



**ÖZDEĞERLERİN MINİMİZASYONU
PROBLEMLERİNDE İÇ NOKTA
YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI**

Doktora Tezi

Birgöl AKSOY

Eskişehir 2022

ÖZDEĞERLERİN MİNİMİZASYONU PROBLEMLERİNDE İÇ
NOKTA YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

Birgöl AKSOY

DOKTORA TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Aralık 2022

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Birgöl AKSOY'un "ÖZDEĞERLERİN MİNİMİZASYONU PROBLEMLERİNDE İÇ NOKTA YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI" başlıklı tezi 22/12/2022 tarihinde aşğıdaki jüri tarafından değeriendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye	: Prof. Dr. Vakıf CAFER
Üye	: Prof. Dr. Sevil ŞENTÜRK
Üye	: Prof. Dr. Dursun İRK
Üye	: Prof. Dr. Barış ERBAŞ
Üye	: Doç. Dr. Fatih KARABACAK

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

22/12/2022

DANIŞMAN ONAYI

DaniŐmanlıđını yuruttuğum doktora oğrencisi Birgöl AKSOY, “ÖZDEĞERLERİN MİNİMİZASYONU PROBLEMLERİNDE İÇ NOKTA YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI” başlıklı tez çalıŐmasını tamamlamıŐtır. HazırlamıŐ olduğu tez tarafımca incelenmiş ve oğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun gÖrölmüŐtür.

Tez DaniŐmanı

.....
Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

ÖZET

ÖZDEĞERLERİN MİNİMİZASYONU PROBLEMLERİNDE İÇ NOKTA YÖNTEMLERİNİN UYGULANMASI

Birgül AKSOY

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Aralık 2022

Danışman : Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Bu tez çalışmasında matrisler ailesinin gürbüz Hurwitz kararlılığı problemi incelenmektedir. Afin matrisler ailesine karşılık gelen parametreye bağlı Lyapunov fonksiyonlarının varlığı için koşullar verilmiştir. Afin simetrik matrislerin maksimal özdeğerini minimalleştiren bir algoritma oluşturulmuştur. Verilen afin matris aileleri için parametreye bağlı Lyapunov fonksiyonların varlığı bu algoritma ile de incelenebilmektedir. Matris ailelerinin gürbüz kararlılık problemleri lineer matris eşitsizlikleri ile ifade edilebilmektedir. Bu tür eşitsizliklerin çözümü için bir bariyer yöntemi incelenmiştir. Ek bariyer fonksiyonu tanımlanarak bu fonksiyonun self-concordant özelliğe sahip olduğu gösterilmiştir. Yeni bariyer fonksiyonu kullanılarak modifiye edilen yöntem, matrislerin ortak Lyapunov fonksiyonunun varlığı ve LMI problemlerine uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar sayısal olarak örneklerle açıklanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Hurwitz kararlılık, Afin matrisler ailesi, Parametreye bağlı Lyapunov fonksiyonları, Bariyer yöntemi, Lineer matris eşitsizliği.

ABSTRACT

APPLICATION OF INTERIOR POINT METHODS IN MINIMIZATION PROBLEMS OF EIGENVALUES

Birgül AKSOY

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute Of Graduate Programs, December 2022

Supervisor : Prof. Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

In this thesis, the robust Hurwitz stability problem of the matrices family is considered. Conditions for the existence of parameter-dependent Lyapunov functions corresponding to the family of affine matrices are given. An algorithm that minimizes the maximal eigenvalue of affine symmetric matrices is constructed. The existence of parameter-dependent Lyapunov functions for a given affine matrices family is examined with this algorithm. The robust stability problems of matrices family can also be generally expressed by linear matrix inequalities. For the solution of such inequalities, a barrier method is examined. An additional barrier function is defined and it is shown that this function has self-condordant property. The modified method by using the new barrier function is applied the existence of the common Lyapunov function of the matrices and the LMI problems. Obtained results are explained numerically with numerous examples.

Keywords: Hurwitz stability, Afinne matrices family, Parameter-dependent Lyapunov functions, Barrier method, Linear matrix inequality.

TEŐEKKÖR

Bu tezin hazırlanmasında bilgilerini ve yardımlarını esirgemeyen, çalışma moti-
vasyonuma katkı sağlayan tez danıŐmanım Prof. Dr. Taner BÖYÖKKÖROğLU'na,
ÇalıŐmalarımnda bilgi, öneri ve görüşleriyle desteğini esirgemeyen değerli hocam
Prof. Dr. Vakıf CAFER'e teŐekkürlerimi sunarım. Ayrıca tez çalışması sürecinde
bana verdiği moral ve motivasyon desteğinden dolayı Prof. Dr. Nölifer ÖZDEMİR'e
ve hayatım boyunca her zaman yanımda olan sevgili aileme anlayıŐları için teşekkür
ederim.

Birgül AKSOY

Aralık, 2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğimi” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

.....
Birgül AKSOY

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI	III
ÖZET	IV
ABSTRACT	V
TEŞEKKÜR	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ ...	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER	1
2. PARAMETREYE BAĞLI LYAPUNOV FONKSİYONLARI	9
2.1. İkinci Dereceden Polinom Matrisler	11
2.2. $n = 3$ için Barmish'in İddiasına Karşıt Örnek	15
2.3. Çok Parametrelili Lyapunov Fonksiyonları	21
3. MAKSİMAL ÖZDEĞER FONKSİYONU İLE AFİN LYAPUNOV FONKSİYONLARININ OLUŞTURULMASI	26
3.1. Bir İç Nokta Yöntemi	29
3.2. En Büyük Özdeğeri Veren Fonksiyon ile Çözümün Araştırılması	31
3.3. Gridleme ile Çözümün Araştırılması	34

3.4. Maksimum Özdeğerin Kutu Yüzeyi Üzerinde Araştırılması .	37
4. MAKSİMAL ÖZDEĞERLERİN MINİMİZASYONU İÇİN BİR İÇ NOKTA YÖNTEMİ	54
4.1. Bariyer Yöntemi	54
4.2. Bariyer Yöntemi için Bir Algoritma.....	64
4.3. Yöntemin Ortak P Problemine Uygulanması	70
4.4. Yöntemin LMI Problemine Uygulanması	75
5. SONUÇLAR	81
KAYNAKÇA	82
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. \mathcal{Z} kutusunda z^k noktasının seçilme prosedürü	20
Şekil 3.1. \mathcal{X} kutusunda x^k noktalarının seçilme prosedürü	30
Şekil 3.2. $g(\alpha)$ ve $h(\alpha)$ fonksiyonlarının grafikleri	34
Şekil 3.3. $\lambda_{\max}L(\alpha, x)$ ve $\lambda_{\max}L(i/N, x)$ grafikleri	35
Şekil 3.4. $g(\alpha)$ ve $h(\alpha)$ fonksiyonlarının grafikleri	37
Şekil 3.5. $f(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$ fonksiyonlarının grafikleri	42
Şekil 4.1. $f(x) + \mu\phi(x)$ fonksiyonun seviye eğrileri	55
Şekil 4.2. $\lambda_{\max}M(x)$ fonksiyonunun grafiği.	69

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- A^T : A matrisinin transpozu
 $\text{tr}(A)$: A matrisinin izi
 $\text{Re}(\cdot)$: Bir kompleks sayının gerçel kısmı
 \mathbb{R} : Gerçel sayılar kümesi
 x^k : k 'yüncü adımda elde edilen \mathbb{R}^m 'deki bir vektör
 \mathbb{C} : Kompleks sayılar kümesi
 conv : Konveks zarf
 \mathbb{R}^n : n -boyutlu Öklid uzayı
 $\mathbb{R}^{n \times n}$: $n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi
 $\|\cdot\|$: Öklid normu
 $P > 0$: $P = P^T$ pozitif belirli matris
 S° : S kümesinin iç noktaları kümesi
 $\mathbf{0}$: Sıfır vektörü
 \dot{x} : $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $dx(t)/dt$
 $\text{int}(\mathcal{X})$: \mathcal{X} kutusunun içi

1. GİRİŞ VE ÖN BİLGİLER

Lyapunov 1892 yılında lineer olmayan bir sistemin kararlılığı için bir yeter koşul vermiştir. Bu koşul, sistemin çözüm yörüngeleri boyunca azalan ve pozitif belirli olan bir fonksiyonun varlığıdır. Bu fonksiyona Lyapunov fonksiyonu adı verilmektedir. Lyapunov fonksiyonları, hem teoride hem de uygulamada dinamik sistemlerin kararlılık analizinde önemli bir kavramdır.

Dinamik sistemlerin matematiksel teorisinde Lyapunov teorisi en genel teori olarak kabul edilir ve özellikle mühendisliğin kontrol teori disiplininde büyük öneme sahiptir. Dinamik sistemler uygulamalı bilimlerde modelleme için temel bir araç olduğundan Lyapunov fonksiyonları elektrik elektronik, biyoloji, ekonomi, meteoroloji ve bilgisayar mühendisliği gibi alanlarda karşımıza çıkmaktadır [14, 17, 18, 30, 38].

Lineer sistem teorisinin en temel meselelerinden bir tanesi belirsiz parametrelili kontrol sistemlerinin gürbüz kararlılığının analizidir. 1980'li yıllarda afin parametrelili belirsiz yapıya sahip lineer sistemler için kuadratik kararlılık kavramının ortaya çıkması bu konuda kapsamlı bir gelişmeyi de beraberinde getirmiştir. Böyle bir sistemin kararlılığı için bir tek $V(x) = x^T P x$ formundaki kuadratik Lyapunov fonksiyonunun varlığı yeterlidir [1]. Lineer matris eşitsizliği (LMI) yaklaşımıyla bu tür kuadratik kararlılık problemlerinin çözümleri [5]'te ele alınmıştır. Tek bir kuadratik Lyapunov fonksiyonu yerine afin parametrelili Lyapunov fonksiyonların varlığının araştırılması gürbüz kararlılık problemlerinin çözümü için daha esnek koşullar getirmektedir [15, 19]. Afin parametrelili Lyapunov fonksiyonların varlığı için bir yeter koşul [11]'de verilmiştir.

Kararlılık teorisi, sistem teori ve mühendislik alanında önemli bir role sahiptir. Dinamik sistemler üzerine yapılan çalışmalarda farklı kararlılık problemleri ortaya çıkmaktadır. Bu tez kapsamında birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilen dinamik sistemlerin denge noktasına ilişkin kararlılık kavramı ele alınmıştır.

Tanım 1.1 ([23]). $D \subset \mathbb{R}^n$ açık bağlantılı bir küme, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ yerel Lipschitz özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

otonom sistem verilsin. Eğer $\bar{x} \in D$ için $f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ ise \bar{x} vektörüne (1.1) sisteminin bir denge noktası denir.

Kararlılıkla ilgili tanım ve teoremlerin ifadelerinde yazım kolaylığı bakımından denge noktasını $\bar{x} = \mathbf{0}$ vektörü almak genelliği bozmaz. Eğer sistemin denge noktası $\bar{x} \neq \mathbf{0}$ ise $y = x - \bar{x}$ değişken değişimiyle bu denge noktası orjine ötelenebilir.

Tanım 1.2 ([23]). $D \subset \mathbb{R}^n$ açık bağlantılı bir küme ve $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ yerel Lipschitz koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$\|x(0) - \mathbf{0}\| < \delta \text{ iken } \|x(t) - \mathbf{0}\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $\dot{x} = f(x)$ sisteminin $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktası kararlıdır denir. Ayrıca $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktası kararlı ve öyle $\tilde{\delta} > 0$ için $\|x(0) - \mathbf{0}\| < \tilde{\delta}$ iken $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0}$ ise $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktası asimptotik kararlıdır denir.

Bu tanıma göre (1.1) sisteminin denge noktasının kararlılığı için $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ sayısı belirlenebilmelidir ki denge noktasının δ -komşuluğundan başlayan $x(t)$ yörüngeleri, denge noktasından başlayan $x(t) \equiv \mathbf{0}$ yörüngesinin ε -komşuluğunda kalmalıdır. Asimptotik kararlılık durumunda ise $\mathbf{0}$ denge noktası kararlı olmalı ve $\tilde{\delta} > 0$ öyle seçilebilmelidir ki denge noktasının bu $\tilde{\delta}$ -komşuluğundan başlayan yörüngeler için $t \rightarrow \infty$ iken $x(t) \rightarrow \mathbf{0}$ olmalıdır.

Şimdi, (1.1) sisteminin denge noktasının asimptotik kararlılığını incelemek için klasik bir teorem olan Lyapunov Teoremini ifade edelim.

Teorem 1.3 (Lyapunov Teoremi, [23]). $\mathbf{0} \in D \subset \mathbb{R}^n$ açık bağlantılı bir küme, $\dot{x} = f(x)$ sisteminin denge noktası $\bar{x} = \mathbf{0}$ olsun.

i) $V(\mathbf{0})=0$ ve her $x \in D - \{\mathbf{0}\}$ için $V(x) > 0$

ii) Her $x \in D - \{\mathbf{0}\}$ için $\dot{V}(x) < 0$ (yörünge üzerinde türev)

olacak şekilde $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Buradaki $V(x)$ fonksiyonuna $\dot{x} = f(x)$ sisteminin bir Lyapunov fonksiyonu denir.

f fonksiyonu lineer dönüşüm ise asimptotik kararlılık kavramı aşağıdaki gibi ifade edilebilir. A matrisi $n \times n$ boyutlu bir kare matris olmak üzere

$$\dot{x} = Ax \quad (1.2)$$

lineer sistemini ele alalım. $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktasının asimptotik kararlılığı A matrisinin özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumlarına göre karakterize edilebilir.

Tanım 1.4 ([2]). $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. Bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ olsun. Eğer A matrisinin tüm özdeğerleri kompleks düzlemin sol açık yarı düzleminde kalıyorsa, yani $Re(\lambda_i) < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ise A matrisine Hurwitz kararlı matris denir.

Bu tez çalışması boyunca “Hurwitz kararlı matris” isimlendirmesi yerine kısaca “kararlı matris” ifadesini kullanacağız.

Denklem (1.2) ile verilen lineer sistemin denge noktasının asimptotik kararlılığını incelemek için Lyapunov Teoremi (Teorem 1.3) uygulandığında aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.5 ([23]). $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi verilsin. A matrisinin kararlı olması için gerek ve yeter koşul herhangi pozitif belirli $Q > 0$ matrisi için

$$A^T P + PA = -Q \quad (1.3)$$

Lyapunov denkleminin pozitif belirli bir $P > 0$ çözümünün var olmasıdır. Bu çözüm tektir ve

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

şeklindedir. Bu $P > 0$ çözümüne karşılık gelen $V(x) = x^T P x$ kuadratik fonksiyonuna da sistemin bir Lyapunov fonksiyonu denir.

Bir $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik matrisi için sıfırdan farklı her $x \in \mathbb{R}^n$ vektörüne karşılık $x^T P x > 0$ ise bu P matrisine pozitif belirli matris denir ve $P > 0$ şeklinde gösterilir. P simetrik matrisinin pozitif belirli olması için gerek ve yeter koşul P matrisinin tüm özdeğerlerinin pozitif olmasıdır [20].

Sonuç 1.6. Denklem (1.2) ile verilen lineer sistemin $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktasının asimp-

totik kararlılığı

$$A^T P + P A < 0 \quad (1.4)$$

eşitsizliğinin $P > 0$ çözümünün varlığına denktir. Burada (1.4) eşitsizliği A matrisine karşılık gelen Lyapunov eşitsizliği olarak adlandırılır.

Kararlılık uygulamalarında sistemin A katsayı matrisi belirsizlik parametreleri içerebilmektedir. Bu durumda tek bir matris yerine matrisler kümesi söz konusu olmaktadır ve kararlılık problemleri bu matrisler kümesine göre ele alınmaktadır.

$Q \subset \mathbb{R}^m$ belirsizlik kümesi ve $a_{ij} : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) olmak üzere $q \in Q$ için $A(q) = [a_{ij}(q)]$ matrislerini ele alalım.

$$\mathcal{A} = \{A(q) : q \in Q\} \quad (1.5)$$

kümesi bir matrisler ailesidir ve bu matrisler ailesindeki tüm matrisler kararlı ise \mathcal{A} matrisler ailesi gürbüz kararlıdır denir.

$A(q)$ matrisinin $a_{ij}(q)$ bileşenlerine ve Q belirsizlik kümesine göre \mathcal{A} matrisler ailesi; aralık matrisler ailesi, polinomik matrisler ailesi, politopik matrisler ailesi gibi sınıflara ayrılmaktadır. Bu tür matrisler ailesinin gürbüz kararlılığı problemlerinin ele alındığı çok sayıda çalışma literatürde yer almaktadır ([2–4, 26, 27, 31, 34, 35] ve bu çalışmalardaki referanslar).

$Q \subset \mathbb{R}^m$ bir politop, $q \in Q$ ve $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) olmak üzere

$$\dot{x} = A(q)x, \quad A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \dots + q_m A_m \quad (1.6)$$

lineer sistemi verilsin.

$$\mathcal{A} = \{A(q) = A_0 + q_1 A_1 + q_2 A_2 + \dots + q_m A_m : q \in Q\} \quad (1.7)$$

matrisler ailesini ele alalım. Burada $q \in Q$ için $A(q)$ matrisi q 'ya göre afin olduğundan \mathcal{A} (1.7) matrisler ailesi afin matrisler ailesi olarak adlandırılır. Bu \mathcal{A} afin matrisler ailesinin gürbüz kararlılığı, her $q \in Q$ için

$$A^T(q)P(q) + P(q)A(q) < 0$$

Lyapunov eşitsizliğini sağlayan pozitif belirli $P(q) > 0$ simetrik matrisinin varlığına denktir [32]. \mathcal{A} gürbüz kararlı olduğunda her $q \in Q$ için $V(x) = x^T P(q)x$ Lyapunov fonksiyonunun varlığından dolayı (1.6) sisteminin denge noktası asimptotik

kararlıdır.

$A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrislerinin tüm konveks kombinasyonları kümesine bir matrisler politopu denir ve bu politop

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \\ &= \{\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_N A_N : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

şeklinde ifade edilir.

A_1, A_2, \dots, A_N matrisleri kararlı ve öyle bir $P > 0$ için

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.9)$$

Lyapunov eşitsizlikleri sağlanıyor ise P matrisine A_1, A_2, \dots, A_N matrislerinin ortak Lyapunov çözümü denir ve bu durumda \mathcal{A} (1.8) matrisler politopu gürbüz kararlıdır. $\Lambda = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0\}$ simpleksi verilsin. Bir $\alpha \in \Lambda$ ve denklem (1.9)'un ortak çözümü olan $P > 0$ matrisi için $P(\alpha) = P$ olmak üzere $V(x) = x^T P(\alpha)x$ kuadratik fonksiyonu $\dot{x} = A(\alpha)x$ sisteminin bir Lyapunov fonksiyonudur.

A_1 ve A_2 kararlı matrislerin konveks kombinasyonunun kararlılığı için bir gerek ve yeter koşulu ifade etmeden önce matrislerin bialterne çarpımı tanımını verelim.

Tanım 1.7 ([8]). A_1 ve A_2 matrisleri $n \times n$ boyutlu matrisler olsun. A_1 ile A_2 matrislerinin bialternate çarpımı $F = A_1 \cdot A_2$;

$$F = (f_{ij,kl}), \quad f_{ij,kl} = \frac{1}{2} \left(\det \begin{bmatrix} a_{ik} & a_{il} \\ b_{jk} & b_{jl} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{ik} & b_{il} \\ a_{jk} & a_{jl} \end{bmatrix} \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada i, j, k, l indisleri $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesindedir ve $i < j, k < l$ koşullarını sağlar. F matrisi $m = n(n-1)/2$ olmak üzere $m \times m$ boyutludur. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ boyutlu bir matris ve I birim matrisi için $2A$ ile I matrisinin bialterne çarpımını $B(A) = (2A) \cdot I$ ile gösterelim.

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin. Bu matrislerin tüm konveks kombinasyonlarının kümesi $n \times n$ boyutlu matrisler uzayında bir matrisler segmentidir ve

$$[A_1, A_2] = \{(1-\alpha)A_1 + \alpha A_2 : \alpha \in [0, 1]\}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 1.8 ([39]). $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisleri verilsin. $[A_1, A_2]$ matrisler segmentinin gürbüz kararlı olması için gerek ve yeter koşul $A_1 A_2^{-1}$ ve $B(A_1)B^{-1}(A_2)$ matrislerinin negatif özdeğerinin olmamasıdır.

$n = 2$ durumunda $B(A_1) = \text{tr}(A_1)$ ve $B^{-1}(A_2) = 1/\text{tr}(A_2)$ olmaktadır. $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ kararlı matrisler olduğundan $\text{tr}(A_1) < 0$ ve $\text{tr}(A_2) < 0$ olur ve buradan

$$B(A_1)B^{-1}(A_2) > 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $n = 2$ durumunda $[A_1, A_2]$ segmentinin gürbüz kararlı olması için gerek ve yeter koşul $A_1 A_2^{-1}$ matrisinin negatif özdeğerinin olmamasıdır.

Matrisler ailesinin gürbüz kararlılığı problemlerinde ortak Lyapunov çözümünün varlığı önemlidir. Bunun yanı sıra anahtarlama doğrusal sistemlerin asimptotik kararlılığı problemlerinde de ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonunun varlığı, yani $P > 0$ ortak Lyapunov çözümü ele alınmaktadır.

Tanım 1.9 ([24]). $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisler ve $\sigma : [0, \infty) \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ parçalı sürekli fonksiyon olmak üzere

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x \quad (1.10)$$

anahtarlama lineer sistemini ele alalım. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $\sigma(t)$ anahtar, $\|x_0 - \mathbf{0}\| < \delta$ koşulunu sağlayan x_0 başlangıç noktası ve her $t > 0$ için $\|x(t, x_0, \sigma(\cdot)) - \mathbf{0}\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak ve $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, \sigma(\cdot)) = \mathbf{0}$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa (1.10) sistemine düzgün asimptotik kararludur denir.

Denklem (1.10) ile verilen anahtarlama sistem için A_1, A_2, \dots, A_N matrislerinin $P > 0$ ortak Lyapunov çözümü varsa o zaman (1.10) sistemi düzgün asimptotik kararlı olur [25, 37].

$N = 2$ durumunda (1.10) sistemi düzgün asimptotik kararlı ise

$$[A_1, A_2] = \{(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2 : \alpha \in [0, 1]\} \quad (1.11)$$

matrisler segmenti gürbüz kararludur. Ancak bu önermenin tersi doğru değildir [10].

$F_k = F_k^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) simetrik matrisler ve $x \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere

$$F(x) := F_0 + \sum_{k=1}^m x_k F_k > 0 \quad (1.12)$$

formundaki eşitsizliğe lineer matris eşitsizliği (LMI) denir.

Örneğin, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için

$$A^T P + P A < 0$$

Lyapunov eşitsizliği verilsin. Burada $P = P^T$ simetrik matrisi Lyapunov eşitsizliğinin bir değişkeni olarak ele alınır. Bu matris eşitsizliği P 'ye göre bir lineer eşitsizliktir. Burada $m = n(n+1)/2$ ve $n \times n$ boyutlu simetrik matrislerin standart tabanı P_1, P_2, \dots, P_m matrisleri olmak üzere $F_0 = 0$ ve $F_k = A^T P_k + P_k A$ ($k = 1, 2, \dots, m$) alınırsa öyle $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ vardır ki $A^T P + P A < 0$ eşitsizliği

$$F(\tilde{x}) = A^T P + P A = F_0 + \sum_{k=1}^m \tilde{x}_k F_k < 0$$

şeklinde LMI formunda ifade edilebilir [5].

