

78478

SONLU BOYUTLU İNTEGRALLENEBİLEN
HAMILTON SİSTEMLER

Filiz TAŞCAN

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

1998

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

**SONLU BOYUTLU İNTEGRALLENEBİLEN
HAMILTON SİSTEMLER**

Filiz TAŞCAN

**Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.**

Danışman: Yrd. Doç. Dr. M. Naci ÖZER

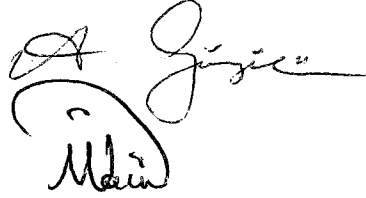
Haziran-1998

Filiz TAŞCAN'ın Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı
**"SONLU BOYUTLU İNTEGRALLENEBİLEN
 HAMILTON SİSTEMLER"**

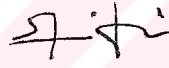
başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

26 / 06 / 1998

Üye: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

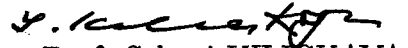


Üye: Yrd. Doç. Dr. M. Naci ÖZER



Üye: Yrd. Doç. Dr. İdris DAĞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun 30-06-1998 gün
 ve 98-11/9 sayılı kararıyla onaylanmıştır.


 Prof. Selami KILIÇKAYA
 Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde mekaniğe giriş anlamında temel kavramlardan ve fiziksel olayların matematiksel tanımlamalarından bahsedilerek Newton'un hareket kanunları ve korunumlu kuvvet alanları verilmiştir.

Tanımlanan mekanik sistemler ikinci bölümde sınıflandırılarak Lagrange mekaniği, konfigürasyon uzayı, Lagrange fonksiyonu ve Lagrange fonksiyonuna karşı gelen Lagrange denklemleri verilmiştir.

Bir sonraki bölüm Hamilton teoriye ayrılmıştır. Bu bölümde değişimlerin analizi kullanılarak Hamilton kanonik denklemleri çıkarılmış ve Poisson braket tanımlanmıştır. Poisson braket yardımıyla Hamilton sistemlerinin tam integrallenebilirliği tanımlanarak, integrallenebilirlik için bazı metodlar kısaca verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmada kullanılan, bozulma metodlarından biri olan çok boyutlu ölçü metodu verilmiş ve bu metod kullanılarak Hamilton sistemlerin tam integrallenebilirliği araştırılmıştır.

Son bölümde ise, kompleks koordinatlarda uygun bir kanonik dönüşüm tanımlanarak, Hamilton sistemlerin normal formları bulunmuştur. Bulunan bu sonuçlar, bir önceki bölümde çok boyutlu ölçü analizi uygulanarak bulunan Hamilton sistemleriyle karşılaştırılmıştır.

SUMMARY

This master thesis consists of five chapters.

In the first chapter, we recall some concepts about the introduction to mechanics and mathematical description of physical phenomena. Also, Newton's law of motion and conservative force fields are given.

Mechanics systems which are defined in the first chapter are classified in the second chapter. Lagrangian's mechanics is given together with configuration space, Lagrangian function and Lagrange equations of motions.

The following chapter is devoted to the Hamiltonian theory. Hamiltonian canonical equations are obtained, using calculus of variations and the Poisson bracket is defined. Then complete integrability of finite dimensional Hamiltonian systems is given by using the Poisson bracket. Finally some known methods of integrability are sketched.

In the fourth chapter, we introduce the multiple scales method which is one of the perturbation method to determine approximate solutions of nonlinear ordinary differential equations. Then using this method the complete integrability of Hamiltonian systems of polynomial type is studied.

In the last chapter, defining an appropriate canonical transformation in the complex coordinates the normal forms of Hamiltonian systems are obtained. Then the results are compared with the Hamiltonian systems found by using multiple scales method in chapter four.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında bana rehberlik eden, büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli hocam,

Yrd. Doç. Dr. M. Naci ÖZER' e

teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yaşamım boyunca her türlü maddi ve manevi fedakarlığı yapan, her zaman yanımda olan ve bana her konuda yardımcı olan, başta rahmetle andığım babama ve tüm aileme şükranlarımı sunarım.

Eskişehir, 1998

Filiz TAŞCAN

İçindekiler

1	Mekanik	2
1.1	Giriş	2
1.2	Mekanik ve Aksiyomları	3
1.2.1	Mekanik'in Aksiyomları	3
1.3	Serbestlik Dereceleri (Degrees of Freedom)	4
1.4	Newton' un Hareket Kanunları	8
1.5	Newton Dinamiği	9
1.5.1	İş	9
1.5.2	Güç	10
1.5.3	Potansiyel Enerji	10
1.5.4	Kinetik Enerji ve İş	10
1.6	Korunumlu Kuvvet Alanı	11
1.6.1	Potansiyel Enerji	11
1.6.2	Enerjinin Korunumu	12
1.6.3	Momentumun Korunumu	12
1.7	Bir Cismin Denge de Olması veya Durması	13
1.8	Kısıtlanmış (Constrained) Hareket	13
1.9	Diferensiyel Denklemlerin Otonomus Sistemi	14
1.9.1	Dinamik Sistem	14
1.10	Tezin İçeriği	15

2	Lagrange Denklemleri	17
2.1	Giriş	17
2.2	Genelleştirilmiş Koordinatlar	17
2.3	Denklemlerin Dönüştürülmesi	18
2.4	Mekanik Sistemlerin Sınıflandırılması	19
2.4.1	Skleronomik ve Reonomik Sistemler	19
2.4.2	Holonomik ve Non-Holonomik Sistemler	19
2.4.3	Korunumlu ve Korunumsuz Sistemler	19
2.5	Konfigürasyon Uzayı	20
2.6	Hareketin Lagrange denklemleri	20
2.7	Tanecik Sistemleri İçin Lagrange Denklemleri	25
2.8	Korunumlu (Tutarlı) Kuvvetler	28
2.9	Genelleştirilmiş Momentum	31
2.10	Hız Bağımlı Potansiyeller	32
2.11	Korunumluluk (Tutarlılık) Kanunları	34
2.11.1	Lineer Momentumun Korunumu	34
2.11.2	Enerjinin Korunumu	34
2.12	Lagrange Denklemlerinin Koordinat Dönüşümleri Altında Değişmezliği	36
3	Hamilton Denklemleri ve Tam İntegrallenebilirlik	37
3.1	Giriş	37
3.2	Değişimlerin Analizi	38
3.3	Hamilton Kanonik Denklemleri	40
3.4	Poisson Braket	42
3.5	Tam İntegrallenebilirlik	44
3.5.1	Liouville-Arnold Teoremi	45
3.6	Kanonik Dönüşümler	50

3.6.1	Bir Dönüşümün Kanonik Olma Şartı	50
4	Bozulma (Pertürbasyon) Teorisi	56
4.1	Giriş	56
4.2	Bozulma Metodu	57
4.3	Çok Boyutlu Ölçü Metodu	60
4.4	İki Vektör Alanının Komütatörlüğü	65
4.5	Hamilton Fonksiyonları ve Kanonik Poisson Braket	66
4.6	Henon-Heiles Sistemi ve İntegrallenebilme Durumları	68
4.6.1	2 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi	69
4.6.2	3 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi	70
4.7	Çok Boyutlu Ölçü Analizi	72
4.7.1	2 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi	72
4.7.2	Rezonans Durumları	75
4.7.3	Daha Genel Açılım	82
4.7.4	3 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemde Çok Boyutlu Ölçü Analizi	83
4.7.5	Rezonans Durumları	86
4.8	Sonuç	92
4.9	Örnek REDUCE Programı	93
5	Sonlu Boyutlu Hamilton Sistemler İçin Normal Form	95
5.1	Giriş	95
5.2	Hamilton Sistemlerin İndirgenmesi	96
5.2.1	X_{H_0} Vektör Alanının Çekirdeği	97
5.3	Normal Form	99
5.4	Çok Boyutlu Ölçü Analizinde Bulunan Hamilton fonksiyonları ile Karşılaştırma	105

5.4.1	1 Serbestlik Dereceli Sistemler	105
5.4.2	2 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi	106
5.4.3	3 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi	107
5.5	Sonuç	107
5.6	Örnek MATHEMATICA Programı	108
Kaynaklar		108



Bölüm 1

Mekanik

1.1 Giriş

Uygulamalı matematik, güncel hayatta karşılaşılan problemleri matematiksel olarak ifade eden, onları matematiksel kuralları kullanarak veya yeni kurallar icad ederek çözmeye çalışan bir bilim dalıdır. Böyle problemlerin formüle edilmesinde, genel olarak matematiksel ifadeler bulmak için problemlerin ifadesini basitleştirmek gerekir. Bundan sonra da hangi şartlar veya kabuller altında tam olarak hangi problemin çözüleceğini belirlemek önemlidir. Sonuçlarla kabullerin birbirleriyle gelişmemelerine dikkat edilmelidir. Başka bir deyişle olayları matematiksel olarak modellemek gerekir.

Fiziksel olayların matematiksel tanımlanması çoğu zaman gerçek fiziksel birimlerin uygun matematiksel modellerle değiştirilmesi ile basitleştirilebilir. Biz bu giriş bölümünde, mekanik, mekaniğin aksiyomları ve mekanikteki bazı temel kavramları kısaca vereceğiz.

1.2 Mekanik ve Aksiyomları

Fiziksel cisimlerin pozisyonundaki değişimi veya hareketleri ile ilgilenen fiziğin bir dalına **mekanik** denir.

1.2.1 Mekaniğin Aksiyomları

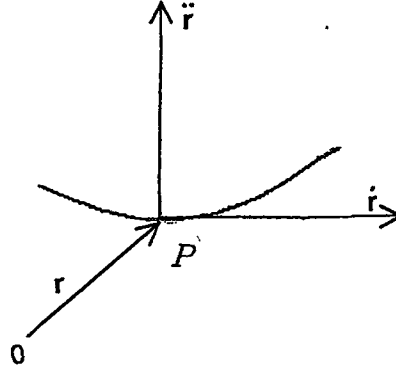
Herhangi bir bilim dalı olarak mekaniğin aksiyomatik gelişimi aşağıdaki temel kavramlardan oluşur.

- i) **Tanımsız Terimler veya Kavramlar:** Herhangi bir tanım, açık olarak tanımsız kalan bazı kavramlar üzerine kurulabilir.
- ii) **İspatlanmamış İddialar:** Bunlar, çalışmalar sonucunda olayların geçerli tanımlamalarına ulaşılacağı beklenen, genel olarak matematiksel formda olan temel ifadeler, yani iddialardır. Genelde bu iddialar, deneysel gözlemler veya onlardan çıkarılan bilgilere dayalı aksiyomlar veya varsayımlardır. Böyle durumlardaki iddialar çoğu zaman kanunlar olarak bilinirler.
- iii) **Tanımlanmış Terimler veya Kavramlar:** Bu tanımlar, tanımlanmamış terimler veya kavramlar kullanılarak verilirler.
- iv) **İspatlanmış İddialar:** Çoğu kez bunlar teoremler olarak adlandırılırlar ve tanımlarla, aksiyomlardan yararlanarak ispatlanırlar.

Mekanik; dinamik, statik ve kinematik olmak üzere üç kısımda incelenebilir.

Dinamik, bir cismin hareketinin fiziksel sebepleriyle ilgilenirken, statik, bir cismin hangi şartlar altında hareketsiz kaldığı konularıyla ilgilenir. Kinematik ise, bir cismin uzaydaki konumunun ve sebepleri gözönüne alınmaksızın hareketinin belirlenmesiyle ilgilenir. Örneğin, P noktasındaki bir cismin yer (pozisyon) vektörü $\mathbf{r}(t)$ ise, hız vektörü, $\dot{\mathbf{r}}(t) = d\mathbf{r}/dt$ ve ivme vektörü,

$\ddot{\mathbf{r}}(t) = d^2\mathbf{r}/dt^2$ olarak tanımlanır.



Şekil 1.1

1.3 Serbestlik Dereceleri (Degrees of Freedom)

Bir mekanik sistemi tanımlamak için, taneciklerin (cisimlerin) sayılarına ve sağlamak zorunda oldukları şartlara bağlı olan belirli sayıda koordinatlara ihtiyaç vardır.

Tanım 1.1 Bir veya daha çok sayıdaki taneciklerin oluşturduğu sistemin yerini belirlemek için gerekli olan koordinatların sayısına, sistemin **serbestlik derecelerinin sayısı** denir. Bu koordinatlar genelde $q_1, q_2, \dots, q_n$ olarak gösterilir.

Örnek 1.1 a) Düzlemde serbest olarak hareket edebilen N taneciğin bir sistemini düşünelim. Her bir taneciğin yerini düzlemde tanımlamak için 2 koordinata ihtiyaç vardır. Dolayısıyla bütün N taneciğin pozisyonunu belirlemede ihtiyaç duyulan koordinat sayısı $2N$ tanedir. Yani bu sistemin serbestlik derecesi $2N$ veya bu sistem $2N$ serbestlik derecelidir.

b) Uzayda bağımsız olarak hareket edebilen N taneciğin bir sistemini düşünelim. Her bir taneciğin yerini uzayda tanımlamak için 3 koordinata ihtiyaç vardır. Mesela i . tanecik için (x_i, y_i, z_i) kartezyen koordinatını alabiliriz. Öyleyse, N tanecik için $3N$ tane koordinata ihtiyaç vardır. Böylece, bu sistem

$3N$ serbestlik derecelidir denir.

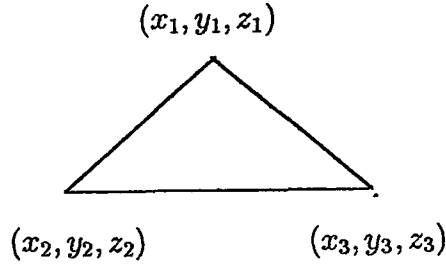
c) Herhangi iki tanesi arasındaki uzaklığı sabit olan 3 taneciğin uzaydaki hareketini inceleyelim. Aşağıdaki şekilden de görüleceği gibi,

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = s_{bt}.$$

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = s_{bt}.$$

$$(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 = s_{bt}.$$

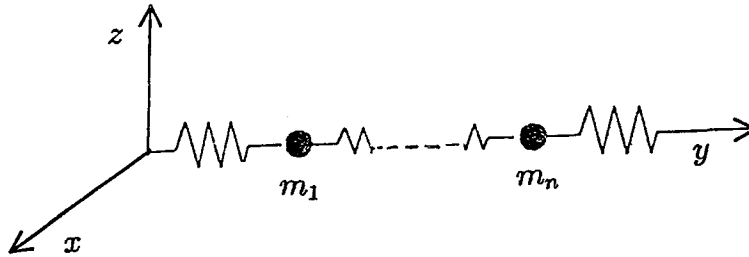
alınabilir.



Şekil 1.2

Normalde uzaydaki 3 tanecik için ihtiyaç duyulan koordinat sayısı 9 tanedir. Fakat verilen şartlar altında 3 koordinat, diğer 6 koordinat ile ifade edilebileceğinden, hareketi tanımlamak için 6 bağımsız koordinata gerek vardır. Yani, bu hareketi belirleyen mekanik sistem 6 serbestlik derecelidir.

d) Değişik şartlarda yaylarla birleştirilmiş n tanecik sırasıyla $n, 2n, 3n$ serbestlik derecelidir. Başka bir deyişle, y eksenini için n , xy düzlemi için $2n$, xyz uzayı için $3n$ (hiçbir şart yoksa) serbestlik derecelidir.



Şekil 1.3

Bir taneciğin hareketini tanımlamak için belli koordinat sistemlerine ihtiyaç vardır. Aşağıdaki örnekte bazı koordinat sistemlerini hatırlatacağız.

Örnek 1.2 a) İlk olarak kartezyen koordinat sistemini ele alalım. Bu koordinat sisteminde $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, birim vektörler olmak üzere, taneciğin yer vektörü

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t), y(t), z(t)),$$

hız vektörü

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{x}(t)\mathbf{i} + \dot{y}(t)\mathbf{j} + \dot{z}(t)\mathbf{k} \implies |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2,$$

ve ivme vektörü

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \ddot{x}(t)\mathbf{i} + \ddot{y}(t)\mathbf{j} + \ddot{z}(t)\mathbf{k},$$

şeklinde tanımlanır.

b) Kutupsal koordinatla, kartezyen koordinatlar arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} \tan \theta &= y/x & \Rightarrow & x = r \cos \theta \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2} & & y = r \sin \theta \end{aligned}$$

olarak tanımlandığından, taneciğin kutupsal koordinatlardaki yer vektörü

$$\mathbf{r} = r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}),$$

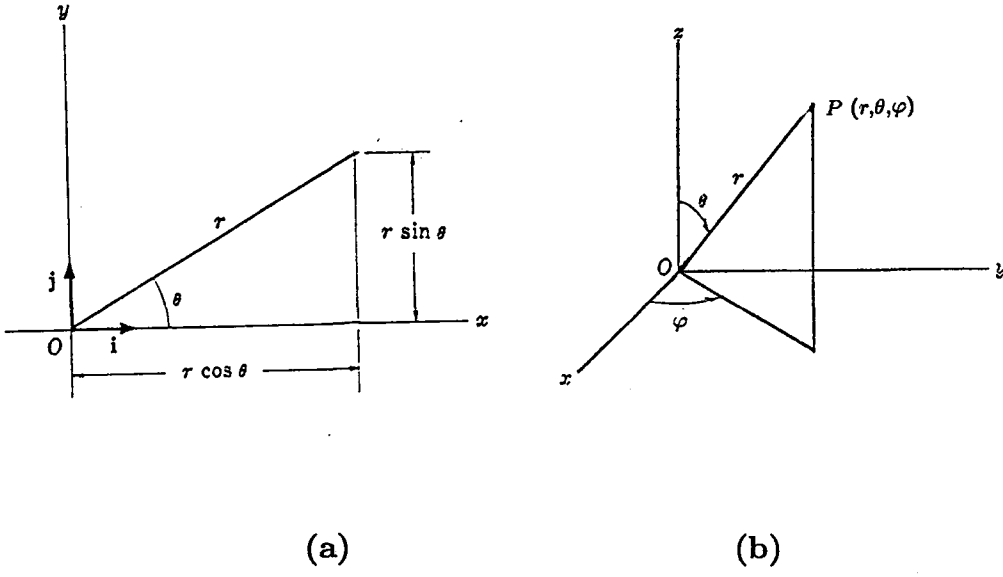
hız vektörü

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) + r\dot{\theta}(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \implies |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2,$$

ve ivme vektörü

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})(-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}),$$

şeklinde tanımlanır (Şekil 1.4 (a) ya bakınız).



Şekil 1.4

c) Küresel ve kartezyen koordinatlar arasındaki ilişki

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned} \quad (1.1)$$

olarak tanımlanır. Burada ifadelerde kısaltma sağlamak amacıyla

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{r}} &= \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}, \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}, \\ \hat{\varphi} &= -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

alınır ise, taneciğin yer vektörü

$$\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}, \quad (1.3)$$

hız vektörü

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\theta} + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\varphi},$$

ve ivme vektörü

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} + (r\dot{\varphi} \sin\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta)\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

şeklinde yazılabilir (Şekil 1.4 (b) ye bakınız).

1.4 Newton' un Hareket Kanunları

1867 de Sir İsaac Newton tarafından ortaya atılan aşağıdaki hareketin üç kanunu mekaniğin temel aksiyomları olarak kabul edilmektedir.

i) Her sistem, herhangi bir kuvvet zorlamadıkça dengede kalır veya düzgün (sabit hızla) hareket eder.

ii) Eğer m kütleli bir cisme etki eden kuvvet $\mathbf{F}$ ve bu etki sonucunda cismin hızı $\mathbf{v}$ ise, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ momentum olmak üzere, kuvvet ile momentum arasındaki bağıntı,

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1.4)$$

denklemleri ile tanımlanır. Eğer m kütlesi t zamanından bağımsız ise, (1.4) formülü a cismin ivmesi olmak üzere,

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} \quad (1.5)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Yani bir cisme etkiyen kuvvet, cisme kuvvetle doğru orantılı, cismin kütlesi ile ters orantılı bir ivme kazandırır.

iii) Eğer bir cisim ikinci bir cisme, cisimleri birleştiren doğru boyunca bir doğrultuda $\mathbf{F}_{12}$ kuvveti ile etkiyorken, ikinci cisim birinci cisme $\mathbf{F}_{21}$ kuvveti ile etkiyorsa $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ dir. Başka bir deyişle, herhangi bir etkiye karşı daima eşit ve zıt yönlü bir tepki vardır veya iki cismin karşılıklı etkisi daima eşit fakat zıt yönlüdür.

1.5 Newton Dinamiği

Dinamikte bir tek tanecik için Newton' un ikinci hareket kanunundan hız ve yol cinsinden $\ddot{\mathbf{r}}$ ivmesi; m , kütle ve $\mathbf{F}$, kuvvet olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m \dot{\mathbf{r}}) &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \\ m \ddot{\mathbf{r}} &= \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})\end{aligned}\quad (1.6)$$

olarak ifade edilebilir. Bu denkleme, bir tanecik için **hareket denklemi** adı verilir.

1.5.1 İş

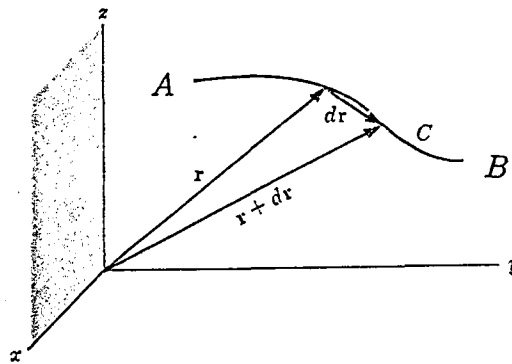
Eğer bir cisme etki eden $\mathbf{F}$ kuvveti, cisme $d\mathbf{r}$ yer değiştirmesini veriyorsa cisme etki eden kuvvetin yaptığı iş,

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.7)$$

şeklinde tanımlanır. Böylece Şekil 1.5 deki C eğrisi boyunca, A noktasından B noktasına hareket eden bir cisim için $\mathbf{F}$ kuvvet alanı tarafından yapılan toplam iş,

$$W = \int_C \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} \quad (1.8)$$

integrali ile tanımlanır.



Şekil 1.5

1.5.2 Güç

Bir cisme etki eden kuvvetin yaptığı işin zamana göre değişimi çoğu zaman cisme etki eden ani güç veya kısaca **güç** olarak isimlendirilir. W ve P sembolleri sırasıyla iş ve gücü göstermek üzere, iş ve güç arasındaki bağıntı

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (1.9)$$

şeklindedir. Eğer $\mathbf{F}$, cisme etki eden kuvvet ve $\mathbf{v}$ cismin hızı ise güç, kuvvet ve hıza bağlı olarak

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (1.10)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

1.5.3 Potansiyel Enerji

Bir cismin herhangi bir kuvvet alanındaki yeri ve durumu nedeni ile iş yapabilme yeteneğine **potansiyel enerji** denir. Örneğin, yerçekim kuvvet alanı içinde yerden h yüksekliğinde bulunan bir cismin potansiyel enerjisi,

$$V = mgh$$

olarak verilir. Burada g , yer çekimi ivmesidir.

1.5.4 Kinetik Enerji ve İş

Newton dinamiğinde bir taneciğin hareketini belirleyen (1.6) denkleminin her iki tarafını $\dot{\mathbf{r}}$ ile çarparsak

$$m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m (\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \right) = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

buluruz. Öyleyse (1.8) eşitliğinden A ve B noktalarını birleştiren C eğrisi boyunca yapılan iş,

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt = \left[\frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{r}}|^2 \right]_A^B$$

olarak hesaplanır. Buradaki

$$T = \frac{1}{2}m |\dot{\mathbf{r}}|^2,$$

ifadesi, taneciğin **kinetik enerjisi** olarak tanımlanır. Dolayısıyla yapılan iş,

$$W = T_B - T_A = T_2 - T_1 \quad (1.11)$$

yani kinetik enerjideki değişimdir.

Örnek 1.3 Kinetik enerji, kartezyen koordinatlarda

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

kutupsal koordinatlarda

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2),$$

ve küresel koordinatlarda

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi}^2),$$

şeklinde ifade edilebilir.

1.6 Korunumlu Kuvvet Alanı

Eğer bir noktadan diğer bir noktaya bir cismin hareketinde bir kuvvet alanı tarafından yapılan iş, noktaları birleştiren yoldan bağımsız ise kuvvet alanına **korunumlu kuvvet alanı** veya kısaca **korunumludur** denir.

1.6.1 Potansiyel Enerji

$\mathbf{F} = -\nabla V$ denklemini sağlayan V skalerine, korunumlu kuvvet alanı $\mathbf{F}$ olan bir cismin **potansiyel enerjisi** denir. Bu durumda A noktasından B nok-

tasına yapılan toplam iş potansiyel enerjideki değişim olarak

$$W = \int_A^B \mathbf{F} d\mathbf{r} = V(A) - V(B) = V_1 - V_2 \quad (1.12)$$

şeklinde yazılabilir.

1.6.2 Enerjinin Korunumu

Kinetik enerji ile potansiyel enerjinin toplamı olan

$$E = T + V$$

değerine **toplam enerji** denir.

Korunumlu kuvvet alanı için (1.11) ve (1.12) denklemlerinden

$$W = T_2 - T_1 = V_1 - V_2$$

veya

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

olacaktır. $T_i = \frac{1}{2}mv_i^2$ ($i = 1, 2$) şeklinde tanımlandığında

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2$$

yazılabilir. Buradan, A noktasındaki toplam enerji B noktasındaki toplam enerjiye eşittir. Bu ise bize, **enerjinin korunumunu** ifade eder.

1.6.3 Momentumun Korunumu

Eğer Newton' un ikinci hareket kanununda $\mathbf{F} = 0$ alınırsa

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \text{sbt.}$$

bulunur. Yani, bir cisme etki eden net dış kuvvet sıfır ise momentum değişmeyecektir. Buna da **momentumun korunumu prensibi** denir.

