

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

E^3 ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖTELEME YÜZEYLER

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
Zahide DÖLEK
(101121109)**

**Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Geometri**

Danışman: Doç. Dr. Essin TURHAN

ŞUBAT-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^3 ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖTELEME YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Zahide DÖLEK
(101121109)

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Geometri

Danışman: Doç. Dr. Essin TURHAN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Ocak 2013

ŞUBAT-2013

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

E^3 ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖTELEME YÜZEYLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Zahide DÖLEK
(101121109)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih: 14 Ocak 2013
Tezin Savunulduğu Tarih: 04 Şubat 2013

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Essin TURHAN (F.Ü)
Diğer Jüri Üyeleri: Prof. Dr. Mahmut ERGÜT (F.Ü)
Doç.Dr.Erol KILIÇ (İ.Ü)

ŞUBAT-2013

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarımnda bana her türlü gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarımı esirgemeyen çok değerli sayın hocam Doç. Dr. Essin TURHAN 'a, ayrıca her zaman yakın ilgi gösteren çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Mahmut ERGÜT 'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmamın şekillenmesinde ilk günden itibaren ilgi ve alakasını esirgemeyen çok değerli sayın Talat KÖRPINAR'a minnettarlığımı sunarım.

Zahide DÖLEK
ELAZIĞ-2013

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
1. BÖLÜM	1
Giriş	1
2. BÖLÜM	3
Temel Tanım ve Teoremler	3
3. BÖLÜM	13
Uzay Eğrileri ile Öteleme Yüzeyler	13
4. BÖLÜM	43
Bishop Çatısına Göre Öteleme Yüzeyleri	43
5. BÖLÜM	55
Sonuç	55
KAYNAKLAR	57

ÖZET

E^3 ÖKLİD UZAYINDA BAZI ÖTELEME YÜZEYLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm çalışmanın giriş kısmı olup, uzay eğrileri ve yüzeyler üzerinde yapılan çalışmalar hakkında literatürdeki bilgiler verildi.

İkinci bölümde; uzay eğrileri ve yüzeyler için kullanılan temel tanımlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde; uzay eğrileri yardımıyla verilen öteleme yüzeylerinin karakterizasyonu verildi. Daha sonra minimal öteleme yüzeyleri sınıflandırıldı. Öteleme yüzeylerinin minimal olma şartları verilerek yüzeylerin Gauss eğrilğine göre karakterizasyonları yapıldı.

Dördüncü bölüm çalışmanın orijinal kısmını oluşturmaktadır. Burada Bishop çatısına göre öteleme yüzeyleri incelenmiştir.

Beşinci bölüm ise çalışmanın sonuç kısmıdır.

Anahtar Kelimeler: Öteleme yüzeyi, minimal yüzey, minimal öteleme yüzeyi, Gauss eğrilği, ortalama eğrilik, Scherk yüzeyi, Bishop Çatısı.

ABSTRACT

SOME TRANSLATION SURFACES IN THE E^3 EUCLIDEAN SPACE

This thesis consist of five chapters.

The first chapter has been devoted to the introduction.

In the second chapter; fundamental definitions and theorems of space curves and surfaces are given.

In the third chapter; the translation surfaces in 3-dimensional Euclidean space generated by curves have been investigated.

In the fourth chapter; contain original part of our study translation surfaces has been constructed and some characterizations have been given according to Bishop frame.

The sixth chapter has been devoted to the conclusion.

Keywords: Translation surfaces, minimal surface, minimal translation surface, Gauss curvature, mean curvature, Scherk surface, Bishop frame.

SİMGELER LİSTESİ

\mathbb{E}^3	: n-boyutlu Öklid Uzay
\times	: Vektörel çarpım
$[,]$: Lie operatörü
D	: Riemann koneksiyonu
$P(X)$: Kuvvet cümlesi
$T_p(M)$: p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
$\chi(M)$: Vektör alanlarının cümlesi
S_p	: Şekil operatörü
$K(p)$: Gauss eğriliği
$H(p)$: Ortalama eğriliği
$\ \ $: Norm
\mathbf{I}^q	: q-yuncu temel form
\mathbf{I}_p	: Birinci temel form
\mathbf{II}_p	: İkinci temel form

1. BÖLÜM

GİRİŞ

Öteleme yüzeyler teorisi daima Öklid uzayının ilginç konularından biri olmuştur. Bir çok geometrici tarafından öteleme yüzeyleri farklı açılardan incelenmiştir.

Verstraelen, Walrave ve Yaprak; n-boyutlu Öklid uzayında minimal öteleme yüzeylerini araştırmışlardır, [36].

Lui, \mathbb{E}_1^3 üç boyutlu Minkowski uzayı ve \mathbb{E}^3 üç boyutlu Öklid uzayında sabit ortalama eğrilikli ve sabit Gauss eğrilikli öteleme yüzeylerinin bir sınıflandırmasını vermiştir, [27].

Yoon; üç boyutlu Minkowski uzayında, yüzeyin indirgenen metriğine göre uzayın Laplasyanı Δ ve A , 3×3 matris olmak üzere; $\Delta G = AG$, koşulunu sağlayan öteleme yüzeylerini çalışmıştır, [38].

Munteanu ve Nistor; \mathbb{E}^3 de öteleme yüzeylerin ikinci temel formunu elde ederek ve \mathbb{E}^3 de polinom öteleme yüzeyler için sıfır olan ikinci Gauss eğrilikliğini kullanarak yeni bir karakterizasyon oluşturdular. Daha sonra bu yüzeylerin ikinci Gauss ve ortalama eğrilikli yardımıyla öteleme yüzeylerini sınıflandırmışlardır, [28].

En önemli yüzey eğrilerinden biri asimtotik eğrilerdir. Bir yüzey üzerindeki bir eğrinin asimtotik olarak sınıflandırılması için, eğrinin her noktasındaki teğeti doğrultusundaki normal eğrilikli sıfır olmalıdır. Ek olarak M yüzeyindeki bir eğrinin asimtotik olması için onun ivmesi de daima M ye teğet olmalıdır. En azından bir asimtotik yönde yüzey parçası onun teğet düzleminden uzakta değildir. Yüzey üzerinde asimtotik eğri boyunca Gauss eğrilikli daima sıfır ya da negatiftir. Diferensiyel geometride yüzey üzerinde asimtotik eğriler büyük öneme sahip araştırma konularından biri olmuştur.

Carmo; Dupin göstergesi yardımıyla asimptotik yönler ve eğrileri karakterize etmiştir, [6].

Hartman ve Winter; negatif Gauss eğrilikli yüzeyler üzerindeki asimptotik eğrilerin klasik teoride ki önemli bir karakterizasyonunu vermiştir, [17].

Kitagava; bir yüzeyin birim 3-küreye izometrik immersiyonu flat tor ise o zaman bu yüzey üzerindeki bütün asimtotik eğrilerin periyodik olduğunu ispatlamıştır, [22].

Garcia ve Sotomayer; Öklid uzayında daldırılmış bir yüzeyin asimtotik eğrilerin sağlanması gereken en basit niteleyici şartları çalışmıştır, [11].

Asimtotik eğriler aynı zamanda astronomide, astro fizikte ve bilgisayar yardımlı dizayn mimarisinde önemli bir yere sahiptir. Çünkü asimtotik yörüngesinden küçük bir sapma, yıldızın sistemden çıkmasına yol açacaktır. Yıldız sisteminde bir grup yıldızın gözden kaçan yörüngelerini bulmak için bu yörüngelerinin asimtotik eğrilerini bulmak gerekir.

Contopoulos; çoğunlukla kararsız yörüngelerin asimtotik yörüngelerini elde etmiştir. Ayrıca asimtotik eğriler üzerinde başlangıç şartlarıyla uzaklaşan yörüngelerin kümesini bulmuştur, [7].

Flöry ve Pottmann; regle yüzeylerin mimari özelliklere yansımalarını araştırmıştır. Bu regle yüzeylerin bir veya daha çok şerit yardımıyla oluşturulan şekline geometrik bakış açısı oluşturmuşlardır. Daha sonra çalışmalarında asimtotik eğriler yardımıyla verilen regle yüzeyleri karakterize etmişlerdir, [10].

Bayram, Güler, Kasap; verilen bir asimtotik eğriden bir kalem yüzeyin nasıl oluşturulacağını çalışmışlardır. Daha sonra asimtotik eğrilerle verilen kalem yüzeyleri için parametrik temsil formülleri elde etmişlerdir. Ayrıca verilen asimtotik eğrilerin Frenet çatısı yardımıyla gerekli ve yeterli şartlar vermişlerdir. Son olarak oluşturdukları metodla bazı örneklerin yardımıyla şekiller çizmişlerdir, [1].

Bu çalışmada ise düzlemsel olmayan uzay eğrileri kullanılarak üç boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyleri incelendi. Daha sonra verilen yüzeyin minimal olma şartları verilerek yüzeyin çeşitli karakterizasyonları yapıldı. Ayrıca verilen eğrilerin Bishop çatısına göre öteleme yüzeyleri oluşturularak bu yüzeylerin Bishop çatısı yardımıyla Gauss ve ortalama eğriliklerine göre karakterizasyonları yapılmıştır.

2. BÖLÜM

2.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1

X boş olmayan bir küme ve τ ailesi de $P(X)$ kuvvet kümesinin herhangi bir alt kümesi olsun. Eğer $\tau \subset P(X)$ aşağıdaki özellikleri sağlarsa, τ ya X üzerinde bir *topoloji*, (X, τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir.

(i) $X, \emptyset \in \tau$.

(ii) τ da alınan her sayıda elemanların birleşimi τ ya aittir; yani, I herhangi bir indis kümesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \tau$ için, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$ dir.

(iii) τ da alınan her sonlu sayıda elemanlarının kesişimi τ ya aittir; yani, J sonlu indis kümesi olmak üzere $\forall \{A_i\}_{i \in J} \in \tau$ için $\bigcap_{i \in J} A_i \in \tau$ dir, [12].

Tanım 2.1.2.

X bir topolojik uzay olsun ve farklı iki $p, q \in X$ noktalarının X deki açık komşulukları, sırasıyla, U ve V olsun. Eğer U ve V

$$U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde seçilebiliyorsa X topolojik uzayına bir *Hausdorff uzay* denir, [12].

Tanım 2.1.3

X ve Y birer topolojik uzay olsun. Bir $f : X \longrightarrow Y$ fonksiyonu için,

(i) f sürekli,

(ii) f^{-1} mevcut,

(iii) f^{-1} sürekli ise f fonksiyonuna X 'den Y 'ye bir *homeomorfizm* denir, [12].

Tanım 2.1.4

M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye *n-boyutlu topolojik manifold* (veya kısaca *topolojik n-manifold*) denir.

- (i) M bir Hausdorff uzayıdır.
- (ii) M nin herbir açık alt cümlesi \mathbb{E}^n Öklid uzayının bir açık cümlesine veya \mathbb{E}^n e homeomorftur.
- (iii) M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir, [12].

Tanım 2.1.5

M bir topolojik n -manifold olsun. Bir $p \in M$ noktasının M de ki bir U açık komşuluğu, Ψ homeomorfizmi sayesinde \mathbb{E}^n nin bir V açık altcümlesine homeomorfik ise (U, Ψ) ikilisine M nin p noktasındaki bir *koordinat komşuluğu (harita)* denir, [12].

Tanım 2.1.6

M , n -boyutlu topolojik bir manifold ve $V_\alpha \subset M$ açık alt cümlelerinin $\{V_\alpha\}$ ailesi de M nin bir örtüsü olsun. Bu durumda herbir V_α açığının \mathbb{E}^n deki bir U_α açık altcümlesine homeomorf olduğunu kabul edelim. A bir indeks cümlesini göstermek üzere, elde edilen (U_α, Ψ_α) koordinat komşuluklarının

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

ailesine M nin bir *atlası* denir, [12].

Tanım 2.1.7

n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun bir atlası

$$S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha) : \alpha \in A\}$$

olsun. Eğer

$$\Psi_\alpha(U_\alpha) \cap \Psi_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$$

olacak şekildeki $\forall(\alpha, \beta) \in A \times A$ için $\Psi_\alpha^{-1} \circ \Psi_\beta$ ve $\Psi_\beta^{-1} \circ \Psi_\alpha$ fonksiyonları, $r > 0$ olmak üzere, C^r sınıftan diferensiyellenebilir ise S ye C^r *sınıftan atlas* denir, [12].

Tanım 2.1.8

n -boyutlu bir M topolojik manifoldunun C^r -sınıftan bir atlası var ise M ye C^r -*sınıftan diferensiyellenebilir manifold* denir. Ayrıca $\forall r \in \mathbb{N}$ için

S diferensiyellenebilir ise, o zaman M ye C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir, [12].

Tanım 2.1.9

\mathbb{E}^n nin iki altcümlesi U ve V olsun. Bir $\Psi : U \longrightarrow V$ fonksiyonu için;

(i) $\Psi \in C^k(U, V)$,

(ii) $\Psi^{-1} : V \longrightarrow U$, $\Psi^{-1} \in C^k(V, U)$, önermeleri sağlanıyorsa Ψ ye C^k sınıfından diffeomorfizm denir, [13].

Tanım 2.1.10

I , \mathbb{R} nin açık bir aralığı olmak üzere, diferensiyellenebilen bir

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$$

fonksiyonuna \mathbb{E}^n de bir eğri denir.