Matrislerin kararlılığı problemlerinde lineer matris eşitsizlikleri ortaya çıkmaktadır. Bu matris eşitsizliklerinin çözümünün varlığı problemi, matris eşitsizliklerinde yer alan matrislerin en büyük (veya en küçük) özdeğerlerinin işaretini belirleme problemine denktir.

Örneğin, $S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik matrisinin en büyük özdeğeri $\lambda_{\max}(S)$ olmak üzere denklem (1.9) ile ifade edilen ortak $P > 0$ problemi

$$G_i(\tilde{x}) = A_i^T P + P A_i = F_{i,0} + \sum_{k=1}^m \tilde{x}_k F_{i,k} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$\max_{1 \leq i \leq N} \lambda_{\max}(G_i(\tilde{x})) < 0$ olacak şekilde $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ vektörünün varlığına denktir.

Matrisler ailesinin kararlılık problemlerinde matris eşitsizliklerinin çözümünün araştırılması gerekebilmektedir. Bu tür problemlerin sayısal çözümleri için yaygın olarak Matlab-SeDuMi, Matlab-Yalmip paketleri kullanılmaktadır. Bu paketlerle çözülebilecek matris eşitsizlikleri belli formattadır ve ele alınan problemin programa girilebilmesi programın kabul ettiği uygun bir şablonun varlığına bağlıdır.

Bu tez çalışmasında parametreye bağlı matris ailelerinin gürbüz kararlılığı problemleri ele alınmıştır. Birinci bölümde tez kapsamında incelenen problemlerle ilgili temel tanım ve teoremler verilmektedir. İkinci bölümde verilen afin matris aileleri için parametreye bağlı Lyapunov fonksiyonlarının varlığı araştırılmıştır. Barmish'in İddiası olarak bilinen ve kararlı matris segmentine karşılık birinci dereceden tek parametrelili Lyapunov fonksiyonunun varlığı için yeter koşullar verilmiştir. Bu iddianın

$n \geq 3$ için geçerli olmadığına dair [7]'de verilen örnek Matlab-SeDuMi ile çözülmüştür. Bu karşıt örneğin doğrulanması tez kapsamında ele alınan algoritmalar ile yapılmıştır. Bu algoritmalar kullanılarak 2'nci dereceden tek parametrelî Lyapunov fonksiyonları da belirlenebilmektedir. Üçüncü bölümde simetrik matrislerin maksimal özdeğerini veren fonksiyon yardımıyla afin Lyapunov fonksiyonları bulmaya yarayan bir algoritma verilmiştir. Ele alınan bazı problemlerde parametreler $[0, 1]$ aralığında yer almaktadır. Bu tür problemlerde $[0, 1]$ aralığı gridlenerek sonlu sayıda nokta için algoritma çalıştırılmış ve çözüm araştırılmıştır. Dördüncü bölümde simetrik matrislerin afin toplamı şeklinde verilen matrislerin maksimal özdeğerlerini minimize eden [21]'de verilen bariyer yöntemi incelenmiş ve bu yöntem kararlılık problemlerine uygulanmıştır.

2. PARAMETREYE BAĞLI LYAPUNOV FONKSİYONLARI

$A_0, A_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri kararlı matrisler olsun. Tek parametrelili

$$A(\theta) = A_0 + \theta A_1, \quad \theta \in [-1, 1]$$

afin matrisler ailesinin gürbüz kararlılığını ele alalım. P_0, P_1, \dots, P_D matrisleri $n \times n$ boyutlu simetrik matrisler ve

$$P(\theta) = P_0 + \theta P_1 + \theta^2 P_2 + \dots + \theta^D P_D$$

olsun. Her $\theta \in [-1, 1]$ için

$$\begin{aligned} P(\theta) &> 0, \\ A(\theta)^T P(\theta) + P(\theta) A(\theta) &< 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

matris eşitsizlikleri sağlanacak şekilde P_0, P_1, \dots, P_D simetrik matrisleri varsa

$$\mathcal{A} = \{A(\theta) = A_0 + \theta A_1 : \theta \in [-1, 1]\} \tag{2.2}$$

matrisler ailesi gürbüz kararlı olur. Bu durumda $P(\theta)$ matrisine D dereceli tek parametreye bağlı polinomsal Lyapunov matrisi denir [7].

\mathcal{A} (2.2) matrisler ailesi gürbüz kararlı ise o zaman (2.1) eşitsizliklerini sağlayan $P(\theta)$ vardır [19]. $r = \text{rank}(A_1)$ olmak üzere $P(\theta)$ matrisindeki θ parametresinin derecesi olan D sayısının üst sınırı

$$\begin{cases} (2nr - r^2 + r)/2 & , \quad r < n \text{ ise} \\ n(n+1)/2 - 1 & , \quad r = n \text{ ise} \end{cases}$$

şeklindedir [40].

Barmish, [2]'de gürbüz kararlı \mathcal{A} (2.2) matrisler ailesi için birinci dereceden (afin) bir $P(\theta)$ matrisinin varlığını iddia etmiştir.

İddia 2.1 ([2]). $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin. Her $\alpha \in [0, 1]$ için $A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$ kararlı matris olsun. O zaman öyle P_1 ve P_2 simetrik matrisleri vardır ki $P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$ olmak üzere her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$L(\alpha) = A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0 \tag{2.3}$$

olur.

Buna göre A_1 ile A_2 matrislerinin tüm konveks kombinasyonları kararlı ise o

zaman $A(\alpha)$ matrisinin bir afin Lyapunov fonksiyonu vardır ve bu Lyapunov fonksiyonu

$$P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2 = P_1 + \alpha(P_2 - P_1)$$

formundadır.

Şimdi, İddia 2.1'in geçerli olduğu bazı matris sınıflarını verelim.

1) $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisleri için

$$\begin{aligned} A_1^T P + P A_1 &< 0, \\ A_2^T P + P A_2 &< 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde Lyapunov eşitsizliklerinin ortak bir $P > 0$ çözümünün var olduğunu kabul edelim. O zaman $P_1 = P_2 = P$ ve her $\alpha \in [0, 1]$ için $A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \\ &= [(1 - \alpha)A_1^T + \alpha A_2^T]P + P[(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2] \\ &= (1 - \alpha)[A_1^T P + P A_1] + \alpha[A_2^T P + P A_2] < 0 \end{aligned}$$

olur. Buna göre ortak P çözümüne sahip A_1, A_2 matrisleri için İddia 2.1'de ifade edilen $P(\alpha)$ afin matris, $P(\alpha) = (1 - \alpha)P + \alpha P = P$ sabit matrisi olur.

2) $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisler ve $A_1 A_2 = A_2 A_1$ olsun. Bu durumda A_1 ile A_2 matrislerinin ortak P çözümü vardır [28]. Dolayısıyla değişmeli iki matris için İddia 2.1 doğrudur.

3) $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ kararlı matrisler olsun.

$$\begin{aligned} A_1^T P + P A_1 &< 0, \\ A_2^T P + P A_2 &< 0 \end{aligned}$$

olacak şekilde $P > 0$ çözümünün olması için gerek ve yeter koşul $A_1 A_2$ ve $A_1 A_2^{-1}$ matrislerinin negatif gerçel özdeğerinin olmamasıdır [36].

Buna göre kararlı $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ matrisleri için $A_1 A_2$ ve $A_1 A_2^{-1}$ matrislerinin negatif gerçel özdeğerleri yoksa İddia 2.1 doğrudur.

4) $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Metzler matrisleri olsun (köşegen dışındaki bileşenleri negatif

olmayan sayılardan oluşan matris).

$$[A_1, A_2] = \{(1 - \lambda)A_1 + \lambda A_2 : \lambda \in [0, 1]\}$$

segmenti gürbüz kararlıysa A_1 ve A_2 matrisleri için Lyapunov eşitsizliklerinin ortak $P > 0$ çözümü vardır [9]. Bu durumda İddia 2.1 doğrudur.

5) $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı ve eşzamanlı köşegenleştirilebilir matrisler olsun. O zaman $A_1 A_2 = A_2 A_1$ olur [20]. Bu durum için İddia 2.1 doğrudur.

2.1. İkinci Dereceden Polinom Matrisler

Bu alt bölümde İddia 2.1'in sağlanmasına ilişkin yeterli koşullar verilecektir.

Önerme 2.2. $C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik matrisler ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

$$C(\alpha) = \alpha^2 C_0 + \alpha C_1 + C_2$$

matris polinomu verilsin. Eğer $C(0) < 0$, $C(1) < 0$ ve $C_0 > 0$ ise her $\alpha \in [0, 1]$ için $C(\alpha) < 0$ dır.

Kanıt. Sıfırdan farklı keyfi bir $v \in \mathbb{R}^n$ vektörü için

$$f(\alpha) := v^T C(\alpha) v = \alpha^2 v^T C_0 v + \alpha v^T C_1 v + v^T C_2 v$$

diyelim. $C_0 > 0$ olduğundan $v^T C_0 v > 0$ olur. Dolayısıyla $f(\alpha)$ fonksiyonunun grafiği kolları yukarı doğru olan bir paraboldür.

$\alpha = 0$ için $f(0) = v^T C(0) v < 0$ ve $\alpha = 1$ için $f(1) = v^T C(1) v < 0$ olduğundan her $\alpha \in [0, 1]$ için $f(\alpha) = v^T C(\alpha) v < 0$ olur. Bu son eşitsizlik her $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ için geçerlidir. Buna göre her $\alpha \in [0, 1]$ için $C(\alpha) < 0$ olur. \square

Önerme 2.3. $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisleri verilsin. Eğer

$$\begin{aligned} A_1^T P_1 + P_1 A_1 &< 0, \\ A_2^T P_2 + P_2 A_2 &< 0, \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$(A_2 - A_1)^T (P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)(A_2 - A_1) > 0$$

olacak şekilde $P_1 > 0$, $P_2 > 0$ varsa o zaman $\alpha \in [0, 1]$, $A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$ ve $P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$ olmak üzere her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$$

olur.

Kanıt. $P_1 > 0$ ve $P_2 > 0$ matrisleri (2.4) eşitsizlik sisteminin çözümleri olsun.

$$\begin{aligned}
C(\alpha) &= A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \\
&= [(1-\alpha)A_1^T + \alpha A_2^T] [(1-\alpha)P_1 + \alpha P_2] \\
&\quad + [(1-\alpha)P_1 + \alpha P_2] [(1-\alpha)A_1 + \alpha A_2] \\
&= \alpha^2[(A_2^T - A_1^T)(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)(A_2 - A_1)] \\
&\quad + \alpha[(A_2^T - A_1^T)P_1 + P_1(A_2 - A_1) + A_1^T(P_2 - P_1) \\
&\quad + (P_2 - P_1)A_1] + A_1^T P_1 + P_1 A_1.
\end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned}
C(0) &= A_1^T P_1 + P_1 A_1 < 0, \\
C(1) &= A_2^T P_2 + P_2 A_2 < 0, \\
C_0 &= (A_2^T - A_1^T)(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)(A_2 - A_1) > 0
\end{aligned}$$

olduğundan Önerme 2.2'ye göre her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$C(\alpha) = A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$$

olur. □

Örnek 2.4. $A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ kararlı matrislerini ele alalım.

Bu matrisler için

$$\begin{aligned}
A_1 A_2^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 1 \end{bmatrix}; & \text{özdeğerleri: } \frac{11 - \sqrt{89}}{4}, \frac{11 + \sqrt{89}}{4}, \\
A_1 A_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}; & \text{özdeğerleri: } -1, -8
\end{aligned}$$

şeklindedir ve $A_1 A_2$ matrisinin negatif özdeğeri olduğundan A_1, A_2 matrisleri için ortak $P > 0$ çözümü yoktur.

Diğer taraftan

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{8009}{10000} \\ \frac{8009}{10000} & \frac{7547}{10000} \end{bmatrix} > 0 \text{ için } A_1^T P_1 + P_1 A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{973}{2500} & -\frac{2727}{10000} \\ \frac{2727}{10000} & -\frac{231}{625} \end{bmatrix} < 0,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} \frac{3009}{10000} & 0 \\ 0 & \frac{501}{5000} \end{bmatrix} > 0 \text{ için } A_2^T P_2 + P_2 A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{3009}{5000} & -\frac{2007}{10000} \\ \frac{2007}{10000} & -\frac{501}{2500} \end{bmatrix} < 0,$$

ve bu P_1, P_2 matrisleri için

$$(A_2 - A_1)^T (P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)(A_2 - A_1) = \begin{bmatrix} \frac{12081}{5000} & \frac{19761}{10000} \\ \frac{19761}{10000} & \frac{4349}{2500} \end{bmatrix} > 0$$

olduğundan Önerme 2.3'e göre $A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$ ve $P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$ olmak üzere her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$C(\alpha) = A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \\ = \begin{bmatrix} -\frac{973}{2500} - \frac{1643\alpha}{625} + \frac{12081\alpha^2}{5000} & -\frac{2727}{10000} - \frac{19041\alpha}{10000} + \frac{19761\alpha^2}{10000} \\ -\frac{2727}{10000} - \frac{19041\alpha}{10000} + \frac{19761\alpha^2}{10000} & -\frac{231}{625} - \frac{1963\alpha}{1250} + \frac{4349\alpha^2}{2500} \end{bmatrix} < 0$$

olur. Burada $[A_1, A_2]$ segmentine karşılık gelen tek parametrelili Lyapunov fonksiyonu

$$P(\alpha) = \alpha \begin{bmatrix} -\frac{6991}{10000} & -\frac{8009}{10000} \\ \frac{8009}{10000} & -\frac{1309}{2000} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & \frac{8009}{10000} \\ \frac{8009}{10000} & \frac{7547}{10000} \end{bmatrix}$$

olur.

Önerme 2.5. $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisleri verilsin.

$$\begin{aligned} A_1^T P_1 + P_1 A_1 &< 0, \\ A_2^T P_2 + P_2 A_2 &< 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$(A_2^T - A_1^T)P_1 + P_1(A_2 - A_1) + A_1^T(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)A_1 = 0$$

olacak şekilde $P_1 > 0, P_2 > 0$ varsa o zaman $\alpha \in [0, 1]$, $A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$ ve $P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$ olmak üzere her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$$

olur.

Kanıt. $P_1 > 0$ ve $P_2 > 0$ matrisleri (2.5) eşitsizlik sisteminin çözümleri olsun.

$$(A_2^T - A_1^T)P_1 + P_1(A_2 - A_1) + A_1^T(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)A_1 = 0$$

olduğundan

$$A_2^T P_1 + P_1 A_2 + A_1^T P_2 + P_2 A_1 = 2(A_1^T P_1 + P_1 A_1)$$

olur.

Burada

$$C(\alpha) = A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha)$$

ifadesi düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \\ &= [(1 - \alpha)A_1^T + \alpha A_2^T] [(1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2] \\ &\quad + [(1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2] [(1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2] \\ &= \alpha^2[(A_2^T - A_1^T)(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)(A_2 - A_1)] \\ &\quad + \alpha[(A_2^T - A_1^T)P_1 + P_1(A_2 - A_1) + A_1^T(P_2 - P_1) \\ &\quad + (P_2 - P_1)A_1] + A_1^T P_1 + P_1 A_1 \\ &= \alpha^2[(A_2^T - A_1^T)(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)(A_2 - A_1)] + A_1^T P_1 + P_1 A_1 \\ &= \alpha^2[A_2^T P_2 + P_2 A_2 + A_1^T P_1 + P_1 A_1 - (A_2^T P_1 + P_1 A_2 + A_1^T P_2 + P_2 A_1)] \\ &\quad + A_1^T P_1 + P_1 A_1 \\ &= \alpha^2[(A_2^T P_2 + P_2 A_2) - (A_1^T P_1 + P_1 A_1)] + A_1^T P_1 + P_1 A_1 \end{aligned}$$

olur.

$$Q_1 := -(A_1^T P_1 + P_1 A_1) > 0,$$

$$Q_2 := -(A_2^T P_2 + P_2 A_2) > 0$$

diyelim. O zaman

$$C(\alpha) = \alpha^2(Q_1 - Q_2) - Q_1 = -[(1 - \alpha^2)Q_1 + \alpha^2 Q_2]$$

olur. Burada $\alpha \in [0, 1]$ olduğundan, $0 \leq \alpha^2 \leq 1$, $(1 - \alpha^2) + \alpha^2 = 1$ ve $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ olduğundan her $\alpha \in [0, 1]$ için $C(\alpha) < 0$ olur. \square

Örnek 2.6.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{27}{10} & 2 \\ -3 & \frac{13}{10} \end{bmatrix}$$

kararlı matrislerini ele alalım. Burada

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{770}{249} & -\frac{610}{249} \\ \frac{860}{249} & \frac{940}{249} \end{bmatrix}; \quad \text{özdeğerleri: } 0.504966, 6.362503,$$

$$A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}; \quad \text{özdeğerleri: } -11.106447, -1.793552$$

şeklinindedir. $A_1 A_2$ matrisinin negatif özdeğeri olduğundan A_1, A_2 matrisleri için ortak $P > 0$ çözümü yoktur.

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{1334}{505} & \frac{146}{505} \\ \frac{146}{505} & 2 \end{bmatrix} > 0 \text{ için } A_1^T P_1 + P_1 A_1 = \begin{bmatrix} \frac{-3252}{505} & \frac{1544}{505} \\ \frac{1544}{505} & \frac{-3164}{505} \end{bmatrix} < 0,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{-89}{50} \\ \frac{-89}{50} & \frac{20723}{10100} \end{bmatrix} > 0 \text{ için } A_2^T P_2 + P_2 A_2 = \begin{bmatrix} \frac{-3}{25} & \frac{17001}{50500} \\ \frac{17001}{50500} & \frac{-90161}{50500} \end{bmatrix} < 0$$

ve bu P_1, P_2 matrisleri için

$$(A_2^T - A_1^T)P_1 + P_1(A_2 - A_1) + A_1^T(P_2 - P_1) + (P_2 - P_1)A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan Önerme 2.5'e göre $A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$ ve $P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$ olmak üzere her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{3252}{505} + \frac{15957}{2525}\alpha^2 & \frac{1544}{505} - \frac{137399}{50500}\alpha^2 \\ \frac{1544}{505} - \frac{137399}{50500}\alpha^2 & -\frac{3164}{505} + \frac{226239}{50500}\alpha^2 \end{bmatrix} < 0 \end{aligned}$$

olur.

2.2. $n = 3$ için Barmish'in İddiasına Karşıt Örnek

Barmish'in iddiasının $n \geq 3$ için genel durumda doğru olmadığı [7] çalışmasında karşıt örnek verilerek gösterilmiştir. $n = 2$ durumunda İddia 3.1'in doğruluğuna ilişkin bir sonuç henüz mevcut değildir.

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisleri için $[A_1, A_2]$ matris segmentine karşılık gelen tek parametrelili afin $P(\alpha) > 0$ Lyapunov çözümlerinin varlığı için bir gerek ve yeter koşul [7]'de şu şekilde yer almaktadır. Burada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisi için $\text{He}(A) = A + A^T$

gösterimi kullanılmaktadır.

Teorem 2.7 ([7]). *Tüm konveks kombinasyonları kararlı $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$ matrisinin $P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$ şeklinde afin bir Lyapunov fonksiyonuna sahip olması için gerek ve yeter koşul*

$$\text{He} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \\ \frac{1}{2}(P_2 - P_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_1 + A_2) & \frac{1}{2}(A_2 - A_1) \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} D & G \\ G^T & -D \end{bmatrix} < 0 \quad (2.6)$$

olacak şekilde P_1, P_2 simetrik matrisleri ve $D > 0$, $G = -G^T$ matrislerinin varolmasıdır.

$[A_1, A_2]$ segmenti için afin Lyapunov fonksiyonunun var olmaması için gerek ve yeter koşul [7]'de şu şekilde ifade edilmiştir.

Teorem 2.8 ([7]). *Tüm konveks kombinasyonları kararlı $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2$ matrisinin $P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$ şeklinde afin bir Lyapunov fonksiyonuna sahip olmaması için gerek ve yeter koşul*

$$\begin{aligned} \text{He} \left\{ \frac{1}{2}(A_1 + A_2)X + \frac{1}{2}(A_2 - A_1)Z \right\} &= 0, \\ \text{He} \left\{ \frac{1}{2}(A_1 + A_2)Z + \frac{1}{2}(A_2 - A_1)Y \right\} &= 0, \\ X - Y \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X & Z \\ Z & Y \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X & Z \\ Z & Y \end{bmatrix} &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

olacak şekilde X, Y, Z simetrik matrislerinin varolmasıdır.

Örnek 2.9 ([7]).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 10 & -6 & 1 \\ -12 & -11 & -23 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -9 & -1 & -15 \\ 0 & -6 & 1 \\ 8 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

kararlı matrisleri için

$$A_1 A_2^{-1} = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} -499 & -1376 & 548 \\ 690 & 2267 & 910 \\ 364 & 758 & 249 \end{bmatrix}, \quad \text{özdeğerleri: } 19.886, \quad -0.51820 \pm i0.30005,$$

$$B(A_1) = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -11 \\ -11 & -22 & 5 \\ 12 & 10 & -29 \end{bmatrix}, \quad B(A_2) = \frac{1}{107} \begin{bmatrix} -15 & 1 & 15 \\ 15 & 0 & -1 \\ -8 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$B(A_1)B^{-1}(A_2) = \frac{1}{37} \begin{bmatrix} 37 & -178 & -380 \\ -814 & 1657 & 4684 \\ 370 & -946 & -2523 \end{bmatrix},$$

matrisinin özdeğerleri: 0.759 , $-11.58268 \pm i6.31282$ olduğundan Teorem 1.8'e göre $[A_1, A_2]$ segmenti gürbüz kararlıdır.

Teorem 2.8, denklem (2.7)'deki beş koşulu sağlayan X, Y, Z matrisleri

$$X = \begin{bmatrix} 27923000270 & 1613316900 & -18116392840 \\ 1613316900 & 2449636443 & -37327054 \\ -18116392840 & -373270542 & 15686330948 \end{bmatrix},$$

$$Y = \begin{bmatrix} 18406827180 & -567157140 & -11343142800 \\ -567157140 & 979635060 & 412477920 \\ -11343142800 & 412477920 & 10002589560 \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} 20054829240 & -1400900940 & -12946463460 \\ -1400900940 & -450021420 & 1468590480 \\ -12946463460 & 1468590480 & 11543189400 \end{bmatrix}$$

şeklinde Matlab-*SeDuMi* programı ile bulunmuştur [7].

Görüldüğü üzere Örnek 2.9'da ifade elde edilen X, Y, Z matrislerinin girdileri büyük sayılardan oluşmaktadır.