1.7 Bir Cismin Dengede Olması veya Durması

Bir cismin hareketinin önemli bir özel hali, cismin bir koordinat sistemine göre dengede olması veya durması şeklinde ortaya çıkar. Newton' un ikinci hareket kanunundan böyle bir durum için gerek ve yeter şart $\mathbf{F} = 0$, yani cisme etki eden net dış kuvvetin sıfır olmasıdır. Eğer kuvvet alanı V potansiyeline sahip olan korunumlu bir kuvvet alanı ise, cismin bir noktada dengede kalması için gerek ve yeter şart bu noktada

$$\nabla V = 0$$

yani

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

olmasıdır.

1.8 Kısıtlanmış (Constrained) Hareket

Uzayda bağımsız olarak hareket etmeyen bütün taneciklerin hareketine kısıtlanmış hareket denir.

Eğer biz, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ $3N$ koordinatlı yer vektörleri ve $\alpha = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere, $f_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = 0$ m tane şartlı N taneciğe sahipsek, cismin hareketini belirlemek için gerekli serbestlik dereceleri $3N - m$ olacaktır. Böyle n tane koordinat cinsinden $\mathbf{r}$ yer vektörlerinin parametrik gösterimi,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

şeklindedir.

Örnek 1.4 Uzayda bir cismin, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ denklemi ile verilen birim küre üzerinde hareket ettiğini kabul edelim. Normalde uzaydaki bir noktanın yerini

belirlemek için (x, y, z) şeklinde 3 tane koordinata ihtiyaç vardır. Burada bu koordinatlar arasında $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ şartı verildiğinden, bir koordinat diğer ikisine bağlı olarak ifade edilebilir. Öyleyse bu cismin hareketini belirlemek için gerekli serbestlik derecesi $3 - 1 = 2$ dir.

1.9 Diferensiyel Denklemlerin

Otonomus Sistemi

Kartezyen koordinatlarda, f_i , f fonksiyonunun bileşenleri olmak üzere,

$$\ddot{x}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.13)$$

diferensiyel denkleminde f_i bileşen fonksiyonları t zamanına bağlı değil ise bu denklemlere **otonomus diferensiyel denklemleri** adı verilir.

Eğer $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ vektör değerli fonksiyonu (1.13) otonomus diferensiyel denklemini sağlıyorsa, bu fonksiyona denklemin bir çözümü denir. Bu denklem için başlangıç değer probleminin bir tek çözümünün bulunabilmesi için, $\mathbf{r}(0) = (a_1, a_2, a_3)$ başlangıç pozisyonu ile $\dot{\mathbf{r}}(0) = (b_1, b_2, b_3)$ başlangıç hızının verilmesi gerekmektedir.

1.9.1 Dinamik Sistem

İkinci mertebeden (1.5) Newton denklemleri $\dot{x}_i = y_i$ tanımı ile

$$\dot{y}_i = \ddot{x}_i = f_i(x_i, \dot{x}_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.14)$$

birinci mertebeden bir sistem olarak yazılabilir. Böylece 3 tane ikinci mertebeden denklem yerine 6 tane birinci mertebeden denklem bulunur. Bu denklem sistemi,

$$\dot{z}_i = Z_i(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1.15)$$

genel dinamik sisteminin bir özel halidir.

İlerleyen bölümlerde dinamik sistemlerde Lagrange ve Hamilton fonksiyonlarından bulunan hareket denklemlerinin çözümleri ile ilgileneceğimizden şimdi dinamik sistemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini garanti eden teoremi ispatsız olarak ifade edeceğiz.

Teorem 1.1 (Varlık ve Teklik) Eğer (1.15) denkleminde Z_i fonksiyonları ve $\frac{\partial Z_i}{\partial z_j}$ birinci kısmi türevleri sürekli ise $(z_1^0, \dots, z_n^0)$ sayılarının herbirisi için (1.15) denkleminin $t_1 < t < t_2$ olmak üzere, $t = 0$ için $z_i(0) = z_i^0$, başlangıç şartını sağlayan tek bir çözümü vardır. Varlık için Z_i fonksiyonlarının sürekli olmaları yeterlidir[29].

(1.14) denklem sistemi için başlangıç şartları

$$x_i(0) = a_i \equiv x_i^0, \quad \dot{x}_i = b_i,$$

veya

$$y_i = b_i \equiv y_i^0,$$

şeklinde tanımlanır. Böylece Z_i fonksiyonları, $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere z_i koordinatlı n boyutlu uzayda bir vektör alanı tanımlar. Ayrıca, $\dot{z}_i$, hız vektörünün bileşeni olduğundan Z_i bir hız vektör alanı da tanımlar.

Bir $z_i(t)$ çözümü, verilen z_i^0 teğet vektör alanı için parametrelendirilmiş bir eğridir. Bu tür çözüm eğrilerine **trajektörler** ya da **orbitler (yörüngeler)** denir.

1.10 Tezin İçeriği

Bu tezin kalan bölümleri dört başlıktan oluşmaktadır: Lagrange Denklemleri, Hamilton Denklemleri ve Tam İntegrallenebilirlik, Bozulma Teorisi, Sonlu Boyutlu Hamilton Sistemler için Normal Form.

İkinci bölümde, mekanik sistemler sınıflandırılarak Lagrange mekaniği tanımlanmıştır ve dinamik sistemlerde Lagrange fonksiyonları ve hareket denklemleri bulunmuştur. Ayrıca, korunumlu sistemler için potansiyel ve kinetik enerji tanımları verilmiştir.

Bir sonraki bölümde ise, değişimlerin analizinden Hamilton hareket denklemleri çıkarılarak Hamilton sistemlerde tam integrallenebilme tanımlanmıştır. Kanonik dönüşümler tanımlanarak, bir dönüşümün kanonik olma koşulu incelenmiştir. Ayrıca sonlu boyutlu Hamilton sistemlerin integrallenebilirliğini göstermek için kullanılan bazı metodlar kısaca açıklanmıştır.

Bozulma metodu dördüncü bölümde kısaca açıklanarak, bir bozulma metodu olan çok boyutlu ölçü metodu detaylı olarak incelenmiştir. Bu metod özel olarak Duffing denkleminde ve Henon-Heiles sistemlerine uygulanmıştır. Ayrıca, çok boyutlu ölçü metodunu kullanarak bulunan amplitüt denklemleriyle tanımlanan vektör alanlarının komütatörlüğü kontrol edilerek, verilen sistemin integrallenebilirliği tartışılmıştır. Hesaplamalarımızın büyük bir bölümü, REDUCE [13] paket programı kullanılarak yapılmış olup, hazırladığımız REDUCE programının bir örneği bölüm sonunda verilmiştir.

Son bölümde de, dördüncü bölümde ilgilendiğimiz Hamilton fonksiyonları, uygun dönüşüm tanımlanarak normal form adı verilen daha basit forma indirgenmiştir. Bu dönüşümden çıkarılan Hamilton fonksiyonlarının normal formları, bir önceki bölümde çok boyutlu ölçü metodundan çıkarılan Hamilton fonksiyonları ile karşılaştırılmıştır. Normal form hesaplamalarının çoğu MATHEMATICA [36] paket programı ile yapılmış olup, bölüm sonunda bir örnek MATHEMATICA programı kısaca verilmiştir.

Bölüm 2

Lagrange Denklemleri

2.1 Giriş

Şimdiye kadar, Newton'un hareket kanunları ile mekanikteki problemlerin matematiksel modellerinin kurulmasıyla ilgilenildi. Bu genel durumdan başka mekaniğin incelenmesini, özel olarak Lagrange ve Hamiltona göre de yapmak mümkündür. Lagrange mekaniği, bir mekanik sistemde konfigürasyon uzayı vasıtasıyla hareketi tanımlar. Yani, bir Lagrange mekanik sistemi konfigürasyon uzayı ve Lagrange fonksiyonu ile birlikte verilir.

Bu bölümde, genelleştirilmiş koordinatlar kısaca verilerek konfigürasyon uzayı tanımlandıktan sonra Lagrange hareket denklemleri çıkarılmıştır. Ayrıca korunumluluk kanunlarından, momentum ve enerjinin korunumluluğu incelenmiştir.

2.2 Genelleştirilmiş Koordinatlar

N tane cismin oluşturduğu bir sistemin uygun şartlar altında hareket ettiğini kabul edelim. Bu durumda hareketi belirlemek için minimum sayıda bağımsız

koordinatlara ihtiyaç vardır.

$$q_1, q_2, \dots, q_n \quad (2.1)$$

ile gösterilen bu koordinatlar; uzaklıklar, açılar ve onların arasındaki bağıntılar olabilir ve **genelleştirilmiş koordinatlar** olarak adlandırılır. Genelleştirilmiş koordinatların sayısı olan n ye **serbestlik derecesinin sayısı** denir. **Genelleştirilmiş hızlar** ise,

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n \quad (2.2)$$

ile gösterilir. Koordinatlar üzerindeki noktalar t ye göre birinci türevi göstermektedir.

2.3 Denklemlerin Dönüştürülmesi

xyz koordinat sisteminde k . taneciğin pozisyon vektörü,

$$\mathbf{r}_k = x_k \mathbf{i} + y_k \mathbf{j} + z_k \mathbf{k}$$

olsun. Bu durumda (2.1) genelleştirilmiş koordinatları ile pozisyon vektörünün koordinatları arasındaki ilişki, t zamanı göstermek üzere;

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ y_k &= y_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ z_k &= z_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

dönüşüm denklemleri ile verilir. (2.3) denklemleri vektör formda ,

$$\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada fonksiyonların sürekli ve sürekli türevlere sahip oldukları kabul edilmektedir.

2.4 Mekanik Sistemlerin Sınıflandırılması

Mekanik sistemler, tanımları aşağıda verilecek olan skleronomik veya reonomik, holonomik veya non-holonomik, korunumlu veya korunumsuz şeklinde sınıflandırılır.

2.4.1 Skleronomik ve Reonomik Sistemler

Çok sayıda önemli mekanik sistemlerde, bazen t zamanı (2.3) veya (2.4) denklemlerinde tam olarak bulunmaz. Böyle sistemlere **skleronomik sistemler** denir. Bazen de, kısıtlandırılmış (şartlı) hareket içeren sistemlerde olduğu gibi, t zamanı tam olarak bulunur. Böyle sistemlere de **reonomik sistemler** denir.

2.4.2 Holonomik ve Non-Holonomik Sistemler

$q_1, q_2, \dots, q_n$ bir sistemi tanımlayan genelleştirilmiş koordinatları ve t de zamanı gösterebilir. Eğer sistemin bütün kısıtlamaları $\phi(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = 0$ şeklindeki veya eşdeğer formdaki denklemlerle ifade edilebiliyorsa bu sisteme **holonomik**, aksi halde **non-holonomik** denir.

2.4.3 Korunumlu ve Korunumsuz Sistemler

Eğer taneciklerin bir sistemine etki eden bütün kuvvetler bir V potansiyel fonksiyonundan çıkarılabiliyorsa sisteme **korunumludur** aksi halde **korunumsuzdur** denir.

2.5 Konfigürasyon Uzayı

n tane tanecik için herbiri $\mathbb{R}^3$ te bir noktayı gösteren $q_1, q_2, \dots, q_n$ şeklinde belirtilen n boyutlu uzaya **konfigürasyon uzayı** denir.

$$q_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

olacak şekilde n tane dönüşüm konfigürasyon uzayına

$$q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad N = 3n$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanır. Dolayısıyla biz, sistemin hareketini $\mathbb{R}^3$ te birçok yolla göstermek yerine N boyutlu uzayda bir yolla göstebiliriz.

2.6 Hareketin Lagrange denklemleri

Newton mekaniğini içeren denklemlerin genel bir kümesi; elektromanyetik alan teorisi, quantum alan teorisi, dalgalar vb. alan teorilerini içerir. Biz kinetik enerji ile başlayalım.

3 boyutlu uzayda hareket eden bir tanecik için kartezyen koordinatlardaki kinetik enerjisi

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

şeklinde tanımlanmıştı. Şimdi $\mathbb{R}^3$ de (q_1, q_2, q_3) gibi başka bir koordinat sistemini düşünelim. Bu koordinat sisteminde $x(q_1, q_2, q_3)$, $y(q_1, q_2, q_3)$, $z(q_1, q_2, q_3)$ olduğundan, bu cismin yeri

$$\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3) = x(q_1, q_2, q_3) \mathbf{i} + y(q_1, q_2, q_3) \mathbf{j} + z(q_1, q_2, q_3) \mathbf{k}$$

vektör değerli fonksiyonu ile tanımlanacaktır. Dolayısıyla $\dot{\mathbf{r}}$; q_i genelleştirilmiş koordinatları ve $\dot{q}_i$ genelleştirilmiş hızlarının bir fonksiyonu olarak,

$$\dot{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \dot{q}_3$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \quad (2.5)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_k \partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q_i \partial q_k} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) \quad (2.6)$$

yazılabilir. Newton'un

$$\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{r}}$$

ikinci hareket kanunundan, cismin yer değiştirmesi sırasında kuvvetler tarafından yapılan iş

$$W = \mathbf{F} d\mathbf{r},$$

ve $\mathbf{r}$ yer vektörünün diferensiyeli

$$d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} dq_k$$

olduğundan (2.5) ve (2.6) denklemleri kullanılarak, W ifadesi yeniden yazıldığında

$$\begin{aligned} W &= m \ddot{\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= m \ddot{\mathbf{r}} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} dq_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^3 m \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) - \dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) \right) dq_k \\ &= \sum_{k=1}^3 m \left(\frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \dot{\mathbf{r}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) \right) dq_k \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} \right) \right) dq_k \\ &= \sum_{k=1}^3 \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \right) dq_k \end{aligned} \quad (2.7)$$

elde edilir. Aynı zamanda W için

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} d\mathbf{r} \\ &= \sum_{k=1}^3 \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} dq_k \end{aligned} \quad (2.8)$$

eşitliği de yazılabilir. Eğer,

$$Q_k = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k}$$

olarak tanımlanırsa (2.8) denklemi

$$W = \sum_{k=1}^3 Q_k dq_k \quad (2.9)$$

haline gelir. (2.7) ve (2.9) eşitliklerinden yapılan işin birbirine eşit olması gerektiğinden

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

denklemini buluruz. Bu son denkleme, kinetik enerji için **Lagrange denklemi** denir. Bu, kinematik sonuçtur. Burada, Q_k fonksiyonlarına ise **genelleştirilmiş kuvvetler** denir.

Örnek 2.1 (r, θ, φ) küresel koordinatlarda m kütleli bir cismin yer vektörü Bölüm 1 de (1.2), (1.3) ve (1.1) denklemleri ile verilmişti. Buna göre hız vektörü ise

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta \dot{\varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

şeklindedir.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}},$$

kinetik enerji tanımından, küresel koordinatlarda kinetik enerji,

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2), \quad (2.10)$$

olarak bulunur. (2.10) denkleminde kısmi türevler hesaplanırsa

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = mr (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

bulunur. Kuvvet,

$$\mathbf{F} = F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

ve

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \hat{\mathbf{r}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r(\cos \theta (\cos \varphi \hat{\mathbf{i}} + \sin \varphi \hat{\mathbf{j}})) - \sin \theta \hat{\mathbf{k}} = r \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r(\sin \theta (-\sin \varphi \hat{\mathbf{i}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{j}})) = r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}$$

olduğundan genelleştirilmiş kuvvetler ,

$$Q_r = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = (F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \hat{\mathbf{r}} = F_r$$

$$Q_\theta = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = (F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \hat{\mathbf{r}} \theta = r F_\theta$$

$$Q_\varphi = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = (F_r \hat{\mathbf{r}} + F_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + F_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \hat{\mathbf{r}} \sin \theta \varphi = r \sin \theta F_\varphi$$

olarak bulunur. Öyleyse, r ye bağlı Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{r}} \right] - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r,$$

$$\frac{d}{dt} [m\dot{r}] - mr(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = F_r,$$

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = F_r,$$

θ ya bağlı Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta,$$

$$\frac{d}{dt} [mr^2 \dot{\theta}] - mr^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = r F_\theta,$$

$$mr(r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) = r F_\theta,$$

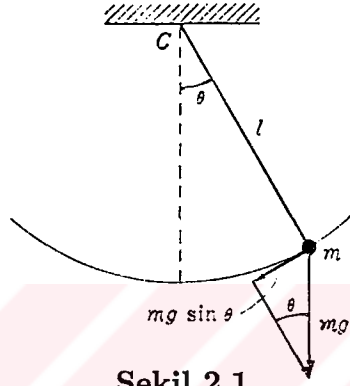
ve φ ya bağlı Lagrange denklemi

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi},$$

$$mr \sin \theta (r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta + 2\dot{r} \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = r \sin \theta F_{\varphi},$$

olarak bulunur.

Örnek 2.2 Şimdi sabit l uzunluğundaki basit sarkaç için hareket denklemlerini bulalım.



Şekil 2.1

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}$$

ve l sarkacın uzunluğu olmak üzere, yer vektörü

$$\mathbf{r} = l \hat{\mathbf{r}},$$

ve kuvvet

$$\mathbf{F} = mg \mathbf{j},$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = l \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} = l \hat{\theta}$$

olduğundan genelleştirilmiş kuvvet,

$$Q_{\theta} = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = mg \mathbf{j} l (\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j}) = -mgl \sin \theta$$

olarak bulunur. Ayrıca kinetik enerji ,

$$T = \frac{1}{2}m |\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

dir. Böylece, θ ya göre Lagrange denklemi;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_\theta, \\ \frac{d}{dt} [ml^2\dot{\theta}] - 0 &= -mgl \sin \theta \\ ml^2\ddot{\theta} &= -mgl \sin \theta \end{aligned}$$

olduğundan

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

şeklinde elde edilir.

2.7 Tanecik Sistemleri İçin Lagrange Denklemleri

r_α , α tane taneciğin yer vektörü ve $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ genelleştirilmiş koordinatlar olsun. Bu durumda r_α , uzayda basit bir taneciğin yerini ve $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ genelleştirilmiş koordinatları ise konfigürasyon uzayında taneciklerin bir sistemini tanımlar. Ayrıca yer vektörü genelleştirilmiş koordinatlara bağlı olarak

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

şeklinde ifade edilir. Öyleyse kinetik enerji

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} |\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}|^2,$$

ve Newton' un ikinci hareket kanundan her α için

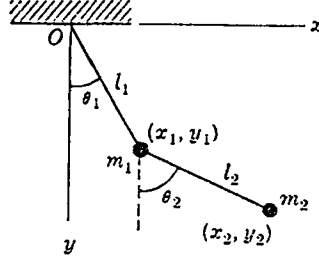
$$\mathbf{F}_{\alpha} = m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha}$$

olduğundan tanecik sistemi için Lagrange denklemleri

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_i} = Q_i$$

olarak bulunur. Tanecik sistemleri için kaç tane tanecik içerdiği gözönüne alınmaksızın Lagrange denklemleri aynı formdadır.

Örnek 2.3 İkili sarkaç için Lagrange hareket denklemlerini bulalım.



Şekil 2.2

Yukarıdaki şekilden m_1 ve m_2 tanecikleri için yer vektörleri sırasıyla

$$\mathbf{r}_1 = l_1(\sin \theta_1 \mathbf{i} - \cos \theta_1 \mathbf{k})$$

$$\mathbf{r}_2 = (l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) \mathbf{i} - (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \sin \theta_2) \mathbf{k}$$

olduğundan θ_1 ve θ_2 değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_1} = l_1(\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{k}), \quad \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_1} = l_1(\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{k}), \quad \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_2} = l_2(\cos \theta_2 \mathbf{i} + \sin \theta_2 \mathbf{k})$$

olarak bulunur. Buradan genelleştirilmiş kuvvetler

$$\mathbf{F}_1 = -m_1 g \mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_2 = -m_2 g \mathbf{k},$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \mathbf{F}_1 \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_1} + \mathbf{F}_2 \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_1} = -m_1 g l_1 \sin \theta_1 - m_2 g l_1 \sin \theta_1 \\ &= -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1 \\ Q_2 &= \mathbf{F}_1 \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \theta_2} + \mathbf{F}_2 \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \theta_2} = -m_2 g l_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

bulunur. Ayrıca kinetik enerji,

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 (\cos \theta_1 \mathbf{i} + \sin \theta_1 \mathbf{k}), \quad |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2,$$

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = (l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2) \mathbf{i} + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2) \mathbf{k}$$

$$|\dot{\mathbf{r}}_2|^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

olmak üzere

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 |\dot{\mathbf{r}}_1|^2 + \frac{1}{2} m_2 |\dot{\mathbf{r}}_2|^2, \quad (2.12)$$

$$T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

şeklindedir. Öyleyse, θ_1 için Lagrange denklemi

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1),$$

ve

$$Q_1 = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1,$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} = Q_1$$

eşitliğinden

$$l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \left[\cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2 \right] = 0$$

ve θ_2 için Lagrange denklemi,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

ve

$$Q_2 = -m_2 g l_2 \sin \theta_2$$

olmak üzere,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} \right] - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} = Q_2$$

eşitliğinden

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 + l_2 \left[\cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 \right] = 0$$

bulunur.

2.8 Korunumlu (Tutarlı) Kuvvetler

F_α kuvvetlerinin, t zamanına veya hızlara bağlı olmadıklarını kabul edelim. Bu durumda α taneciğine etki eden kuvvet, sadece α nın yerine bağlı olacağından, genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden $F_\alpha(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$, sadece q_i lere bağlıdır.

α taneciklerinin oluşturduğu bir mekanik sistemin hareketi konfigürasyon uzayında, q^0 ve q^1 noktaları arasındaki γ eğrisi ile verilir. γ eğrisi boyunca yapılan iş;

$$w_\gamma = \int_\gamma \sum_\alpha F_\alpha dr_\alpha = \int_\gamma \sum_{\alpha,k} F_\alpha \frac{\partial r_\alpha}{\partial q_k} dq_k = \int_\gamma \sum_k Q_k dq_k,$$

şeklinde. Genel olarak yapılan iş, q^0 ve q^1 noktaları arasında seçilen özel yola bağlı olacaktır. Dolayısıyla farklı bir γ' eğrisi boyunca yapılan iş

$$w_{\gamma'} = \int_{\gamma'} \sum_\alpha F_\alpha dr_\alpha = \int_{\gamma'} \sum_k Q_k dq_k$$

olup $w_\gamma \neq w_{\gamma'}$ dir.

Eğer herhangi iki q^0 ve q^1 noktaları için yapılan iş, bu noktalar arasındaki yoldan bağımsız ise, F_α kuvvetlerine **korunumlu kuvvetler** adı verilir. q^0

keyfi olarak seçilmiş sabit bir nokta ve $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ noktaları verilsin. Bu durumda $V(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$ potansiyel fonksiyonu;

$$V(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = - \int_{q^0}^{q_1} \sum_i Q_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) dq_i,$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, eğer sisteme etkiyen kuvvetler potansiyel enerji cinsinden ifade edilebiliyorsa genelleştirilmiş kuvvetler de, genelleştirilmiş koordinatlar cinsinden ifade edilmiş olan potansiyel ile

$$Q_k(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n) = - \frac{\partial V}{\partial q_k},$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\nabla V < 0$$

olduğunda kuvvet pozitifdir. Dolayısıyla tanecik hareket eder, yani kinetik enerji artarken, potansiyel enerji azalır. Böylece

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = - \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_k} = - \frac{\partial^2 V}{\partial q_k \partial q_i} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_k},$$

olması bize integrallenebilme şartını verir.

Eğer kuvvetler korunumlu ise,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

olduğundan, Lagrange fonksiyonu

$$T - V = L,$$

olarak tanımlandığında, Lagrange denklemleri

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0 \implies \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - V) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i} (T - V) = 0,$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial(T-V)}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial}{\partial q_i}(T-V) &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0\end{aligned}\quad (2.13)$$

şeklinde Lagrange fonksiyonuna bağlı olarak bulunur.

Örnek 2.4 Şimdi Şekil 2.2 deki ikili sarkaç için Lagrange fonksiyonunu ve Lagrange fonksiyonuna bağlı olarak Lagrange denklemlerini bulalım. m_1 ve m_2 taneciklerinin potansiyel enerjileri

$$V = mgh$$

tanımından,

$$V_1 = m_1 gl_2 + m_1 gl_1(1 - \cos \theta_1)$$

$$V_2 = m_2 gl_1(1 - \cos \theta_1) + m_2 gl_2(1 - \cos \theta_2)$$

olmak üzere, toplam potansiyel enerji

$$V = V_1 + V_2 = (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos \theta_1) + gl_2(m_1 + m_2 - m_2 \cos \theta_2),$$

ve kinetik enerji (2.12) den

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

dir,ve (2.11) den genelleştirilmiş kuvvetler

$$Q_1 = -\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = -(m_1 + m_2) g l_1 \sin \theta_1$$

$$Q_2 = -\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = m g l_2 \sin \theta_2$$

olarak bulunur. Lagrange fonksiyonu $L = T - V$ den

$$\begin{aligned}L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &\quad - (m_1 + m_2)gl_1(1 - \cos \theta_1) + gl_2(m_1 + m_2 - m_2 \cos \theta_2)\end{aligned}$$

dir. Buradan (2.13) Lagrange denklemleri

$$l_1 \ddot{\theta}_1 + g \sin \theta_1 + \frac{m_2 l_2}{m_1 + m_2} \left[\cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_2 - \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_2^2 \right] = 0$$

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + g \sin \theta_2 + l_2 \left[\cos(\theta_2 - \theta_1) \ddot{\theta}_1 + \sin(\theta_2 - \theta_1) \dot{\theta}_1^2 \right] = 0$$

olarak aynı şekilde bulunur.

2.9 Genelleştirilmiş Momentum

q_i , genelleştirilmiş koordinatına karşı gelen genelleştirilmiş momentumu

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.14)$$

olarak tanımlanır. Eğer sistemin potansiyel enerjisi sadece genelleştirilmiş koordinatlara bağlı olarak korunumlu ise, (2.14) denklemleri $L = T - V$ Lagrange fonksiyonuna bağlı olarak

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

şeklinde yazılabilir. Buna **genelleştirilmiş momentum** denir.

Örnek 2.5 Kartezyen koordinatlarda, kinetik ve potansiyel enerji sırasıyla

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2), \quad V = V(x_1, x_2, x_3)$$

olarak tanımlanır. Eğer potansiyel enerji genelleştirilmiş hızlardan bağımsız ise, yani

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

ise lineer momentum,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = m \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i$$

olarak bulunur.