Bir $t \in I$ değerine karşılık eğrinin, elde edilen $\alpha(t)$ noktası;

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

şeklinindedir. Buradaki α_i fonksiyonları $I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. \mathbb{E}^n nin koordinat fonksiyonları $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ise,

$$\alpha_i = x_i \circ \alpha$$

biçimindedir, [13].

Tanım 2.1.11

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki,

$$\alpha'(t) = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_t = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \dots, \frac{d\alpha_n}{dt}(t) \right)$$

vektörüne eğrinin hız vektörü denir ve $(\alpha(t), \alpha'(t))$ ikilisine bir *tanjant vektör* adı verilir. Kısaca $\alpha'(t)$ şeklinde gösterilir, [13].

Tanım 2.1.12

$\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için α nın $\alpha(t)$ noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı ise, α eğrisine *regüler bir eğri* denir, [6].

Tanım 2.1.13

M bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow v_p[f] \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall p \in M, \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

- (i) $v_p[\lambda f + \mu g] = \lambda v_p[f] + \mu v_p[g], \forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \lambda, \mu \in \mathbb{R},$
- (ii) $\mathbf{v}_p[fg] = g(p)\mathbf{v}_p[f] + f(p)\mathbf{v}_p[g],$ şartlarını sağlıyorsa, bu dönüşüme M nin p noktasında ki bir *tanjant vektörü* denir.

M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi

$$T_p(M) = \{\mathbf{v}_p | \mathbf{v}_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\},$$

ile gösterilir. Bu cümle üzerinde iç işlem

$$\begin{aligned} \oplus : T_p(M) \times T_p(M) &\longrightarrow T_p(M) \\ (\mathbf{v}_p, \mathbf{u}_p) &\longrightarrow \mathbf{v}_p \oplus \mathbf{u}_p \end{aligned}$$

$$(\mathbf{v}_p \oplus \mathbf{u}_p)[f] = \mathbf{v}_p[f] + \mathbf{u}_p[f], \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}),$$

şeklinde ve dış işlem de

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times T_p(M) &\longrightarrow T_p(M) \\ (\lambda, \mathbf{v}_p) &\longrightarrow \lambda \odot \mathbf{v}_p \end{aligned}$$

$$(\lambda \odot \mathbf{v}_p)[f] = \lambda \mathbf{v}_p[f], \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olarak tanımlanırsa, $T_p(M)$, \mathbb{R} üzerinde bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayına, M nin p noktasındaki *tanjant uzayı* denir. [12].

Tanım 2.1.14

M diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Bir

$$\mathbf{X} : M \xrightarrow[örten]{1:1} \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

olarak tanımlanan, \mathbf{X} fonksiyonuna M üzerinde *vektör alanı* denir.

M üstünde tanımlanan vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterilir.

$$\begin{aligned} \oplus : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (\mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{Y}) &\longrightarrow \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{R} \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (\lambda \quad , \quad \mathbf{X}) &\longrightarrow \lambda \odot \mathbf{X} \end{aligned}$$

olmak üzere $\chi(M)$, \mathbb{R} üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına M nin *vektör alanları uzayı* denir, [13].

Tanım 2.1.15

V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[,] : V \times V \rightarrow V$$

dönüşümünde

- (i) 2-lineer
- (ii) Alterne ($\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in V$ için $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$)
- (iii) Jakobi özdeşliğini sağlar. Yani $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in V$ için

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = 0$$

olarak verilsin. $[,]$ dönüşümüne, V üstünde bir *Lie operatörü* denir. Bu işlemle birlikte V vektör uzayına *Lie cebiri* denir, [30].

Tanım 2.1.16

Bir C^∞ -manifold M ve M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$, C^∞ fonksiyonların cebiride $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere,

$$\langle , \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa, bu dönüşüme M üzerinde *Riemann metriği* yada *metrik tensör* denir.

- (i) \langle , \rangle dönüşümü 2-lineerdir,
- (ii) \langle , \rangle dönüşümü simetriktir,

(iii) $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle > 0$, $\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = 0$, $\mathbf{X} \in \chi(M)$

Üzerinde Riemann metriği tanımlanmış olan C^∞ –manifolda , *Riemann manifoldu* denir, [30].

Tanım 2.1.17

M bir C^∞ -manifold olsun. M üstünde vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve C^∞ fonksiyonların cebirinde $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$\langle, \rangle: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

operatörü aşağıdaki özellikleri sağlarsa M ye bir *yarı-Riemann manifoldu* denir.

- (i) \langle, \rangle dönüşümü 2-lineerdir,
- (ii) \langle, \rangle dönüşümü simetriktir,
- (iii) $\forall \mathbf{Y} \in \chi(M)$ için $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{X} = 0$, [30].

Tanım 2.1.18

Bir C^∞ -manifold M ve M üstündeki vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olsun.

$$\begin{aligned} D : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow \chi(M) \\ (\mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{Y}) &\longrightarrow D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} \end{aligned}$$

operatörü

- (i) $D_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = D_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + D_{\mathbf{X}}\mathbf{Z}$ $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \chi(M)$,
- (ii) $D_{(\mathbf{X}+\mathbf{Y})}\mathbf{Z} = D_{\mathbf{X}}\mathbf{Z} + D_{\mathbf{Y}}\mathbf{Z}$,
- (iii) $D_{f\mathbf{X}}\mathbf{Y} = fD_{\mathbf{X}}\mathbf{Y}$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,
- (iv) $D_{\mathbf{X}}f\mathbf{Y} = fD_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} + \mathbf{X}[f]\mathbf{Y}$, özelliklerini sağlıyor ise D ye M üzerinde bir *afin koneksiyon* ve $D_{\mathbf{X}}$ e de \mathbf{X} vektör alanı yönünde *kovaryant türev* denir, [12].

Tanım 2.1.19

Eğer bir $\alpha : I \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisi üzerinde \mathbf{Y} bir C^∞ vektör alanı ve α üzerinde

$$D_{\mathbf{T}}\mathbf{Y} = 0$$

ise \mathbf{Y} vektör alanına α eğrisi üzerinde bir *paralel vektör alanı* denir. Eğer bir α eğrisi üzerinde

$$D_{\mathbf{T}}\mathbf{T} = 0$$

ise α eğrisine bir *geodezik eğri* adı verilir, [13].

Tanım 2.1.20

$S \subset \mathbb{E}^3$ olmak üzere $\forall p \in S$ için p nin bir \mathbb{E}^3 te bir V komşuluğu ve $U \subset \mathbb{E}^2$ bir açık alt kümesi

$$f : U \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{E}^3$$

dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa S ye \mathbb{E}^3 te bir *regüler yüzey* denir.

1. f diferensiyellenebilirdir: Yani

$$f(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in U$$

olarak yazılırsa $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ fonksiyonları U üzerindeki her mer-
tebeden sürekli kısmi türevleri vardır.

2. f homeomorfizmdir,

3. f regülerdir: Yani $\forall q \in U$ için

$$d_{f_q} : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^3$$

diferensiyeli birebirdir, [6].

Tanım 2.1.21

\mathbf{U} , M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında

$$S_p(\mathbf{v}_p) = -D_{\mathbf{v}_p}\mathbf{U}$$

eşitliğiyle tanımlı

$$S_p : T_p(M) \rightarrow T_p(M)$$

fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, \mathbf{U} birim dik vektör alanına bağlı *şekil operatörü* (veya *Weingarten dönüşümü*) denir.

M nin her bir p noktasına S_p fonksiyonunu karşılık getiren S dönüşümüne de M yüzeyinin, \mathbf{U} birim dik vektör alanına bağlı *şekil operatörü* (veya *Weingarten dönüşümü*) denir, [6].

Tanım 2.1.22

S_p lineer dönüşümün determinantına M yüzeyinin p noktasındaki *Gauss eğriliği* denir ve

$$K(p) = \det(S_p)$$

ile gösterilir, [6].

Tanım 2.1.23

S_p lineer dönüşümün izinin yarısına M yüzeyinin p noktasındaki *ortalama eğriliği* denir ve

$$H(p) = \frac{1}{2}iz(S_p)$$

ile gösterilir, [6].

Tanım 2.1.24

$\mathbf{v}_p \neq 0$, $\mathbf{w}_p \neq 0$ olmak üzere \mathbf{v}_p ve \mathbf{w}_p teğet vektörleri için $\langle S(\mathbf{v}_p), \mathbf{w}_p \rangle = 0$ ise \mathbf{v}_p vektörü \mathbf{w}_p vektörünün *eşleniği*dir, denir.

$\mathbf{v}_p \neq 0$, ve $\langle S(\mathbf{v}_p), \mathbf{v}_p \rangle = 0$ ise \mathbf{v}_p vektörüne, p noktasında bir *asimtotik vektör* denir, [6]

Tanım 2.1.25

M , \mathbb{E}^3 uzayında bir yüzey ve

$$\alpha : I \rightarrow M$$

regüler bir eğri olsun. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t)$ hız vektörü $\alpha(t)$ noktasında M yüzeyinin bir asimtotik vektörü ise

$$(\text{yani } \langle S(\alpha'(t)), \alpha'(t) \rangle = 0 \text{ ise})$$

α eğrisine M yüzeyi üzerinde bir *asimtotik eğri* denir, [6].

Tanım 2.1.26

\mathbb{E}^3 uzayında bir M yüzeyi verilsin. M üzerinde şekil operatörü S ve $(1 \leq q \leq 3)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^q : \chi(M) \times \chi(M) &\longrightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &\longrightarrow \mathbf{I}^q(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \langle S^{q-1}(\mathbf{X}), \mathbf{Y} \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı \mathbf{I}^q fonksiyonuna M üzerinde q -yuncu temel form denir. [6].

Tanım 2.1.27

M yüzeyi

$$\begin{aligned} M : \mathbb{E}^2 &\longrightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u, v) &\longrightarrow (u, v, f(u, v)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Burada

$$\begin{aligned} f : \mathbb{E}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longrightarrow f(u, v) = h(u) + g(v) \end{aligned}$$

biçiminde ise

$$\begin{aligned} M(u, v) &= (u, v, h(u) + g(v)), \\ M(u, v) &= (u, 0, h(u)) + (0, v, g(v)) \end{aligned}$$

veya

$$M(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda yüzeye *öteleme yüzeyi* denir, [27].

Tanım 2.1.28

M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ise bu yüzeye *minimal yüzey* denir, [6].

Tanım 2.1.29

$$M(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

minimal öteleme yüzey ve $a \neq 0$ olmak üzere

$$f(u) = -\frac{1}{a} \log(\cos au) \text{ ve } g(v) = \frac{1}{a} \log(\cos av)$$

ise

$$\begin{aligned} M(u, v) &= (u, 0, f(u)) + (0, v, g(v)), \\ M(u, v) &= \left(u, v, \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos av}{\cos au} \right)\right) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu yüzeye *Scherk yüzeyi* denir, [6].

Tanım 2.1.30

M yüzeyinin p noktasındaki asli eğrilikleri $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ olsun. M yüzeyinin bir p noktasındaki Gauss eğriliğinin işareti, p noktası komşuluğunda

1. $K(p) > 0$ ise $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ aynı işaretlidir. O halde p noktasına *eliptik nokta* denir.

2. $K(p) = 0$ ise $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ den en az biri sıfırdır. O halde p noktasına *parabolik nokta* denir. $k_1(p) = 0$ ve $k_2(p) = 0$ ise p noktasına *düzlemsel nokta* denir.

3. $K(p) < 0$ ise $k_1(p)$ ve $k_2(p)$ ters işaretlidir. O halde p noktasına *hiperbolik nokta* denir, [6].

Teorem 2.1.31

α , M yüzeyi içinde bir eğri ve \mathbf{U} , M yüzeyinin birim dik vektör alanı olsun. α nın bir asimtotik eğri olması için gerek ve yeter şart $\langle \alpha'', \mathbf{U} \rangle = 0$ olmasıdır, [6].

3. BÖLÜM

Bu bölümde düzlemsel olmayan uzay eğrileri kullanılarak 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyleri incelendi. Daha sonra verilen yüzeyin minimal olma şartları verilerek yüzeyin çeşitli karakterizasyonları verildi.

3.1.1. Uzay Eğrileri İle Öteleme Yüzeyleri

M , 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyi, α ve β yay uzunluğu parametreleri, sırasıyla, u ve v olan birim hızlı uzay eğrileri olmak üzere Tanım 2.1.27 den

$$M(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

şeklinde parametrize edilir.

α nın Frenet vektör alanları $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha\}$ ve eğriliği κ_α ve burulması τ_α ve β nın Frenet vektör alanları $\{\mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\beta, \mathbf{B}_\beta\}$ ve eğriliği κ_β ve burulması τ_β olsun.

α ve β iki uzay eğrisi olmak üzere

$$M(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) \quad (3.1.1)$$

şeklinde \mathbb{E}^3 de bir öteleme yüzeyi oluşturulur. Burada $\alpha(u)$ (ya da $\beta(v)$) $\beta(v)$ (ya da $\alpha(u)$ yu) yi ötelerken $\alpha(u)$ ya (ya da $\beta(v)$ ye) paralel kalacak şekilde $\alpha(u)$ (ya da $\beta(v)$) eğrisinin her bir noktası $\beta(v)$ nin (ya da $\alpha(u)$ nun) ötelemesi olacak şekilde elde edilir. Bu öteleme yüzeyi, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ olmak üzere

$$M(u, v) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$$

olarak yazılır, [8]. M öteleme yüzeyinin birim normali

$$\mathbf{U}(u, v) = \frac{M_u \times M_v}{\|M_u \times M_v\|} \quad (3.1.2)$$

dir.