Bu örnek için Teorem 2.8'de ifade edilen denklemleri kullanarak X, Y, Z matrislerini belirlemeye çalışalım.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_2 & y_4 & y_5 \\ y_3 & y_5 & y_6 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_4 & z_5 \\ z_3 & z_5 & z_6 \end{bmatrix}$$

diyelim. $z = (z_1, z_2, \dots, z_6)$ olmak üzere

$$\text{He} \left\{ \frac{1}{2}(A_1 + A_2)X + \frac{1}{2}(A_2 - A_1)Z \right\} = 0$$

denklemlerden $X = X(z)$ matrisi

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{325}{108}z_1 - \frac{11}{4}z_2 - \frac{197}{36}z_3 - \frac{25}{54}z_4 - \frac{43}{54}z_5 + \frac{34}{27}z_6, \\
x_2 &= -\frac{2195}{927}z_1 - \frac{261}{103}z_2 - \frac{985}{309}z_3 - \frac{787}{927}z_4 - \frac{2200}{927}z_5 + \frac{593}{927}z_6, \\
x_3 &= \frac{3200}{2781}z_1 + \frac{151}{103}z_2 + \frac{1165}{927}z_3 + \frac{214}{2781}z_4 - \frac{2171}{2781}z_5 - \frac{5225}{2781}z_6, \\
x_4 &= -\frac{1557}{824}z_1 - \frac{11241}{4120}z_2 - \frac{2151}{824}z_3 - \frac{1079}{2060}z_4 - \frac{3659}{2060}z_5 - \frac{91}{206}z_6, \\
x_5 &= \frac{1861}{3708}z_1 + \frac{2677}{2060}z_2 + \frac{341}{1236}z_3 + \frac{10217}{9270}z_4 + \frac{11207}{9270}z_5 - \frac{508}{927}z_6, \\
x_6 &= -\frac{1031}{5562}z_1 - \frac{49}{1030}z_2 + \frac{2129}{1854}z_3 + \frac{4073}{13905}z_4 + \frac{33728}{13905}z_5 + \frac{7414}{2781}z_6
\end{aligned}$$

ve

$$\operatorname{He}\left\{\frac{1}{2}(A_1 + A_2)Z + \frac{1}{2}(A_2 - A_1)Y\right\} = 0$$

denklemlerden de $Y = Y(z)$ matrisi

$$\begin{aligned}
y_1 &= -\frac{147}{44}z_1 + \frac{303}{110}z_2 - \frac{711}{55}z_3 - \frac{1544}{275}z_4 + \frac{921}{1100}z_5 - \frac{78}{11}z_6, \\
y_2 &= z_2 - \frac{6}{5}z_4 + \frac{1}{5}z_5, \\
y_3 &= \frac{43}{44}z_1 - \frac{25}{22}z_2 + \frac{53}{11}z_3 + \frac{134}{55}z_4 - \frac{81}{220}z_5 + \frac{30}{11}z_6, \\
y_4 &= -\frac{1135}{484}z_1 + \frac{565}{242}z_2 - \frac{802}{121}z_3 - \frac{1444}{605}z_4 + \frac{44681}{2420}z_5 - \frac{403}{121}z_6, \\
y_5 &= \frac{535}{242}z_1 - \frac{333}{121}z_2 + \frac{796}{121}z_3 + \frac{2012}{605}z_4 - \frac{1209}{1210}z_5 + \frac{423}{121}z_6, \\
y_6 &= -\frac{1165}{484}z_1 + \frac{713}{242}z_2 - \frac{996}{121}z_3 - \frac{2556}{605}z_4 + \frac{2219}{2420}z_5 - \frac{497}{121}z_6
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre denklem (2.7)

$$C(z) = \begin{bmatrix} X(z) - Y(z) & 0 & 0 \\ 0 & X(z) & Z \\ 0 & Z & Y(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \neq 0 \quad (2.8)$$

formunda ifade edilir. $C(z)$ blok matrisi 9×9 boyutlu simetrik bir matristir. Burada

$$\lambda_{\min}(C(z)) \geq 0 \Leftrightarrow \lambda_{\min}(X(z) - Y(z)) \geq 0 \text{ ve } \lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} X(z) & Z \\ Z & Y(z) \end{bmatrix}\right) \geq 0$$

olduğundan $\lambda_{\min}(C(\hat{z})) \geq 0$ olacak şekilde bir $\hat{z} \in \mathbb{R}^6$ bulunduğunda Teorem 2.8'in koşulları sağlanmış, yani $X(z)$, $Y(z)$ ve Z matrisleri belirlenmiş olur.

$C(z)$ matrisinin $(3n) \times (3n)$ olması durumunda $m = n(n+1)/2$ olmak üzere $z \in \mathbb{R}^m$ olur. Burada $\lambda_{\min}(C(\hat{z})) \geq 0$ olacak şekilde bir $\hat{z} \in \mathbb{R}^m$ varsa, $C(z)$ matrisi homojen yani $t \in \mathbb{R}$ için $C(t.z) = t.C(z)$ olduğundan $C(z) \geq 0$ çözümünü $\mathcal{Z} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] = [-1, 1]^m$ kutusunda araştırabiliriz.

Şimdi $h : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(z) = \lambda_{\min}C(z)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $h(z)$ fonksiyonu

$$h(z) = \lambda_{\min}C(z) = \min_{\|v\|=1} v^T C(z) v$$

şeklinde de ifade edilebilir [20].

Bu h fonksiyonu için [22]'de verilen Teorem aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Teorem 2.10. $\hat{z} \in \mathcal{Z}$ için $\lambda_{\min}C(\hat{z})$ özdeğerine karşılık gelen birim özvektör \hat{v} , yani $h(\hat{z}) = \hat{v}^T C(\hat{z}) \hat{v}$ olsun. O zaman öyle $\hat{g} \in \mathbb{R}^m$ vektörü vardır ki

i) $h(\hat{z}) = \langle \hat{z}, \hat{g} \rangle,$

ii) her $z \in \mathcal{Z}$ için $h(z) \leq \langle z, \hat{g} \rangle$

olur.

Teorem 2.10'daki \hat{g} vektörü şu şekilde belirlenir. $f(z, v) := v^T C(z) v$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon z 'ye göre lineerdir ve \hat{g} vektörü

$$\hat{g} = \nabla_z f|_{v=\hat{v}}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek 2.9 için Teorem 2.10'daki özellikleri kullanılarak $\lambda_{\min}(C(\hat{z})) \geq 0$ olacak şekilde bir $\hat{z} \in \mathcal{Z}$ vektörünün varlığını araştıralım.

Burada $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere k 'yüncü aşamada ele alınan \mathcal{Z} kümesine ait noktayı z^k ile göstereceğiz.

Bir $0 \neq z^1 \in \mathcal{Z}$ alalım. Eğer $h(z^1) \geq 0$ ise $C(z^1) \geq 0$, yani denklem (2.7)'deki koşulları sağlayan X, Y, Z matrisleri bulunmuş olur. $h(z^1) < 0$ ise \hat{g}^1 vektörü hesaplanır. \mathcal{Z} kutusunun $\langle z, \hat{g}^1 \rangle < 0$ koşulunu sağlayan noktaları için $h(z) \leq \langle z, \hat{g}^1 \rangle < 0$ olacağından bu z noktaları için $\lambda_{\min}(C(z)) < 0$ olur.

Eğer $\lambda_{\min}(C(\hat{z})) \geq 0$ olacak şekilde bir \hat{z} varsa, bu nokta \mathcal{Z} kutusunun $\langle z, \hat{g}^1 \rangle \geq 0$ koşulunu sağlayan noktalar kümesinde olmalıdır. Bu küme bir politoptur. Bu politopun köşe noktaları q^1, q^2, \dots, q^{N_1} olsun. Bu politopun analitik merkezini z^2 olarak alalım:

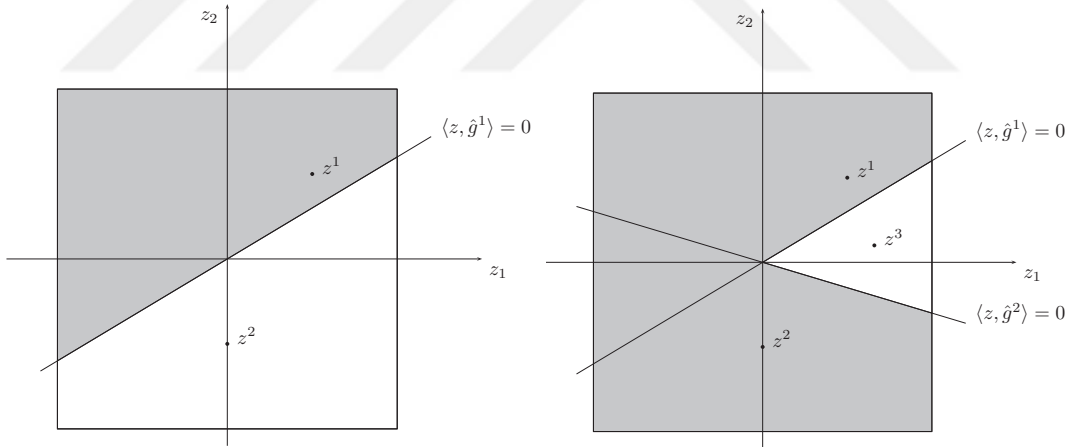
$$z^2 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} q^i.$$

Eğer $h(z^2) \geq 0$ ise $C(z^2) \geq 0$ olur. $h(z^2) < 0$ ise \hat{g}^2 vektörü hesaplanır. Eğer $\lambda_{\min}(C(\hat{z})) \geq 0$ olacak şekilde bir \hat{z} varsa, bu nokta \mathcal{Z} kutusunun $\langle z, \hat{g}^1 \rangle \geq 0$ ve $\langle z, \hat{g}^2 \rangle \geq 0$ koşullarını sağlayan noktalar kümesinde olmalıdır. Bu kümenin köşe noktaları q^1, q^2, \dots, q^{N_2} olsun. Yeni nokta olarak

$$z^3 = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} q^i.$$

alabiliriz.

Herhangi bir aşamada kesişim kümesi boş küme ise denklem (2.7)'deki koşulları sağlayacak şekilde X, Y, Z matrisi yoktur.



Şekil 2.1. \mathcal{Z} kutusunda z^k noktasının seçilme prosedürü

Algoritma 2.11. $C(z)$ (2.8) matrisi verilsin.

- 1) $0 \neq z^1 \in \mathcal{Z}$ alınır. $h(z^1) \geq 0$ ise durulur. $h(z^1) < 0$ ise \hat{g}^1 vektörü hesaplanır. \mathcal{Z} kutusu ile $\langle z, \hat{g}^1 \rangle \geq 0$ yarı uzayının kesişimi olan politopun q^1, q^2, \dots, q^{N_1} köşe noktaları bulunur. $z^2 = \frac{1}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} q^i$ alınır.
- 2) $h(z^2) \geq 0$ ise durulur. $h(z^2) < 0$ ise \hat{g}^2 vektörü hesaplanır. \mathcal{Z} kutusu ile $\langle z, \hat{g}^1 \rangle \geq 0$ ve $\langle z, \hat{g}^2 \rangle \geq 0$ yarı uzaylarının kesişimi bulunur. Bu küme boş küme ise durulur (Denklem (2.8)'in çözümü yoktur). Kesişim kümesi boş kümeden farklıysa bu kümenin q^1, q^2, \dots, q^{N_2} köşe noktaları bulunur. $z^3 = \frac{1}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} q^i$ alınır.
- 3) $h(z^k) \geq 0$ ise durulur. $h(z^k) < 0$ ise \hat{g}^k vektörü hesaplanır. \mathcal{Z} kutusu ile $\langle z, \hat{g}^1 \rangle \geq 0, \dots, \langle z, \hat{g}^k \rangle \geq 0$ yarı uzaylarının kesişimi bulunur. Bu küme boş küme ise durulur (Denklem (2.8)'in çözümü yoktur). Kesişim kümesi boş kümeden farklıysa bu kümenin q^1, q^2, \dots, q^{N_k} köşe noktaları bulunur. $z^{k+1} = \frac{1}{N_k} \sum_{i=1}^{N_k} q^i$ alınır.

Denklem (2.8) için $z^1 = (1/2, 1/2, \dots, 1/2)^T \in \mathbb{R}^6$ alınarak Algoritma 2.11 uygulandığında 17'nci adımda $z^{17} = (0.658, -0.037, -0.420, -0.004, 0.037, 0.365)^T$ elde edilir ve $h(z^{17}) = \lambda_{\min} C(z^{17}) = 0.000739 > 0$ dır. Teorem 2.8, denklem (2.7)'deki koşulları sağlayan X, Y, Z matrisleri

$$\begin{aligned}
 X &= \begin{bmatrix} 0.8520092585 & 0.0236202805 & -0.5398982380 \\ 0.0236202805 & 0.0516148058 & 0.0065874326 \\ -0.5398982380 & 0.0065874326 & 0.4591387630 \end{bmatrix}, \\
 Y &= \begin{bmatrix} 0.594473636 & -0.0248000000 & -0.3664590915 \\ -0.0248000000 & 0.019835123 & 0.019240497 \\ -0.3664590915 & 0.019240497 & 0.315966530 \end{bmatrix}, \\
 Z &= \begin{bmatrix} 0.658 & -0.037 & -0.420 \\ -0.037 & -0.004 & 0.037 \\ -0.420 & 0.037 & 0.365 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

şeklindedir.

2.3. Çok Parametrelili Lyapunov Fonksiyonları

$A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisleri verilsin.

$$\mathcal{A} = \{A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_N A_N : \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = 1, \alpha_i \geq 0\} \quad (2.9)$$

matrisler politopu verilsin. \mathcal{A} (2.9) matrisler politopu aşağıdaki teoremdede ifade edilen koşulları sağladığında bu matrisler politopuna karşılık

$$P(\alpha) = (\alpha_1 P_1^{-1} + \alpha_2 P_2^{-1} + \cdots + \alpha_N P_N^{-1})^{-1}$$

biçiminde bir Lyapunov fonksiyonunun varlığı gösterilmiştir.

$$\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{R}^N : \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_N = 1, \alpha_i \geq 1, i = 1, \dots, N\}$$
 tanımlayalım.

Teorem 2.12 ([27]). A_1, A_2, \dots, A_N matrisleri $n \times n$ boyutlu kararlı matrisler olsun.

Eğer,

$$A_i^T(S - Q) + (S + Q)A_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.10)$$

olacak şekilde $S = -S^T$ ve $Q = Q^T > 0$ matrisleri varsa o zaman

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -2Q \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Lyapunov denklemlerinin çözümleri $P_i > 0$ olmak üzere

$$\alpha \in \Lambda, P(\alpha) = (\alpha_1 P_1^{-1} + \alpha_2 P_2^{-1} + \cdots + \alpha_N P_N^{-1})^{-1}$$

matrisi $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_N A_N$ matrisi için Lyapunov fonksiyonudur, yani $\mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ politopu gürbüz kararlıdır.

Kanat. A , $n \times n$ boyutlu herhangi bir matris olsun. A matrisi

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir. A kararlı bir matris olsun. O zaman $Q > 0$ için

$$A^T P + P A = -2Q$$

denkleminin çözümleri olan $P > 0$ matrisi tektir. Bu P matrisi için $A^T P$ matrisini (2.11) eşitliğine göre,

$$A^T P = \frac{1}{2}[A^T P + (A^T P)^T] + \frac{1}{2}[A^T P - (A^T P)^T]$$

şeklinde yazabiliriz. Buradan,

$$A^T P = \frac{1}{2}[A^T P + P A] + \frac{1}{2}[A^T P - P A]$$

ifadesi gelir. Bu ifadenin simetrik kısmı $\frac{1}{2}[A^T P + P A] = -Q$ dur ve ters simetrik

kısmına da yani $\frac{1}{2}[A^T P - PA] = -S$ dersek,

$$A^T P = (-Q) + (-S)$$

şeklinde yazabiliriz. O zaman

$$(A^T P)^T = -(Q + S)^T$$

$$PA = S - Q$$

$$A = P^{-1}(S - Q)$$

elde edilir ($P > 0$ ve P matrisinin özdeğerleri pozitif olacağından $\det(P) \neq 0$, yani P^{-1} vardır.). Ayrıca, $A^T P + PA = -2Q$ denkleminin $P > 0$ çözümü için,

$$S = \frac{1}{2}[PA - A^T P]$$

olur.

$A^T P + PA = -2Q$ eşitliğinin her iki tarafını önce sağdan A ile ve daha sonra da soldan A^T ile çarpıp elde edilen iki denklemi taraf tarafa çıkartırsak,

$$PA^2 - (A^T)^2 P = 2(A^T Q - QA) \quad (2.12)$$

bulunur. $PA - A^T P = 2S$ eşitliğinin de her iki tarafını önce soldan A^T ile ve daha sonra da sağdan A ile çarpıp elde edilen denklemleri taraf tarafa toplarsak,

$$PA^2 - (A^T)^2 P = 2(A^T S + SA) \quad (2.13)$$

bulunur. O zaman (2.12) ve (2.13) denklemlerinden

$$A^T(S - Q) + (S + Q)A = 0$$

elde edilir.

Şimdi A_1, A_2, \dots, A_N kararlı matrisleri verilsin. Öyle $S^T = -S$ ve $Q > 0$ matrisleri için

$$A_i^T(S - Q) + (S + Q)A_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.14)$$

sağlansın. $Q > 0$ matrisi için A_1, A_2, \dots, A_N matrisleri kararlı olduğundan $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$A_i^T P_i + P_i A_i = -2Q$$

denklemini sağlayan $P_i > 0$ matrisleri vardır ve tektir. Bu P_i matrislerine karşılık gelen

$$S_i = \frac{1}{2}[P_i A_i - A_i^T P_i]$$

matrisleri için (2.14) denklemi

$$A_i^T (S_i - Q) + (S_i + Q) A_i = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

sağlanır. Diğer taraftan

$$A_i^T (S - Q) + (S + Q) A_i = 0 \quad (2.15)$$

ve her $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ için A_i matrislerine karşılık gelen S_i matrisleri için (2.15) denklemine göre $S_i = S$ olmak zorundadır. O zaman $i = 1, 2, \dots, N$ için

$$A_i = P_i^{-1} (S - Q)$$

şeklinde yazılabilir. Bu bilgiler doğrultusunda $P(\alpha) = (\alpha_1 P_1^{-1} + \dots + \alpha_N P_N^{-1})^{-1}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_N A_N \\ &= \alpha_1 P_1^{-1} (S - Q) + \dots + \alpha_N P_N^{-1} (S - Q) \\ &= P^{-1}(\alpha) (S - Q) \end{aligned}$$

şeklinde alabiliriz. Dolayısıyla $A(\alpha)$ kararlı olup $P(\alpha) > 0$

$$A^T(\alpha) P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) = -2Q$$

Lyapunov denkleminin çözümleri olur. □

Örnek 2.13.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -7 \\ \frac{1}{7} & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

kararlı matrislerini alalım.

$A_1 A_2^{-1}$ matrisinin özdeğerleri 4.3410, 0.2303 ve $A_1 A_2$ matrisinin özdeğerleri de $-0.9551, -4.1876$ olduğundan A_1 ve A_2 matrislerinin ortak P çözümü yoktur. Do-

layısıyla A_1, A_2 ve A_3 matrislerinin de ortak P çözümü yoktur.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & s_2 \\ -s_2 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin. Şimdi

$$A_1^T(S - Q) + (S - Q)A_1 = 0$$

$$A_2^T(S - Q) + (S - Q)A_2 = 0$$

$$A_3^T(S - Q) + (S - Q)A_3 = 0$$

olacak şekilde

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

vardır. O zaman

$$A_1^T P_1 + P_1 \cdot A_1 = -2Q$$

$$A_2^T P_2 + P_2 \cdot A_2 = -2Q$$

$$A_3^T P_3 + P_3 \cdot A_3 = -2Q$$

Lyapunov denklemlerinden,

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{13}{4} \end{bmatrix} > 0, P_2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{28} & \frac{-5}{4} \\ \frac{-5}{4} & \frac{49}{4} \end{bmatrix} > 0, P_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{16}{5} \end{bmatrix} > 0$$

çözümleri elde edilir. Her $\alpha \in \Lambda$ için $A(\alpha)$ matrisinin Lyapunov fonksiyonu

$d = 14\alpha_1^2 + 64\alpha_1\alpha_2 + 49\alpha_1\alpha_3 + 14\alpha_2^2 + 73\alpha_2\alpha_3 + 35\alpha_3^2$ olmak üzere

$$P(\alpha) = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} \frac{3}{2}(7\alpha_1 + 3\alpha_2 + 7\alpha_3) & \frac{7}{2}(\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3) \\ \frac{7}{2}(\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3) & \frac{7}{2}(13\alpha_1 + 49\alpha_2 + 32\alpha_3) \end{bmatrix}$$

olur ve $\mathcal{A} = \text{conv}\{A_1, A_2, A_3\}$ politopu gürbüz kararlıdır.

3. MAKSİMAL ÖZDEĞER FONKSİYONU İLE AFİN LYAPUNOV FONKSİYONLARININ OLUŞTURULMASI

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri verilsin. Bu bölümde, $[A_1, A_2]$ gürbüz kararlı matris segmenti ve $P(\alpha) = (1 - \alpha)P_1 + \alpha P_2$ olmak üzere her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$L(\alpha) = A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0 \quad (3.1)$$

olacak şekilde $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrik matrislerinin varlığı problemine ilişkin bir algoritma verilecektir.

$m = n(n+1)/2$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m})^T \in \mathbb{R}^{2m}$ için P_1, P_2 simetrik matrislerini

$$P_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_2 & x_{n+1} & \dots & x_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n-1} & \dots & x_m \end{bmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{bmatrix} x_{m+1} & x_{m+2} & \dots & x_{m+n} \\ x_{m+2} & x_{m+n+1} & \dots & x_{m+2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m+n} & x_{m+2n-1} & \dots & x_{2m} \end{bmatrix}$$

şeklinde alalım. Denklem (3.1) ile verilen eşitsizlik $x \in \mathbb{R}^{2m}$ ve $P(\alpha, x) = \alpha P_1(x) + (1 - \alpha)P_2(x)$ için

$$L(\alpha, x) = A^T(\alpha)P(\alpha, x) + P(\alpha, x)A(\alpha) < 0 \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Burada her $\alpha \in [0, 1]$ için (3.2) eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{2m}$ varsa, o zaman her $\gamma > 0$ için $P_1(\gamma\tilde{x})$ ve $P_2(\gamma\tilde{x})$ matrisleri de (3.2) eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla, (3.2) çözümünün

$$\mathcal{X} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times \dots \times [-1, 1] = [-1, 1]^{2m}$$

kutusunda araştırılması yeterlidir.

Şimdi $\phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\phi(x) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_{\max} L(\alpha, x)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\lambda_{\max} L(\alpha, x)$, $\alpha \in [0, 1]$ için $L(\alpha, x)$ simetrik matrisinin en büyük özdeğeridir. Bu değer

$$\lambda_{\max} L(\alpha, x) = \max_{\|v\|=1} v^T L(\alpha, x)v = \hat{v}^T L(\alpha, x)\hat{v}$$

ile verilebilir [20]. Burada \hat{v} vektörü $\lambda_{\max}L(\alpha, x)$ 'a (en büyük özdeğere) karşılık gelen birim özvektördür. Diğer taraftan

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} \max_{\|v\|=1} v^T L(\alpha, x)v = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1}} v^T L(\alpha, x)v$$

olmak üzere

$$\phi(x) = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1}} v^T L(\alpha, x)v$$

şeklinde yazılabilir.

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisler, $A_1 A_2^{-1}$ ve $B(A_1)B^{-1}(A_2)$ matrisleri negatif özdeğere sahip olmasınlar. Eğer öyle $\hat{x} \in \mathcal{X}$ için $\phi(\hat{x}) < 0$ oluyorsa o zaman her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$A^T(\alpha)P(\alpha, \hat{x}) + P(\alpha, \hat{x})A(\alpha) < 0$$

olur.

$f(\alpha, x, v) := v^T L(\alpha, x)v$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon x 'e göre lineerdir. $x, \hat{x} \in \text{int}(\mathcal{X})$ için x ile \hat{x} noktalarının belirlediği doğru parçası üzerinde öyle $\tilde{x} \in \text{int}(\mathcal{X})$ vardır ki

$$f(\alpha, x, v) = f(\alpha, \hat{x}, v) + \langle \nabla_x f(\alpha, \tilde{x}, v), x - \hat{x} \rangle$$

olur. f fonksiyonu x 'e göre lineer olduğundan $\nabla_x f$ vektörü x 'ten bağımsızdır. Bu nedenle

$$f(\alpha, x, v) = f(\alpha, \hat{x}, v) + \langle \nabla_x f(\alpha, \hat{x}, v), x - \hat{x} \rangle$$

şeklinde de yazılabilir. Bu $f(\alpha, x, v)$ fonksiyonunun [22]'de verilen Teorem'de ifade edilen özelliklerine benzer özellikler aşağıdaki gibidir.

