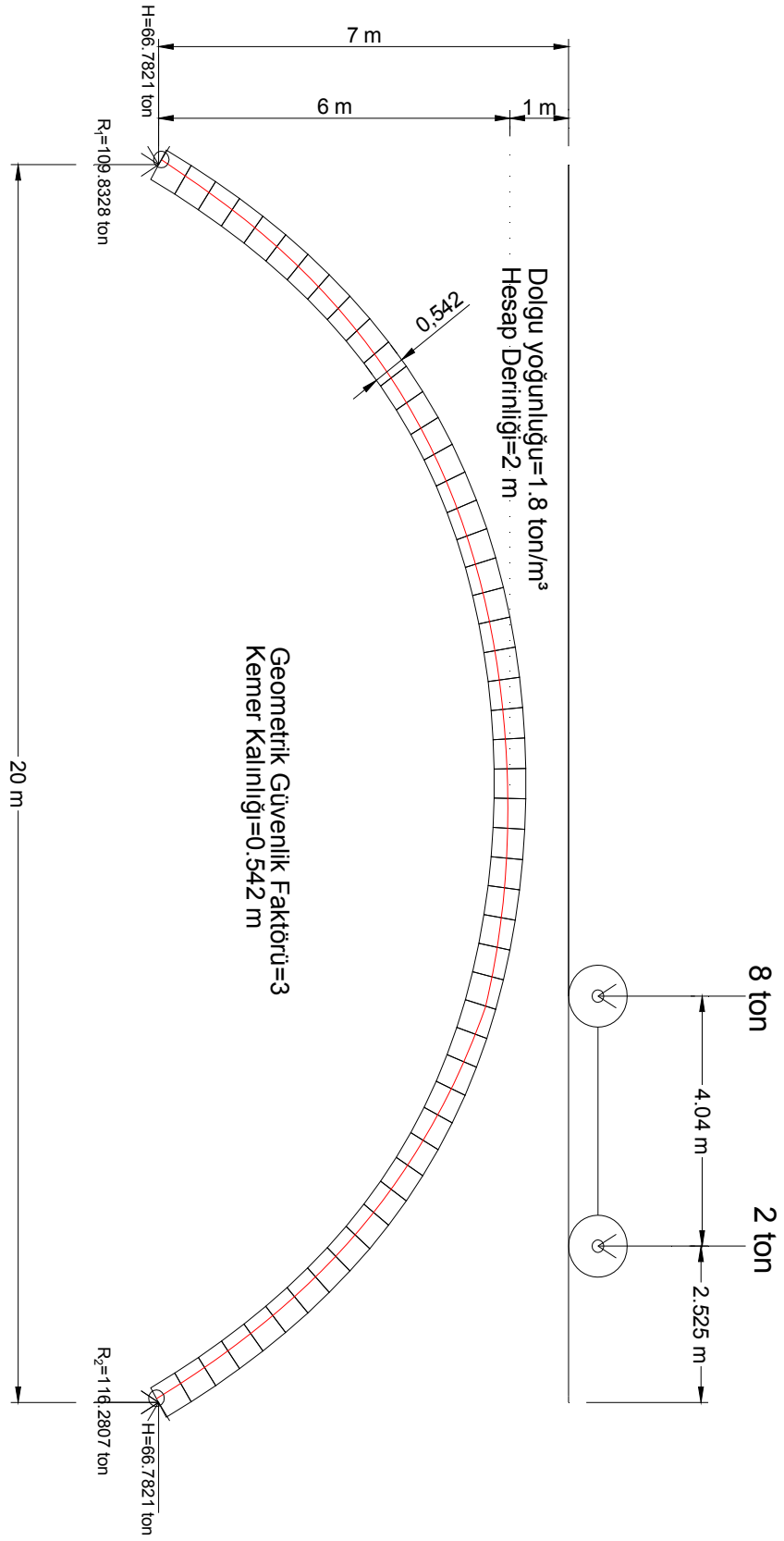
Taşıyıcı kemer taşının hesap derinliğini 2 m alınmış olup genişliği ise 0.542 m olarak bulunmuştur. 2. Mesnetteki taşın düşey gerilmesi:

$$\sigma = \frac{134,000 \text{ kg}}{200\text{cm} * 54.2 \text{ cm}} = 12.36 \text{ kg/cm}^2 \text{ 'dir.}$$

Horasan harçlı kagir malzemenin basınç emniyet gerilmesi $\sigma=15\sim30 \text{ kg/cm}^2$ (Çamlıbel, 2000) olduğu düşünülürse bulunan gerilmenin emniyet gerilmesinin altında kaldığı görülür.



Şekil 4.41Güvenlik Faktörünün 1 olduğu kemer kalınlığı ve kritik durumu



Şekil 4.42 Güvenlik faktörünün 3 olduğu kemer kalınlığı ve kritik durumu

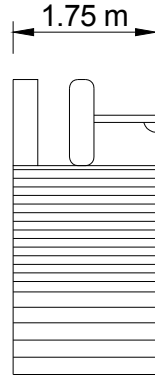
4.6. Mevcut Kemer Köprünün Tasarım Yüküne Göre Güvenlik Faktörünün Bulunması

İteratif funiküler analiz ile mevcut bir kemerin kemer merkez hattı dikkate alınarak herhangi bir yük katarı için güvenlik faktörü tespit edilebilir. Şekil 4.43'te Malabadi köprüsü görülmektedir. 40 m gibi uzun bir açıklığa sahip kagir köprünün iki yakasındaki pencere boşlukları dikkate alınarak yaklaşık geometrisi şekil 4.44'te verilmiştir.

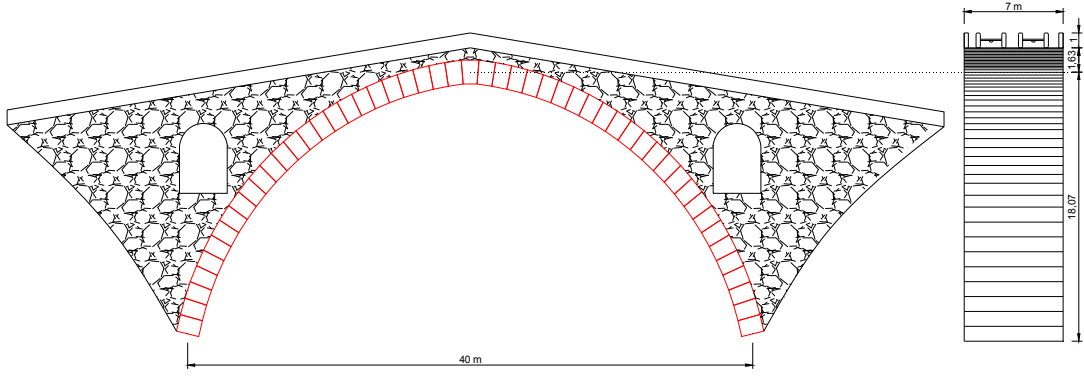


Şekil 4.43 Malabadi Köprüsü ,Silvan

7 m derinliğe sahip köprünün taşıyıcı kemer kalınlığı 1.6092 m alınmıştır. Bir önceki örnekte kullanılan H20-44 tipi yük katarı köprüye etkilmiştir. Köprü çift yönlü çalıştığı için 10 tonluk yük aksı için 1.75 m kemer derinliği dikkate alınmıştır. Hesap kolaylığı açısından her bir şeritte aynı anda birer kamyon olduğu düşünülmüştür.

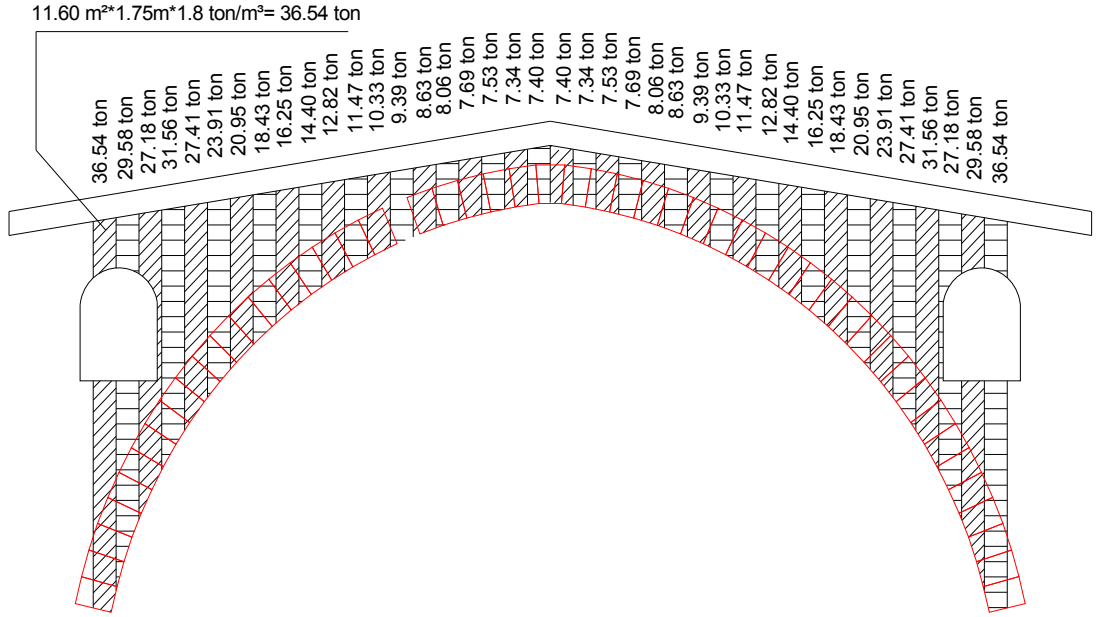


Şekil 4.44 Köprünün Hesap Kesiti



Şekil 4.45 Malabadi Köprüsünün ön ve kesit görünüşü

Köprüdeki boşluklar dikkate alınarak 1 m'lik hesap dilimlerine karşılık gelen ağırlıklar şekil gösterilmiştir. Hesapta 1.8 t/m^3 dolgu yoğunluğu ve 1.75 m kemer derinliği dikkate alınmıştır.

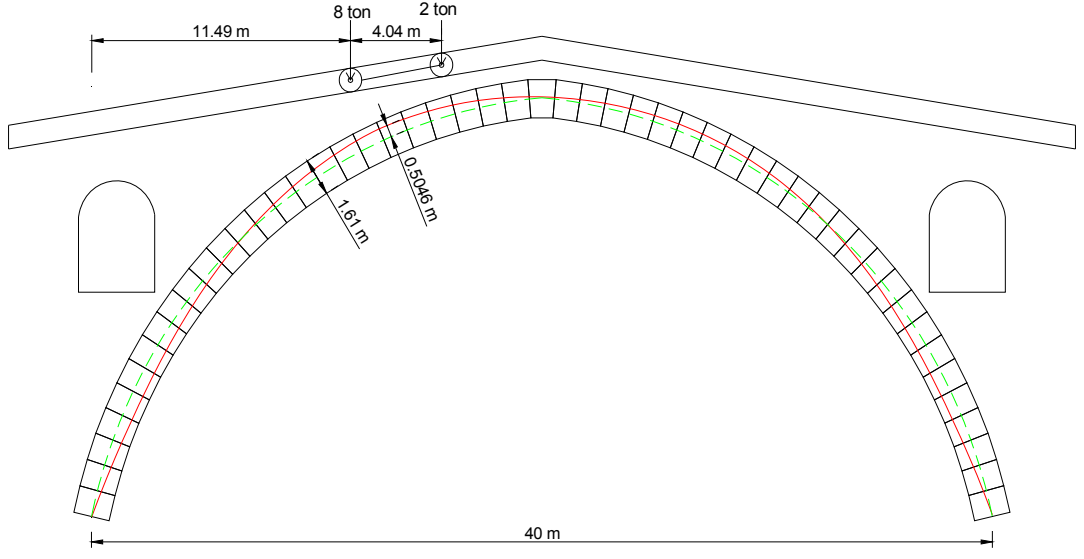


Şekil 4.46 Köprünün 1 m.'lik dilimlere ayrılması

H20-44 yük katarının köprü üzerinde en kritik noktasında, funiküler eğrisi kemer merkez hattıyla 0.5046 m'lik bir sapma yapmaktadır. Kemer kalınlığının 1.61 m olduğunu düşünürsek:

$$G.F = \frac{1.61/2}{0.5046} = 1.59$$

olarak bulunmaktadır.

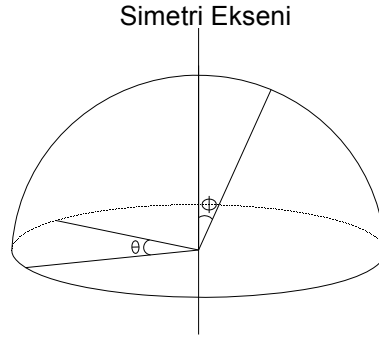


Şekil 4.47 Kritik yükleme ve funiküler eğrisi

$$\sigma = \frac{408,000 \text{ kg}}{175 \text{ cm} * 161 \text{ cm}} = 14.48 \text{ kg/cm}^2 \text{ 'dir.}$$

5. KUBBE GEOMETRİSİ OPTİMİZASYONU

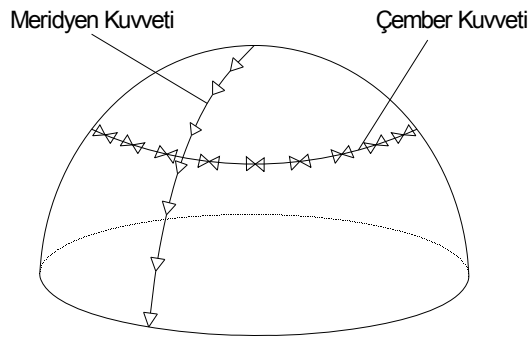
Mekan örtü sistemi olan kubbe bir eğrinin simetri eksenini etrafında döndürülmesiyle oluşur. Açıklık, yükseklik, yarıçapı, eğrilik gibi parametrelere bağlı olan sonsuz sayıda eğri elde edilebilir, eğriye bağlı olarak elde edilebilecek kubbe sayısı da teorik olarak sonsuzdur. Şekil 5-1 de kubbe geometrisini tanımlamak için kullanılan θ ve Φ açıları görülmektedir.