Kutupsal koordinatlarda, kinetik ve potansiyel enerji

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2), \quad V = V(r, \theta)$$

ve bunlar cinsinden Lagrange fonksiyonu $L = T - V$ olduğundan lineer momentum;

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

ve açısal momentum;

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

şeklindedir.

2.10 Hız Bağımlı Potansiyeller

Korunumlu sistemlerde genelleştirilmiş kuvvetler ve Lagrange fonksiyonu sırasıyla,

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad L = T - V$$

olmak üzere, genel Lagrange denklemlerinin

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

şeklinde olduğunu bulmuştuk. $U(q_i, \dot{q}_i)$ genelleştirilmiş potansiyel fonksiyonunu,

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial U}{\partial q_i}$$

olacak şekilde seçer ve $L = T - U$ olarak tanımlarsak Lagrange denklemleri,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.15)$$

şeklinde bulunabilir. Bu denklemi $L = T - U$ ile verilen Lagrange fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

denklemlerinden kolayca bulunur.

Özel durum olarak, w_j ve V yalnızca q_i lerin bir fonksiyonu olmak üzere genelleştirilmiş potansiyeli, hıza bağlı lineer fonksiyon olarak

$$U(q_i, \dot{q}_i) = \sum_j w_j \dot{q}_j + V$$

şeklinde seçersek genelleştirilmiş kuvvetler,

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\sum_j w_j \right) - \sum_j \frac{\partial w_j}{\partial q_i} \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_j \left(\frac{\partial w_j}{\partial q_j} - \frac{\partial w_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.6 Kartezyen koordinatlarda bir taneciğin pozisyonu,

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z$$

olmak üzere,

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

vektör değerli fonksiyonu ile belirlenir. Bu durumda hıza bağlı lineer potansiyel fonksiyonu,

$$U = \dot{x} w_1 + \dot{y} w_2 + \dot{z} w_3 + V = \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{w} + V$$

olacağından genelleştirilmiş kuvvetler,

$$Q_1 = Q_x = \left(\frac{\partial w_2}{\partial q_2} - \frac{\partial w_2}{\partial q_1} \right) \dot{q}_2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial q_3} - \frac{\partial w_3}{\partial q_1} \right) \dot{q}_3 - \frac{\partial V}{\partial q_1}$$

$$= \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \dot{y} + \left(\frac{\partial w_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial x} \right) \dot{z} - \frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Q_2 = Q_y = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial w_3}{\partial z} - \frac{\partial w_3}{\partial y} \right) \dot{z} - \frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Q_3 = Q_z = \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \dot{x} + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial w_2}{\partial z} \right) \dot{y} - \frac{\partial V}{\partial z},$$

olarak bulunur.

2.11 Korunumluluk (Tutarlılık) Kanunları

2.11.1 Lineer Momentumun Korunumu

Eğer sisteme etkiyen F kuvveti sıfıra eşit ise,

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

olacağından p_k sabittir, yani lineer momentum korunumludur.

2.11.2 Enerjinin Korunumu

$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n, t)$, $2n + 1$ değişkenli türevlenebilen herhangi bir düzgün fonksiyon olsun. Bu durumda L nin zamana göre türevi

$$\frac{dL}{dt} = \dot{L} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \quad (2.16)$$

olur. Lagrange denklemlerinden

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

olduğundan (2.16) yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right] \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \end{aligned}$$

ve

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right] + \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \quad (2.17)$$

bulunur. Parantez içindeki ifade genelde **enerji fonksiyonu** olarak adlandırılır ve h ile

$$h(q_i, \dot{q}_i, t) = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

şeklinde gösterilir. Böylece (2.17), h fonksiyonunun zamana göre türevini verir ve

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

dir. Eğer $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ ise yani L açıkça, t den bağımsız fakat kapalı olarak q_i ve $\dot{q}_i$ değişkenlerindeki zaman değişkenine sahipse,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right] = 0$$

olacaktır. $L = T - V$ ifadesinden T , $\dot{q}_i$ genelleştirilmiş hızlarına göre ikinci dereceden ve V , $\dot{q}_i$ genelleştirilmiş hızlarından bağımsız olduğunda

$$h = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{Toplam enerji}$$

korunumludur.

Örnek 2.7 Dünya yüzeyindeki (projektiler) atışlarda kinetik enerji ve potansiyel enerji,

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2), \quad V = mgz$$

olmak üzere,

$$L = T - V$$

Lagrange fonksiyonundan

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz$$

dir. Burada

$$\dot{p}_x = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

olduğundan

$$p_x = \text{sabit}$$

dir. Yani x yönünde lineer momentum korunumudur.

Toplam enerji ise ;

$$E = T + V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$

olarak bulunur.

2.12 Lagrange Denklemlerinin Koordinat Dönüşümleri Altında Değişmezliği

$q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ konfigürasyon uzayında genelleştirilmiş koordinatlar ve $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$ ler, $q_i = q_i(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n)$ olacak şekilde herhangi bir başka koordinatlar kümesi olsun. q_i ler yalnızca Q_i lere bağlı olduğundan

$$\dot{q}_i = \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j, \quad (2.18)$$

dir. $L(q_i, \dot{q}_i)$, q_i ler cinsinden Lagrange fonksiyonu ve $\hat{L}(Q_i, \dot{Q}_i)$, Q_i ler cinsinden dönüştürülmüş Lagrange fonksiyonu olsun. Bu Lagrange fonksiyonları arasındaki ilişki

$$\hat{L}(Q_i, \dot{Q}_i) = L(q_i(Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n), \sum_j \frac{\partial q_i}{\partial Q_j} \dot{Q}_j),$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{L}}{\partial Q_k} &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \sum_j \frac{\partial^2 q_i}{\partial Q_k \partial Q_j} \dot{Q}_j \right) \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \right) \right) \\ \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{Q}_k} &= \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} \end{aligned}$$

bulunur. (2.18) den $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \quad (k = i)$ olduğundan

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{Q}_k} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial q_i}{\partial Q_k}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{Q}_k} \right] - \frac{\partial \hat{L}}{\partial Q_k} = \sum_i \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0$$

bulunur ki, bu da bize koordinat dönüşümü altında Lagrange denklemlerinin değişmezliğini gösterir.

Bölüm 3

Hamilton Denklemleri ve Tam İntegrallenebilirlik

3.1 Giriş

Biz bu bölümde esas olarak Sir W. R. Hamilton (1805-1865) tarafından Lagrange teorisine dayanarak geliştirilen Hamilton teorisini ele alacağız. Hamilton teorisi, Lagrange fonksiyonu ile belirlenen mekanik sistemlerin hareket denklemlerini farklı bir şekilde ifade ederek daha basit prensiplerle elde edilmesini sağlamıştır.

Bu bölümde, değişimlerin analizi verilerek Hamilton kanonik denklemleri çıkarılmıştır. Poisson braket tanımlanarak, Hamilton hareket denklemleri bu braket yardımıyla ifade edilmiş olup, Hamiltoniyen sistemlerin tam integrallenebilirliği verilmiştir. Ayrıca, kanonik dönüşümler tanımlanarak bir dönüşümün kanonik olması şartı incelenmiştir.

3.2 Değişimlerin Analizi

Matematikte sıkça ortaya çıkan bir problem $y' = \frac{dy}{dx}$ olmak üzere;

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (3.1)$$

integralinin minimum veya maksimum olması için $x = a$ ve $x = b$ noktalarını birleştiren bir $y = Y(x)$ eğrisinin bulunmasıdır [34].

Şimdi I integralini ekstremum yapan eğrinin

$$y = Y(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.2)$$

olduğunu kabul edelim. Ayrıca ε , x den bağımsız olmak üzere,

$$y = Y(x) + \varepsilon \eta(x) = Y + \varepsilon \eta \quad (3.3)$$

eğrisini tanımlayalım. Bu eğri, $x = a$ ve $x = b$ boyunca eğer

$$\eta(a) = \eta(b) = 0$$

seçilirse (3.2) eğrisinin komşuluk eğrisidir. Bu komşuluk eğrisi için I integralinin değeri

$$I(\varepsilon) = \int_a^b F(x, Y + \varepsilon \eta, Y' + \varepsilon \eta') dx \quad (3.4)$$

olup, $\varepsilon = 0$ için bir ekstremuma sahiptir. Bunun için bir gerek şart

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = 0$$

olmasıdır. İntegral işareti altında türev alabileceğimiz kabulü ile

$$\frac{dI}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx = 0 \quad (3.5)$$

buluruz. $\eta(a) = \eta(b) = 0$ kabulü ile birlikte sol taraftaki ikinci terime kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta \Big|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = 0$$

veya

$$\int_a^b \eta \left\{ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right\} dx = 0$$

bulunur. Öyleyse bu son denklemin sağlanması için η sabit olduğundan

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad \text{veya} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

olmalıdır. Bu denkleme **Euler-Lagrange denklemi** adı verilir. Böylece (3.1) integralinin bir ekstremuma sahip olması için bir gerek şartın

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

Euler-Lagrange denkleminin sağlanması olduğunu göstermiş olduk. Benzer şekilde, bu sonuç kolayca

$$\int_a^b F(x, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \dots, y_n, y'_n) dx$$

integraline genişletilebilir ve Euler-Lagrange denklemleri

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_\alpha} \right) - \frac{\partial F}{\partial y_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n$$

olarak bulunur. Şimdi Taylor seri açılımını kullanarak (3.4) denkleminde

$$I(\varepsilon) - I(0) = \varepsilon \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta' \right) dx + O(\varepsilon^2),$$

($O(\varepsilon^2)$; ε^2 ve daha yüksek dereceden terimleri içerir) bulunur. Buradaki ε -nün katsayısı **integralin değişimi** olarak tanımlanır ve

$$\delta \int_a^b F(x, y, y') dx$$

şeklinde gösterilir. Böylece $\int_a^b F(x, y, y') dx$ integralinin bir ekstremuma sahip olması

$$\delta \int_a^b F(x, y, y') dx = 0$$

şeklinde belirtilir. Matematikte karşılaşılan bu ve benzeri problemlere **değişimler analizi** adı verilir.

3.3 Hamilton Kanonik Denklemleri

Hız bağımlı potansiyele sahip n serbestlik dereceli korunumlu mekanik sistemler

$$\int_{t_1}^{t_2} L(t, q_k, \dot{q}_k) dt = 0 \quad (3.7)$$

Lagrange fonksiyonu ile tanımlanır. Hareket denklemleri ise değişimlerin analizinden

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{\partial L}{\partial t} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

Euler-Lagrange denklemleri olarak elde edilir. Burada q_k lar genelleştirilmiş koordinatları, t bağımsız değişkeni ve ifadelerin üzerindeki nokta ise t ye göre türevi göstermektedir. Korunumlu dinamik sistemlerde yani, $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ olduğunda Lagrange denklemleri,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

haline gelir.

T kinetik enerjiyi ve V potansiyel enerjiyi göstermek üzere, Lagrange fonksiyonu, kinetik ve potansiyel enerjiye bağlı olarak

$$L = T - V \quad (3.10)$$

ve $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ genelleştirilmiş momentumu,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad (3.11)$$

olmak üzere H Hamilton fonksiyonunu,

$$H = \sum_{k=1}^n p_k \dot{q}_k - L \quad (3.12)$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca $H(t, q_k, p_k)$ Hamilton fonksiyonunu ele alarak bu fonksiyonun diferensiyeli alınır

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \right) \quad (3.13)$$

ve (3.12) eşitliğindeki Hamilton fonksiyonu kullanılarak diferensiyel alınır

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k)$$

bulunur. Ayrıca bu son ifade, (3.9) ve (3.11) bağıntıları kullanılarak

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^n (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) \quad (3.14)$$

şeklinde yazılabilir. (3.13) ve (3.14) karşılaştırıldığında

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (3.15)$$

denklemlerini buluruz. Bu denklemlere **Hamilton hareket denklemleri** ve denklemler sistemine de **Hamilton sistemi** denir.

Örnek 3.1 q_k pozisyon vektörünü ve F_k kuvveti göstermek üzere;

$$\ddot{q}_k = F_k = -\frac{\partial}{\partial q_k} V(q_1, q_2, \dots, q_n) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

denklemlerine **Newton'un hareket denklemleri** denir. Burada kuvvetlerin zamandan bağımsız $V(q)$ potansiyeline bağlı olduğu varsayılmıştır. $V(q)$ potansiyel fonksiyonunun zamandan bağımsız olduğu kabulüyle (3.16) Newton'un hareket denklemlerini $p_k = \dot{q}_k$, $\dot{p}_k = F_k$ birinci mertebeden denklemler şeklinde yeniden yazalım. Bu durumda Hamilton fonksiyonu

$$H(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n p_k^2 + V(q_1, q_2, \dots, q_n) = T + V \quad (3.17)$$

şeklinde, kinetik enerji ve potansiyel enerjinin toplamı olarak ifade edilebilir.

Bu Hamilton fonksiyonuna **doğal Hamilton fonksiyonu** adı verilir.

3.4 Poisson Braket

Hamilton sistemlerin birçok özellikleri Poisson braket operatörü ile formüle edilir. Bu nedenle bu operatör, Hamilton teoride önemli rol oynar.

M sonlu boyutlu bir düzgün manifold olsun. M manifoldu üzerinde $f(t, q_k, p_k)$ fonksiyonunun zamana göre türevi,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k} \dot{p}_k \right)$$

dir. Bunu da (3.15) Hamilton hareket denklemlerini kullanarak

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \quad (3.18)$$

şeklinde yeniden yazılabiliriz. (3.15) eşitliğindeki

$$\sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right)$$

ifadesine H ve f fonksiyonlarının üzerinde **Poisson braket**i denir ve

$$\{f, H\} = [f, H] = \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca M manifolduna ise **faz uzayı** veya **Poisson manifoldu** adı verilir. Faz uzayı,

$$(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n)$$

şeklinde gösterilen $2n$ boyutlu bir uzaydır.

f, g, h keyfi fonksiyonlar ve α, β sabitler olmak üzere Poisson braketinin temel özellikleri şunlardır:

(i) **Bilineerlik:**

$$\{\alpha f + \beta g, h\} = \alpha \{f, h\} + \beta \{g, h\}$$

$$\{f, \alpha g + \beta h\} = \alpha \{f, g\} + \beta \{f, h\}$$

(ii) Ters Simetri:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}$$

(iii) Jacobi Özdeşliği:

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

(iv) Leibnitz Kuralı:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$$

(3.15) Hamilton denklemleri (3.19) Poisson braketi kullanılarak

$$\begin{aligned}\dot{q}_k &= \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{\partial q_k}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial q_k}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = \{q_k, H\} \\ \dot{p}_k &= -\frac{\partial H}{\partial q_k} = \frac{\partial p_k}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial p_k}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} = \{p_k, H\}\end{aligned}\quad (3.20)$$

formunda da ifade edilebilir.

(3.19) Poisson braketi ile (3.15) Hamilton denklemlerinin oluşturduğu yapıya **Hamiltoniyen yapı** denir.

Poisson braketi, Leibnitz kuralı ve bilineerliği sağladığından, düzgün fonksiyonlar üzerinde bir türev tanımlar. Böylece M manifoldu üzerinde her bir H fonksiyonuna karşı gelen vektör alanını tanımlayabiliriz.

Tanım 3.1 Faz uzayında Hamilton denklemlerine karşı gelen $(\dot{q}_k, \dot{p}_k)$ hız alanına **Hamilton vektör alanı** denir, x_H ile

$$x_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}, -\frac{\partial H}{\partial q_k} \right) \quad (3.21)$$

şeklinde ifade edilir. Birinci mertebeden diferensiyel operatörleri

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial q_k}, -\frac{\partial}{\partial p_k} \right)$$

şeklinde gösterdiğimizde (3.21),

$$x_H = x_H \cdot \nabla = \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right]$$

olarak yazılır. Bu durumda herhangi bir $F(p_k, q_k)$ fonksiyonunun zamana göre türevi, Poisson braket yardımıyla,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k \right) = x_H F = \{F, H\} \quad (3.22)$$

olur.

3.5 Tam İntegrallenebilirlik

Tanım 3.2 (3.22) eşitliğindeki F fonksiyonu için eğer,

$$\{F, H\} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad (3.23)$$

ise F fonksiyonuna H ile **Poisson kommut** veya **involüsyondadır** denir ve F fonksiyonu, H ile belirlenen hareketin bir sabiti olur. Bu şekildeki F fonksiyonuna **hareketin integrali** veya H fonksiyonunun **birinci integrali** adı verilir. Burada F fonksiyonunun açık olarak zamana bağlı olmadığı varsayılmıştır.

Tanım 3.3 $(\frac{\partial I_k}{\partial q}; \frac{\partial I_k}{\partial p})$ vektörleri lineer bağımsız ise yani,

$$\text{rank}(\frac{\partial I_k}{\partial q}; \frac{\partial I_k}{\partial p})_{k,r=1,2,\dots,n} = n$$

ise $I_k(q, p)$ fonksiyonlarına **fonksiyonel bağımsızdır** denir. Eşdeğer olarak I_k çözümlerinin hiçbirisi, diğerinin bir fonksiyonu değildir. Yani, aşık bir K fonksiyonu için

$$K(I_1(q, p), \dots, I_n(q, p)) \stackrel{(q,p)}{=} 0$$

olması ancak K nin sıfır olması halinde geçerlidir.

Tanım 3.4 $H(q, p)$ Hamilton sistemi, eğer zamandan bağımsız, fonksiyonel bağımsız ve PB altında sıfıra eşit olan $I_k(q, p)$, $k = 1, 2, \dots, n$ hareket integrallerine sahip ise bu Hamilton sistemine **tam integrallenebilir sistem**

denir. Tam integrallenebilme tanımının şartlarını sağlayan integrallerin bir kümesine integrallerin bir tam kümesi veya kısaca bir tam küme adı verilir.

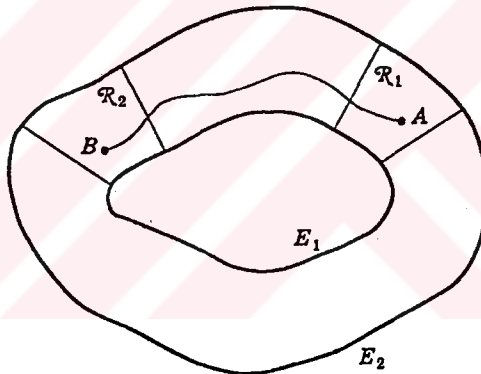
İntegrallenebilirliğin gerçek geometrik anlamı Liouville-Arnold teoremi ile aşağıdaki şekilde açıklanmıştır.

3.5.1 Liouville-Arnold Teoremi

Aynı Hamilton fonksiyonuna sahip korunumlu mekanik sistemlerin büyük bir ailesini düşünelim. Bu durumda Hamilton fonksiyonu toplam enerjidir ve sabittir. Yani,

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n) = \text{sbt.} = E \quad (3.24)$$

olup faz uzayında bir yüzeyle temsil edilebilir.



Şekil 3.1

Bütün böyle sistemlerin toplam enerjilerinin E_1 ve E_2 arasında olduğunu kabul edelim. Bu durumda faz uzayındaki bütün bu sistemlerin yolları $H = E_1$ ve $H = E_2$ uzaylarının arasında kalacaktır (Şekil 3.1 e bakınız).

Sistemler, farklı başlangıç şartlarına sahip olduklarından faz uzayındaki farklı yollar boyunca hareket edeceklerdir. Başlangıç noktalarının şekildeki $\mathcal{R}_1$ bölgesinde bulunduğunu ve t zamanında bu noktaların $\mathcal{R}_2$ bölgesine ulaştığını kabul edelim. Örneğin, özel bir sisteme karşı gelen gösterim noktası, A

noktasından B noktasına hareket etsin. $\mathcal{R}_1$ ve $\mathcal{R}_2$ bölgelerinin seçiminden dolayı, bu bölgelerdeki gösterim noktalarının sayısı aynıdır. Şimdi Liouville teoremini ifade edelim.

$\mathcal{R}_1$ ve $\mathcal{R}_2$ bölgelerinin $2n$ boyutlu hacimleri aynıdır veya birim hacimdeki noktaların sayısını yoğunluk olarak tanımlarsak, yoğunluk sabittir.

Örnek 3.2 m kütleli bir cisim, ρ, ϕ, z silindirik koordinatlarda $V(\rho, \phi, z)$ potansiyeline sahip bir kuvvet alanı içerisinde hareket etmektedir. Bu cisim için Hamilton fonksiyonunu ve Hamilton denklemlerini bulalım.

Silindirik koordinatlarda bir cismin yer vektörü, $\rho > 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ olmak üzere

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z$$

olarak tanımlanır.

Cismin hız bileşenleri,

$$\dot{x} = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi$$

$$\dot{y} = \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi$$

$$\dot{z} = \dot{z}$$

olmak üzere Lagrange fonksiyonu,

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m \left[(\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi)^2 + (\dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi)^2 + \dot{z}^2 \right] - V(\rho, \phi, z)$$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, \phi, z)$$

olarak bulunur. Ayrıca $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ eşitliğinden momentumlar

$$p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m \dot{\rho} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = \frac{p_\rho}{m},$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m \rho^2 \dot{\phi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi}{m \rho^2},$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m},$$

olmak üzere kinetik enerji, genelleştirilmiş momentumlar ile

$$T = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{p_\rho}{m} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{p_\phi}{m\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{p_z}{m} \right)^2 \right],$$

şeklinde yazılır. Böylece Hamilton fonksiyonu,

$$H = T + V = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{p_\rho}{m} \right)^2 + \rho^2 \left(\frac{p_\phi}{m\rho^2} \right)^2 + \left(\frac{p_z}{m} \right)^2 \right] + V(\rho, \phi, z)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + \frac{p_\phi^2}{\rho^2} + p_z^2 \right) + V(\rho, \phi, z)$$

ve Hamilton denklemleri,

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \frac{p_\rho}{m}, & \dot{p}_\rho &= \frac{p_\phi^2}{m\rho^3} - \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \dot{\phi} &= \frac{p_\phi}{m\rho^2}, & \dot{p}_\phi &= -\frac{\partial V}{\partial \phi} \\ \dot{z} &= \frac{p_z}{m}, & \dot{p}_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.3 a) 1 serbestlik dereceli sistemlerde Hamilton fonksiyonu

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + w^2 q^2) + aq^4$$

olmak üzere, hareket denklemi

$$q_{tt} + w^2 q + aq^3 = 0$$

olarak bulunur.

b) 2 serbestlik dereceli sistemlerde Hamilton fonksiyonları için hareket denklemlerini bulalım.

(i) 2 serbestlik dereceli sistemlerde lineer olmayan salınımların Hamilton fonksiyonu

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + w_1^2 q_1^2 + w_2^2 q_2^2) + aq_1^4 + bq_2^4 + cq_1^2 q_2^2$$

olarak verilir [3, 15]. Buna göre hareket denklemleri,

$$q_{1tt} = -(w_1^2 q_1 + 4\alpha q_1^3 + 2\delta q_1 q_2^2) \Rightarrow q_{1tt} + w_1^2 q_1 = -4\alpha q_1^3 - 2\delta q_1 q_2^2$$

$$q_{2tt} = -(2w_2^2 q_2 + 4\beta q_2^3 + 2\delta q_1^2 q_2) \Rightarrow q_{2tt} + 2w_2^2 q_2 = -4\beta q_2^3 - 2\delta q_1^2 q_2$$

şeklinde bulunur.

(ii)

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + w_1^2 q_1^2 + w_2^2 q_2^2) + a q_2^2 q_1 - \frac{b}{3} q_1^3$$

Hamilton fonksiyonu ile verilen Henon-Heiles sistemi [5, 6] için (3.15) hareket denklemleri ise,

$$-\frac{\partial H}{\partial q_1} = q_{1tt} = -(w_1^2 q_1 + a q_2^2 - b q_1^2) \Rightarrow q_{1tt} + w_1^2 q_1 = b q_1^2 + a q_2^2$$

$$-\frac{\partial H}{\partial q_2} = q_{2tt} = -(w_2^2 q_2 + 2a q_1 q_2) \Rightarrow q_{2tt} + w_2^2 q_2 = -2a q_1 q_2$$

şeklinde bulunur.

c) 3 serbestlik dereceli sistemlerde Hamilton fonksiyonları için hareket denklemlerini bulalım.

(i) 3 serbestlik dereceli sistemlerde lineer olmayan salınımlar ise

$$H_0 = (w_1^2 q_1^2 + w_2^2 q_2^2 + w_3^2 q_3^2),$$

$$H_1 = \alpha q_1^4 + \beta q_2^4 + \gamma q_3^4 + \delta q_1^2 q_2^2 + \varepsilon q_2^2 q_3^2 + \mu q_1^2 q_3^2$$

olmak üzere,

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + H_0 + H_1$$

Hamilton fonksiyonu ile verilir [15, 33, 16]. Buradan (3.15) hareket denklemleri,

$$q_{1tt} + 2w_1^2 q_1 = -4\alpha q_1^3 - 2\delta q_1 q_2^2 - 2\mu q_1 q_3^2$$

$$q_{2tt} + 2w_2^2 q_2 = -4\beta q_2^3 - 2\delta q_1^2 q_2 - 2\varepsilon q_2 q_3^2$$

$$q_{3tt} + 2w_3^2 q_3 = -4\gamma q_3^3 - 2\mu q_1^2 q_3 - 2\varepsilon q_2^2 q_3$$

olarak bulunur.

(ii)

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + w_1^2 q_1^2 + w_2^2 q_2^2 + w_3^2 q_3^2)$$

$$H_1 = -\frac{b}{3}q_1^3 + q_1(a_1 q_2^2 + a_2 q_3^2)$$

olmak üzere, Hamilton fonksiyonu $H = H_0 + H_1$ olarak verilen sistem için (3.15) Hamilton denklemleri,

$$q_{1tt} + w_1^2 q_1 = bq_1^2 - a_1 q_2^2 - a_2 q_3^2$$

$$q_{2tt} + w_2^2 q_2 = -2a_1 q_1 q_2$$

$$q_{3tt} + w_3^2 q_3 = -2a_2 q_1 q_3$$

olarak bulunur.

d) 4 serbestlik dereceli sistemlerde Hamilton fonksiyonları için hareket denklemlerini bulalım.