Teorem 3.1. $\alpha \in [0, 1]$ ve $\hat{x} \in \text{int}(\mathcal{X})$ verilsin. $L(\alpha, \hat{x})$ matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen birim özvektörü \hat{v} için $\hat{g} = \nabla_x f|_{v=\hat{v}}$ diyelim. O zaman,

i) $\phi(\hat{x}) = \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle,$

ii) her $x \in \mathcal{X}$ için $\phi(x) \geq \langle \hat{g}, x \rangle$

olur.

Kanıt. Keyfi bir $x \in \mathcal{X}$ için

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \max_{\|v\|=1, 0 \leq \alpha \leq 1} f(\alpha, x, v) \\
&\geq f(\hat{\alpha}, x, \hat{v}) \\
&= f(\hat{\alpha}, x, \hat{v}) - f(\hat{\alpha}, \hat{x}, \hat{v}) + f(\hat{\alpha}, \hat{x}, \hat{v}) \\
&= f(\hat{\alpha}, \hat{x}, \hat{v}) + \langle \nabla_x f(\hat{\alpha}, \hat{x}, \hat{v}), x - \hat{x} \rangle \\
&= \phi(\hat{x}) + \langle \hat{g}, x - \hat{x} \rangle
\end{aligned}$$

(Burada $\phi(\hat{x}) = \max_{\|v\|=1, 0 \leq \alpha \leq 1} f(\alpha, \hat{x}, v) = f(\hat{\alpha}, \hat{x}, \hat{v})$ olarak alınmıştır.)

Bir $-1 < \beta < 1$ için $a = \beta \hat{x}$ alalım. $a \in \text{int}(\mathcal{X})$ olur.

$$\phi(a) \geq \phi(\hat{x}) + \langle \hat{g}, a - \hat{x} \rangle$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\phi(\beta \hat{x}) &\geq \phi(\hat{x}) + \langle \hat{g}, \beta \hat{x} - \hat{x} \rangle, \\
\beta \phi(\hat{x}) &\geq \phi(\hat{x}) + \beta \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle - \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle,
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$(\beta - 1)\phi(\hat{x}) \geq (\beta - 1)\langle \hat{g}, \hat{x} \rangle$$

$\beta - 1 < 0$ olduğundan

$$\phi(\hat{x}) \leq \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle$$

olduğu görülür. $\bar{\gamma} \hat{x}$ noktası \mathcal{X} kutusunun sınırında olacak şekilde $\bar{\gamma}$ sayısı için $1 < \gamma < \bar{\gamma}$ olmak üzere $b = \gamma \hat{x} \in \text{int}(\mathcal{X})$ olur.

$$\phi(b) \geq \phi(\hat{x}) + \langle \hat{g}, b - \hat{x} \rangle$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\phi(\gamma \hat{x}) &\geq \phi(\hat{x}) + \langle \hat{g}, \gamma \hat{x} - \hat{x} \rangle, \\
\gamma \phi(\hat{x}) &\geq \phi(\hat{x}) + \gamma \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle - \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle,
\end{aligned}$$

ve buradan

$$(\gamma - 1)\phi(\hat{x}) \geq (\gamma - 1)\langle \hat{g}, \hat{x} \rangle$$

$\gamma - 1 > 0$ olduğundan

$$\phi(\hat{x}) \geq \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle$$

olur. Sonuç olarak $\hat{x} \in \text{int}(\mathcal{X})$ için $\phi(\hat{x}) = \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle$ olur.

Diğer taraftan,

$$\phi(x) \geq \phi(\hat{x}) + \langle \hat{g}, x - \hat{x} \rangle = \phi(\hat{x}) + \langle \hat{g}, x \rangle - \langle \hat{g}, \hat{x} \rangle$$

olduğundan $\phi(x) \geq \langle \hat{g}, x \rangle$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür. \square

3.1. Bir İç Nokta Yöntemi

Bu bölümde Teorem 3.1'i esas alan bir algoritma ile $\phi(x_*) < 0$ olacak şekilde $x_* \in \mathcal{X}$ noktası araştırılacaktır.

Aşağıda verilen yöntemde $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere k 'yüncü aşamada ele alınan nokta x^k ve bu noktaya karşılık gelen maksimum özdeğeri veren parametre α^k ile gösterilmiştir.

Algoritma 3.2.

1) $x^1 \in \text{int}(\mathcal{X})$, $x^1 \neq 0$ noktasını alalım. Eğer $\phi(x^1) < 0$ ise o zaman (3.2) eşitsizliğini sağlayacak şekilde $P_1(x^1)$ ve $P_2(x^1)$ matrisleri belirlenmiş olur.

$\phi(x^1) \geq 0$ olduğunu varsayalım. $\phi(x^1)$ sayısı $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $L(\alpha, x^1)$ matrislerinin en büyük özdeğerlerinin maksimumudur. Bu maksimum değer, $\alpha^1 \in [0, 1]$ için $L(\alpha^1, x^1)$ matrisinin en büyük özdeğeri olsun. Bu özdeğere karşılık gelen birim özvektöre v^1 diyelim. O zaman

$$\phi(x^1) = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1}} f(\alpha, x, v) = f(\alpha^1, x^1, v^1)$$

olur.

$$g^1 = \nabla_x f(\alpha^1, x^1, v^1)$$

şeklinde hesaplanır. x^1 noktası aradığımız çözümü veren nokta olmadığından yeni bir x^2 noktası için çözüm araştırılmalıdır.

2) Teorem 3.1-ii)'ye göre $\phi(x) \geq \langle g^1, x \rangle$ olduğundan \mathcal{X} kümesinden $\langle g^1, x \rangle \geq 0$ olan noktalar elimine edilerek yeni $x^2 \in \text{int}(\mathcal{X})$ noktası $\langle g^1, x^2 \rangle < 0$ olacak şekilde seçilir. Eğer $\phi(x^2) < 0$ ise çözüm bulunmuştur. $\phi(x^2) \geq 0$ ise g^2 vektörü hesaplanır ve $x^3 \in \text{int}(\mathcal{X})$ noktası $\langle g^1, x^3 \rangle < 0$ ve $\langle g^2, x^3 \rangle < 0$ olacak şekilde seçilir.

3) Bu işlemlere devam edildiğinde eğer $\phi(x^k) < 0$ ise çözüm elde edilmiştir. Eğer $\phi(x^k) \geq 0$ ise yeni $x^{k+1} \in \text{int}(\mathcal{X})$ noktası $i = 1, 2, \dots, k$ için $\langle g^i, x^{k+1} \rangle < 0$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde alınmalıdır. Bu x^{k+1} noktasının belirlenmesi için [22]'de

verilen

$$s_k := \min_{x \in \mathcal{X}} \max_{1 \leq i \leq k} \langle g^i, x \rangle := \max_{1 \leq i \leq k} \{ \langle g^i, \hat{x}^k \rangle \} \quad (3.3)$$

minimax problemi çözülür.

Teorem 3.3 ([22]). Denklemler (3.3) ile verilen minimaks probleminin çözümü

$$s_k = -\max z$$

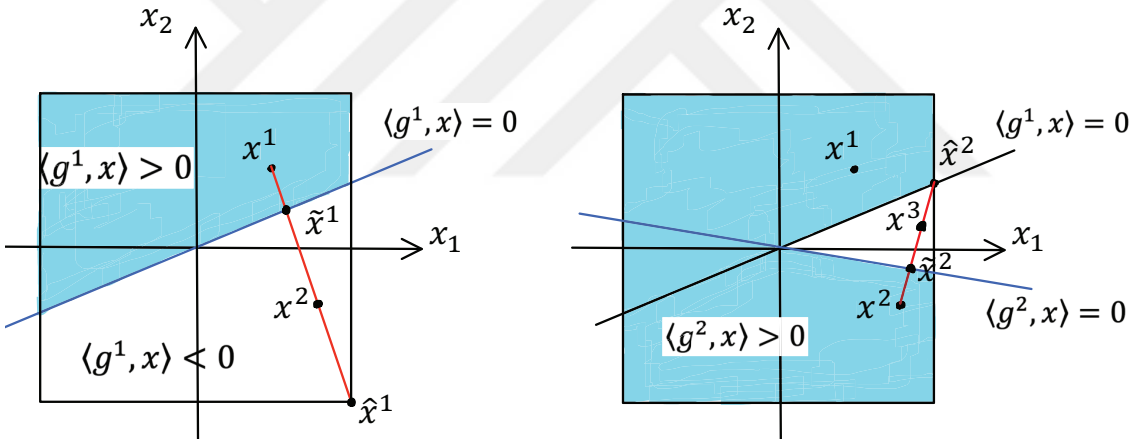
$$\text{kısıtlar: } -1 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 2r$$

$$0 \leq z \leq \sigma, \quad \sigma := 2\sqrt{n} \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \|A(\alpha)\|,$$

$$\langle g^i, x \rangle \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

olur.

Bu doğrusal programlama probleminde (DP) amaç fonksiyonu optimal değerini $(x^*, z^*)^T$ noktasında alıyor ise $\hat{x}^k = x^*$ 'dir.



Şekil 3.1. \mathcal{X} kutusunda x^k noktalarının seçilme prosedürü

Denklemler (3.3)'te tanımlanan s_k sayısı pozitif olmayan bir sayıdır: $s_k \leq 0$. Ayrıca $x \in \mathcal{X}$ ve $i = 1, 2, \dots, k$ için $\phi(x) \geq \langle g^i, x \rangle$ olduğundan

$$\phi(x) \geq \max_{1 \leq i \leq k} \langle g^i, x \rangle \geq s_k \quad (3.4)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $s_k = 0$ ise (3.4) eşitsizliğinden dolayı $\phi(x) < 0$ olacak şekilde $x \in \mathcal{X}$ yoktur. Eğer $s_k < 0$ ise x^k ile \hat{x}^k noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde

$$\max_{1 \leq i \leq k} \{ \langle g^i, \hat{x} \rangle \} = 0$$

olacak şekilde \tilde{x}^k noktası için

$$x^{k+1} = \frac{1}{2}\tilde{x}^k + \frac{1}{2}\hat{x}^k \in \text{int}(\mathcal{X})$$

noktası (\hat{x}^k ile \tilde{x}^k noktalarını birleştiren doğru parçasının orta noktası) yeni nokta olarak belirlenmiş olur.

3.2. En Büyük Özdeğeri Veren Fonksiyon ile Çözümün Araştırılması

$\phi(x) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_{\max} L(\alpha, x)$ fonksiyonunun bir $x \in \mathcal{X}$ noktasında değerini hesaplayabilmek için $\lambda_{\max} L(\alpha, x)$ 'i formülize etmemiz gerekmektedir. $n = 2$ durumunu ele alalım. $L(\alpha, x)$ matrisinin karakteristik polinomu

$$p(s) = s^2 - \text{tr}L(\alpha, x)s + \det L(\alpha, x)$$

olur. Bu polinomun köklerinden en büyüğü,

$$\lambda_{\max} L(\alpha, x) = \frac{\text{tr}L(\alpha, x) + \sqrt{\text{tr}^2 L(\alpha, x) - 4 \det L(\alpha, x)}}{2}$$

olur.

Örnek 3.4.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{10} \\ 10 & -1 \end{bmatrix}$$

kararlı matrisleri verilsin. $A_1 A_2^{-1}$ matrisinin özdeğerleri 0.17 ve 5.87 olduğundan bu iki matrisin tüm konveks kombinasyonları kararlıdır. Ayrıca $A_1 A_2$ matrisinin özdeğerleri -7.57 , -0.52 olduğundan Lyapunov eşitsizliğini sağlayan ortak $P > 0$ çözümü yoktur. Bu iki matris için (3.2) eşitsizliğini sağlayan P_1 ve P_2 matrislerini Algoritma 3.2'yi uygulayarak araştıralım. Burada

$$A(\alpha) = (1 - \alpha)A_1 + \alpha A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 + \frac{9}{10}\alpha \\ 1 + 9\alpha & -1 \end{bmatrix},$$

$$x \in \mathcal{X} = [-1, 1]^6, \quad P_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{bmatrix} x_4 & x_5 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix},$$

$$P(\alpha, x) = (1 - \alpha)P_1(x) + \alpha P_2(x) = \begin{bmatrix} -\alpha x_1 + \alpha x_4 + x_1 & -\alpha x_2 + \alpha x_5 + x_2 \\ -\alpha x_2 + \alpha x_5 + x_2 & -\alpha x_3 + \alpha x_6 + x_3 \end{bmatrix},$$

$$L(\alpha, x) = A(\alpha)^T P(\alpha, x) + P(\alpha, x) A(\alpha)$$

için

$$\phi(x) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_{\max} L(\alpha, x) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \frac{\text{tr} L(\alpha, x) + \sqrt{\text{tr}^2 L(\alpha, x) - 4 \det L(\alpha, x)}}{2}$$

olur.

$x^1 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^T \in [-1, 1]^6$ alalım. O zaman

$$L(\alpha, x^1) = \begin{bmatrix} 9\alpha & -1 + \frac{99}{20}\alpha \\ -1 + \frac{99}{20}\alpha & -2 + \frac{9}{10}\alpha \end{bmatrix}$$

olur ve $\phi(x^1) = 10.361 > 0$ olarak hesaplanır. Bu değer $\alpha^1 = 1$ için $L(1, x^1)$ matrisinin en büyük özdeğeridir. Buna göre

$$\begin{aligned} v^1 &= (-0.945, -0.325)^T, \\ g^1 &= (0, 0, 0, -1.849, 16.623, 5.948)^T, \\ s_1 &= -24.421 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır ve

$$x^2 = (0.175, 0.175, 0.175, 0.824, -0.473, -0.473)^T$$

olur. İşlemlere devam edildiğinde

$$\begin{aligned} \phi(x^2) &= 2.168, \quad \alpha^2 = 1, \quad v^2 = (-0.279, 0.960)^T, \\ g^2 &= (0, 0, 0, -0.102, 2.453, -7.213)^T, \\ s_2 &= -9.769, \\ x^3 &= (0.071, 0.071, 0.071, 0.928, -0.784, 0.397)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x^3) &= 0.965, \quad \alpha^3 = 1, \quad v^3 = (0.282, 0.959)^T, \\ g^3 &= (0, 0, 0, -0.213, 0.326, 3.575)^T, \\ s_3 &= -1.208, \\ x^4 &= (0.019, 0.019, 0.019, 0.980, -0.940, -0.024)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(x^4) &= 0.596, \quad \alpha^4 = 0.621, \quad v^4 = (0.087, 0.996)^T, \\ g^4 &= (-0.034, -0.424, -0.314, -0.057, -0.697, -0.517)^T, \\ s_4 &= -0.548, \\ x^5 &= (0.765, 0.765, 0.765, 0.995, -0.499, -0.052)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(x^5) &= 1.304, & \alpha^5 &= 0.266, & v^5 &= (-0.992, -0.123)^T, \\ g^5 &= (-1.579, 4.538, 0.587, -0.575, 1.652, 0.213)^T, \\ s_5 &= -0.389, \\ x^6 &= (0.972, 0.385, 0.972, 0.999, -0.240, -0.032)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(x^6) &= 0.806, & \alpha^6 &= 0.4808, & v^6 &= (-0.707, -0.706)^T, \\ g^6 &= (-0.814, 1.437, 2.247, -0.754, 1.331, 2.081)^T, \\ s_6 &= -0.297, \\ x^7 &= (0.996, 0.399, 0.468, 0.999, -0.133, -0.015)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(x^7) &= 0.057, & \alpha^7 &= 1, & v^7 &= (0.002, 0.999)^T, \\ g^7 &= (0, 0, 0, -0.0005, -0.210, -1.948)^T, \\ s_7 &= -0.077, \\ x^8 &= (0.257, 0.140, 0.262, 0.999, 0.030, 0.016)^T\end{aligned}$$

$$\phi(x^8) = -0.093, \quad \alpha^8 = 0.485$$

elde edilir. Buna göre $\phi(x^8) = -0.093 < 0$ olduğundan

$$P_1(x^8) = \begin{bmatrix} 0.257 & 0.140 \\ 0.140 & 0.262 \end{bmatrix}, \quad P_2(x^8) = \begin{bmatrix} 0.999 & 0.030 \\ 0.030 & 0.016 \end{bmatrix}$$

ve her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$L(\alpha, x^8) = A(\alpha)^T P(\alpha, x^8) + P(\alpha, x^8) A(\alpha) < 0$$

olur. Burada, $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

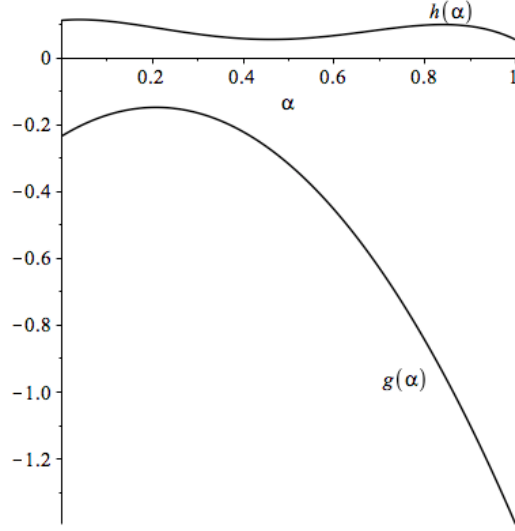
$$L(\alpha, x^8) = \begin{bmatrix} -0.234 + 0.826\alpha - 1.987\alpha^2 & -0.276 + 1.825\alpha - 1.545\alpha^2 \\ -0.276 + 1.825\alpha - 1.545\alpha^2 & -0.805 + 0.965\alpha - 0.198\alpha^2 \end{bmatrix}$$

matrisinin negatif belirli olması için gerek ve yeter koşul

$$g(\alpha) = -0.234 + 0.826\alpha - 1.987\alpha^2 < 0,$$

$$h(\alpha) = \det(L(\alpha, x^8)) = 0.112 + 0.118\alpha - 1.740\alpha^2 + 3.556\alpha^3 - 1.992\alpha^4 > 0$$

olmasıdır. Şekil 3.2'de $g(\alpha)$ ve $h(\alpha)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir.



Şekil 3.2. $g(\alpha)$ ve $h(\alpha)$ fonksiyonlarının grafikleri

3.3. Gridleme ile Çözümün Araştırılması

$\lambda_{\max}L(\alpha, x)$ değerinin $\alpha \in [0, 1]$ üzerinde maksimum değerini hesaplamada ortaya çıkabilecek problemleri aşmak için bu değeri yaklaşık olarak hesaplamak yoluna gidilebilir. Bunun için $[0, 1]$ aralığından $N > 0$ tamsayı olmak üzere $i = 0, 1, 2, \dots, N$ için $\alpha = i/N$ noktaları alınır.

$$L(\alpha, x) = A^T(\alpha)P(\alpha, x) + P(\alpha, x)A(\alpha)$$

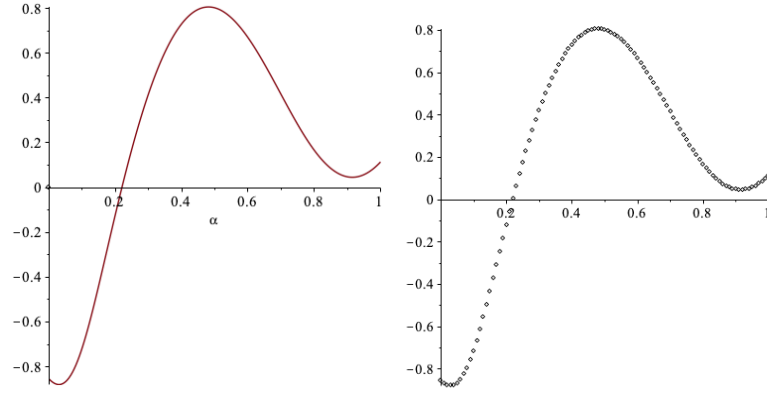
denkleminde $\alpha = i/N$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$) yazıldığında

$$\begin{aligned} L_0(x) &= A^T(0)P(0, x) + P(0, x)A(0) \\ L_1(x) &= A^T\left(\frac{1}{N}\right)P\left(\frac{1}{N}, x\right) + P\left(\frac{1}{N}, x\right)A\left(\frac{1}{N}\right) \\ L_2(x) &= A^T\left(\frac{2}{N}\right)P\left(\frac{2}{N}, x\right) + P\left(\frac{2}{N}, x\right)A\left(\frac{2}{N}\right) \\ &\vdots \\ L_N(x) &= A^T(1)P(1, x) + P(1, x)A(1) \end{aligned}$$

matrisleri elde edilir. O zaman $x \in \mathcal{X}$ için

$$\phi(x) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_{\max}L(\alpha, x) \approx \max_{i=0,1,2,\dots,N} \lambda_{\max}L_i(x)$$

alabiliriz (Şekil 3.3).



Şekil 3.3. $\lambda_{\max}L(\alpha, x)$ ve $\lambda_{\max}L(i/N, x)$ grafikleri

Örnek 3.5. Örnek 3.4 yeniden ele alındığında $N = 1000$ için

$$L(\alpha, x) = A^T(\alpha)P(\alpha, x) + P(\alpha, x)A(\alpha)$$

denkleminde $\alpha = i/1000$ ($i = 0, 1, 2, \dots, 1000$) yazıldığında

$$\begin{aligned} L_0(x) &= L(0, x) \\ &= \begin{bmatrix} -2x_1 + 2x_2 & -x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 & -2x_2 - 2x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(x) &= L(1/1000, x) \\ &= \begin{bmatrix} -1.998x_1 - 0.002x_4 + \dots & -0.998x_1 - 0.0009x_4 - \dots \\ -0.998x_1 - 0.0009x_4 - \dots & -1.996x_2 - 0.001x_5 - \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= L(2/1000, x) \\ &= \begin{bmatrix} -1.996x_1 - 0.004x_4 + \dots & -0.996x_1 - 0.001x_4 - \dots \\ -0.996x_1 - 0.001x_4 - \dots & 1.996x_2 - 0.004x_5 + \dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} L_{1000}(x) &= L(1, x) \\ &= \begin{bmatrix} -2x_4 + 20x_5 & -0.1x_4 - 2x_5 + 10x_6 \\ -0.1x_4 - 2x_5 + 10x_6 & -0.2x_5 - 2x_6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

matrisleri ortaya çıkar. $x^1 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^T \in [-1, 1]^6$ alalım.

$$\tilde{\phi}(x) := \max_{i=0,1,2,\dots,N} \lambda_{\max}L_i(x)$$

fonksiyonunun x^1 'deki değeri hesaplandığında $\tilde{\phi}(x^1) = 10.350 > 0$ olduğu görülür.