Şekil 5.1 Kubbe parametrik tanımını için gerekli θ ve Φ açıları

5.1. Kubbenin Yapısal Özellikleri

Kubbeler, kemerlerde olduğu gibi üzerindeki yükleri meridyen kuvveti olarak mesnet noktalarına aktarır. Bu meridyen kuvvetleri basınç kuvveti olarak kubbenin tepe noktasından başlar, mesnet noktalarına kadar artarak devam eder.



Şekil 5.2 Kubbede oluşan meridyen ve çember kuvvetleri

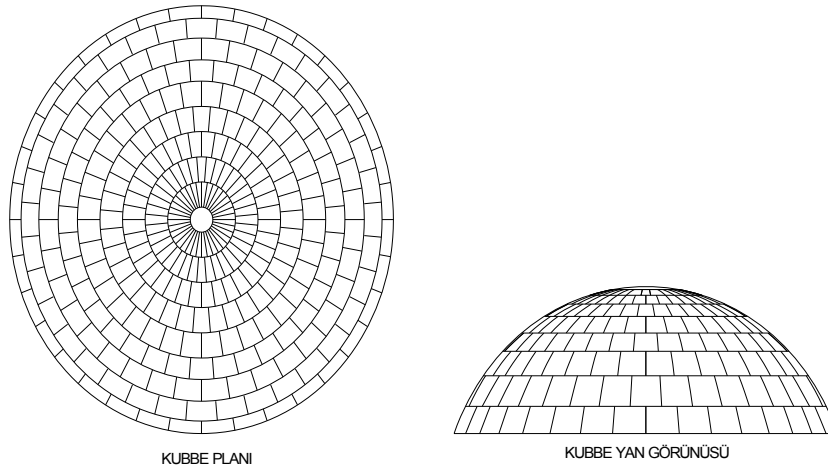
Kemerlerden farklı olarak kubbelerde meridyen kuvvetlerine dik çember kuvvetleri oluşmaktadır. Çember kuvvetlerinin yardımıyla kubbeler simit dilimleri denebilecek şekilde parça parça yapılmaya izin verir. Kemerde ise kilit taşı olmadan sistem

dengede olamaz. Kubbe ise çember kuvvetlerinin yardımıyla birkaç eksik taşı tolere edebilir, dengede kalabilir.

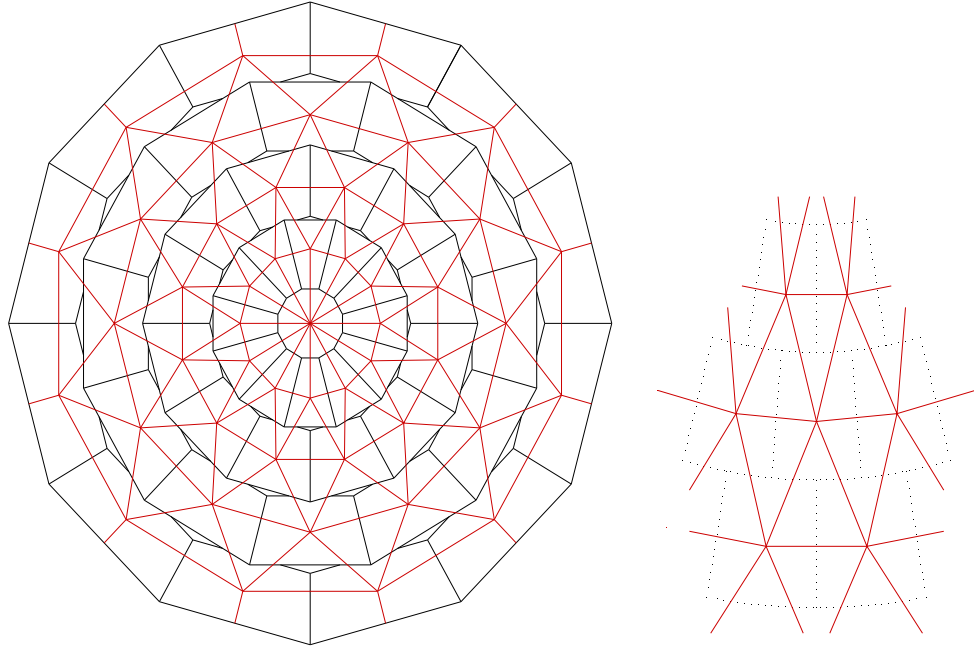
5.2. Füniküler Analizi Yönteminin Kubbeye Uygulanması

Kubbe üç boyutlu bir yapı olduğu için, kemer analizinde kullanılan füniküler eğrisinin kubbe uygulanması karmaşık gibi gözükebilir. Fakat Kubbenin kemerden farklı bir özelliği de her zaman merkez aksı etrafında simetrik olmasıdır. Bu özelliği kullanarak 3 boyutlu kubbe problemini 2 boyuta indirmek mümkün olabilmektedir.

Kemer probleminde kemeri eşit parçalara ayrılıp dolgu malzemesinden gelen yükleri bu parçaların merkezine etki ettirilerek iteratif metotla optimum kemer eğrisi bulunmuştur. Kubbelerde ise ölü yük olarak kendi ağırlığı ve üzerindeki kaplama yükünden başka bir tasarım yükü yoktur. Kubbelerin bu özelliği de kubbe geometrisi optimizasyonunda kolaylık sağlayacaktır. Kubbe yapımı kemerde olduğu gibi bir kalıp üzerine kubbeyi oluşturan taşların şaşırıtmalı biçimde yapılandırılmasıyla oluşur. Bu taşları yük unsuru olarak alıp taşın ağırlık merkezinden etkililir ve taşa etki eden diğer meridyen ve çember kuvvetleri uygun biçimde taş merkezine etkilirse, kubbeyi temsil eden füniküler ağ elde edilmiş olur.

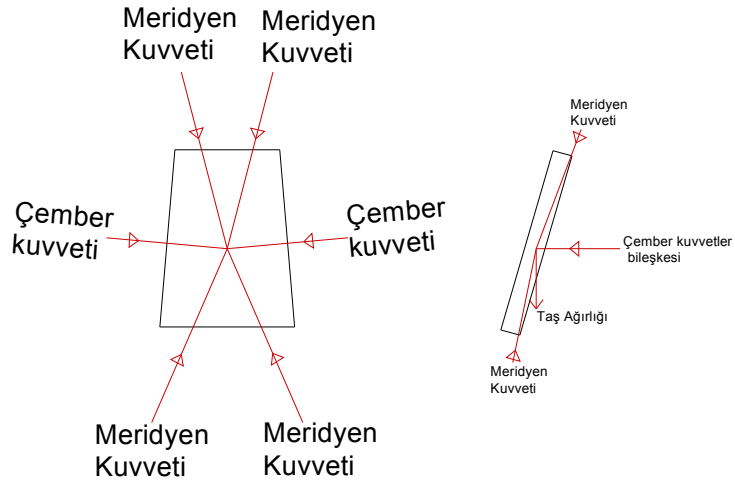


Şekil 5.3 Taşları şaşırıtmalı biçimde yerleştirilmiş bir kubbenin plan ve görünüşü.



Şekil 5.4 Kubbenin bir parçasına etki eden kuvvetlerin plan görünüşü ve detayı

Şekil 5.4 de görüldüğü üzere her bir taşa etki eden 6 kuvvet mevcuttur. Üst ve alt komşu taşların etki ettiği 4 adet meridyen kuvveti ile, yan komşu taşların etki ettiği iki adet çember kuvveti mevcuttur. Bu kuvvetlerin yanı sıra taşların kendi ağırlığından dolayı düşey yönde w kuvveti de etki etmektedir.

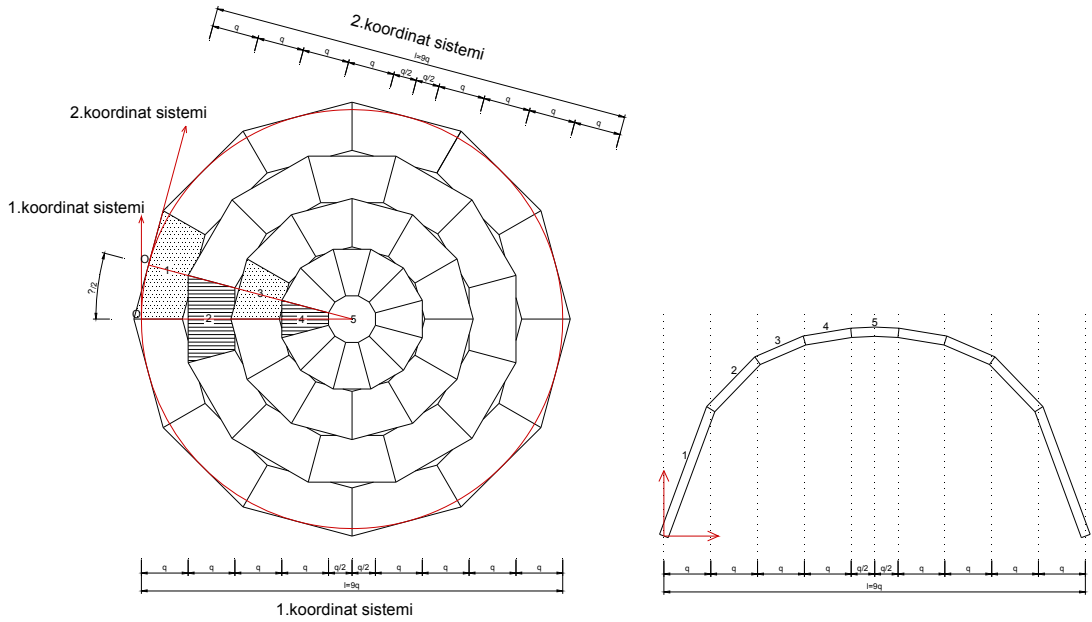


Şekil 5.5 Kubbe taşına etki eden kuvvetler

Böylece kubbeyi oluşturan bütün taşlara etki eden kuvvetler kemerde olduğu gibi funiküler çizgileriyle tanımlanmıştır.

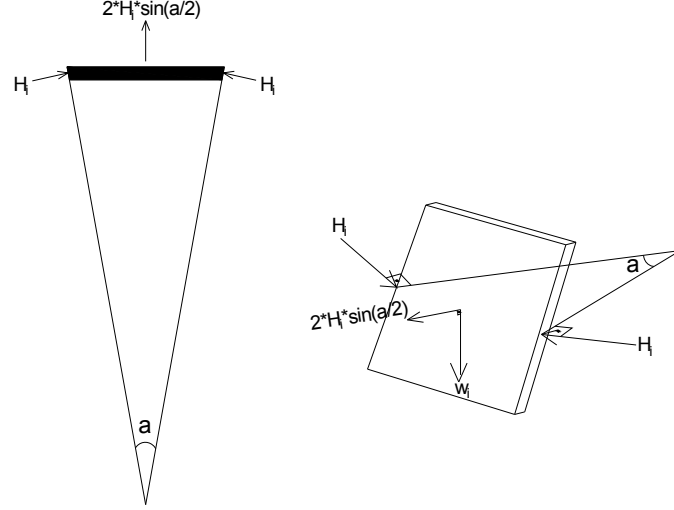
5.3. Kubbe Probleminin İki Boyuta İndirgenmesi

Bu bölümde küresel kubbeyi iki boyutlu probleme indirgeyerek, füniküler analiz yöntemi ile elde edilen çember kuvveti ve meridyen kuvvetleri, membran teorisi sonucu elde edilen değerlerle karşılaştırılacaktır. Daha sonra ise optimum kubbe geometrisi için optimizasyon yapılacaktır. İşlemlerin daha kolay anlaşılabilmesi için açısız olarak 12 eşit parçaya, ordinatı ise 4 parçaya bölünmüş şekil (5.6) da ki kubbe incelenecektir. Plan derinliği q birim olan paralelkenar taşların 4 sıra 12 şer adet yerleştirilmesinin ardından tepe noktasında yarı çapı $q/2$ birim olan kilit taşı yerleştirilmiştir. Böylece $18q$ birim açıklığa sahip bir kubbe elde edilmiş olunur. Taşların paralelkenar kabul edilmesi hesap kolaylığı amacı taşımaktadır. Taşların alan, ağırlık merkezi hesabında pratik olmak amacıyla paralelkenar taşlar kullanılmış olup, uygulamaya aksi bir durum söz konusu değildir. Hesaplarda iki çeşit koordinat sistemi kullanılacaktır. Şekil (5.6) da görüldüğü üzere 2. ve 4. Taşlar 1. Koordinat sisteminden tanımlanırken 1. ve 3. Taşlar 2. Koordinat sisteminden tanımlanmaktadır. Koordinat sistemlerinin orjinleri şekil (5.6) da gösterilmiştir.