(3.1.1) den

$$\begin{aligned} M_u &= \alpha'(u) \Rightarrow M_u = \mathbf{T}_\alpha, \\ M_v &= \beta'(v) \Rightarrow M_v = \mathbf{T}_\beta \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

bulunur. (3.1.3) den

$$\|M_u \times M_v\| = \|M_u\| \|M_v\| \sin \varphi \quad (3.1.4)$$

elde edilir. (3.1.3) ve (3.1.4) birlikte göz önüne alınırsa

$$\|\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta\| = \|\mathbf{T}_\alpha\| \|\mathbf{T}_\beta\| \sin \varphi = \sin \varphi \quad (3.1.5)$$

bulunur. (3.1.5) ifadesi (3.1.2) de yerine yazılırsa, $\varphi(u)$ açısı, $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ eğrilerinin teğet vektörleri $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta\}$ arasındaki açı olmak üzere $\varphi \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$\mathbf{U}(u, v) = \frac{1}{\sin \varphi} (\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta) \quad (3.1.6)$$

elde edilir.

(3.1.3) den M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned} E &= \langle M_u, M_u \rangle = \langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\alpha \rangle = 1, \\ F &= \langle M_u, M_v \rangle = \langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle = \|\mathbf{T}_\alpha\| \|\mathbf{T}_\beta\| \cos \varphi = \cos \varphi, \\ G &= \langle M_v, M_v \rangle = \langle \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\beta \rangle = 1 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

olur. (3.1.7) ifadelerinden M yüzeyinin I . temel formu,

$$I = du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2$$

bulunur.

(3.1.6) dan M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned} L &= \langle \mathbf{U}, M_{uu} \rangle = \langle \mathbf{U}, \mathbf{T}'_\alpha \rangle = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{T}'_\alpha\| \cos \theta_\alpha = \kappa_\alpha \cos \theta_\alpha, \\ M &= \langle \mathbf{U}, M_{uv} \rangle = \langle \mathbf{U}, 0 \rangle = 0, \\ N &= \langle \mathbf{U}, M_{vv} \rangle = \langle \mathbf{U}, \mathbf{T}'_\beta \rangle = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{T}'_\beta\| \cos \theta_\beta = \kappa_\beta \cos \theta_\beta \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

dır. θ_α açısı, \mathbf{U} ile \mathbf{N}_α ve θ_β açısı, \mathbf{U} ile \mathbf{N}_β arasındaki açı olmak üzere; (3.1.8) ifadelerinden M yüzeyinin II . temel formu,

$$II = \kappa_\alpha \cos \theta_\alpha du^2 + \kappa_\beta \cos \theta_\beta dv^2$$

bulunur.

Teorem 3.1.1

M bir öteleme yüzeyi ve α , öteleme yüzeyinde bir asimtotik çizgi ise o zaman α , düzlemsel bir eğridir.

İspat.

Kabul edelimki α , öteleme yüzeyi üzerinde bir asimtotik çizgi olsun. Bu durumda α nın düzlemsel bir eğri olduğunu göstermeliyiz.

θ_α açısı, \mathbf{U} ile \mathbf{N}_α arasındaki açı olmak üzere

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle &= \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{N}_\alpha\| \cos \theta_\alpha, \\ \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle &= \cos \theta_\alpha \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

dır. (3.1.9) dan

$$\begin{aligned} \cos \theta_\alpha &= \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle, \\ &= \left\langle \frac{1}{\sin \varphi} \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\alpha \right\rangle, \\ &= -\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

yazılır. (3.1.10) dan

$$\cos \theta_\alpha = -\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle \quad (3.1.11)$$

ifadesi bulunur. (3.1.11) eşitliğinin u ya göre türevi alınırsa

$$-\theta'_\alpha \sin \theta_\alpha = \varphi' \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \langle \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle + [\langle \mathbf{B}'_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle + \langle \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{T}'_\beta \rangle] \left(-\frac{1}{\sin \varphi}\right) \quad (3.1.12)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathbf{B}'_\alpha = -\tau_\alpha \mathbf{N}_\alpha \text{ ve } \langle \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{T}'_\beta \rangle = 0$$

ifadeleri (3.1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\theta'_\alpha \sin \theta_\alpha = \varphi' \cot \varphi \frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle + \langle -\tau_\alpha \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle \left(-\frac{1}{\sin \varphi}\right) \quad (3.1.13)$$

bulunur. Ayrıca (3.1.11) den

$$\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{B}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle = -\cos \theta_\alpha$$

olduğu (3.1.13) de göz önüne alınırsa

$$-\theta'_\alpha \sin \theta_\alpha = -\varphi' \cot \varphi \cos \theta_\alpha + \tau_\alpha \frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle \quad (3.1.14)$$

elde edilir. α asimtotik çizgi olduğundan

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle = 0$$

dır. (3.1.9) dan

$$\cos \theta_\alpha = 0 \quad (3.1.15)$$

olur. Buradan

$$\theta_\alpha = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.1.16)$$

bulunur. (3.1.16) dan

$$\theta'_\alpha = 0$$

dır. (3.1.15) ve (3.1.16) birlikte düşünülürse

$$\sin \theta_\alpha = \pm 1$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.14) den

$$\tau_\alpha \frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle = 0 \quad (3.1.17)$$

olur.

$$\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle \neq 0$$

olduğundan

$$\tau_\alpha = 0$$

olur. Bu da α nın düzlemsel olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Sonuç 3.1.2

M , 3 -boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyi ve β ise yüzey üzerinde geodezik olmayan bir asimtotik çizgi olsun. β nın düzlemsel eğri olması için gerek ve yeter şart θ_β açısının sabit olmasıdır. Burada θ_β , \mathbf{U} ile \mathbf{N}_β arasındaki açıdır.

İspat:

(\implies): M , 3 -boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyi, β ise yüzey üzerinde geodezik olmayan bir düzlemsel eğri olsun. Buna göre θ_β açısının sabit olduğunu göstermeliyiz. β düzlemsel olduğundan

$$\tau_\beta = 0$$

olur. θ_β açısı, \mathbf{U} ile \mathbf{N}_β arasındaki açı olmak üzere,

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\beta \rangle = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{N}_\beta\| \cos \theta_\beta = \cos \theta_\beta, \quad (3.1.18)$$

dır. (3.1.18) den

$$\begin{aligned} \cos \theta_\beta &= \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\beta \rangle, \\ &= \left\langle \frac{1}{\sin \varphi} \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\beta \right\rangle, \\ &= -\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{T}_\beta \times \mathbf{N}_\beta, \mathbf{T}_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

elde edilir. (3.1.19) da gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\cos \theta_\beta = -\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{B}_\beta, \mathbf{T}_\alpha \rangle \quad (3.1.20)$$

bulunur. (3.1.20) nin v ye göre türevi alınır

$$-\theta'_\beta \sin \theta_\beta = [\langle \mathbf{B}'_\beta, \mathbf{T}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{B}_\beta, \mathbf{T}'_\alpha \rangle] \left(-\frac{1}{\sin \varphi}\right) \quad (3.1.21)$$

olur. Frenet denklemlerinden

$$\mathbf{B}'_{\beta} = -\tau_{\beta}\mathbf{N}_{\beta} \text{ ve } \mathbf{T}'_{\alpha} = 0$$

yazılır. (3.1.21) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} -\theta'_{\beta} \sin \theta_{\beta} &= \langle -\tau_{\beta}\mathbf{N}_{\beta}, \mathbf{T}_{\alpha} \rangle \left(-\frac{1}{\sin \varphi}\right), \\ -\theta'_{\beta} \sin \theta_{\beta} &= \tau_{\beta} \frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{N}_{\beta}, \mathbf{T}_{\alpha} \rangle \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

elde edilir. β , düzlemsel bir eğri olduğundan

$$\tau_{\beta} = 0 \quad (3.1.23)$$

dır. (3.1.23) ifadesi (3.1.22) de göz önüne alınırsa

$$\theta'_{\beta} \sin \theta_{\beta} = 0 \quad (3.1.24)$$

olur. β yüzey üzerinde geodezik olmayan asimptotik çizgi olduğundan

$$\mathbf{N}_{\beta} \neq \mathbf{U} \text{ ya da } \mathbf{N}_{\beta} \neq -\mathbf{U}$$

dır. Bu da \mathbf{U} ile \mathbf{N}_{β} arasındaki açının sıfır olmadığını gösterir. Yani

$$\begin{aligned} \sin \theta_{\beta} &\neq 0, \\ \theta'_{\beta} &= 0, \\ \theta_{\beta} &= c = sbt \end{aligned}$$

olur.

(\Leftarrow ;) θ_{β} sabit olduğundan

$$\theta'_{\beta} = 0$$

olur. Ayrıca (3.1.22) ifadesinde

$$\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{N}_{\beta}, \mathbf{T}_{\alpha} \rangle \neq 0$$

olduğundan

$$\tau_{\beta} = 0$$

olur. O halde β bir düzlemsel bir eğridir. Bu ise ispatı tamamlar. \square

Öteleme yüzeyinin şekil operatörü

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} LG - MF & MG - NF \\ -LF + ME & -MF + NE \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$S = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{bmatrix} \kappa_\alpha \cos \theta_\alpha & -\kappa_\beta \cos \theta_\beta \cos \varphi \\ -\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha \cos \varphi & \kappa_\beta \cos \theta_\beta \end{bmatrix} \quad (3.1.25)$$

olarak elde edilir. Buna göre öteleme yüzeyin K Gauss eğriliği

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

ve H ortalama eğriliği

$$H = \frac{EN - 2MF + GL}{2(EG - F^2)}$$

formülleri yardımıyla

$$K = \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \varphi}, \quad (3.1.26)$$

$$H = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \varphi} \quad (3.1.27)$$

şeklinde elde edilir.

(3.1.26) ve (3.1.27) birlikte göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.1.3

Uzay eğrileri ile üretilen bir öteleme yüzeyinin Gauss eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart yüzeyin üreteç eğrilerinden en az birinin yüzeyde bir asimtotik çizgi olmasıdır.

İspat:

(\Rightarrow ;) Uzak eğrileri ile üretilen bir öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği sıfır olsun. Buna göre yüzeyin türeteç eğrilerinden en az birinin yüzeyde bir asimtotik çizgi olduğunu göstermeliyiz. (3.1.26) dan

$$\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta = 0 \quad (3.1.28)$$

olur. Öteleme yüzeyinin türeteç eğrileri doğru değildir. O halde

$$\kappa_\alpha \neq 0 \text{ ve } \kappa_\beta \neq 0 \quad (3.1.29)$$

dır. (3.1.28) ve (3.1.29) birlikte düşünülürse

$$\cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta = 0$$

olur. Eğer

$$\cos \theta_\alpha = 0 \quad (3.1.30)$$

ise o zaman

$$\theta_\alpha = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Bu takdirde

$$\cos \theta_\alpha = \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle = 0 \quad (3.1.31)$$

olur. (3.1.31) den α asimtotik çizgidir. Benzer şekilde

$$\cos \theta_\beta = 0 \quad (3.1.32)$$

ise o zaman

$$\theta_\beta = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

dir. Bu durumda

$$\cos \theta_\beta = \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\beta \rangle = 0 \quad (3.1.33)$$

dır. Bu takdirde β asimtotik çizgidir.

(\Leftarrow ;) α yada β yüzeyde asimtotik çizgi olsun. Öteleme yüzeyinin Gauss eğriliğinin sıfır olduğunu göstermeliyiz. α yüzeyde asimtotik çizgi ise

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle = 0 \quad (3.1.34)$$

dır. (3.1.34) den

$$\cos \theta_\alpha = \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle = 0$$

olur. Yani

$$\theta_\alpha = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

elde edilir. Bu takdirde (3.1.26) dan

$$K = \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \varphi} = 0$$

olur. β eğrisi için de ispat benzer şekilde yapılır. Böylece ispat tamamlanır. \square

Örnek 3.1.4

M yüzeyi,

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \left(\sin \frac{u}{2}, \cos \frac{u}{2} - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} \right), \\ \beta(v) &= \left(\cos \frac{v}{3} - 1, \sin \frac{v}{3}, \frac{2\sqrt{2}v}{3} \right) \end{aligned}$$

eğrileri ile üretilen bir öteleme yüzeyi olsun. O zaman M yüzeyi,

$$M(u, v) = (m_1, m_2, m_3)$$

ise

$$\begin{aligned} m_1 &= \sin \frac{u}{2} + \cos \frac{v}{3} - 1, \\ m_2 &= \cos \frac{u}{2} + \sin \frac{v}{3} - 1, \\ m_3 &= \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{2\sqrt{2}v}{3} \end{aligned}$$

olur. O takdirde α nın teğet ve asli normal vektörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha &= \left(\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2}, -\frac{1}{2} \sin \frac{u}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\ \mathbf{N}_\alpha &= \left(-\sin \frac{u}{2}, -\cos \frac{u}{2}, 0 \right) \end{aligned}$$

dır. \mathbf{T}_α ve \mathbf{N}_α yardımıyla α nın eğriliği

$$\kappa_\alpha = \frac{1}{4}$$

olarak bulunur.