Bu değer $L_{1000}(x^1)$ matrisinin en büyük özdeğeridir. Buna göre

$$\begin{aligned}v^1 &= (-0.945, -0.325)^T, \\g^1 &= (-0001, 0.016, 0.005, -1.848, 16.592, 5.935)^T, \\s_1 &= -24.400\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$$x^2 = (0.824, -0.473, -0.473, 0.824, -0.473, -0.473)^T$$

olur. İşlemlere devam edildiğinde

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x^2) &= 2.168, \quad i^2 = 1000, \quad v^2 = (-0.279, 0.960)^T, \\g^2 &= (-0.0001, 0.002, -0.007, -0.102, 2.447, -7.200)^T, \\s_2 &= -9.759, \\x^3 &= (0.928, -0.784, 0.397, 0.928, -0.784, 0.397)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x^3) &= 1.017, \quad i^3 = 1, \quad v^3 = (0.227, 0.973)^T, \\g^3 &= (-0.546, -2.679, -1.453, 0, 0, 0)^T, \\s_3 &= -4.679, \\x^4 &= (0.970, 0.267, 0.752, 0.744, -0.555, 0.461)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x^4) &= 1.602, \quad i^4 = 801, \quad v^4 = (0.449, 0.893)^T, \\g^4 &= (-0.125, 0.251, 0.996, -0.502, 1.004, 3.986)^T, \\s_4 &= -2.233, \\x^5 &= (0.991, 0.786, -0.265, 0.925, -0.870, 0.103)^T,\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x^7) &= 0.069, \quad i^7 = 1, \quad v^7 = (-0.562, 0.827)^T, \\g^7 &= (0.297, 1.123, -2.297, 0, 0, 0)^T, \\s_7 &= -0.165, \\x^8 &= (0.999, 0.079, 0.204, 0.999, 0.0378, 0.033)^T,\end{aligned}$$

$$\tilde{\phi}(x^8) = -0.053, \quad i^8 = 1000, \quad v^8 = (0.131, 0.991)^T$$

elde edilir. $\tilde{\phi}(x^8) = -0.053 < 0$ olduğundan

$$P_1(x^8) = \begin{bmatrix} 0.999 & 0.079 \\ 0.079 & 0.204 \end{bmatrix}, \quad P_2(x^8) = \begin{bmatrix} 0.999 & 0.037 \\ 0.037 & 0.033 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$L(\alpha, x^8) = A(\alpha)^T P(\alpha, x^8) + P(\alpha, x^8) A(\alpha) < 0$$

olur. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere

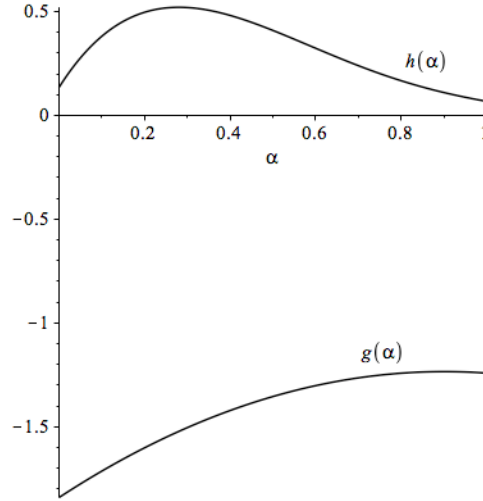
$$L(\alpha, x^8) = \begin{bmatrix} -1.841 + 1.346\alpha - 0.746\alpha^2 & -0.954 + 2.652\alpha - 1.541\alpha^2 \\ -0.954 + 2.652\alpha - 1.541\alpha^2 & -0.567 + 0.568\alpha - 0.074\alpha^2 \end{bmatrix}$$

matrisinin negatif belirli olması için gerek ve yeter koşul

$$g(\alpha) = -1.841 + 1.346\alpha - 0.746\alpha^2 < 0,$$

$$h(\alpha) = \det(L(\alpha, x^8)) = 0.134 + 3.251\alpha - 8.652\alpha^2 + 7.654\alpha^3 - 2.32\alpha^4 > 0$$

olmasıdır. Şekil 3.4'te $g(\alpha)$ ve $h(\alpha)$ fonksiyonlarının grafikleri verilmiştir. Buna göre



Şekil 3.4. $g(\alpha)$ ve $h(\alpha)$ fonksiyonlarının grafikleri

her $\alpha \in [0, 1]$ için $L(\alpha, x^8) < 0$ 'dır ve buradan $\phi(x^8) = \lambda_{\max}(L(\alpha, x^8)) < 0$ olur.

3.4. Maksimum Özdeğerin Kutu Yüzeyi Üzerinde Araştırılması

Bir $\hat{x} \in \mathcal{X} = [-1, 1]^{2m}$ noktasında

$$\phi(\hat{x}) = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1}} f(\alpha, \hat{x}, v)$$

değerini hesaplamak için matematiksel yazılımlar kullanılmaktadır. Maksimizasyonu araştırılan $f(\alpha, x, v)$ fonksiyonu, örneğin $n = 2$ için

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} x_4 & x_5 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix},$$

$\alpha \in [0, 1]$ ve $v \in \mathcal{V} = \{(v_1, v_2)^T \in \mathbb{R}^2 : \|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(\alpha, x, v) &= v^T L(\alpha, x) v \\ &= 2a_1\alpha^2 v_1^2 x_1 - 2a_1\alpha^2 v_1^2 x_4 + 2a_1\alpha^2 v_1 v_2 x_2 - 2a_1\alpha^2 v_1 v_2 x_5 - \\ &\quad + 2\alpha^2 b_1 v_1 v_2 x_1 - 2\alpha^2 b_1 v_1 v_2 x_4 + 2\alpha^2 b_1 v_2^2 x_2 - 2\alpha^2 b_1 v_2^2 x_5 - \\ &\quad \cdots + 2b_1 v_2^2 x_2 + 2c_1 v_1^2 x_2 + 2c_1 v_1 v_2 x_3 + 2d_1 v_1 v_2 x_2 + 2d_1 v_2^2 x_3 \end{aligned}$$

biçiminde çok değişkenli bir polinom fonksiyondur.

Genel durumda $f(\alpha, x, v)$ fonksiyonu değişkenleri $\alpha, v_1, v_2, \dots, v_n$ olan çok değişkenli ikinci dereceden bir polinom fonksiyon olur. Bu $f(\alpha, x, v)$ fonksiyonun bir $x \in \mathcal{X}$ için

$$\begin{aligned} \alpha &\in [0, 1], \\ \|v\| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} = 1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

koşulunu sağlayan parametrelerine göre maksimizasyonu matematiksel yazılımlarla hesaplamakta sorun yaşanabilmektedir. Burada \mathbb{R}^n üzerindeki (3.5) ile verilen $\|\cdot\|$ Öklid normu yerine $v \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}$$

maksimum normu ele alındığında aşağıda verilen denklik elde edilir. Bu sayede çok değişkenli $f(\alpha, x, v)$ polinomunun maksimizasyon işleminde birim küre yüzeyi yerine birim kutunun $(n-1)$ -boyutlu yüzleri söz konusu olur ve maksimizasyon ilk duruma göre daha kolay hesaplanabilmektedir.

Teorem 3.6. $\alpha \in [0, 1], \hat{x} \in \mathcal{X}$ olmak üzere

$$\max_{\|v\|=1} v^T L(\alpha, \hat{x}) v < 0$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$\max_{\|v\|_\infty=1} v^T L(\alpha, \hat{x})v < 0$$

olmasıdır.

Kanıt.

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}, \quad \mathcal{B} = \{w \in \mathbb{R}^n : \|w\|_\infty = 1\}$$

kümelerini tanımlayalım.

\Rightarrow) $\hat{x} \in \mathcal{X}$ için $\max_{\|v\|=1} v^T L(\alpha, \hat{x})v < 0$ olsun. Keyfi bir $w \in \mathcal{B}$ için $\frac{1}{\|w\|}w \in \mathcal{V}$ olur ve buradan

$$\left(\frac{1}{\|w\|}w\right)^T L(\alpha, \hat{x}) \left(\frac{1}{\|w\|}w\right) < 0 \Leftrightarrow w^T L(\alpha, \hat{x})w < 0$$

olduğu görülür. O zaman her $w \in \mathcal{B}$ için $w^T L(\alpha, \hat{x})w < 0$ 'dır.

\mathcal{B} kompakt bir küme $w \mapsto w^T L(\alpha, \hat{x})w$ sürekli fonksiyon olduğundan en az bir $w_* \in \mathcal{B}$ vardır ki

$$\max_{w \in \mathcal{B}} w^T L(\alpha, \hat{x})w = w_*^T L(\alpha, \hat{x})w_* < 0$$

olur.

\Leftarrow) $\hat{x} \in \mathcal{X}$ için $\max_{\|v\|_\infty=1} v^T L(\alpha, \hat{x})v < 0$ olsun. Keyfi bir $v \in \mathcal{V}$ alalım. Öyle $\gamma \geq 1$ vardır ki $\gamma v \in \mathcal{B}$ olur.

$$(\gamma v)^T L(\alpha, \hat{x}) (\gamma v) < 0 \Leftrightarrow v^T L(\alpha, \hat{x})v < 0$$

olduğundan her $v \in \mathcal{V}$ için $v^T L(\alpha, \hat{x})v < 0$ 'dır.

\mathcal{V} kompakt bir küme $v \mapsto v^T L(\alpha, \hat{x})v$ sürekli fonksiyon olduğundan en az bir $v_* \in \mathcal{V}$ için

$$\max_{v \in \mathcal{V}} v^T L(\alpha, \hat{x})v = v_*^T L(\alpha, \hat{x})v_* < 0$$

eşitsizliği sağlanır. □

Eğer bir $x_* \in \mathcal{X}$ için

$$\max_{\substack{\|v\|_\infty=1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1}} v^T L(\alpha, x_*)v < 0$$

oluyorsa o zaman Teorem 3.6'ya göre

$$\max_{\substack{\|v\|=1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1}} v^T L(\alpha, x_*)v < 0$$

olur. Dolayısıyla $P_1(x_*)$ ve $P_2(x_*)$ matrisleri ve her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$A^T(\alpha)P(\alpha, x_*) + P(\alpha, x_*)A(\alpha) < 0$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 3.7. *Tüm konveks kombinasyonları kararlı*

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 2 & -6 & 1 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -10 \\ 5 & -5 & 1 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin.

$$x \in [-1, 1]^{12}, \quad P_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{bmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \\ x_8 & x_{10} & x_{11} \\ x_9 & x_{11} & x_{12} \end{bmatrix}$$

ve $\alpha \in [0, 1]$ için $P(\alpha, x) = (1 - \alpha)P_1(x) + \alpha P_2(x)$,

$$L(\alpha, x) = A^T(\alpha)P(\alpha, x) + P(\alpha, x)A(\alpha)$$

olmak üzere

$$\phi(x) = \max_{\substack{\|v\|_\infty=1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1}} v^T L(\alpha, x)v$$

fonksiyonunu ve $x^1 = (0.5, 0.5, \dots, 0.5)^T \in [-1, 1]^{12}$ alalım.

$$\phi(x^1) = 12, \quad \alpha^1 = 1, \quad v^1 = (1, 1, -1)^T,$$

$$g^1 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 14, 12, -2, -2, 14, -12)^T,$$

$$s_1 = -28,$$

$$x^2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.5, -0.5, 0.5, 0.5, -0.5, 0.5)^T$$

olur. İşlemlere devam edildiğinde

$$\phi(x^2) = 9.555, \quad \alpha^2 = 1, \quad v^2 = (-1, -1, -0.444)^T,$$

$$g^2 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -14.888, -14, -14.839, 0.888, -7.827, -3.654)^T,$$

$$s_2 = -10.4,$$

$$x^3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.1, 0.5, 0.5, 0.5, -0.5, 0.5)^T,$$

$$\begin{aligned}\phi(x^3) &= 9.018, & \alpha^3 &= 1, & v^3 &= (-1, 0.629, 0.458)^T, \\ g^3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.082, 15.428, 4.461, -9.678, -9.839, -2.029)^T, \\ s_3 &= -8.723, \\ x^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, -0.439, 0.5, 0.5, -0.174, 0.5)^T,\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}\phi(x^{21}) &= 0.171, & \alpha^{21} &= 1, & v^{21} &= (-0.743, -1, -0.254)^T, \\ g^{21} &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -6.724, -10.564, -6.055, -2.051, -5.570, -1.284)^T, \\ s_{21} &= -0.708, \\ x^{22} &= (0.5, -0.257, -0.454, 0.246, 0.197, 0.5, 0.5, -0.293, -0.218, 0.293, 0.093, 0.5)^T,\end{aligned}$$

$$\phi(x^{22}) = -0.099, \quad \alpha^{22} = 0$$

elde edilir. $\phi(x^{22}) = -0.099 < 0$ olduğundan

$$P_1(x^{22}) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.257 & -0.454 \\ -0.257 & 0.246 & 0.197 \\ -0.454 & 0.197 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad P_2(x^{22}) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.293 & -0.218 \\ -0.293 & 0.293 & 0.093 \\ -0.218 & 0.093 & 0.5 \end{bmatrix}$$

matrisleri ve her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}L(\alpha, x^{22}) &= A^T(\alpha)P(\alpha, x^{22}) + P(\alpha, x^{22})A(\alpha) \\ &= \begin{bmatrix} 0.728 & -0.739 & -1.492 \\ -0.739 & 0.646 & 0.696 \\ -1.492 & 0.696 & -3.304 \end{bmatrix} \alpha^2 + \begin{bmatrix} -6.918 & 4.653 & -1.299 \\ 4.653 & -2.392 & 0.646 \\ -1.299 & 0.646 & 1.732 \end{bmatrix} \alpha \\ &\quad + \begin{bmatrix} -0.304 & 0.595 & -0.139 \\ 0.595 & -1.770 & 0.547 \\ -0.139 & 0.547 & -0.882 \end{bmatrix} < 0\end{aligned}$$

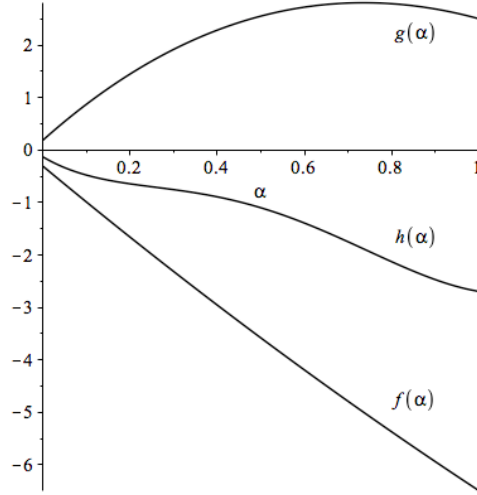
eşitsizliği sağlanır. $L(\alpha, x^{22})$ matrisinin esas alt minörleri:

$$\Delta_1(\alpha) = 0.728\alpha^2 - 6.918\alpha - 0.304,$$

$$\Delta_2(\alpha) = \det \left(\begin{bmatrix} 0.728 & -0.739 \\ -0.739 & 0.646 \end{bmatrix} \alpha^2 + \begin{bmatrix} -6.918 & 4.653 \\ 4.653 & -2.392 \end{bmatrix} \alpha + \begin{bmatrix} -0.304 & 0.595 \\ 0.595 & -1.770 \end{bmatrix} \right),$$

$$\Delta_3(\alpha) = \det(L(\alpha, x^{22}))$$

olmak üzere Şekil 3.5'te $f(\alpha) := \Delta_1(\alpha)$, $g(\alpha) := \Delta_2(\alpha)$ ve $h(\alpha) := \Delta_3(\alpha)$ grafikleri gösterilmiştir.



Şekil 3.5. $f(\alpha)$, $g(\alpha)$, $h(\alpha)$ fonksiyonlarının grafikleri

Şimdi de [7]'deki karşıt örneği ele alalım.

Örnek 3.8. *Tüm konveks kombinasyonları kararlı*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 10 & -6 & 1 \\ -12 & -11 & -23 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -9 & -1 & -15 \\ 0 & -6 & 1 \\ 8 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

matrisleri verilsin.

$$x \in [-1, 1]^{12}, \quad P_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{bmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \\ x_8 & x_{10} & x_{11} \\ x_9 & x_{11} & x_{12} \end{bmatrix},$$

$\alpha \in [0, 1]$ için $P(\alpha, x) = (1 - \alpha)P_1(x) + \alpha P_2(x)$,

$$L(\alpha, x) = A^T(\alpha)P(\alpha, x) + P(\alpha, x)A(\alpha)$$

olmak üzere

$$\phi(x) = \max_{\substack{\|v\|_\infty=1 \\ 0 \leq \alpha \leq 1}} v^T L(\alpha, x) v$$

fonksiyonunu alalım. $x^1 = (0.5, 0.5, \dots, 0.5)^T \in [-1, 1]^{12}$ olsun.

$$\begin{aligned}\phi(x^1) &= 14.449, & \alpha^1 &= 1, & v^1 &= (-1, -1, 0.3)^T, \\ g^1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -11, -23.6, 43.9, -12.60, 44.38, -12.18)^T, \\ s_1 &= -73.830, \\ x^2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0.5, -0.5, 0.5, -0.5, 0.5)^T\end{aligned}$$

olur. İşlemlere devam edildiğinde

$$\begin{aligned}\phi(x^2) &= 28.409, & \alpha^2 &= 1, & v^2 &= (1, -0.863, -1)^T, \\ g^2 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 13.727, -3.491, -41.636, -7.223, 15.739, 27.9)^T, \\ s_2 &= -31.443, \\ x^3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.5, 0.5, -0.062, 0.5, -0.5, -0.5)^T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(x^3) &= 41.624, & \alpha^3 &= 1, & v^3 &= (-1, 1, -1)^T, \\ g^3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, -46, 60, -42, -14, 10, 4)^T, \\ s_3 &= -26.980, \\ x^4 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0.291, 0.177, 0.5, -0.5, -0.5)^T,\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}\phi(x^{52}) &= 0.047, & \alpha^{52} &= 0, & v^{52} &= (-0.396, -1, -0.637)^T, \\ g^{52} &= (-1.280, -5.345, 1.181, -5.339, 1.196, 1.405, , 0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ s_{52} &= -0.0003, \\ x^{53} &= (0.190, -0.012, 0.019, 0.098, 0.176, 0.334, 0.112, 0.200, 0.126, 0.5, 0.164, 0.174)^T,\end{aligned}$$

$$\phi(x^{53}) = 0.038, \quad \alpha^{53} = 0.927, \quad v^{53} = (1, -0.167, -1)^T, \quad s_{53} = -1.5 \times 10^{-10}$$

elde edilir. Burada $s_{53} \approx 0$ olduğundan $\phi(x^{53}) < 0$ olacak şekilde $x \in \mathcal{X}$ yoktur.

ϕ fonksiyonunun Teorem 3.1 ve 3.3'teki özellikleri kullanılarak oluşturulan algoritmada x^{k+1} noktası s_k minimaks probleminin çözümü olan \hat{x}^k noktası ile x^k noktasını birleştiren doğru parçası üzerinden seçilmektedir. [6]'da sonlu sayıda kararlı matrisin ortak $P > 0$ çözümü için verilen algoritmada x^{k+1} noktası doğrudan s_k minimaks probleminin çözümü olarak alınmaktadır. Şimdi incelediğimiz problemler için $[0, 1]$ aralığını N eşit parçaya bölerek [6]'da verilen algoritmanın uygulamaları yapılacaktır. Bu algoritma ile $s_k \rightarrow 0$ olması durumunda problemin çözümünün olmadığı sonucu da elde edilebilmektedir.

$A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisleri verilsin. $M = \max_{1 \leq i \leq N} \|A_i\|_F$, $d = n(n+1)/2$ olmak üzere $x \in \mathbb{R}^d$ olsun. $x^1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in [-1, 1]^d$ alalım.

Algoritma 3.9 ([6]).

- 1) $\lambda_{\max}(A_m^T P(x^1) + P(x^1) A_m)$ 'yi maksimize eden $m = m^1$ ve bu özdeğere karşık gelen birim özvektör v^1 olsun. $\phi(x^1) < 0$ ise durulur, değil ise g^1 gradyent vektörü hesaplanır.
- 2) $s_1 = \min_{x \in [-1, 1]^d} \langle x, g^1 \rangle$ hesaplanır ve minimize eden nokta x^2 olarak alınır. Eğer $\phi(x^2) < 0$ ise durulur, değil ise g^2 gradyent vektörü hesaplanır.
- 3) $s_2 = \min_{x \in [-1, 1]^d} \max_{1 \leq i \leq 2} \langle x, g^i \rangle$ hesaplanır ve minimize eden nokta x^3 olarak alınır. Eğer $\phi(x^3) < 0$ ise durulur, değil ise g^3 hesaplanır.
- 4) k 'yüncü adımda s_k hesaplanır ve minimize eden nokta $x^{k+1} \in [-1, 1]^d$ alınır.
- 5) k_1 için $\phi(x^{k_1}) < 0$ ise durulur. Eğer her k için $\phi(x^k) \geq 0$ ise ortak P çözümü yoktur.

Teorem 3.10 ([6]). k sabit sayı olmak üzere aşağıdaki doğrusal programlama probleminin (DP) değişenleri $(x, t) = (x_1, x_2, \dots, x_d, t)$ olsun:

$$c(x, t) = t \rightarrow \min$$

$$\begin{aligned} \text{kısıtlar:} \quad & -1 \leq x_j \leq 1, & j = 1, 2, \dots, d \\ & -\sigma \leq t \leq \sigma, & \sigma = 2\sqrt{2d}M \\ & \langle x, g^i \rangle \leq t, & i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

DP probleminin optimal çözümü (x^*, t^*) ise $s_k = c(x^*, t^*) = t^*$ ve x^* , (3.3) minimaks probleminin çözümüdür. ($x^{k+1} = x^*$ alınabilir.)