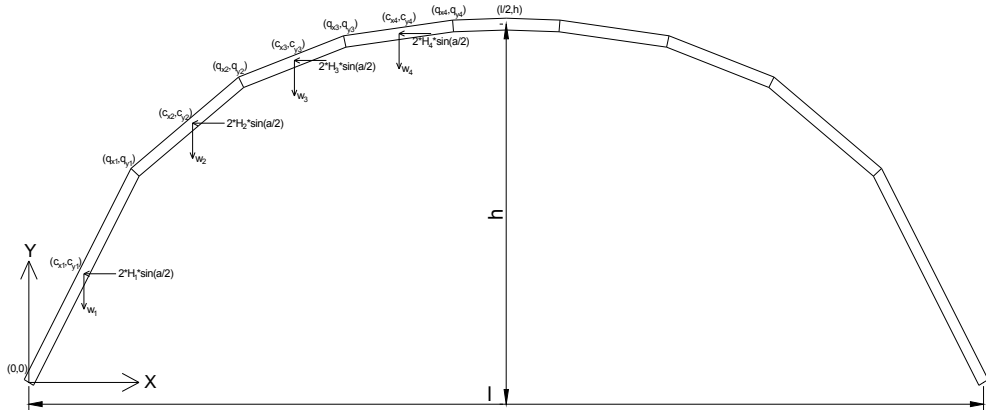
Şekil 5.6 Füniküler analizde kullanılacak koordinat sistemi

Her seviyedeki taşların üst nokta koordinatlarını qx_i , qy_i ağırlık merkezi koordinatını cx_i , cy_i , çember kuvvetlerini H_i , son olarak ağırlığını w_i olarak adlandıralım. Sistem ve yüklemeler simetrik olduğu için her bir düzeydeki çember kuvveti aynı olacaktır.



Şekil 5.7 Kubbe taşına etki eden çember kuvvetlerinin bileşkesi

Şekil 5.7 de görüldüğü üzere çember kuvvetinin bileşkesi x yönünde $2*H*\sin(\alpha/2)$ olacaktır. Her seviyedeki taş sayısı, buna bağlı olarak alfa açısı aynı olduğu için çember kuvvetlerinin kesitteki x yönünde bileşkeleri, o seviyedeki çember kuvvetlerinin $2*\sin(\alpha/2)$ katsayısı ile çarpımı olacaktır. Bu noktada hatırlanmalıdır ki çember kuvvetlerinin bileşkesi o taşın ait olduğu koordinat yönünde olacaktır. İleride bu farklılık göz önüne alınarak işlemler yapılacaktır.



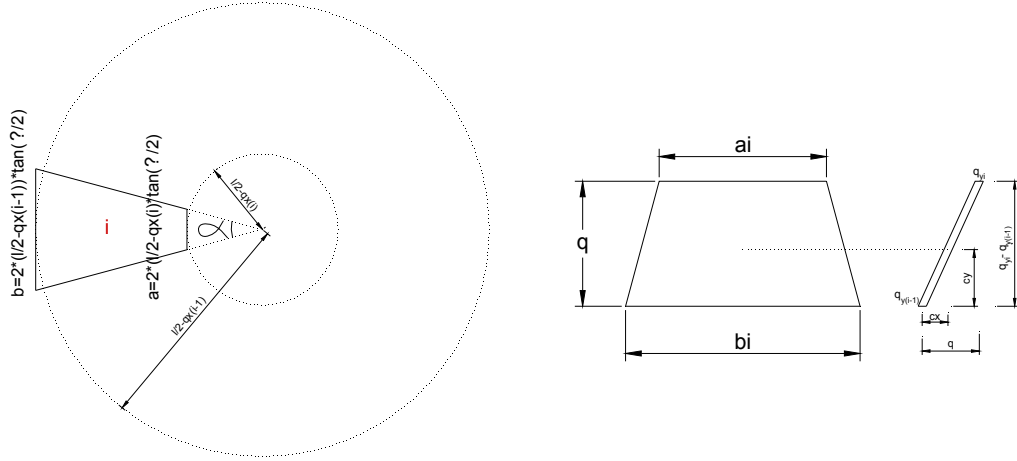
Şekil 5.8 Kubbe optimizasyonunda kullanılacak parametreler

5.3.1. Kubbe Taşlarının Ağırlık Merkezlerinin Bulunması:

Kubbeyi oluşturan taşların geometrisi eşkenar yamuk olduğu için ağırlık merkezlerinin koordinatlarını q_x ve q_y değerlerine bağlı olarak verebiliriz. Eşkenar yamuk olan taşları alt ve üst uzunlukları yarıçap ve α açısı cinsinden yazılabilir: Eşkenar yamuğun ağırlık merkezi:

$$a_i = 2 * \left(\frac{l}{2} - q_{xi}\right) * \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5.1)$$

$$b_i = 2 * \left(\frac{l}{2} - q_{x(i-1)}\right) * \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5.2)$$



Şekil 5.9 Kubbe taşlarının parametreleri

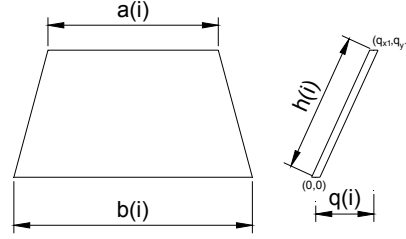
$$C_{xi} = q_{x(i-1)} + \frac{(2a_i + b_i)}{3(a_i + b_i)} * q_i \quad (5.3)$$

$$C_{yi} = q_{y(i-1)} + \frac{(2a_i + b_i)}{3(a_i + b_i)} * (q_{yi} - q_{y(i-1)}) \quad (5.4)$$

Burada dikkat edilmesi gereken nokta ağırlık merkezi koordinatları taşın ait olduğu koordinat sistemine göre verilmiştir.

5.3.2. Kubbe Taş Alanlarının Bulunması:

Eşkenar yamuğun alanı:



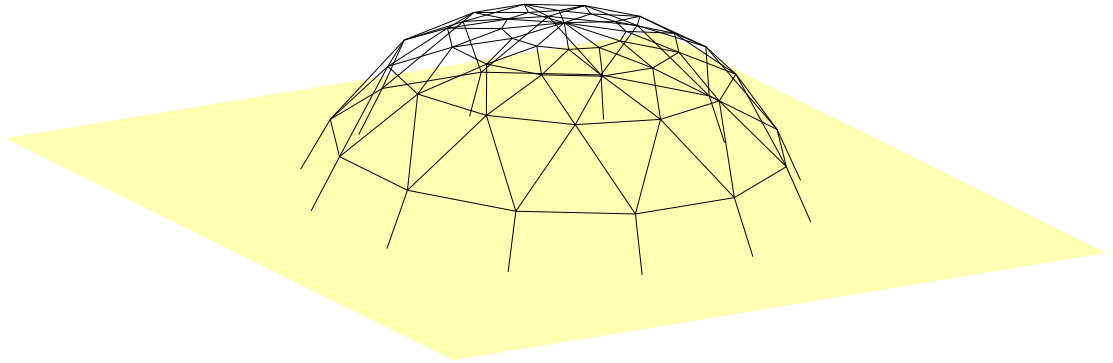
Şekil 5.10 Taş alanlarının bulunması

Taşların kendi düzlemindeki derinlikleri denklem (5.5) te verilmiştir:

$$A_i = \frac{(a_i + b_i) * h(i)}{2}, \quad h(i) = \left[(q_i)^2 + (q_{yi} - q_{y(i-1)})^2 \right] \quad (5.5)$$

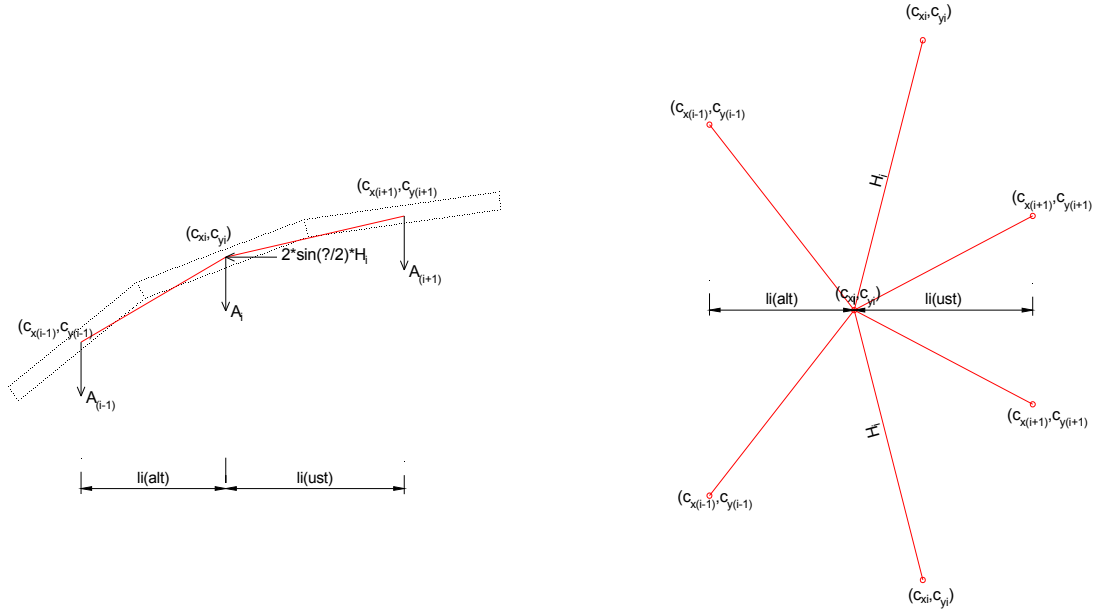
5.3.3. Çember Kuvvetlerinin Bulunması

Çember kuvvetlerini kesişim noktalarındaki yatay kuvvet denkleği sayesinde bulabiliriz. Şekil (5.11) de kubbede oluşturmuş olduğumuz üç boyutlu füniküler hatları gözükmektedir.



Şekil 5.11 3 boyutlu füniküler eğri hattı

Herhangi bir düğüm noktasını ele alırsak çember kuvvetini ağırlık merkezi koordinatlarına doğal olarak q_x , q_y değerlerine bağlı olarak yazabiliriz:



Şekil 5.12 Düğüm noktası detayı

$$l_{i(alt)} = c_x(i) - c_x(i-1) * \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5.6)$$

$$l_{i(ust)} = c_x(i+1) - c_x(i) * \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (5.7)$$

$$H_i * 2 * \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sum_{j=i}^n A(j) * \left(\frac{l_{i(alt)}}{c_{y(i)} - c_{y(i-1)}}\right) - \sum_{j=i+1}^n A(j) * \left(\frac{l_{i(ust)}}{c_{y(i+1)} - c_{y(i)}}\right) \quad (5.8)$$

$$H_i = \frac{1}{2 * \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} * \sum_{j=i}^n A(j) * m(2 * i - 1) - \sum_{j=i+1}^n A(j) * m(2 * i) \quad (5.9)$$

$$m(2 * i - 1) = \left(\frac{l_{i(alt)}}{c_{y(i)} - c_{y(i-1)}}\right), \quad m(2 * i) = \left(\frac{l_{i(ust)}}{c_{y(i+1)} - c_{y(i)}}\right) \quad (5.10)$$

5.4. Optimizasyonda Kullanılacak Metodun Membran Teorisiyle Karşılaştırılması

Membran teorisi yardımıyla küresel kubbedeki çember gerilmelerini önceki konularda hesaplamıştık. Füniküler analizle küresel bir kubbeyi analiz edip çıkan çember kuvvetlerini membran teorisi ile karşılaştıralım. Her ne kadar kağıt kubbenin analizinde elastik metotlar kullanılması uygun olmasa da mertebeye elde edilen karşılıklı değerler kullanılacak metot hakkında bilgi verecektir.

Açıklığı 20 m olan küresel kubbenin füniküler analiz ile çember kuvvetlerini bulalım:

Denklem (5.11) de açıklığı 20 m olan küresel kubbenin denklemi verilmiştir. Bu denkleme göre istenilen noktalarda kubbenin koordinatları (qx,qy) elde edilir. Kubbeyi füniküler analiz için dilimlere ayırmak gerekir, kullanılacak taşın boyutlarına göre optimizasyon şekillenecektir. Kubbeyi ne kadar çok açısall ve meridyenel dilimlere ayrılırsa o kadar doğru sonuç elde edilecektir. Başlangıçta kubbeyi 10 adet yatay dilime ve 100 eşit açısall parçaya (her bir dilim=3.6°) bölünmüş küresel kubbe üzerinde hesaplarımızı yapalım.