(i) Hamilton fonksiyonu ,

$$H_0 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + w_1^2 q_1^2 + w_2^2 q_2^2 + w_3^2 q_3^2 + w_4^2 q_4^2)$$

$$H_2 = -\frac{1}{2}((q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)^2 + 4(q_1 q_4 - q_2 q_3)^2)$$

olmak üzere $H = H_0 + H_2$ şeklinde verilsin. Buradan (3.15) hareket denklemleri,

$$q_{1tt} + w_1^2 q_1 = 2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)q_1 + 4(q_1 q_4 - q_2 q_3)q_4$$

$$q_{2tt} + w_2^2 q_2 = 2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)q_2 - 4(q_1 q_4 - q_2 q_3)q_3$$

$$q_{3tt} + w_3^2 q_3 = 2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)q_3 - 4(q_1 q_4 - q_2 q_3)q_2$$

$$q_{4tt} + w_4^2 q_4 = 2(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2)q_4 + 4(q_1 q_4 - q_2 q_3)q_1$$

olarak bulunur.

3.6 Kanonik Dönüşümler

Mekanikteki çoğu problemin çözülmesinde özel genelleştirilmiş koordinatların kullanılması işlemleri kolaylaştırmakta ve kısaltmaktadır. Bu sebeple pozisyon ve momentum koordinatlarının bir kümesinden diğerine dönüşümler yapmak kaçınılmazdır. Örneğin, eski pozisyon ve momentum koordinatlarını q_α ve p_α ile, yeni pozisyon ve momentum koordinatlarını ise Q_α ve P_α ile gösterirsek, dönüşüm

$$\begin{aligned} P_\alpha &= P_\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, t) \\ Q_\alpha &= Q_\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n, t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

olarak tanımlanır ve kısaca

$$P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t), \quad Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t) \quad (3.26)$$

ile gösterilir. Bu dönüşümler için yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonu olarak adlandırılan $\bar{H}$ fonksiyonu,

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P_\alpha}, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_\alpha}, \quad (3.27)$$

olacak şekilde bulunmalıdır. Bu durumda P_α ve Q_α koordinatlarına **kanonik koordinatlar** denir.

3.6.1 Bir Dönüşümün Kanonik Olma Şartı

Eğer,

$$\sum_\alpha p_\alpha dq_\alpha - \sum_\alpha P_\alpha dQ_\alpha \quad (3.28)$$

ifadesi bir tam diferensiyel ise $P_\alpha = P_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$, $Q_\alpha = Q_\alpha(p_\alpha, q_\alpha, t)$ dönüşümü **kanoniktir**.

Standart Hamiltoniyen yapı ve H Hamilton fonksiyonu (q, p) değişkenlerine göre türevlenebilir ise Hamilton denklemleri, aşağıdaki 3 özdeş koşul ile karakterize edilen

$$(q, p) \longrightarrow (Q, P)$$

şeklindeki kanonik dönüşümler altında değişmezdir [32].

(i) Herhangi $f(Q, P)$ ve $g(Q, P)$ fonksiyonları için Poisson braketini ile

$$\{f(Q, P), g(Q, P)\}_{(Q, P)} = \{f(Q(q, p), P(q, p)), g(Q(q, p), P(q, p))\}_{(q, p)}$$

dir. Burada alt indisler hangi değişkene göre türev alınacağını göstermektedir.

(ii)

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial S}{\partial Q_k}$$

olarak tanımlanan ve $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial Q}\right) \neq 0$ olan $S(q, Q)$ üreteç (generating) fonksiyonu vardır.

(iii) (3.26) dönüşümü, Hamilton denklemlerini yeni (Q, P) değişkenlerinde

$$\bar{H}(Q, P) = H(q(Q, P), p(Q, P))$$

Hamilton fonksiyonu ile

$$\dot{Q}_k = \{Q_k, \bar{H}\}_{(Q, P)}, \quad \dot{P}_k = \{P_k, \bar{H}\}_{(Q, P)}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

formundaki Hamilton denklemlerine götürür.

Örnek 3.4 $P = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$, $Q = \arctan\left(\frac{q}{p}\right)$ dönüşümlerinin kanonik olduğunu gösterelim.

(p, q) koordinatlarında Hamilton fonksiyonu $H(p, q)$ ve (P, Q) koordinatlarında Hamilton fonksiyonu $\bar{H}(Q, P)$ olsun. Bu durumda p ve q kanonik koordinatlar olduğundan hareket denklemleri

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad (3.29)$$

olacaktır. Ayrıca kısmi türevler,

$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial p}{\partial Q} \dot{Q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial P} \dot{P} + \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial p} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial p} \quad (3.31)$$

dir. Verilen dönüşüm denklemlerinin P ve Q ya göre türevleri alındığında

$$1 = p \frac{\partial p}{\partial P} + q \frac{\partial q}{\partial P} \quad 0 = (p \frac{\partial q}{\partial P} - q \frac{\partial p}{\partial P}) / (p^2 + q^2)$$

$$0 = p \frac{\partial p}{\partial Q} + q \frac{\partial q}{\partial Q} \quad 1 = (p \frac{\partial q}{\partial Q} - q \frac{\partial p}{\partial Q}) / (p^2 + q^2)$$

bulunur. Bu denklemler çözüldüğünde

$$\frac{\partial p}{\partial P} = \frac{p}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial P} = \frac{q}{p^2 + q^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial Q} = -q, \quad \frac{\partial q}{\partial Q} = p \quad (3.32)$$

elde edilir. Buradan (3.30) ve (3.31) denklemleri

$$\dot{p} = \frac{p}{p^2 + q^2} \dot{P} - q \dot{Q}, \quad \dot{q} = \frac{q}{p^2 + q^2} \dot{P} + p \dot{Q} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = q \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} + \frac{p}{p^2 + q^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}, \quad \frac{\partial H}{\partial p} = p \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} - \frac{q}{p^2 + q^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} \quad (3.34)$$

haline gelir. (3.29) ve (3.33) ve (3.34) denklemlerinden

$$\frac{p}{p^2 + q^2} \dot{P} - q \dot{Q} = -q \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} - \frac{p}{p^2 + q^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}$$

$$\frac{q}{p^2 + q^2} \dot{P} + p \dot{Q} = p \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} - \frac{q}{p^2 + q^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial Q}$$

yazılır. Bu denklemlerin çözümünden ise

$$\dot{Q} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial P} = \{Q, \bar{H}\}_{(Q,P)}, \quad \dot{P} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q} = \{P, \bar{H}\}_{(Q,P)}$$

bulunur. Bu da bize P ve Q dönüşümlerinin kanonik olduğunu gösterir.

Ayrıca bu dönüşümlerin kanonik olmasını (3.28) ifadesinin tam diferensiyel

olmasıyla da gösterebiliriz.

$$\begin{aligned}
 p dq - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) d\left(\arctan\left(\frac{q}{p}\right)\right) &= p dq - \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \frac{p dq - q dp}{p^2 + q^2} \\
 &= \frac{1}{2}(p dq + q dp) \\
 &= d\left(\frac{1}{2}pq\right)
 \end{aligned}$$

Şimdi bu dönüşüm için üreteç fonksiyonunu bulalım.

$$\frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$$

olduğundan

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad P_k = -\frac{\partial S}{\partial Q_k} \quad (3.35)$$

olacak şekilde $S(q, Q)$ üreteç fonksiyonu vardır.

$$p = \frac{q}{\tan Q}, \quad P = \frac{1}{2}\left(\frac{q^2}{\tan^2 Q} + q^2\right) = \frac{1}{2}q^2\left(\frac{1}{\tan^2 Q} + 1\right)$$

olmak üzere (3.35) denkleminde yerine yazıldığında ilk eşitlikten

$$\frac{\partial S}{\partial q} = p = \frac{q}{\tan Q} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \frac{1}{\tan Q} q^2 + S_1(Q) \quad (3.36)$$

bulunur. Bulunan bu üreteç fonksiyonu

$$P = -\frac{\partial S}{\partial Q}$$

eşitliğinde yerine yazıldığında

$$\frac{1}{2}q^2\left(\frac{1}{\tan^2 Q} + 1\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 Q} q^2 + \frac{\partial S_1}{\partial Q}$$

$$\frac{1}{2}q^2 \frac{1}{\sin^2 Q} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 Q} q^2 + \frac{\partial S_1}{\partial Q} \Rightarrow \frac{\partial S_1}{\partial Q} = 0 \Rightarrow S_1 = sbt.$$

bulunur. Buna göre (3.36) denkleminde üreteç fonksiyonu

$$S(q, Q) = \frac{1}{2}q^2 \frac{1}{\tan^2 Q} \quad \text{olarak bulunur.}$$

Şimdi sonlu boyutlu sistemlerin integrallenebilirliğinin bulunmasında kullanılan bazı metodlardan kısaca bahsedelim.

i) Değişkenlerine Ayırma Metodu

Değişkenlerine ayırma metodu Hamilton-Jacobi denkleminde doğal Hamilton fonksiyonlarına ve genelleştirilmiş momentuma bağlı Hamilton fonksiyonlarına uygulanır. Bu metod 1837 yılında Jacobi tarafından kullanılmış ve birçok örneğe başarılı bir şekilde uygulanmıştır. Kepler problemi ve anizotropik harmonik potansiyelde bir küre üzerindeki hareketin Neumann problemi en çok bilinen uygulamaları arasındadır [32].

ii) İzospektral Bozulma Metodu

Bu metodun bulunması ve geliştirilmesi integrallenebilir Hamilton sistemlerinin kurulmasında ve çözümünde büyük ilerlemeler sağlamıştır. Özellikle momentuma göre ikinci dereceden olan Hamilton fonksiyonlarına uygulanmıştır. Momentuma göre ikiden daha yüksek dereceden Hamilton sistemlerinin de pek çoğuna uygulanabilir. Bu yöntem, 1967 de KdV denklemi ile çalışıldığı sıralarda bulunmuş [9], fakat ilk olarak Toda Lattisine uygulanmıştır [7, 21, 23]. Bu metod yalnızca doğal Hamilton fonksiyonlarına değil, diğer Hamilton fonksiyonlarının da büyük bölümüne uygulanabilmektedir [32].

iii) Lie Simetrisi

Lineer olmayan sistemlerin integrallenebilirliğini test etmekte kullanılan bu metod, Lie tarafından diferensiyel denklemlerin simetri özellikleriyle ilişkilendirilen bir parametrelili sürekli dönüşüm grupları altında değişmezlik analizi üzerine kurulmuştur. Son zamanlarda Ovsjannikov [26], Bluman ve Cole [2] tarafından geliştirilmiştir. Sürekli dönüşümlerin bir parametrelili Lie gruplarının teorisi, dinamik sistemlere, özellikle de Lagrange sistemlerine, grubun sonsuz küçük üreteçlerinin sadece bağımlı ve bağımsız değişkenlerin (türevlerinin değil) fonksiyonları olduğu kabulü ile uygulanmıştır. Ayrıca

bu teori nokta simetrileri ile ilgilendiğinden dolayı sınırlı sayıda uygulama alanına sahiptir. Diferensiyel denklemlerin türev bağımlı dönüşümler altında değişmezliği ile ilgili çalışmalar son zamanlarda oldukça önem kazanmıştır. Yakın geçmişte Lutzky [19] bir boyutlu harmonik salınım problemi ile ilgilenmiş ve genişletilmiş vektör alanlarının Lie teorisini kullanılarak karşı gelen dinamik simetrileri ortaya çıkarmıştır. Ayrıca bazı Lagrange sistemlerinin dinamik simetrilere sahip olduğu belirlenmiştir [8, 25, 4, 12, 30, 31, 35, 33].



Bölüm 4

Bozulma (Pertürbasyon) Teorisi

4.1 Giriş

Bazı lineer olmayan diferensiyel denklemlerin tam olarak çözümlerini bulmak mümkün değildir, ancak bunların yaklaşık çözümlerini elde edebiliriz. Yaklaşık çözümleri bulmakta kullanılan sistematik metotlar, bozulma teorisinin konusunu teşkil eder. Biz ε küçük bir parametre, $\mathbf{u}$, u_j bileşenli bir vektör ve f_j , $\mathbf{u}$ ile ε nun polinom fonksiyonları olmak üzere ;

$$\ddot{u}_j + w_j^2 u_j = f_j(\mathbf{u}, \varepsilon) \quad (4.1)$$

formundaki lineer olmayan adi diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini çok boyutlu ölçü metodunu kullanarak bulacağız.

Bu bölümde önce bozulma metodunu kısaca basit örneklerle açıkladıktan sonra, genelde çok boyutlu ölçü analizini tanımlayarak bir, iki ve üç serbestlik dereceli sonlu boyutlu Hamilton sistemlere uygulayacağız.

4.2 Bozulma Metodu

Direkt bozulma metodunda çözümün,

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(t) \quad (4.2)$$

kuvvet serisi formunda olduğunu ve u_n -lerin t -ye göre diferensiyellenebilir olduklarını varsayalım. Sonra, bu kuvvet serisini ve ilgili türevlerini (4.1) denkleminde yerine yazıp ardışık olarak ε -parametresinin kuvvetlerindeki denklemleri çözmek suretiyle serinin bileşenlerini belirleyeceğiz. Şimdi bunun nasıl yapıldığını görmek için bazı örnekler verelim.

Örnek 4.1 w , frekans olmak üzere,

$$\ddot{u} + w^2 u = \varepsilon u^2, \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (4.3)$$

harmonik salınımın denklemini gözönüne alalım. (4.2) seri açılımını denkleminde yerine yazdığımızda ve ε -nun kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlediğimizde,

ε^0 teriminin katsayısından,

$$\ddot{u}_0 + w^2 u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad \dot{u}_0(0) = 0, \quad (4.4)$$

ε^1 teriminin katsayısından,

$$\ddot{u}_1 + w^2 u_1 = u_0^2, \quad u_1(0) = \dot{u}_1(0) = 0, \quad (4.5)$$

ε^2 teriminin katsayısından,

$$\ddot{u}_2 + w^2 u_2 = 2u_0 u_1, \quad u_2(0) = \dot{u}_2(0) = 0, \quad (4.6)$$

denklemlerini buluruz. (4.4) denklemi ikinci mertebeden sabit katsayılı homogen lineer bir diferensiyel denklem olduğundan, başlangıç değeri ile birlikte çözümü

$$u_0 = A \cos wt \quad (4.7)$$

bulunur. Bu çözümü (4.5) denkleminde yerine yazarsak,

$$\ddot{u}_1 + w^2 u_1 = A^2 \cos^2 wt = \frac{1}{2} A^2 (\cos 2wt + 1) \quad (4.8)$$

homogen olmayan lineer diferensiyel denklemini ve bunun ilgili başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü,

$$u_1 = \frac{A^2}{6w^2} (3 - 2 \cos wt - \cos 2wt) \quad (4.9)$$

olarak buluruz. Bu u_0 ve u_1 değerlerini (4.6) denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} \ddot{u}_2 + w^2 u_2 &= \frac{A^2}{3w^2} (3 \cos wt - 2 \cos^2 wt - \cos wt \cos 2wt) \\ &= \frac{A^2}{3w^2} \left(3 \cos wt - (1 + \cos 2wt) - \frac{1}{2} (\cos 3wt + \cos wt) \right) \\ &= \frac{A^2}{6w^2} (-2 + 5 \cos wt - 2 \cos 2wt - \cos 3wt) \end{aligned} \quad (4.10)$$

homogen olmayan lineer diferensiyel denklemi bulunur. Bu denklem ilgili başlangıç şartlarını sağlayan

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{-67A^2}{144w^4} \cos wt + \frac{5A^2}{12w^3} t \sin wt \\ &\quad + \frac{A^2}{3w^2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos 2wt + \frac{1}{16} \cos 3wt \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Burada çözümlerin tanımlı olması için $w \neq 0$ olmalıdır. u_2 çözümündeki normal periyodik terimler tüm zamanda sınırlı kalır. Buradaki $t \sin wt$ terimi t ye göre lineer olarak artmaktadır. Çözümdeki böyle terimlere **istenmeyen terim** veya **seküler terim** denir.

Örnek 4.2 Diğer bir örnek olarak da, kübik nonlineerliğe sahip olan

$$u_{tt} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (4.12)$$

Duffing denklemini düşünelim. (4.2) seri çözümünü denklemde yerine yazdığımızda ve ε -nun kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlediğimizde, ε^0 teriminin katsayısından,

$$u_{0tt} + u_0 = 0, \quad (4.13)$$

ε^1 teriminin katsayısından,

$$u_{1tt} + u_1 = -u_0^3, \quad (4.14)$$

ε^2 teriminin katsayısından,

$$u_{2tt} + u_2 = -3u_0^2 u_1 \quad (4.15)$$

diferensiyel denklemlerini buluruz. Benzer olarak (4.13) denkleminin genel çözümü, a ve b keyfi sabitler olmak üzere;

$$u_0 = a \cos(t + b) \quad (4.16)$$

olarak bulunur. Bu çözümü (4.14) denkleminde yerine yazarsak,

$$u_{1tt} + u_1 = -a^3 \cos^3(t + b) \quad (4.17)$$

lineer diferensiyel denkleminin çözümünden, $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$ yazılarak,

$$u_1 = a^3 \left(\frac{1}{32} \cos 3(t + b) - \frac{3}{8} t \sin(t + b) \right) \quad (4.18)$$

bulunur. Aynı şekilde bu işlemlere devam edildiğinde diğer çözümlerde elde edilir. Böylece, verilen (4.12) denklemi için (4.2) seri çözümü

$$u(t) = a \cos(t + b) + \varepsilon a^3 \left(\frac{1}{32} \cos 3(t + b) - \frac{3}{8} t \sin(t + b) \right) + \dots \quad (4.19)$$

olacaktır. Eğer, (4.16) ve (4.18) çözümlerinde $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ olduğu kullanılırsa, $A = \frac{1}{2}ae^{ib}$ ve $\bar{A}$, A nın kompleks eşleniği olmak üzere;

$$u_0 = Ae^{it} + \bar{A}e^{-it} \quad (4.20)$$

$$u_1 = \frac{3i}{2}t A^2 \bar{A}e^{it} + \frac{1}{8}A^3 e^{3it} + c.c. \quad (4.21)$$

bulunur. Böylece (4.19) çözümü,

$$u(t) = (Ae^{it} + \bar{A}e^{-it}) + \varepsilon \left(\frac{3i}{2}t A^2 \bar{A}e^{it} + \frac{1}{8}A^3 e^{3it} + c.c. \right) + \dots \quad (4.22)$$

şeklinde de ifade edilebilir. $u(t)$ çözümü, küçük ε -değerleri için (4.19) ve (4.22) denklemlerindeki birinci mertebeden terimlerden dolayı iyi bir çözüm değildir. Çünkü $t \sin(t + b)$ veya e^{it} terimleri u_1 çözümünde (4.17) denklemi tarafından ortaya çıkmıştır. Bu terimler istenmeyen yani seküler terimlerdir. İyi bir çözümün elde edilebilmesi için yani, seri çözümünün terimlerini ardışık olarak belirlemek için bu istenmeyen terimler yokedilmelidir. Böyle terimler yok etmekte oldukça kullanışlı bir metod vardır ve **çok boyutlu ölçü metodu** olarak bilinir.

4.3 Çok Boyutlu Ölçü Metodu

Şimdi (4.2) kuvvet serisini, küçük ε değerleri için farklı zaman ölçütü kullanarak

$$u(t, \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m u_m(t_0, t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (4.23)$$

$$t_k = \varepsilon^k t, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

formunda olduğunu varsayalım. Buradaki zaman, yavaş zaman olarak adlandırılır ve küçük ε -lar için t_n , t_{n-1} den daha yavaştır. (4.23) de zincir kuralını uygulayarak türev alınırsa

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots \quad (4.24)$$

bulunur. Yine bu seri çözümündeki u_m terimleri $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ yavaş zaman değişkenlerine göre diferensiyellenebilir fonksiyonlardır. Bozulma metodunda olduğu gibi, burada da kabul edilen seri çözümü (4.1) denkleminde yerine yazılarak ε -nun kuvvetlerinde bulunan diferensiyel denklemler çözülmek suretiyle u_m bileşenleri belirlenecektir. Bu metod lineer olmayan denklemlerde, lineer olan kısmın çözümüne bağlı olarak, verilen lineer olmayan denklemin çözümünü bulmamıza imkan vermektedir. Genelde, kuvvet serisindeki ilk

terim verilen denklemin lineer kısmının çözümünden bulunacak ve geriye kalanlar da bu terim cinsinden değerler alacaktır. Şimdi metodun daha kolay anlaşılabilmesi için bir serbestlik dereceli Hamilton sistemlere uygulanmasını vereceğiz.

Ayrıca istenmeyen terimlerden bulunan amplitüt denklemlerinin oluşturduğu yeni denklem sistemlerinin de Hamilton sistem olup olmadıklarını ve bunların integrallenebilirliklerini inceleyeceğiz. Sonrada metodun iki ve üç serbestlik dereceli sonlu boyutlu Hamilton sistemlere uygulanmasına örnek olarak Henon-Heiles sistemi üzerinde duracağız.

Örnek 4.3 Yine (4.12) Duffing denklemine, yani,

$$u_{tt} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (4.25)$$

denklemine dönelim. Kabul ettiğimiz (4.23) seri çözümünü zaman ölçütü ile birlikte denklemde yerine yazıp ε -nun kuvvetlerinin katsayılarını belirleyelim.

Bu durumda,

ε^0 teriminin katsayısından,

$$u_{0t_0t_0} + u_0 = 0, \quad (4.26)$$

ε^1 teriminin katsayısından,

$$u_{1t_0t_0} + u_1 = -2u_{0t_0t_1} - u_0^3, \quad (4.27)$$

ε^2 teriminin katsayısından,

$$u_{2t_0t_0} + u_2 = -3u_0^2u_1 - u_{0t_1t_1} - 2u_{0t_0t_2} - 2u_{1t_0t_1}, \quad (4.28)$$

ε^3 teriminin katsayısından,

$$u_{3t_0t_0} + u_3 = -3(u_1^2u_0 - u_0^2u_2) - u_{1t_1t_1} - 2(u_{0t_1t_2} - u_{0t_0t_3} - u_{1t_0t_2} - u_{2t_0t_1}), \quad (4.29)$$

ε^4 teriminin katsayısından,

$$u_{4t_0t_0} + u_4 = -u_1^3 - 6u_0u_1u_2 - 3u_0^2u_3 - u_{0t_2t_2} - u_{2t_1t_1} - 2(u_{0t_1t_3} - u_{1t_1t_2} - u_{0t_0t_4} - u_{1t_0t_3} - u_{2t_0t_2} - u_{3t_0t_1}), \quad (4.30)$$

olarak bulunur. (4.26) denklemi sabit katsayılı homogen lineer denklem olduğundan, genel çözümü, $A \equiv A(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ve $\bar{A}$, A nın kompleks eşleniği olmak üzere;

$$u_0 = Ae^{it_0} + \bar{A}e^{-it_0} \quad (4.31)$$

şeklinde bulunur. Bu çözümü (4.27) denkleminde yerine yazarsak ve istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşleniğiyle birlikte

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} = \frac{3}{2}iA^2\bar{A} \quad (4.32)$$

alırsak,

$$u_1 = \frac{1}{8}A^3e^{3it_0} + c.c. \quad (4.33)$$

çözümünü buluruz. Benzer olarak bunları (4.28) denkleminde yerine yazarsak istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşleniğiyle birlikte

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} = -\frac{15}{16}iA^3\bar{A}^2 \quad (4.34)$$

alırsak, ikinci terim

$$u_2 = \frac{1}{64}A^5e^{5it_0} - \frac{21}{64}A^4\bar{A}e^{3it_0} + c.c. \quad (4.35)$$

olarak bulunur. Aynı şekilde (4.29) denkleminde bu değerler yerine yazılırsa istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşleniğiyle beraber

$$\frac{\partial A}{\partial t_3} = \frac{123}{128}A^4\bar{A}^3 \quad (4.36)$$

alınırsa, üçüncü terim

$$u_3 = \frac{1}{512} \left(A^7e^{7it_0} + 43A^6\bar{A}e^{5it_0} + 417A^5\bar{A}^2e^{3it_0} \right) + c.c. \quad (4.37)$$

olarak bulunur. Bulunan çözümleri bir sonraki denklemde yerine yazdığımızda istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşleniğiyle birlikte

$$\frac{\partial A}{\partial t_4} = -\frac{921}{1024}iA^5\bar{A}^4 \quad (4.38)$$

aldığımızda, dördüncü terim

$$u_4 = \frac{1}{4096} \left(A^9 e^{9it_0} - 65 A^8 \bar{A} e^{7it_0} + 1340 A^7 \bar{A}^2 e^{5it_0} - 7797 A^6 \bar{A}^3 e^{3it_0} \right) + c.c. \quad (4.39)$$

bulunur. Yine bir sonraki adımda istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşleniğiyle birlikte

$$\frac{\partial A}{\partial t_5} = \frac{579}{2048}iA^6\bar{A}^5 \quad (4.40)$$

aldığımızda, sonraki terim

$$u_5 = \frac{1}{32768} \left(A^{11} e^{11it_0} - 87 A^{10} \bar{A} e^{9it_0} + 2747 A^9 \bar{A}^2 e^{7it_0} - 35853 A^8 \bar{A}^3 e^{5it_0} + 136113 A^7 \bar{A}^4 e^{3it_0} \right) + c.c. \quad (4.41)$$

bulunur. Böyle devam edilerek seri çözümünün diğer terimlerinde ardışık olarak bulunabilir.