Örnek 3.11.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & 2 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

kararlı matrisleri verilsin.

$$L_1(x) = A_1^T P_1(x) + P_1(x) A_1 < 0$$

$$L_2(x) = A_2^T P_2(x) + P_2(x) A_2 < 0$$

$$L_3(x) = -[(A_2^T - A_1^T)(P_2(x) - P_1(x)) + (P_2(x) - P_1(x))(A_2 - A_1)] < 0$$

olacak şekilde $x \in [-1, 1]^{12}$ noktasının varlığını Algoritma 3.9 ile araştıralım. Şimdi $x^1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)^T \in [-1, 1]^{12}$ noktasını alalım. Bu durumda

$$P_1(x^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad P_2(x^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri sıfır matrisinden farklı olur.

$$\phi(x) = \max_{1 \leq m \leq 3} \lambda_{\max} L_m(x)$$

fonksiyonunun x^1 'deki değeri hesaplandığında $\phi(x^1) = 1 > 0$ olduğu görülür. Bu değer $m^1 = 3$ için $L_3(x^1)$ matrisinin en büyük özdeğeridir. Buna göre

$$v^1 = (0.707, 0.707, 0)^T, \\ s_1 = -32$$

olarak hesaplanılır.

$$x^2 = (1, 1, -1, 1, -1, 0, -1, -1, 1, -1, 1, 0)^T$$

olur. İşlemlere devam edildiğinde

$$\phi(x^2) = 25.798, \quad m^2 = 2, \quad v^2 = (-0.497, -0.810, 0.309)^T, \\ s_2 = -13.222, \\ x^3 = (1, 1, -1, 1, -1, 0, 1, 1, 1, 1, 0.305, 1)^T,$$

$$\phi(x^3) = 9.667, \quad m^3 = 3, \quad v^3 = (-0.348, 0.723, 0.595)^T, \\ s_3 = -9.103, \\ x^4 = (1, 1, -1, 1, -1, 1, 1, -0.693, -1, 1, -0.417, 1)^T,$$

$$\phi(x^4) = 5.914, \quad m^4 = 2, \quad v^4 = (0.202, 0.597, 0.775)^T, \\ s_4 = -6.919, \\ x^5 = (1, 1, 0.820, 1, -1, 1, 1, 0.426, -0.023, 1, 1, -1)^T,$$

⋮

$$\begin{aligned}\phi(x^{17}) &= 0.927, \quad m^{17} = 1, \quad v^{17} = (-0.203, 0.465, 0.861)^T, \\ s_{17} &= -1.169, \\ x^{18} &= (1, 0.582, -0.159, 1, -0.224, 0.717, 1, -0.657, -0.035, 1, 0.590, 1)^T,\end{aligned}$$

$$\phi(x^{18}) = -0.524, \quad m^{18} = 3$$

elde edilir. $\phi(x^{18}) = -0.524 < 0$ olduğundan

$$P_1(x^{18}) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5825 & -0.1592 \\ 0.5825 & 1 & -0.2248 \\ -0.1592 & -0.2248 & 0.7179 \end{bmatrix}$$

$$P_2(x^{18}) = \begin{bmatrix} 1 & -0.6572 & -0.0352 \\ -0.6572 & 1 & 0.5907 \\ -0.0352 & 0.5907 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu $P_1(x^{18})$ ve $P_2(x^{18})$ simetrik matrisleri için,

$$L_1(x^{18}) = A_1^T P_1(x^{18}) + P_1(x^{18}) A_1 = \begin{bmatrix} -6.7148 & -0.7273 & -2.9064 \\ -0.7273 & -6.1196 & 1.5833 \\ -2.9064 & 1.5833 & -2.6844 \end{bmatrix}$$

dir.

$$\Delta_1 = -6.7148 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6.7148 & -0.7273 \\ -0.7273 & -6.1196 \end{vmatrix} = 40.562 > 0$$

$$\Delta_3 = \det(L_1(x^{18})) = -33.667 < 0$$

olup

$$L_1(x^{18}) = A_1^T P_1(x^{18}) + P_1(x^{18}) A_1 < 0$$

dir.

$$L_2(x^{18}) = A_2^T P_2(x^{18}) + P_2(x^{18}) A_2 = \begin{bmatrix} -7.3848 & 3.1558 & 0.0743 \\ 3.1558 & -2.8746 & -0.1908 \\ 0.0743 & -0.1908 & -0.7482 \end{bmatrix}$$

için

$$\Delta_1 = -7.3848 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -7.3848 & 3.1558 \\ 3.1558 & -2.8746 \end{vmatrix} = 11.269 > 0$$

$$\Delta_3 = \det(L_2(x^{18})) = -8.236 < 0$$

olup

$$L_2(x^{18}) = A_2^T P_2(x^{18}) + P_2(x^{18}) A_2 < 0$$

dır.

$$\begin{aligned} L_3(x^{18}) &= -[(A_2^T - A_1^T)(P_2(x^{18}) - P_1(x^{18})) + (P_2(x^{18}) - P_1(x^{18}))(A_2 - A_1)] \\ &= \begin{bmatrix} -3.4714 & -0.7827 & -0.6849 \\ -0.7827 & -12.3970 & 1.0442 \\ -0.6849 & 1.0442 & -0.8122 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

için

$$\Delta_1 = -3.4714 < 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3.4714 & -0.7827 \\ -0.7827 & -12.3970 \end{vmatrix} = 42.422 > 0$$

$$\Delta_3 = \det(L_3(x^{18})) = -23.735 < 0$$

olup

$$L_3(x^{18}) = -[(A_2^T - A_1^T)(P_2(x^{18}) - P_1(x^{18})) + (P_2(x^{18}) - P_1(x^{18}))(A_2 - A_1)] < 0,$$

yani

$$(A_2^T - A_1^T)(P_2(x^{18}) - P_1(x^{18})) + (P_2(x^{18}) - P_1(x^{18}))(A_2 - A_1) > 0$$

dır. Dolayısıyla Önerme 2.3'e göre her $\alpha \in [0, 1]$ için

$$L(\alpha, x^{18}) = A^T(\alpha)P(\alpha, x^{18}) + P(\alpha, x^{18})A(\alpha) < 0$$

olur.

Yine [7]'deki karşıt örneği alalım.

Örnek 3.12. *Tüm konveks kombinasyonları kararlı olan*

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 10 & -6 & 1 \\ -12 & -11 & -23 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -9 & -1 & -15 \\ 0 & -6 & 1 \\ 8 & 15 & 9 \end{bmatrix}$$

matrisleri alalım. $N = 1000$ için

$$L(\alpha, x) = A^T(\alpha)P(\alpha, x) + P(\alpha, x)A(\alpha)$$

denkleminde $\alpha = m/1000$ ($m = 0, 1, 2, \dots, 1000$) için

$$L_m(x) = L(\alpha_m, x) = A^T(\alpha_m)P(\alpha_m, x) + P(\alpha_m, x)A(\alpha)$$

olsun. Burada

$$\phi(x) = \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \lambda_{\max} L(\alpha, x) \approx \max_{m=0,1,2,\dots,N} \lambda_{\max} L_i(x)$$

olacağından

$$\tilde{\phi}(x) = \max_{m=0,1,2,\dots,N} \lambda_{\max} L_m(x)$$

alalım.

Şimdi $x^1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 3, 0, 1)^T \in [-1, 1]^{12}$ başlangıç noktası için

$$P_1(x^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2(x^1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

almış oluruz ve $\tilde{\phi}(x^1) = 30.516 > 0$ olur. Bu değer $m^1 = 1000$ için $L_{1000}(x^1)$ matrisinin en büyük özdeğeridir. Buna göre

$$v^1 = (-0.310, 0.256, 0.915)^T,$$

$$s_1 = -60.461,$$

olarak hesaplanır.

$$x^2 = (0, \dots, 0, -1, 1, 1, 1, -1, -1)^T$$

olur.

$$\tilde{\phi}(x^2) = 36.239, \quad m^2 = 1000, \quad v^2 = (0.978, -0.145, 0.146)^T,$$

$$s_2 = -22.356,$$

$$x^3 = (0, \dots, 0, 1, -1, 0.776, 1, 1, -1)^T,$$

$$\tilde{\phi}(x^3) = 44.765, \quad m^3 = 1000, \quad v^3 = (0.595, 0.791, -0.139)^T,$$

$$s_3 = -20.976,$$

$$x^4 = (0, \dots, 0, 1, -0.519, 0.340, 1, -1, -1)^T,$$

⋮

$$\tilde{\phi}(x^{44}) = 0.449, \quad m^{44} = 0, \quad v^{44} = (0.511, 0.739, -0.437)^T,$$

$$s_{44} = -0.02,$$

$$x^{45} = (0.536, 0.127, 0.273, 0.169, 0.360, 1, 0.174, 0.414, 0.192, 1, 0.418, 0.268)^T,$$

$$\tilde{\phi}(x^{45}) = 0.178, \quad m^{45} = 627, \quad v^{45} = (-0.870, -0.353, 0.341)^T, \quad s_{45} = -1.8 \times 10^{-16}$$

olur. O zaman $s_{45} \approx 0$ olduğundan $\tilde{\phi}(x) < 0$ olacak şekilde $x \in \mathcal{X}$ yoktur. Dolayısıyla $[0, 1]$ aralığından alınan sonlu noktaya karşılık gelen matrisler için çözüm olmadığından $\phi(x) < 0$ olacak şekilde $x \in \mathcal{X}$ yoktur. Sonuç olarak her $\alpha \in [0, 1]$ için $A^T(\alpha)P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0$ olacak şekilde $P_1, P_2 > 0$ bulunamaz.

[7]'de verilen karşıt örnekte birinci dereceden Lyapunov fonksiyonunun var olmadığı gösterilmiştir. Ancak bu örnekte verilen matrisler ailesi için kaçınıcı dereceden polinomsal bir Lyapunov matrisinin var olduğu problemine değinilmemiştir. Şimdi de [7]'deki örnek için ikinci dereceden Lyapunov fonksiyonunun varlığını araştıralım.

Örnek 3.13.

$$A_0 = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 5 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -3 & -13 \\ -5 & 0 & 0 \\ 10 & 13 & 16 \end{bmatrix}$$

olmak üzere her $\theta \in [-1, 1]$ için $A(\theta) = A_0 + \theta A_1$ kararlı matrisler ailesini ele alalım. Burada [19]'e göre bu matris ailesi için

$$P(\theta) = P_0 + \theta P_1 + \theta^2 P_2 + \dots + \theta^D P_D$$

formunda polinomsal bir Lyapunov fonksiyonu vardır. A_1 matrisinin rankı $r = 3$ 'tür

ve $r = n = 3$ olduğundan [40]'a göre D derecesi için üst sınır $n(n+1)/2 - 1 = 5$ olur.

$D = 2$ olacak şekilde böyle bir polinomsal Lyapunov fonksiyonunun varlığını araştıralım.

$$x \in \mathcal{X} = [-1, 1]^{18},$$

$$P_0(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}, \quad P_1(x) = \begin{bmatrix} x_7 & x_8 & x_9 \\ x_8 & x_{10} & x_{11} \\ x_9 & x_{11} & x_{12} \end{bmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{bmatrix} x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{14} & x_{16} & x_{17} \\ x_{15} & x_{17} & x_{18} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$P(\theta, x) = P_0(x) + \theta P_1(x) + \theta^2 P_2(x)$$

diyelim. Her $\theta \in [-1, 1]$ için

$$L(\theta, x) = A^T(\theta)P(\theta, x) + P(\theta, x)A(\theta) < 0$$

problemin çözümünü Algoritma 3.9'u uygulayarak araştıralım.

$N = 400$ için

$$L(\alpha, x) = A^T(\alpha)P(\alpha, x) + P(\alpha, x)A(\alpha)$$

denkleminde $\alpha = m/400$ ($m = 0, 1, 2, \dots, 400$) için

$$L_m(x) = L(\alpha_m, x) = A^T(\alpha_m)P(\alpha_m, x) + P(\alpha_m, x)A(\alpha)$$

ve

$$\phi(x) := \max_{m=0,1,2,\dots,N} \lambda_{\max} L_m(x)$$

alalım.

Şimdi başlangıç noktası olarak $x^1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)^T \in [-1, 1]^{18}$ alalım.

$$P_0(x^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1(x^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2(x^1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

almış oluruz. O zaman $\phi(x^1) = 38.187 > 0$ olur. Bu değer $m^1 = 400$ için $L_{400}(x^1)$

matrisinin en büyük özdeğeridir. Buna göre

$$v^1 = (-0.366, 0.261, 0.892)^T,$$

$$s_1 = -172.809,$$

olarak hesaplanır.

$$x^2 = (-1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1)^T$$

olur.

$$\phi(x^2) = 109.682, \quad m^2 = 0, \quad v^2 = (-0.209, 0.522, 0.826)^T,$$

$$s_2 = -119.694,$$

$$x^3 = (-1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 0.157)^T,$$

$$\phi(x^3) = 144.443, \quad m^3 = 400, \quad v^3 = (0.869, 0.488, 0.074)^T,$$

$$s_3 = -67.540,$$

$$x^4 = (1, 1, -0.850, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 0.771, -1)^T,$$

⋮

$$\phi(x^{299}) = -0.0174, \quad m^{299} = 0, \quad v^{299} = (0.810, 0.158, 0.564)^T,$$

$$s_{299} = -0.021,$$

$$x^{300} = (0.951, 0.457, 0.289, 1, 0.669, 1, -1, 1, 0.181, 1, 0.475, 0.156, 0.621, -0.202, 0.165, 1, 0.118, -0.271)^T$$

$$\phi(x^{300}) = -0.0197, \quad m^{300} = 400, \quad v^{300} = (0.955, 0.206, -0.210)^T, \quad s_{300} = -0.021$$

elde edilir. Böylece $\phi(x^{300}) = -0.0197 < 0$ olduğundan $P_1(x^{300})$, $P_2(x^{300})$ ve $P_3(x^{300})$ simetrik matrisleri:

$$P_1(x^{300}) = \begin{bmatrix} 0.9516 & 0.4577 & 0.2896 \\ 0.4577 & 1 & 0.6693 \\ 0.2896 & 0.6693 & 1 \end{bmatrix}, \quad P_2(x^{300}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0.1819 \\ 1 & 1 & 0.4752 \\ 0.1819 & 0.4752 & 0.1566 \end{bmatrix}$$

ve

$$P_3(x^{300}) = \begin{bmatrix} 0.6219 & -0.2025 & 0.1652 \\ -0.2025 & 1 & 0.1188 \\ 0.1652 & 0.1188 & -0.2715 \end{bmatrix}$$

olur. Bu $P_1(x^{300})$, $P_2(x^{300})$ ve $P_3(x^{300})$ simetrik matrisleri için

$$P(\theta, x^{300}) = \begin{bmatrix} 0.9516 & 0.4577 & 0.2896 \\ 0.4577 & 1 & 0.6693 \\ 0.2896 & 0.6693 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0.1819 \\ 1 & 1 & 0.4752 \\ 0.1819 & 0.4752 & 0.1566 \end{bmatrix} \theta \\ + \begin{bmatrix} 0.6219 & -0.2025 & 0.1652 \\ -0.2025 & 1 & 0.188 \\ 0.1652 & 0.188 & -0.2715 \end{bmatrix} \theta^2$$

dir. Her $\theta \in [-1, 1]$ için

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} -4 - 5\theta & 2 - 3\theta & -2 - 13\theta \\ 5 - 5\theta & -6 & 1 \\ -2 + 10\theta & 2 + 13\theta & -7 + 16\theta \end{bmatrix}$$

olmak üzere $L(\theta, x^{300}) = A^T(\theta)P(\theta, x^{300}) + P(\theta, x^{300})A(\theta)$ 'dan

$$L(\theta, x^{300}) = \begin{bmatrix} -4.1942 & 1.5668 & -3.2846 \\ 1.5668 & -7.492 & -6.0371 \\ -3.2846 & -6.0371 & -13.8198 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8.9714 & -7.2721 & 0.5302 \\ -7.2721 & 8.5564 & 10.3893 \\ 0.5302 & 10.3893 & -13.8198 \end{bmatrix} \theta \\ + \begin{bmatrix} -4.023 & 8.4778 & 12.0644 \\ 8.4778 & -5.9784 & -4.2588 \\ 12.0644 & -4.2588 & 3.6596 \end{bmatrix} \theta^2 + \begin{bmatrix} -0.89 & -2.5171 & -9.5765 \\ -2.5171 & 4.3038 & 0.5082 \\ -9.5765 & 0.5082 & -12.9832 \end{bmatrix} \theta^3$$

dir. Burada $L(\theta, x^{300})$ matrisinin esas alt minörleri:

$$\Delta_1(\theta) = -4.1942 + 8.9714\theta - 4.023\theta^2 - 0.89\theta^3,$$

$$\Delta_2(\theta) = 28.968 - 80.313\theta + 52.528\theta^2 + 31.75\theta^3 - 53.435\theta^4 + 30.685\theta^5 - 10.166\theta^6,$$

$$\Delta_3(\theta) = \det(L(\theta, x^{300})) \\ = -104.503 + 384.835\theta - 272.032\theta^2 - 445.343\theta^3 + 300.971\theta^4 \\ + 840.981\theta^5 - 711.28\theta^6 - 541.287\theta^7 + 785.636\theta^8 - 237.979\theta^9$$

dır.

$$\max_{\theta \in [-1,1]} \Delta_1(\theta) = \Delta_1(0.866) = -0.02 < 0,$$

$$\min_{\theta \in [-1,1]} \Delta_2(\theta) = \Delta_2(1) = 0.017 > 0,$$

$$\max_{\theta \in [-1,1]} \Delta_3(\theta) = \Delta_3(0.869) = -0.0005 < 0$$

olduğundan

$$P(\theta, x^{300}) = P_0(x^{300}) + \theta P_1(x^{300}) + \theta^2 P_2(x^{300})$$

olmak üzere her $\theta \in [-1, 1]$ için

$$L(\theta, x^{300}) = A^T(\theta)P(\theta, x^{300}) + P(\theta, x^{300})A(\theta) < 0$$

olduğu görülür.

4. MAKSİMAL ÖZDEĞERLERİN MİNİMİZASYONU İÇİN BİR İÇ NOKTA YÖNTEMİ

Kısıtlı optimizasyon problemlerinin çözüm yöntemlerinden bir tanesi de bariyer yöntemidir. F. Jarre 1993'te [21]'deki çalışmasında afin simetrik matrisler ailesinin en büyük özdeğerinin minimizasyonu için bir iç nokta yöntemi vermiştir. Bu yöntemde, düzgün olmayan kısıtsız bir minimizasyon problemi bariyer fonksiyonu kullanılarak düzgün ve kısıtlı bir minimizasyon problemine dönüştürülmüştür. Bu bölümde [21]'deki çalışma ayrıntılı olarak incelenecek ve matris ailelerinin kararlılık problemleri bariyer yöntemi ile ele alınacaktır.

4.1. Bariyer Yöntemi

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(x) \\ & \text{kısıtlar:} && g_i(x) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \tag{4.1}$$

optimizasyon problemini ele alalım. Bu problemin tanım kümesi

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

şeklindedir [12].

Tanım 4.1 (Bariyer Fonksiyonu). $\phi : \text{int}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve

i) $g(x) < 0$ koşulunu sağlayan her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\phi(x) \geq 0$,

ii) $x \rightarrow \partial\mathcal{F}$ iken $\phi(x) \rightarrow \infty$

koşullarını sağlıyorsa ϕ fonksiyonuna (4.1) probleminin bariyer fonksiyonu denir.

Buna göre (4.1) problemi $\{\mu_k\}$ dizisi $\mu_k > \mu_{k+1}$ ve $\mu_k \rightarrow 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} B(\mu_k) : & \text{minimize} && f(x) + \mu_k \phi(x) \\ & \text{kısıtlar:} && g(x) < 0, x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

problemine dönüşür [12]. $x \rightarrow \partial\mathcal{F}$ iken $\phi(x) \rightarrow \infty$ olduğundan burada $g(x) < 0$ kısıtının probleme bir etkisi yoktur. $B(\mu_k)$ probleminin çözümü x^k ile gösterilsin. (4.1) probleminin çözümü x^* olsun. Bariyer yakınsaklık teoremine göre $k \rightarrow \infty$ iken $x^k \rightarrow x^*$ olur [21].

Örnek 4.2.

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & -2x_1 - 3x_2 \\ \text{kısıtlar:} \quad & 3x_1 + 9x_2 \leq 27 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

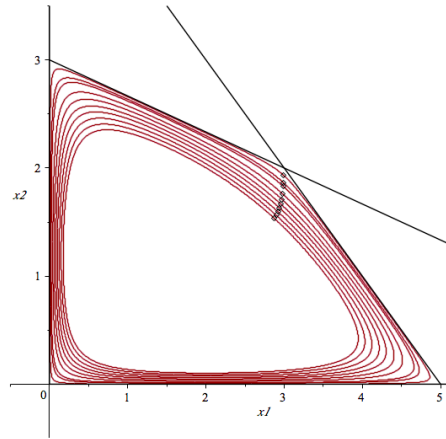
doğrusal programlama problemini ele alalım. Bu problemin tanım kümesi

$$\mathcal{F} = \{x = (x_1, x_2) : 3x_1 + 9x_2 \leq 27, x_1 + x_2 \leq 5, -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0\}$$

ve problemin bariyer fonksiyonu $\phi : \text{int}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\phi(x) = -[\ln(27 - (3x_1 + 9x_2)) + \ln(5 - (x_1 + x_2)) + \ln(x_1) + \ln(x_2)]$$

olur.



Şekil 4.1. $f(x) + \mu\phi(x)$ fonksiyonunun seviye eğrileri

Buna göre yukarıdaki optimizasyon problemi

$$\begin{aligned} B(\mu) : \text{minimize} \quad & -2x_1 - 3x_2 + \mu_k\phi(x) \\ \text{kısıtlar:} \quad & 3x_1 + 9x_2 < 27 \\ & x_1 + x_2 < 5 \\ & -x_1 < 0 \\ & -x_2 < 0 \end{aligned}$$

olur. $\{\mu_k\}$ dizisi, $\mu_k > \mu_{k+1}$ ve $\mu_k \rightarrow 0$ için bu problem kısıtsız optimizasyon problemi çözüm yöntemleriyle (örneğin Newton yöntemi) çözülmektedir. Şekil 4.1'de x^k çözümleri problemin (doğrusal programlama probleminin) çözümü olan $(3, 2)$ noktasına

yakınsamaktadır.

Şimdi, [21]'de ele alınan afin simetrik matrisler ailesinin en büyük özdeğerinin minimizasyonu problemini ve burada verilen bariyer yöntemini inceleyelim.

$M_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, m$) simetrik matrisleri verilsin. $x \in \mathbb{R}^m$ vektörü için $M(x) := M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i$ matrisinin en büyük özdeğeri $\lambda_{\max}(M(x))$ fonksiyonu ile gösterilsin.

$$\lambda^{opt} := \inf_{x \in \mathbb{R}^m} \{ \lambda_{\max}(M(x)) \} \quad (4.2)$$

diyelim. I , $n \times n$ boyutlu birim matris, $x \in \mathbb{R}^m$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lambda > \lambda_{\max}(M(x)) \Leftrightarrow \lambda I - M(x) > 0 \quad (4.3)$$

olur. Çünkü $x \in \mathbb{R}^m$ için $M(x)$ matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise

$$\begin{aligned} \lambda > \lambda_{\max}(M(x)) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} &\Leftrightarrow \lambda - \lambda_i > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ &\Leftrightarrow \lambda I - M(x) > 0 \end{aligned}$$

olur.

$$S = \{ \tilde{x} = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+1} : \lambda I - M(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R} \}$$

kümesi için

$$\alpha = \inf\{ \lambda : \lambda I - M(x) > 0, x \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R} \} = \inf\{ \lambda : \tilde{x} = (x, \lambda) \in S^\circ \} \quad (4.4)$$

diyelim. O zaman (4.2) problemi ile (4.4) problemi birbirine denktir.

Buna göre (4.2) düzgün olmayan kısıtsız optimizasyon problemi, (4.4) düzgün kısıtlı optimizasyon problemine dönüştürülmüş olur:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \lambda_{\max}(M(x)) \\ \quad \quad \quad x \in \mathbb{R}^m \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize} \quad \lambda \\ \text{kısıt} \quad \quad \lambda I - M(x) > 0 \end{array} \right\}.$$

Şimdi (4.2) problemi ile (4.4) probleminin denk problemler yani $\lambda^{opt} = \alpha$ olduğunu gösterelim.

$\lambda^{opt} < \alpha$ olduğunu varsayalım. $\varepsilon = \alpha - \lambda^{opt}$ olsun. O zaman

$$\lambda^{opt} \leq \lambda_{\max}(M(x_*)) < \lambda^{opt} + \varepsilon = \alpha$$

olacak şekilde $x_* \in \mathbb{R}^m$ vardır. $\lambda_{\max}(M(x_*)) < \delta < \alpha$ olacak şekildeki δ sayısı için

$$\delta > \lambda_{\max}(M(x_*)) \Leftrightarrow \delta I - M(x_*) > 0$$

olduğundan bu durum α 'nın infimum olmasıyla çelişir.

$\lambda^{opt} > \alpha$ olsaydı, $\varepsilon = \lambda^{opt} - \alpha$ için

$$\alpha \leq \lambda_* < \alpha + \varepsilon = \lambda^{opt} \text{ ve } \lambda_* I - M(x_*) > 0$$

olacak şekilde $\lambda_* \in \mathbb{R}$ ve $x_* \in \mathbb{R}^m$ vardır. Buna göre

$$\lambda_* I - M(x_*) > 0 \Leftrightarrow \lambda_{\max}(M(x_*)) < \lambda_*$$

ve buradan $\lambda^{opt} \leq \lambda_{\max}(M(x_*)) < \lambda_*$ olacağından çelişki elde edilir. Buna göre

$$\lambda^{opt} = \alpha$$

olur.

Şimdi (4.2) problemindeki λ^{opt} sonlu ise $\lambda^{opt} \in [\lambda_{\min}(M_0), \lambda_{\max}(M_0)]$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için aşağıdaki teoremleri ifade edelim.