Yarım çemberin denklemi:

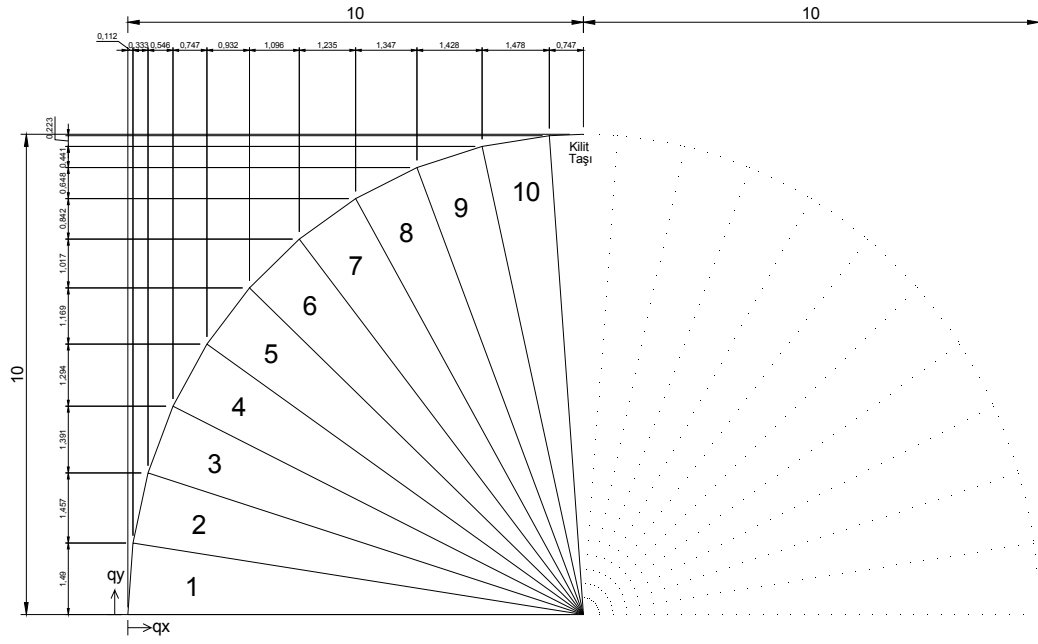
$$y = \sqrt{10 - (x - 10)^2} \quad (5.11)$$

Formüle göre bulunan qx, qy ve hesap noktalarına karşılık gelen Φ açıları:

qx=[0.1117 0.4443 0.9903 1.7376 2.6695 3.7651 5.0000 6.3466 7.7748 9.2527] m

qy=[1.4904 2.9476 4.3388 5.6332 6.8017 7.8183 8.6603 9.3087 9.7493 9.9720] m

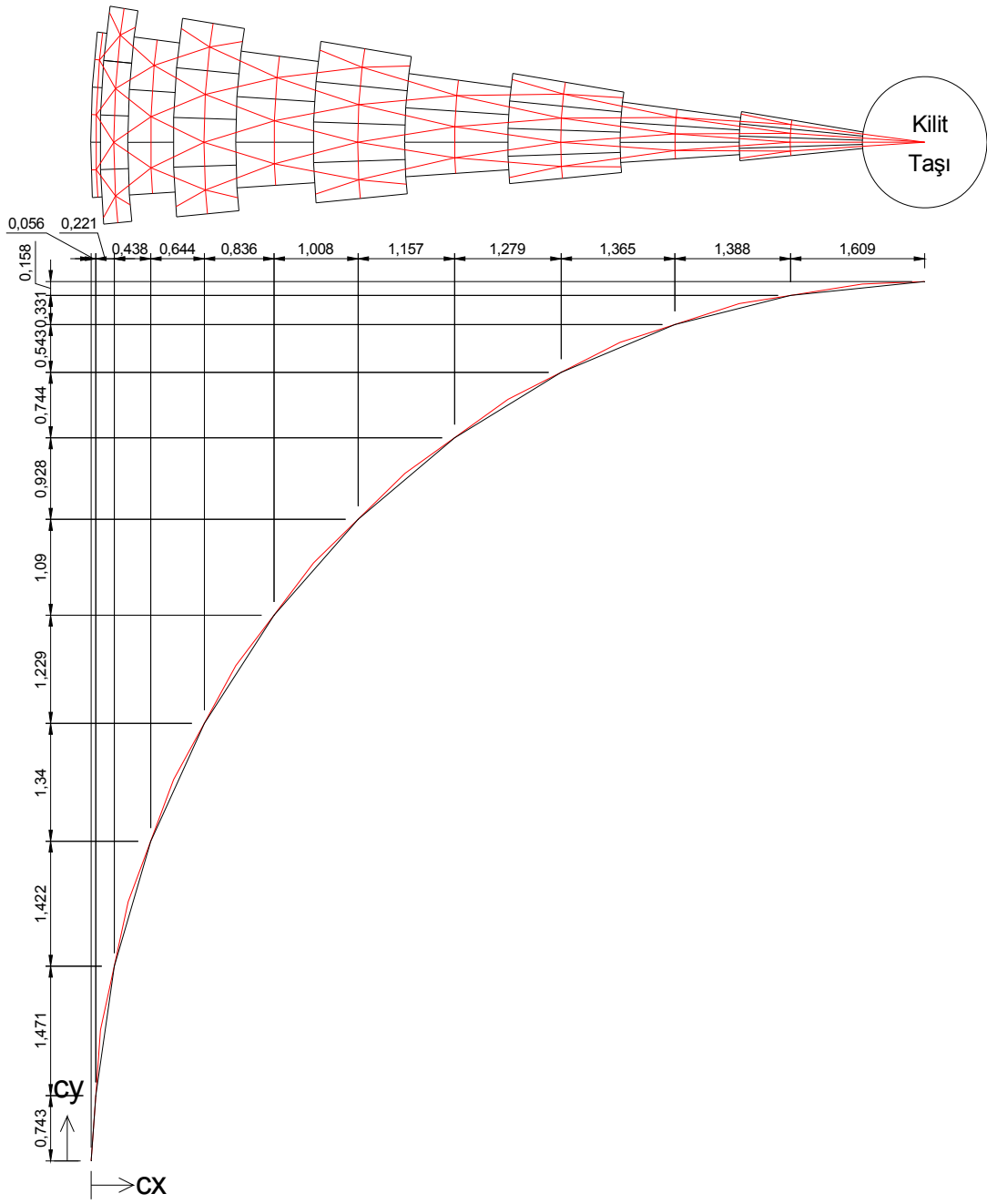
Φ =[81.4286 82.5871 64.2857 55.7143 47.1429 38.5714 30.00 21.4286 12.8571 4.2857]



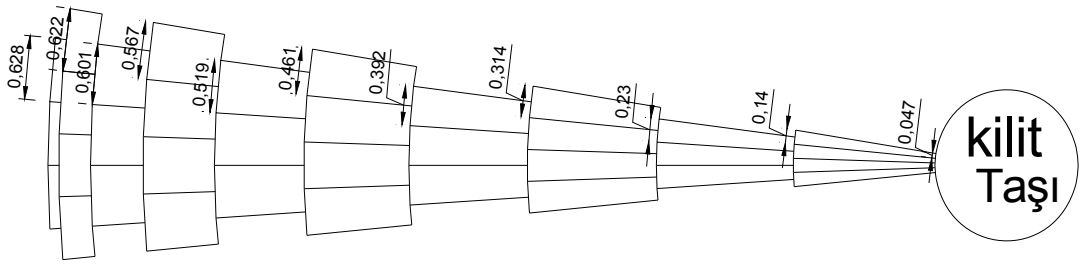
Şekil 5.13 Küresel kubbenin düşey dilimlere ayrılması

$$cx=[0.0557 \ 0.2770 \ 0.7146 \ 1.3576 \ 2.1943 \ 3.2025 \ 4.3599 \ 5.6384 \ 7.0029 \ 8.3913 \ 10] \text{ m}$$

$$cy=[0.7438 \ 2.2148 \ 3.6364 \ 4.9767 \ 6.2058 \ 7.2963 \ 8.2239 \ 8.9677 \ 9.5112 \ 9.8422 \ 10] \text{ m}$$



Şekil 5.14 Taşların ağırlık merkezi ve funiküler hattı

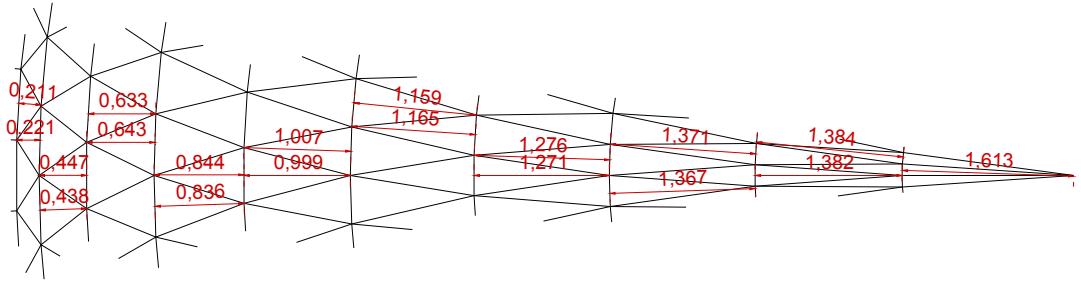


Şekil 5.15 Taşların alt ve üst uzunlukları

Taşların ağırlıkları her bir meridyen dilimindeki tek bir taşın ağırlığı hesaplanmıştır. Hesap kolaylığı açısından kubbenin öz kütlesini 1 t/m² ve derinliğini 1 m olarak varsayar ise taşların alanı aynı zamanda kütleyi verecektir.

$w = [0.9341 \ 0.9133 \ 0.8720 \ 0.8113 \ 0.7324 \ 0.6372 \ 0.5277 \ 0.4064 \ 0.2761 \ 0.1395 \ 0.0176]$ ton

Çember kuvvetinin hesabında kullanılacak eğimler denklem (5.10)'a göre hesaplanmıştır.



Şekil 5.16 Eğim için kullanılacak plan uzunlukları

$$m(2 * i - 1) = \left(\frac{l_{i(alt)}}{cy_{(i)} - cy_{(i-1)}} \right), \quad m(2 * i) = \left(\frac{l_{i(ust)}}{cy_{(i+1)} - cy_{(i)}} \right)$$

$m = [13.3441 \ 6.5063 \ 6.7981 \ 3.2150 \ 3.2846 \ 2.0677 \ 2.0963 \ 1.4641 \ 1.4783 \ 1.0780 \ 1.0857 \ 0.7995 \ 0.8037 \ 0.5808 \ 0.5831 \ 0.3979 \ 0.3989 \ 0.2383 \ 0.2387 \ 0.0981]$

Çember kuvvetleri:

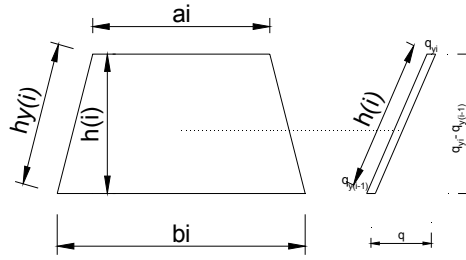
$$H_i = \frac{1}{2 * \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} * \sum_{j=i}^n w(i) * m(2 * i - 1) - \sum_{j=i+1}^n w(i) * m(2 * i)$$

$$\alpha=360/100=3.6$$

$$H=[-5.5721 -9.3971 -5.8949 -2.8146 -0.1308 2.1638 4.0692 5.5899 6.7889 7.6328]$$

ton. (çekme kuvveti=(-), basınç kuvveti=(+)

Bu çember kuvvetleri 10 adet çember kuvvetini temsil eden füniküler hatlarının taşıdığı yüklerdir. Membran teorisinde elde edilen çember ve meridyen kuvvetleri gerilme birimi (t/m) olduğu için burada hesaplanan çember kuvvetlerini temsil ettiği taşın çember kuvvetine dik tarafının uzunluğuna $h_y(i)$ bölerek gerilme dağılımını elde edebiliriz.



$$h_y(i) = \sqrt{h_i^2 + \left(\frac{b_i - a_i}{2}\right)^2} \quad (5.11)$$

$$h_y=[1.4953 1.4953 1.4952 1.4951 1.4950 1.4949 1.4948 1.4947 1.4946 1.4946]$$

Birim uzunluğa etki eden çember kuvveti (H_b)

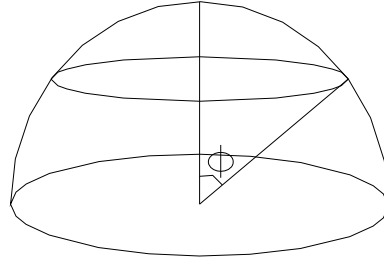
$$H_b(i) = H(i)/h_y(i) \text{ ton/m}$$

$$H_b=[-3.7282 -6.2872 -3.9439 -1.8829 -0.0875 1.4474 2.7217 3.7386 4.5402 5.1045]$$

ton /m

Füniküler eğrilerini tabandan numaralandırdığımız için elde edilen çember kuvvetlerinin açısal değerleri sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\Phi=[81.4286 82.5871 64.2857 55.7143 47.1429 38.5714 30.00 21.4286 12.8571 4.2857]$$



Şekil 5.17 Küresel kubbede ki Φ açısı

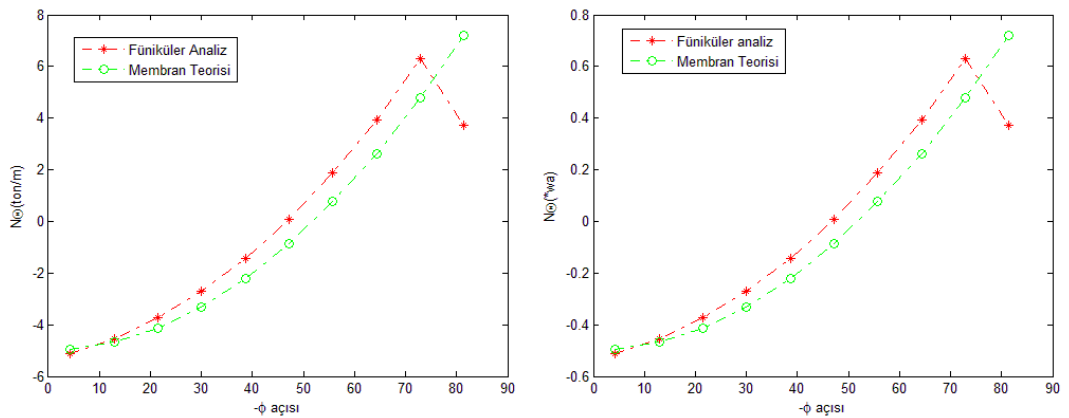
Membran teorisine göre çember kuvvetleri:

$N_{\theta} = wa \left[\frac{1}{1+\cos\theta} - \cos\theta \right]$ denkleminde membran teorisine göre çember kuvvetleri bulunur:

$\Phi = [81.4286 \ 82.5871 \ 64.2857 \ 55.7143 \ 47.1429 \ 38.5714 \ 30.00 \ 21.4286 \ 12.8571 \ 4.2857]$

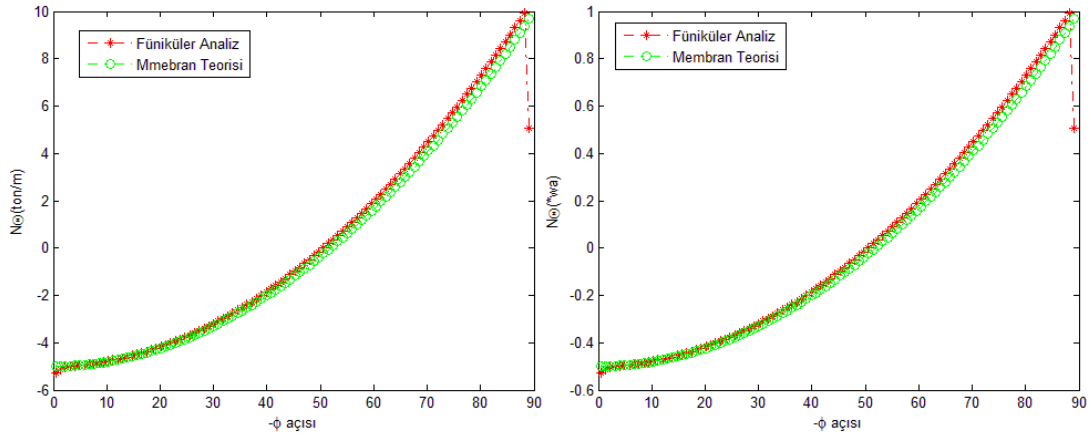
$H_{membran} = [7.2125 \ 4.7759 \ 2.6352 \ 0.7634 \ 0.8500 \ -2.2061 \ -3.3013 \ -4.1297 \ -4.6858 \ -4.9650]$ ton

Not: Membran teorisinde çekme kuvveti pozitif basınç kuvveti negatif olarak çıkmaktadır. Füniküler analizde başlangıçta basınç kuvvetini pozitif varsaydığımız için karşılaştırma yaparken füniküler analiz sonuçlarının işaretini değiştirmeliyiz.



Şekil 5.18 Membran teorisi ile füniküler analiz karşılaştırması

Görüldüğü üzere membran teorisinin sonuçlarıyla optimizasyonda kullanılacak teknik yakınlık arz etmektedir. Mesnetteki taşa etki eden çember kuvveti hariç diğer çember kuvvetleri yakınlık göstermektedir. Aynı kubbeyi 100 yatay dilime ve 1000 açısal dilime bölerek analiz yapıp membran teorisi ile karşılaştırsak aşağıdaki sonuç elde edilecektir:



Şekil 5.19 1000 açısal,100 meridyenel dilime bölünmüş küresel kubbenin membran teorisi ve füniküler analiz sonuçlarının karşılaştırılması

Şekil 5.19'da görüldüğü gibi 100 adet çember kuvvetinden sadece mesnetteki taşa etki eden çember kuvveti farklılık arz etmektedir. Bu fark mesnet koşullarından ileri gelmektedir. Membran teorisinde mesnetler mafsallı kabul edilirken, füniküler analizde ise mesnetteki taşa sade düşey ve yatay kuvvetin bileşkesi (mesnetteki meridyenel füniküler hattı) etki etmektedir. Yani çember kuvveti yönünde herhangi bir hareket kısıtlaması yoktur.

5.5. Kubbe Geometrisi Optimizasyonu

Kubbeyi inşaat tekniğine uygun olarak şaşırtmalı taşlar şeklinde alıp her bir taşa etki eden kuvvetleri analiz ettik. Bu kuvvetler sonucu oluşan füniküler hattını oluşturduk. Küresel kubbeden hatırlanacağı üzere meridyen açısının 52.8° den sonrası çember kuvvetleri çekme kuvvetine geçmekte tabana kadar artarak devam etmekteydi.

Bu bölümde istenilen açıklık ve yükseklik değerleri için kubbe boyunca bütün çember kuvvetlerini olabilecek en yüksek değerde basınç kuvveti yapan geometri bulunacaktır. Kubbeyi füniküler hatları ile temsil ettiğimizden dolayı, çember

kuvvetlerini temsil eden föniküler hatları taş yatay uzunluklarına etki etmeyecektir. Bunun için optimize edilecek çember kuvvetlerini etki ettiği taşın çember kuvvetine dik yöndeki uzunluğuna bölerek, eşit gerilme dağılımı elde edilmeye çalışılacaktır. Optimizasyon için MATLAB R2010 Optimization Toolbox paketi kullanılacak olup paketteki “fminimax” fonksiyonu kullanılacaktır. Fminimax fonksiyonu, belirli lineer ve nonlineer eşitsizlik ve eşitliklere uyarak verilen denklemlerin maksimum değerini minimize eden çok kullanışlı bir fonksiyondur. Matematiksel olarak fminimax fonksiyonun tanımını aşağıdaki gibidir:

$$\min_x \max_i F_i(x) \quad \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \quad (5.12)$$

Fakat kemer probleminde amaç basınç kuvveti olan çember kuvvetlerinin minimum olanını maksimize etmektir. Yani elde edilebilecek en yüksek çember basınç kuvveti dağılımını sağlamaktır. Bunun için aynı fonksiyonu aşağıdaki değişiklikle (denklem 5.3) kullanabiliriz. Bu durumda çember kuvvetlerinin işareti değişmiş olup negatif olan çember kuvvetlerinin en büyük değerini minimize edecektir. Yani gerçek çember kuvvetlerinin minimum değerini maksimize etmiş olacaktır. Sadece optimizasyon sonucu elde edeceğimiz negatif çekme kuvvetlerinin işaretini pozitif çevirmek yeterli olacaktır. Bu bölümde çember kuvvetlerinin yönünü basınç kuvveti olarak tanımlandığı için basınç kuvvetini pozitif olarak atayacağız.

$$\max_x \min_i F_i(x) = -\min_x \max_i (-F_i(x)) \quad (5.13)$$

Kubbe optimizasyonunda problemin çözümüne yardımcı olacak eşitsizlik taşların tepe nokta koordinatları olan qy değerlerinin birbirleri arasındaki koşuldur:

$$0 < qy_i < qy_{i+1} < qy_{i+2} < \dots < qy_n < h \quad (5.14)$$

Problemin çözümü için denklem (5.14) deki eşitsizliğe uyan bir başlangıç değerine ihtiyaç vardır. Bu değeri de 0 dan tepe noktası h değerine lineer olarak artan qy değerleri olabilir.

Açıklığı 20 m olan Yüksekliği 10 m olan kubbenin optimum geometrisini bulalım:

Optimize yapacağımız kubbenin q_x değerlerini kubbe geometrisi bilinmediği için kendimiz karar vereceğiz. 0.2 m yarıçaplı kilit taşı olduğunu düşünerek 14 eşit yatay dilime bölelim. Kubbeyi planda da 360 eşit parçaya bölünürse.

$$\alpha = 360^\circ / 360 = 1^\circ$$

$$q = (10 - 0.2) / 14 = 0.7 \text{ m}$$

$$q_x = [0.7, 1.4, 2.1, 2.8, 3.5, 4.2, 4.9, 5.6, 6.3, 7, 7.7, 8.4, 9.1, 9.8]$$

$$q_y = [q_{y1}, q_{y2}, q_{y3}, q_{y4}, q_{y5}, q_{y6}, q_{y7}, q_{y8}, q_{y9}, q_{y10}, q_{y11}, q_{y12}, q_{y13}, q_{y14}]$$

$$c_x = [0.3458 \ 1.0454 \ 1.7451 \ 2.4446 \ 3.1440 \ 3.8434 \ 4.5425 \ 5.2414 \ 5.9399 \ 6.6378 \ 7.3346 \ 8.0291 \ 8.7173 \ 9.3758 \ 10]$$

$$c_y(1) = 0.494 * q_{y1}$$

$$c_y(2) = 0.5065 * q_{y1} + 0.4935 * q_{y2}$$

$$c_y(3) = 0.5071 * q_{y2} + 0.4929 * q_{y3}$$

.....

$$c_y(14) = 0.6061 * q_{y13} + 0.3939 * q_{y14}$$

$$c_y(15) = 10;$$

Taşların alanları denklem (5.5)'e göre hesaplanırsa q_y değerlerine bağlı bilinmeyenler elde edilir.

$$W(1) = 0.1684 * (q_{y1}^2 + 0.49)^{1/2}$$

$$W(2) = 0.1562 * ((q_{y1} - 1.0 * q_{y2})^2 + 0.49)^{1/2}$$

$$W(3) = 0.144 * ((q_{y2} - 1.0 * q_{y3})^2 + 0.49)^{1/2}$$

.....

.....

$$W(14) = 0.0096 * ((q_{y13} - 1.0 * q_{y14})^2 + 0.49)^{1/2}$$

$$W(\text{kilit}) = 0.001745 * ((q_{y14} - 10.0)^2 + 0.04)^{1/2}$$

Meridyen föniküler hatların eğimleri:

$$m(1) = 1.429 * q_{y1}$$

$$m(2) = 0.01795 * q_{y1} + 0.705 * q_{y2}$$

$$m(3)= 0.01796*qy1 + 0.7057*qy2$$

.....

$$m(28)= 16.02 - 0.6311*qy14 - 0.9709*qy13$$

Çember kuvvet gerilmeleri (ton/m):

$$H_i = \frac{1}{2 * \sin(\frac{\alpha}{2})} * \sum_{j=i}^n w(i) * m(2 * i - 1) - \sum_{j=i+1}^n w(i) * m(2 * i)$$

$$H_b(i)= H(i)/h_y(i) \text{ ton/m}$$

$$H_b(1)= (40.11*(0.1684*(qy1^2 + 0.49)^(1/2) + 0.001745*((qy14 - 10.0)^2 + 0.04)^(1/2) + 0.04625*((qy10 - 1.0*qy11)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.03403*((qy11 - 1.0*qy12)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.02182*((qy12 - 1.0*qy13)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.0096*((qy13 - 1.0*qy14)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.1562*((qy1 - 1.0*qy2)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.144*((qy2 - 1.0*qy3)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.1318*((qy3 - 1.0*qy4)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.1196*((qy4 - 1.0*qy5)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.05847*((qy10 - 1.0*qy9)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.1073*((qy5 - 1.0*qy6)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.09512*((qy6 - 1.0*qy7)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.08291*((qy7 - 1.0*qy8)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.07069*((qy8 - 1.0*qy9)^2 + 0.49)^(1/2))/((qy1*(qy1^2 + 0.49)^(1/2)) - (57.3*(0.001745*((qy14 - 10.0)^2 + 0.04)^(1/2) + 0.04625*((qy10 - 1.0*qy11)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.03403*((qy11 - 1.0*qy12)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.02182*((qy12 - 1.0*qy13)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.0096*((qy13 - 1.0*qy14)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.1562*((qy1 - 1.0*qy2)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.144*((qy2 - 1.0*qy3)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.1318*((qy3 - 1.0*qy4)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.1196*((qy4 - 1.0*qy5)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.05847*((qy10 - 1.0*qy9)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.1073*((qy5 - 1.0*qy6)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.09512*((qy6 - 1.0*qy7)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.08291*((qy7 - 1.0*qy8)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.07069*((qy8 - 1.0*qy9)^2 + 0.49)^(1/2)))/((0.01795*qy1 + 0.705*qy2)*(qy1^2 + 0.49)^(1/2))$$

$$H_b(2)= (0.1*((qy14 - 10.0)^2 + 0.04)^(1/2) + 2.65*((qy10 - 1.0*qy11)^2 + 0.49)^(1/2) + 1.95*((qy11 - 1.0*qy12)^2 + 0.49)^(1/2) + 1.25*((qy12 - 1.0*qy13)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.55*((qy13 - 1.0*qy14)^2 + 0.49)^(1/2) + 8.95*((qy1 - 1.0*qy2)^2 + 0.49)^(1/2) + 8.25*((qy2 - 1.0*qy3)^2 + 0.49)^(1/2) + 7.55*((qy3 - 1.0*qy4)^2 + 0.49)^(1/2) + 6.85*((qy4 - 1.0*qy5)^2 + 0.49)^(1/2) + 3.35*((qy10 - 1.0*qy9)^2 + 0.49)^(1/2) + 6.15*((qy5 - 1.0*qy6)^2 + 0.49)^(1/2) + 5.45*((qy6 - 1.0*qy7)^2 + 0.49)^(1/2) + 4.75*((qy7 - 1.0*qy8)^2 + 0.49)^(1/2) + 4.05*((qy8 - 1.0*qy9)^2 + 0.49)^(1/2))/(((qy1 - 1.0*qy2)^2 + 0.49)^(1/2)*(0.01796*qy1 + 0.7057*qy2)) - (1.0*(0.1*((qy14 - 10.0)^2 + 0.04)^(1/2) + 2.65*((qy10 - 1.0*qy11)^2 + 0.49)^(1/2) + 1.95*((qy11 - 1.0*qy12)^2 + 0.49)^(1/2) + 1.25*((qy12 - 1.0*qy13)^2 + 0.49)^(1/2) + 0.55*((qy13 - 1.0*qy14)^2 + 0.49)^(1/2) + 8.25*((qy2 - 1.0*qy3)^2 + 0.49)^(1/2) + 7.55*((qy3 - 1.0*qy4)^2 + 0.49)^(1/2) + 6.85*((qy4 - 1.0*qy5)^2 + 0.49)^(1/2) + 3.35*((qy10 - 1.0*qy9)^2 + 0.49)^(1/2) + 6.15*((qy5 - 1.0*qy6)^2 + 0.49)^(1/2) + 5.45*((qy6 - 1.0*qy7)^2 + 0.49)^(1/2) + 4.75*((qy7 - 1.0*qy8)^2 + 0.49)^(1/2) + 4.05*((qy8 - 1.0*qy9)^2 + 0.49)^(1/2)))/(((qy1 - 1.0*qy2)^2 + 0.49)^(1/2)*(0.01941*qy2 - 0.7237*qy1 + 0.7043*qy3))$$