Örnek 4.4 İki serbestlik dereceli Henon-Heiles denkleminin bir özel hali olan

$$u_{tt} + u = u^2 \quad (4.42)$$

lineer olmayan diferensiyel denklemini düşünelim. Kabul edilen (4.23) çözümünü ve yavaş zaman ölçütlerini denklemde yerine yazarsak, ε -nun kuvvetlerinin katsayılarını sırasıyla,

$$\begin{aligned} u_{1t_0t_0} + u_1 &= 0, \\ u_{2t_0t_0} + u_2 &= u_1^2 - 2u_{1t_0t_1}, \\ u_{3t_0t_0} + u_3 &= 2u_2u_1 - 2(u_{2t_0t_1} + u_{1t_0t_2}) - u_{1t_1t_1}, \\ u_{4t_0t_0} + u_4 &= u_2^2 + 2u_3u_1 - u_{2t_1t_1} - \\ &\quad 2(u_{3t_0t_1} + u_{2t_0t_2} + u_{1t_0t_3} + u_{1t_0t_4}), \\ u_{5t_0t_0} + u_5 &= 2(u_3u_2 + u_4u_1) - u_{3t_1t_1} - u_{1t_2t_2} + \\ &\quad 2(u_{2t_1t_2} + u_{4t_0t_1} + u_{3t_0t_2} + u_{2t_0t_3} + u_{1t_1t_3} + u_{1t_0t_4}), \end{aligned} \quad (4.43)$$

şeklinde buluruz. Bunlardan ilk denklem, yine sabit katsayılı homogen lineer diferensiyel denklem olduğundan, genel çözümü, $A \equiv A(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ve $\bar{A}$, A nın kompleks eşleniği olmak üzere,

$$u_1(t, t_1, t_2, \dots, t_n) = Ae^{it_0} + \bar{A}e^{-it_0} \quad (4.44)$$

bulunur. Bu çözümün (4.43) denkleminde ikinci denklemde yerine yazılmasıyla

$$u_{2tt} + u_2 = -2i \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{it_0} + A^2 e^{2it_0} + c.c + 2A\bar{A} \quad (4.45)$$

diferensiyel denklemi bulunur. İstenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşleniğiyle birlikte

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} = 0 \quad (4.46)$$

alnırsa,

$$u_2(t, t_1, t_2, \dots, t_n) = -\frac{1}{3}(A^2 e^{2it_0} + c.c.) + 2A\bar{A} \quad (4.47)$$

ikinci çözümü bulunur. Aynı şekilde, bunları (4.43) denklemindeki üçüncü denklemde yerine yazar ve istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşleniğiyle birlikte

$$\frac{\partial A}{\partial t_2} = -\frac{5i}{3} A^2 \bar{A} \quad (4.48)$$

alırsak, üçüncü terim,

$$u_3(t, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{2}(A^3 e^{3it_0} + c.c.) \quad (4.49)$$

olacaktır. Benzer olarak devam ettiğimizde, yine istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşleniğiyle birlikte

$$\frac{\partial A}{\partial t_3} = 0 \quad (4.50)$$

alnarak bir sonraki çözüm

$$u_4(t, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{18}(76A^2 \bar{A}^2 - \frac{59}{3} A^3 \bar{A} e^{2it_0} - \frac{1}{3} A^4 e^{4it_0}) + c.c. \quad (4.51)$$

olarak bulunur. Bir sonraki adımda, yine benzer olarak istenmeyen terimden kurtulmak için

$$\frac{\partial A}{\partial t_4} = -\frac{485}{108}iA^3\bar{A}^2 \quad (4.52)$$

alınırsa, aranan çözüm

$$u_5(t, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{541} \left(\frac{237}{8} A^4 \bar{A} e^{3it_0} + \frac{5}{24} A^5 e^{5it_0} \right) + c.c. \quad (4.53)$$

olacaktır. Bu işlemlere devam edildiğinde u_6 ve daha sonraki terimler benzer olarak bulunabilir.

4.4 İki Vektör Alanının Komütatörlüğü

$A(t_1, t_2, \dots, t_n)$ amplitüt fonksiyonlarının t_k türevleri, bozulma metodunun her bir aşamasındaki istenmeyen terimleri (sekülerliği) ortadan kaldırmak için belirlenmiştir. Şimdi bu türevleri kullanarak iki vektör alanının komütatörlüğünü tanımlayalım.

Her bir $f(x^j)$ fonksiyonu için t_k akış(flow)ları,

$$X_k f = \frac{d}{dt_k} f = \sum_{j=0}^N \frac{\partial x^j}{\partial t_k} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \left(\sum_{j=0}^N X_k^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) f, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.54)$$

şeklinde bir vektör alanı tanımlar. Böyle iki vektör alanının komütatörlüğü ise,

$$[X_k, X_l] f = (X_k \circ X_l - X_l \circ X_k) f = (X_k(X_l^j) - X_l(X_k^j)) \frac{\partial f}{\partial x^j} \quad (4.55)$$

olarak tanımlanır. Burada komütatörün i -inci bileşeni

$$\frac{dx^j}{dt_k} = X_k^j \quad (4.56)$$

olmak üzere

$$[X_k, X_l]^i = X_k^j \frac{\partial X_l^i}{\partial x^j} - X_l^j \frac{\partial X_k^i}{\partial x^j} \quad (4.57)$$

olarak verilir. Eş zamanlılık için verilecek koşul, t_k ve t_l lokal koordinatları kullanılarak

$$[X_k, X_l] = 0 \quad (4.58)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada x^j koordinatını, t_k ve t_l zamanlarının bir fonksiyonu olarak alırsak, integrallenebilme şartı

$$\frac{\partial x^j}{\partial t_k \partial t_l} = \frac{\partial x^j}{\partial t_l \partial t_k} \quad (4.59)$$

olarak verilebilir. **Örnek 4.3** ve **Örnek 4.4** de bulduğumuz t_k akışları için (4.59) integrallenebilme şartının yani eş zamanlılık şartının sağlandığı açıktır. Örneğin Duffing denklemi için, $i \neq j$ iken

$$A_{t_i t_j} = A_{t_j t_i}$$

sağlanır.

4.5 Hamilton Fonksiyonları ve Kanonik Poisson Braket

Bu kısımda diferensiyel denklemler için Hamilton fonksiyonuna çok boyutlu ölçü metodunu uygulayacağız. Diferensiyel denklem için çok boyutlu ölçü metoduyla bulduğumuz seri çözümünü, bu denkleme karşı gelen Hamilton fonksiyonunda yerine yazdığımızda çok boyutlu ölçü metodu ile bulduğumuz yeni denklem sistemlerinin Hamilton fonksiyonlarını belirlemeye çalışacağız. Sonra da yeni koordinatlar cinsinden kanonik Poisson braketini tanımlayıp, bulduğumuz yeni denklemleri bu brakete bağlı olarak Hamilton formunda yazacağız.

İlk olarak **Örnek 4.3** deki (4.12) denklemi için Hamilton fonksiyonunu bulalım. (4.12) denklemi

$$\dot{u} = v = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -(u + \epsilon u^3) \quad (4.60)$$

şeklinde birinci mertebeden denklemler sistemi olarak yeniden yazılabildiğinden, Hamilton fonksiyonu

$$H = \frac{1}{2}(v^2 + u^2) + \frac{1}{4}\varepsilon u^4 \quad (4.61)$$

olarak bulunur. Şimdi de **Örnek 4.3** için bulduğumuz seri çözümünü (4.61) Hamilton fonksiyonunda yerine yazarsak

$$h_0 = 2A\bar{A}, \quad h_1 = \frac{9}{2}A^2\bar{A}^2, \quad h_2 = \frac{25}{32}A^3\bar{A}^3, \quad h_3 = -\frac{237}{128}A^4\bar{A}^4 \quad (4.62)$$

olmak üzere;

$$H = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \quad (4.63)$$

olarak buluruz. Buradan (4.32), (4.34) ve (4.36) akışları Hamilton fonksiyonları ile

$$A_{t_1} = \frac{\partial}{\partial \bar{A}}\left(\frac{i}{6}h_1\right), \quad A_{t_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{A}}\left(-\frac{2i}{5}h_2\right), \quad A_{t_3} = \frac{\partial}{\partial \bar{A}}\left(\frac{41}{316}h_3\right) \quad (4.64)$$

şeklinde yazılır.

Tanım 4.1 Yeni koordinatlardaki, karşı gelen kanonik Poisson braket

$$\{A_j, A_k\} = \{\bar{A}_j, \bar{A}_k\} = 0, \quad \{A_j, \bar{A}_k\} = -2i\delta_{jk}, \quad A_1 = A, \quad A_2 = B$$

olmak üzere,

$$\{F, H\} = -2i \sum_{j=1}^2 \frac{1}{w_j} \left(\frac{\partial F}{\partial A_j} \frac{\partial H}{\partial \bar{A}_j} - \frac{\partial H}{\partial A_j} \frac{\partial F}{\partial \bar{A}_j} \right) \quad (4.65)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımları kullanarak (4.64) denklemlerini Poisson braket yardımıyla

$$A_{t_1} = \left\{ A, -\frac{1}{12}h_1 \right\}, \quad A_{t_2} = \left\{ A, \frac{1}{5}h_2 \right\}, \quad A_{t_3} = \left\{ A, \frac{41}{632}h_3 \right\} \quad (4.66)$$

şeklinde yazabiliriz.

Örnek 4.4 deki (4.42) denklemi için Hamilton fonksiyonunu bulalım. (4.42) denklemi

$$\dot{u} = v = \frac{\partial H}{\partial v}, \quad \dot{v} = -\frac{\partial H}{\partial u} = -(u - u^2) \quad (4.67)$$

şeklinde birinci mertebeden denklemler sistemi olarak yazılabildiğinden, karşılıklı gelen Hamilton fonksiyonu

$$H = \frac{1}{2}(v^2 + u^2) - \frac{1}{3}u^3 \quad (4.68)$$

olarak bulunur. Şimdi de **Örnek 4.4** de bulduğumuz seri çözümünü (4.68) Hamilton fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$h_0 = 2A\bar{A}, \quad h_2 = -\frac{37}{9}A^2\bar{A}^2, \quad h_4 = -\frac{3103}{648}A^3\bar{A}^3 \quad (4.69)$$

olmak üzere;

$$H = \varepsilon^2(h_0 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^4 h_4 + \dots) \quad (4.70)$$

buluruz. Buradan (4.48) ve (4.52) akışları Hamilton fonksiyonlarına bağlı olarak ve yeni kanonik Poisson braket yardımıyla

$$A_{t_2} = \frac{\partial}{\partial \bar{A}}\left(\frac{15i}{74}h_2\right) = \left\{A, -\frac{15}{148}h_2\right\}$$

$$A_{t_4} = \frac{\partial}{\partial \bar{A}}\left(\frac{970i}{3103}h_4\right) = \left\{A, -\frac{485}{3103}h_4\right\}$$

şeklinde yazılır. Böylece çok boyutlu ölçü metodu ile integrallenebilen bir serbestlik dereceli sonlu boyutlu Hamilton sistemlerinden yeni ve integrallenebilen sonlu boyutlu Hamilton sistemler bulmuş olduk. Yani, integrallenebilirlik çok boyutlu ölçü metodu altında değişmez kaldı.

4.6 Henon-Heiles Sistemi ve İntegrallenebilme Durumları

Bir önceki kısımda bir serbestlik dereceli Hamilton sistemler için çok boyutlu ölçü metodunun uygulamasını yaptık. Bu kısımda iki ve üç serbestlik dereceli örnekler olarak Henon-Heiles sistem ile ilgileneceğiz.

4.6.1 2 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi

2 serbestlik dereceli Henon-Heiles sistemin hareket denklemleri

$$\begin{aligned} q_{1tt} + w_1^2 q_1 &= b q_1^2 - a q_2^2 \\ q_{2tt} + w_2^2 q_2 &= -2a q_1 q_2 \end{aligned} \quad (4.71)$$

ve buna karşı gelen Hamilton fonksiyonu

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + w_1^2 q_1^2 + w_2^2 q_2^2) + a q_2^2 q_1 - \frac{b}{3} q_1^3 \quad (4.72)$$

olarak verilir. Şimdi Henon-Heiles sistemin de genelliği bozmadan, $w_2 \neq 0$ alarak $w_1 = w$, $w_2 = 1$ olduğunu kabul edersek, hareket denklemleri

$$\begin{aligned} q_{1tt} + w^2 q_1 &= b q_1^2 - a q_2^2 \\ q_{2tt} + q_2 &= -2a q_1 q_2 \end{aligned} \quad (4.73)$$

ve Hamilton fonksiyonu

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + w^2 q_1^2 + q_2^2) + a q_2^2 q_1 - \frac{b}{3} q_1^3 \quad (4.74)$$

haline gelir. Bu sistemin farklı üç durum için integrallenebildiği bilinmektedir [8, 5, 3, 10].

Bu üç integrallenebilme durumları ile karşı gelen Hamilton fonksiyonu ve birinci integralleri sırasıyla;

$$(i) \quad \frac{a}{b} = -1, \quad w = \mp 1$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2) + \frac{a}{3} q_1 (q_1^2 + 3q_2^2) \\ k &= p_1 p_2 + q_1 q_2 + \frac{a}{3} q_2 (3q_1^2 + q_2^2) \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$(ii) \quad \frac{a}{b} = -\frac{1}{6}, \quad w, \text{ keyfi}$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + w^2 q_1^2 + q_2^2) + a q_1 (2q_1^2 + q_2^2) \\ k &= (4 - w^2)(p_2^2 + q_2^2) + 4a (q_1 (q_2^2 - p_2^2) + p_1 p_2 q_2) + a^2 q_2^2 (4q_1^2 + q_2^2) \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$(iii) \quad \frac{a}{b} = -\frac{1}{16}, \quad w = \mp 4$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + 16q_1^2 + q_2^2) + \frac{a}{3}q_1(16q_1^2 + 3q_2^2) \\ k &= 3(p_2^2 + q_2^2)^2 + 4aq_2^2(3q_1p_2^2 - q_2(p_1p_2 + q_1q_2)) - \frac{2}{3}a^2q_2^4(q_1^2 + q_2^2) \end{aligned} \quad (4.77)$$

şeklinde olup, kanonik Poisson braketi altında involusyondadır, yani Poisson brakete göre

$$\{H, k\} = 0$$

sağlanır.

4.6.2 3 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + w_1q_1^2 + w_2q_2^2 + w_3q_3^2) \\ H_1 &= -\frac{b}{3}q_1^3 + q_1(a_1q_2^2 + a_2q_3^2) \end{aligned} \quad (4.78)$$

olmak üzere, 3 serbestlik dereceli Henon-Heiles sistemi için Hamilton fonksiyonu $H = H_0 + H_1$ dır. Bu sistemde eğer $q_2 = 0$ veya $q_3 = 0$ alınırsa, sistemin 2 serbestlik dereceli (4.72) Henon-Heiles sistemine indirgendiğine dikkat edelim.

Özel olarak genelliği bozmaksızın $w_2 = w_3 = 1$ ve $w_1 = w$ aldığımızda, bu sistem

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + wq_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \\ H_1 &= -\frac{b}{3}q_1^3 + q_1(a_1q_2^2 + a_2q_3^2) \end{aligned} \quad (4.79)$$

Hamilton fonksiyonu ile

$$\begin{aligned} q_{1tt} + w^2q_1 &= bq_1^2 - a_1q_2^2 - a_2q_3^2 \\ q_{2tt} + q_2 &= -2a_1q_1q_2 \\ q_{3tt} + q_3 &= -2a_2q_1q_3 \end{aligned} \quad (4.80)$$

hareket denklemlerinden oluşur. Bu sistem için üç integrallenebilme şartı olduğu bilinmektedir [17, 18].

Bu integrallenebilme şartları ile karşı gelen Hamilton fonksiyonları, birinci ve ikinci integralleri sırasıyla,

$$(i) \quad b = -a_1, \quad a_2 = a_1 \quad w = \mp 1$$

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + \frac{a_1}{3}q_1(q_1^2 + q_2^2 + 3q_3^2),$$

$$k = \frac{2}{9}(9(p_1p_2 + q_1q_2)^2 + 9(p_1p_3 + q_1q_3)^2 + 6a_1(2q_1(p_2q_3 - p_3q_2)^2 + (q_1(q_2^2 + q_3^2) + p_1(p_3q_3 - p_2q_2))(3q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)) + a_1^2(q_2^2 + q_3^2)(3q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2),$$

$$k_1 = p_3q_2 - p_2q_3.$$

$$(ii) \quad b = -6a_1, \quad a_2 = a_1 \quad w, \text{ keyfi}$$

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + w^2q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + a_1q_1(2q_1^2 + q_2^2 + q_3^2),$$

$$k = (4 - w^2)(p_2^2 + q_2^2 + p_3^2 + q_3^2) + a_1^2(q_2^2 + q_3^2)(4q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + 4a_1(q_1(q_2^2 + q_3^2 - p_2^2 - p_3^2) + p_1(p_2q_2 + p_3q_3)),$$

$$k_1 = p_3q_2 - p_2q_3.$$

$$(iii) \quad b = -16a_1, \quad a_2 = a_1 \quad w = \mp 4$$

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 16q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + \frac{a_1}{3}q_1(16q_1^2 + 3q_2^2 + 3q_3^2),$$

$$k = \frac{1}{18}(9(p_2^2 + q_2^2 + p_3^2 + q_3^2) - 2a_1^2(q_2^2 + q_3^2)^2(6q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + 12a_1(q_1((p_2q_3 - p_3q_2)^2 - (q_2^2 + q_3^2)^2 + 3(p_2q_2 + p_3q_3)^2) - +p_1(q_2^2 + q_3^2)(p_2q_2 + p_3q_3)))$$

$$k_1 = p_3q_2 - p_2q_3.$$

şeklindedir.

4.7 Çok Boyutlu Ölçü Analizi

Şimdi çok boyutlu ölçü metodunu sırasıyla 2 ve 3 serbestlik dereceli sistemlere genişleterek 2 ve 3 serbestlik dereceli Henon-Heiles sistemlere uygulayalım.

Bu durumda

$$u_{im} \equiv u_{im}(t_0, t_1, \dots, t_n) \quad (4.81)$$

olmak üzere, i -inci bileşen için seri çözümü,

$$q_i(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m u_{im}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.82)$$

ve yavaş zaman ölçütleri de

$$t_k = \varepsilon^k t, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

formundadır.

4.7.1 2 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi

2 serbestlik dereceli sistemlerde, (4.82) çözümünü (4.81) ile birlikte

$$\begin{aligned} t_k &= \varepsilon^k t, \quad i = 1, 2 \\ u_{1m} &\equiv u_m(t_0, t_1, \dots, t_n), \quad u_{2m} \equiv v_m(t_0, t_1, \dots, t_n) \end{aligned} \quad (4.83)$$

olarak,

$$q_1(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m u_m, \quad q_2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m v_m \quad (4.84)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. (4.84) çözümünü (4.73) denkleminde yerine yazarsak, ε -nun kuvvetlerinin katsayılarından sırasıyla,

$$\begin{aligned} u_{1t_0t_0} + w^2 u_1 &= 0, \\ v_{1t_0t_0} + v_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} u_{2t_0t_0} + w^2 u_2 &= -av_1^2 + bu_1^2 - 2u_{1t_0t_1}, \\ v_{2t_0t_0} + v_2 &= -2(v_{1t_0t_1} + au_1v_1). \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} u_{3t_0t_0} + w^2 u_3 &= -2av_1v_2 + 2bu_1u_2 - 2(u_{2t_0t_1} + u_{1t_0t_2}) - u_{1t_1t_1}, \\ v_{3t_0t_0} + v_3 &= -2a(u_2v_1 + u_1v_2) - 2(v_{2t_0t_1} + v_{1t_0t_2}) - v_{1t_1t_1}. \end{aligned} \quad (4.87)$$

denklemlerini buluruz. (4.85) denklem sistemi sabit katsayılı homogen lineer diferensiyel denklem olup, genel çözümü $A \equiv A(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $B \equiv B(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ve $\bar{A}$, $\bar{B}$ sırasıyla A ve B nin kompleks eşlenikleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{iwt_0} + \bar{A}e^{-iwt_0}, \\ v_1 &= Be^{it_0} + \bar{B}e^{-it_0} \end{aligned} \quad (4.88)$$

şeklindedir. Bu çözümü (4.86) denklemlerinde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} u_{2t_0t_0} + w^2 u_2 &= -2iw \frac{\partial A}{\partial t_1} e^{iwt_0} + bA^2 e^{2iwt_0} - aB^2 e^{2iwt_0} + c.c. + \\ &\quad 2(b|A|^2 - a|B|^2), \\ v_{2t_0t_0} + v_2 &= -2i \frac{\partial B}{\partial t_1} e^{it_0} - 2aA (Be^{i(w+1)t_0} + \bar{B}e^{i(w-1)t_0}) + c.c. \end{aligned} \quad (4.89)$$

bulunur. Burada $w = \mp 2$ rezonansının olmadığını yani $w \neq \mp 2$ olduğunu varsayarak istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$A_{t_1} = 0, \quad B_{t_1} = 0 \quad (4.90)$$

alırsak,

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{bA^2}{3w^2} e^{2iwt_0} - \frac{aB^2}{w^2-4} e^{2it_0} + c.c. - \frac{2}{w^2} (a|B|^2 - b|A|^2), \\ v_2 &= \frac{2a}{w} \left(\frac{AB}{w+2} e^{i(w+1)t_0} + \frac{A\bar{B}}{w-2} e^{i(w-1)t_0} \right). \end{aligned} \quad (4.91)$$

çözümünü buluruz. Bulduğumuz çözümleri (4.90) denklemleriyle birlikte yerine yazar ve $w = \mp 1$ rezonansının olmadığını yani $w \neq \mp 1$ olduğunu varsayarak istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$\begin{aligned} A_{t_2} &= \frac{-iA}{3w^3(w^2-4)} (5b^2(w^2-4)|A|^2 - 6a(2aw^2 + b(w^2-4))|B|^2), \\ B_{t_2} &= \frac{-iB}{w^2(w^2-4)} (a^2(3w^2-8)|B|^2 - 2a(2aw^2 + b(w^2-4))|A|^2). \end{aligned} \quad (4.92)$$

aldığımızda, bir sonraki çözüm

$$\begin{aligned}
 u_3 &= \frac{a(bw+2a(w-2))}{2w(w^2-4)(w+1)} AB^2 e^{i(w+2)t_0} + \frac{b^2}{12w^4} A^3 - \\
 &\quad \frac{a(bw+2a(w+2))}{2w(w^2-4)(w-1)} A\bar{B}^2 e^{i(w-2)t_0} + c.c., \\
 v_3 &= \frac{a(6aw+bw-2b)}{6w^3(w+2)(w+1)} A^2 B e^{i(1+2w)t_0} - \frac{a^2}{4(w^2-4)} B^3 + \\
 &\quad \frac{a(6aw-bw+2b)}{6w^3(w-2)(w-1)} B\bar{A}^2 e^{i(1-2w)t_0} + c.c.,
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde bulunan çözümleri diğer basamaklarda yerine yazdığımızda amplitüt akışlarını

$$A_{t_3} = 0, \quad B_{t_3} = 0 \tag{4.94}$$

ve

$$\begin{aligned}
 A_{t_4} &= \frac{iA}{36w^7(w^2-1)(4-w^2)^2} \left(b^4(193w^4 - 215w^6 - 5160w^2 + 3440) |A|^4 \right. \\
 &\quad + (a(288a^3 + 864a^2b + 248ab^2 + 424b^3)w^6 + (230a^3 + \\
 &\quad 4608a^2b - 1264ab^2 - 3816b^3)w^4 - w^2(4608a^2b - \\
 &\quad 1088ab^2 + 10176b^3) - 6784b^3) |A|^2 |B|^2 - a^2((187a^2 + \\
 &\quad 720ab + 324b^2)w^6 + w^4(1728a^2 + 1440ab + 210b^2) - \\
 &\quad \left. (230a^2 - 1152ab - 5184b^2)w^2 - 3456) |B|^4 \right)
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

ve B_{t_4} içinde benzer bir ifade buluruz.

$A_{t_k} = X_k^A$ ve $B_{t_k} = X_k^B$ yazarsak rezonans olmadığı kabulü ile (4.92) ve (4.95) akışlarının Poisson brakete göre a , b ve w nın keyfi sabitler olarak seçilmesiyle kommut veya involusyonda olduğu bulunur.

Hamilton Fonksiyonu ve Hamiltoniyen Yapısı

Şimdi rezonans olmadığı kabulü altında Hamiltoniyen yapısını oluşturalım.