Benzer şekilde β nın teğet ve asli normal vektörleri, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\beta &= \left(-\frac{1}{3} \sin \frac{v}{3}, \frac{1}{3} \cos \frac{v}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right), \\ \mathbf{N}_\beta &= \left(-\cos \frac{v}{3}, -\sin \frac{v}{3}, 0 \right)\end{aligned}$$

olur. O zaman β nın eğriliği

$$\kappa_\beta = \frac{1}{9}$$

şeklinde elde edilir. \square

Teorem 3.1.5

α ve β , eğrilikleri sıfır olmayan uzay eğrileri ve ayrıca α , bir asimtotik çizgi olsun. Öteleme yüzeyinin minimal olması için gerek ve yeter şart β nın yüzeyde asimtotik çizgi olmasıdır.

İspat:

(\Rightarrow): α ve β , eğrilikleri sıfır olmayan uzay eğrileri, α bir asimtotik çizgi ve M , minimal öteleme yüzeyi olsun. M yüzeyi minimal olduğundan

$$H = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \varphi} = 0 \quad (3.1.35)$$

olur. (3.1.35) den

$$\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta = 0 \quad (3.1.36)$$

olur. α ve β , eğrilikleri sıfır olmayan uzay eğrileri ve α bir asimtotik çizgi olduğundan

$$\kappa_\alpha \neq 0 \text{ ve } \kappa_\beta \neq 0$$

ve

$$\cos \theta_\alpha = \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle = 0 \quad (3.1.37)$$

olur. Bu eşitlikler (3.1.36) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\cos \theta_\beta = 0 \quad (3.1.38)$$

bulunur. (3.1.38), (3.1.37) de göz önüne alınırsa

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\beta \rangle = \cos \theta_\beta = 0 \quad (3.1.39)$$

elde edilir. Bu da β eğrisinin yüzeyde asimtotik çizgi olduğunu gösterir.

(\Leftarrow): α ve β bir asimtotik çizgi olduğundan

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\beta \rangle = \cos \theta_\beta = 0 \text{ ve } \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle = \cos \theta_\alpha = 0$$

olur. (3.1.27) den

$$H = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \varphi} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla yüzey minimaldir. Bu da ispatı tamamlar. \square

Bilindiği üzere; yüzeyin birim normal vektör alanı \mathbf{U} ve α nın birim teğet vektör alanı \mathbf{T} olmak üzere $\mathbf{U} \times \mathbf{T} = \mathbf{Y}$ dersek \mathbf{Y} vektör alanı $\mathbf{Y} \perp \mathbf{U}$ ve $\mathbf{Y} \perp \mathbf{T}$ dir.

Ayrıca, yüzey üstündeki eğrinin normal eğriliği, geodezik eğriliği, geodezik burulması (torsiyonu), sırasıyla,

$$\kappa_n = \langle \alpha'', \mathbf{U} \rangle, \quad \kappa_g = \langle \alpha'', \mathbf{Y} \rangle, \quad \tau_g = -\langle \mathbf{U}', \mathbf{Y} \rangle \quad (3.1.40)$$

şeklinde tanımlanır, [6]. Buna göre, (3.1.40) değerleri göz önüne alınarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa_g \mathbf{Y} + \kappa_n \mathbf{U}, \\ \mathbf{Y}' &= -\kappa_g \mathbf{T} + \tau_g \mathbf{U}, \\ \mathbf{U}' &= -\kappa_n \mathbf{T} - \tau_g \mathbf{Y} \end{aligned}$$

yazılır, [6].

M öteleme yüzeyinde α eğrisinin geodezik eğriliği, geodezik torsiyonu ve normal eğriliği, sırasıyla, κ_g^α , τ_g^α ve κ_n^α olmak üzere,

$$\begin{aligned}\kappa_g^\alpha &= \kappa_\alpha \sin \theta_\alpha, \\ \kappa_n^\alpha &= \kappa_\alpha \cos \theta_\alpha, \\ \tau_g^\alpha &= \tau_\alpha - \theta'_\alpha\end{aligned}\tag{3.1.41}$$

dir. Benzer şekilde M öteleme yüzeyinde β eğrisinin geodezik eğriliği, geodezik torsiyonu ve normal eğriliği, sırasıyla, κ_g^β , τ_g^β ve κ_n^β olmak üzere,

$$\begin{aligned}\kappa_g^\beta &= \kappa_\beta \sin \theta_\beta, \\ \kappa_n^\beta &= \kappa_\beta \cos \theta_\beta, \\ \tau_g^\beta &= \tau_\beta - \theta'_\beta\end{aligned}\tag{3.1.42}$$

dir.

M yüzeyinin türeteç eğrileri asimtotik çizgi olsun. O zaman M nin şekil operatörü

$$S = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{bmatrix} \kappa_\alpha \cos \theta_\alpha & -\kappa_\beta \cos \theta_\beta \cos \varphi \\ -\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha \cos \varphi & \kappa_\beta \cos \theta_\beta \end{bmatrix}\tag{3.1.43}$$

dir. (3.1.43) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$S = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{bmatrix} \kappa_n^\alpha & -\cos \varphi \kappa_n^\beta \\ -\cos \varphi \kappa_n^\alpha & \kappa_n^\beta \end{bmatrix}$$

olur. Şekil operatörü simetrik olduğundan,

$$S = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{bmatrix} \kappa_n^\alpha & -\cos \varphi \kappa_n^\alpha \\ -\cos \varphi \kappa_n^\beta & \kappa_n^\beta \end{bmatrix}\tag{3.1.44}$$

elde edilir. O zaman yüzeyin Gauss eğriliği

$$K = \frac{\kappa_\alpha \kappa_\beta \cos \theta_\alpha \cos \theta_\beta}{\sin^2 \varphi}$$

ifadesinden

$$K = \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2 \varphi}\tag{3.1.45}$$

bulunur. Ayrıca yüzeyin ortalama eğriliği

$$H = \frac{\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta}{2 \sin^2 \varphi}$$

ifadesinden

$$H = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2 \varphi} \quad (3.1.46)$$

dir.

M yüzeyinin asli eğrilikleri, şekil operatörünün matrisinin özdeğerleri olduğundan

$$\det(\lambda I - S) = 0$$

ifadesindeki λ sayılarına k_1 ve k_2 dersek

$$k_1 = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2 \varphi} + \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2 \varphi}\right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2 \varphi}},$$

$$k_2 = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2 \varphi} - \sqrt{\left(\frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2 \varphi}\right)^2 - \frac{\kappa_n^\alpha \kappa_n^\beta}{\sin^2 \varphi}}$$

bulunur.

M yüzeyinin bir p noktasında S_p lineer dönüşümü, birim dönüşümünün bir skaler ile çarpımına eşit ise p noktası yüzeyin bir *umbilik noktası* olduğundan

$$S = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{bmatrix} \kappa_n^\alpha & -\cos \varphi \kappa_n^\alpha \\ -\cos \varphi \kappa_n^\beta & \kappa_n^\beta \end{bmatrix} = \lambda I$$

yazılabilir.

Böylece, M nin umbilik noktalarında

$$\begin{aligned} \kappa_n^\alpha &= \kappa_n^\beta, \\ \cos \varphi \kappa_n^\alpha &= 0, \\ \cos \varphi \kappa_n^\beta &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.47)$$

dır.

Teorem 3.1.6

Asimtotik çizgilerle tanımlanan öteleme yüzeyi M olsun. O zaman M nin minimal olması için olması için gerek ve yeter şart

$$\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta = 0$$

olmasıdır. Burada $\kappa_n^\alpha, \kappa_n^\beta$, sırasıyla, M öteleme yüzeyinde α ve β eğrilerinin normal eğrilikleridir.

İspat:

(\Rightarrow): Kabul edelimki asimtotik çizgilerle tanımlanan öteleme yüzeyi M minimal olsun. M , minimal yüzey olduğundan (3.1.46) dan

$$H = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2 \varphi} = 0 \quad (3.1.48)$$

olur. Buradan

$$\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta = 0$$

elde edilir.

(\Leftarrow): Asimtotik çizgilerle tanımlanan öteleme yüzeyinin ortalama eğriliği

$$H = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2 \varphi}$$

dır. Burada $\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta = 0$ yazılırsa $H = 0$ elde edilir. O halde M yüzeyi minimaldir. \square

Minimal öteleme yüzeyinin Gauss eğrilikleri; M öteleme yüzeyinde α ile β eğrisinin normal eğriliklerine göre

$$K = - \left(\frac{\kappa_n^\alpha}{\sin \varphi} \right)^2 \text{ ve } K = - \left(\frac{\kappa_n^\beta}{\sin \varphi} \right)^2 \quad (3.1.49)$$

dir. Böylece yüzeyin Gauss eğrilikleri türeteç eğrileri boyunca $K \leq 0$ dır. Bu durumda öteleme yüzeyinin bütün noktaları ya düzlemsel ya da hiperboliktir.

Sonuç 3.1.7

Uzay eğrileri ile üretilen bir minimal öteleme yüzeyinde hiçbir umbilik nokta bulunmaz.

İspat:

İspatı, olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Kabul edelimki M yüzeyi umbilik noktalara sahip olsun. M yüzeyi minimal olduğundan

$$H = \frac{\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta}{2 \sin^2 \varphi} = 0$$

yazılır. (3.1.49) eşitliği kullanılırsa M nin umbilik noktalarında

$$\begin{aligned}\kappa_n^\alpha &= \kappa_n^\beta, \\ \cos \varphi \kappa_n^\alpha &= 0, \\ \cos \varphi \kappa_n^\beta &= 0.\end{aligned}$$

olur. Bu ise Teorem 3.1.6 ile çelişir. O halde M minimal öteleme yüzeyinde hiçbir umbilik nokta bulunmaz. Böylece ispat tamamlanır. \square

Şimdi $\kappa_n^\alpha + \kappa_n^\beta = 0$ olduğunu göz önüne alalım. Buna göre

$$\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta = 0 \quad (3.1.50)$$

yazılır. (3.1.50) de u ya göre türev alınırsa

$$\kappa'_\alpha \cos \theta_\alpha - \kappa_\alpha \theta'_\alpha \sin \theta_\alpha + (\kappa_\beta \cos \theta_\beta)' = 0 \quad (3.1.51)$$

olur. (3.1.51) ifadesinde

$$(\kappa_\beta \cos \theta_\beta)' = 0$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa'_\alpha \cos \theta_\alpha - \kappa_\alpha \theta'_\alpha \sin \theta_\alpha = 0 \quad (3.1.52)$$

bulunur. (3.1.52) tekrar düzenlenirse

$$\frac{\kappa'_\alpha}{\kappa_\alpha} = \frac{\theta'_\alpha \sin \theta_\alpha}{\cos \theta_\alpha} \quad (3.1.53)$$

elde edilir. (3.1.53) ifadesinin integrali alınırsa

$$\ln \kappa_\alpha = -\ln \cos \theta_\alpha + \ln c_1$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha &= c_1, \\ \kappa_n^\alpha &= c_1 = sbt\end{aligned}\tag{3.1.54}$$

olur.

Benzer şekilde

$$\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha + \kappa_\beta \cos \theta_\beta = 0$$

ifadesinin v ye göre türevi alınırsa

$$(\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha)' + \kappa_\beta' \cos \theta_\beta - \kappa_\beta \theta_\beta' \sin \theta_\beta = 0\tag{3.1.55}$$

elde edilir. (3.1.55) de

$$(\kappa_\alpha \cos \theta_\alpha)' = 0$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa_\beta' \cos \theta_\beta - \kappa_\beta \theta_\beta' \sin \theta_\beta = 0\tag{3.1.56}$$

olur. Böylece

$$\frac{\kappa_\beta'}{\kappa_\beta} = \frac{\theta_\beta' \sin \theta_\beta}{\cos \theta_\beta}\tag{3.1.57}$$

eşitliği integrallenirse

$$\ln \kappa_\beta = -\ln \cos \theta_\beta + \ln c_2$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\kappa_\beta \cos \theta_\beta &= c_2, \\ \kappa_n^\beta &= c_2 = sbt\end{aligned}\tag{3.1.58}$$

olur.

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.8

Bir minimal öteleme yüzeyinin normal eğrilikleri üreteç eğrileri boyunca sabittir.

İspat:

Sonuç 3.1.7 ile (3.1.54) ve (3.1.58) ifadeleri birlikte düşünülürse istenen elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Minimal öteleme yüzeylerinin sınıflandırılması:

1. Durum: $\kappa_\alpha \neq 0$ $\kappa_\beta \neq 0$ ve $\cos \theta_\alpha = \cos \theta_\beta = 0$ olsun.

Bu durumda üreteç eğrilerinin binormalleri lineer bağımlıdır. Bu sebepten φ açısı ile $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha\}$ yı uygun olarak $\{\mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\beta\}$ ya döndürür. Burada φ açısı, $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ nin teğet vektörleri arasındaki açıdır. $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha\}$ sabit sistem ve $\{\mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\beta\}$ hareketli sistemdir. φ açısı, aynı zamanda da \mathbf{N}_α ve \mathbf{N}_β arasındaki açıdır. Böylece

$$\mathbf{T}_\beta = \sin \varphi \mathbf{N}_\alpha + \cos \varphi \mathbf{T}_\alpha \quad (3.1.59)$$

ve

$$\mathbf{N}_\beta = \cos \varphi \mathbf{N}_\alpha - \sin \varphi \mathbf{T}_\alpha \quad (3.1.60)$$

yazılır.