.....

$$H_b(14)= ((0.1*((qy14 - 10.0)^2 + 0.04)^(1/2))/(0.9709*qy13 + 0.6311*qy14 - 16.02) + (0.1*((qy14 - 10.0)^2 + 0.04)^(1/2) + 0.55*((qy13 - 1.0*qy14)^2 + 0.49)^(1/2))/(0.232*qy13 - 0.8303*qy12 + 0.5984*qy14))/(qy13 - 1.0*qy14)^2 + 0.49)^(1/2)$$

Görüldüğü üzere çember kuvvetleri bir çok parametreye bağlı karmaşık denklemler olarak oluşmaktadır. Optimizasyonda bu çember kuvvetlerinin hepsinin basınç

kuvveti olması sağlanacak aynı zamanda elde edilebilecek en yüksek değer hedeflenecektir.

$$\min_x \max_i F_i(x) \quad \begin{cases} c(x) \leq 0 \\ ceq(x) = 0 \\ A \cdot x \leq b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \leq x \leq ub \end{cases} \quad (5.16)$$

$$\max_x \min_i F_i(x) = -\min_x \max_i (-F_i(x)) \quad (5.157)$$

Başlangıç qy değerleri 0 dan tepe noktasının apsisi olan 10'a kadar lineer olarak yayılan 14 adet nokta olsun:

qy(başlangıç)=[0.6667 1.3333 2.0 2.6667 3.3333 4.0 4.6667 5.3333 6.0 6.6667
7.3333 8 8.6667 9.3333]

$$-\min_x \max_i (-Hb_i(qy))$$

qy,başlangıç= [0.667 1.333 2.000 2.667 3.333 4.000 4.667 5.333 6.000 6.667 7.333 8.000 8.667 9.333]

Hb-basl.=[10.101 9.339 8.616 7.892 7.166 6.438 5.709 4.979 4.247 3.514 2.781 2.047 1.312 0.611]

Min(H_b)=0.611 t/m

qy-iter1=[0.700 1.400 2.100 2.800 3.500 4.200 4.900 5.600 6.300 7.000 7.700 8.400 9.100 9.800]

Hb-iter1=[9.620 8.894 8.206 7.516 6.825 6.132 5.437 4.742 4.045 3.347 2.648 1.949 1.250 0.55]

Min(H_b)=0.550 t/m

qy-iter2=[0.714 1.429 2.143 2.857 3.571 4.286 5.000 5.714 6.428 7.143 7.857 8.571 9.196 9.821]

Hb-iter2=[9.428 8.716 8.042 7.366 6.689 6.009 5.329 4.647 3.964 3.280 2.596 1.808 1.253 0.616]

Min(H_b)=0.616 t/m

qy-iter3=[0.790 1.579 2.369 3.159 3.949 4.738 5.528 6.318 7.108 7.897 8.592 9.286 9.598 9.911]

Hb-iter3=[8.527 7.884 7.274 6.663 6.050 5.435 4.820 4.203 3.585 2.659 2.265 1.479 1.174 1.232]

Min(H_b)=1.174 t/m

qy-iter4=[0.907 1.813 2.720 3.627 4.533 5.440 6.346 7.253 8.078 8.826 9.301 9.629 9.793 9.954]

Hb-iter4=[7.429 6.869 6.338 5.805 5.271 4.736 4.199 3.261 2.632 1.760 1.024 1.592 2.584 2.361]

Min(H_b)=1.024 t/m

qy-iter5=[0.965 1.929 2.894 3.858 4.823 5.788 6.734 7.596 8.250 8.813 9.243 9.615 9.789 9.963]

Hb-iter5=[6.983 6.457 5.958 5.457 4.955 4.320 3.383 2.092 1.816 2.405 2.536 2.133 2.238 2.204]

Min(H_b)=1.816 t/m

qy-iter6=[0.970 1.940 2.911 3.881 4.851 5.821 6.744 7.577 8.239 8.830 9.242 9.609 9.780 9.951]

Hb-iter6=[6.942 6.420 5.923 5.426 4.926 4.078 3.176 2.263 2.248 2.261 2.247 2.257 2.253 2.253]

Min(H_b)=2.247 t/m

qy-iter7=[1.010 2.021 3.031 4.041 5.052 6.062 6.915 7.708 8.307 8.874 9.270 9.624 9.789 9.953]

Hb-iter7=[6.667 6.166 5.689 5.211 4.731 3.193 2.563 2.337 2.342 2.676 2.342 2.341 2.341 2.341]

Min(H_b)=2.337 t/m

qy-iter8=[1.190 2.380 3.551 4.665 5.662 6.558 7.315 7.998 8.547 9.033 9.372 9.676 9.818 9.960]

Hb-iter8=[5.662 5.034 4.203 3.206 2.732 2.512 2.646 2.730 2.713 2.602 2.723 2.724 2.718 2.718]

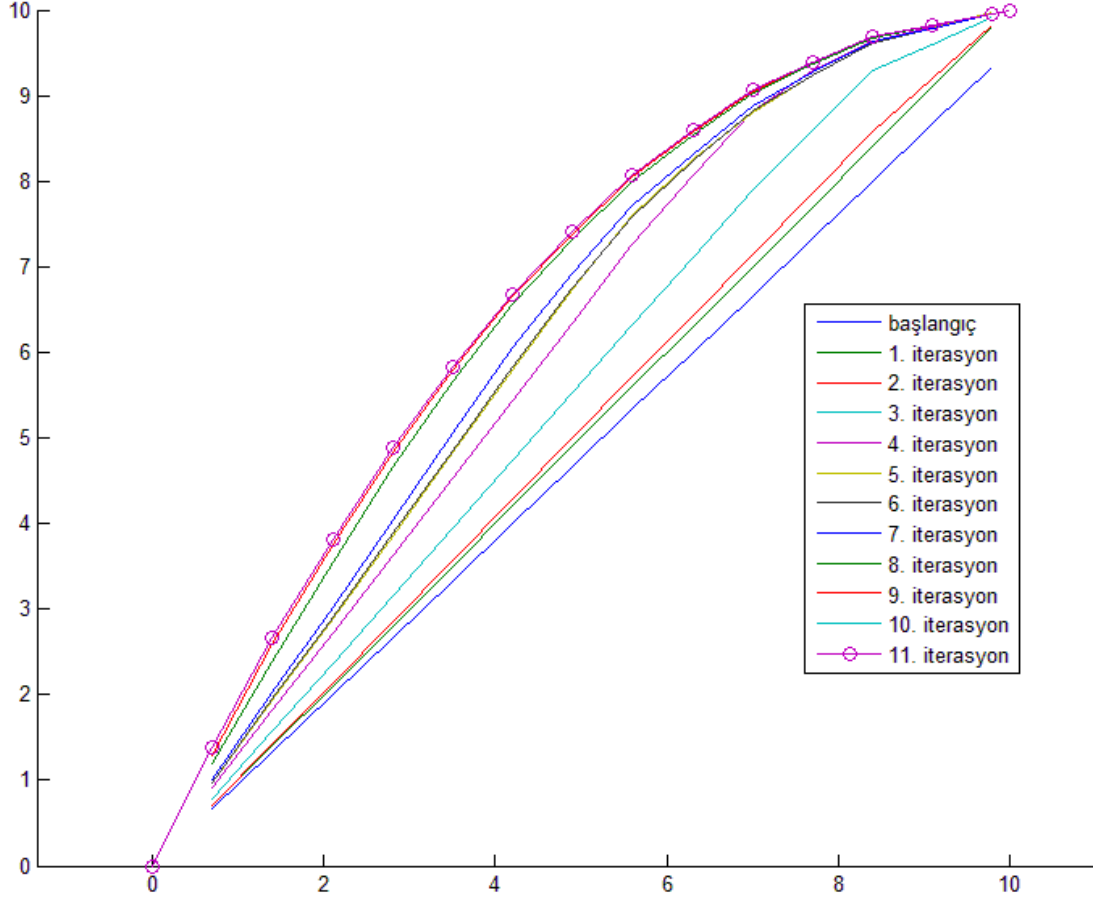
Min(H_b)=2.512 t/m

qy-iter9=[1.294 2.588 3.757 4.837 5.782 6.649 7.382 8.048 8.576 9.052 9.384 9.683 9.822 9.960]

Hb-iter9=[5.208 3.773 2.838 2.743 2.772 2.793 2.780 2.774 2.775 2.781 2.774 2.774 2.775 2.775]

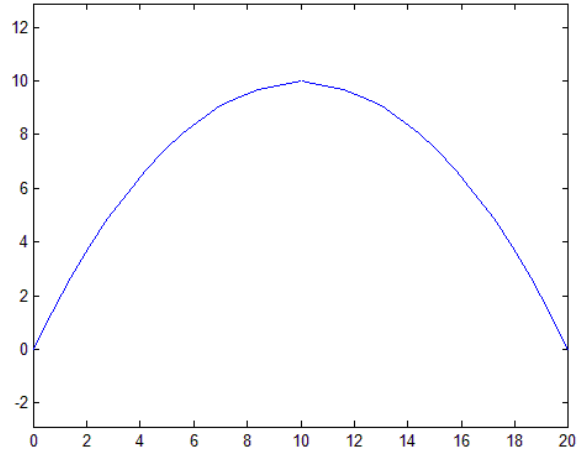
Min(H_b)=2.743 t/m

$qy\text{-iter10}=[1.378 2.664 3.820 4.888 5.824 6.683 7.408 8.068 8.590 9.062 9.391 9.686 9.823 9.961]$
 $Hb\text{-iter10}=[4.109 2.824 2.801 2.803 2.802 2.802 2.802 2.802 2.802 2.802 2.802 2.802 2.802 2.802]$
 $\text{Min}(H_b)=2.801 \text{ t/m}$
 $qy\text{-iter11}=[1.380 2.666 3.821 4.889 5.825 6.684 7.409 8.068 8.591 9.062 9.391 9.686 9.823 9.961]$
 $Hb\text{-iter11}=[4.084 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803]$
 $\text{Min}(H_b)=2.803 \text{ t/m (basınç)}$



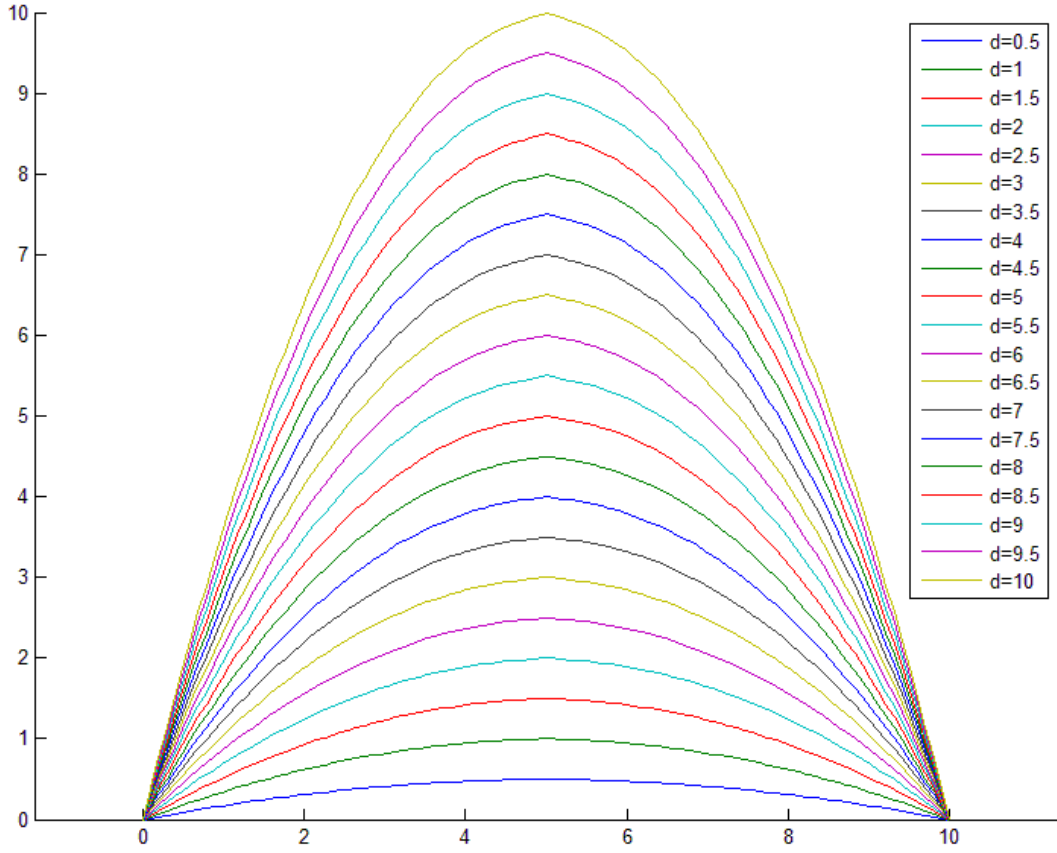
Şekil 5.20 Optimizasyon sürecinde 11 iterasyona karşılık gelen kubbe kesiti koordinatları

Görüldüğü üzere 11 iterasyonda elde edilebilecek en yüksek çember kuvveti (basınç) elde edilmiş olundu. Optimizasyonda ilginç olan nokta ise minimum çember kuvvetini maksimize ederken çember kuvvetleri birbirine eşit çıktı. Optimizasyonda herhangi bir non-lineer eşitlik koşulu tanımlamadığımız halde optimizasyon sonunda birbirine eşit çember kuvvetleri elde ettik. Bu sonuç olması için zorlamadığımız ama istenilen bir sonuç oldu. Çünkü bir yapıda eşit dağılımlı gerilme istenilen bir durumdur. İterasyon sonucu çıkan kubbenin kesiti şekil (5.21) de ki gibi olacaktır.