(4.72) Hamilton fonksiyonunda bulduğumuz çözümleri ve amplitüt akışları

yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 2(w^2 |A|^2 + |B|^2) \\
 h_2 &= \frac{1}{9w^2(w^2-4)^2} \left(-9a^2(9w^4 - 68w^2 + 96) |B|^4 + \right. \\
 &\quad 9a((10a - 3b)w^4 - 12(2a + 3b)w^2 \\
 &\quad \left. + 16(a + 3b)) |A|^2 |B|^2 - 37b^2(w^2 - 4)^2 |A|^4 \right)
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

olmak üzere, yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonunu

$$H = \varepsilon^2(h_0 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^4 h_4 + \dots) \tag{4.97}$$

şeklinde buluruz. Şimdi rezonans durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

4.7.2 Rezonans Durumları

(i) $w = 1$ Durumu

Bu halde ilk çözüm,

$$\begin{aligned}
 u_1 &= Ae^{it_0} + \bar{A}e^{-it_0}, \\
 v_1 &= Be^{it_0} + \bar{B}e^{-it_0}
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

olarak bulunur. Bu çözümü ε^2 li terimde yerine yazdığımızda istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$A_{t_1} = 0, \quad B_{t_1} = 0 \tag{4.99}$$

aldığımızda,

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \frac{1}{3}(aB^2 - bA^2)e^{2it_0} + c.c. + 2(b|A|^2 - a|B|^2) \\
 v_2 &= \frac{2a}{3}ABe^{2it_0} + c.c. - 2a(A\bar{B} + B\bar{A})
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

çözümü bulunur. Bulduğumuz her bir çözümü bir sonraki adımda yerine yazdığımızda kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$\begin{aligned}
 A_{t_2} &= \frac{-i}{3} \left(5b^2 A |A|^2 + 2a(2a - 3b) A |B|^2 + a(6a + b) \bar{A} B^2 \right), \\
 B_{t_2} &= \frac{-ia}{3} \left(5aB |B|^2 + (6a + b) A^2 \bar{B} + 2(2a - 3b) B |A|^2 \right),
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

aldığımızda, sonraki çözüm

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{1}{12}(a(2a-b)AB^2 - b^2A^3)e^{3it_0} \\ v_3 &= \frac{a}{12}((2a-b)BA^2 + aB^3)e^{3it_0} \end{aligned} \quad (4.102)$$

olacaktır. Benzer yol izlenerek sonraki akışlar kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$A_{t_3} = 0, \quad B_{t_3} = 0 \quad (4.103)$$

ve

$$\begin{aligned} A_{t_4} &= \frac{-i}{108} \left(485b^4A|A|^4 + a^2(636a^2 - 156ab + 663b^2)A|B|^4 - \right. \\ &\quad a(48a^3 + 70a^2b + 222ab^2 + 51b^3)A^3\bar{B}^2 + \\ &\quad a(280a^3 - 1560a^2b - 10ab^2 - 1080b^3)A|A|^2|B|^2 + \\ &\quad a(144a^3 - 1504a^2b - 258ab^2 - 65b^3)B^2\bar{A}|A|^2 + \\ &\quad \left. a^2(1116a^2 + 194ab + 48b^2)\bar{A}B^2|B|^2 \right), \end{aligned} \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} B_{t_4} &= \frac{-i}{108} \left(-a^3(19a + 504b)B|B|^4 - \right. \\ &\quad a(192a^3 + 992a^2b - 348ab^2 - 178b^3)A^2|A|^2\bar{B} - \\ &\quad a(260a^3 + 1212a^2b - 47ab^2 + 456b^3)|A|^4B + \\ &\quad a(1554a^3 - 57a^2b - 156ab^2)A^2\bar{B}|B|^2 + \\ &\quad a(2344a^3 + 384a^2b + 950ab^2)|A|^2|B|^2B + \\ &\quad \left. a(246a^3 - 251a^2b - 12ab^2)\bar{A}^2B^3 \right), \end{aligned} \quad (4.105)$$

olarak bulunur. Şimdi (4.101) ve (4.104), (4.105) akışlarının kommut olup olmadıklarına bakalım. Kommutasyon bağıntılarından,

$$\begin{aligned}
[X_2, X_4]^A &= A_{t_2 t_4} - A_{t_4 t_2} \\
&= \frac{a(a+b)}{162} ((912a^4 + 2872a^3b + 9332a^2b^2 + 6722ab^3 + 1330b^4) \\
&\quad \bar{A} |A|^4 B^2 - a(4536a^3 + 1920a^2b + 542ab^2 + 58b^3) \bar{A}^3 B^4 + \\
&\quad a(2304a^3 - 768a^2b - 1344ab^2 - 192b^3) |A|^4 A |B|^2 - \\
&\quad a(8136a^3 + 1992a^2b + 11902ab^2 + 2370b^3) \bar{A} |A|^2 B^2 |B|^2 + \\
&\quad (1416a^4 - 2020a^3b - 5558a^2b^2 - 3647ab - 775b^4) A^3 |A|^2 \bar{B}^2 + \\
&\quad a(144a^3 - 384a^2b + 196ab^2 + 44b^3) A |A|^2 |B|^4 + \\
&\quad a^2(5046a^2 + 4587ab + 951b^2) \bar{A} B^2 |B|^4 + \\
&\quad a(408a^3 + 8360a^2b + 437ab^2 + 966b^3) A^3 |B|^2 \bar{B}^2),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[X_2, X_4]^B &= B_{t_2 t_4} - B_{t_4 t_2} \\
&= \frac{a(a+b)}{162} (-(8472a^4 + 4168a^3b + 1034a^2b^2 + 438ab^3) \bar{A}^2 |A|^2 B^3 - \\
&\quad (792a^4 + 3924a^3b + 5310a^2b^2 + 963ab^3 - 405b^4) |A|^4 A^2 \bar{B} - \\
&\quad a(5040a^3 - 2208a^2b - 2500ab^2 - 332b^3) |A|^4 B |B|^2 + \\
&\quad a^2(8430a^2 + 1607ab + 547b^2) \bar{A}^2 B^3 |B|^2 + \\
&\quad 1607ab(15816a^4 + 1976a^3b + 7022a^2b^2 - 270ab^3) + \\
&\quad (1152a^4 - 960a^3b - 192a^2b^2 + 44b^3) |A|^2 B |B|^4 + \\
&\quad (6264a^4 + 1056a^3b - 226a^2b^2 - 38ab^3) A^4 \bar{B}^3 - \\
&\quad (13668a^4 + 7154a^3b + 346a^2b^2) A^2 |B|^4 \bar{B}),
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bize (4.73) sisteminin integrallenebilme şartını $w = 1$ için $b = -a$ olarak vermektedir. Yani $w = 1$ rezonansı için çok boyutlu ölçü metodu bize bilinen integrallenebilme şartını vermiştir.

Hamilton Fonksiyonu ve Hamiltoniyen Yapısı

Şimdi bu rezonans için Hamilton fonksiyonu ile, Hamiltoniyen yapısını oluşturalım. $b = -a$ integrallenebilme şartıyla birlikte yukarıdaki çözümler ve

amplitüt akışları Hamilton fonksiyonunda yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} h_0 &= 2(|A|^2 + |B|^2), \\ h_2 &= -\frac{37}{9}a^2 \left((|A|^2 + |B|^2)^2 + (A\bar{B} + \bar{A}B)^2 \right), \\ h_4 &= -\frac{3103}{1296}a^4 2(|A|^2 + |B|^2) \left((|A|^2 + |B|^2)^2 + \frac{3}{4}(A\bar{B} + \bar{A}B) \right), \end{aligned} \quad (4.106)$$

olmak üzere, yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonu

$$H = \varepsilon^2(h_0 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^4 h_4 + \dots) \quad (4.107)$$

bulunur. Buna göre (4.101) akışları bulunan h_i fonksiyonları cinsinden Poisson braket yardımıyla,

$$A_{t_2} = \left\{ A, -\frac{15}{148}h_2 \right\}, \quad B_{t_2} = \left\{ B, -\frac{15}{148}h_2 \right\},$$

$$A_{t_4} = \left\{ A, -\frac{485}{3103}h_4 \right\}, \quad B_{t_4} = \left\{ B, -\frac{485}{3103}h_4 \right\},$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Ayrıca bulduğumuz seri çözümlerini ve amplitüt akışlarını $w = 1$, $b = -a$ integrallenebilme durumuna karşı gelen birinci integralde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} k_0 &= A\bar{B} + \bar{A}B, \\ k_2 &= -\frac{37}{9}a^2 \left(4(|A|^2 + |B|^2)^2 (A\bar{B} + \bar{A}B) \right) \\ &= -\frac{37}{9}a^2 h_0 k_0 \\ k_4 &= -\frac{3103}{1296}a^4 (A\bar{B} + \bar{A}B) \left(3(|A|^2 + |B|^2)^2 + (A\bar{B} + \bar{A}B)^2 \right) \\ &= -\frac{3103}{1296}a^4 k_0 \left(\frac{3}{4}h_0^2 + k_0^2 \right) \end{aligned}$$

olmak üzere, yeni koordinatlarda birinci integral

$$k = \varepsilon^2(k_0 + \varepsilon^2 k_2 + \varepsilon^4 k_4 + \dots)$$

olarak bulunur. Burada $\{h_0, k_0\} = 0$ kommutasyon ilişkisi vardır.

(ii) $w = 2$ Durumu

Bu halde ilk çözüm,

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{2it_0} + \bar{A}e^{-2it_0}, \\ v_1 &= Be^{it_0} + \bar{B}e^{-it_0} \end{aligned} \quad (4.108)$$

bulunur. Bu çözümü ϵ^2 li terimde yerine yazdığımızda istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$A_{t_1} = \frac{i}{4}aB^2, \quad B_{t_1} = iaA\bar{B} \quad (4.109)$$

aldığımızda,

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{1}{12}be^{4it_0}A^2 + c.c. + \frac{1}{2}(b|A|^2 - a|B|^2) \\ v_2 &= \frac{1}{3}ae^{3it_0}AB + c.c. \end{aligned} \quad (4.110)$$

çözümü bulunur. Bulduğumuz her bir çözümü (4.109) denklemleriyle birlikte bir sonraki adımda yerine yazdığımızda ve kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$\begin{aligned} A_{t_2} &= \frac{ib}{24}(6a|B|^2 - 5b|A|^2)A, \\ B_{t_2} &= \frac{-ia}{8}(-5a|B|^2 + 2(3a + 2b)|A|^2)B, \end{aligned} \quad (4.111)$$

aldığımızda, daha sonraki çözüm

$$\begin{aligned} u_3 &= \left(\frac{3a+2b}{72}\right)ae^{4it_0}AB^2 + \frac{b^2}{192}e^{6it_0}A^3 + c.c. \\ v_3 &= \frac{a}{144}A^2 \left((3a-b)e^{5it_0}B - 3(9a+b)e^{3it_0}\bar{B}\right) - \\ &\quad \frac{3}{64}a^2e^{3it_0}B^3 + c.c. \end{aligned} \quad (4.112)$$

bulunur. Burada amplitüt denklemleri ise kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$\begin{aligned} A_{t_3} &= \frac{ia}{1152} \left(4b(30a + 11b)|A|^2B^2 - 9a(3a + 4b)B^3\bar{B} \right. \\ &\quad \left. - 6(18a^2 + 26ab + 5b^2)A^2\bar{B}^2\right), \\ B_{t_3} &= \frac{1}{192} \left(12(23a + 2b)AB\bar{B}^2 - 4(45a + 26b)A^2\bar{A}\bar{B} \right. \\ &\quad \left. - 3(55a + 8b)B^3\bar{A}\right), \end{aligned} \quad (4.113)$$

olarak bulunur. Şimdi bu amplitüt denklemlerinin kommut olup olmadıklarını araştıralım. Kommutasyon denklemleri,

$$[X_1, X_2]^A = \frac{-a}{96} \left(b(24a + 5b)A^2\bar{B}^2 + 6a(5a + b)B^3\bar{B} - 2(18a^2 + 24ab + 5b^2)B^2|A|^2 \right)$$

$$[X_1, X_2]^B = \frac{a}{48} \left(9a(11a + 2b)AB\bar{B}^2 - 3a(13a + 2b)B^3\bar{A} - 2(36a^2 + 24ab + 5b^2)\bar{B}\bar{A}A^2 \right)$$

$$[X_1, X_3]^A = \frac{a^2}{1152}B \left((963a^2 + 288ab + 26b^2)AB\bar{B}^2 - 4(189a^2 + 216ab + 37b^2)\bar{B}\bar{A}A^2 - (522a^2 + 138ab + 11b^2)B^3\bar{A} \right)$$

$$[X_1, X_3]^B = -\frac{a^2}{2304}\bar{B} \left(12(174a^2 + 52b + 5b^2)A^2\bar{B}^2 - 4(2583a^2 + 504ab + 22b^2)B^2|A|^2 + 27a(51a + 8b)\bar{B}B^3 \right)$$

$$[X_2, X_3]^A = \frac{a}{27648} \left(9a^2(360a^2 + 2356ab + 381b^2)A^2\bar{B}^3B - 54a^2(15a^2 + 23ab + 4b^2)\bar{B}^2B^4 - 4(972a^4 + 3672a^3b + 2142a^2b^2 + 30ab^3 - 55b^4)\bar{B}^2\bar{A}A^3 - 6a(-162a^3 + 1722a^2b - 241ab^2 - 104b^3)\bar{B}B^3|A|^2 - 2b(-1080a^3 + 630a^2b + 1518ab^2 + 295b^3)B^2\bar{A}^2A^2 \right)$$

$$[X_2, X_3]^B = -\frac{a^2}{4608} \left(18a(823a^2 + 163ab + 4b^2)A\bar{B}^3B^2 + 2(-8856a^3 - 6102a^2b - 903ab^2 + 14b^3)\bar{B}^2B\bar{A}A^2 + 72(-22a^2 + 16ab + 3b^2)\bar{B}B^4\bar{A} + 4(1620a^3 + 2016a^2b + 849ab^2 + 130b^3)\bar{B}A^3\bar{A}^2 + (-3564a^3 - 4308a^2b - 2175ab^2 - 268b^3)B^3\bar{A}^2A \right)$$

şeklindedir. Dikkat edilirse, bu akışların kommut olması, ancak $a = 0$ olması halinde mümkündür.

Hamilton Fonksiyonu ve Hamiltoniyen Yapısı

Bulduğumuz seri çözümlerini H Hamilton fonksiyonunda yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} h_0 &= 2(4|A|^2 + |B|^2), \\ h_1 &= \frac{5}{2}a(A\bar{B}^2 + \bar{A}B^2), \\ h_2 &= -\frac{1}{144}(243a^2|B|^4 + 148b^2|A|^4 - 54a(11a + 8b)|A|^2|B|^2), \end{aligned} \quad (4.114)$$

olmak üzere, yeni koordinatlardaki Hamilton fonksiyonu,

$$H = \varepsilon^2(h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots) \quad (4.115)$$

bulunur. Poisson braketi kullanarak sadece (4.109) akışları, bulunan (4.114) deki h_1 fonksiyonu cinsinden

$$A_{t_1} = \left\{ A, -\frac{1}{10}h_1 \right\}, \quad B_{t_1} = \left\{ B, -\frac{1}{10}h_1 \right\} \quad (4.116)$$

olarak yazılır. Diğerleri için böyle bir yazılım mümkün değildir.

Ayrıca bulduğumuz seri çözümlerini ve amlitüt akışlarını $w = 2$, $b = -6a$ integrallenebilme durumuna karşı gelen birinci integralde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{8}{3}a(A\bar{B} + \bar{A}B), \\ k_1 &= 8a^2|B|^2(6|A|^2 + |B|^2) + (b + 6a)(\text{eksponansiyel terimler}), \\ k_2 &= -\frac{1}{6}a(A\bar{B}^2 + \bar{A}B^2) \left(3a(2b - 15a)|B|^2 + (60a^2 + 32ab - 5b^2)|A|^2 \right) + \\ &\quad (b + 6a)(\text{eksponansiyel terimler}), \end{aligned}$$

olmak üzere, yeni koordinatlarda birinci integral

$$k = \varepsilon^3(k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \dots) \quad (4.117)$$

olarak bulunur. Burada k_1 ve k_2 ifadeleri $b + 6a = 0$ olması halinde sabittirler.

4.7.3 Daha Genel Açılım

Bozulma açılımında daha genel açılımlar elde etmek için farklı amplitütler tanıtarak bulunan u_i çözümlerine homojen çözümler ekleyelim. (4.110) ikinci mertebeden çözümüne

$$u_{2h} = e^{2it} A_1 + e^{-2it} \bar{A}_1, \quad v_{2h} = e^{it} B_1 + e^{-it} \bar{B}_1 \quad (4.118)$$

homojen çözümlerini eklediğimizde, t_2 akışını kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$\begin{aligned} A_{t_2} &= \frac{ib}{24}(6a|B|^2 - 5b|A|^2)A + \frac{ia}{2}BB_1 - A_{1t_1} \\ B_{t_2} &= \frac{ia}{8}((6a+4b)|A|^2 - 5|B|^2)B + iaA\bar{B}_1 - B_{1t_1} \end{aligned} \quad (4.119)$$

olarak buluruz. Bir önceki kısımdaki u_3 ve v_3 çözümlerinde

$$\begin{aligned} u_{3h} &= -\frac{1}{2}(a\bar{B}B_1 - b\bar{A}A_1) - \frac{b}{6}e^{4it}AA_1 + c.c. \\ v_{3h} &= \frac{a}{4}e^{3it}(AB_1 + BA_1) + c.c. \end{aligned} \quad (4.120)$$

terimleri ilave olarak bulunur. Bu durumda t_1 ve t_2 akışları için kommut olup olmadıklarına bakarsak ;

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]^A &= \frac{1}{96} \left(96(iaBB_{1t_1} - A_{1t_1t_1}) - 6a^2(5a+2b)\bar{B}B^3 - \right. \\ &\quad ab(24a+5b)A^2\bar{B}^2 + 2a(18a^2+24ab+5b^2)B^2A\bar{A} \\ &\quad \left. - 48a^2(\bar{B}AB_1 - B\bar{B}A_1 - BA\bar{B}_1) \right) \end{aligned} \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} [X_1, X_2]^B &= \frac{1}{48} \left(48(-B_{1t_1t_1} + 2ai(A\bar{B}_{1t_1} + \bar{B}A_{1t_1})) - \right. \\ &\quad 12a^2(B\bar{B}_1 - 2\bar{B}B_1)B + 9a^2(11a+2b)AB\bar{B}^2 - \\ &\quad 2a(36a^2+24ab+5b^2)\bar{B}A^2\bar{A} - 3a^2(13a+2b)B^3\bar{A} \\ &\quad \left. + 48a^2(B\bar{A}A_1 - BA\bar{A}_1 - A\bar{A}B_1) \right) \end{aligned} \quad (4.122)$$

denklemlerini buluruz. Bu denklemler A_1 ve B_1 terimlerine göre lineerdir. Kommütasyon bağıntılarının sağlanması için, katsayıları A , B ve kompleks eşleniklerine bağlı olan A_1 , B_1 ve kompleks eşleniklerine göre ikinci mertebeden lineer adi diferensiyel denklemlerinin bir sisteminin çözümü bulunmalıdır.

Bu denklem sisteminin bir özel çözümü, ancak a ve b arasında

$$b = -\frac{2}{5}a(3 \mp 2\sqrt{21}) \quad (4.123)$$

bağıntılarından birisinin sağlanması şartıyla

$$A_1 = \frac{1}{32}(b + 2a)B^2, \quad B_1 = -\frac{1}{8}(b + 8a)A\bar{B} \quad (4.124)$$

veya

$$A_1 = \frac{(b + 6a)(5b - 6a)}{384a}B^2, \quad B_1 = -\frac{(36a^2 + 24ab + 5b^2)}{96a}A\bar{B} \quad (4.125)$$

olarak bulunur. Buda aradığımız integrallenebilme şartından farklıdır. Benzer olarak bir sonraki adımda bir başka amplitüt daha eklersek, kommutasyon bağıntılarının sağlanması için bulunan diferensiyel denklemlerin çözümü mümkün olamamaktadır. Dolayısıyla yüksek dereceden zaman ölçütleriyle çok boyutlu ölçü metodu $a \neq 0$ olması halinde istenen sonucu vermemektedir.

4.7.4 3 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemde Çok Boyutlu Ölçü Analizi

Şimdi de çok boyutlu ölçü metodunu 3 serbestlik dereceli Henon-Heiles sistemine uygulayalım. (4.79) Hamilton fonksiyonuna karşı gelen (4.80) hareket denklemlerinin çözümlerinin, (4.82) seri çözümünde (4.81) ile birlikte $i = 3$ için

$$u_{1m} \equiv u_m(t_0, t_1, \dots, t_n), \quad u_{2m} \equiv v_m(t_0, t_1, \dots, t_n), \quad u_{3m} \equiv w_m(t_0, t_1, \dots, t_n) \quad (4.126)$$

olarak

$$q_1(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m u_m, \quad q_2(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m v_m, \quad q_3(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m w_m \quad (4.127)$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Bunları (4.80) sisteminde yerine yazıp ε -nun kuvvetlerinin katsayılarını sıfıra eşitlediğimizde,

ε^1 teriminin katsayısından,

$$\begin{aligned} u_{1_{t_0 t_0}} + w^2 u_1 &= 0, \\ v_{1_{t_0 t_0}} + v_1 &= 0, \\ w_{1_{t_0 t_0}} + w_1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.128)$$

ε^2 teriminin katsayısından,

$$\begin{aligned} u_{2_{t_0 t_0}} + w^2 u_2 &= bu_1^2 - a_1 v_1^2 - a_2 w_1^2 - 2u_{1_{t_0 t_1}}, \\ v_{2_{t_0 t_0}} + v_2 &= -2(v_{1_{t_0 t_1}} + a_1 u_1 v_1) \\ w_{2_{t_0 t_0}} + w_2 &= -2a_2 u_1 w_1 - 2w_{1_{t_0 t_1}}. \end{aligned} \quad (4.129)$$

ε^3 teriminin katsayısından,

$$\begin{aligned} u_{3_{t_0 t_0}} + w^2 u_3 &= -2(a_1 v_1 v_2 + a_2 w_1 w_2 - bu_1 u_2) - \\ &\quad 2(u_{2_{t_0 t_1}} + u_{1_{t_0 t_2}}) + u_{1_{t_1 t_1}}, \\ v_{3_{t_0 t_0}} + v_3 &= -2a_1(u_2 v_1 + u_1 v_2) - \\ &\quad 2(v_{2_{t_0 t_1}} + v_{1_{t_0 t_2}}) - v_{1_{t_1 t_1}}, \\ w_{3_{t_0 t_0}} + w_3 &= -2a_2(u_1 w_2 + u_2 w_1) - 2w_{1_{t_0 t_2}} \\ &\quad - 2w_{2_{t_0 t_1}} - w_{1_{t_1 t_1}}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

denklemler sistemi bulunur.

Burada yine (4.128) denklem sistemi, sabit katsayılı homogen lineer diferansiyel denklemler sistemi olup, genel çözümleri, $A \equiv A(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $B \equiv B(t_1, t_2, \dots, t_n)$, $C \equiv C(t_1, t_2, \dots, t_n)$ ve $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, sırasıyla A , B ve C nin kompleks eşlenikleri olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{iwt_0} + \bar{A}e^{-iwt_0}, \\ v_1 &= Be^{it_0} + \bar{B}e^{-it_0} \\ w_1 &= Ce^{it_0} + \bar{C}e^{-it_0} \end{aligned} \quad (4.131)$$

şeklindedir. Bu çözümleri (4.129) denklemlerinde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
 u_{2t_0t_0} + w^2 u_2 &= -e^{2it_0}(C^2 a_2 - B^2 a_1) - 2iwe^{ixw} \frac{\partial A}{\partial t_1} + c.c. + \\
 &\quad e^{2iwt_0} A^2 b + 2|A|^2 b - 2|B|^2 a_1 - 2|C|^2 a_2 \\
 v_{2t_0t_0} + v_2 &= -2(e^{it_0(w-1)} \bar{B} A a_1 + e^{it_0(w+1)} B A a_1) + \\
 &\quad 2e^{it_0} \frac{\partial B}{\partial t_1} + c.c. \\
 w_{2t_0t_0} + w_2 &= -2(e^{it_0(w+1)} A C a_2 + e^{it_0(w-1)} A \bar{C} a_2 + \\
 &\quad i e^{it_0} \frac{\partial C}{\partial t_1}) + c.c.
 \end{aligned} \tag{4.132}$$

bulunur. $w = \mp 2$ rezonansının olmadığını, yani $w \neq \mp 2$ olduğunu varsayarak istenmeyen terimlerden kurtulmak için, kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$A_{t_1} = 0, \quad B_{t_1} = 0, \quad C_{t_1} = 0 \tag{4.133}$$

aldığımızda, (4.132) sisteminin çözümleri

$$\begin{aligned}
 u_2 &= -\frac{bA^2}{3w^2} e^{2iwt_0} - \frac{e^{2it_0}}{4-w^2} (a_1 B^2 + a_2 C^2) + c.c. + \\
 &\quad \frac{2}{w^2} (b|A|^2 - a_1|B|^2 - a_2|C|^2) \\
 v_2 &= \frac{2a_1}{w} \left(\frac{1}{w-2} A \bar{B} e^{it_0(w-1)} + \frac{1}{w+2} A B e^{it_0(w+1)} \right) + c.c. \\
 w_2 &= \frac{2a_2}{w} \left(\frac{1}{w-2} A \bar{C} e^{it_0(w-1)} + \frac{1}{w+2} A C e^{it_0(w+1)} \right) + c.c.
 \end{aligned} \tag{4.134}$$

olarak bulunur. Bu çözümü (4.130) denklemlerinde yerine yazar ve $w = \mp 1$ rezonansının olmadığını, yani $w \neq \mp 1$ olduğunu varsayarak istenmeyen terimlerden kurtulmak için kompleks eşlenikleriyle birlikte,

$$\begin{aligned}
 A_{t_2} &= \frac{i}{3w^2(w^2-4)} \left(5b^2(w^2-4)|A|^2 + 6a_1|B|^2(b(w^2-4) \right. \\
 &\quad \left. + 2a_1w^2) + 6a_2|C|^2(b(w^2-4) + 2a_2w^2) \right) A, \\
 B_{t_2} &= -\frac{i}{w^2(w^2-4)} \left(B|B|^2 a_1^2(w^2 - \frac{8}{3}) + \bar{B} C^2 a_1 a_2 w^2 + \right. \\
 &\quad \left. 2B|A|^2 a_1(b(w^2-4) - 2a_1w^2) + B|C|^2 a_1 a_2(w^2-4) \right), \\
 C_{t_2} &= -\frac{i}{w^2(w^2-4)} \left(w^2 B^2 \bar{C} a_1 a_2 + 2|A|^2 C a_2(b(w^2-4) + 2a_2w^2) \right. \\
 &\quad \left. + 2|C|^2 C a_2^2(w^2 - \frac{8}{3}) + 2|B|^2 C a_1 a_2(4-w^2) \right).
 \end{aligned}$$

aldığımızda, daha sonra

$$\begin{aligned}
 u_3 = & \frac{1}{(w^2-1)(w^2-4)} \left(\frac{a_1^2}{w}(w-1)(w-2) - \frac{1}{2}ba_1 e^{it_0(w+2)} AB^2 - \right. \\
 & (2ba_1(w - \frac{1}{4}) - a_1^2(w+1)(w+2)) e^{it_0(w-2)} A\bar{B}^2 + \\
 & (w-1)(\frac{1}{2}ba_2 + a_2^2(w-2)) e^{it_0(w+2)} AC^2 - \\
 & -(\frac{1}{2}ba_2(w-1) - a_2^2(w+1)(w+2)) e^{it_0(w-2)} A\bar{C}^2 + \\
 & \left. + \frac{1}{12w^2} b^2 e^{3iwt_0} A^3 \right) + c.c., \tag{4.135}
 \end{aligned}$$

v_3 ve w_3 çözümleri içinde benzer ifadeler bulunur. Bu işlemlere devam edildiğinde daha sonraki çözümlere ulaşılabilir.