(3.1.59) ifadesinin u ya göre türevi alınırsa

$$\varphi' \cos \varphi \mathbf{N}_\alpha + \sin \varphi \mathbf{N}'_\alpha + \varphi' \sin \varphi \mathbf{T}_\alpha + \cos \varphi \mathbf{T}'_\alpha = 0 \quad (3.1.61)$$

olur. (3.1.61) de

$$\mathbf{N}'_\alpha = -\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha \text{ ve } \mathbf{T}'_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha$$

göz önüne alınırsa

$$\varphi' \cos \varphi \mathbf{N}_\alpha - \sin \varphi \kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \sin \varphi \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \varphi' \sin \varphi \mathbf{T}_\alpha + \cos \varphi \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha = 0$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-(\kappa_\alpha + \varphi') \sin \varphi \mathbf{T}_\alpha + (\kappa_\alpha + \varphi') \cos \varphi \mathbf{N}_\alpha + \tau_\alpha \sin \varphi \mathbf{B}_\alpha = 0 \quad (3.1.62)$$

elde edilir. $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha\}$ lineer bağımsız olduğundan.

$$\begin{aligned} -(\kappa_\alpha + \varphi') \sin \varphi &= 0, \\ (\kappa_\alpha + \varphi') \cos \varphi &= 0, \\ \tau_\alpha \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

olur. (3.1.63) den

$$\sin \varphi \neq 0 \text{ ve } \cos \varphi \neq 0$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa_\alpha = \varphi' \text{ ve } \tau_\alpha = 0$$

elde edilir. Böylece α bir düzlemsel eğridir.

(3.1.60) m u ya göre türevi alınırsa

$$-\varphi' \sin \varphi \mathbf{N}_\alpha + \cos \varphi \mathbf{N}'_\alpha - \varphi' \cos \varphi \mathbf{T}_\alpha - \sin \varphi \mathbf{T}'_\alpha = 0 \quad (3.1.64)$$

bulunur. (3.1.64) de

$$\mathbf{N}'_\alpha = -\kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha \text{ ve } \mathbf{T}'_\alpha = \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha$$

olduğu göz önüne alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} -\varphi' \sin \varphi \mathbf{N}_\alpha - \cos \varphi \kappa_\alpha \mathbf{T}_\alpha + \cos \varphi \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha - \varphi' \cos \varphi \mathbf{T}_\alpha - \sin \varphi \kappa_\alpha \mathbf{N}_\alpha &= 0, \\ (-\varphi' - \kappa_\alpha) \sin \varphi \mathbf{N}_\alpha - (\varphi' + \kappa_\alpha) \cos \varphi \mathbf{T}_\alpha + \cos \varphi \tau_\alpha \mathbf{B}_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\begin{aligned} -(\kappa_\alpha + \varphi') \sin \varphi &= 0, \\ (\kappa_\alpha + \varphi') \cos \varphi &= 0, \\ \tau_\alpha \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.65)$$

olur. (3.1.65) den

$$\sin \varphi \neq 0 \text{ ve } \cos \varphi \neq 0$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$\kappa_\alpha = \varphi' \text{ ve } \tau_\alpha = 0$$

bulunur.

Benzer şekilde (3.1.59) un v ye göre türevini alırsak o zaman

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'_{\beta} &= 0, \\ \kappa_{\beta}\mathbf{N}_{\beta} &= 0\end{aligned}\tag{3.1.66}$$

olur. (3.1.66) dan

$$\kappa_{\beta} = 0$$

dır. Bu ise 1. durumla çelişir. Böylece bu koşullar altında öteleme yüzeyi minimal değildir. (Minimal olması için $\kappa_{\alpha} \neq 0$ $\kappa_{\beta} \neq 0$ olmalıdır.)

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\kappa_n^{\alpha} &= \kappa_{\alpha} \cos \theta_{\alpha}, \\ \kappa_n^{\beta} &= \kappa_{\beta} \cos \theta_{\beta}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\cos \theta_{\alpha} &= \frac{\kappa_n^{\alpha}}{\kappa_{\alpha}}, \\ \cos \theta_{\beta} &= \frac{\kappa_n^{\beta}}{\kappa_{\beta}}\end{aligned}\tag{3.1.67}$$

yazılır. Üreteç eğrileri boyunca $\kappa_n^{\alpha} = 0$ ve $\kappa_n^{\beta} = 0$ olan hiç bir minimal öteleme yüzeyi yoktur. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.1.9

Üreteç eğrileri boyunca eğrilikleri sıfır olmayan asimtotik çizgileri içeren hiç bir minimal öteleme yüzeyi yoktur.

İspat: Yüzey minimal ise $\kappa_{\alpha} \neq 0$ $\kappa_{\beta} \neq 0$ ve $\cos \theta_{\alpha} = \cos \theta_{\beta} = 0$ olmalıdır. Bu durumda (3.1.67) den üreteç eğrileri boyunca $\kappa_n^{\alpha} = 0$ ve $\kappa_n^{\beta} = 0$ olur. Bu ise üreteç eğrileri boyunca $\kappa_n^{\alpha} \neq 0$ ve $\kappa_n^{\beta} \neq 0$ olan hiç bir minimal öteleme yüzeyi olmadığını gösterir. Böylece ispat tamamlanır. \square

2. Durum: $\kappa_{\alpha} = 0$ ve $\kappa_{\beta} = 0$ ise yüzey düzlemseldir.

3. Durum:

i) $\kappa_\alpha = 0$, $\kappa_\beta \neq 0$ ve $\cos \theta_\beta = 0$ ise yüzey silindiriktir.

Eğer $\cos \theta_\beta = 0$ ise o zaman yüzeyin asli normal vektör alanı ve β eğrisinin binormal vektör alanı lineer bağımlıdır. Dolayısıyla α , $\{\mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\beta\}$ düzlemi içinde yatmaktadır.

ii) $\kappa_\alpha \neq 0$, $\kappa_\beta = 0$ ve $\cos \theta_\alpha = 0$ ise yüzey silindiriktir.

4. Durum: $\kappa_\alpha = \kappa_\beta \neq 0$ ve $\cos \theta_\alpha = -\cos \theta_\beta \neq 0$ ise iki durum söz konusudur.

i) $\kappa_\alpha = \kappa_\beta \neq 0$ ve $\cos \theta_\alpha = -\cos \theta_\beta = 1$ dir.

Bu durumda türeteç eğrilerinin asli normal çizgileri lineer bağımlıdır. Bu sebepten φ açısı $\{\mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\beta\}$ yı uygun olarak $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha\}$ ya döndürür. Böylece

$$\mathbf{T}_\alpha = \cos \varphi \mathbf{T}_\beta - \sin \varphi \mathbf{N}_\beta \quad (3.1.68)$$

ve

$$\mathbf{N}_\alpha = \sin \varphi \mathbf{T}_\beta + \cos \varphi \mathbf{N}_\beta \quad (3.1.69)$$

yazılabilir.

(3.1.68) in v ye göre türevi alınır,

$$\cos \varphi \mathbf{T}'_\beta - \sin \varphi \mathbf{N}'_\beta = 0 \quad (3.1.70)$$

olur. (3.1.70) de

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'_\beta &= \kappa_\beta \mathbf{N}_\beta, \\ \mathbf{N}'_\beta &= -\kappa_\beta \mathbf{T}_\beta + \tau_\beta \mathbf{B}_\beta \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınır ve tekrar düzenlenirse

$$\cos \varphi \kappa_\beta \mathbf{N}_\beta + \sin \varphi \kappa_\beta \mathbf{T}_\beta - \sin \varphi \tau_\beta \mathbf{B}_\beta = 0$$

elde edilir. $\{\mathbf{T}_\beta, \mathbf{N}_\beta, \mathbf{B}_\beta\}$ lineer bağımsız olduğundan

$$\sin \varphi \kappa_\beta = 0 \Rightarrow \kappa_\beta = 0$$

ve

$$\sin \varphi \tau_\beta = 0 \Rightarrow \tau_\beta = 0$$

olur. Bu ise (4.i) ile çelişir. Buna göre öteleme yüzeyleri minimal değildir.

ii) $\kappa_\alpha = \kappa_\beta \neq 0$ ve $\cos \theta_\alpha = -\cos \theta_\beta \neq 1$

Scherk yüzeyi bu duruma bir örnektir.

Örnek 3.1.10

Scherk yüzeyi olarak tanımlanan

$$M(u, v) = \left(u, v, \frac{1}{a} \log \left(\frac{\cos av}{\cos au} \right) \right)$$

yüzeyinin üreteç eğrileri

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \left(u, 0, -\frac{1}{a} \log(\cos au) \right) \\ \beta(v) &= \left(0, v, \frac{1}{a} \log(\cos av) \right) \end{aligned}$$

dir. α nın teğet ve asli normal vektörlerini

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha &= \frac{\alpha'(u)}{\|\alpha'(u)\|}, \\ \mathbf{N}_\alpha &= \frac{\mathbf{T}'_\alpha}{\|\mathbf{T}'_\alpha\|} \end{aligned}$$

formüllerinden yararlanarak bulalım. α nın teğet vektörü

$$\mathbf{T}_\alpha = \frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 au}} \left(1, 0, \frac{\tan au}{\ln 10} \right)$$

olur. Burada

$$\frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 au}} = \rho$$

olarak gösterilirse

$$\mathbf{T}_\alpha = \rho \left(1, 0, \frac{\tan au}{\ln 10} \right)$$

şeklinde yazılır. \mathbf{T}_α nın u ya göre türevi alınırsa

$$\mathbf{T}'_\alpha = \left(\frac{-a \tan au (1 + \tan^2 au) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 au)^{\frac{3}{2}}}, 0, \frac{a(1 + \tan^2 au) (\ln^2 10)}{(\ln^2 10 + \tan^2 au)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

$$\kappa_\alpha = \|\mathbf{T}'_\alpha\| = \frac{a(1 + \tan^2 au) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 au)}$$

olur. Böylece α nın asli normal vektörü

$$\mathbf{N}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 au}} (-\tan au, 0, \ln 10) \quad (3.1.71)$$

elde edilir.

α nın eğriliği,

$$\kappa_\alpha = \|\alpha''(u)\| = \sqrt{\frac{a^2(1 + \tan^2 au)^2}{\ln^2 10}} = \frac{a(1 + \tan^2 au)}{\ln 10}$$

olur. Buradan

$$\frac{a(1 + \tan^2 au) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 au)} = \frac{a(1 + \tan^2 au)}{\ln 10} \quad (3.1.72)$$

elde edilir. (3.1.72) ifadesi düzenlenirse

$$\ln 10 = \sqrt{\tan^2 au + \ln^2 10} \quad (3.1.73)$$

bulunur. (3.1.73) ifadesi

$$\kappa_\alpha = \|\mathbf{T}'_\alpha\| = \frac{a(1 + \tan^2 au) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 au)}$$

ifadesinde kullanılırsa α nın eğriliği,

$$\kappa_\alpha = \frac{a(1 + \tan^2 au) \ln^2 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 au)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1.74)$$

olur.

Benzer şekilde β nın teğet ve asli normal vektörlerini, sırasıyla,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\beta &= \frac{\beta'(v)}{\|\beta'(v)\|}, \\ \mathbf{N}_\beta &= \frac{\mathbf{T}'_\beta}{\|\mathbf{T}'_\beta\|}\end{aligned}$$

formüllerinden yararlanarak bulabiliriz. Böylece β nın teğet vektörü

$$\mathbf{T}_\beta = \frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 av}} \left(0, 1, -\frac{\tan av}{\ln 10} \right) \quad (3.1.75)$$

olur. (3.1.75) de

$$\frac{\ln 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 av}} = \sigma$$

göz önüne alınırsa

$$\mathbf{T}_\beta = \sigma \left(0, 1, -\frac{\tan av}{\ln 10} \right)$$

şeklinde yazılır. \mathbf{T}_β nın v ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\mathbf{T}'_\beta &= \left(0, \frac{-a \tan av (1 + \tan^2 av) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 av)^{\frac{3}{2}}}, \frac{a(1 + \tan^2 av) (-\ln^2 10)}{(\ln^2 10 + \tan^2 av)^{\frac{3}{2}}} \right), \\ \kappa_\beta &= \|\mathbf{T}'_\beta\| = \frac{a(1 + \tan^2 av) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 av)}\end{aligned}$$

olur. Böylece β nın asli normal vektörü

$$\mathbf{N}_\beta = \frac{1}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 av}} (0, -\tan av, -\ln 10) \quad (3.1.76)$$

dir.

β nın eğriliği,

$$\kappa_\beta = \|\beta''(v)\| = \sqrt{\frac{a^2(1 + \tan^2 av)^2}{\ln^2 10}} = \frac{a(1 + \tan^2 av)}{\ln 10} \quad (3.1.77)$$

olur. (3.1.77) den

$$\frac{a(1 + \tan^2 au) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 av)} = \frac{a(1 + \tan^2 av)}{\ln 10} \quad (3.1.78)$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.1.78) ifadesi düzenlenirse

$$\ln 10 = \sqrt{\tan^2 av + \ln^2 10} \quad (3.1.79)$$

yazılır. (3.1.79) ifadesi

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{T}'_\beta\| = \frac{a(1 + \tan^2 av) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 av)}$$

bu eşitlikte kullanılırsa β nın eğriliği,

$$\kappa_\beta = \frac{a(1 + \tan^2 av) \ln^2 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 av)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.1.80)$$

olarak bulunur.

Ayrıca yüzeyin birim normal vektörü

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta}{\|\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta\|}$$

formülü yardımıyla hesaplanabilir.

