

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

SÜLEYMAN ÇETİNKAYA

KOCAELİ 2023

KOCAELİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

SÜLEYMAN ÇETİNKAYA

Dr. Öğr. Üyesi Hülya KODAL SEVİNDİR

Danışman, Kocaeli Üniv.

.....

Prof. Dr. Halim ÖZDEMİR

Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.

.....

Prof. Dr. Şevket GÜR

Jüri Üyesi, Sakarya Üniv.

.....

Doç. Dr. Mine Aylin BAYRAK

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

.....


Dr. Öğr. Üyesi Cüneyt YAZICI

Jüri Üyesi, Kocaeli Üniv.

.....

Prof. Dr. Ali DEMİR

Eş Danışman, Kocaeli Üniv.

Enstitü Yönetim Kurulunun
13/03/2019 tarih ve 2019/11 nolu
toplantısında II. tez danışmanı
olarak atanmıştır. 

Tezin Savunulduğu Tarih: 02.01.2023

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ

Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez/proje çalışmada,

- Bu tezin/projenin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu,
- Çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı,
- Bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi,
- Bu çalışmanın Kocaeli Üniversitesi'nin abone olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun olduğunu, - Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Tezin/Projenin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez/proje çalışması olarak sunmadığımı,

beyan ederim.

X Bu tez/proje çalışmasının herhangi bir aşaması hiçbir kurum/kuruluş tarafından maddi/alt yapı desteği ile desteklenmemiştir.

Bu tez/proje çalışması kapsamında üretilen veri ve bilgiler tarafından no'lu proje kapsamında maddi/alt yapı desteği alınarak gerçekleştirilmiştir.

Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Süleyman ÇETİNKAYA

YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI

Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından onaylanan lisansüstü tezimin/projemin tamamını veya herhangi bir kısmını, basılı ve elektronik formatta arşivleme ve aşağıda belirtilen koşullarla kullanıma açma izninin Kocaeli Üniversitesi'ne verdiğimi beyan ederim. Bu izinle Üniversiteye verilen kullanım hakları dışındaki tüm fikri mülkiyet haklarım bende kalacak, tezimin/projemin tamamının ya da bir bölümünün gelecekteki çalışmalarda (makale, kitap, lisans ve patent vb.) kullanımı bana ait olacaktır.

Tezin/projenin kendi özgün çalışmam olduğunu, başkalarının haklarını ihlal etmediğimi ve tezimin/projenin tek yetkili sahibi olduğumu beyan ve taahhüt ederim. Tezimde yer alan telif hakkı bulunan ve sahiplerinden yazılı izin alınarak kullanılması zorunlu metinlerin yazılı izin alarak kullandığımı ve istenildiğinde suretlerini Üniversiteye teslim etmeyi taahhüt ederim.

Yükseköğretim kurulu tarafından yayınlanan **“Lisanüstü Tezlerin Elektronik Ortamda Toplanması, Düzenlenmesi ve Erişime Açılmasına İlişkin Yönerge”** kapsamında tezim aşağıda belirtilen koşullar haricinde YÖK Ulusal Tez Merkezi/ Kocaeli Üniversitesi Kütüphaneleri Açık Erişim Sisteminde erişime açılır.

- Enstitü yönetim kurulu kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 2 yıl ertelenmiştir.
- Enstitü yönetim kurulu gerekçeli kararı ile tezimin/projemin erişime açılması mezuniyet tarihinden itibaren 6 ay ertelenmiştir.
- Tezim/projem ile ilgili gizlilik kararı verilmemiştir.

Süleyman ÇETİNKAYA

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında yardımlarını esirgemeyen sabırla ve titizlikle çalışmalarına destek veren değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Hülya KODAL SEVİNDİR'e ve eş danışmanım Prof. Dr. Ali DEMİR'e teşekkürlerimi sunarım. Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen her zaman yanımda olan babam Mustafa ÇETİNKAYA ile annem Ayşe ÇETİNKAYA'ya teşekkür ederim. Neşe kaynağım ve şükür sebebim olan eşim Esra, kızlarım Alya Zehra ve Sena'ya var oldukları için teşekkür ederim. Tez sürecim boyunca, iş arkadaşlığı yaptığım ve çalışma odasını paylaştığım Arş. Gör. Elif GÜNER ile Arş. Gör. Melike KELEŞ'e iş paylaşımlarından ve yardımlarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Çalışma hayatımda ve akademik çalışmalarım sırasında birçok aşamada beni destekleyen Matematik bölümü öğretim üyelerine, araştırma görevlilerine, Fen Edebiyat Fakültesi ve Fen Bilimleri Enstitüsü çalışanlarının hepsine teşekkür ederim.

Doktora dönemi boyunca beni maddi olarak destekleyen TÜBİTAK' a teşekkür ederim.

Ocak – 2023

Süleyman ÇETİNKAYA

İÇİNDEKİLER

ETİK BEYAN VE ARAŞTIRMA FONU DESTEĞİ.....	i
YAYIMLAMA VE FİKRİ MÜLKİYET HAKLARI	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
TABLolar DİZİNİ.....	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Tanımlar ve Teoremler.....	4
1.1.1. Shehu İntegral Dönüşümü.....	5
1.1.2. ARA İntegral Dönüşümü	6
2. KESİRLİ SHEHU VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ	11
2.1. Kesirli Shehu Varyasyonel İterasyon Yöntemi İçin Yakınsaklık Teoremi.....	12
2.2. Kesirli Shehu Varyasyonel İterasyon Yöntemi İçin Örnekler.....	13
3. KESİRLİ ARA DAFTARDAR-GEJJI ve JAFARI YÖNTEMİ.....	20
3.1. Kesirli ARA Daftardar-Gejji ve Jafari Yöntemi İçin Yakınsaklık Teoremi.....	21
3.2. Kesirli ARA Daftardar-Gejji ve Jafari Yöntemi İçin Örnekler.....	23
4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	32
KAYNAKLAR.....	33
KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	44

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

\mathcal{T}	: İntegral Dönüşüm Operatörü
\mathcal{L}	: Laplace İntegral Dönüşüm Operatörü
\mathcal{F}	: Fourier İntegral Dönüşüm Operatörü
\mathcal{M}	: Sumudu İntegral Dönüşüm Operatörü
\mathbb{N}^+	: Doğal İntegral Dönüşüm Operatörü
E	: Elzaki İntegral Dönüşüm Operatörü
Γ	: Gamma Fonksiyonu
${}^{RL}_0 I_t^\alpha$: Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
${}^C_0 D_t^\alpha$: Liouville-Caputo Kesirli Türev Operatörü
$E_{\alpha,\beta}(\lambda(t-t_0)^\alpha)$: İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
\mathcal{S}	: Shehu İntegral Dönüşüm Operatörü
\mathcal{S}^{-1}	: Ters Shehu İntegral Dönüşüm Operatörü
G_n	: n . mertebeden ARA İntegral Dönüşüm Operatörü
G_n^{-1}	: n . mertebeden Ters ARA İntegral Dönüşüm Operatörü

Kısaltmalar

FOMM	: Fractional Operational Matrix Method (Kesirli İşlemsel Matris Yöntemi)
FVIM	: Kesirli Variational Iteration Method (Kesirli Değişken İterasyon Yöntemi)
FWM	: Fractional Wavelet Method (Kesirli Dalgacık Yöntemi)
HAM	: Homotopy Analysis Method (Homotopi Analiz Yöntemi)
HPM	: Homotopy Perturbation Method (Homotopi Pertürbasyon Yöntemi)
HPTM	: Homotopy Perturbation Transform Method (Homotopi Pertürbasyon Dönüşümü Yöntemi)
IAM	: Iteration ARA method (ARA Daftardar-Gejji ve Jafari) Yöntemi
SVIM	: Shehu Variational Iteration Method (Shehu Varyasyonel İterasyon Yöntemi)
VIM	: Variational Iteration Method (Varyasyonel İterasyon Yöntemi)

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Örnek 2.2.1' de, $x = 0.3$ noktasında farklı α ve β değerleri için 6. dereceden yaklaşık çözüm ile tam çözümün 2 boyutlu grafiği.....	18
Şekil 2.2. Örnek 2.2.1' de, $\alpha = \beta = 2/3$ için 6. dereceden yaklaşık çözüm ile tam çözümün 3 boyutlu grafiği	18
Şekil 2.3. Örnek 2.2.2' de, $x = 0.3$ noktasında farklı α ve β değerleri için 6. dereceden yaklaşık çözüm ile tam çözümün 2 boyutlu grafiği.....	19
Şekil 2.4. Örnek 2.2.2' de, $\alpha = \beta = 2/3$ için 6. dereceden yaklaşık çözüm ile tam çözümün 3 boyutlu grafiği	19
Şekil 3.1. Örnek 3.2.1' de, $t = 1.5$, $h = y = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün 2 boyutlu grafikleri	29
Şekil 3.2. Örnek 3.2.1' de, $t = 1.5$, $h = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün 3 boyutlu grafikleri	29
Şekil 3.3. Örnek 3.2.2' de, $t = 1.5$, $x = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün 2 boyutlu grafikleri	30
Şekil 3.4. Örnek 3.2.2' de, $t = 1.5$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün 3 boyutlu grafikleri	30
Şekil 3.5. Örnek 3.2.3' de, $t = 1.5$, $r = 2$, $y = h = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün 2 boyutlu grafikleri	31
Şekil 3.6. Örnek 3.2.3' de, $t = 1.5$, $r = 2$, $h = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün 3 boyutlu grafikleri	31

TABLULAR DİZİNİ

Tablo 2.1. Örnek 2.2.1 için farklı β ve α değerlerinde yaklaşık çözüm ile tam çözümün değerleri	17
Tablo 2.2. Örnek 2.2.2 için farklı β ve α değerlerinde yaklaşık çözüm ile tam çözümün değerleri	17
Tablo 3.1. $\alpha = 1$ için Örnek 3.2.1' de elde edilen 7 terimli yaklaşık çözümün MATLAB kullanılarak elde edilen mutlak hatası	28
Tablo 3.2. $\alpha = 1$ için Örnek 3.2.2' de elde edilen 7 terimli yaklaşık çözümün MATLAB kullanılarak elde edilen mutlak hatası	28
Tablo 3.3. $\alpha = 1$ için Örnek 3.2.3' de elde edilen 7 terimli yaklaşık çözümün MATLAB kullanılarak elde edilen mutlak hatası	28



UZAY-ZAMAN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

ÖZET

Son yıllarda, integral denklemler, diferansiyel denklemler, kısmi diferansiyel denklemler, kesirli diferansiyel denklemler ve bu yapılara sahip olan denklem sistemleri bilimin bir çok dalında çalışan bilim insanları tarafından büyük ilgi görmektedir. Bu yapılara sahip denklemler, sinyal işleme, dinamik sistemlerin kontrol teorisi, elektrik ağları, sistem tanımlama, olasılık ve istatistik, finansal piyasa ve kuantum mekaniği, bölünme ve reaksiyon süreçleri gibi mühendislik ve bilimin birçok alanında olayları ve süreçleri modellemek için kullanılmaktadır. İntegral dönüşümler bu yapılara sahip denklemlerin çözümünde etkili bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, birçok araştırmacı tam ve kesirli mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmek için yeni integral dönüşümleri bulma ve var olanları geliştirme konusunda büyük çaba sarfetmektedirler.

“Uzay-Zaman Kesirli Diferansiyel Denklemlerinin Çözümlerinin Analizi” başlıklı tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, kesirli analiz, bazı önemli integral dönüşümlerin tarihçesi ve tanımları verildikten sonra bu çalışmada kullanılan Shehu İntegral Dönüşümü ve ARA integral dönüşümü ile ilgili önemli özellikler ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, uzay-zaman kesirli başlangıç değer probleminin çözümünü elde etmek için Shehu İntegral Dönüşümü ve Varyasyonel İterasyon Yönteminin birleşimi ile oluşturulan Kesirli Shehu Varyasyonel İterasyon Yöntemi (SVIM) verilmiştir. Daha sonra SVIM ile edilen çözümlerin yakınsaklık analizi yapıp örnekler sunulmuştur.

Üçüncü bölümde, zaman kesirli başlangıç değer probleminin çözümünü elde etmek için ARA İntegral Dönüşümü ve Daftardar-Gejji ve Jafari Yönteminin birleşimi ile oluşturulan Kesirli ARA Daftardar-Gejji ve Jafari Yöntemi (IAM) verilmiştir. Daha sonra IAM ile edilen çözümlerin yakınsaklık analizi yapıp örnekler sunulmuştur.

Son bölümde ise bu tez çalışmasının sonuçlarına ve önerilerine yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: ARA İntegral Dönüşümü, Daftardar-Gejji ve Jafari Yöntemi, Kesirli Başlangıç Değer Problemleri, Shehu İntegral Dönüşümü, Varyasyonel İterasyon Yöntemi.

ANALYSIS OF SOLUTIONS TO SPACE-TIME FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

In recent years, integral equations, differential equations, partial differential equations, fractional differential equations and equation systems with these structures have attracted great attention by scientists working in many branches of science. Equations with these structures are used to model events and processes in many fields of engineering and science, such as signal processing, control theory of dynamical systems, electrical networks, system description, probability and statistics, financial market and quantum mechanics, diffusion and reaction processes. Integral transformations play an effective role in solving equations with these structures. Therefore, many researchers make great efforts to find new integral transformations and improve existing ones to obtain solutions of classical and fractional partial differential equations.

The work of this thesis titled “Analysis of Solutions of Space-Time Fractional Differential Equations” consists of four chapters.

In the first chapter, fractional analysis, history and definitions of some important integral transformations are given, and then important properties and theorems about Shehu Integral Transform and ARA integral transformation, used in this study, are given.

In the second part, the Fractional Shehu Variational Iteration Method (SVIM), which is formed by the combination of the Shehu Integral Transform and the Variational Iteration Method, to obtain the solutions of the space-time fractional initial value problems is given. Then, the convergence analysis of the solutions obtained with SVIM is made and elucidative examples are presented.

In the third chapter, the Fractional ARA Daftardar-Gejji and Jafari Method (IAM), which is formed by the combination of ARA Integral Transform and Daftardar-Gejji and Jafari Methods, to establish the solutions of time fractional initial value problems is given. Then, the convergence analysis of the solutions obtained with IAM is made and illustrative examples are presented.

In the last part, the results and suggestions of this research are given.

Keywords: ARA Integral Transform, Daftardar-Gejji and Jafari Method, Fractional Initial Value Problem, Shehu Integral Transform, Variational Iteration Method.