Şekil 5.21 Optimize edilmiş kubbenin kesiti

İteratif funiküler eğrisi ile kubbe optimizasyonunda kubbenin açıklık ve yükseklik oranının bir sınırı yoktur. Aşağıda 10 birim sabit açıklığa karşın 20 farklı birim yüksekliğe ait optimum kubbe geometrilerinin kesiti görülmektedir. Aşağıda ki örnekte kubbeler 49 adet düşey dilime 360 adet açısız (plan) dilime bölünmüştür. Kilit taşı yarıçapı 0.2 birim olarak seçilmiştir.



Şekil 5.22 Sabit açıklıklı 20 farklı yüksekliğe ait optimum kubbe kesitleri

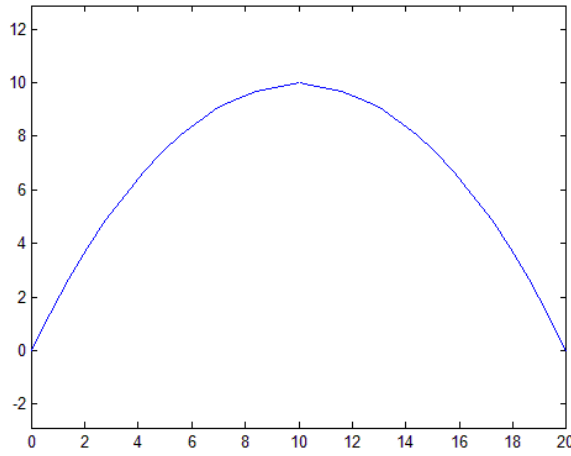
5.6. Füniküler Analiz metodunun Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Karşılaştırılması (Membran)

İteratif füniküler analiz metodunu membran teorisi ile karşılaştırması yaparken küresel kubbe üzerinde işlemler yapılmıştı. Küresel kubbenin geometrik özelliği sonucu çember kuvvetleri parametrik açılara bağlı bir formülle ifade edilebilmişti. Fakat optimize ettiğimiz kubbe geometrilerine yeni bir formül oluşturmak imkansızdır. Bunun için kabuk elemanlarını analiz edebilen SAP2000 programı kullanılarak optimize edilmiş kubbe geometrileri, sonlu elemanlar yöntemiyle (membran) çözüp kabuk elemanlarındaki ortalama çember gerilmelerinin karşılaştırmasını yapacağız. Sonlu elemanlar yönteminde kabuk elemanını membran olarak alacağız. Hatırlanacağı üzere membran elemanı düzlem için moment alamamakta sadece çekme ve basınç kuvvetleriyle çalışmaktaydı.

Bir önceki bölümde optimize edilen açıklığı 20 m yüksekliği 10 m olan kubbeyi aynı geometrik özelliklerle SAP2000’de modellemesini yapalım. Modellemede kubbenin birim yüzey ağırlığını 1 t/m^2 olarak ayarlayalım. (0.25 m kabuk kalınlığı 4 t/m^3 malzeme yoğunluğu). Optimize edilmiş kubbenin geometrisi şekil 5.23’te verilmiştir.

Hb-iter11=[4.084 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803 2.803]

Min(H_b)=2.803 t/m

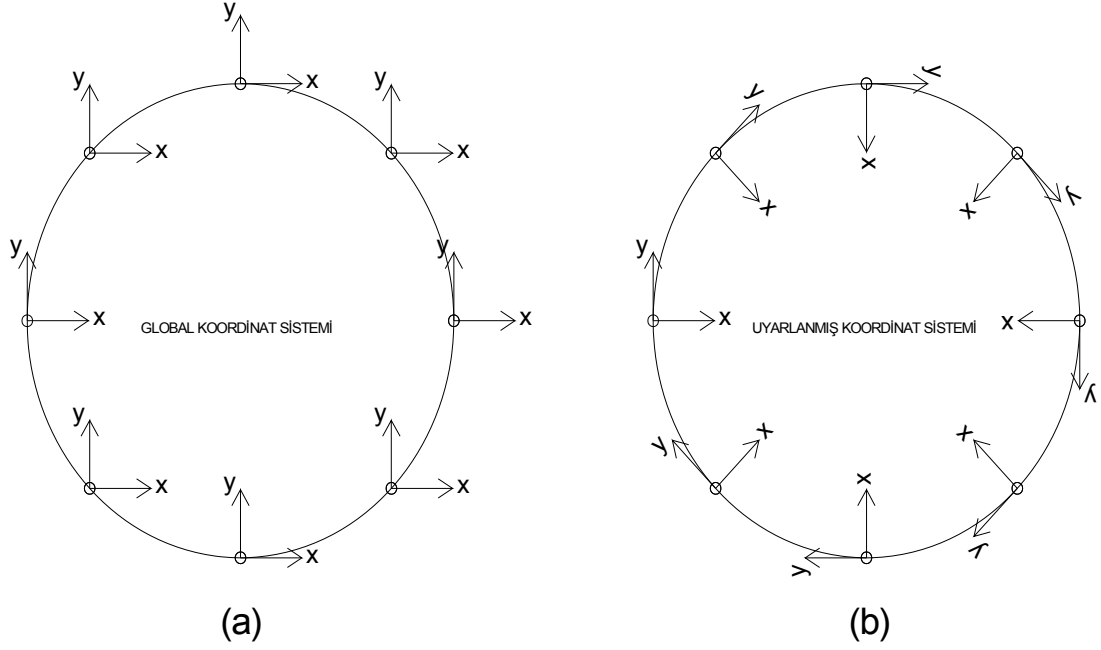


Şekil 5.23 Optimize edilmiş kubbenin kesiti

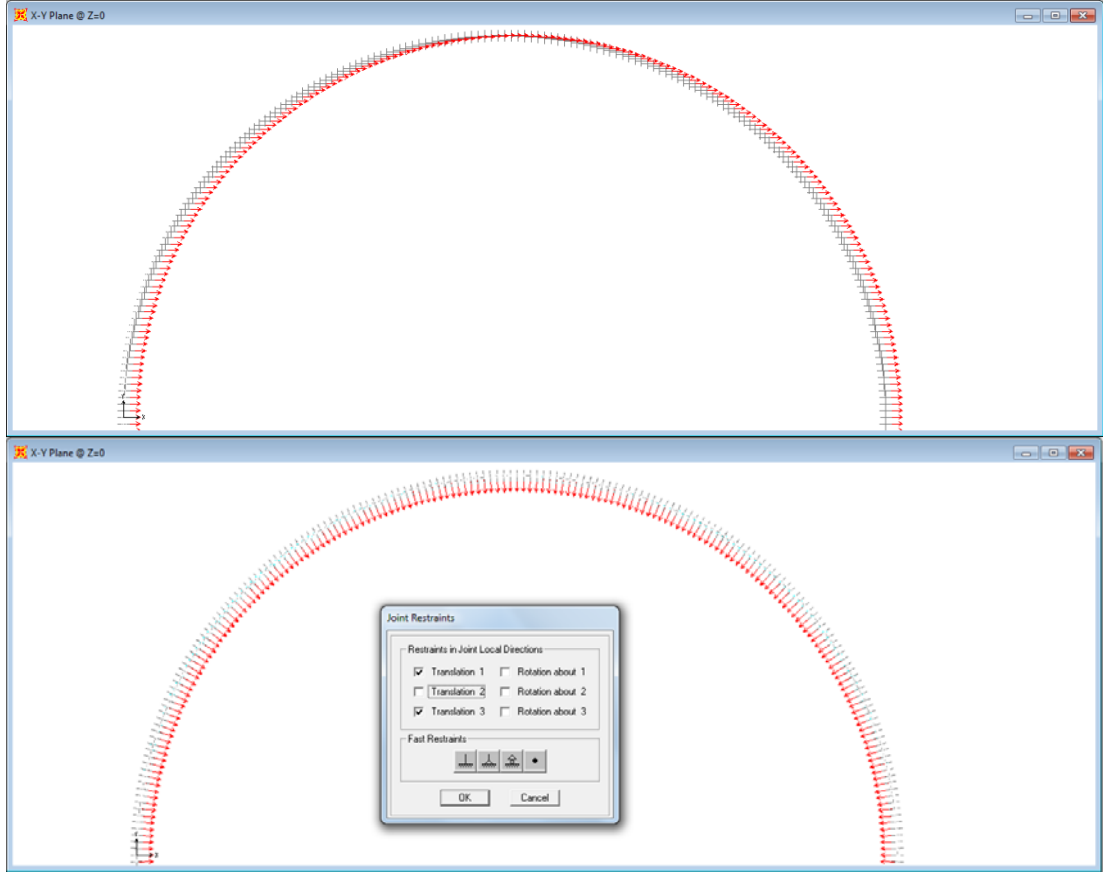
İterasyon sonucu çıkan kubbe geometrisinin q_x ve q_y değerlerini SAP2000 programına aktardıktan sonra simetri eksenini etrafında 1° 'lik açılarla 360° 'ye kadar döndürülmesiyle istenilen model elde edilmiş olur.

SAP2000 programında kagir kubbe modellemesi yapılırken mesnet şartları önem arz etmektedir. Kagir yapıda mesnetteki taşta düşey kuvveti taşıyan dikey ve itki kuvvetine karşılıklı yatay mesnet kuvveti olmak üzere iki adet kuvvet etki etmektedir. Bu iki kuvvetin bileşkesi o noktadaki meridyen kuvvetine temsil eden funiküler çizgisini verir. Modellemede mafsallı kabul edilen mesnetlerde çember kuvveti yönündeki harekette engellendiği için gerçek sonuçları yansıtmayacaktır. Şekil 5.24’te global koordinat sistemi gözükmemektedir. X ve Y eksenleri sabit olup kubbe tabanı boyunca değişmeyecektir. Bu durumda çember kuvvetleri yönündeki hareketi sabit bırakma şansımız yoktur. Bunun için Şekil 5.24 (b)’deki gibi kabuk

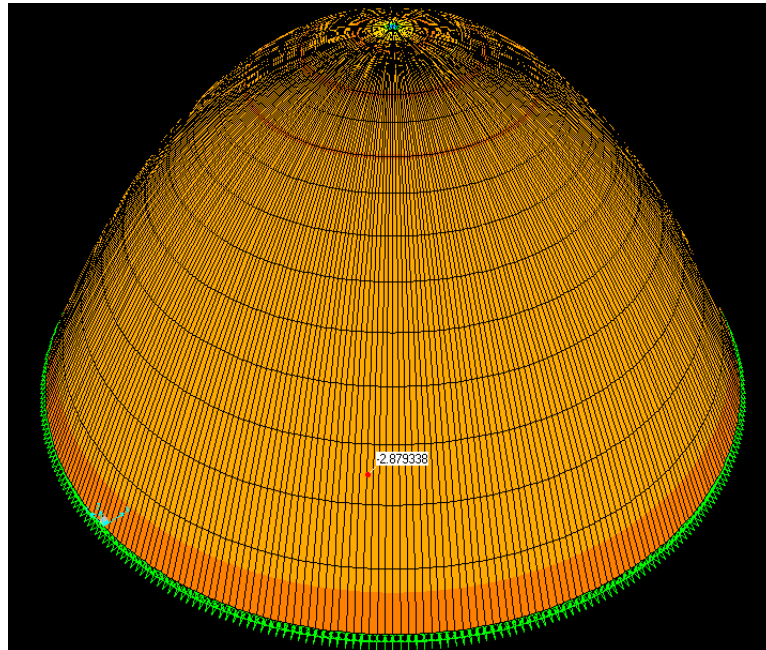
eleman nokta koordinat sistemini değiştirmek gerekmektedir. Yeni sistemde U_x , U_z deplasmanlarını tutulu, U_y deplasmanlarını serbest bırakarak membran kabuk elemanı ile modellenen kubbe gerçeği yansıtacaktır. Stabil bir yapı olduğu için analizde herhangi bir sorun olmayacaktır. Kagir malzeme elastisite modülü 35,000 kg/cm^2 alınmıştır. (Wethyavivorn,2008)