Buna göre

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta &= \rho\sigma \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & \frac{\tan au}{\ln 10} \\ 0 & 1 & -\frac{\tan av}{\ln 10} \end{vmatrix} \\ &= \rho\sigma \left(-\frac{\tan au}{\ln 10}, \frac{\tan av}{\ln 10}, 1 \right) \end{aligned} \quad (3.1.81)$$

elde edilir. (3.1.81) den

$$\|\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta\| = \rho\sigma \frac{\sqrt{\tan^2 au + \tan^2 av + \ln^2 10}}{\ln 10} \quad (3.1.82)$$

olur. Böylece (3.1.81) ve (3.1.82) birlikte göz önüne alınırsa

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 au + \tan^2 av + \ln^2 10}} (-\tan au, \tan av, \ln 10) \quad (3.1.83)$$

elde edilir. (3.1.83) de

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 au + \tan^2 av + \ln^2 10}}$$

olarak gösterelim. (3.1.71), (3.1.76) ve (3.1.83) ifadelerinden

$$\begin{aligned} \cos \theta_\alpha &= \mu \frac{1}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 au}} (\tan^2 au + \ln^2 10), \\ \cos \theta_\alpha &= \mu \frac{\tan^2 au + \ln^2 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 au}}, \end{aligned} \quad (3.1.84)$$

ve

$$\begin{aligned} \cos \theta_\beta &= \mu \frac{1}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 av}} (-\tan^2 av - \ln^2 10), \\ \cos \theta_\beta &= \mu \frac{(-\tan^2 av - \ln^2 10)}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 av}} \end{aligned} \quad (3.1.85)$$

elde edilir. Böylece (3.1.74), (3.1.80), (3.1.84) ve (3.1.85) ifadeleri (3.1.27) ifadesinde yerine yazılırsa

$$H = \frac{\frac{a(1+\tan^2 au) \ln 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 au)} \mu \frac{\tan^2 au + \ln^2 10}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 au}} + \frac{a(1+\tan^2 av) \ln^2 10}{(\ln^2 10 + \tan^2 av)^{\frac{3}{2}}} \mu \frac{(-\tan^2 av - \ln^2 10)}{\sqrt{\ln^2 10 + \tan^2 av}}}{2 \sin^2 \varphi}$$

bulunur. Burada

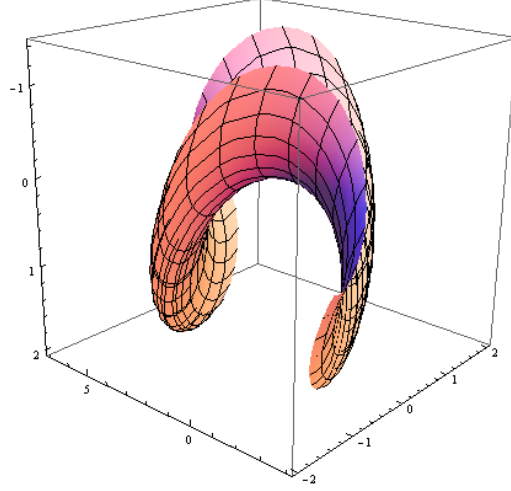
$$\ln^2 10 = \tan^2 au + \ln^2 10 = \tan^2 av + \ln^2 10$$

olduğundan

$$\tan^2 au = \tan^2 av$$

elde edilir. Dolayısıyla $H = 0$ elde edilir.

O halde Scherk yüzeyi aynı zamanda bir öteleme yüzeyi olan minimal bir yüzeydir. \square



Şekil 1: Scherk yüzeyi bir minimal öteleme yüzeyidir.

Örnek 3.1.11

M yüzeyi, $M(u, v) = (m_1, m_2, m_3)$ ile verilen öteleme yüzeyi olsun. Burada

$$\begin{aligned} m_1 &= \sin \frac{u}{2} - \sin \frac{v}{2}, \\ m_2 &= \cos \frac{u}{2} - \cos \frac{v}{2}, \\ m_3 &= \frac{\sqrt{3}u}{2} + \frac{\sqrt{3}v}{2} \end{aligned}$$

ise yüzeyin türeteç eğrileri

$$\begin{aligned} \alpha(u) &= \left(\sin \frac{u}{2}, \cos \frac{u}{2} - 1, \frac{\sqrt{3}u}{2} \right), \\ \beta(v) &= \left(-\sin \frac{v}{2}, -\cos \frac{v}{2} + 1, \frac{\sqrt{3}v}{2} \right) \end{aligned}$$

dir. α nın teğet ve asli normal vektörü, sırasıyla, \mathbf{T}_α ve \mathbf{N}_α olmak üzere

$$\begin{aligned}
\alpha'(u) &= \left(\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2}, -\frac{1}{2} \sin \frac{u}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\
\|\alpha'(u)\| &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\cos^2 \frac{u}{2} + \sin^2 \frac{u}{2} \right) + \frac{3}{4}} = 1, \\
\mathbf{T}_\alpha &= \frac{\alpha'(u)}{\|\alpha'(u)\|} = \left(\frac{1}{2} \cos \frac{u}{2}, -\frac{1}{2} \sin \frac{u}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\
\mathbf{T}'_\alpha &= \left(-\frac{1}{4} \sin \frac{u}{2}, -\frac{1}{4} \cos \frac{u}{2}, 0 \right), \\
\|\mathbf{T}'_\alpha\| &= \sqrt{\frac{1}{16} \left(\sin^2 \frac{u}{2} + \cos^2 \frac{u}{2} \right)} = \frac{1}{4}, \\
\mathbf{N}_\alpha &= \frac{\mathbf{T}'_\alpha}{\|\mathbf{T}'_\alpha\|}, \\
&= \left(-\sin \frac{u}{2}, -\cos \frac{u}{2}, 0 \right)
\end{aligned} \tag{3.1.86}$$

olarak bulunur. α nın eğriliği,

$$\kappa_\alpha = \|\mathbf{T}'_\alpha\| = \frac{1}{4} \tag{3.1.87}$$

dir. Benzer olarak β nın teğet ve asli normal vektörleri, sırasıyla, \mathbf{T}_β ve \mathbf{N}_β olmak üzere

$$\begin{aligned}
\beta'(v) &= \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{v}{2}, \frac{1}{2} \sin \frac{v}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\
\|\beta'(v)\| &= \sqrt{\frac{1}{4} \left(\cos^2 \frac{v}{2} + \sin^2 \frac{v}{2} \right) + \frac{3}{4}} = 1, \\
\mathbf{T}_\beta &= \frac{\beta'(v)}{\|\beta'(v)\|} = \left(-\frac{1}{2} \cos \frac{v}{2}, \frac{1}{2} \sin \frac{v}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \\
\mathbf{T}'_\beta &= \left(\frac{1}{4} \sin \frac{v}{2}, \frac{1}{4} \cos \frac{v}{2}, 0 \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{T}'_\beta\| &= \sqrt{\frac{1}{16} \left(\sin^2 \frac{v}{2} + \cos^2 \frac{u}{2} \right)} = \frac{1}{4}, \\
\mathbf{N}_\beta &= \frac{\mathbf{T}'_\beta}{\|\mathbf{T}'_\beta\|}, \\
&= \left(\sin \frac{v}{2}, \cos \frac{v}{2}, 0 \right)
\end{aligned} \tag{3.1.88}$$

olarak bulunur. β nın eğriliği,

$$\kappa_\beta = \|\mathbf{T}'_\beta\| = \frac{1}{4}, \tag{3.1.89}$$

dür.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{1}{2} \cos \frac{u}{2} & -\frac{1}{2} \sin \frac{u}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \cos \frac{v}{2} & \frac{1}{2} \sin \frac{v}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{vmatrix}, \\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\sin \frac{u}{2} + \sin \frac{v}{2} \right), -\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\cos \frac{u}{2} + \cos \frac{v}{2} \right), \frac{1}{4} \left(\sin \frac{v-u}{2} \right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta\| = \sqrt{\frac{3}{16} \left(2 + 2 \left(\cos \frac{u-v}{2} \right) \right) + \frac{1}{16} \left(\sin^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right)}$$

bulunur. Kısılığın hatırı için,

$$\|\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta\| = \sqrt{\frac{3}{8} + \frac{3}{8} \left(\cos \frac{u-v}{2} \right) + \frac{1}{16} \left(\sin^2 \left(\frac{u-v}{2} \right) \right)} = \rho$$

yazılırsa,

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{4\rho} \left(\sin \frac{u}{2} + \sin \frac{v}{2} \right), \\
u_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{4\rho} \left(\cos \frac{u}{2} + \cos \frac{v}{2} \right), \\
u_3 &= \frac{1}{4\rho} \sin \left(\frac{v-u}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.1.90}$$

elde edilir. (3.1.86), (3.1.88), (3.1.90) ifadelerinden yararlanarak

$$\cos \theta_\alpha = \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\alpha \rangle$$

eşitliği hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \cos \theta_\alpha &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4\rho} \left(\sin \frac{u}{2} + \sin \frac{v}{2} \right) & -\frac{\sqrt{3}}{4\rho} \left(\cos \frac{u}{2} + \cos \frac{v}{2} \right) & \frac{1}{4\rho} \sin \left(\frac{v-u}{2} \right) \\ -\sin \frac{u}{2} & -\cos \frac{u}{2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4\rho} \left(1 + \cos \frac{u-v}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.1.91)$$

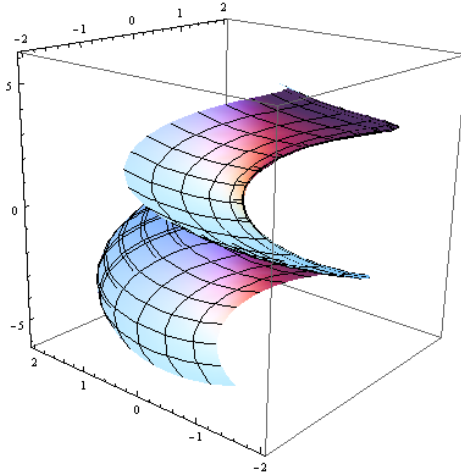
bulunur. Ayrıca benzer şekilde,

$$\cos \theta_\beta = \langle \mathbf{U}, \mathbf{N}_\beta \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{4\rho} \left(1 + \cos \left(\frac{u-v}{2} \right) \right), \quad (3.1.92)$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.1.27) ifadesinde (3.1.87) (3.1.89) (3.1.91) ve (3.1.92) ifadelerini kullanarak

$$H = \frac{\frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{4\rho} \left(1 + \cos \left(\frac{u-v}{2} \right) \right) - \frac{1}{4} \frac{\sqrt{3}}{4\rho} \left(1 + \cos \left(\frac{u-v}{2} \right) \right)}{2 \sin^2 \varphi} = 0,$$

dır. O halde M yüzeyi minimaldir. \square



Şekil 2: İki helis tarafından oluşturulan minimal öteleme yüzeyi.

5. Durum: $\kappa_\alpha \neq 0$ $\kappa_\beta \neq 0$ ($\kappa_\alpha \neq \kappa_\beta$) ve $\cos \theta_\alpha \neq 0$ $\cos \theta_\beta \neq 0$ ($\cos \theta_\alpha \neq \cos \theta_\beta$) olsun.

3 boyutlu Öklid uzayında Scherk yüzeyi aynı zamanda minimal öteleme yüzeyi olur.

4. BÖLÜM

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayında uzay eğrileri ile verilen öteleme yüzeylerinin Bishop çatısı yardımıyla Gauss ve ortalama eğriliklerine göre karakterizasyonları verildi.

4.1. Bishop Çatısına Göre Öteleme Yüzeyleri

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{E}^3$ yay uzunluğu ile parametrize edilen diferensiyellenebilir bir eğri olsun. γ eğrisinin, \mathbf{T} teğet, \mathbf{N} asli normal ve \mathbf{B} binormal vektör alanı olup $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ ye Frenet çatısı denir. O zaman $\kappa \neq 0$ ve τ , sırasıyla, γ nın eğriliği ve torsiyonu olmak üzere Frenet denklemleri,

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= \kappa\mathbf{N}, \\ \mathbf{N}' &= -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \\ \mathbf{B}' &= -\tau\mathbf{N}\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

şeklinde yazılır, [6].

(4.1.1) yardımıyla $\{\mathbf{T}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2\}$ Bishop çatısı

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle &= 1, \quad \langle \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_1 \rangle = 1, \quad \langle \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2 \rangle = 1, \\ \langle \mathbf{T}, \mathbf{M}_1 \rangle &= \langle \mathbf{T}, \mathbf{M}_2 \rangle = \langle \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2 \rangle = 0.\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{T}' &= k_1\mathbf{M}_1 + k_2\mathbf{M}_2, \\ \mathbf{M}'_1 &= -k_1\mathbf{T}, \\ \mathbf{M}'_2 &= -k_2\mathbf{T}\end{aligned}\tag{4.1.3}$$

şeklinde tanımlanır. k_1 ve k_2 , γ eğrisinin Bishop eğrilikleri olmak üzere

$$\begin{aligned}\kappa(s) &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2}, \\ \theta(s) &= \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right), \quad k_1 \neq 0, \\ \tau(s) &= -\frac{d\theta(s)}{ds},\end{aligned}\tag{4.1.4}$$

yazılır. Burada $\theta = - \int \tau(s)ds$ dır, [2].