Teorem 4.3. $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, v)$ fonksiyonu sürekli ve x 'e göre türevlenebilir ise $\phi(x) = \max_{\|v\|=1} f(x, v)$ fonksiyonu da her x_* noktasında h yönünde yönlü türevlenebilirdir ve

$$V(x_*) = \{\tilde{v} : \|\tilde{v}\| = 1 \text{ ve } \max_{\|v\|=1} f(x_*, v) = f(x_*, \tilde{v})\}$$

olmak üzere yönlü türev

$$D_h \phi(x_*) = \max_{v \in V(x_*)} \langle \nabla_x f(x, v) \big|_{x=x_*}, h \rangle$$

dir.

Teorem 4.4. $\phi(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her yönde türevi varsa ve x_* noktası $\phi(x)$ fonksiyonunun minimum değerini aldığı nokta ise

$$D_h \phi(x_*) \geq 0.$$

Teorem 4.5 ([21]). λ^{opt} sonlu ise $\lambda^{opt} \in [\lambda_{\min}(M_0), \lambda_{\max}(M_0)]$.

Kanıt. $\lambda^{opt} := \inf_{x \in \mathbb{R}^m} \{\lambda_{\max}(M(x))\}$ ise o zaman $x \in \mathbb{R}^m$ için $\lambda^{opt} \leq \lambda_{\max}(M(x))$ dir. $x = 0$ için

$$\lambda^{opt} \leq \lambda_{\max}(M_0) \tag{4.5}$$

olur. Şimdi $\lambda_{\min}(M_0) \leq \lambda^{opt}$ olduğunu gösterelim.

$\lambda^{opt} = \lambda_{\max}(M(x^{opt}))$ diyelim.

$$\phi(x) = \lambda_{\max}(M_0 + x_1 M_1 + \cdots + x_m M_m)$$

olarak tanımlayalım. O zaman

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^m} \phi(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^m} \phi(x) = \phi(x^{opt}) = \lambda^{opt}$$

olur.

$$f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f(x, v) = v^T M_0 v + x_1 v^T M_1 v + \cdots + x_m v^T M_m v$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman

$$\phi(x) = \max_{\|v\|=1} [v^T M_0 v + x_1 v^T M_1 v + \cdots + x_m v^T M_m v] = \max_{\|v\|=1} f(x, v) \quad (4.6)$$

olur.

Şimdi $x_* = x^{opt} = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ diyelim. $h = x^{opt} = (x_1^*, \dots, x_m^*)$ alırsak

$$\nabla_x f(x, v) \Big|_{x=x^{opt}} = (v^T M_1 v, \dots, v^T M_m v)$$

olmak üzere

$$\langle \nabla_x f(x, v), h \rangle = x_1^* v^T M_1 v + \cdots + x_m^* v^T M_m v$$

olur Teorem 4.3 ve Teorem 4.4'e göre,

$$V(x^{opt}) = \{\tilde{v} : \|\tilde{v}\| = 1 \text{ ve } \max_{\|v\|=1} f(x_*, v) = f(x_*, \tilde{v})\}$$

olmak üzere

$$\max_{v \in V(x^{opt})} [x_1^* v^T M_1 v + \cdots + x_m^* v^T M_m v] \geq 0 \quad (4.7)$$

olur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \lambda^{opt} = \phi(x^{opt}) &= \max_{\|v\|=1} [v^T M_0 v + x_1^* v^T M_1 v + \cdots + x_m^* v^T M_m v] \\ &\geq \max_{v \in V(x^{opt})} [v^T M_0 v + x_1^* v^T M_1 v + \cdots + x_m^* v^T M_m v] \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. $\bar{v} \in V(x^{opt})$, $\|\bar{v}\| = 1$ vektörü (4.7)'da maksimumu veren vektör ise (4.7)'a göre,

$$\lambda^{opt} \geq \bar{v}^T M_0 \bar{v} + x_1^* \bar{v}^T M_1 \bar{v} + \cdots + x_m^* \bar{v}^T M_m \bar{v}$$

olur ve

$$x_1^* \bar{v}^T M_1 \bar{v} + \cdots + x_m^* \bar{v}^T M_m \bar{v} \geq 0$$

olduğundan

$$\lambda^{opt} \geq \bar{v}^T M_0 \bar{v} + x_1^* \bar{v}^T M_1 \bar{v} + \cdots + x_m^* \bar{v}^T M_m \bar{v} \geq \bar{v}^T M_0 \bar{v} \geq \lambda_{\min} M_0 \quad (4.8)$$

dir. Dolayısıyla (4.5) ve (4.8)'a göre

$$\lambda_{\min} M_0 \leq \lambda^{opt} \leq \lambda_{\max} M_0$$

olur. □

Teorem 4.6 ([21]). $\sum_{i=1}^m x_i M_i$ pozitif belirli olacak şekilde bir $x \in \mathbb{R}^m$ vektörünün var olmaması için gerek ve yeter koşul λ^{opt} 'nin sonlu olmasıdır.

Kanıt. \Rightarrow) : Her $x \in \mathbb{R}^m$ için $\sum_{i=1}^m x_i M_i$ pozitif belirli olmasın. λ^{opt} 'nin sonlu olduğunu gösterelim. Her $x \in \mathbb{R}^m$ için $\sum_{i=1}^m x_i M_i$ pozitif belirli değilse o zaman her $x \in \mathbb{R}^m$ için

$$\lambda_{\min} \left(\sum_{i=1}^m x_i M_i \right) \leq 0$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} -\lambda_{\min} \left(\sum_{i=1}^m x_i M_i \right) &\geq 0 \\ \lambda_{\max} \left(-\sum_{i=1}^m x_i M_i \right) &\geq 0 \\ \lambda_{\max} \left(\sum_{i=1}^m (-x_i) M_i \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. $y_i = -x_i$, $1 \leq i \leq m$ diyelim. Buna göre her $y \in \mathbb{R}^m$ için,

$$\lambda_{\max} \left(\sum_{i=1}^m y_i M_i \right) \geq 0 \quad (4.9)$$

olur. Diğer taraftan

$$\lambda_{\min} M_0 \leq \lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \right) \quad (4.10)$$

dir. Çünkü

$$\lambda_{\min} M_0 > \lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \right)$$

olsaydı o zaman

$$\begin{aligned}
0 < \lambda_{\min} M_0 - \lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \right) &< \lambda_{\min} M_0 - \lambda_{\min} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \right) \\
&\leq \lambda_{\min} \left(- \sum_{i=1}^m x_i M_i \right) \\
&= -\lambda_{\max} \left(\sum_{i=1}^m x_i M_i \right)
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\lambda_{\max} \left(\sum_{i=1}^m x_i M_i \right) < 0$$

elde edilir. Bu ise (4.9) eşitsizliği ile çelişir. Buna göre

$$\lambda_{\min} M_0 \leq \lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \right)$$

dır. (4.2) ifadesine göre λ^{opt} ,

$$\lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \right)$$

değerinin alt sınırlarının en büyüğüdür ve ayrıca (4.10) eşitsizliğine göre $\lambda_{\min} M_0$

$$\lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \right)$$

değerinin bir alt sınırıdır. Dolayısıyla

$$\lambda_{\min} M_0 \leq \lambda^{opt}$$

olur. Bu nedenle λ^{opt} sonludur.

\Leftarrow) : λ^{opt} sonlu olsun. Öyle bir $x^0 \in \mathbb{R}^m$ için

$$\sum_{i=1}^m x_i^0 M_i > 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman $-\sum_{i=1}^m x_i^0 M_i < 0$ yani $\sum_{i=1}^m (-x_i^0) M_i < 0$ dır. $y_i^0 = -x_i^0$, $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $y^0 \in \mathbb{R}^m$ için

$$\sum_{i=1}^m y_i^0 M_i < 0$$

dir. $C = \sum_{i=1}^m y_i^0 M_i$ diyelim. $\lambda_{\max}(\cdot)$ fonksiyonunun homojenlik özelliğinden

$$\lambda_{\max}(A + B) \leq \lambda_{\max}(A) + \lambda_{\max}(B)$$

dir. Buna göre $t > 0$ olmak üzere

$$\lambda_{\max}(M_0 + tC) \leq \lambda_{\max}(M_0) + t\lambda_{\max}(C)$$

dir. $C < 0$ olduğundan $\lambda_{\max}(C) < 0$, $t \rightarrow \infty$ iken $t\lambda_{\max}(C) \rightarrow -\infty$ olur. Bu nedenle $t \rightarrow \infty$ iken $\lambda_{\max}(M_0 + tC) \rightarrow -\infty$ olur.

$$M_0 + tC = M_0 + \sum_{i=1}^m (-tx_i^0)M_i$$

olduğundan

$$U = \left\{ \lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m x_i M_i \right) : x \in \mathbb{R}^m \right\}$$

$$V = \left\{ \lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m (-tx_i^0) M_i \right) : t > 0 \right\}$$

dersek,

$$V \subseteq U$$

$$\inf V \geq \inf U$$

dir.

$$\inf \left\{ \lambda_{\max} \left(M_0 + \sum_{i=1}^m (-tx_i^0) M_i \right) : t > 0 \right\} = -\infty$$

olduğundan $\lambda^{opt} = -\infty$ olur. Bu ise λ^{opt} 'nin sonlu olması ile çelişir. O zaman her $x \in \mathbb{R}^m$ için $\sum_{i=1}^m x_i M_i$ pozitif belirli değildir. \square

$f_0 : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir fonksiyonun, $S \subset \mathbb{R}^{m+1}$ konveks kümesi üzerindeki minimizasyonunu ele alalım. S kümesi için bir ϕ bariyer fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlamalıdır [21]:

i) $\phi : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyondur.

ii) $\tilde{x} \rightarrow \partial S$ iken $\phi(\tilde{x}) \rightarrow \infty$ olur.

iii) ϕ fonksiyonu S° üzerinde sonludur.

Şimdi $\mu \rightarrow 0$ ($\mu > 0$) iken

$$\tilde{x}(\mu) := \arg \min \{f_0(\tilde{x}) + \mu\phi(\tilde{x})\}$$

kısıtsız alt problemler ailesini ele alalım. Eğer ϕ fonksiyonu kesin konveks ve f_0 fonksiyonu konveks ise her bir μ için $\tilde{x}(\mu)$ minimalleştiren nokta tektir. $\mu \rightarrow 0$ iken amaç fonksiyonundaki $\mu\phi(\tilde{x}) \rightarrow 0$ olur. Eğer λ^{opt} sonlu ve ϕ bariyer fonksiyonu self-concordant özelliğine sahipse $\tilde{x}(\mu)$ çözümü orjinal problemin optimal çözümüne yakınsar. Ayrıca $\tilde{x}(\mu)$ düzgün bir eğridir ve türevi hesaplanabilir [21].

Tanım 4.7 (Self-Concordant). $S \subset \mathbb{R}^n$ konveks küme, $\phi : S^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon, $x \in S^\circ$ ve $h \in \mathbb{R}^n$ keyfi vektörler olsun. J sıfırı içeren bir açık aralık olmak üzere ϕ fonksiyonunun bir $\psi : J \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi(t) = \phi(x + th)$ kısıtlanmışını tanımlayalım. Eğer her $x \in S^\circ$ ve her $h \in \mathbb{R}^n$ için

$$|\psi'''(0)| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \psi''(0)^{3/2} \quad (4.11)$$

ise ϕ fonksiyonuna α parametresi ile birlikte self-concordant özelliğine sahiptir denir.

$$S = \{\tilde{x} = (x, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+1} : \lambda I - M(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^m, \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (4.12)$$

kümesini ele alalım.

Teorem 4.8 ([21]). $\phi(\tilde{x}) = -\ln \det(\lambda I - M(x))$ fonksiyonu S (4.12) kümesinin $\alpha = 1$ parametresi ile self-concordant bir bariyer fonksiyonudur.

Kanıt. $h \in \mathbb{R}^{m+1}$ olmak üzere $\tilde{x} + th = (x_1 + th_1, \dots, x_{m+1} + th_{m+1})$ için

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \phi(\tilde{x} + th) = -\ln(\det[(x_{m+1} + th_{m+1})I - M(x_1 + th_1, \dots, x_m + th_m)]) \\ &= -\ln \left(\det \left[x_{m+1}I + th_{m+1}I - M_0 - \sum_{i=1}^m (x_i + th_i)M_i \right] \right) \\ &= -\ln \left(\det \left[\left(x_{m+1}I - M_0 - \sum_{i=1}^m x_i M_i \right) + t \left(h_{m+1}I - \sum_{i=1}^m h_i M_i \right) \right] \right) \end{aligned}$$

olur. Şimdi $X = x_{m+1}I - M_0 - \sum_{i=1}^m x_i M_i$ ve $Y = h_{m+1}I - \sum_{i=1}^m h_i M_i$ diyelim. $X = \lambda I - M(x)$ matrisi S° kümesinde olduğundan pozitif belirlidir. Dolayısıyla X

matrisinin tersi vardır. Şimdi

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= -\ln(\det[X + tY]) \\
&= -\ln(\det[X^{1/2}(I + tX^{-1/2}YX^{-1/2})X^{1/2}]) \\
&= -\ln(\det[X^{1/2}] \cdot \det[I + tX^{-1/2}YX^{-1/2}] \cdot \det[X^{1/2}]) \\
&= -\ln(\det[X^{1/2}]) - \ln(\det[I + tX^{-1/2}YX^{-1/2}]) - \ln(\det[X^{1/2}]) \\
&= -2\ln(\det[X^{1/2}]) - \ln(\det[I + tX^{-1/2}YX^{-1/2}]) \\
&= -\ln\left(\det[X] - \sum_{i=1}^m \ln(1 + t\lambda_i)\right).
\end{aligned}$$

Burada λ_i , $X^{-1/2}YX^{-1/2}$ matrisinin özdeğerleridir.

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= -\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{1 + t\lambda_i} \\
\psi''(t) &= \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i^2}{(1 + t\lambda_i)^2} \\
\psi'''(t) &= -2\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i^3}{(1 + t\lambda_i)^3}
\end{aligned}$$

olur.

$u \in \mathbb{R}^m$ için $0 < p < q$ olmak üzere \mathbb{R}^m 'deki p -normu $\|u\|_p = (\sum_{k=1}^m |u_k|^p)^{1/p}$, dir ve $\|u\|_p \geq \|u\|_q$ olduğundan

$$\psi'''(0) = -2\sum_{i=1}^m \lambda_i^3 = -2\|\lambda\|_3^3$$

ve

$$\psi''(0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^2 = \|\lambda\|_2^2$$

olur ve

$$\begin{aligned}
4\psi''(0)^3 &= 4\|\lambda\|_2^6 \geq 4\|\lambda\|_3^6 = (2\|\lambda\|_3^3)^2 = (-\psi'''(0))^2 \\
4\psi''(0)^3 &\geq \psi'''(0)^2 \\
2\psi''(0)^{3/2} &\geq |\psi'''(0)|
\end{aligned}$$

olup (4.11) eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla $\phi(\tilde{x}) = -\ln \det(\lambda I - M(x))$ fonksiyonu $\alpha = 1$ parametresi ile self-concordanttır. \square

4.2. Bariyer Yöntemi için Bir Algoritma

Bu bölümde, [21]'deki bariyer yöntemi ve algoritması verilecektir.

$C = (0, 0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{m+1}$ olmak üzere $f_0(\tilde{x}) = C^T \tilde{x} = \lambda$ fonksiyonunun

$$S = \{\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda) \in \mathbb{R}^{m+1} : \lambda I - M(x) \geq 0\}$$

kümesi üzerindeki minimizasyonu problemini yani

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & C^T \tilde{x} = \lambda \\ \text{kısıt} \quad & \lambda I - M(x) \geq 0, \end{aligned}$$

problemini ele alalım. S kümesinin bariyer fonksiyonu [21]'de şu şekilde verilmiştir:

$\mu \in (0, 1]$, $\tilde{w} \in \mathbb{R}^{m+1}$ ve $\rho > 0$ olmak üzere

$$\phi(\tilde{x}, \mu) = \frac{\rho}{\mu} \lambda - \ln(\det(\lambda I - M(x))) - \tilde{w}^T \tilde{x}. \quad (4.13)$$

f fonksiyonunun S kümesi üzerindeki minimizasyonunun bariyer yöntemiyle çözümü için [21]'de verilen algoritma aşağıdaki gibidir. Bu algoritma iki fazlıdır. İlk fazında S° kümesinde bir \hat{x} noktası belirlenir ve ikinci fazda ise bu noktadan başlatılan Newton yöntemi ile \tilde{x} noktası bulunur.

Algoritma 4.9. $\tilde{x} \in S^\circ$ olmak üzere $\tilde{M}(\tilde{x}) = \lambda I - M(x)$ diyelim. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı seçelim (durma koşulu).

1) $\tilde{x}^0 = (0, 0, \dots, 0, 2\lambda_{\max}(M_0))$ başlangıç noktasını alalım. Bu durumda

$$\tilde{M}(\tilde{x}^0) = 2\lambda_{\max}(M_0)I - M_0 > 0$$

olduğundan $\tilde{x}^0 \in S^\circ$ 'dır. $\mu_0 = 1$ ve $\rho = n/\lambda_{\max}(M_0)$ alınır.

2) $\nabla_{\tilde{x}} \phi(\tilde{x}, 1)|_{\tilde{x}=\tilde{x}^0} = 0$ eşitliği çözümlenerek \tilde{w} vektörü bulunur.

3) $H(\tilde{x}(\mu_k), \mu_k)$ matrisi ϕ fonksiyonunun Hesse matrisidir ve

$$H(\tilde{x}(\mu_k), \mu_k) \tilde{x}'(\mu_k) + \frac{\partial}{\partial \mu} (\nabla_{\tilde{x}} \phi(\tilde{x}(\mu), \mu)) = 0$$

denkleminde $\tilde{x}'(\mu_k)$ hesaplanır.

4) $M(\tilde{x}^k - \beta_{\max} \tilde{x}'(\mu_k)) \geq 0$ olacak şekilde β_{\max} hesaplanır. $r_k \in (0, 1)$ olmak üzere ilk iterasyonda $r_0 = 0.9$ seçilir. Newton metodu uygulanırken önceki

iterasyonda Newton adımı 2 adımdan az ise r_k arttırılır: $r_k = (1 + r_{k-1})/2$.

Eğer Newton adımı 3 adımdan fazla ise r azaltılır: $r_k = \max\{r_{k-1}/2, 2r_{k-1}-1\}$.

$\beta_k = r_k \beta_{\max}$ olmak üzere $\hat{x}^{k+1} = \tilde{x}^k - \beta_k \tilde{x}'(\mu_k)$ noktası belirlenir.

5) $g(\hat{x}^{k+1}, \mu_k) = \nabla_{\tilde{x}} \phi(\hat{x}^{k+1}, \mu_k)$ olmak üzere g gradiyent vektörünün son bileşeni sıfırdır. Bu denklem çözülerek $\hat{\mu}_{k+1}$ bulunur ve $\mu_{k+1} = \min\{\mu_k/2, \hat{\mu}_{k+1}\}$ alınır.

6) \hat{x}^{k+1} başlangıç noktası alınarak $\phi(\cdot, \mu_{k+1})$ fonksiyonuna Newton minimizasyon yöntemi uygulanır. Newton yönteminde durma koşulu

$$\|\Delta x\|_{H(x)} = ((\Delta x)^T H(x) (\Delta x))^{1/2} < \frac{\sqrt{\alpha}}{4}$$

şeklindedir ve Newton yönteminin yakınsadığı nokta \tilde{x}^{k+1} noktası olarak alınır.

7) $\|\tilde{x}_{m+1}^{k+1} - \tilde{x}_{m+1}^k\| < \varepsilon$ olduğunda durulur.

Algoritmanın her iterasyonunda algoritmada ifade edilen adımlar tekrarlanarak $\mu \rightarrow 0$ iken

$$\tilde{x}(\mu) := \arg \min\{f_0(\tilde{x}) + \mu \phi(\tilde{x})\}$$

optimal çözüme yakınsar.

Algoritmanın 4'üncü adımındaki β_{\max} aşağıdaki teoremden yararlanılarak hesaplanır.

Teorem 4.10 ([13]). A_0 kararlı matris olmak üzere $n \times n$ boyutlu A_0 ve A_1 matrisleri verilsin. $\mathcal{A} := \{A(q) = A_0 + qA_1 : q \in (q_{\min}, q_{\max})\}$ matris ailesini alalım. O zaman

$$q_{\min} = \frac{1}{\lambda_{\min}^-(-(A_0 \oplus A_0)^{-1}(A_1 \oplus A_1))}, \quad q_{\max} = \frac{1}{\lambda_{\max}^+(-(A_0 \oplus A_0)^{-1}(A_1 \oplus A_1))}$$

olmak üzere (q_{\min}, q_{\max}) maksimal aralığı için \mathcal{A} gürbüz kararlıdır. (Burada “ \oplus ” sembolü ile Kronecker toplama, “ $\lambda_{\max}^+(A)$ ” ile de A matrisinin en büyük pozitif özdeğeri gösterilmiştir.)

Burada $\tilde{M}(\tilde{x}^k - \beta_{\max} \tilde{x}'(\mu_k)) = \tilde{M}(\tilde{x}^k) - \beta_{\max} \tilde{M}(\tilde{x}'(\mu_k))$ olduğundan

$$-\tilde{M}(\tilde{x}^k - \beta_{\max} \tilde{x}'(\mu)) = -\tilde{M}(\tilde{x}^k) + \beta_{\max} \tilde{M}(\tilde{x}'(\mu_k))$$

olur. Diğer taraftan $\tilde{x}^k \in S^\circ = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{m+1} : \lambda I - M(x) > 0\}$ olduğundan $\tilde{M}(\tilde{x}^k) = \lambda I - M(x^k) > 0$ dir. Bu yüzden $-\tilde{M}(\tilde{x}^k)$ 'nin tüm özdeğerleri negatiftir.

$A_0 = -\tilde{M}(\tilde{x}^k)$ dersek A_0 kararlıdır. $A_1 = \tilde{M}(\tilde{x}'(\mu_k))$ için Teorem 4.10 kullanılarak ve $\beta_{\max} = q_{\max}$ şeklinde alınabilir.

Ayrıca 6'ncı adımda Newton yöntemi şu şekilde uygulanır: $P_0 = \hat{x}^{k+1}$ alınır. $i = 0, 1, 2, \dots$ için $g(P_i) = \nabla_{\tilde{x}}\phi(P_i, \mu_{k+1})$ olmak üzere

$$\delta_i = \sqrt{g^T(P_i)H^{-1}(P_i)g(P_i)}$$

ve

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & \delta_i \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{4} \\ \frac{1}{1 + \delta_i}, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$P_{i+1} = P_i - \xi_i H^{-1}(P_i)g(P_i)$$

şeklindedir.

$$\|P_{i+1} - P_i\|_{H(P_i)} = [(P_{i+1} - P_i)^T H(P_i)(P_{i+1} - P_i)]^{1/2} < \frac{\sqrt{\alpha}}{4}$$

eşitsizliği Newton yönteminin durma koşuludur. Bu koşul sağlandığında

$$\tilde{x}^{k+1} = P_{i+1}$$

olarak belirlenmiş olur [29].