Hamilton Fonksiyonu ve Hamiltoniyen Yapısı

Şimdi rezonans olmadığı kabulü altında, yukarıdaki çözümlerle amplitüt akışlarını Hamilton fonksiyonunda yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 2(w^2 |A|^2 + |B|^2 + |C|^2) \\
 h_2 &= \frac{1}{9w^2(w^2-4)^2} \left((-9a_1^2(9w^4 - 68w^2 + 96) |B|^4 + \right. \\
 & 9a_1(((10a_1 - 3b)w^4 - 12(2a_1 + 3b)w^2 + 16(a_1 + 3b))) |A|^2 |B|^2 \\
 & \left. - 37b^2(w^2 - 4)^2 |A|^4 \right) + \dots
 \end{aligned}$$

olmak üzere, yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonu

$$H = \varepsilon^2(h_0 + \varepsilon^2 h_2 + \varepsilon^4 h_4 + \dots) \tag{4.136}$$

olarak bulunur. Şimdi rezonans durumlarına ayrı ayrı bakalım.

4.7.5 Rezonans Durumları

(i) $w = 1$ Durumu

Özel olarak $w = 1$ aldığımızda ilk çözümler,

$$\begin{aligned}
u_1 &= Ae^{it_0} + \bar{A}e^{-it_0}, \\
v_1 &= Be^{it_0} + \bar{B}e^{-it_0} \\
w_1 &= Ce^{it_0} + \bar{C}e^{-it_0}
\end{aligned} \tag{4.137}$$

bulunur. Bu çözümleri (4.80) denkleminde yerine yazar ve kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$A_{t_1} = 0, \quad B_{t_1} = 0, \quad C_{t_1} = 0 \tag{4.138}$$

alırsak,

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{1}{3}e^{2it_0}(a_1B^2 + a_2C^2 + bA^2) + c.c. + \\
&\quad 2(b|A|^2 - a_1|B|^2 - a_2|C|^2) \\
v_2 &= \frac{2}{3}a_1e^{2it_0}AB - 2a_1A\bar{B} + c.c. \\
w_2 &= \frac{2}{3}a_2e^{2it_0}AC - 2a_2A\bar{C} + c.c
\end{aligned} \tag{4.139}$$

çözümleri bulunur. Bu çözümleri kullanarak bir sonraki adımda istenmeyen terimden kurtulmak için kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$\begin{aligned}
A_{t_2} &= \frac{-i}{3} \left(2a_1(2a_1 - 3b)A|B|^2 + a_1(b + 6a_1)\bar{A}B^2 + \right. \\
&\quad \left. 5b^2A|A|^2 + a_2(b + 6a_2)\bar{A}C^2 + 2a_2(2a_2 - 3b)A|C|^2 \right) \\
B_{t_2} &= \frac{-ia_1}{3} \left((b + 6a_1)A^2\bar{B} - a_2\bar{B}C^2 + 5a_1B|B|^2 \right. \\
&\quad \left. + 2(2a_1 - 3b)B|A|^2 + 6a_2B|C|^2 \right) \\
C_{t_2} &= \frac{-ia_2}{3} \left(6a_1C|B|^2 - a_1B^2\bar{C} + 2(2a_2 - 3b)C|A|^2 \right. \\
&\quad \left. + (b + 6a_2)A^2\bar{C} + 5a_2C|C|^2 \right)
\end{aligned}$$

alırsak, daha sonraki çözümler,

$$\begin{aligned}
u_3 &= \frac{1}{12}e^{3it_0}A(a_1(2a_1 - b)B^2 + b^2A^2 + a_2(-b + 2a_2)C^2) \\
v_3 &= \frac{a_1}{12}e^{3it_0}B((2a_1 - b)A^2 + a_1B^2 + a_2C^2) \\
w_3 &= a_2e^{3it_0}C(a_1B^2 + a_2C^2 + (2a_2 - b)A^2)
\end{aligned}$$

olarak ve benzer şekilde diğer çözümler ve karşı gelen amplitüt akışları bulunabilir.

Hamilton Fonksiyonu ve Hamiltoniyen Yapısı

Şimdi yukarıdaki çözümlerle amplitüt akışlarını Hamilton fonksiyonunda yerine yazarak,

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 12(|A|^2 + |B|^2 + |C|^2) \\
 h_2 &= \frac{2}{3} \left(-37b|A|^4 - 108a_1a_2|B|^2|C|^2 - a_1(54a_1 + 17b)A^2\bar{B}^2 \right. \\
 &\quad \left. - 37a_2^2|C|^4 + 108a_2b|A|^2|C|^2 + 4a_1(27b - 10a_1)|A|^2|B|^2 \right. \\
 &\quad \left. - 37a_1^2|B|^4 - a_2(54a_2 + 17b)\bar{A}^2C^2 + 17a_1a_2\bar{B}^2C^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.140}$$

olmak üzere, yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonu

$$H = \varepsilon^2(h_0 + \varepsilon^2h_2 + \varepsilon^4h_4 + \dots) \tag{4.141}$$

olarak bulunur.

$w = 1$ için kısalık bakımından $b = -a_1$, $a_2 = a_1$ integrallenebilme şartını kullanırsak amplitüt akışları, kompleks eşlenikleri ile birlikte

$$A_{t_1} = 0, \quad B_{t_1} = 0, \quad C_{t_1} = 0 \tag{4.142}$$

ve

$$\begin{aligned}
 A_{t_2} &= \frac{-5ia_1^2}{3} (2A|B|^2 + \bar{A}B^2 + A|A|^2 + C^2\bar{A} + 2A|C|^2) \\
 B_{t_2} &= \frac{-ia_1^2}{3} (5B|B|^2 + 5\bar{B}A^2 - \bar{B}C^2 + 10B|A|^2 + 6B|C|^2) \\
 C_{t_2} &= \frac{-ia_1^2}{3} (6C|B|^2 - B^2\bar{C} + 10|A|^2C + 5A^2\bar{C} + 5C|C|^2)
 \end{aligned} \tag{4.143}$$

ve

$$A_{t_3} = 0, \quad B_{t_3} = 0, \quad C_{t_3} = 0 \tag{4.144}$$

ve

$$\begin{aligned}
 A_{t_4} = & -\frac{ia^4}{36} \left(49A|A|^4 + 49A^3\bar{C}^2 + 294A|A|^2|B|^2 + 294A|A|^2|C|^2 + \right. \\
 & 147\bar{A}|A|^2B^2 + 147A|B|^4 + 400A|B|^2|C|^2 + 147\bar{A}|A|^2C^2 - \\
 & 53A\bar{B}^2C^2 + 98AC^2|C|^2 + 49\bar{B}^2A^3 - 53AB^2\bar{C}^2 + \\
 & \left. 147A|C|^4 + 98AB^2|B|^2 + 98\bar{A}B^2|C|^2 + 98\bar{A}C^2|B|^2 \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.145}$$

B_{t_4} ve C_{t_4} akışları içinde benzer ifadeler bulunur. Kommütasyon bağıntılarından,

$$\begin{aligned}
 A_{t_2t_4} - A_{t_4t_2} = & \frac{5a_1^6}{27} \bar{A} \left(41A^2\bar{B}^2\bar{C}^2 - 82A^2|B|^2|C|^2 + 41A^2C^2\bar{B}^2 + \right. \\
 & 50B|B|^2|C|^2 - 25B^4\bar{C}^2 - 25C^2|B|^4 \\
 & \left. - 25B^2|C|^4 + 50|B|^2C|C|^2 - 25\bar{B}^2C^4 \right)
 \end{aligned}$$

ve $B_{t_2t_4} - B_{t_4t_2}$ ve $C_{t_2t_4} - C_{t_4t_2}$ içinde benzer ifadeler bulunur. Bu ise, ancak $a_1 = 0$ olması halinde kommütasyon bağıntılarının sağlandığını ifade eder.

Hamilton Fonksiyonu ve Hamiltoniyen Yapısı

Yine bulunan yeni akışlar ve çözümleri Hamilton fonksiyonunda yerine yazdığımızda,

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 2(|A|^2 + |B|^2 + |C|^2) \\
 h_2 &= \frac{2}{3}a_1^2 \left((-37A^2\bar{B}^2 + 17\bar{B}^2C^2 - 37\bar{A}^2C^2) + c.c. \right. \\
 &\quad - 37|B|^4 - 148|A|^2|B|^2 - 108|B|^2|C|^2 \\
 &\quad \left. - 37|A|^4 - 148|A|^2|C|^2 - 37|C|^4 \right)
 \end{aligned}$$

olmak üzere, yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonu

$$H = \varepsilon^2(h_0 + \varepsilon^2h_2 + \varepsilon^4h_4 + \dots)$$

olarak bulunur. Poisson braketi kullanarak (4.143) akışlarını, bulduğumuz h_i Hamilton fonksiyonları ile yazmaya çalıştığımızda sadece A_{t_2} akışını

$$A_{t_2} = \left\{ A, -\frac{1}{296}h_2 \right\}$$

olacak şekilde yazabiliyoruz.

(ii) $w = 2$ Durumu

Bu durumda birinci terimleri veren çözümler

$$\begin{aligned} u_1 &= Ae^{2it_0} + \bar{A}e^{-2it_0}, \\ v_1 &= Be^{it_0} + \bar{B}e^{-it_0} \\ w_1 &= Ce^{it_0} + \bar{C}e^{-it_0} \end{aligned}$$

ve istenmeyen terimler kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$\begin{aligned} A_{t_1} &= \frac{i}{4}(a_1 B^2 + a_2 C^2) \\ B_{t_1} &= ia_1 A \bar{B} \\ C_{t_1} &= ia_2 A \bar{C} \end{aligned} \tag{4.146}$$

bulunur. Benzer olarak ikinci terimleri veren çözümler,

$$\begin{aligned} u_2 &= -\frac{b}{2}e^{4it_0}A^2 + c.c. + \frac{1}{2}(b|A|^2 - a_1|B|^2 - a_2|C|^2) \\ v_2 &= \frac{a_1}{4}e^{3it_0}AB + c.c. \\ w_2 &= \frac{a_2}{4}e^{3it_0}AC + c.c. \end{aligned} \tag{4.147}$$

ve istenmeyen terimler kompleks eşlenikleriyle birlikte

$$\begin{aligned} A_{t_2} &= \frac{-ib}{24}A(-6a_1|B|^2 + 5b|A|^2 - 6a_2|C|^2) \\ B_{t_2} &= \frac{ia_1}{8}(-5a_1|B|^2 B - a_2\bar{B}C^2 + \\ &\quad 2(2b + 3a_1)B|A|^2 + 4a_2B|C|^2) \\ C_{t_2} &= \frac{ia_2}{8}(-4a_1|B|^2 C - a_1\bar{B}C^2 + \\ &\quad 2(2b + 3a_1)B|A|^2 - 4a_2B|C|^2) \end{aligned} \tag{4.148}$$

olarak bulunur. Kommütasyon bağıntılarından,

$$\begin{aligned} A_{t_2t_4} - A_{t_4t_2} &= \frac{1}{96} \left(a_1b(-24a_1 - 5b)A^2\bar{B}^2 + 6a_1^2(-5a_1 - b)B^2|B|^2 + \right. \\ &\quad 6a_1a_2(-a_1 - 4a_2 - b)|B|^2C^2 + 2a_1(18a_1^2 + 24a_1b + \\ &\quad 5b^2)|A|^2B^2 + 6a_1a_2(-4a_1 - a_2 - b)|C|^2B^2 + \\ &\quad 2a_2(18a_2^2 + 24a_2b + 5b^2)|A|^2C^2 + \\ &\quad \left. a_2b(-24a_2 - 5b)A^2\bar{C}^2 + 6a_2^2(-5a_2 - b)C^2|C|^2 \right) \end{aligned}$$

ve $B_{t_2 t_4} - B_{t_4 t_2}$ ve $C_{t_2 t_4} - C_{t_4 t_2}$ içinde ifadeler buluruz. Bunlar da bize, integ-rallenebilme şartlarıyla ilgili kesin bir sonuç vermemiştir.

Hamilton Fonksiyonu ve Hamiltoniyen Yapısı

Bulunan çözümler ve amplitüt akışları (4.79) Hamilton fonksiyonunda yerine yazılarak,

$$\begin{aligned}
 h_0 &= 2(4|A|^2 + |B|^2 + |C|^2) \\
 h_1 &= \frac{5}{2}a_1^2 A \bar{B}^2 + \frac{5}{2}a_2^2 A \bar{C}^2 + c.c. \\
 h_2 &= -\frac{37}{36}b^2 |A|^4 - \frac{27}{16}a_1^2 |B|^4 - \frac{27}{16}a_2^2 |C|^4 - \\
 &\quad \left(\frac{3}{16}a_1 a_2 \bar{B}^2 C^2 + c.c.\right) + a_1(3b + \frac{33}{8}a_1) |A|^2 |B|^2 + \\
 &\quad a_2(3b + \frac{33}{8}a_2) |A|^2 |C|^2 - 3a_1 a_2 |B|^2 |C|^2
 \end{aligned} \tag{4.149}$$

olmak üzere, yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonu

$$H = \varepsilon^2(h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots) \tag{4.150}$$

şeklinde bulunur. Poisson braketi kullanarak (4.146) akışını bulduğumuz h_1 fonksiyonu ile yazdığımızda

$$A_{t_1} = \left\{A, -\frac{1}{20}h_1\right\}, \quad B_{t_1} = \left\{B, -\frac{1}{10}h_1\right\}, \quad C_{t_1} = \left\{C, -\frac{1}{10}h_1\right\}$$

bulunur.

$b = -6a_1, a_2 = a_1$ değerleri için akışlara bakıldığında ise

$$A_{t_1} = \frac{ia_1}{4}(B^2 + C^2)$$

$$B_{t_1} = ia_1 A \bar{B}$$

$$C_{t_1} = ia_1 A \bar{C}$$

$$A_{t_2} = \frac{-3ia_1^2}{2}A(|B|^2 + 5|A|^2 + |C|^2)$$

$$B_{t_2} = \frac{-ia_1^2}{8}(|B|^2 B + \bar{B}C^2 + 18B|A|^2 + 4B|C|^2)$$

$$C_{t_2} = \frac{-ia_1^2}{8}(4|B|^2 C + B^2 \bar{C} + 18C|A|^2 + 5C|C|^2)$$

ve kommutasyon bağıntıları,

$$A_{t_2 t_4} - A_{t_4 t_2} = \frac{1}{16} a_1^3 \left(-6A^2 \bar{B}^2 + B^2 |B|^2 + |B|^2 C^2 + 18|A|^2 B^2 + |C|^2 B^2 + 18|A|^2 C^2 - 6A^2 \bar{C}^2 + C^2 |C|^2 \right)$$

$B_{t_2 t_4} - B_{t_4 t_2}$ ve $C_{t_2 t_4} - C_{t_4 t_2}$ içinde benzer ifadeler bulunur. Bu ise bize yine $a_1 = 0$ aşıkâr sonucunu vermektedir.

Bu durumdaki Hamilton fonksiyonu ise,

$$\begin{aligned} h_0 &= 2(4|A|^2 + |B|^2 + |C|^2) \\ h_1 &= \frac{5}{2} a_1 (A \bar{B}^2 + A \bar{C}^2) + c.c. \\ h_2 &= a_1^2 \left(-37|A|^4 - \frac{27}{16}|B|^4 - \frac{27}{16}|C|^4 - \left(\frac{3}{16} \bar{B}^2 C^2 + c.c. \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{111}{8}|A|^2 |B|^2 - \frac{111}{8}|A|^2 |C|^2 - 3|B|^2 |C|^2 \right) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$H = \varepsilon^2 (h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots)$$

olarak bulunur.

4.8 Sonuç

Çok boyutlu ölçü metodu bir serbestlik dereceli sistemlerde integrallenebilmeyi test etmek için uygulanabilen bir metod olmasına rağmen iki ve üç serbestlik dereceli Hamilton sistemlerde istenen sonuçları tam olarak vermemektedir. Dolayısıyla integrallenebilen sonlu boyutlu Hamilton sistemlerinin integrallenebilirliğini test etmek için çok boyutlu ölçü metodu genelde başarısız kalmaktadır. Ancak, bu hesaplamalar sonucunda bulunan kompleks düzlemdeki yeni koordinatlar, bir sonraki bölümde ilgileneceğimiz Hamilton sistemlerinin normal formlarıyla yakın bir ilişkinin var olduğunu göstermiştir. Yani çok boyutlu ölçü metoduyla bulunan çözümler kullanılarak Hamilton fonksiyonunun normal formu yeni koordinatlarda bulunmuştur.

4.9 Örnek REDUCE Programı

Comment HENON-HEILES denklemleri için çok boyutlu ölçü metodu;

```
operator u,v,u1,v1,u2,v2,r,y,dy,ddy;
```

Comment Hareket denklemleri;

```
p:=ddy(u)+w^2*u-b*u**2+a*v**2;
```

```
q:=ddy(v)+v+2*a*u*v;
```

Comment Hamilton fonksiyonu;

```
Enr:=1/2*(dy(u)^2+dy(v)^2+w1^2*u^2+w2^2*v^2)+
```

```
a*u*v^2-b/3*u^3;
```

```
L:=5;
```

```
w1:=w;w2:=1;
```

Comment varsayılan seri açılımları;

```
let u=for j:=1:L sum u(x,y(1),y(2),y(3),y(4),y(5),j)*h**j;
```

```
let v=for j:=1:L sum v(x,y(1),y(2),y(3),y(4),y(5),j)*h**j;
```

Comment yavaş zaman parametreleri $y_0=x, y_1=hx, y_2=h^2x, y_3=h^3x$;

```
For all u let dy(u)=df(u,x)+for j:=1:L sum h^j*df(u,y(j))$
```

```
For all u let ddy(u)=df(dy(u),x)+for j:=1:L sum h^j*df(dy(u),y(j))$
```

```
let h^8=0;
```

```
off nat;
```

Comment h ya göre katsayılar;

```
c:=coeff(num(p),h);
```

```
m:=length(c);
```

```
c1:=coeff(num(q),h);
```

```
m1:=length(c1);
```

```
on div;on rat;
```

Comment bulunan seri çözümlerinde ilk terim aşağıdaki gibidir;

```
u(x,y(1),y(2),y(3),y(4),y(5),1):=u1(y(1),y(2),y(3),y(4),y(5),1)*
```

```
exp(i*x*w)+ u1(y(1),y(2),y(3),y(4),y(5),-1)*exp(-i*x*w)$  
v(x,y(1),y(2),y(3),y(4),y(5),1):=v1(y(1),y(2),y(3),y(4),y(5),1)*  
exp(i*x)+ v1(y(1),y(2),y(3),y(4),y(5),-1)*exp(-i*x)$
```

Comment bu ilk çözümler kullanılarak h ya göre olan katsayılardan diğer çözümler ve akışlar bulunur;



Bölüm 5

Sonlu Boyutlu Hamilton Sistemler İçin Normal Form

5.1 Giriş

Bir önceki bölümde, çok boyutlu ölçü analizinde bulduğumuz seri çözümleri kompleks ifadeler içerdiğinden, bu bölümde kompleks koordinatlara bir dönüşüm tanımlanmıştır. Bu dönüşümle yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonu Poisson braket yardımıyla normal forma indirgenmiştir. Sonuçta bulunan Hamilton sistemlerin normal formu ile çok boyutlu ölçü analizinde bulunan Hamilton fonksiyonlarının aynı oldukları gösterilmiştir. Böylece X_{H_0} vektör alanının çekirdeklerinin oluşturduğu birinci integrallerin bir cebiri kurulmuştur. İleriki çalışmalarda bu koordinatlar kullanılarak sonlu boyutlu Hamilton sistemlerin birinci integrallerini belirleyen yeni metodlar geliştirilebilir.

5.2 Hamilton Sistemlerin İndirgenmesi

H_j ler $j + 2$ -inci dereceden homojen polinomlar olmak üzere,

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + \dots \quad (5.1)$$

Hamilton fonksiyonunu ele alalım. Ayrıca

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (p_j^2 + w_j^2 q_j^2) \quad (5.2)$$

fonksiyonu serbest harmonik salınımın bir kümesi olsun. Burada eğer,

$$(q_j, p_j) \rightarrow (w_j^{-1/2} q_j, w_j^{1/2} p_j) \quad (5.3)$$

kanonik dönüşümü uygulanırsa (5.2) Hamilton fonksiyonu,

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j (p_j^2 + q_j^2) \quad (5.4)$$

formuna gelir. Şimdi de karakteristik koordinatlarda bir dönüşüm elde etmek için $\{H_0, \cdot\}$ operatörünü köşegenleştiren, kompleks düzlemde

$$z_j = q_j + ip_j \quad (5.5)$$

$$\{z_j, z_k\} = \{\bar{z}_j, \bar{z}_k\} = 0 \quad \{z_j, \bar{z}_k\} = -2i\delta_{jk} \quad (5.6)$$

olacak şekilde bir kanonik dönüşüm tanımlayalım. (5.5) dönüşümü kullanıldığında (5.4) Hamilton fonksiyonu

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n w_j z_j, \bar{z}_j \quad (5.7)$$

şeklini alacağından F ve H_0 fonksiyonlarının Poisson braketi,

$$\{F, H_0\} = X_{H_0} F = -i \sum_{j=1}^n w_j \left(z_j \frac{\partial}{\partial z_j} - \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) F \quad (5.8)$$

olarak yazılır. Böylece kompleks koordinatlarda Poisson braket genel olarak,

$$\{F, H\} = -2i \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial z_j} \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial H}{\partial z_j} \frac{\partial F}{\partial \bar{z}_j} \right) \quad (5.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 5.1 2 serbestlik dereceli sistemlerde

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + w^2 q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + a q_1 q_2^2 - \frac{b}{3} q_1^3$$

Hamilton fonksiyonunu ele alalım. (5.3) kanonik dönüşümleri uygulandıktan sonra Hamilton fonksiyonu

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{w}}, \beta = \frac{b}{w\sqrt{w}}$$

olmak üzere,

$$H = \frac{1}{2}w(p_1^2 + q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 + q_2^2) + \alpha q_1 q_2^2 - \frac{\beta}{3} q_1^3$$

formuna gelir. Buradan, hareket denklemleri

$$\begin{aligned} q_{1tt} + w^2 q_1 &= -\alpha w q_2^2 + \beta w q_1^2 \\ q_{2tt} + q_2 &= -2\alpha q_1 q_2 \end{aligned}$$

bulunur. (5.5) dönüşümü uygulandıktan sonra kompleks koordinatlarda ise,

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}(w z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) \\ H_1 &= \frac{1}{8}(z_1 + \bar{z}_1) \left(\alpha(z_2 + \bar{z}_2)^2 - \frac{\beta}{3}(z_1 + \bar{z}_1)^2 \right) \end{aligned}$$

olmak üzere, Hamilton fonksiyonu $H = H_0 + H_1$ olarak ve hareket denklemleri kompleks eşlenikleri ile birlikte

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 + w^2 z_1 &= \frac{1}{4} \left(w(\beta(3z_1 + 2\bar{z}_1)z_1 - \beta\bar{z}_1^2 - \alpha(z_2 + \bar{z}_2)^2) - 2\alpha(z_2^2 - \bar{z}_2^2) \right), \\ \ddot{z}_2 + z_2 &= -\frac{\alpha}{2} w(z_1 - \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2) - \alpha z_2(z_1 + \bar{z}_1) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

5.2.1 X_{H_0} Vektör Alanının Çekirdeği

X_{H_0} vektör alanının,

$$i \sum_{j=1}^n w_j (n_j - m_j)$$

özdeğerlerine ve

$$l = \sum_{j=1}^n (n_j + m_j) \quad (5.10)$$

ağırlığına karşı gelen özfonksiyonları,

$$H_{nm} = z^m \bar{z}^n = z_1^{m_1} \dots z_n^{m_n} \bar{z}_1^{n_1} \dots \bar{z}_n^{n_n} \quad (5.11)$$

şeklinde çok terimlidir. H_0 ile involusyonda olan fonksiyonlar sıfır özdeğerlerine sahiptir ve

$$\sum_{j=1}^n w_j (n_j - m_j) = 0 \quad (5.12)$$

bağıntısını sağlarlar. Burada $w_1, w_2, \dots, w_n$ bağımsız değişkenlerdir ve çözümler $n_j = m_j$ durumundadır. $l = 2$ ağırlığına karşı gelen fonksiyonlar $|z_j|^2$, $j = 1, 2, \dots, n$ formundadır.

Verilen (5.7) H_0 fonksiyonu ve $\Omega = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ için, w nın rezonans olarak adlandırılması için gerek ve yeter şart $\Omega \cdot r = 0$ olacak şekilde $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \neq 0 \in \mathbb{Z}^n$ nin varolmasıdır. w_j ler rezonans durumlarına göre değerler alırlar.

Burada H_0 ın kendisiyle kommut olan bağımsız integralleri vardır. İntegrallerin herhangi bir fonksiyonunda yine bir integraldir. Biz bloklar olarak kullanılan bazı temel polinomsal integrallerle ilgilendik. Eğer, (5.12) sağlanıyorsa (5.11) fonksiyonları $\Omega = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ ile verilen lineer sistemin ilkel (primitive) integralidir.

Bütün integrallerin kümesi bir birleşmeli cebir(basit çarpma işlemi ve lineer birleşimleri ile) ve bir Lie cebiri((5.6) Poisson braket ve lineer birleşimleri ile) oluşturur. Şimdi rezonanslar ile bir sistemin birinci integrallerinin cebirini ele alalım ve bunu kullanarak sonlu boyutlu Hamilton sistemi için normal formlarını belirleyelim.

İlkel integralleri içeren en küçük tam küme G_Ω ile gösterilir ve bir baz oluşturur. r , rezonansların sayısını göstermek üzere, G_Ω nin boyutu

$$\text{boy}G_\Omega = N + r$$

olarak ifade edilir. Burada, rezonans olmadığı durumda yani, $r = 0$ da bile $|z_j|^2$ terimleri ortaya çıkar.

Örnek 5.2 2 serbestlik derecesli bir sistemdeki $w_1 = w_2 = 1$ rezonans durumuna karşı gelen çekirdek elemanları,

$$(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (m_1, m_2, n_1, n_2)$$

ve

$$l = m_1 + m_2 + n_1 + n_2 = 2$$

olarak alınırsa $|z_1|^2, |z_2|^2, z_1\bar{z}_2, z_2\bar{z}_1$ şeklindedir.

$l = 3$ için çekirdek elemanları yoktur.

$l = 4$ için ise çekirdek elemanları kompleks eşlenikleri ile birlikte, $|z_1|^4, |z_2|^4, |z_1|^2|z_2|^2, z_1^2\bar{z}_2, z_1^2\bar{z}_1\bar{z}_2, z_2^2\bar{z}_1\bar{z}_2$ terimleridir.