1. GİRİŞ

Son yıllarda, kesirli türev içeren adi ya da kısmi diferansiyel denklemler, çok sayıda mühendislik alanı ve fizikte gerçek dünya sorunlarını gündeme getirme yetenekleri nedeniyle bilim insanlarının büyük ilgisini çekmektedir. Kesirli türev içeren adi ya da kısmi diferansiyel denklemler, bilimin belirli alanlarında yaygın olarak kullanılmaktadır (Shah ve diğ., 2019; Shah ve diğ., 2019; Yavuz ve Özdemir, 2020; Uçar ve diğ., 2019; Evirgen ve diğ., 2021). Kimya, fizik, mühendislik ve diğer bilimlerdeki birçok süreç, kesirli analiz kullanılarak etkili bir şekilde modellenenir. Akustik, depremlerin doğrusal olmayan salınımı, elektrokimya, elektromanyetizma, sinyal işleme ve difüzyon gibi süreçler kesirli diferansiyel denklemlerle modellenenir (Uçar ve diğ., 2019; Modanlı, 2019). Son zamanlarda, kesirli kısmi diferansiyel denklemler ortaya çıkana kadar bazı gerçek dünya problemlerinin modellenenileceği hayal bile edilemiyordu. Gerçekten de, bu yüzyılın en önemli çalışmalarından biri (Cenesiz ve diğ., 2017), bilim ve teknolojinin farklı alanlarındaki uygulama çeşitliliği nedeniyle kesirli analiz olarak adlandırılabilir. Araştırmacılar, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemleri çözmek için varyasyonel iterasyon yöntemi (VIM) (Wazwaz, 2014), homotopi analiz yöntemi (HAM) (Liao, 2012) ve genelleştirilmiş kesirli Taylor serisi yöntemi (Jaradat ve diğ., 2018) gibi çeşitli analitik ve sayısal teknikler kullandılar.

Mühendislik ve bilim alanlarındaki herhangi bir olgu, alternatif olarak kesirli türevler aracılığıyla modellenenir. Bu durum bazı karmaşık yapıların doğasında bulunan yerel (lokal) olmayan özelliklerinden kaynaklanmaktadır. Finansal, viskoelastisite, taşınım süreci, nanoteknoloji, kontrol teorisi ve biyolojik gibi süreçlerin modellenmesinde kesirli türevler içeren denklemler kullanılmaktadır (Baleanu ve diğ., 2012; Imran, 2020; Aleem ve diğ., 2020; Asjad, 2019). Biyolojide, hücre zarlarının kesirli mertebeden elektrik iletkenliğine sahip olduğu gösterilmiştir ve bu şekilde modellenmiştir (Aleem ve diğ., 2019; Wang ve diğ., 2019; Cole, 1933). Homojen olmayan ortamdaki anormal difüzyon kavramları, kesirli difüzyon denklemleriyle incelenmiştir (Glockle ve Nonnenmacher, 1995; Bayrak ve Demir, 2018; Demir ve diğ., 2019). Kesirli türev ile modellenen başka bir örnek, direnç ve kapasitans özelliklerine sahip bir elektrik devresi olan uygulamadır (Liao, 2012). Bu bağlamda, kesirli işlemsel matris yöntemi (FOMM) (Arkhincheev, 1993; Krishna, 2011), kesirli dalgacık yöntemi (FWM) (Li ve Sun, 2011; Saadatmandi ve

Dehghan, 2010; Shah ve diğ., 2020; Li, 2010), homotopi analiz yöntemi (HAM) (Lepik, 2009), homotopi pertürbasyonu yöntemi (HPM) (Khan ve diğ., 2012), homotopi pertürbasyon dönüşümü yöntemi (HPTM) (Zhang ve Juan, 2014), Laplace Adomian ayrıştırma yöntemi (LADM) (Khan ve Wu, 2011) ve kesirli varyasyonel iterasyon yöntemi (FVIM) (Sweilam, 2007) dahil olmak üzere bazı önemli analitik ya da sayısal teknikler kullanılmıştır.

Literatürde, kesirli türevler ve kesirli integraller için Hardy, Littlewood, Riemann-Liouville, Liouville-Caputo, Grünwold-Letnikov, Jumarie, Hadamard vb. olarak adlandırılan çeşitli tanımlar bulunmaktadır. En çok kullanılan ise Riemann-Liouville ve Liouville-Caputo kesirli türevleridir.

Uzun zamandır, diferansiyel denklemleri çözmeye yönelik yöntemler, bilimin çeşitli alanlarındaki önemli uygulamaları nedeniyle araştırmacılar için önemli konular olmuştur (Spiegel, 1965; Agwa ve diğ., 2012; Atangana, 2013; Dattoli ve diğ., 2005; Bulut ve diğ., 2013; Weerakoon, 1997; Srivastava ve diğ., 2014; Albayrak ve diğ., 2014; Yang ve diğ., 2017; Ahmed ve diğ., 2020). İntegral dönüşümlerini içeren yöntemlerin, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde etkinliği ve uygulanabilirliği kanıtlanmıştır.

$t \in (-\infty, \infty)$ olmak üzere $g(t)$ fonksiyonu için integral dönüşümü aşağıdaki integral ile hesaplanır:

$$\mathcal{T}[g(t)](s) = \int_{-\infty}^{\infty} k(s, t) g(t) dt.$$

Burada $k(s, t)$ integral dönüşümün çekirdeği olarak adlandırılır, gerçel veya karmaşık bir sayı olabilen s , dönüşümün değişkenidir ve t değişkeninden bağımsızdır. İntegral dönüşümler teorisi, 1780'de P.S Laplace ve 1822'de Fourier'nin çalışmalarına kadar uzanmaktadır. Son zamanlarda, integral dönüşümlerin diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerin çözümünde kullanılması fikri, literatürde birçok araştırmacı tarafından benimsenmiştir (Butzer ve Jansche, 1997; Makarov, 1970; Yu ve diğ., 1998; Ul Rahman ve diğ., 2019; Watugala, 1993; Khan ve Khan, 2008; Elzaki, 2011; Maitama ve Zhao, 2019; Çetinkaya ve Demir, 2021; Sevindir ve diğ., 2021; Saadeh ve diğ., 2020).

Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}[g(t)] = G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} g(t) dt \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlıdır. Laplace dönüşümü diferansiyel denklemleri çözmeye etkin ve yaygın olarak kullanılmaktadır. Denklem (1.1)' de s değişkeni iw ile değiştirilir ve Denklem (1.1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ile çarpılırsa

$$\mathcal{F}[g(t)] = g(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt} g(t) dt$$

Fourier integral dönüşümü elde edilir.

Aralarındaki fark, Laplace dönüşümünün hem kararlı hem de kararsız sistemler için kullanılabilmesi, Fourier dönüşümünün ise yalnızca kararlı sistemler için kullanılabilmesidir.

Yıllardır, integral dönüşümler teorisi matematiksel literatürde çok geniş bir şekilde çalışılmaktadır ve birçok araştırmacı Shehu integral dönüşümü (Maitama ve Zhao, 2019), z-dönüşümü (Sullivan, 1996), Laplace-Carson dönüşümü (Makarov, 1970) ve Hankel dönüşümü (Yu ve diğ., 1998) gibi yeni integral dönüşümlerini ortaya koymuştur.

Diğer bir integral dönüşümü olan Sumudu integral dönüşümü 1993 yılında verildi (Watugala, 1993). Bu dönüşümün gerçek hayat problemlerinin çözümünde uygulanabilirliği gösterildi ve diferansiyel denklemlerin çözümünde de kullanılmaktadır. Sumudu integral dönüşümünün tanımı aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{M}[g(t)](u) = G(u) = \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}} g(t) dt, u > 0.$$

2008'de Doğal (Natural) dönüşüm aşağıdaki şekilde verildi (Khan ve Khan, 2008):

$$\mathbb{N}^+[g(t)](s, u) = R(s, u) = \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-\frac{st}{u}} g(t) dt, s, u > 0.$$

Elzaki integral dönüşümü, 2011'de aşağıdaki gibi verildi (Elzaki, 2011):

$$E[g(t)](u) = T(u) = u \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{u}} g(t) dt.$$

Son yıllarda, yukarıdaki dönüşümler ve diğerleri, çeşitli doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli ya da klasik diferansiyel denklemleri çözmek için matematikteki HAM, HPM ve HPTM gibi diğer analitik ya da sayısal yöntemlerle birlikte kullanıldı.

1.1. Temel Tanımlar ve Özellikler

Bu kısımda, bu çalışmada kullanılan integral dönüşümler ve kesirli türev ile ilgili temel tanımlar ve özellikler verilmiştir.

Tanım 1.1.1. $\alpha > 0$ olmak üzere Gama fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır (Podlubny, 1999):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

Gama fonksiyonu aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

- i) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$,
- ii) $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha!$, $\alpha \in \mathbb{N}$
- iii) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Tanım 1.1.2. $\alpha > 0$ integralin mertebesini göstermek üzere reel değerli bir $u(t)$ fonksiyonunun Riemann-Liouville kesirli integrali aşağıdaki gibi verilmiştir (Podlunny, 1999):

$${}^{RL}I_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

Tanım 1.1.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n-1 < \alpha < n$ ve $u^{(n)}(t) = \frac{d^n u}{dt^n}$ olmak üzere $u(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Liouville-Caputo kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Podlunny, 1999):

$$D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(s) ds, t \in [t_0, t_0 + T].$$

α bir tamsayı ise, Liouville-Caputo kesirli türevi adi türev olur.

Tanım 1.1.4. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $u(t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Liouville-Caputo kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Podlunny, 1999):

$$D_t^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds, t \in [t_0, t_0 + T].$$

Tanım 1.1.5. İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$E_{\alpha,\beta}(\lambda(t-t_0)^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(t-t_0)^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

$t_0 = 0$ ve $\alpha = \beta = q$ ise

$$E_{q,q}(\lambda t^q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t^q)^k}{\Gamma(q(k+1))}, \quad q > 0. \quad (1.2)$$

olmaktadır. Eşitlik (1.2)'de $q = 1$ yazılırsa, $E_{1,1}(\lambda t) = e^{\lambda t}$ elde edilir.

$E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ fonksiyonunun α . mertebeden Liouville-Caputo kesirli türevi

$$D_t^\alpha (E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)) = \alpha E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

şeklindedir (Podlunny, 1999). Daha fazla bilgi için (Shukla ve Prajapati, 2007) referansına bakılabilir.

1.1.1. Shehu İntegral Dönüşümü

Bu çalışmada ele alınan problemin çözümünü elde etmek için aşağıdaki fonksiyonlar kullanılmaktadır.

$$\text{Tanım 1.1.1.1. } \left\{ f(t) \mid \exists P, \tau_1, \tau_2 > 0, |f(t)| < P e^{\frac{|t|}{\tau_j}}, \text{ eğer } t \in (-1)^j \times [0, \infty) \text{ ise} \right\}$$

kümesindeki $f(t)$ fonksiyonları için Shehu integral dönüşümü

$$\mathbb{S}[f(t)] = F(p, q) = \int_0^\infty e^{-\frac{p}{q}t} f(t) dt$$

şeklinde tanımlıdır (Maitama ve Zhao, 2019).

Ters Shehu integral dönüşümü de α bir reel sabit olmak üzere

$$\mathbb{S}^{-1}[F(p, q)] = f(t) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{1}{q} e^{\frac{p}{q}t} F(p, q) dp$$

şeklinde verilmiştir (Maitama ve Zhao, 2019).

t^α fonksiyonunun Shehu integral dönüşümü

$$\mathbb{S}[t^\alpha] = \int_0^\infty e^{-\frac{pt}{q}} t^\alpha dt = \Gamma(\alpha + 1) \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha+1}, \text{Re}(\alpha) > 0$$

şeklindedir.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\left(\frac{q}{p}\right)^{n\alpha+1}$ ifadesinin ters Shehu integral dönüşümü

$$\mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p}\right)^{n\alpha+1} \right] = \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}, \text{Re}(\alpha) > 0$$

şeklindedir (Maitama ve Zhao, 2019).

$f(x, t)$ fonksiyonunun α . mertebeden Liouville-Caputo zaman kesirli türevin Shehu integral dönüşümü

$$\mathbb{S} \left[\frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial t^\alpha} \right] = \left(\frac{p}{q}\right)^\alpha \mathbb{S}[f(x, t)] - \sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\alpha-k-1} \frac{\partial^k f(x, 0)}{\partial t^k} \right], n-1 < \alpha \leq n, n \in \mathbb{N}$$

şeklindedir (Belgacem ve diğ., 2019).

1.1.2. ARA İntegral Dönüşümü

Tanım 1.1.2.1. $(0, \infty)$ aralığında $g(t)$ sürekli fonksiyonunun n . mertebeden ARA integral dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Saadeh ve diğ., 2020):

$$G_n[g(t)](s) = G(n, s) = s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} g(t) dt, s > 0.$$

Tanım 1.1.2.2. $G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$, $(n-1)$. mertebeden türevlenebilir olmak üzere ters ARA integral dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır (Saadeh ve diğ., 2020):

$$g(t) = G_{n+1}^{-1} [G_{n+1}[g(t)]] = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \left((-1)^n \left(\frac{1}{s\Gamma(n-1)} \int_0^s (s-x)^{n-1} G(n+1, x) dx + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s^k}{k!} \frac{\partial^k G(0)}{\partial s^k} \right) \right) ds.$$

Bu aşamada, kesirli diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir rol oynayan özellikler aşağıdaki gibi sıralanmıştır:

Özellik 1.1.2.1. Mittag-Leffler fonksiyonunun ARA integral dönüşümü aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Kodal Sevindir ve diğ., 2021):

$$\begin{aligned}
G_n[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) &= s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} t^{\beta-1} \sum_k \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} dt \\
&= \sum_k \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} s \int_0^\infty e^{-st} t^{n+\beta-2+\alpha k} dt \\
&= \sum_k \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} t^{\beta-1+\alpha k} dt \\
&= \sum_k \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\beta-1+\alpha k+n)}{s^{\beta-1+\alpha k+n-1}} \\
&= \frac{1}{s^{\beta+n-2}} \sum_k \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha k+n-1)}{s^{\alpha k}}.
\end{aligned}$$

$n = 1$ için

$$\begin{aligned}
G_1[t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)](s) &= \frac{1}{s^{\beta-1}} \sum_k \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{\Gamma(\beta+\alpha k)}{s^{\alpha k}} \\
&= \frac{1}{s^{\beta-1}} \left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{s^\alpha}} \right) \\
&= \frac{s^{\alpha-\beta+1}}{s^{\alpha}-\lambda}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Özellik 1.1.2.2. $p \in \mathbb{N}$ olmak üzere $t^{p\alpha}$ ifadesinin ARA integral dönüşümü aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Kodal Sevindir ve diğ., 2021):

$$\begin{aligned}
G_n[t^{p\alpha}](s) &= s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} t^{p\alpha} dt \\
&= s \int_0^\infty t^{p\alpha+n-1} e^{-st} dt \\
&= \Gamma(p\alpha + n) \left(\frac{1}{s}\right)^{p\alpha+n} s \int_0^\infty \frac{t^{p\alpha+n-1} e^{-st}}{\Gamma(p\alpha+n)\left(\frac{1}{s}\right)^{p\alpha+n}} dt
\end{aligned}$$

$$= \Gamma(p\alpha + n) \left(\frac{1}{s}\right)^{p\alpha+n} s$$

$$= \frac{\Gamma(p\alpha+n)}{s^{p\alpha+n-1}}.$$

Özellik 1.1.2.3. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının konvolüsyonunun ARA integral dönüşümü aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır (Saadeh ve diğ., 2020):

$$G_n[f(t) * g(t)](s) = (-1)^{n-1} s \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{n-1} F^{(j)}(s) G^{(n-1-j)}(s).$$

$G(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t) dt$ ve $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$ olmak üzere, $n = 1$ için

$$G_1[f(t) * g(t)](s) = sF(s)G(s)$$

elde edilir.