γ eğrisinin Frenet ve Bishop çatıları arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \mathbf{T}, \\ \mathbf{N} &= \cos \theta(s) \mathbf{M}_1 + \sin \theta(s) \mathbf{M}_2, \\ \mathbf{B} &= -\sin \theta(s) \mathbf{M}_1 + \cos \theta(s) \mathbf{M}_2\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir, [2].

$$M(u, v) = \alpha(u) + \beta(v) \quad (4.1.5)$$

öteleme yüzeyinde

$$\begin{aligned}M_u &= \alpha'(u) = \mathbf{T}_\alpha, \\ \mathbf{T}'_\alpha &= k_1^\alpha \mathbf{M}_1^\alpha + k_2^\alpha \mathbf{M}_2^\alpha, \\ \mathbf{M}_1^{\alpha'} &= -k_1^\alpha \mathbf{T}_\alpha, \\ \mathbf{M}_2^{\alpha'} &= -k_2^\alpha \mathbf{T}_\alpha\end{aligned} \quad (4.1.6)$$

ve

$$\begin{aligned}M_v &= \beta'(v) = \mathbf{T}_\beta, \\ \mathbf{T}'_\beta &= k_1^\beta \mathbf{M}_1^\beta + k_2^\beta \mathbf{M}_2^\beta, \\ \mathbf{M}_1^{\beta'} &= -k_1^\beta \mathbf{T}_\beta, \\ \mathbf{M}_2^{\beta'} &= -k_2^\beta \mathbf{T}_\beta\end{aligned} \quad (4.1.7)$$

olarak yazılır.

$\varphi(u)$ açısı, $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ eğrilerinin teğet vektörleri $\{\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta\}$ arasındaki açı olmak üzere M yüzeyinin birim normal vektör alanı;

$$\mathbf{U}(u, v) = \frac{1}{\sin \varphi} (\mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta) \quad (4.1.8)$$

şeklindedir.

M yüzeyinin I . temel formunun katsayıları,

$$\begin{aligned} E &= \langle M_u, M_u \rangle = \langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\alpha \rangle = 1, \\ F &= \langle M_u, M_v \rangle = \langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle = \|\mathbf{T}_\alpha\| \|\mathbf{T}_\beta\| \cos \varphi = \cos \varphi, \\ G &= \langle M_v, M_v \rangle = \langle \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\beta \rangle = 1. \end{aligned}$$

dır. M yüzeyinin I . temel formu,

$$I = du^2 + 2 \cos \varphi dudv + dv^2 \quad (4.1.9)$$

biçiminde elde edilir.

M yüzeyinin II . temel formunun katsayıları, ϕ_α açısı, \mathbf{U} ile \mathbf{M}_1^α ve ϕ_β açısı, \mathbf{U} ile \mathbf{M}_1^β arasındaki açı olmak üzere

$$\begin{aligned} L &= \langle \mathbf{U}, M_{uu} \rangle, \\ &= k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha \\ M &= \langle \mathbf{U}, M_{uv} \rangle = \langle \mathbf{U}, \mathbf{0} \rangle = 0, \\ N &= \langle \mathbf{U}, M_{vv} \rangle, \\ &= k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta \end{aligned}$$

dır. Böylece M yüzeyinin II . temel formu,

$$II = (k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha) du^2 + \left(k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta \right) dv^2 \quad (4.1.10)$$

olarak bulunur.

Buna göre şekil operatörü

$$S = \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} LG - MF & MG - NF \\ -LF + ME & -MF + NE \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$S = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \begin{bmatrix} k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha & - \left(k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta \right) \cos \varphi \\ - \left(k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha \right) \cos \varphi & k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta \end{bmatrix} \quad (4.1.11)$$

bulunur. Bu durumda yüzeyin, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği, sırasıyla,

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

$$H = \frac{EN - 2MF + GL}{2(EG - F^2)}$$

olduğundan

$$K = \frac{(k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha) (k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta)}{\sin^2 \varphi}, \quad (4.1.12)$$

$$H = \frac{k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta + k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha}{2 \sin^2 \varphi} \quad (4.1.13)$$

bulunur.

Tanım 4.1.1

M yüzeyi üzerinde bir eğri α ve α nın Bishop çatısı $\{\mathbf{T}^\alpha, \mathbf{M}_1^\alpha, \mathbf{M}_2^\alpha\}$ olmak üzere,

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{M}_1^\alpha \rangle = 0$$

sağlanırsa α ya \mathbf{M}_1^α - çizgi denir. Burada \mathbf{U} , M yüzeyinin birim normal vektör alanıdır, [6].

Teorem 4.1.2

M öteleme yüzeyinde α eğrisi bir \mathbf{M}_1^α - çizgi ise $\cot \varphi = 0$ veya $k_2^\alpha = 0$ dır.

İspat

ϕ_α açısı, \mathbf{U} ile \mathbf{M}_1^α arasındaki açı olmak üzere

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{M}_1^\alpha \rangle = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{M}_1^\alpha\| \cos \phi_\alpha,$$

yazılır. Buradan

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{M}_1^\alpha \rangle = \cos \phi_\alpha \quad (4.1.14)$$

elde edilir. (4.1.14) de (4.1.8) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\cos \phi_\alpha &= \langle \mathbf{U}, \mathbf{M}_1^\alpha \rangle, \\
&= \left\langle \frac{1}{\sin \varphi} \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta, \mathbf{M}_1^\alpha \right\rangle, \\
&= -\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{M}_1^\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

olur. (4.1.15) den

$$\cos \phi_\alpha = -\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{M}_2^\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle \tag{4.1.16}$$

elde edilir. (4.1.16) eşitliğinin u ya göre türevi alınırsa

$$-\phi'_\alpha \sin \phi_\alpha = \varphi' \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} \langle \mathbf{M}_2^\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle + [\langle \mathbf{M}_2^{\alpha'} \mathbf{T}_\beta \rangle + \langle \mathbf{M}_2^\alpha, \mathbf{T}'_\beta \rangle] \left(-\frac{1}{\sin \varphi}\right) \tag{4.1.17}$$

olur. Ayrıca

$$\mathbf{M}_2^{\alpha'} = -k_2^\alpha \mathbf{T}_\alpha \text{ ve } \langle \mathbf{M}_2^\alpha, \mathbf{T}'_\beta \rangle = 0 \tag{4.1.18}$$

ifadeleri (4.1.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\phi'_\alpha \sin \phi_\alpha = \varphi' \cot \varphi \frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{M}_2^\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle + \langle -k_2^\alpha \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle \left(-\frac{1}{\sin \varphi}\right) \tag{4.1.19}$$

elde edilir. Burada

$$\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{M}_2^\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle = -\cos \phi_\alpha \text{ ve } \langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\beta \rangle = \cos \varphi$$

olduğundan (4.1.19) denklemini düzenlenirse

$$-\phi'_\alpha \sin \phi_\alpha = \cot \varphi [-\varphi' \cos \phi_\alpha + k_2^\alpha] \tag{4.1.20}$$

bulunur. α eğrisi, \mathbf{M}_1^α - çizgi olduğundan

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{M}_1^\alpha \rangle = 0$$

olur. Ayrıca

$$\cos \phi_\alpha = \langle \mathbf{U}, \mathbf{M}_1^\alpha \rangle$$

olduğundan

$$\cos \phi_\alpha = 0$$

dır. O halde

$$\phi_\alpha = (2k + 1) \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4.1.21)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\phi_\alpha' = 0$$

dır. (4.1.21) ifadesinden

$$\sin \phi_\alpha = \pm 1$$

bulunur. (4.1.20) düzenlenirse

$$\cot \varphi k_2^\alpha = 0 \quad (4.1.22)$$

olur. (4.1.22) den

$$\cot \varphi = 0 \text{ veya } k_2^\alpha = 0$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. \square

Sonuç 4.1.3

M , 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyi ve β ise bu yüzey üzerinde geodezik olmayan eğri olsun. O zaman β , \mathbf{M}_1^β – çizgi ise ϕ_β açısı sabittir.

İspat:

ϕ_β , \mathbf{U} ile \mathbf{M}_1^β arasındaki açı olmak üzere,

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{M}_1^\beta \rangle = \|\mathbf{U}\| \|\mathbf{M}_1^\beta\| \cos \phi_\beta = \cos \phi_\beta, \quad (4.1.23)$$

yazılır. (4.1.23) den

$$\begin{aligned} \cos \phi_\beta &= \langle \mathbf{U}, \mathbf{M}_1^\beta \rangle, \\ &= \left\langle \frac{1}{\sin \varphi} \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\beta, \mathbf{M}_1^\beta \right\rangle, \\ &= -\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{T}_\beta \times \mathbf{M}_1^\beta, \mathbf{T}_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (4.1.24)$$

elde edilir. (4.1.24) de gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\cos \phi_\beta = -\frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{M}_2^\beta, \mathbf{T}_\alpha \rangle \quad (4.1.25)$$

olur. (4.1.25) in v ye göre türevi alınır

$$-\phi'_\beta \sin \phi_\beta = \left[\langle \mathbf{M}_2^{\beta'}, \mathbf{T}_\alpha \rangle + \langle \mathbf{M}_2^\alpha, \mathbf{T}'_\alpha \rangle \right] \left(-\frac{1}{\sin \varphi} \right) \quad (4.1.26)$$

bulunur. (4.1.3) ve (4.1.18) den

$$\begin{aligned} -\phi'_\beta \sin \phi_\beta &= \langle -k_2^\beta \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\alpha \rangle \left(-\frac{1}{\sin \varphi} \right), \\ -\phi'_\beta \sin \phi_\beta &= k_2^\beta \frac{1}{\sin \varphi} \langle \mathbf{T}_\beta, \mathbf{T}_\alpha \rangle, \\ -\phi'_\beta \sin \phi_\beta &= k_2^\beta \cot \varphi \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

elde edilir. β , M yüzeyi üzerinde \mathbf{M}_1^β - çizgi olduğundan ya $k_2^\beta = 0$ ya da $\cot \varphi = 0$ dır. Bundan dolayı

$$-\phi'_\beta \sin \phi_\beta = 0, \quad (4.1.28)$$

olur. β , M yüzeyi üzerinde non-geodezik olduğundan \mathbf{M}_1^β vektör alanı \mathbf{U} vektör alanının lineer birleşimi şeklinde yazılamaz. Yani

$$\mathbf{M}_1^\beta \neq \mathbf{U} \text{ yada } \mathbf{M}_1^\beta \neq -\mathbf{U}, \quad (4.1.29)$$

bulunur. (4.1.29) dan

$$\begin{aligned} \sin \phi_\beta &\neq 0, \\ \phi'_\beta &= 0, \\ \phi_\beta &= c = sbt. \end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 4.1.4

Bishop çatısı ile verilen α ve β uzay eğrileri ile üretilen bir öteleme yüzeyinin Gauss eğriliğinin sıfır olması için gerek ve yeter şart

$$k_1^\alpha = k_2^\alpha \tan \phi_\alpha \text{ veya } k_1^\beta = k_2^\beta \tan \phi_\beta$$

olmasıdır. Burada k_i^α, k_i^β ($i = 1, 2$), sırasıyla α ve β nin Bishop eğrilikleridir.

İspat:

(\Rightarrow): Bishop çatısı ile verilen α ve β uzay eğrileri ile üretilen bir öteleme yüzeyinin Gauss eğriliği sıfır ise (4.1.12) den

$$K = \frac{(k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha) (k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta)}{\sin^2 \varphi} = 0 \quad (4.1.30)$$

yazılır. (4.1.30) dan

$$k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha = 0 \text{ veya } k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta = 0$$

elde edilir. Eğer

$$k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha = 0$$

ise

$$k_1^\alpha = k_2^\alpha \tan \phi_\alpha \quad (4.1.32)$$

bulunur. Eğer

$$k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta = 0$$

ise

$$k_1^\beta = k_2^\beta \tan \phi_\beta \quad (4.1.33)$$

elde edilir.

(\Leftarrow): Eğer $k_1^\alpha = k_2^\alpha \tan \phi_\alpha$ ise

$$k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha = 0 \quad (4.1.34)$$

olur. (4.1.34) ve (4.1.12) birlikte göz önüne alınırsa

$$K = \frac{(k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha) (k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta)}{\sin^2 \varphi} = 0$$

yazılır. Şimdi $k_1^\beta = k_2^\beta \tan \phi_\beta$ olduğu durumda ispatı inceleyelim. Bu eşitlikten

$$k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta = 0 \quad (4.1.35)$$

elde edilir. (4.1.12) ifadesi (4.1.35) ile birlikte göz önüne alınırsa

$$K = \frac{(k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha) (k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta)}{\sin^2 \varphi} = 0$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar. \square

Teorem 4.1.5

M öteleme yüzeyi üzerinde α ve β eğrileri birer \mathbf{M}_1^α , \mathbf{M}_1^β - çizgi olsun. Eğer $\varphi \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, ($k \in \mathbb{Z}$) ise o zaman bu öteleme yüzeyi minimaldir.

İspat:

Kabul edelimki α ve β , birer \mathbf{M}_1^α , \mathbf{M}_1^β - çizgi olsun. O zaman M yüzeyinin H ortalama eğrilik fonksiyonu:

$$H = \frac{k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta + k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha}{2 \sin^2 \varphi}$$

olur.