Şekil 5.24 Global ve uyarlanmış koordinat sistemleri



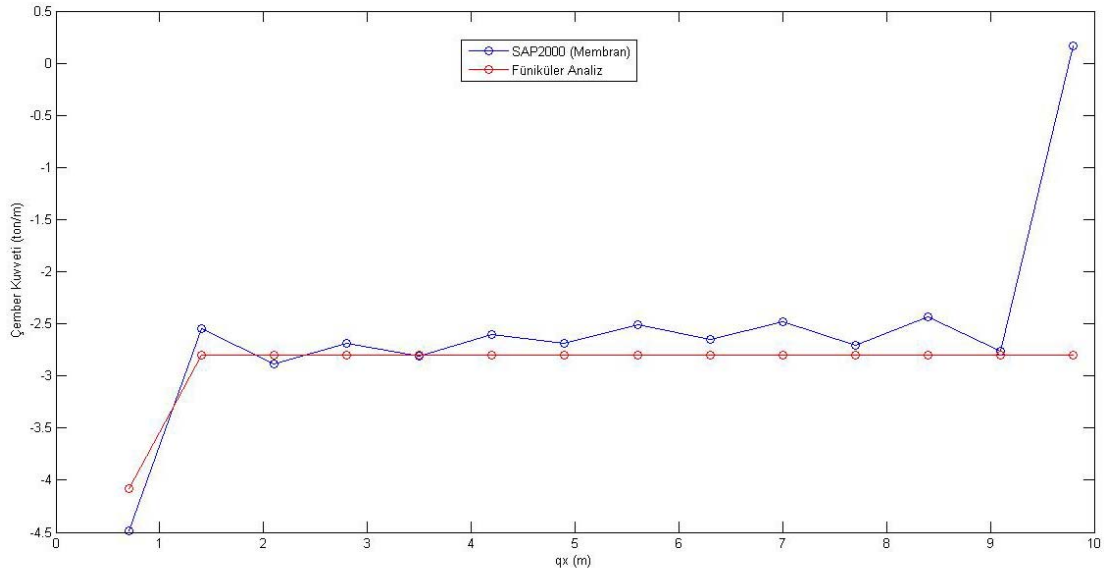
Şekil 5.25 Global ve uyarlanmış koordinat sistemi ve mesnet şartları



Şekil 5.26 Membran kubbe analiz sonucu gerilme dağılımı

	qx koordinatı (m)	SAP2000 (Membran) t/m	Füniküler Analiz t/m
Ç1	0.6667	-4.4893	-4.084
Ç2	1.33	-2.5425	-2.803
Ç3	2.00	-2.8858	-2.803
Ç4	2.66667	-2.6859	-2.803
Ç5	3.33	-2.8124	-2.803
Ç6	4.00	-2.607	-2.803
Ç7	4.66667	-2.6851	-2.803
Ç8	5.33	-2.5055	-2.803
Ç9	6.00	-2.6525	-2.803
Ç10	6.6667	-2.484	-2.803
Ç11	7.33	-2.7018	-2.803
Ç12	8.00	-2.4316	-2.803
Ç13	8.66667	-2.7613	-2.803
Ç14	9.33	0.1615	-2.803

Tablo 5.1 : Membran ve Füniküler Analize göre bulunan çember kuvvetleri



Şekil 5.27 Membran ve füniküler analiz sonuçlarının grafiksel gösterimi

Füniküler eğrisi ile sonlu elemanlar metoduyla bulunan gerilmeler son taş hariç (kilit taşının oturduğu seviyedeki taşlar) örtüşmektedir. Ç14 çember kuvvetinin çok farklı bir değer çıkmasının nedeni sonlu elemanlar yönteminin kısıtlamalarından ötürü kilit

taşının bir bütün olarak değil 360 adet üçgen parçası şeklinde modellenmesinden dolayı ortaya çıkmaktadır. Üçgen kabuk elemanlarının bir noktada birleşmesi ve membran eleman olarak tanımlanması, gerçekte bir bütün olan kilit taşı yansıtmayacak ve bir alt seviyedeki taşta etki edip Ç14 çember kuvvetini etkileyecektir. Ayrıca hesap kolaylığı açısından 14 yatay parçaya böldüğümüz kubbenin oldukça büyük kesitlerde taş parçalarının oluşmasından dolayı farklılıklar oluşmuştur. Özellikle eğimin 0'a yaklaştığı Ç14 kuvvetinin etkideği taşta sapma daha fazla olmuştur. Çok daha fazla yatay dilime ayrılarak hesap yapılan kubbede bu farklılık kaybolacaktır.

6. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

İteratif föniküler analiz metodu ile kemer optimizasyonu sarkık ip mantığından yola çıkarak kemer üzerindeki statik yükler sonucu oluşan açıklık ve yükseklik gibi parametrelili bilinen optimum eğri bulunmuştur. Ölü yükler altında teorik olarak sonsuz güvenlik faktörüyle çalışan kemerin kalınlığını hareketli yüke göre belirlenmektedir. Bu noktada her dilime etki eden hareketli yüke ait, kemer merkez hattına en yakın föniküler eğrisini bulabilmek, bu süreyi kısaltmak bir takım faydalı algoritmaları gerektirmektedir. Bulunan en kötü föniküler hattı güvenlik faktörüyle birleşerek taşıyıcı kemerin kalınlığını vermektedir.

Analiz sonuçlarında görüldüğü üzere kemer üzerindeki hareketli yük hangi mesnete yakın ise föniküler eğrisi o mesnette aşağı yönde diğer mesnette ise yukarı yönde bir harekete zorlanmaktadır. Bu çıkarımla birlikte sonuca daha çabuk ulaşılabilir.

Kemer kalınlığı bulabilmek için yapılan hareketli yük analizinde görülmüştür ki, en kritik yüklemeler kemerin iki yakasının orta noktalarında meydana gelmektedir. Malabadi köprüsünde olduğu gibi tarihi bir çok köprüde iki yakada açılan boşluklar kritik yüklemeyi rahatlatmak amacıyla taşımaktadır.

Kubbe optimizasyonunda çember kuvvetlerinin maksimum basınç kuvveti olması amaçlanarak optimizasyon yapılmıştır. Optimizasyon sonucunda ise birinci çember kuvveti hariç birbirine eşit çember kuvvetleri elde edildi. Aynı şekilde küresel kubbe üzerinde karşılaştırılması yapılan föniküler analiz metodu ile membran metodu mesnetteki taşlara etki eden Ç1 çember kuvveti hariç yakınlık göstermektedir. Mesnet koşullarından dolayı sürekli farklı çıkan Ç1 kuvveti, bir sonraki bölümde özel mesnet koşulları tanımlanarak yapılan sonlu elemanlar analizinde, föniküler analize çok yakın sonuçlar elde edilmiştir. Buradan kagir yapıların modellenmesinde özel lokal eksenler tanımlanıp mesnet şartlarının buna göre tanımlanması gerektiği sonucu çıkmaktadır.

Özel mesnet koşulları tanımlanarak oluşturulan sonlu elemanlar modeli (membran) föniküler analizle tutarlılık göstermesi, kagir yapıların sonlu elemanlar metodu yerine, geometrik bir yaklaşım olan föniküler analiz metoduyla analiz edilmesinin daha gerçekçi olacağı sonucunu çıkarmıştır.

7. SONUÇ

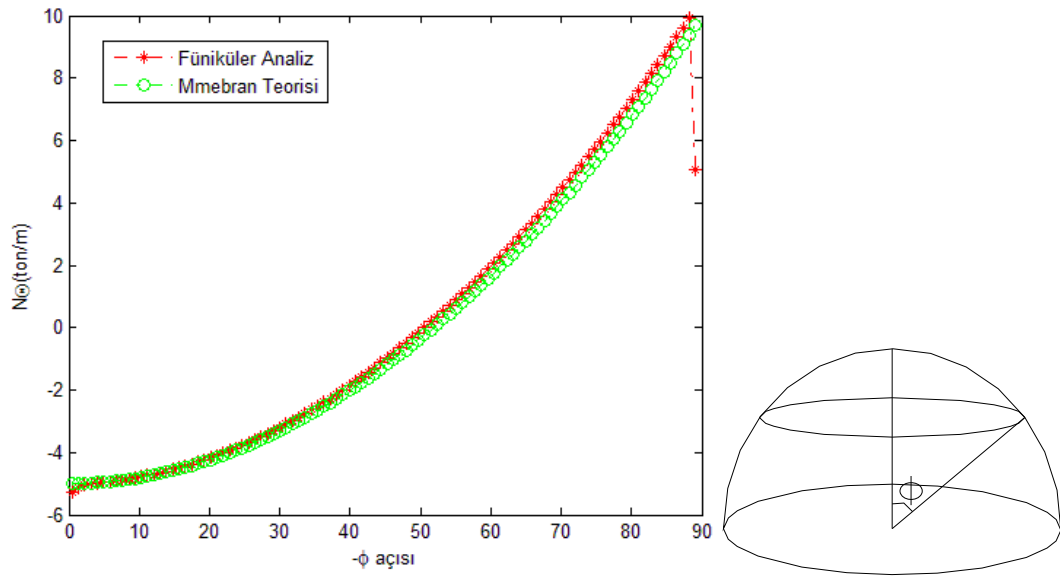
Bu tez çalışmasında tarihi yapıların iki temel yapısal ögesi olan kemer ve kubbenin iteratif füniküler analiz metodu ile optimizasyonu yapılmıştır. Bu çalışma da yeni tasarımlar için kullanılan füniküler analiz metodu, mevcut kemer ve kubbe analizinde de kullanılabilir.

Kagir yapılar için geçerli gözükken bu optimizasyon eğri form verilen betonarme, çelik elemanlar içinde kullanılabilir. Optimizasyon sonucu bulunan füniküler eğrisi basınç kuvvetinin moment oluşturmada bir yapı boyunca iletilebileceği hattı vermektedir. Betonarme kemer veya kubbe elemanını düşünürsek optimize edilmiş füniküler eğrisine uyan betonarme eleman, betonarme elemanlardaki kemer etkisi düşünüldüğünde diğer herhangi bir şekilde göre daha az moment hissedecektir.

Sonlu elemanlar ile membran kabuk elemanı şeklinde modelleme yapılırken nokta lokal eksenleri değiştirilip, çember kuvveti yönündeki deplasmanlara izin verilmiştir. Değiştirilen mesnet şartları sonucu bulunan çember kuvvetleri füniküler analiz metoduyla örtüşmektedir. Küresel kubbede uygulanan ;

$$N_{\theta} = wa \left[\frac{1}{1 + \cos \theta} - \cos \theta \right]$$

Çember kuvveti formülü mesnet bölgesi için tutarlı olmayabilir. Küresel kubbe için yapılan füniküler analiz metodunda çember kuvvetleri yine mesnet şartı hariç tutarlılık göstermiştir.



Şekil 7.1 Küresel kubbe füniküler analiz ve membran metodu karşılaştırması

Her ne kadar kagir kubbe füniküler analizle çözülmesi daha uygun olsa da, kabuk eleman olarak modellenirse, mesnet şartlarının uygun şekilde tanımlanması gerektiği sonucuna varılır. Kagir kubbelerin mesnetlere dik bir yüzeye herhangi bir ankastre şartları olmadan oturduğu ve çember kuvveti yönünde de bir hareket sınırlaması olmadığı düşünülürse şekil 5.25'teki gibi lokal eksen ve mesnet şartları ile modellenmesi doğru olacaktır.

Bu tez çalışmasında kullanılan füniküler analiz metodu www.uni-str.com adlı internet sitesinde uygulamalı olarak kullanıcının hizmetine sunulacaktır.

KAYNAKLAR

- Benjapon, Wethyavivorn, 2008 Structural Modelling of Historic Masonry Monuments
- Çamlıbel, A, Nafiz, 2000, Geleneksel Yapılarda Stabilitenin İyileştirilmesi, Temellerin Takviyesi, Birsen Yayınevi
- Heyman, J. 1977 Equilibrium of Shell structures. Oxford: Oxford University Press.
- Heyman, J. 1982 The masonry arch. West Sussex, England: Ellis Horwood Limited.
- Heyman, J. 1995 The stone Skeleton. Cambridge: Cambridge University Press
- MATLAB®,1994-2012 The Mathworks,Inc Optimization Toolbox
- O'Dwyer, D. 1999. Funicular analysis of masonry vaults. ComputersStructures
- Philippe Block, 2009. Thrust Network Analysis, Massachussets Institute of Technology
- T. H G Megson, 2000. Structural and Stress Analysis, Oxford, Butterworth Heinemann
- Ungewitter, G. (1890). Lehrbuch der gotischen Konstruktionen (III. Auage neu bearbeitet von K.Mohrmann ed.). Leipzig: T.O. Weigel Nachfolger.
- Wanda W. Lau, 2002. Equilibrium Analysis of Masonry Domes, Michigan State

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Osman KELLE

Doğum Yeri ve Yılı: Kadıköy ,21-02-1988

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Isparta Süleyman Demirel Fen Lisesi (2002-2005)

Lisans : Orta Doğu Teknik Üniversitesi (2005-2010)

Yüksek Lisans : Süleyman Demirel Üniversitesi (2010-2012)

İnternet Sitesi : www.uni-str.com