Teorem 1.1.2.1. (Riemann-Liouville integrali için ARA integral dönüşümünün varlığı)

$f(t)$ fonksiyonunun ${}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t)$ Riemann-Liouville kesirli integrali her sonlu aralıkta parçalı sürekli ve $|t^{n-1} {}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t)| \leq K e^{\beta t}$ ise $s > \beta$ için Riemann-Liouville kesirli integralinin ARA integral dönüşümü vardır (Kodal Sevindir ve diğ., 2021).

İspat: Riemann-Liouville integralinin ARA integral dönüşümünün özelliğinden

$$s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} {}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t) dt = s \int_0^Y t^{n-1} e^{-st} {}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t) dt + s \int_Y^\infty t^{n-1} e^{-st} {}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t) dt$$

elde edilir. ${}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t)$ Riemann-Liouville kesirli integrali her sonlu aralıkta parçalı sürekli olduğu için integrelebilir. Dolayısıyla, eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral hesaplanabilir. İkinci integralin yakınsaklığı aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\left| s \int_Y^\infty t^{n-1} e^{-st} {}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t) dt \right| \leq s \int_Y^\infty e^{-st} |t^{n-1} {}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t)| dt \leq s \int_Y^\infty K e^{\beta t - st} dt =$$

$$\lim_{c \rightarrow \infty} -sK \frac{e^{-t(s-\beta)}}{s-\beta} \Big|_Y^c = \frac{sK}{s-\beta} e^{-\gamma(s-\beta)}.$$

Sonuç olarak, ${}^{RL}_0 I_t^\alpha f(t)$ ifadesinin ARA integral dönüşümü vardır.

Teorem 1.1.2.2. ($n = 1$ için Riemann-Liouville integrali için ARA integral dönüşümünün varlığı)

$f(t)$ fonksiyonunun ${}^RL_0^\alpha f(t)$ Riemann-Liouville kesirli integrali her sonlu aralıkta parçalı sürekli ve $|t^{n-1}{}^RL_0^\alpha f(t)| \leq Ke^{\beta t}$ ise, $s > \beta$ için Riemann-Liouville kesirli integralinin ARA integral dönüşümü vardır ve $s > \beta$ için

$$G_1[{}^RL_0^\alpha f(t)](s) = \frac{1}{s^\alpha} G_1[f(t)](s)$$

olarak hesaplanır (Kodal Sevindir ve diğ., 2021).

İspat: $n = 1$ için

$$G_1[{}^RL_0^\alpha f(t)](s) = G_1 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx \right] (s)$$

ifadesi elde edilir. Konvolüsyon çarpım ile

$$G_1[{}^RL_0^\alpha f(t)](s) = G_1 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} [t^{\alpha-1} * f(t)] \right] (s)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. ARA integral dönüşümünün konvolüsyon özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s \left(\int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha-1} dt \right) \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} s \frac{\Gamma(\alpha)}{s^\alpha} \left(\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \right) \\ &= \frac{1}{s^\alpha} s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \frac{1}{s^\alpha} G_1[f(t)](s) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 1.1.2.3. (Liouville-Caputo türevi için ARA integral dönüşümünün varlığı)

$f(t)$ fonksiyonunun α .mertebeden ${}^C_0^\alpha f(t)$ Liouville-Caputo kesirli türevi her sonlu aralıkta parçalı sürekli, $f(t)$, n . mertebeden sürekli türevlenebilir ve $|t^{n-1}{}^C_0^\alpha f(t)| \leq Ke^{\beta t}$ ise $s > \beta$ için Liouville-Caputo kesirli türevinin ARA integral dönüşümü vardır (Kodal Sevindir ve diğ., 2021).

İspat: Liouville-Caputo kesirli türevinin ARA integral dönüşümünün özelliğinden

$$s \int_0^\infty t^{n-1} e^{-st} {}_0^C D_t^\alpha f(t) dt = s \int_0^\gamma t^{n-1} e^{-st} {}_0^C D_t^\alpha f(t) dt + s \int_\gamma^\infty t^{n-1} e^{-st} {}_0^C D_t^\alpha f(t) dt,$$

dır. ${}_0^C D_t^\alpha f(t)$ Liouville-Caputo kesirli türevi her sonlu aralıkta parçalı sürekli olduğu için integrallenebilir. Dolayısıyla, eşitliğin sağ tarafındaki ilk integral hesaplanabilir. İkinci integralin yakınsaklığı aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\left| s \int_\gamma^\infty t^{n-1} e^{-st} {}_0^C D_t^\alpha f(t) dt \right| \leq s \int_\gamma^\infty e^{-st} |t^{n-1} {}_0^C D_t^\alpha f(t)| dt \leq s \int_\gamma^\infty K e^{\beta t - st} dt = \lim_{c \rightarrow \infty} -sK \frac{e^{-t(s-\beta)}}{s-\beta} \Big|_\gamma^c = \frac{sK}{s-\beta} e^{-\gamma(s-\beta)}.$$

Sonuç olarak, ${}_0^C D_t^\alpha f(t)$ ifadesinin ARA integral dönüşümü vardır.

Teorem 1.1.2.4. ($n = 1$ için Liouville-Caputo türevi için ARA integral dönüşümünün varlığı)

$f(t)$ fonksiyonunun α .mertebeden ${}_0^C D_t^\alpha f(t)$ Liouville-Caputo kesirli türevi her sonlu aralıkta parçalı sürekli, $m - 1 < \alpha \leq m$ olmak üzere $|t^{n-1} {}_0^C D_t^\alpha f(t)| \leq K e^{\beta t}$ ise $n = 1$ ve $s > \beta$ için Liouville-Caputo kesirli türevinin ARA integral dönüşümü aşağıdaki gibidir (Kodal Sevindir ve diğ., 2021):

$$G_1[{}_0^C D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha G_1[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-k}.$$

İspat: $n = 1$ için Liouville-Caputo kesirli türevi

$$G_1[{}_0^C D_t^\alpha f(t)](s) = G_1[{}^{RL}I_t^{m-\alpha} f^{(m)}(t)](s)$$

şeklinde yazılabilir. $f^{(m)}(t) = g(t)$ alınarak teorem 2 kullanılırsa

$$G_1[{}^{RL}I_t^{m-\alpha} g(t)](s) = \frac{1}{s^{m-\alpha}} G_1[g(t)](s) = \frac{1}{s^{m-\alpha}} G_1[f^{(m)}(t)](s)$$

elde edilir. $f^{(m)}(t)$ fonksiyonunun ARA integral dönüşümü alınır

$$G_1[{}_0^C D_t^\alpha f(t)](s) = s^\alpha G_1[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) s^{\alpha-k}$$

elde edilir.

2. KESİRLİ SHEHU VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ

Aşağıdaki Liouville-Caputo kesirli türevi içeren uzay-zaman kesirli başlangıç değer problemini ele alalım:

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) + R(u, {}^c D_x^\beta u; x, t) + N(u, {}^c D_x^\beta u; x, t) = g(x, t), \quad (2.1)$$

$$\left[\frac{\partial^{m-1} u(x, t)}{\partial t^{m-1}} \right]_{t=0} = g_{m-1}(x). \quad (2.2)$$

Burada $m - 1 < \alpha \leq m$, $n - 1 < \beta \leq n$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Ayrıca N , R ve $g(x, t)$ sırasıyla doğrusal olmayan diferansiyel denklemi, doğrusal diferansiyel denklemi ve kaynak fonksiyonunu temsil etmektedir.

Denklem (2.1)' e Shehu integral dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[u(x, t)] &= \sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^{k+1} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} \right] - \left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \mathbb{S} \left[R(u, {}^c D_x^\beta u; x, t) + N(u, {}^c D_x^\beta u; x, t) \right] \\ &\quad + \left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \mathbb{S}[g(x, t)] \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde edilir. Denklem (2.3)' e ters Shehu integral dönüşümü uygulanırsa

$$u(x, t) = k(x, t) - \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \left[\mathbb{S} \left[R(u, {}^c D_x^\beta u; x, t) + N(u, {}^c D_x^\beta u; x, t) \right] \right] \right] \quad (2.4)$$

elde edilir. Burada

$$k(x, t) = \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \left[\mathbb{S} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \left[\left(\frac{p}{q} \right)^{k+1} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} \right] \right] \right] + \left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \mathbb{S}[g(x, t)] \right],$$

şeklindedir. Denklem (2.4)' ün zamana göre türevi alınır

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \left[\mathbb{S} \left[R(u, {}^c D_x^\beta u; x, t) + N(u, {}^c D_x^\beta u; x, t) \right] \right] \right] - \frac{\partial}{\partial t} k(x, t) = 0.$$

elde edilir. Aşağıdaki iterasyon bağıntısı VIM ile elde edilir:

$$u_{m+1}(x, t) = u_m(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_m(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \left[\mathbb{S} \left[R(u_m, {}^c D_x^\beta u_m; x, \tau) + N(u_m, {}^c D_x^\beta u_m; x, \tau) \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} k(x, \tau) \right] d\tau.$$

Alternatif olarak

$$u_{m+1}(x, t) = k(x, t; \beta) - \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \left[\mathbb{S} \left[R(u_m, {}^c D_x^\beta u_m; x, t) + N(u_m, {}^c D_x^\beta u_m; x, t) \right] \right] \right]$$

yazılabilir. $\lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x, t)$ varsa $u(x, t)$ çözümü vardır ve bu çözüm $u(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x, t)$ şeklindedir.

2.1. Kesirli Shehu Varyasyonel İterasyon Yöntemi İçin Yakınsaklık Teoremi

Bu kısımda, uzay-zaman kesirli başlangıç değer problemi (3)-(4)' ün çözümünün yakınsaklığı için gerekli koşullar ve hata tahminleri araştırıldı (Çetinkaya ve diğ., 2021)

Ele alınan V operatörü

$$V = - \int_0^t \left[\frac{\partial u_m(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \left[\mathbb{S} \left[R(u_m, {}^c D_x^\beta u_m; x, \tau) + N(u_m, {}^c D_x^\beta u_m; x, \tau) \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \tau} k(x, \tau) \right] d\tau \quad (2.5)$$

şeklindedir. Burada v_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

$$u(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k. \quad (2.6)$$

eşitliğini sağlayan çözümün bileşenlerini göstermektedir.

Teorem 2.1.1. Eşitlik (2.5)' de verilen V operatörü bir Banach uzayından başka bir Banach uzayına tanımlı olsun. Her $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\|V[v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{k+1}]\| \leq p \|V[v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_k]\|$ eşitsizliklerini sağlayan $0 < p < 1$ olacak şekilde bir p sayısı var ise Eşitlik (2.6)' da tanımlanan seri çözümü yakınsaktır (Odibat, 2010).

Banach sabit nokta teoreminden elde edilen Teorem 2.1.1, kesirli VIM'in yakınsaması için yeterli bir koşul oluşturmak için kullanılır.

Teorem 2.1.2. Eşitlik (2.6)' da verilen seri çözümün yakınsaklığı uzay-zaman kesirli başlangıç değer problemi (2.1)-(2.2)' de verilen doğrusal olmayan problemin çözümünü garanti eder (Odibat, 2010).

Teorem 2.1.3. Eşitlik (2.6)' da verilen $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ seri çözümünün, $u(x, t)$ çözümüne yakınsak olduğunu varsayalım. Bu durumda $\sum_{k=0}^j v_k$ yaklaşık çözümü için $E_j(x, t)$ maksimum hatası aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$E_j(x, t) \leq \frac{1}{1-p} p^{j+1} \|v_0\|.$$

Her $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için tanımlanan

$$\chi_i = \begin{cases} \frac{\|v_{i+1}\|}{\|v_i\|}, & \|v_i\| \neq 0, \\ 0, & \|v_i\| = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $0 < \chi_i \leq 1$ eşitsizliğini sağlarsa Eşitlik (2.6)' da yer alan $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ serisi $u(x, t)$ tam çözümüne yakınsaktır. Dahası, $\chi = \max\{\chi_i, i = 0, 1, 2, \dots, j\}$ olmak üzere maksimum mutlak hata aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|u(x, t) - \sum_{k=0}^{\infty} v_k\| \leq \frac{1}{1-\chi} \chi^{j+1} \|v_0\|.$$

2.2. Kesirli Shehu Varyasyonel İterasyon Yöntemi İçin Örnekler

Örnek 2.2.1. Aşağıdaki uzay zaman kesirli başlangıç değer problemini ele alalım:

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = {}^c D_t^{2\beta} u(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad 1 < 2\beta \leq 2, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \quad (2.7)$$

$$u(x, 0) = E_{\beta, 1}(x^\beta). \quad (2.8)$$

Denklem (2.7)' ye Shehu integral dönüşümü uygulanırsa

$$\mathbb{S}[u(x, t)] = \left(\frac{q}{p}\right) E_{\beta, 1}(x^\beta) + \left(\frac{q}{p}\right)^\alpha \mathbb{S}\left[{}^c D_x^{2\beta} u(x, t)\right] \quad (2.9)$$

elde edilir. Denklem (2.9)' a ters Shehu integral dönüşümü uygulanırsa

$$u(x, t) = E_{\beta,1}(x^\beta) + \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \mathbb{S} \left[{}^c D_x^{2\beta} u(x, t) \right] \right] \quad (2.10)$$

elde edilir. Denklem (2.10)' un zaman değişkeni t ye göre kısmi türevi alınır ve sifıra eşitlenirse

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \mathbb{S} \left[{}^c D_x^{2\beta} u(x, t) \right] \right] = 0 \quad (2.11)$$

elde edilir. Denklem (2.11)' e VIM uygulanırsa

$$u_{m+1}(x, t) = u_m(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_m(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p} \right)^\alpha \mathbb{S} \left[{}^c D_x^{2\beta} u(x, \tau) \right] \right] \right] d\tau$$

elde edilir. İterasyon formülü gereği

$$u_0(x, t) = E_{\beta,1}(x^\beta),$$

$$u_1(x, t) = E_{\beta,1}(x^\beta) + E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_2(x, t) = E_{\beta,1}(x^\beta) \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right],$$

$$u_3(x, t) = E_{\beta,1}(x^\beta) \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right],$$

⋮

çözüm bileşenleri elde edilir. İterasyon bağıntısı kullanılarak uzay zaman kesirli başlangıç değer problem (2.7)-(2.8)' in m . dereceden yaklaşık çözümü

$$u_m(x, t) = E_{\beta,1}(x^\beta) \sum_{k=0}^m \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

şeklinde elde edilir. (2.12) ifadesinin limiti alınarak Problem (2.7)-(2.8)' in çözümü aşığıdaki gibi elde edilir:

$$u(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x, t) = E_{\beta,1}(x^\beta) E_{\alpha,1}(t^\alpha).$$

Tablo 2.1 ve Şekil 2.1' in analizinden, $\alpha = \beta = 1$ için yaklaşık çözüm, tam çözüme yüksek hassasiyete sahip bir yaklaşım görülmektedir. Dolayısıyla, uzay-zaman kesirli

diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan SVIM yöntemi etkili ve doğru bir yöntem olduğu söylenebilir. Ayrıca Şekil 2.1' den $\alpha \rightarrow 1$ ve $\beta \rightarrow 1$ için yaklaşık çözümün tam çözüme yakınsadığı görülmektedir. Şekil 2.2' de $\alpha = 2/3$ ve $\beta = 2/3$ değerleri için yaklaşık çözüm ile tam çözümün 3 boyutlu grafikleri verilmiştir.