$l = 5$ için yine çekirdek elemanları yoktur.

$l = 6$ için çekirdek elemanları kompleks eşlenikleri ile birlikte, $|z_1|^6, |z_2|^6, |z_1|^2|z_2|^4, z_1^3\bar{z}_2^3, z_1z_2^2\bar{z}_1^2\bar{z}_2, z_1z_2^2\bar{z}_2^3, z_1z_2^2\bar{z}_1^3$ terimleridir.

Dikkat edilirse burada, $l = 4$ ve $l = 6$ olması durumunda yazılan çekirdek elemanları $l = 2$ için ortaya çıkan çekirdek elemanlarından ve lineer birleşimlerinden oluşmaktadır.

5.3 Normal Form

Normal form teorisinde Hamilton fonksiyonları, uygun kanonik dönüşümlerle indirgenerek mümkün en basit forma getirilir. Diğer bir deyişle, Hamilton

fonksiyonları ve hareket denklemlerinin daha basit hale getirilmesinde bir kanonik koordinat sistemi seçmek oldukça kullanışlıdır.

Hamilton fonksiyonları, $K_j \in P_{j+2}$ olacak şekilde

$$K = K_0 + K_1 + K_2 + \dots \quad (5.13)$$

forma getirilir. Buradaki

$$(z, \bar{z}) \rightarrow (\zeta, \bar{\zeta})$$

dönüşümü,

$$(z, \bar{z}) = \exp(X_{\Phi(\zeta, \bar{\zeta})})(\zeta, \bar{\zeta})$$

Lie-exponansiyeli ile

$$X_{\Phi(\zeta, \bar{\zeta})} = -2i \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\zeta}_j} \frac{\partial}{\partial \zeta_j} - \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta_j} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_j} \right) \quad (5.14)$$

olarak verilir. Bunları kullanarak $\{K, H\} = 0$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} K &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{n!} \{ \{ \dots \{ \{ H, \Phi \}, \Phi \}, \dots \Phi \}, \Phi \} \\ &= H + \{H, \Phi\} + \frac{1}{2!} \{ \{H, \Phi\}, \Phi \} + \dots \end{aligned} \quad (5.15)$$

yazılabilir. Burada $\Phi_j \in P_{j+2}$ olmak üzere $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$ şeklinde seriye açarsak

$$\begin{aligned} \{\Phi_n, H_0\} &= \mathcal{H}_n - K_n, \\ \mathcal{H}_n &= F_n(H_1, \dots, H_n, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

denklemleri bulunur. (5.15) denklemini aynı dereceden polinomları eşleyerek ilk birkaç tane denklemi açıkça

$$\begin{aligned} K_0 &= H_0, \\ K_1 &= H_1 + \{H_0, \Phi_1\} \\ K_2 &= H_2 + \{H_0, \Phi_2\} + \{H_1, \Phi_1\} + \frac{1}{2} \{ \{H_0, \Phi_1\}, \Phi_1 \}, \\ K_3 &= H_3 + \{H_0, \Phi_3\} + \{H_1, \Phi_2\} + \{H_2, \Phi_1\} + \\ &\quad \frac{1}{2} (\{ \{H_0, \Phi_1\}, \Phi_2 \} + \{ \{H_0, \Phi_2\}, \Phi_1 \} + \\ &\quad \{ \{H_1, \Phi_1\}, \Phi_1 \}) + \frac{1}{6} \{ \{ \{H_0, \Phi_1\}, \Phi_1 \}, \Phi_1 \} \end{aligned} \quad (5.17)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu denklemin $\Phi \in P$ polinom uzayında çözülebilmesi için K_n lerin

$$K_n = \text{Çek}\{H_0\} \cap \mathcal{H}_n \quad (5.18)$$

sağlayacak şekilde seçilmesi gerekir.

Örnek 5.3 (Duffing Denklemi) (4.25) Duffing denkleme karşı gelen (4.61) Hamilton fonksiyonuna geri dönelim. Bu Hamilton fonksiyonuna (5.3) ve (5.5) dönüşümleri uygulanırsa yeni koordinatlardaki Hamilton fonksiyonu,

$$H_0 = \frac{1}{2}z\bar{z}, \quad H_2 = \frac{\varepsilon}{64}(z + \bar{z})^4 \quad (5.19)$$

olmak üzere $H = H_0 + H_1$ olarak bulunur. (5.17) denklemleri kullanılarak

$$K_0 = H_0, \quad K_1 = K_3 = \dots = K_{2j+1} = 0$$

ve diğerleri

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \frac{-i}{256}\varepsilon(\bar{z} - z)(\bar{z} + z)(z^2 + 8z\bar{z} + \bar{z}^2) \\ \Phi_4 &= \frac{-i}{6144}\varepsilon^2(\bar{z} - z)(\bar{z} + z)(z^4 - 9z^3\bar{z} + c.c. - 98z^2\bar{z}^2) \\ K_2 &= \frac{3\varepsilon}{32}z^2\bar{z}^2, \quad K_4 = \frac{-17\varepsilon^2}{512}z^3\bar{z}^3, \quad K_6 = \frac{375\varepsilon^3}{16384}z^4\bar{z}^4 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bulunan K_2 ve K_4 ifadeleri için H_0 ile

$$K_2 = \frac{12\varepsilon}{32}H_0^2, \quad K_4 = \frac{-136\varepsilon^2}{512}H_0^3, \quad K_6 = \frac{6000\varepsilon^3}{4096}H_0^4$$

blokları oluşturulabilir.

Örnek 5.4 Şimdi de 1 boyutlu (4.42) Henon-Heiles denkleminin (4.68) Hamilton fonksiyona (5.3) ve (5.5) dönüşümlerini uygulayalım. Bu dönüşümler uygulandıktan sonra yeni koordinatlarda Hamilton fonksiyonu,

$$H_0 = \frac{1}{2}z\bar{z}, \quad H_2 = -\frac{1}{24}(z + \bar{z})^3 \quad (5.20)$$

olmak üzere $H = H_0 + H_1$ şekline gelir. (5.17) denklemleri kullanılarak normal formlar

$$K_0 = H_0, \quad K_1 = K_3 = \dots = K_{2j+1} = 0$$

$$K_2 = -\frac{5}{48}z^2\bar{z}^2, \quad K_4 = -\frac{235}{3456}z^3\bar{z}^3$$

ve diğer fonksiyonlar

$$\Phi_2 = \frac{-i}{384}(\bar{z} - z)(\bar{z} + z)(z^2 - 8z\bar{z} + \bar{z}^2)$$

$$\Phi_4 = \frac{-i}{497664}(\bar{z} - z)(\bar{z} + z)(31z^4 - 2474z^3\bar{z} - 2474z\bar{z}^3 + 31\bar{z}^4)$$

olarak bulunur. Bulunan K_2 ve K_4 ifadeleri için H_0 ile

$$K_2 = -\frac{20}{48}H_0^2, \quad K_4 = -\frac{1880}{3456}H_0^3$$

blokları oluşturulabilir.

Örnek 5.5 (Henon-Heiles Sistem) 2 boyutlu Henon-Heiles sistemine karşı gelen (4.74) Hamilton fonksiyonuna, (5.3) ve (5.5) dönüşümleri uygulandığında yeni koordinatlarda,

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2}(wz_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2) \\ H_1 &= \frac{1}{8}\left(\alpha(z_1 + \bar{z}_1)(z_2 + \bar{z}_2)^2 - \frac{\beta}{3}(z_1 + \bar{z}_1)^3\right) \end{aligned} \quad (5.21)$$

olmak üzere, $H = H_0 + H_1$ şekline gelir. $j > 1$ için H_j fonksiyonları sıfıra eşittir. (5.17) denklemleri kullanılarak, genel w değeri için

$$K_0 = H_0, \quad K_1 = K_3 = 0$$

ve diğerleri

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{-i}{72w(w^2-4)}(\beta(w^2-4)z_1^3 + 9\beta(w^2-4)z_1^2\bar{z}_1 + 9\alpha w z_2^2 \\ &\quad ((w+2)\bar{z}_1 + (2-w)z_1) - 18\alpha w(w-4)z_1z_2\bar{z}_1 - c.c.) \\ K_2 &= \frac{1}{48(w^2-4)w}(5\beta^2(4-w^2)z_1^2\bar{z}_1^2 + 12\alpha(2\alpha w + \beta w^2 - 4\beta) \\ &\quad z_1 z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 + 3\alpha^2(8-3w^2)z_2^2\bar{z}_2^2) \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Şimdi farklı integrallenebilme durumlarını inceleyelim.

1- $w = 1$, $\beta = -\alpha$ Durumu

Bu durumda (5.21) Hamilton fonksiyonu,

$$H_0 = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)$$

olmak üzere, (5.17) denklemlerinden

$$K_0 = H_0$$

$$K_1 = K_3 = 0$$

$$K_2 = -\frac{5\alpha^2}{48}((z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2 + (z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2)^2)$$

$$K_4 = \frac{1}{3456}(-235 \alpha^4 (z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2) ((z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2)^2 + 3 (z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1)^2))$$

ve

$$\Phi_1 = -\frac{i}{72}\alpha(\bar{z}_1^3 + 9 z_1 \bar{z}_1^2 + 3 \bar{z}_1 \bar{z}_2^2 + 9 z_1 \bar{z}_2^2 + 18 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 - c.c.)$$

$$\Phi_2 = -\frac{i}{384}\alpha^2(\bar{z}_1^4 + 6 \bar{z}_1^2 \bar{z}_2^2 + \bar{z}_2^4 + 8 z_1^3 \bar{z}_1 + 24 z_1 z_2^2 \bar{z}_1 + 24 z_1^2 z_2 \bar{z}_2 + 8 z_2^3 \bar{z}_2)$$

$$\Phi_3 = \frac{i}{103680}\alpha^3(33 \bar{z}_1^5 + 330 \bar{z}_1^3 \bar{z}_2^2 + 165 \bar{z}_1 \bar{z}_2^4 + 220 z_1^4 \bar{z}_1 + 1320 z_1^2 z_2^2 \bar{z}_1 + 6645 z_1^3 \bar{z}_2^2 + 220 z_2^4 \bar{z}_1 + 6645 z_1^3 \bar{z}_1^2 + 19935 z_1 z_2^2 \bar{z}_1^2 + 39870 z_1^2 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + 13290 z_2^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + 880 z_1^3 z_2 \bar{z}_2 + 880 z_1 z_2^3 \bar{z}_2 + 19935 z_1 z_2^2 \bar{z}_2^2 - c.c.)$$

bulunur. Eğer,

$$I_0 = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1)$$

olarak alınırsa K_2 ve K_4 için

$$K_2 = -\frac{5\alpha^2}{48}(H_0^2 + I_0^2), \quad K_4 = \frac{-235}{432}H_0(H_0^2 + 3I_0^2)$$

blokları oluşturulabilir.

2- $w = 2$, $\beta = -3\alpha$ Durumu

(5.21) Hamilton fonksiyonu verilen w değeri için

$$H_0 = \frac{1}{2}(2z_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2)$$

olduğundan (5.17) denklemleri kullanılarak normal formlar,

$$K_0 = H_0$$

$$K_1 = \frac{1}{8}\alpha(z_2^2\bar{z}_1 + z_1^2\bar{z}_2)$$

$$K_2 = -\frac{1}{128}\alpha^2(60z_1^2\bar{z}_1^2 + 52z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 + 9z_2^2\bar{z}_2^2)$$

$$K_3 = \frac{1}{512}\alpha^3((67z_1\bar{z}_1 + 30z_2\bar{z}_2)(z_2^2\bar{z}_1 + z_1^2\bar{z}_2))$$

$$K_4 = -\frac{1}{24576}\alpha^4(213z_2^4\bar{z}_1^2 + 16920z_1^3\bar{z}_1^3 + 22324z_1^2z_2\bar{z}_1^2\bar{z}_2 \\ + 9484z_1z_2^2\bar{z}_1\bar{z}_2^2 + 1015z_2^3\bar{z}_2^3 + 213z_1^2\bar{z}_2^4)$$

şeklinde hesaplanır. Eğer,

$$I_0 = \frac{1}{2}(z_1^2\bar{z}_2 + z_2^2\bar{z}_1)$$

olarak alınırsa K_1 ve K_2 için

$$K_1 = \frac{\alpha}{4}I_0, \quad K_2 = -\frac{1}{128}\alpha^2\left(9H_0^2 + 12|z_1|^2(4H_0 + \frac{1}{3}|z_2|^2)\right)$$

blokları yazılabilir.

Örnek 5.6 3 serbestlik dereceli sistemde (4.79) $H = H_0 + H_1$ Hamilton fonksiyonu (5.3) ve (5.5) dönüşümleri uygulandığında

$$\alpha_1 = a_1w^{-1/2}, \quad \alpha_2 = a_2w^{-1/2}, \quad \beta = bw^{-3/2}$$

alınmak üzere,

$$H_0 = \frac{1}{2}(wz_1\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 + z_3\bar{z}_3)$$

$$H_1 = \frac{1}{8}(z_1 + \bar{z}_1)\left(\alpha_1(z_2 + \bar{z}_2)^2 + \alpha_2(z_3 + \bar{z}_3)^2 - \frac{\beta}{3}(z_1 + \bar{z}_1)^2\right)$$

haline gelir. Bu sistem için sadece $w = 2$ rezonansına karşı gelen integral-lenebilme durumunu inceleyeceğiz.

$w = 2$, $\beta = -3\alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$, integrallenebilme şartıyla (5.17) denklemlerinden

$$K_0 = H_0, \quad H_2 = 0$$

$$K_1 = \frac{1}{8}\alpha_1 (z_1(\bar{z}_3^2 + \bar{z}_2^2) + \bar{z}_1(z_3^2 + z_2^2))$$

$$K_2 = \frac{1}{128}\alpha_1^2 (60 z_1^2 \bar{z}_1^2 + 9 z_2^2 \bar{z}_2^2 + z_3^2 \bar{z}_3^2 + 52 z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 + 50 z_1 z_3 \bar{z}_1 \bar{z}_3 + 16 z_2 z_3 \bar{z}_2 \bar{z}_3 + z_2^2 \bar{z}_3^2 + 9 z_3^2 \bar{z}_2^2)$$

normal formları bulunur.

5.4 Çok Boyutlu Ölçü Analizinde Bulunan Hamilton fonksiyonları ile Karşılaştırma

Çok boyutlu ölçü analizinde seri çözümlerini ve akışları yerine yazarak bulduğumuz Hamilton fonksiyonundaki h_i bileşenleri ile K_i normal form bileşenleri karşılaştırıldığında, bunların (bir sabit katıyla) aynı olduğu görülmüştür. Şimdi verdiğimiz örnekler için karşılaştırmalar yapalım.

5.4.1 1 Serbestlik Dereceli Sistemler

İlk olarak Duffing denkleminde karşı gelen $H = H_0 + H_2$ (5.19) Hamilton fonksiyonunu inceleyelim. Dördüncü bölümde çok boyutlu ölçü metodu sonucunda bulduğumuz $H = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots$ Hamilton fonksiyonu ile bu bölümde $H = H_0 + H_2$ için normal form açılımını, $A \rightarrow z$, $\bar{A} \rightarrow \bar{z}$ olarak karşılaştırdığımızda,

$$h_0 = 4K_0, \quad \varepsilon h_1 = 48 K_2, \quad \varepsilon^2 h_2 = -\frac{400}{17} K_4, \quad \varepsilon^3 h_3 = -\frac{10112}{125} K_6$$

bağıntılarını buluruz.

Örnek 5.4 deki 1 boyutlu Henon-Heiles sistemi için de Hamilton fonksiyonları ile aynı şekilde

$$h_0 = 4K_0, \quad h_2 = \frac{592}{15} K_2, \quad h_4 = \frac{49648}{705} K_4,$$

bağıntıları bulunur.

Dolayısıyla uygun sabit dönüşümlerle, Hamilton fonksiyonları ile normal form bileşenlerinin aynı olduğu görülür.

5.4.2 2 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi

2 serbestlik dereceli Henon-Heiles sistemi için bulduğumuz sonuçları karşılaştıralım. Genel w değeri (rezonans olmadığı halinde) için bulunan (4.92) A_{t_2} , B_{t_2} akışlarının Hamilton fonksiyonu (4.96) h_2 değil bundan farklı olarak

$$h = \frac{1}{12w^2(w^2-4)} \left(6a^2(3w^2-8) |B|^4 + 5b^2(w^2-4) |A|^4 - 12a(2a+b)w^2 - 4b) |A|^2 |B|^2 \right)$$

fonksiyonudur. Buradan

$$A \rightarrow \frac{z_1}{\sqrt{w}}, \quad B \rightarrow z_2, \quad a = \sqrt{w}\alpha, \quad b = w\sqrt{w}\beta \quad (5.22)$$

dönüşümleri ile,

$$K_0 = 4h_0, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = -\frac{1}{4}h, \quad K_3 = 0,$$

bağıntıları bulunur. Rezonans durumları için baktığımızda ise;

$w = 1$, $b = -a$ alınarak (5.22) dönüşümleri ile,

$$K_0 = \frac{1}{4}h_0, \quad K_2 = \frac{15}{592}h_2, \quad K_4 = \frac{705}{49648}h_4,$$

bağıntıları ve

$w = 2$, $b = -6a$ aldığımızda yine (5.22) dönüşümleri ile

$$K_0 = \frac{1}{4}h_0, \quad K_1 = \frac{1}{20}h_1,$$

bağıntıları bulunur. $w = 2$ için K_2 ve diğer yüksek dereceli terimler arasında $b + 6a = 0$ olması durumunda bile bir ilişki kurulamamaktadır.

5.4.3 3 Serbestlik Dereceli Henon-Heiles Sistemi

3 serbestlik dereceli sistemlerde $w = 2$ rezonansı için normal form açılımı ve çok boyutlu ölçü metodu ile bulduğumuz h_i fonksiyonlarını karşılaştırdığımızda,

$$A \rightarrow z_1, \quad B \rightarrow z_2, \quad C \rightarrow z_3$$

alınmak üzere, sadece K_1 ve h_1 arasında $\beta = -3\alpha_1$, $\alpha_2 = \alpha_1$ alınarak,

$$K_1 = \frac{1}{20}h_1$$

bağıntısı bulunabiliyor. Yüksek dereceden terimlere gelindiğinde ise herhangi bir bağıntı kurulamıyor.

5.5 Sonuç

Dördüncü bölümde, çok boyutlu ölçü metodu ile sonlu boyutlu Hamilton sistemlerin integrallenebilirliğini araştırırken karşımıza kompleks ifadeler çıkmıştır. Bundan dolayı bu bölümde, kompleks düzleme geçecek şekilde bir dönüşüm tanımlanarak, Hamilton fonksiyonları normal forma indirgenmiştir. Bir önceki bölümde bulunan h_i Hamilton fonksiyonları ile bu bölümde hesaplanan K_i normal formları arasında benzerlik olduğu görülmüştür. 1 serbestlik dereceli sistemlerde benzerlik tam olarak sağlanırken, 2 ve 3 serbestlik dereceli sistemlerde kısmen sağlanmıştır. 2 ve 3 serbestlik dereceli sistemlerde

$w = 2$ için düşük dereceden terimler arasında bağıntı olmasına rağmen, yüksek dereceden terimlerde herhangi bir bağıntı kurulamamıştır.

5.6 Örnek MATHEMATICA Programı

(*2 boyutlu Henon-Heiles sisteminin Normal Formu*)

(* Poisson Braket *)

pb[f_,g_-]:=-2 I Sum[(D[f,x[i]] D[g,y[i]]-D[g,x[i]] D[f,y[i]]),{i,3}];

(* Hamilton fonksiyonu *)

h0=(1/2) Sum[w[i] x[i] y[i],{i,3}];

h1=(1/8)*((x[1] + y[1])*(a*(x[2] + y[2])^2+

a1*(x[3] + y[3])^2-(b/3)*(x[1] + y[1])^2)+

(a2*(x[2] + y[2])-(b1/3)*(x[3] + y[3]))*(x[3] + y[3])^2);

(* Rezonans değerleri *)

w[1]=w;w[2]=1;w[3]=1;

(* Normal form açılımları *)

k0=h0;

k1=h1+pb[h0,I1];

k2=h2+pb[h0,I2]+pb[h1,I1]+1/2 pb[pb[h0,I1],I1];

k3=h3+pb[h0,I3]+pb[h1,I2]+pb[h2,I1]+1/2 pb[pb[h1,I1],I1]+

1/2 pb[pb[h0,I2],I1]+1/2 pb[pb[h0,I1],I2]+1/6 pb[pb[pb[h0,I1],I1],I1];

(* Bulunan değerler bir sonraki ifadede yerine yazıldığında I[i] ler

(x[i],y[i] lerin bir fonsiyonu olarak) ve k[i] ler (çekirdek elemanlarını içeren

fonsiyonlar) ardışık olarak **Coefficient** ve **Solve** komutları kullanılarak

hesaplanır.*)

Kaynaklar

- [1] V.I. ARNOLD. Mathematical Methods of Classical Mechanics. *Springer Verlag* , (1978).
- [2] G.W. BLUMAN AND J.D. COLE Similarity Methods for Differential Equations. *Springer, New York* (1974).
- [3] H. BOUNTIS, T. SEGUR and F. VIVALDI. Integrable Hamiltonian Systems and Painleve Property. *Phys. Rev. A*, **25**, 3 : 1257–1264 (1982).
- [4] J.M. CERVERO AND J. VILLARROEL. *J. Phys. A* **20**, 6203 (1987).
- [5] Y.F. CHANG, M. TABOR and J. WEISS. Analitic Structure of the Henon-Heiles Hamiltonian in Integrable and Nonintegrable Regimes. *J. Math. Phys.*, **23**, 3 : 531 – 538 (1981).
- [6] Y.F. CHANG, J.M. GREENE, M. TABOR and J. WEISS. *Physica.*, **D**, **8**, 183 (1983).
- [7] H. FLASCHKA. The Toda Lattice. *Phys. Rev. B*, **9**, 1924 – 5 (1974).
- [8] A.P. FORDY Hamiltonian Symmetries of The Henon-Heiles System. *Phys. Lett. A*, **97**, 1, 2 : 21 – 23 (1983).

- [9] C. GARDNER, J. GREENE, M. KRUSKAL and R. MIURA Method for solving the Korteweg de Vries equation. *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1095 – 7 (1967).
- [10] B. GRAMMATICOS, B. DORIZZI and R. PADJEN. Painleve property and integral of motion for the Henon-Heiles System. *Phys. Lett. A* , **89**, 111 – 113 (1982).
- [11] H. GOLDSTEIN. Classical Mechanics. *Addision-Wesley Publishing Company* (1980).
- [12] F. GONALEZ-GASCON AND F. MORENA-INSERTIS .*Lett. Nuovo Gi-mento* **21**, 253 (1978).
- [13] A. HEARN. Reduce User's Manual. Vers 3.6. The Rand Corporation, *Santa Monica, California U.S.A.* (1995).
- [14] E. E. İNAN. Klasik Mekanik. *İstanbul Teknik Üniversitesi Matbaası, Gümüşsuyu* (1984).
- [15] M.LAKSHMANAN AND R.SAHADEVAN . *Phys. Rev. A*, **31**, 861 (1985).
- [16] M.LAKSHMANAN AND R.SAHADEVAN . *Phys. Rev.A*, **33**, 3563 (1986)
A, **34**, 5137 (1986).
- [17] M. LAKSMANAN AND R. SAHADEVAN. Generalized Lie Symmetries and Complete Integrability of Certain Nonlinear Hamiltonian Systems with Three Degrees of Freedom. *J. Math.Phys.* **31**, 1 : 75 – 83 (1991).
- [18] M. LAKSMANAN AND R. SAHADEVAN. Painleve Analysis, Lie Symmetries and Integrability of Coupled Nonlinear Oscillators of Polynomial Type. *Phys. Reports*, **224**, 1, 2 : 1 – 93 (1993).

- [19] LUTZKY. *J. Phys.* , A 11, (1978)249, A 12, (1979)973.
- [20] S.V. MANAKOV. Remarks on the integration of the Euler equations of the n -dimensional heavy top, *Funct. Anal. and its Appl.* 10, 93 – 4 (1976).
- [21] S. MANAKOV . Complete integrability and stochastization of discrete dynamical systems. *Sov. Phys. JETP* 40, 269 – 74 (1974).
- [22] A.V. MIKHAILOV, A.B. SABAT and V. SOKOLOV. The symmetry approach to classification of Integrable Equations. *Springer Verlag* , 115 – 184 (1991).
- [23] J. MOSER . Finitely many mass point on the line under the influence of an exponentiel potansiyel - an integrable system. *Lecture Notes in Phys.* 38, 97 – 101 (1976).
- [24] J. MOSER. Three İntegrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations. *Adv. Math.* 16, 1 – 23 (1975).
- [25] P.J. OLVER . Applications of the Lie Groups to Differential Equations *Springer, New York* (1986).
- [26] I.V. OVSJANNIKOV. Group Analysis in Differential Equations. *Academic Press. New York.* (1982).
- [27] A.Y. ÖZEMRE. Klasik Teorik Mekanik. *İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi* (1981) Cilt2
- [28] M.N. ÖZER. Related Integrable Hamiltonian Sistems. *Ph.D. Thesis, University of Leeds*, 1995
- [29] M.N. ÖZER and D. ESER. Diferensiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları). *Birlik Ofset Yayıncılık, Eskişehir* (1996) Cilt 1, Birinci Baskı

- [30] J.R. RAY and J.L.REID . *Phys.Lett. A* **71**, 317 (1979)
- [31] J.R. RAY, J.L.REID and M. LUTZKY. *Phys.Lett. A* **84**, 42 (1981)
- [32] S. ROUCH - WOJCIECHOWSKI. Hamiltonian structure and complete integrability in analitical mechanics.
- [33] R.SAHADEVAN. Painleve Analysis and Integrability of Certain Coupled Nonlinear Oscillators. *Phys. University of Madras* (1987).
- [34] M.R.SPIEGEL. Theoretical Mechanics *Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company* (1967).
- [35] G. THOMPSON. *J. Phys. A* **17**, 411 (1984).
- [36] S. WOLFRAM. Mathematica, A System for Doing Mathematics by Computer. *Addision-Wesley Publishing Company Inc., second edition* (1991).