α ve β eğrilerinin, sırasıyla, \mathbf{M}_1^α , \mathbf{M}_1^β - çizgi olduğu Teorem 4.1.2 de göz önüne alınırsa

$$k_2^\beta = k_2^\alpha = \cos \phi_\alpha = \cos \phi_\beta = 0$$

bulunur. Buradan

$$k_1^\beta \cos \phi_\beta - k_2^\beta \sin \phi_\beta + k_1^\alpha \cos \phi_\alpha - k_2^\alpha \sin \phi_\alpha = 0 \quad (4.1.36)$$

olur. Böylece,

$$H = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. \square

Örnek 4.1.6

M yüzeyi, $c = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\boldsymbol{\alpha}(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u)),$$

$$\alpha_1(u) = a \cos \frac{u}{c},$$

$$\alpha_2(u) = a \sin \frac{u}{c},$$

$$\alpha_3(u) = \frac{bu}{c}$$

ve

$$\boldsymbol{\beta}(v) = (\beta_1(v), \beta_2(v), \beta_3(v))$$

$$\beta_1(v) = \frac{9}{208} \sin 16v - \frac{1}{117} \sin 36v,$$

$$\beta_2(v) = -\frac{9}{208} \cos 16v + \frac{1}{117} \cos 36v,$$

$$\beta_3(v) = \frac{6}{65} \sin 10v.$$

eğrileri ile üretilen bir öteleme yüzeyi olsun. Yani M yüzeyi,

$$M(u, v) = \boldsymbol{\alpha}(u) + \boldsymbol{\beta}(v)$$

olmak üzere

$$M(u, v) = (m_1(u, v), m_2(u, v), m_3(u, v))$$

ise

$$m_1(u, v) = a \cos \frac{u}{c} + \frac{9}{208} \sin 16v - \frac{1}{117} \sin 36v,$$

$$m_2(u, v) = a \sin \frac{u}{c} - \frac{9}{208} \cos 16v + \frac{1}{117} \cos 36v,$$

$$m_3(u, v) = \frac{bu}{c} + \frac{6}{65} \sin 10v$$

olur. $\boldsymbol{\alpha}$ nın, sırasıyla, teğet, asli normal ve binormal vektörleri

$$\mathbf{T} = \frac{1}{c} \left(-a \sin \frac{s}{c}, a \cos \frac{s}{c}, b \right),$$

$$\mathbf{N} = \left(-\cos \frac{s}{c}, -\sin \frac{s}{c}, 0 \right),$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \left(b \sin \frac{s}{c}, -b \cos \frac{s}{c}, a \right)$$

dir. Ayrıca α nm, sırasıyla, eğrilik ve burulması

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{a}{c^2}, \\ \tau &= \frac{b}{c^2}\end{aligned}$$

dir. (4.1.4) den

$$\theta(u) = \int_0^u \tau du = \int_0^u \frac{b}{c^2} du = \frac{bu}{c^2}. \quad (4.1.37)$$

yazılır. (4.1.37) yardımıyla α eğrisi için dönüştürme matrisi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{bu}{c^2} & \sin \frac{bu}{c^2} \\ 0 & -\sin \frac{bu}{c^2} & \cos \frac{bu}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.38)$$

olur.

Ayrıca β nm eğrilik fonksiyonları

$$\begin{aligned}\kappa(v) &= -24 \sin 10v, \\ \tau(v) &= 24 \cos 10v.\end{aligned}$$

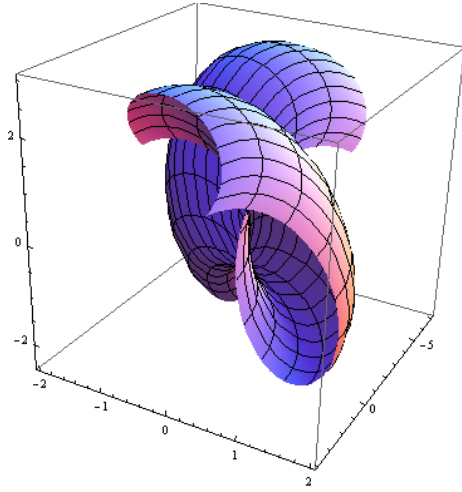
dir. (4.1.4) den

$$\theta(v) = \int_0^v \tau(v) dv = \int_0^v 24 \cos(10v) dv = \frac{24}{10} \sin(10v). \quad (4.1.39)$$

yazılır. (4.1.39) yardımıyla β eğrisi için dönüştürme matrisi

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \left(\frac{24}{10} \sin 10v \right) & \sin \left(\frac{24}{10} \sin 10v \right) \\ 0 & -\sin \left(\frac{24}{10} \sin 10v \right) & \cos \left(\frac{24}{10} \sin 10v \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{M}_2 \end{bmatrix} \quad (4.1.40)$$

elde edilir. Böylece (4.1.38) ve (4.1.40) eşitlikleri yardımıyla aşağıdaki şekil çizilebilir.



5. BÖLÜM

SONUÇ

Düzlemsel olmayan uzay eğrileri kullanılarak üç boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyleri tanımlanmıştır. Öteleme yüzeyini oluşturan üreteç eğrilerinin düzlemsel ve asimtotik olma durumları incelenmiştir. Yüzeyin Gauss eğriliği yardımıyla üreteç eğrilerinden en az birinin asimtotik olduğu gösterilmiştir. Öteleme yüzeyine örnek verilerek yüzeyi oluşturan üreteç eğrilerinin eğrilikleri bulunmuştur. Verilen yüzeyin minimal olma şartları verilerek yüzeyin çeşitli karakterizasyonları yapılmıştır.

Ayrıca verilen eğrilerin Bishop çatısına göre öteleme yüzeyleri oluşturulmuştur. Daha sonra bu yüzeylerin Bishop çatısı yardımıyla Gauss ve ortalama eğriliklerine göre karakterizasyonları yapılmıştır.

Teorem 3.1.1 e bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 5.1.1

M , 3 -boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyi ve β ise yüzey üzerinde geodezik olmayan bir asimtotik çizgi olsun. β nın düzlemsel eğri olması için gerek ve yeter şart θ_β açısının sabit olmasıdır. Burada θ_β , \mathbf{U} ile \mathbf{N}_β arasındaki açıdır.

Teorem 3.1.1 e ve Teorem 3.1.6 ya bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 5.1.2

Uzay eğrileri ile üretilen bir minimal öteleme yüzeyinde hiçbir umbilik nokta bulunmaz.

Teorem 3.1.6 ya ve Sonuç 3.1.7 ya bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 5.1.3

Bir minimal öteleme yüzeyinin normal eğrilikleri üreteç eğrileri boyunca sabittir.

Minimal öteleme yüzeylerinin sınıflandırılmasına bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 5.1.4

Üreteç eğrileri boyunca eğrilikleri sıfır olmayan asimtotik çizgileri içeren hiç bir minimal öteleme yüzeyi yoktur.

Teorem 4.1.2 ye bağlı olarak aşağıdaki sonuç elde edildi.

Sonuç 5.1.5

M , 3-boyutlu Öklid uzayında öteleme yüzeyi ve β ise bu yüzey üzerinde geodezik olmayan eğri olsun. O zaman β , \mathbf{M}_1^β – çizgi ise ϕ_β açısı sabittir.

Bu çalışma 3-boyutlu Öklid uzayında Bishop çatısına göre uzay eğrileri ile verilen öteleme yüzeylerinin Gauss ve ortalama eğriliklerinin araştırılmasında önemli bir referans olacaktır.

Öteleme yüzeyleri farklı çatı denklemleri ile verilen eğriler yardımıyla incelenebilir.

Kaynaklar

- [1] **E. Bayram, F.Güler and E. Kasap**: Parametric representation of a surface pencil with a common asymptotic curve, *Comput. Aided Des.* 44 (2012), 637–643.
- [2] **L. R. Bishop**: There is More Than One Way to Frame a Curve, *Amer. Math. Monthly* 82 (3) (1975) 246-251.
- [3] **B. Bükcü, M.K. Karacan**: Special Bishop motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve, *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.* 6 (1) (2008) 27–34.
- [4] **B. Bükcü, M.K. Karacan**, The slant helices according to Bishop frame, *Int. J. Math. Comput. Sci.* 3 (2) (2009) 67–70.
- [5] **R. Caddeo, C. Oniciuc, P. Piu**: Explicit formulas for non-geodesic biharmonic curves of the Heisenberg group, *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* 62 (2004) 265–278.
- [6] **Carmo MP**. Differential geometry of curves and surfaces. Englewood Cliffs: Prentice Hall; 1976.
- [7] **G. Contopoulos** Asymptotic curves and escapes in Hamiltonian systems. *Astron. Astrophys.* 231 (1990), 41–55.
- [8] **M. Çetin, Y. Tunçer and N. Ekmekçi**: Translation Surfaces in Euclidean 3-Space, *World Academy of Science, Engineering and Technology* 76 (2011), 864-868.
- [9] **M. Ergüt**, Genelleştirilmiş Regle Yüzeyle Dair: Fırat Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, 1983
- [10] **S. Flöry, H. Pottmann**: Ruled surfaces for rationalization and design in architecture. In: *Proceedings of the conference of the association for computer aided design in architecture (ACADIA)*; 2010.
- [11] **R. Garcia, J. Sotomayor** Structural stability of parabolic points and periodic asymptotic lines. *Mat. Contemp.* 1997;12:83–102. *Workshop on real and complex singularities (São Carlos, 1996)*.
- [12] **H. H. Hacısalihoğlu**: Yüksek Diferensiyel geometriye Giriş, İstanbul, 1980.
- [13] **H. H. Hacısalihoğlu**: Diferensiyel geometri, Cilt 1, 2002.
- [14] **H. H. Hacısalihoğlu**: Lineer Cebir, Cilt 1, 7.Baskı, 2002.
- [15] **H. H. Hacısalihoğlu**: Diferensiyel geometri, Cilt 3; 2003.
- [16] **J. Happel and H. Brenner**: Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Applications to Particulate Media, Prentice-Hall, New Jersey, (1965).

- [17] **P. Hartman , A. Wintner** On the asymptotic curves of a surface. Amer. J. Math, 73(1) (1951), 149–72.
- [18] **F. Hélein and J.C. Wood**: Harmonic maps. In: Krupka, D., Saunders, D. (eds.) Handbook of Global Analysis. Elsevier, Amsterdam (2007).
- [19] **J. Inoguchi**: Biharmonic curves in Minkowski 3-space, Int. J. Math. Sci. 21 (2003), 1365-1368.
- [20] **S. Izumiya and N. Tkeuchi**: New special curves and developable surfaces, Turk J. Math. 28 (2004), 153-163.
- [21] **G.Y. Jiang**, 2-harmonic isometric immersions between Riemannian manifolds, Chinese Ann. Math. Ser. A 7 (1986), 130-144.
- [22] **Kitagawa Y.** Periodicity of the asymptotic curves on flat tori in S^3 . J. Math. Soc. Japan, 40(3) (1988), 457–96.
- [23] **T. Körpınar and E. Turhan**: Biharmonic S-Curves According to Sabban Frame in Heisenberg Group $Heis^3$, Bol. Soc. Paran. Mat. 31 (1) (2013), 205–211.
- [24] **T. Körpınar and E. Turhan**: On characterization of B-canal surfaces in terms of biharmonic B-slant helices according to Bishop frame in Heisenberg group $Heis^3$, J. Math. Anal. Appl. 382 (2011), 57–65.
- [25] **L. Kula and Y. Yaylı**: On slant helix and its spherical indicatrix, Applied Mathematics and Computation. 169 (2005), 600-607.
- [26] **H. Liu**: Translation surfaces with dependent Gaussian and mean curvature in 3-dimensional spaces, J. Northeast Univ. Tech. 14(1) (1993), 88–93.
- [27] **H. Liu**: Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces, J. Geom. 64 (1-2) (1999), 141–149.
- [28] **M. Munteanu, and A. I. Nistor**: On the geometry of the second fundamental form of translation surfaces in \mathbb{E}^3 , arXiv:0812.3166v1 [math.DG] 16 Dec. 2008.
- [29] **W. E. Langlois**: Slow Viscous Flow, Macmillan, New York; Collier-Macmillan, London, (1964).
- [30] **B. O’Neill**: Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, (1983).
- [31] **S. Rahmani**: Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, Journal of Geometry and Physics 9 (1992), 295-302.
- [32] **L. Sario, M. Nakai, C. Wang and L. Chung**: Classification theory of Riemannian manifolds. Harmonic, quasiharmonic and biharmonic

function, Lecture Notes in Mathematic 605, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1977).

[33] **E. Turhan and T. Körpınar**: Characterize on the Heisenberg Group with left invariant Lorentzian metric, *Demonstratio Mathematica*, 42 (2) (2009), 423-428.

[34] **E. Turhan and T. Körpınar**: On Characterization Of Timelike Horizontal Biharmonic Curves In The Lorentzian Heisenberg Group $Heis^3$, *Zeitschrift für Naturforschung A- A Journal of Physical Sciences* 65a (2010), 641-648.

[35] **H. Urakawa**: *Calculus of Variation and Harmonic Maps*. Transl. Math. Am. Math. Soc. (1993).

[36] **L. Verstraelen, J. Walrave, and S. Yaprak**: The minimal translation surfaces in Euclidean space, *Soochow Journal of Mathematics*, 20(1) (1994), 77-82.

[37] **S. Yılmaz and M. Turgut**: A new version of Bishop frame and an application to spherical images, *J. Math. Anal. Appl.*, 371 (2010), 764-776.

[38] **D. W. Yoon**: On the Gauss map of translation surfaces in Minkowski 3-space, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 6(3) (2002), 389-398.

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Malatya'nın Darende ilçesinde doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Adana'da tamamladım. 1993 yılında Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. 1997 yılında aynı bölümden mezun oldum. 1998 yılında matematik öğretmeni olarak atandım. Halen Elazığ Lisesinde matematik öğretmeni olarak çalışmaktayım. Evli ve iki çocuk annesiyim.