Örnek 2.2.2 Aşağıdaki doğrusal olmayan uzay zaman kesirli başlangıç değer problemini ele alalım:

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = \left({}^c D_x^\beta u(x, t) \right)^2 - u(x, t) {}^c D_x^\beta u(x, t), \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \quad (2.13)$$

$$u(x, 0) = 3 + \frac{5}{2} E_{\beta, 1}(x^\beta). \quad (2.14)$$

Denklem (2.13)' e Shehu integral dönüşümünü uygulanırsa

$$\mathbb{S}[u(x, t)] = \left(\frac{q}{p}\right) u(x, 0) + \left(\frac{q}{p}\right)^\alpha \mathbb{S} \left[\left({}^c D_x^\beta u(x, t) \right)^2 - u(x, t) {}^c D_x^\beta u(x, t) \right] \quad (2.15)$$

elde edilir. Denklem (2.15)' e ters Shehu integral dönüşümü uygulanırsa

$$u(x, t) = u(x, 0) + \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p}\right)^\alpha \mathbb{S} \left[\left({}^c D_x^\beta u(x, t) \right)^2 - u(x, t) {}^c D_x^\beta u(x, t) \right] \right] \quad (2.16)$$

elde edilir. Denklem (2.16)' nın zaman değişkeni t ye göre kısmi türev alınır ve sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p}\right)^\alpha \mathbb{S} \left[\left({}^c D_x^\beta u(x, t) \right)^2 - u(x, t) {}^c D_x^\beta u(x, t) \right] \right] = 0 \quad (2.17)$$

elde edilir. Denklem (2.17)' ye VIM uygulanırsa

$$u_{m+1}(x, t) = u_m(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial u_m(x, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbb{S}^{-1} \left[\left(\frac{q}{p}\right)^\alpha \mathbb{S} \left[\left({}^c D_x^\beta u_m(x, \tau) \right)^2 - u_m(x, \tau) {}^c D_x^\beta u_m(x, \tau) \right] \right] \right] d\tau.$$

elde edilir. İterasyon formülü kullanılarak

$$u_0(x, t) = 3 + \frac{5}{2} E_{\beta,1}(x^\beta),$$

$$u_1(x, t) = 3 + \frac{5}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) - \frac{15}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$u_2(x, t) = 3 + \frac{5}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) - \frac{15}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{45}{2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)},$$

$$u_3(x, t) = 3 + \frac{5}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) - \frac{15}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{45}{2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{135}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)},$$

$$u_4(x, t) = 3 + \frac{5}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) - \frac{15}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{45}{2} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{135}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{405}{2} E_{\beta,1}(x^\beta) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(4\alpha+1)},$$

⋮

çözüm bileşenleri elde edilir. İterasyon bağıntısı kullanılarak uzay zaman kesirli başlangıç değer problemi (2.13)-(2.14)' ün m . dereceden yaklaşık çözümü

$$u_m(x, t) = 3 + \left[\frac{5}{2} \sum_{k=0}^m \frac{(-3t^\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha+1)} \right] \sum_{l=0}^m \frac{(x^\beta)^l}{\Gamma(l\beta+1)} \quad (2.18)$$

şeklinde olur. (2.18) ifadesinin limiti alınarak uzay zaman kesirli başlangıç değer problemi (2.13)-(2.14)' ün çözümü aşağıdaki gibi elde edilir (Choudhary ve Daftardar-Gejji, 2017):

$$u(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x, t) = 3 + \left[\frac{5}{2} E_{\alpha,1}(-3t^\alpha) \right] E_{\beta,1}(x^\beta).$$

Tablo 2.2 ve Şekil 2.3' ün analizinden, $\alpha = \beta = 1$ için yaklaşık çözüm, tam çözüme yüksek hassasiyete sahip bir yaklaşım görülmektedir. Dolayısıyla, uzay-zaman kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan SVIM yöntemi etkili ve doğru bir yöntem olduğu söylenebilir. Ayrıca Şekil 2.3' den $\alpha \rightarrow 1$ ve $\beta \rightarrow 1$ için yaklaşık çözümün tam çözüme yakınsadığı görülmektedir. Şekil 2.4' de $\alpha = 2/3$ ve $\beta = 2/3$ değerleri için yaklaşık çözüm ile tam çözümün 3 boyutlu grafikleri verilmiştir.

Yukarıdaki iki örnek incelendiği zaman, Shehu integral dönüşümü ve varyasyonel iterasyon yönteminin birleşimi olan SVIM yönteminin doğrusal ya da doğrusal olmayan

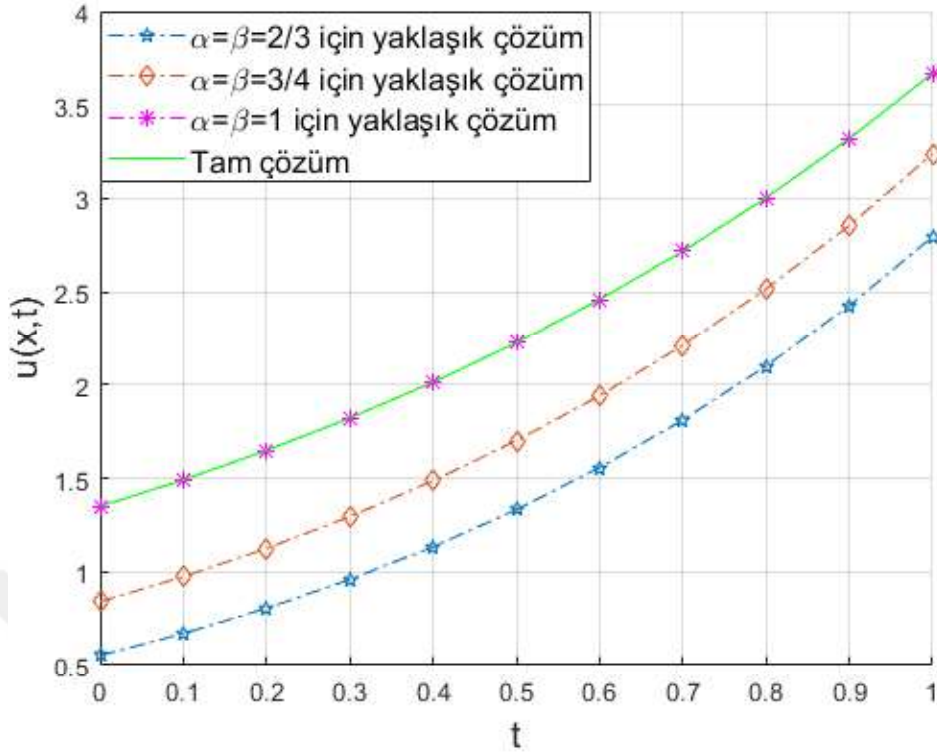
uzay-zaman kesirli başlangıç değer problemlerinin analitik çözümlerini bulmada ne kadar etkili olduğu görülmektedir. Bu yöntemin ana avantajı, uygulanmasının kolay ve pratik olmasıdır. Ayrıca, gösterilen örneklerde, elde edilen yaklaşık çözümlerin yüksek hassasiyetle hızlı bir şekilde tam çözümlere yakınsadığı görülmektedir.

Tablo 2.1. Örnek 2.2.1 için farklı β ve α değerlerinde yaklaşık çözüm ile tam çözümün değerleri

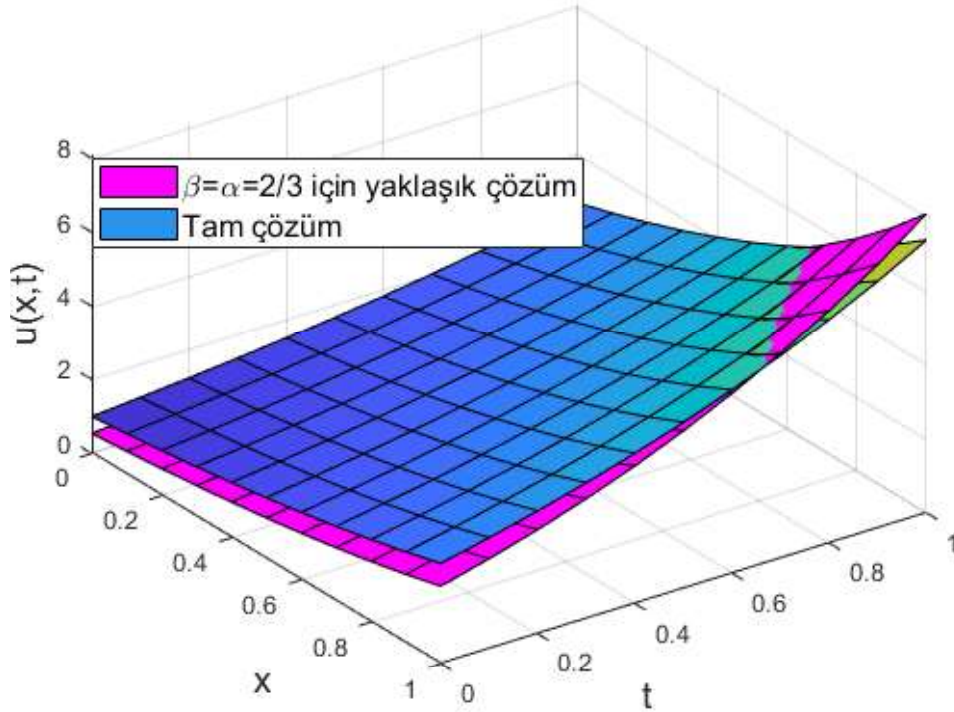
t	x	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$	u_{tam}
		$\beta = 0.5$	$\beta = 0.75$	$\beta = 1$	
		u_{SVIM}	u_{SVIM}	u_{SVIM}	
0,2	-5	-0,0728794142905183	-0,0556900475433218	0,00822974704902003	0,00822974704902003
	0	0,464049675672513	0,865372126175867	1,22140275816017	1,22140275816017
	5	272,995384456584	235,378704685654	181,272241875151	181,272241875151
0,4	-5	-0,102568289434788	-0,0717844261439092	0,0100518357446336	0,0100518357446336
	0	0,653089516564494	1,11546396921542	1,49182469764127	1,49182469764127
	5	384,205469814638	303,402959554171	221,406416204187	221,406416204187
0,6	-5	-0,140869106433447	-0,0919274211102744	0,0122773399030684	0,0122773399030684
	0	0,896964716156101	1,42846758746576	1,82211880039051	1,82211880039051
	5	527,674601164535	388,539034541079	270,426407426153	270,426407426153
0,8	-5	-0,190052579642384	-0,117094221086887	0,0149955768204777	0,0149955768204777
	0	1,21013373669836	1,81953651567707	2,22554092849247	2,22554092849247
	5	711,908534824601	494,908647082167	330,299559909649	330,299559909649
1	-5	-0,252961550186961	-0,148489952829492	0,0183156388887342	0,0183156388887342
	0	1,61069797918433	2,30739731539736	2,71828182845905	2,71828182845905
	5	947,556128411521	627,605367523717	403,428793492735	403,428793492735

Tablo 2.2. Örnek 2.2.2 için farklı β ve α değerlerinde yaklaşık çözüm ile tam çözümün değerleri

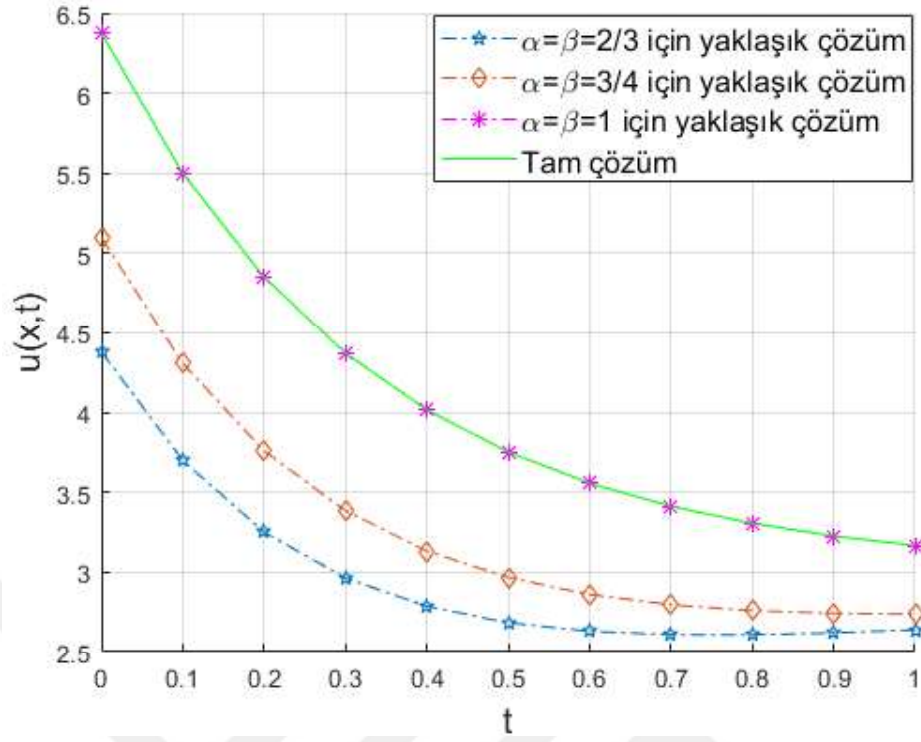
t	x	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.75$	$\alpha = 1$	u_{tam}
		$\beta = 0.5$	$\beta = 0.75$	$\beta = 1$	
		u_{SVIM}	u_{SVIM}	u_{SVIM}	
0,2	-5	2,97723189881641	2,95468850942983	3,00924465929121	3,00924465929121
	0	3,14497276182554	3,70409889494893	4,37202909023507	4,37202909023507
	5	88,2859013271367	194,512854240003	206,627171662420	206,627171662420
0,4	-5	3,01929874786381	2,98503015564532	3,00507357659074	3,00507357659074
	0	2,87711786964444	3,23261761498140	3,75298552978051	3,75298552978051
	5	-69,2902227453216	66,2713155938424	114,752961233252	114,752961233252
0,6	-5	3,03346340884022	2,99928895133517	3,00278443786961	3,00278443786961
	0	2,78692633344582	3,01104904237009	3,41324722055397	3,41324722055397
	5	-122,348923979388	6,00530743066654	64,3313254927734	64,3313254927734
0,8	-5	3,03543594562253	3,00548196320081	3,00152813190282	3,00152813190282
	0	2,77436647600195	2,91481533308062	3,22679488322353	3,22679488322353
	5	-129,737751709177	-20,1699819673740	36,6593450875042	36,6593450875042
1	-5	3,03265269180591	3,00773966021300	3,00083865656976	3,00083865656976
	0	2,79208846297849	2,87973279769261	3,12446767091966	3,12446767091966
	5	-119,312099237844	-29,7123296891665	21,4726402473266	21,4726402473266



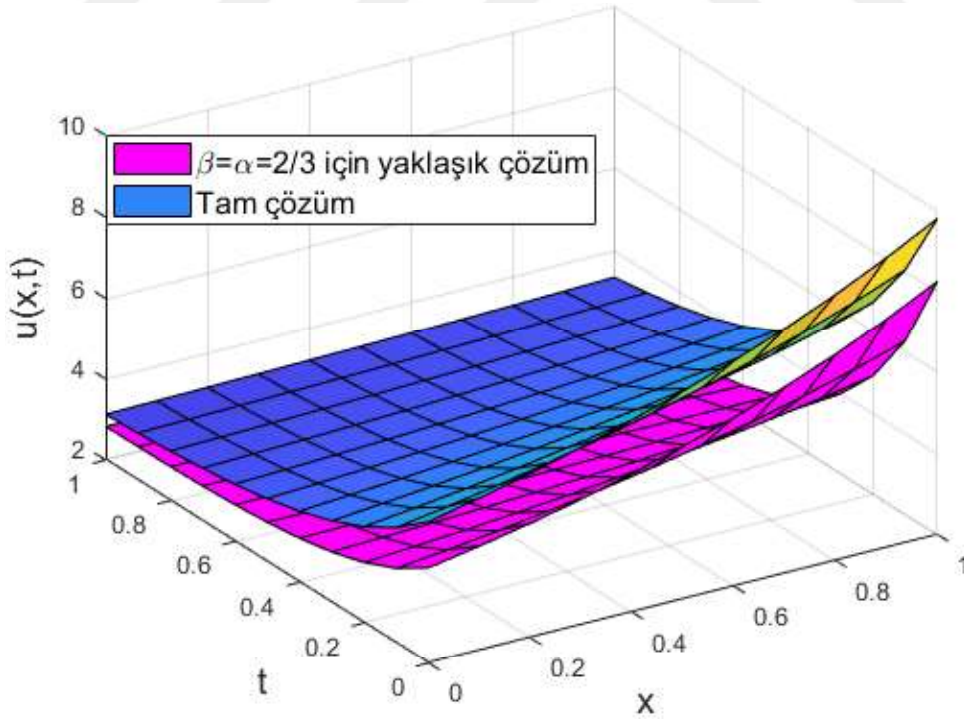
Şekil 2.1. Örnek 2.2.1' de, $x = 0.3$ noktasında farklı α ve β değerleri için 6. dereceden yaklaşık çözüm ile tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 2 boyutlu grafiği



Şekil 2.2. Örnek 2.2.1' de, $\alpha = \beta = 2/3$ için 6. dereceden yaklaşık çözüm ile tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 3 boyutlu grafiği



Şekil 2.3. Örnek 2.2.2' de, $x = 0.3$ noktasında farklı α ve β değerleri için 6. dereceden yaklaşık çözüm ile tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 2 boyutlu grafiği



Şekil 2.4. Örnek 2.2.2' de, $\alpha = \beta = 2/3$ için 6. dereceden yaklaşık çözüm ile tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 3 boyutlu grafiği

3. KESİRLİ ARA DAFTARDAR-GEJJI VE JAFARI YÖNTEMİ

Bu bölümde, başlangıç koşullarına sahip doğrusal olmayan bir kesirli kısmi diferansiyel denklemin çözümünün bulunması için IAM' in uygulaması verilmektedir. Aşağıdaki doğrusal olmayan kesirli başlangıç değer problemini ele alalım:

$${}_0^C D_t^\alpha (u(x, y, t)) + Ru(x, y, t) + Nu(x, y, t) = g(x, y, t), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) = h_k(x, y), \quad k = 0, 1, 2, \dots, m - 1. \quad (3.2)$$

Burada $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ olup ${}_0^C D_t^\alpha (u(x, y, t))$, R , N ve $g(x, y, t)$ fonksiyonları sırasıyla kesirli türevi, doğrusal denklem operatörünü, doğrusal olmayan diferansiyel operatörünü ve kaynak fonksiyonunu temsil etmektedir. Doğrusal olmayan kesirli başlangıç değer problemlerine ARA integrali dönüşümünü uygulamak için $u(x, y, t)$ fonksiyonunun, Tanım 1.1.2.1 gereği t değişkenine göre m . mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olması gerekmektedir. Diğer bir deyişle, $u(x, y, t) \in W_2^m[0, T]$ olmalıdır. Burada $W_2^m[0, T]$ Banach uzayı,

$$W_2^m[0, T] = \{u = u(\cdot, \cdot, t) : u, u^{(1)}, \dots, u^{(m-1)} \in AC[0, T]\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Genelliği kaybetmeksizin $u = u(x, y, t)$ alalım. Denklem (3.1)'e ARA integral dönüşümü uygulanırsa

$$G_1[u](s) = \frac{1}{s^\alpha} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) s^{\alpha-k} - \frac{1}{s^\alpha} G_1[Ru + Nu](s) + \frac{1}{s^\alpha} G_1[g(x, y, t)](s) \quad (3.3)$$

elde edilir. Denklem (3.3)' e ters ARA integral dönüşümü uygulanırsa

$$u = G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) s^{\alpha-k} + G_1[g(x, y, t)](s) \right] \right] - G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} [G_1[Ru + Nu](s)] \right] \quad (3.4)$$

elde edilir. Şimdi iterasyon yöntemi gereği

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \quad (3.5)$$

alınır. R operatörü doğrusal olduğu için

$$R(\sum_{i=0}^{\infty} u_i) = \sum_{i=0}^{\infty} R(u_i), \quad (3.6)$$

eşitliği sağlanır. Doğrusal olmayan N operatörünün ayrışımından

$$N(\sum_{i=0}^{\infty} u_i) = N(u_0) + \sum_{i=0}^{\infty} \{N(\sum_{k=0}^i u_k) - N(\sum_{k=0}^{i-1} u_k)\}. \quad (3.7)$$

eşitliği elde edilir. (3.5), (3.6) ve (3.7) eşitlikleri, Denklem (3.4)' de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} u_i = & G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) s^{\alpha-k} + G_1[g(x, y, t)](s) \right] \right] \\ & - G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1[R(u_i) + N(u_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \{N(\sum_{k=0}^i u_k) - N(\sum_{k=0}^{i-1} u_k)\}](s) \right] \right]. \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan iterasyon bağıntısı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$u_0 = G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) s^{\alpha-k} + G_1[g(x, y, t)](s) \right] \right],$$

$$u_1 = -G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1[R(u_0) + N(u_0)](s) \right] \right],$$

⋮

$$u_{m+1} = G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1[R(u_m) - \{N(\sum_{k=0}^m u_k) - N(\sum_{k=0}^{m-1} u_k)\}](s) \right] \right], \quad m \geq 1. \quad (3.8)$$

Son olarak $m + 1$ terimli yaklaşık çözüm

$$u(x, y, t) \cong u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_m$$

şeklinde yazılabilir.

3.1. Kesirli ARA Daftardar-Gejji ve Jafari Yöntemi İçin Yakınsaklık Teoremi

Teorem 3.1.1 $0 < \gamma < 1$ olmak üzere her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} & \left\| G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 [R(u_m) - \{N(\sum_{k=0}^m u_k) - N(\sum_{k=0}^{m-1} u_k)\}](s) \right] \right] \right\| \leq \\ & \gamma \left\| G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 [R(u_{m-1}) - \{N(\sum_{k=0}^{m-1} u_k) - N(\sum_{k=0}^{m-2} u_k)\}](s) \right] \right] \right\|, \end{aligned} \quad (3.9)$$

ya da

$$\|u_{m+1}\| \leq \gamma \|u_m\|$$

eşitsizliği sağlanırsa, $W_2^m[0, T]$ Banach uzayında (3.1)-(3.2) doğrusal olmayan kesirli probleminin (3.5) formunda verilen seri çözümü yakınsaktır (Kodal Sevindir ve diğ., 2021).

İspat: $m \geq 1$ olmak üzere $S_m(x, y, t) = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_m$ kısmi toplamlar dizisi olsun. Problem (3.1)-(3.2)'nin seri formundaki çözümün yakınsak olduğunu göstermek için $\{S_m\}_{m \geq 1}$ kısmi toplamlar dizisinin $W_2^m[0, T]$ Banach uzayında Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Bu amaçla

$$\begin{aligned} \|S_{m+1} - S_m\| &= \left\| G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[R(u_m) - \left\{ N \left(\sum_{k=0}^m u_k \right) - N \left(\sum_{k=0}^{m-1} u_k \right) \right\} \right] (s) \right] \right] \right\| \\ &\leq \gamma \left\| G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[R(u_{m-1}) - \left\{ N \left(\sum_{k=0}^{m-1} u_k \right) - N \left(\sum_{k=0}^{m-2} u_k \right) \right\} \right] (s) \right] \right] \right\| \\ &\leq \gamma^2 \left\| G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[R(u_{m-2}) - \left\{ N \left(\sum_{k=0}^{m-2} u_k \right) - N \left(\sum_{k=0}^{m-3} u_k \right) \right\} \right] (s) \right] \right] \right\| \\ &\leq \dots \leq \gamma^{n+1} \left\| G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) s^{\alpha-k} + G_1 [g(x, y, t)](s) \right] \right] \right\| \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan, $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n \geq m$ için Eşitsizlik (3.9) ve genelleştirilmiş üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \|S_n - S_m\| &= \|S_{m+1} - S_m + S_{m+2} - S_{m+1} + \dots + S_n - S_{n-1}\| \leq \\ & \gamma^{m+1} \left(\frac{1-\gamma^{n-m}}{1-\gamma} \right) \left\| G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) s^{\alpha-k} + G_1 [g(x, y, t)](s) \right] \right] \right\| \end{aligned}$$

elde edilir. $0 < \gamma < 1$ olduğu için $1 - \gamma^{n-m} \leq 1$ eşitsizliği sağlanır. Buradan da

$$\|S_n - S_m\| \leq \frac{\gamma^{m+1}}{1-\gamma} \left\| G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) s^{\alpha-k} + G_1[g(x, y, t)](s) \right] \right] \right\|$$

elde edilir. $G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[\sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, y, 0) s^{\alpha-k} + G_1[g(x, y, t)](s) \right] \right]$ sınırlı olduğu için

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_n - S_m\| = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak, $W_2^m[0, T]$ Banach uzayında $\{S_m\}_{m \geq 1}$ kısmi toplamlar dizisi bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla, Problem (3.1)-(3.2)'nin (3.5) formunda verilen seri çözümü yakınsaktır.

3.2. Kesirli ARA Daftardar-Gejji ve Jafari Yöntemi İçin Örnekler

Şimdi oluşturulan IAM yöntemini doğrusal olmayan kesirli başlangıç değer problemleri ile modellenen biyolojik popülasyon problemine uygulanışına birkaç örnek verelim.

Örnek 3.2.1. Aşağıdaki genelleştirilmiş zaman-kesirli biyolojik popülasyon modelini ele alalım:

$${}_0^C D_t^\alpha u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + hu, \quad (3.10)$$

$$u(x, y, 0) = \sqrt{xy}. \quad (3.11)$$

Burada $u = u(x, y, t)$, $0 < \alpha \leq 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$. Denklem (3.10)'a ARA integral dönüşümü uygulanırsa ve (3.11) başlangıç koşulu kullanılırsa

$$G_1[u](s) = \sqrt{xy} + \frac{1}{s^\alpha} G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + hu \right] (s) \quad (3.12)$$

elde edilir. Denklem (3.12)'ye ters ARA integral dönüşümü uygulanırsa

$$u = \sqrt{xy} + G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + hu \right] (s) \right] \right] \quad (3.13)$$

elde edilir. (3.5)-(3.7) eşitlikleri, Denklem (3.13)'de yerine konursa ve (3.8) ifadesi kullanılırsa çözümün bileşenleri

$$u_0 = u(x, y, 0) = \sqrt{xy},$$

$$\begin{aligned} u_1 &= G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_0^2 + h u_0 \right] (s) \right] \right] \\ &= G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 [h \sqrt{xy}] (s) \right] \right] \\ &= h \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + u_1)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 + u_1)^2 + h(u_0 + u_1) \right] (s) \right] \right] \\ &\quad - G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_0^2 + h u_0 \right] (s) \right] \right] \\ &= G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\left(h + h^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \sqrt{xy} \right] (s) \right] \right] - h \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{xy} \\ &= h^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \sqrt{xy}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 &= G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + u_1 + u_2)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 + u_1 + u_2)^2 + h(u_0 + u_1 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. u_2) \right] (s) \right] \right] - G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + u_1)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_0 + u_1)^2 + h(u_0 + u_1) \right] (s) \right] \right], \\ &= G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\left(h + h^2 \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + h^3 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \right) \sqrt{xy} \right] (s) \right] \right] \\ &\quad - h^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \sqrt{xy} - h \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{xy} = \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \sqrt{xy}, \end{aligned}$$

⋮

şeklinde elde edilir. Böyle devam edilerek, gerekli düzenlemeler yapılırsa ele alınan problemin $m + 1$ terimli çözümü

$$u \cong \left(1 + h \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + h^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + h^3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots + h^m \frac{t^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)} \right) \sqrt{xy} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. (3.14) ifadesinde $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

$$u(x, y, t) = E_{\alpha,1}(ht^\alpha)\sqrt{xy}$$

tam çözümlü elde edilir. $\alpha = 1$ için aşağıdaki tam çözüm

$$u(x, y, t) = e^{ht}\sqrt{xy}$$

tam çözüm elde edilir (Liu ve diğ., 2011).

Örnek 3.2.2. Aşağıdaki genelleştirilmiş zaman-kesirli biyolojik popülasyon modeli olarak bilinen modeli ele alalım:

$${}_0^c D_t^\alpha u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + u, \quad (3.15)$$

$$u(x, y, 0) = \sqrt{\sin(x)\sinh(y)}. \quad (3.16)$$

Burada $u = u(x, y, t)$, $0 < \alpha \leq 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$. Denklem (3.15)'e ARA integral dönüşümü uygulanırsa ve (3.16) başlangıç koşulu kullanılırsa

$$G_1[u](s) = \sqrt{\sin(x)\sinh(y)} + \frac{1}{s^\alpha} G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + u \right] (s) \quad (3.17)$$

elde edilir. Denklem (3.17)'ye ters ARA integral dönüşümü uygulanırsa

$$u = \sqrt{\sin(x)\sinh(y)} + G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + u \right] (s) \right] \right] \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.5)-(3.7) eşitlikleri, Denklem (3.18)'de yerine konursa ve (3.8) ifadesi kullanılırsa çözümün bileşenleri

$$u_0 = u(x, y, 0) = \sqrt{\sin(x)\sinh(y)},$$

$$u_1 = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \sqrt{\sin(x)\sinh(y)},$$

$$u_2 = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \sqrt{\sin(x)\sinh(y)},$$

$$u_3 = \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \sqrt{\sin(x)\sinh(y)},$$

⋮

şeklinde elde edilir. Böylece devam edilerek, gerekli düzenlemeler yapılırsa ele alınan problemin m terimli çözüm

$$u \cong \left(1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots + \frac{t^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)}\right) \sqrt{\sin(x)\sinh(y)} \quad (3.19)$$

şeklinde elde edilir. (3.19) ifadesinde $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$u(x, y, t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha) \sqrt{\sin(x)\sinh(y)}$$

tam çözümü elde edilir. $\alpha = 1$ için aşağıdaki tam çözüm (Roul, 2010)

$$u(x, y, t) = e^t \sqrt{\sin(x)\sinh(y)}.$$

tam çözümü elde edilir.

Örnek 3.2.3. Aşağıdaki genelleştirilmiş zaman-kesirli biyolojik popülasyon modeli olarak bilinen modeli ele alalım:

$${}_0^c D_t^\alpha u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + hu(1 - ru), \quad (3.20)$$

$$u(x, y, 0) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)}. \quad (3.21)$$

Burada $u = u(x, y, t)$, $0 < \alpha \leq 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$ dır. Denklem (3.20)' ye ARA integral dönüşümü uygulanırsa ve (3.21) başlangıç koşulu kullanılırsa

$$G_1[u](s) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} + \frac{1}{s^\alpha} G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + hu(1 - ru) \right] (s) \quad (3.22)$$

elde edilir. Denklem (3.22)' ye ters ARA integral dönüşümü uygulanırsa

$$u = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} + G_1^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[G_1 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 + hu(1 - ru) \right] (s) \right] \right] \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.5)-(3.7) eşitlikleri, Denklem (3.23)' de yerine konursa ve (3.8) ifadesi kullanılırsa çözümün bileşenleri

$$u_0 = u(x, y, 0) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)},$$

$$u_1 = h \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)},$$

$$u_2 = h^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)},$$

$$u_3 = h^3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)},$$

⋮

şeklinde elde edilir. Böylece devam edilerek, gerekli düzenlemeler yapılırsa ele alınan problemin $m + 1$ terimli çözümü

$$u \cong \left(1 + h \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + h^2 \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + h^3 \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots + h^m \frac{t^{m\alpha}}{\Gamma(m\alpha+1)} \right) e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)} \quad (3.24)$$

şeklinde elde edilir. (3.24) ifadesinde $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse

$$u(x, y, t) = E_{\alpha,1}(ht^\alpha) e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)}$$

tam çözümü elde edilir. $\alpha = 1$ için

$$u(x, y, t) = e^{\sqrt{\frac{hr}{8}}(x+y)+ht}$$

tam çözümü elde edilir (Arafa ve diğ., 2011).

Tablo 3.1, 3.2 ve 3.2' de, Örnek 3.2.1, 3.2.2 ve 3.2.3' de elde edilen 7 terimli yaklaşık çözümlerinin mutlak hataları verilmiştir. Şekil 3.1-3.6 ve elde edilen 7 terimli yaklaşık çözümler göz önüne alındığında α değeri 1'e yaklaştıkça yaklaşık çözümlerin tam çözümlere yakınsadığı görülmektedir. Ayrıca, yaklaşık çözümlerdeki terim sayısının artırılmasının, nümerik çözümlerin doğruluğunun iyileştirilmesi anlamına geldiği sonucuna varılır.

Yukarıdaki üç örnek incelendiği zaman, ARA integral dönüşümü ve Daftardar-Gejji ve Jafari yönteminin birleşimi olan IAM yönteminin doğrusal olmayan uzay-zaman kesirli başlangıç değer problemlerinin tam çözümlerini bulmada ne kadar etkili olduğu

görülmektedir. Bu örneklerin sonuçları da yöntemin etkinliğini ve doğruluğunu desteklemektedir.

Tablo 3.1. $\alpha = 1$ için Örnek 3.2.1' de elde edilen 7 terimli yaklaşık çözümün MATLAB kullanılarak elde edilen mutlak hatası

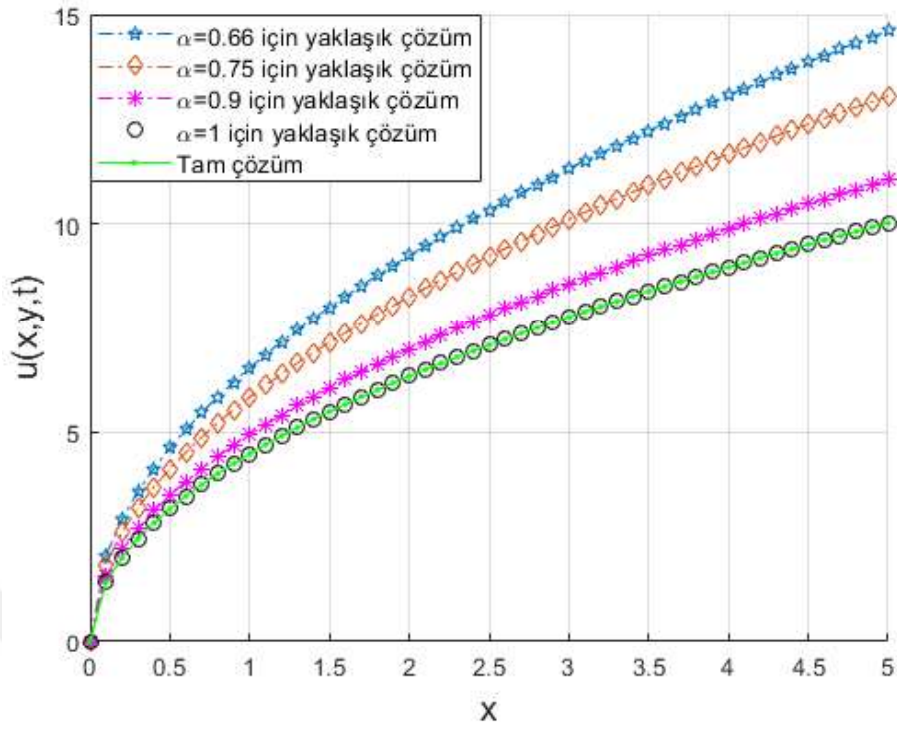
Örnek 3.2.1	
(x, y, t)	$h = 1$
(0.1,0.1,0.1)	$2.509104035652854 \times 10^{-14}$
(0.2,0.2,0.2)	$1.298636198576730 \times 10^{-11}$
(0.3,0.3,0.3)	$5.04943808987690 \times 10^{-10}$
(0.4,0.4,0.4)	$6.802539864736446 \times 10^{-9}$
(0.5,0.5,0.5)	$5.127268321025724 \times 10^{-8}$

Tablo 3.2. $\alpha = 1$ için Örnek 3.2.2' de elde edilen 7 terimli yaklaşık çözümün MATLAB kullanılarak elde edilen mutlak hatası

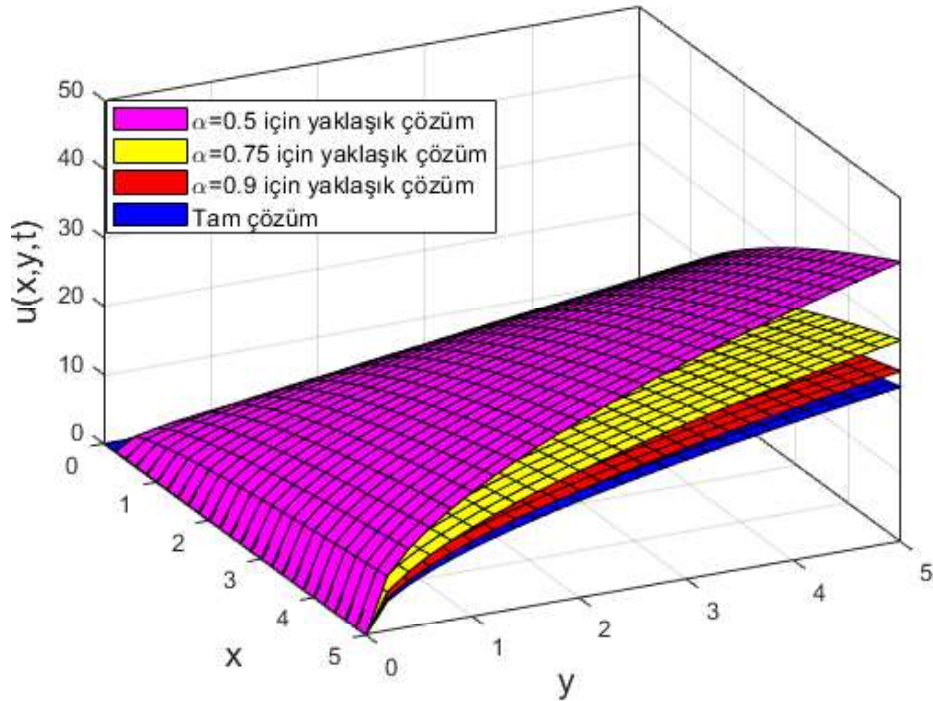
Örnek 3.2.2	
(x, y, t)	
(0.1,0.1,0.1)	$2.50771625687207 \times 10^{-14}$
(0.2,0.2,0.2)	$1.298622320788923 \times 10^{-11}$
(0.3,0.3,0.3)	$5.049211049268365 \times 10^{-10}$
(0.4,0.4,0.4)	$6.801572194348182 \times 10^{-9}$
(0.5,0.5,0.5)	$5.125487789747751 \times 10^{-8}$

Tablo 3.3. $\alpha = 1$ için Örnek 3.2.3' de elde edilen 7 terimli yaklaşık çözümün MATLAB kullanılarak elde edilen mutlak hatası

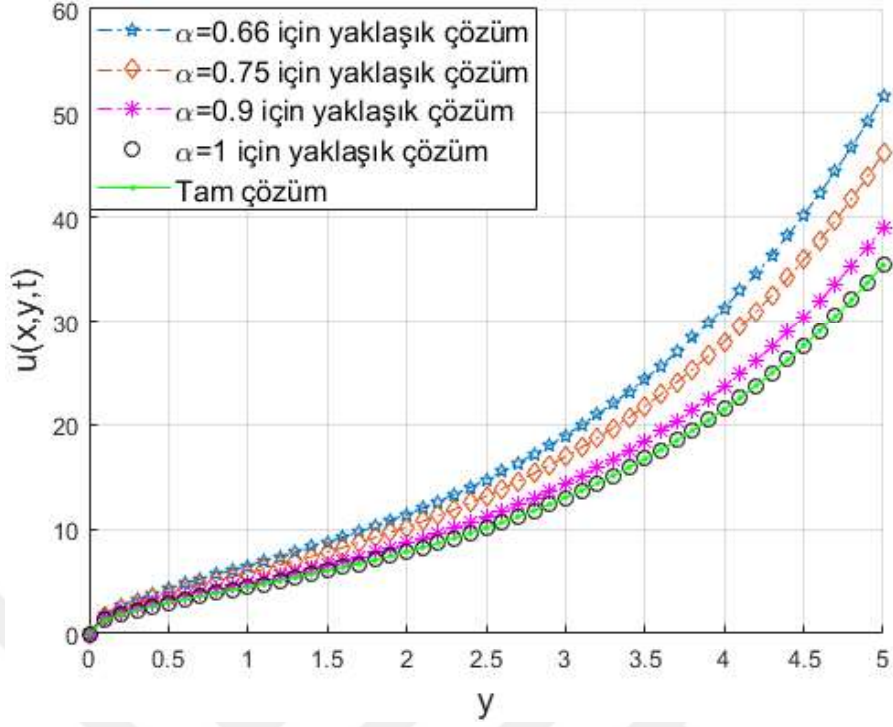
Örnek 3.2.3	
(x, y, t)	$h = 1, r = 2$
(0.1,0.1,0.1)	$2.771116669464391 \times 10^{-13}$
(0.2,0.2,0.2)	$7.930767154107343 \times 10^{-11}$
(0.3,0.3,0.3)	$2.27200946945061 \times 10^{-9}$
(0.4,0.4,0.4)	$2.537049281770010 \times 10^{-8}$
(0.5,0.5,0.5)	$1.690687270183844 \times 10^{-7}$



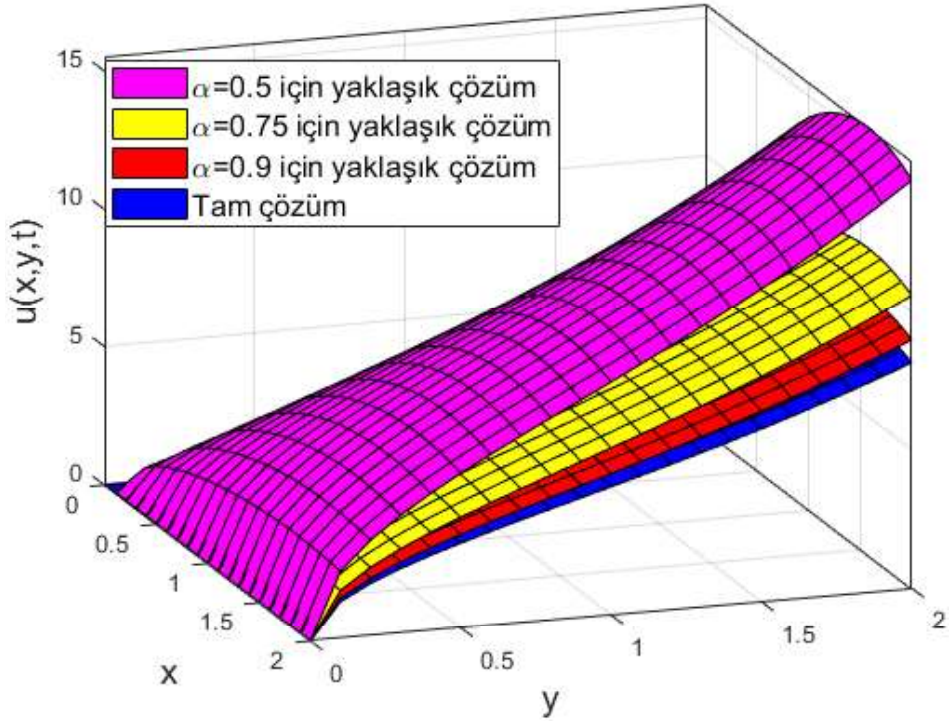
Şekil 3.1. Örnek 3.2.1' de, $t = 1.5$, $h = y = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 2 boyutlu grafikleri



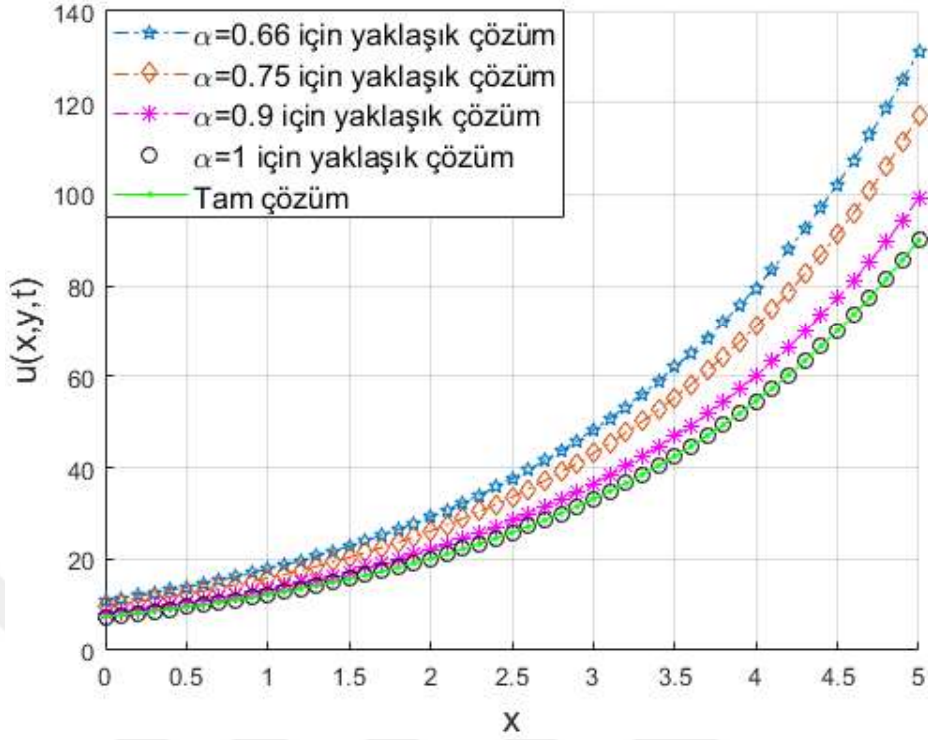
Şekil 3.2. Örnek 3.2.1' de, $t = 1.5$, $h = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 3 boyutlu grafikleri



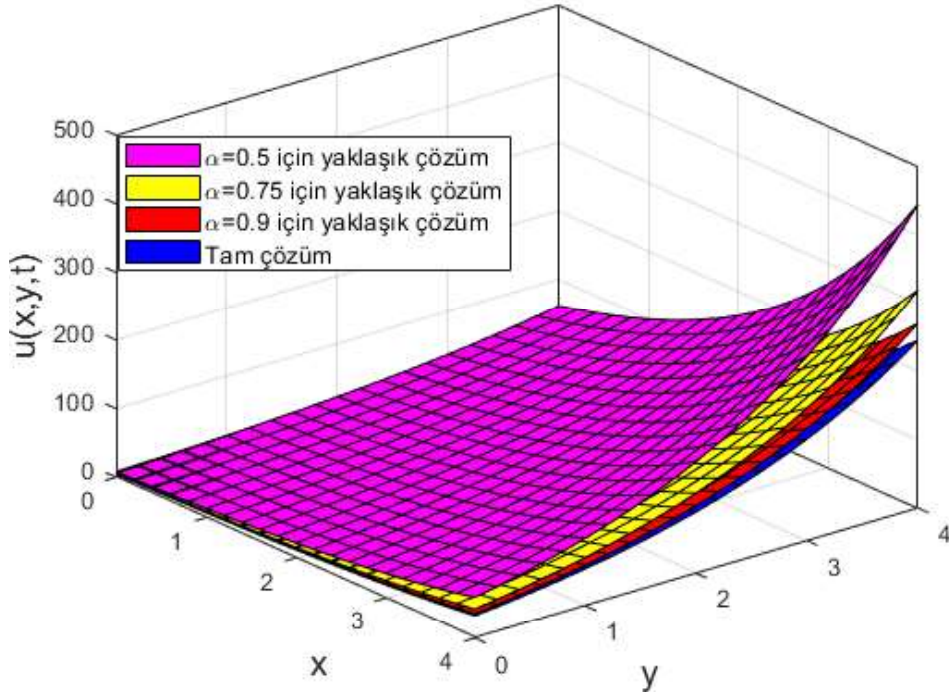
Şekil 3.3. Örnek 3.3.2’ de, $t = 1.5$, $x = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 2 boyutlu grafikleri



Şekil 3.4. Örnek 3.2.2’ de, $t = 1.5$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 3 boyutlu grafikleri



Şekil 3.5. Örnek 3.2.3' de, $t = 1.5$, $r = 2$, $y = h = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 2 boyutlu grafikleri



Şekil 3.6. Örnek 3.2.3' de, $t = 1.5$, $r = 2$, $h = 1$ ve farklı α değerleri için 7 terimli yaklaşık çözüm ve tam çözümün MATLAB vasıtasıyla çizilen 3 boyutlu grafikleri

4. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Liouville-Caputo anlamında kesirli türev içeren doğrusal ya da doğrusal olmayan Uzay-Zaman kesirli başlangıç değer problemlerinin analitik ya da yaklaşık çözümlerini bulmak için Shehu integral dönüşümü ve Varyasyonel iterasyon yönteminin birleşimi olan Shehu varyasyonel iterasyon yöntemi (SVIM) uygulandı. Tezin ikinci bölümünde yer alan tablolar ve şekiller incelendiği zaman $\alpha = \beta = 1$ için yaklaşık çözüm, tam çözümün yüksek hassasiyete sahip bir yaklaşımı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, uzay-zaman kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan SVIM etkili ve doğru bir yöntemdir.

Tezin üçüncü bölümünde, Riemann-Liouville kesirli integralinin ve Liouville-Caputo kesirli türevinin ARA integral dönüşümlerinin tanımları, özellikleri ve ilgili teoremler verildi. Daha sonra doğrusal olmayan Liouville-Caputo zaman-kesirli biyolojik popülasyon problemlerinin çözümünü elde etmek için ARA integral dönüşümü ve Daftardar-Gejji ve Jafari yönteminin birleşimi olan kesirli ARA Daftardar-Gejji ve Jafari (IAM) yöntemi uygulandı. Tezin üçüncü bölümünde yer alan tablolar ve şekiller incelendiği zaman $\alpha = \beta = 1$ için yaklaşık çözüm, tam çözümün yüksek hassasiyete sahip bir yaklaşımı olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, zaman kesirli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan IAM etkili ve uygulanabilir bir yöntemdir.

Farklı çalışmalarda, gerçek fiziksel problemlerin modellenmesiyle elde edilen önemli doğrusal olmayan matematiksel problemlerin analizinde ARA integral dönüşümünün, Shehu İntegral dönüşümünün ve diğer integral dönüşümlerinin farklı sayısal yöntemlerle birlikte kullanılarak yeni çözüm yöntemlerinin oluşturulması bu tez çalışmasının sonucu olarak öngörülmektedir.

KAYNAKLAR

- Agwa, H.A., Ali, F.M., Kılıçman, A. (2012). A new integral transform on time scales and its applications, *Adv. Differ. Equ.*, 2012, Article ID 60.
- Ahmed, S.A., Elzaki, T.M., Elbadri, M., Mohamed, M.Z. (2020). Solution of partial differential equations by new double integral transform (Laplace-Sumudu transform), *Ain Shams Eng. J.*, 2020.
- Albayrak, D., Purohit, S.D., Faruk, U.Ç. (2014). Certain inversion and representation formulas for q-Sumudu transforms, *Hacet. J. Math. Stat.*, 43, 699–713.
- Aleem, M., Asjad, M. I., Shaheen, A., Khan, I. (2020). MHD influence on different water based nanofluids (TiO₂, Al₂O₃, CuO) in porous medium with chemical reaction and Newtonian heating, *Chaos, Solitons & Fractals*, 130, Article ID 109437.
- Aleem, M., Imran Asjad, M., Chowdhury, M. S. R., Hussanan, A. (2019). Analysis of mathematical model of fractional viscous fluid through a vertical rectangular channel, *Chinese Journal of Physics*, 61, 336–350.
- Arafa, A. A. M., Rida, S. Z., Mohamed, H. (2011). Homotopy Analysis Method for Solving Biological Population Model, *Commun. Theor. Phys.*, 56, 797–800.
- Arkhincheev, V. E. (1993). Anomalous diffusion in inhomogeneous media: some exact results, *Modelling Measurement and Control a General Physics Electronics and Electrical Engineering*, 49.
- Asjad, M. (2019). Fractional mechanism with power law (singular) and exponential (non-singular) kernels and its applications in bio heat transfer model, *International Journal of Heat and Technology*, 37(3), 846–852.
- Atangana, A. A. (2013). Note on the Triple Laplace Transform and Its Applications to Some Kind of Third-Order Differential Equation, *Abstr. Appl. Anal.*, 2013, 1–10.
- Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., Trujillo, J. J. (2012). *Fractional Calculus Models and Numerical Methods*, World Scientific.
- Bayrak, M. A., Demir, A. (2018). A new approach for space-time fractional partial differential equations by residual power series method, *Applied Mathematics and Computation*, 336, 215–230.
- Belgacem, R., Baleanu, D., Bokhari, A. (2019). Shehu Transform and applications to Caputo-fractional differential equations, *International Journal of Analysis and Applications*, 17(6), 917-927.

- Bulut, H., Baskonus, H.M., Belgacem, F.B.M. (2013). The Analytical Solution of Some Fractional Ordinary Differential Equations by the Sumudu Transform Method, *Abstr. Appl. Anal.*, 2013, 1–6.
- Butzer, P.L., Jansche, S. (1997). A direct approach to the Mellin transform, *J. Fourier Anal. Appl.*, 3, 325–376.
- Cenesiz, Y., Tasbozan, O., Kurt, A. (2017). Functional variable method for conformable fractional modified KdV-ZK equation and Maccari system, *Tbilisi Mathematical Journal*, 10(1), 118–126.
- Choudhary, S., Daftardar-Gejji, V. (2017). Invariant subspace method: a tool for solving fractional partial differential equations, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 20(2), 477–493.
- Cole, K. S. (1933). Electric conductance of biological systems, *Cold Spring Harbor Symposia on Quantitative Biology*, 1, 107–116.
- Çetinkaya, S., Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2021). Solution of Space-Time-Fractional Problem by Shehu Variational Iteration Method, *Adv. Math. Phys.*, 2021, 1–8.
- Dattoli, G., Martinelli, M.R., Ricci, P.E. (2005). On new families of integral transforms for the solution of partial differential equations, *Integral Transform. Spéc. Funct.*, 16, 661–667.
- Demir, A., Bayrak, M. A., Ozbilge, E. (2019). A new approach for the approximate analytical solution of space-time fractional differential equations by the homotopy analysis method, *Advances in Mathematical Physics*, 2019(12), Article ID 5602565.
- Elzaki, T.M. (2011). The new integral transform Elzaki transform, *Glob. J. Pure Appl. Math.*, 7, 57–64.
- Evirgen, F., Uçar, S., Özdemir, N., Hammouch, Z. (2021). System response of an alcoholism model under the effect of immigration via non-singular kernel derivative, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-S*, 14(7), 2199-2212.
- Glockle, W. G., Nonnenmacher, T. F. (1995). A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics, *Biophysical Journal*, 68(1), 46–53.
- Imran, M. A. (2020). Application of fractal fractional derivative of power law kernel (FFPD $\times \alpha, \beta$) to MHD viscous fluid flow between two plates, *Chaos, Solitons & Fractals*, 134, Article ID 109691.
- Jaradat, I., Alquran, M., Al-Khaled, K. (2018). An analytical study of physical models with inherited temporal and spatial memory, *The European Physical Journal Plus*, 133(4), Article number 162.

- Khan, N. A., Khan, N.-U., Ara, A., Jamil, M. (2012). Approximate analytical solutions of fractional reaction-diffusion equations, *Journal of King Saud University—Science*, 24(2), 111–118.
- Khan, Y., Wu, Q. (2011). Homotopy perturbation transform method for nonlinear equations using He's polynomials, *Computers & Mathematics with Applications*, 61(8), 1963–1967.
- Khan, Z.H., Khan, W.A. (2008). N-transform properties and applications, *NUST J. Eng. Sci.*, 1, 127–133.
- Krishna, B. T. (2011). Studies on fractional order differentiators and integrators: a survey, *Signal Processing*, 91(3), 386–426.
- Kodal Sevindir, H., Çetinkaya, S., Demir, A. (2021). On Effects of a New Method for Fractional Initial Value Problems, *Advances in Mathematical Physics*, <https://doi.org/10.1155/2021/7606442>
- Lepik, U. (2009). Solving fractional integral equations by the Haar wavelet method, *Applied Mathematics and Computation*, 214(2), 468–478.
- Li, Y., Sun, N. (2011). Numerical solution of fractional differential equations using the generalized block pulse operational matrix, *Computers & Mathematics with Applications*, 62(3), 1046–1054.
- Li, Y. (2010). Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(9), 2284–2292.
- Liao, S. (2012). *Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations*, pp. 153–165, Higher Education Press, Beijing, China.
- Liu, Y., Li, Z., Zhang, Y. (2011). Homotopy perturbation method to fractional biological population equation, *Fractional Differential Calculus*, 1, 117–124.
- Maitama, S., Zhao, W. (2019). New Integral Transform: Shehu Transform a Generalization of Sumudu and Laplace Transform for Solving Differential Equations, *Int. J. Anal. Appl.*, 17(2), 167-190.
- Makarov, A.M. (1970). Application of the Laplace-Carson method of integral transformation to the theory of unsteady visco-plastic flows, *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 19, 94–99.
- Modanli, M. (2019). On the numerical solution for third order fractional partial differential equation by difference scheme method, *An International Journal of Optimization and Control: @eories and Applications (IJOCTA)*, 9(3), 1–5.
- Odibat, Z. M. (2010). A study on the convergence of variational iteration method, *Math. Comput. Model.*, 51, 1181–1192.

- Podlubny, I. (1999). *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York.
- Qazza, A., Burqan, A., Saadeh, R. (2021). A New Attractive Method in Solving Families of Fractional Differential Equations by a New Transform, *Mathematics*, 2021.
- Roul, P. (2010). Application of Homotopy Perturbation Method to Perturbation Biological Population Model, *Appl. Appl. Math.*, 5, 272–281.
- Saadeh, R., Qazza, A., Burqan, A. (2020). A new integral transform: Ara transform and its properties and applications, *Symmetry*, 12, Article ID 925.
- Saadatmandi, A., Dehghan, M. (2010). A new operational matrix for solving fractional-order differential equations, *Computers & Mathematics with Applications*, 59(3), 1326–1336.
- Shah, R., Farooq, U., Khan, H., Baleanu, D., Kumam, P., Arif, M. (2020). Fractional view analysis of third order Kortewege-De Vries equations, using a new analytical technique, *Frontiers in Physics*, 7, Article ID 244.
- Shah, R., Khan, H., Baleanu, D., Kumam, P., Arif, M. (2019). A novel method for the analytical solution of fractional Zakharov–Kuznetsov equations, *Advances in Difference Equations*, 2019(1), 1–14.
- Shah, R., Khan, H., Farooq, U., Baleanu, D., Kumam, P., Arif, M. (2019). A new analytical technique to solve system of fractional-order partial differential equations, *IEEE Access*, 7, 150037–150050.
- Shukla, A. K., Prajapati, J.C. (2007). On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 336(2), 797–811.
- Spiegel, M.R. (1965). *Theory and Problems of Laplace Transforms; Schaums Outline Series*, McGraw-Hill: New York, NY, USA.
- Srivastava, H.M., Golmankhaneh, A.K., Baleanu, D., Yang, X.-J. (2014). Local Fractional Sumudu Transform with Application to IVPs on Cantor Sets, *Abstr. Appl. Anal.*, 2014, 1–7.
- Sullivan, D.M. (1996). Z-transform theory and the FDTD method, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 44, 28–34.
- Sweilam, N. H., Khader, M. M., Al-Bar, R. F. (2007). Numerical studies for a multi-order fractional differential equation, *Physics Letters A*, 371(1-2), 26–33.
- Uçar, E., Özdemir, N., Altun, E. (2019). Fractional order model of immune cells influenced by cancer cells, *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 14(3).

- Uçar, S., Uçar, E., Özdemir, N., Hammouch, Z. (2019). Mathematical analysis and numerical simulation for a smoking model with Atangana-Baleanu derivative, *Chaos, Solitons & Fractals*, 118, 300–306.
- Ul Rahman, J., Lu, D., Suleman, M., He, J.H., Ramzan, M. (2019). He–Elzaki method for spatial diffusion of biological population, *Fractals*, 27, Article ID 1950069.
- Wang, B., Tahir, M., Imran, M., Javaid, M., Jung, C. Y. (2019). Semi analytical solutions for fractional Oldroyd-B fluid through rotating annulus, *IEEE Access*, 7, 72482–72491.
- Watugala, G.K. (1993). Sumudu transform: A new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 24, 35–43.
- Wazwaz, A. M. (2014). The variational iteration method for solving linear and nonlinear ODEs and scientific models with variable coefficients, *Central European Journal of Engineering*, 4(1), 64–71.
- Weerakoon, S. (1997). The Sumudu transform and the Laplace transform: Reply, *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 28, 159–160.
- Yavuz, M., Özdemir, N. (2020). Comparing the new fractional derivative operators involving exponential and Mittag-Leffler kernel, *Discrete & Continuous Dynamical Systems—S*, 13(3), 995–1006.
- Yang, X.-J., Yang, Y., Cattani, C., Zhu, M. (2017). A new technique for solving the 1-D burgers equation, *Therm. Sci.*, 21 (Suppl. S1), 129–136.
- Yu, L., Huang, M., Chen, M., Chen, W., Huang, W., Zhu, Z. (1998). Quasi-discrete Hankel transform, *Opt. Lett.*, 23, 409–411.
- Zhang, X., Juan, L. (2014). An analytic study on time-fractional Fisher equation using homotopy perturbation method, *Walailak Journal of Science and Technology (WJST)*, 11(11), 975–985.

KİŞİSEL YAYIN VE ESERLER

- Akyol, M., Demir, A., **Çetinkaya, S.** (2021). On the Solution of Mathematical Problem Including Sequential Time Fractional Wave Equation. *4th International E-Conference on Mathematical Advances and Applications*, İstanbul, Türkiye, 26-29 Mayıs 2021.
- Bayrak, M.A., Tabak, G., **Çetinkaya, S.**, Kodal Sevindir H. (2018). İkinci Mertabeden Bulanık Başlangıç değeri probleminin Homotopi analiz metodu ile çözümü. *UMTEB 3. Uluslararası mesleki ve teknik bilimler kongresi*, Gaziantep, Türkiye, 21-22 Haziran 2018.
- Çetinkaya, S.**, Kodal Sevindir, H., Yazıcı, C. (2018). Decision Tree Based Arrhythmia Classification. *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM2018)*, İstanbul, Türkiye, 20-24 Haziran 2018.
- Çetinkaya, S.**, Kodal Sevindir, H., Yazıcı, C. (2018). Comparison of Kernel Functions in Arrhythmia Classification. *INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS "An Istanbul Meeting for World Mathematicians" Minisymposium on Approximation Theory & Minisymposium on Math Education*, İstanbul, Türkiye, 3-6 Temmuz 2018.
- Çetinkaya, S.**, Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2018). Destek Vektör Makinaları İle Aritmi Sınıflandırması. *International Marmara Science and Social Sciences Congress*, Kocaeli, Türkiye, 23-25 Kasım 2018.
- Çetinkaya, S.**, Demir, A. (2019). The Analytic Solution of Time-Space Fractional Diffusion Equation via New Inner Product with Weighted Function, *Communications in Mathematics and Applications*, 10(4), 865-873.
- Çetinkaya, S.**, Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2019). Heart Attack Prediction by Using Support Vector Machine. *International Marmara Science and Social Sciences Congress 2019 SPRING*, Kocaeli, Türkiye, 26-28 Nisan 2019.
- Çetinkaya, S.**, Demir, A., Bayrak, M.A. (2019). The Analytic Solution of Initial Boundary Value Problem Including Space-Fractional Diffusion Equation. *International Marmara Science and Social Sciences Congress 2019 SPRING*, Kocaeli, Türkiye, 26-28 Nisan 2019.
- Çetinkaya, S.**, Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2019). Determination of Amyotrophic Lateral Sclerosis Disease using K Nearest Neighborhood Algorithm. *International Marmara Science and Social Sciences Congress 2019 SPRING*, Kocaeli, Türkiye, 26-28 Nisan 2019.
- Çetinkaya, S.**, Demir, A. (2019). Determination of Atrial Premature Beat by Using Adaboost Algorithm and Fractional Derivative. *10th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications (IWW2019)*, Kocaeli, Türkiye, 18-20 Ekim 2019.

- Çetinkaya, S., Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2019).** Performance Evaluation of Adaboost and Naive Bayes Algorithms for the Detection of Heart Attack. *10th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications (IWW2019)*, Kocaeli, Türkiye, 18-20 Ekim 2019.
- Çetinkaya, S., Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2019).** Detection of Parkinson's Disease via J48 Algorithm. *10th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications (IWW2019)*, Kocaeli, Türkiye, 18-20 Ekim 2019.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2019).** The Analytic Solution of Initial Boundary Value Problem Including Space-Time Fractional Diffusion Equation. *10th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications (IWW2019)*, Kocaeli, Türkiye, 18-20 Ekim 2019.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2019).** The Analytic Solution of Initial Boundary Value Problem Including Time-Fractional Diffusion Equation. *International Marmara Science and Social Sciences Congress 2019 AUTUMN*, Kocaeli, Türkiye, 1-3 Kasım 2019.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2019).** Detection of Premature Ventricular Contraction by Using Adaboost Algorithm and Fractional Derivative. *International Marmara Science and Social Sciences Congress 2019 AUTUMN*, Kocaeli, Türkiye, 1-3 Kasım 2019.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2020).** Time Fractional Diffusion Equation with Periodic Boundary Conditions, *Konuralp Journal of Mathematics*, 8(2), 337-342.
- Çetinkaya, S., Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2020).** The Analytic Solution of Initial Boundary Value Problem Including Time Fractional Diffusion Equation, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 35(1), 243-252.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2020).** Equation Including Local Fractional Derivative and Neumann Boundary Conditions, *Kocaeli Journal of Science and Engineering*, 3(2), 59-63.
- Çetinkaya, S., Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2020).** The Analytic Solution of Initial Periodic Boundary Value Problem Including Sequential Time Fractional Diffusion Equation, *Communications in Mathematics and Applications*, 11(1), 173-179.
- Çetinkaya, S., Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2020).** The Analytic Solution of Sequential Space-Time Fractional Diffusion Equation Including Periodic Boundary Conditions, *Journal of Mathematical Analysis*, 11(1), 17-26.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2020).** Time Fractional Equation with Non-homogenous Dirichlet Boundary Conditions, *Sakarya University Journal of Science*, 24(6), 1185-1190.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2020).** Diffusion Equation Including Local Fractional Derivative and Non-Homogenous Dirichlet Boundary Conditions, *Journal of Scientific Reports-A*, 45, 101-110.

- Çetinkaya, S., Demir, A. (2021).** Numerical Solutions of Nonlinear Fractional Differential Equations via Laplace Transform, *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*, 36(2), 249-257.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2021).** Solution of Hybrid Time Fractional Diffusion Problem via Weighted Inner Product, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 20(2), 17-27.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2021).** On Solutions of Hybrid Time Fractional Heat Problem, *Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica (New Series)*, 16(1), 49-62.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2021).** Sequential time space fractional diffusion equation including nonhomogenous initial boundary conditions, *Tbilisi Mathematical Journal*, 14(2), 83-91.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2021).** Sequential space fractional diffusion equation's solutions via new inner product, *Asian-European Journal of Mathematics*, 14(7), 1-12.
- Çetinkaya, S., Demir, A., Baleanu, D. (2021).** Analysis of Fractional Fokker-Planck Equation with Caputo and Caputo-Fabrizio derivatives, *Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series*, 48(2), 334-348.
- Çetinkaya, S., Demir, A., Kodal Sevindir, H. (2021).** Solution of Space-Time-Fractional Problem by Shehu Variational Iteration Method. *Advances in Mathematical Physics*, <https://doi.org/10.1155/2021/5528928>
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2021).** On the Solution of Bratu's Initial Value Problem in the Liouville-Caputo Sense by ARA Transform and Decomposition Method, *Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences*, 74(12), 1729-1738.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** Time fractional problem via inner product including weighted function, *J. BAUN Inst. Sci. Technol.*, 24(1), 91-99.
- Çetinkaya, S., Bayrak, M.A., Demir, A., Baleanu, D. (2022).** Solutions for The Fractional Mathematical Models of Diffusion Process, *Facta Universitatis Ser. Math. Inform.*, 37(1), 103-120.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** Numerical Solutions of Nonlinear System of Fractional Differential Equations via A New Integral Transform, *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 12(3), 1061-1068.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** Diffusion Equation including a Local Fractional Derivative and Weighted Inner Product, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 21(1), 19-27.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** Solutions of Fuzzy Time Fractional Heat Equation, *Journal of Mathematical Extension*, 16(6), 1-17.

- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** Hybrid Fractional Diffusion Problem with Dirichlet Boundary Conditions, *Journal of Mathematical Extension*, 15, Special Issue, NTFCA, 1-15.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** Effects of the ARA transform method for time fractional problems, *Mathematica Moravica*, 26(2), 73-84.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** On the Integral Transform Shehu for Nonlinear Fractional Problems, *Matematichki Bilten*, 46(1), 33-41.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** On the Sequential Fractional Initial Boundary Problem. *International Dumlupınar Science and Mathematics Congress*, Kütahya, Türkiye, 5-7 Eylül 2022.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** New approach for the solution of time fractional Fokker-Planck equation. *International Dumlupınar Science and Mathematics Congress*, Kütahya, Türkiye, 5-7 Eylül 2022.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2022).** Mathematics. Kasımoğulları, R., Manisa, K. (Ed.), *New Developments in Science and Mathematics* (1nd ed.) (421-507), İstanbul, Hiperyayın.
- Çetinkaya, S., Demir, A. (2023).** On the Solution of Time Fractional Initial Value Problem by a New Method with ARA Transform, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*, DOI: 10.3233/JIFS-223237
- Kodal Sevindir, H., Yazıcı, C., **Çetinkaya, S.** (2014). A Study on Physical Exercise Habit, *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 152, 648-652.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Şayli, Ö. (2015). Wavelet transform based noise removal from ECG signal for accurate heart rate detection using ECG. *2015 Medical Technologies National Conference (TIPTEKNO)*, Bodrum, Türkiye, 15-18 Ekim 2015.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Yazıcı, C. (2016). QRS Detection Based on Wavelet Transform. *8th International conference on Image Processing, Wavelet and Applications (IWW2016)*, İstanbul, Türkiye, 22-24 Eylül 2016.
- Kodal Sevindir, H., Sayın, N., Yazıcı, C., **Çetinkaya, S.** (2016). Colour Visual Cryptography Based on Discrete Wavelet Transform. *8th International conference on Image Processing, Wavelet and Applications (IWW2016)*, İstanbul, Türkiye, 22-24 Eylül 2016.
- Kodal Sevindir, H., Yazıcı, C., **Çetinkaya, S.** (2017). Image Inpainting by Shearlets and Wavelets via Elliptic Masking. *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAMM17*, İstanbul, Türkiye, 3-7 Temmuz 2017.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Yazıcı, C. (2017). On Choosing a Suitable Wavelet for ECG Artefact Reduction. *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAMM17*, İstanbul, Türkiye, 3-7 Temmuz 2017.

- Kodal Sevindir, H., Yazıcı, C., **Çetinkaya, S.** (2017). Image Inpainting Asymptotic Analysis for Horizontal Mask. *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAMM17*, İstanbul, Türkiye, 3-7 Temmuz 2017.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Yazıcı, C. (2017). On Problems of ECG Feature Extraction. *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAMM17*, İstanbul, Türkiye, 3-7 Temmuz 2017.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Yazıcı, C. (2017). Comparison among Wavelets for Preprocessing of ECG Signal. *9th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications*, Kars, Türkiye, 5-8 Kasım 2017.
- Kodal Sevindir, H., Yazıcı, C., **Çetinkaya, S.** (2017). On Applications of Image Inpainting with Elliptic Masking for Medical Images. *9th International Conference on Image Processing, Wavelet and Applications*, Kars, Türkiye, 5-8 Kasım 2017.
- Kodal Sevindir, H., Yazıcı, C., **Çetinkaya, S.** (2018). Asymptotic Analysis of an Affine Transformation in the Supply of Missing Data, *Sakarya University Journal of Science*, 22(6), 1544-1551.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Yazıcı, C. (2018). Makine öğrenmesi algoritmaları ve dalgacık dönüşümü ile EKG sinyalinden özellik çıkarımı, *Journal of Balıkesir University Institute of Science and Technology*, 20(1), 94-109.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Tabak, G. (2018). On Numerical Solutions of Fuzzy Differential Equations, *International Journal of Development Research*, 8(9), 22971-22979.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Tabak, G., Bayrak, M.A. (2018). Bulanık Cauchy problemlerinin sayısal çözümü. *UMTEB 3. Uluslararası mesleki ve teknik bilimler kongresi*, Gaziantep, Türkiye, 21-22 Haziran 2018.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Yazıcı, C. (2018). QRS Detection via machine learning algorithms. *INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS "An Istanbul Meeting for World Mathematicians" Minisymposium on Approximation Theory & Minisymposium on Math Education*, İstanbul, Türkiye, 3-6 Temmuz 2018.
- Kodal Sevindir, H., Yazıcı, C., **Çetinkaya, S.** (2019). Algorithmic Approaches for ECG Analysis, *Mathematical Modeling of Real World Problems: Interdisciplinary Studies in Applied Mathematics (143-197)*, NOVA Science Publishers.
- Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.**, Demir, A. (2021). On Effects of a New Method for Fractional Initial Value Problems, *Advances in Mathematical Physics*, <https://doi.org/10.1155/2021/7606442>
- Yazıcı, C., Kodal Sevindir, H., **Çetinkaya, S.** (2018). On Wavelet Selection for Inpainting Problem. *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM2018)*, İstanbul, Türkiye, 20-24 Haziran 2018.

Yazıcı, C., **Çetinkaya, S.**, Kodal Sevindir H. (2018). On Applications Of Multidimensional Affine Transform In The Supply Of Missing Data. *4th The International Conference On Analysis And Its Applications*, Kırşehir, Türkiye, 11-14 Eylül 2018.



ÖZGEÇMİŞ

İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2012 yılında Karaelmas Üniversitesi (Bülent Ecevit Üniversitesi) Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. 2013-2015 yılları arasında, Kocaeli Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 2013 yılından beri Kocaeli Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