Algoritmanın uygulamalarında M_0 matrisi $\lambda_{\min}(M_0) = 0$ olacak şekilde verilmelidir. Bunun yanı sıra M_i , ($i = 0, 1, \dots, m$) matrislerinin Frobenius normları da 1 olmalıdır. Eğer M_i , ($i = 0, 1, \dots, m$) matrislerinin Frobenius normları 1 değil ise M_0, M_1, \dots, M_m matrislerinin Frobenius normları sırasıyla n_0, n_1, \dots, n_m olmak üzere

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{n_0} M_0 \\ A_1 &= \frac{1}{n_1} M_1 \\ &\vdots \\ A_m &= \frac{1}{n_m} M_m \end{aligned}$$

matrisleri tanımlanır.

$$z_1 = n_1 x_1, \dots, z_m = n_m x_m$$

dersek,

$$\begin{aligned}
\lambda^{opt} &= \inf_{x \in \mathbb{R}^m} \{ \lambda_{\max}(M_0 + x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + M_m) \} \\
&= \inf_{x \in \mathbb{R}^m} \left\{ \lambda_{\max} \left(n_0 \frac{1}{n_0} M_0 + (n_1 x_1) \frac{1}{n_1} M_1 + \dots + (n_m x_m) \frac{1}{n_m} M_m \right) \right\} \\
&= \inf_{z \in \mathbb{R}^m} \{ \lambda_{\max}(n_0 A_0 + z_1 A_1 + \dots + z_m A_m) \} \\
&= n_0 \inf_{z \in \mathbb{R}^m} \left\{ \lambda_{\max} \left(A_0 + \frac{z_1}{n_0} A_1 + \dots + \frac{z_m}{n_0} A_m \right) \right\}
\end{aligned}$$

olur. $y_1 = \frac{z_1}{n_0}, \dots, y_m = \frac{z_m}{n_0}$ diyelim. O zaman

$$\lambda^{opt} = n_0 \inf_{y \in \mathbb{R}^m} \{ \lambda_{\max}(A_0 + y_1 A_1 + \dots + y_m A_m) \}$$

elde edilir.

$$\tilde{\lambda}^{opt} = \inf_{y \in \mathbb{R}^m} \{ \lambda_{\max}(A_0 + y_1 A_1 + \dots + y_m A_m) \} \quad (4.14)$$

diyelim. Buradan (4.14) problemi çözülerek $\tilde{\lambda}^{opt}$ ve y_1, y_2, \dots, y_m bulunur. Başlangıç probleminin çözümü için

$$\lambda^{opt} = n_0 \tilde{\lambda}^{opt}, \quad x_1 = \frac{n_0}{n_1} y_1, \dots, x_m = \frac{n_0}{n_m} y_m$$

dönüşümü ile (4.4) probleminin yani bu probleme denk olan (4.2) probleminin λ^{opt} , x_1^*, \dots, x_m^* çözümleri bulunmuş olur.

Örnek 4.11.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

simetrik matrisleri verilsin. M_0 matrisinin özdeğerleri 0 ve 2'dir.

$$M(x) = M_0 + x_1 M_1 + x_2 M_2$$

olmak üzere $\inf \{ \lambda_{\max}(M(x)) : x \in \mathbb{R}^2 \}$ problemini bariyer yöntemiyle Algoritma 4.9'u uygulayarak çözelim.

M_0, M_1, M_2 matrislerinin Frobenius normları sırasıyla $n_0 = 2$, $n_1 = \sqrt{10}$, $n_2 = \sqrt{42}$ dir. Buna göre

$$A_0 = \frac{1}{n_0} M_0, \quad A_1 = \frac{1}{n_1} M_1, \quad A_2 = \frac{1}{n_2} M_2$$

dersek

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0.3162 & 0.6324 \\ 0.6324 & -0.3162 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.4629 & 0.6172 \\ 0.6172 & -0.1543 \end{bmatrix}$$

olur.

$A(\tilde{y}) = \lambda I - (A_0 + y_1 A_1 + y_2 A_2 + y_3 A_3)$ matrisi için problemin bariyer fonksiyonu

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{y}) = & \frac{2}{\mu} y_3 - \ln(y_3^2 - y_3 + 0.6172 y_3 y_2 + 0.3086 y_2 - 0.5 y_1^2 - 0.6831 y_1 y_2 - 0.3095 y_2^2 \\ & + 0.6324 y_1) + 0.3162 y_1 + 0.7715 y_2 - 0.5 y_3 \end{aligned}$$

dır. Bu fonksiyon için $\alpha = 1$ 'dir. Şimdi A_0, A_1, A_2 matrisleri için başlangıç noktası

$\tilde{y}^0 = (0, 0, 0, 2\lambda_{\max}(A_0)) = (0, 0, 2)$ alınarak Algoritma 4.9'u uygulayalım.

k	μ_k	\tilde{y}^k
0	1	$(0, 0, 2)^T$
1	0.4597679	$(-0.2135018, 1.0850717, 0.7659045)^T$
2	0.1302639	$(0.0262205, 0.8695299, 0.4494897)^T$
3	0.029796	$(0.1981853, 0.6335722, 0.3605689)^T$
4	0.063396	$(0.2494351, 0.560287, 0.339098)^T$
5	0.0013235	$(0.2603986, 0.5445747, 0.3345656)^T$
6	0.0002738	$(0.2628342, 0.5410624, 0.3335954)^T$
7	0.0000561	$(0.2633741, 0.5402791, 0.3333883)^T$
8	0.0000113	$(0.2634919, 0.5401073, 0.3333446)^T$
9	0.0000022	$(0.2635168, 0.5400709, 0.3333335)^T$
10	4.5×10^{-7}	$(0.2635218, 0.54006357, 0.3333337)^T$
11	9.1×10^{-8}	$(0.2635228, 0.5400620, 0.3333334)^T$
12	1.8×10^{-8}	$(0.2635230, 0.5400617, 0.3333333)^T$
13	3.6×10^{-9}	$(0.2635231, 0.5400617, 0.3333333)^T$

şeklinde $\tilde{\lambda}^{opt} \approx 0.3333333$ olarak bulunur. Başlangıçta verilen problemin çözümü

$$x_1 = \frac{n_0}{n_1} y_1, \quad x_2 = \frac{n_0}{n_2} y_2 \quad \text{ve} \quad \lambda^{opt} = n_0 \tilde{\lambda}^{opt} \quad \text{eşitliklerinden}$$

$$\lambda^{opt} \approx 0.666666, \quad x_1 \approx 0.166666, \quad x_2 \approx 0.166666$$

olur. Bulduğumuz değeri gerçek çözümle karşılaştıralım.

$$\begin{aligned} M(x) &= M_0 + x_1M_1 + x_2M_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 + x_1 - 3x_2 & -1 + 2x_1 + 4x_2 \\ -1 + 2x_1 + 4x_2 & 1 - x_1 - x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

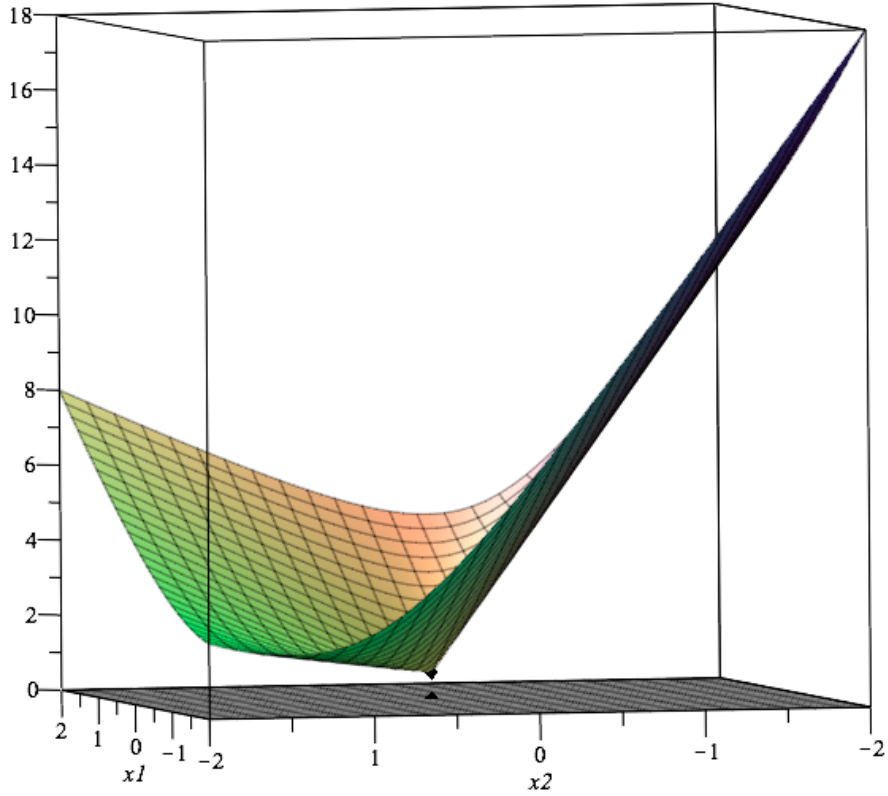
matrisinin en büyük özdeğeri

$$\lambda_{\max}M(x) = -2x_2 + 1 + \sqrt{5x_1^2 + 14x_1x_2 + 17x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 + 1}$$

dir. Bu fonksiyon minimum değerini $x_1 = 0.1\bar{6}$, $x_2 = 0.1\bar{6}$ noktasında alır ve fonksiyonun minimum değeri

$$\lambda_{\max}(M(0.1\bar{6}, 0.1\bar{6})) = 0.6$$

olarak bulunur.



Şekil 4.2. $\lambda_{\max}M(x)$ fonksiyonunun grafiği.

4.3. Yöntemin Ortak P Problemine Uygulanması

$A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisler için $x \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere

$$M(x) = A_i^T P(x) + P(x) A_i < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

diyelim. $M(\hat{x}) < 0$ ve $P(\hat{x}) > 0$ olacak şekilde $\hat{x} \in \mathbb{R}^m$ 'in araştırılması, yani ortak $P(\hat{x}) > 0$ problemini ele alalım. Bu problemin çözümünün varlığı durumunda $M(x)$ matrisindeki M_1, M_2, \dots, M_m matrislerinin

$$x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_m M_m > 0$$

olacak şekilde bir lineer toplamı vardır. Buna göre (4.2) optimizasyon problemindeki λ^{opt} sonlu değildir.

Algoritmanın ortak P problemine uygulanabilmesi için optimizasyon probleminin tanım kümesi ve bariyer fonksiyonu şu şekilde alınır:

Yeterince büyük bir $\gamma_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, m + 1$) pozitif sayıları için

$$K = [-\gamma_1, \gamma_1] \times [-\gamma_2, \gamma_2] \times \dots \times [-\gamma_{m+1}, \gamma_{m+1}]$$

kutusu ve

$$S = \{\tilde{x} = (x, \lambda) \in K : \lambda I - M(x) \geq 0\},$$

kümesi için $S \cap K$ kümesinin bariyer fonksiyonu

$$\phi(\tilde{x}, \mu) = \frac{\rho}{\mu} \lambda - \ln(\det(\lambda I - M(x))) - \sum_{i=1}^{m+1} \ln(\gamma_i^2 - x_i^2) - \tilde{w}^T \tilde{x}.$$

olur.

Görüldüğü üzere (4.13)'teki $\phi(\tilde{x}, \mu)$ bariyer fonksiyonuna ek bir $-\sum_{i=1}^{m+1} \ln(\gamma_i^2 - x_i^2)$ bariyer fonksiyonu getirildiği için Algoritma 4.9'un 4'üncü adımında

$$\tilde{x}^k - \gamma_{\max} \tilde{x}'(\mu_k) \in K$$

olacak şekilde γ_{\max} sayısı için $\beta_k = r_k \min(\beta_{\max}, \gamma_{\max})$ olarak alınır.

Teorem 4.12. $\phi(\tilde{x}) = -\sum_{i=1}^{m+1} \ln(\gamma_i^2 - x_i^2)$ fonksiyonu $\alpha = 1$ parametresi ile self-concordanttır.

Kanıt.

$$g_1(\tilde{x}) = -\ln(\gamma_1^2 - x_1^2) = -[\ln(\gamma_1 - x_1) + \ln(\gamma_1 + x_1)]$$

$$\vdots$$

$$g_{m+1}(\tilde{x}) = -\ln(\gamma_{m+1}^2 - x_{m+1}^2) = -[\ln(\gamma_{m+1} - x_{m+1}) + \ln(\gamma_{m+1} + x_{m+1})]$$

diyelim. O zaman $\phi(\tilde{x}) = g_1(\tilde{x}) + \dots + g_{m+1}(\tilde{x})$ olur. Şimdi

$$g_1(\tilde{x}) = -\ln(\gamma_1^2 - x_1^2) = -[\ln(\gamma_1 - x_1) + \ln(\gamma_1 + x_1)]$$

fonksiyonunu ele alalım.

$\psi_1(t) = g_1(\tilde{x} + th) = -[\ln(\gamma_1 - x_1 - th_1) + \ln(\gamma_1 + x_1 + th_1)]$ olur ve

$$\psi_1''(0) = \frac{h_1^2}{(\gamma_1 - x_1)^2} + \frac{h_1^2}{(\gamma_1 + x_1)^2}$$

$$\psi_1'''(0) = 2\left(\frac{h_1^3}{(\gamma_1 - x_1)^3} - \frac{h_1^3}{(\gamma_1 + x_1)^3}\right)$$

elde edilir.

$$a_1 = \frac{h_1}{\gamma_1 - x_1} \text{ ve } b_1 = \frac{h_1}{\gamma_1 + x_1} \text{ dersek,}$$

$$4\psi_1''(0)^3 = 4(a_1^2 + b_1^2)^3 = 4(a_1^6 + 3a_1^4b_1^2 + 3a_1^2b_1^4 + b_1^6)$$

$$= 4(a_1^3 - b_1^3)^2 + a_1^2b_1^2(3a_1^2 + 3b_1^2 + 2a_1b_1)$$

$$\geq 4(a_1^3 - b_1^3)^2 + a_1^2b_1^2(a_1^2 + b_1^2 + 2a_1b_1)$$

$$= 4(a_1^3 - b_1^3)^2 + a_1^2b_1^2(a_1 + b_1)^2$$

$$\geq 4(a_1^3 - b_1^3)^2 = \psi_1'''(0)^2$$

olur. Buradan

$$4\psi_1''(0)^3 \geq \psi_1'''(0)^2$$

yani

$$2\psi_1''(0)^{3/2} \geq |\psi_1'''(0)|$$

dir. Benzer şekilde

$$2\psi_2''(0)^{3/2} \geq |\psi_2'''(0)|$$

$$\vdots$$

$$2\psi_{m+1}''(0)^{3/2} \geq |\psi_{m+1}'''(0)|$$

olur. $\phi(\tilde{x} + th) = g_1(\tilde{x} + th) + \cdots + g_{m+1}(\tilde{x} + th)$ dir. O zaman

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \phi(\tilde{x} + th) \\ &= g_1(\tilde{x} + th) + \cdots + g_{m+1}(\tilde{x} + th) \\ &= \psi_1(t) + \cdots + \psi_{m+1}(t)\end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan $\psi(0) = \psi_1(0) + \cdots + \psi_{m+1}(0)$ dir.

$$\begin{aligned}|\psi'''(0)| &= |\psi_1'''(0) + \cdots + \psi_{m+1}'''(0)| \\ &\leq |\psi_1'''(0)| + \cdots + |\psi_{m+1}'''(0)| \\ &\leq 2\psi_1''(0)^{3/2} + \cdots + 2\psi_{m+1}''(0)^{3/2} \\ &\leq 2(\psi_1''(0) + \cdots + \psi_{m+1}''(0))^{3/2} \\ &= 2\psi''(0)^{3/2}\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\phi(\tilde{x}) = -\sum_{i=1}^{m+1} \ln(\gamma_i^2 - x_i^2)$ bariyer fonksiyonu (4.11) eşitsizliğini sağlar yani $\alpha = 1$ parametresi ile self-concordanttır. \square

Teorem 4.13 ([29],sf. 13). $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^{m+1}$ açık, boş kümeden farklı, konveks kümeler ve $Q = Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset$ olsun. $F_1 : Q_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Q_1 üzerinde α_1 parametresi ile, $F_2 : Q_2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Q_2 üzerinde α_2 parametresi ile self-concordant fonksiyonlar olsunlar. $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ ve $\alpha = \min\{p_1\alpha_1, p_2\alpha_2\}$ olmak üzere $F : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = p_1F_1(x) + p_2F_2(x)$ fonksiyonu Q üzerinde α parametresi ile self-concordant fonksiyondur.

Bu teorem kullanılarak Teorem 4.12'nin kanıtı şu şekilde de verilebilir. $i = 1, 2, \dots, m+1$ için $Q_i = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{m+1} : -\gamma_i < x_i < \gamma_i\}$ olmak üzere $g_i : Q_i \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i(\tilde{x}) = -\ln(\gamma_i^2 - x_i^2)$ fonksiyonunun $\alpha_i = 1$ parametresi ile self-concordant olduğu yukarıdaki gibi gösterilebilir. $K^\circ = Q_1 \cap Q_2 \cap \cdots \cap Q_{m+1}$ olduğundan Teorem 4.13'e göre $g : K^\circ \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\tilde{x}) = g_1(\tilde{x}) + g_2(\tilde{x}) + \cdots + g_{m+1}(\tilde{x}) = -\sum_{i=1}^{m+1} \ln(\gamma_i^2 - x_i^2)$ fonksiyonu da K° kümesi üzerinde $\alpha = 1$ parametresi ile self-concordant fonksiyondur.

$F_1 = -\ln(\det(\lambda I - M(x)))$ fonksiyonu S kümesi için $\alpha = 1$ parametresi ile self-concordant ve $F_2 = -\sum_{i=1}^{m+1} \ln(\gamma_i^2 - x_i^2)$ fonksiyonu K kümesi üzerinde $\alpha = 1$ parametresi ile self-concordant bariyer fonksiyonları olduklarından Teorem 4.13'e

göre

$$F_1 + F_2 = -\ln(\det(\lambda I - M(x))) - \sum_{i=1}^{m+1} \ln(\gamma_i^2 - x_i^2)$$

fonksiyonu da $S \cap K$ kümesinin $\alpha = 1$ parametresi ile self-concordant bariyer fonksiyonudur.

Örnek 4.14.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.6 & -2.5 \\ 2.5 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

kararlı matrislerini alalım.

$$A_1^T P(x) + P(x)A_1 = \begin{bmatrix} -3.2x_1 + 5x_2 & -0.5x_2 + 2.5x_3 - 2.5x_1 \\ -0.5x_2 + 2.5x_3 - 2.5x_1 & -5x_2 + 2.2x_3 + 1 \end{bmatrix} < 0$$

$$A_2^T P(x) + P(x)A_2 = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4x_2 + 2 & -x_2 - 2x_3 + 2x_1 \\ -x_2 - 2x_3 + 2x_1 & 4x_2 - 4x_3 + 3 \end{bmatrix} < 0$$

olacak şekilde

$$P(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} > 0$$

simetrik matrisini Algoritma 4.9 ile araştıralım. Bunun için

$$M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \geq 0,$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} A_1^T P(x) + P(x)A_1 & 0 \\ 0 & A_2^T P(x) + P(x)A_2 \end{bmatrix} < -M_0$$

eşitsizliğini ele alalım.

$$M_1 = \begin{bmatrix} -3.2 & -2.5 & 0 & 0 \\ -2.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2.5 & 0 & 0 \\ 2.5 & 2.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

için

$$M(x) = M_0 + x_1 M_1 + x_2 M_2 + x_3 M_3$$

matrisi oluşturulur. M_0, M_1, M_2, M_3 matrislerinin Frobenius normları sırasıyla $n_0 = 3.74165$, $n_1 = 5.89406$, $n_2 = 9.19238$ ve $n_3 = 6.42961$ dir. Bu matrisler Frobenius normlarına göre birimleştirildiğinde

$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2672 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5345 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8017 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -0.5429 & -0.4241 & 0 & 0 \\ -0.4241 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3393 & 0.3393 \\ 0 & 0 & 0.3393 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0.5439 & -0.0543 & 0 & 0 \\ -0.0543 & -0.5439 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.435 & -0.1087 \\ 0 & 0 & -0.1087 & 0.4351 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.3888 & 0 & 0 \\ 0.3888 & 0.3421 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.3110 \\ 0 & 0 & -0.3110 & -0.6221 \end{bmatrix},$$

matrisleri elde edilir. $B(y) = B_0 + y_1 B_1 + y_2 B_2 + y_3 B_3$ matrisinin en büyük özdeğerini minimalleştirmek için $K = [-100, 100] \times [-100, 100] \times [-100, 100] \times [-10, 10]$ kutusunu oluşturalım. $\tilde{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in S \cap K$ ($\lambda = y_4$) olmak üzere bariyer fonksiyonu

$$\phi(\tilde{y}, \mu) = \frac{\rho}{\mu} y_4 - \ln(\det(y_4 I - B(y))) - \sum_{i=1}^4 \ln(\gamma_i^2 - y_i^2) - \tilde{w}^T \tilde{y}$$

şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyon için $\alpha = 1$ dir. $\lambda_{\max}(B_0) = 0.8017$ olduğundan başlangıç noktası $\tilde{y}^0 = (0, 0, 0, 2\lambda_{\max}(B_0)) = (0, 0, 0, 1.6035) \in S^\circ \cap K^\circ$ ve $\varepsilon = 10^{-8}$

alınarak Algoritma 4.9 uygulanırsa,

k	μ_k	\tilde{y}^k
0	1	$(0, 0, 0, 1.6035)^T$
1	0.479	$(11.66166425, 10.80028602, 11.63955121, 0.25696554)^T$
2	0.239	$(41.25850977, 37.96014473, 43.95856567, -0.41934919)^T$
3	0.119	$(88.71799632, 81.44701266, 95.75660049, -1.42565060)^T$
4	0.059	$(92.15731851, 84.59640719, 99.47573214, -1.52784762)^T$
5	0.029	$(92.52404481, 84.90689729, 99.82191730, -1.54425030)^T$
6	0.014	$(92.62585021, 84.99077028, 99.91381381, -1.54903528)^T$
7	0.007	$(92.67591155, 85.03156309, 99.95815408, -1.55146292)^T$
\vdots	\vdots	\vdots
22	2.2×10^{-7}	$(92.72373549, 85.07026142, 99.99999877, -1.55383046)^T$
23	1.1×10^{-7}	$(92.72373629, 85.07026211, 99.99999956, -1.55383048)^T$
24	4.1×10^{-8}	$(92.72373680, 85.07026232, 99.99999974, -1.55383044)^T$

elde edilir. 24'üncü adımda bulunan nokta dönüştürüldüğünde $x_1 = 58.862$, $x_2 = 34.626$, $x_3 = 58.194$ ve $\lambda^{opt} \approx -5.813$ olur. Buna göre

$$P(x^{24}) = \begin{bmatrix} 58.862 & 34.626 \\ 34.626 & 58.194 \end{bmatrix} > 0$$

olup

$$A_1^T P(x^{24}) + P(x^{24}) A_1 = \begin{bmatrix} -15.226 & -18.984 \\ -18.984 & -45.107 \end{bmatrix} < 0$$

ve

$$A_2^T P(x^{24}) + P(x^{24}) A_2 = \begin{bmatrix} -20.782 & -33.289 \\ -33.289 & -94.268 \end{bmatrix} < 0$$

sağlanır.

Böylece bu $P(x^{24}) > 0$ matrisi A_1 ve A_2 kararlı matrislerinin ortak çözümü olur.

4.4. Yöntemin LMI Problemine Uygulanması

Matrislerin kararlılığı problemlerinde ortaya çıkan matris eşitsizlikleri Schur tamamlama (Schur complement) yöntemi ile LMI'ya dönüştürülebilmektedir. Matrisler politopunun gürbüz kararlılığı problemi ve parametreye bağlı afin $P(\alpha)$ matrisinin

bulunmasına ilişkin bir çalışma [16]'dadır. Bu bölümde bir LMI probleminin bariyer yöntemiyle çözümünü ele alınmıştır.

Teorem 4.15 ([16]). $A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kararlı matrisleri verilsin. Eğer

$$\begin{bmatrix} GA_i + A_i^T G^T & P_i - G + A_i^T H^T \\ P_i - G^T + HA_i & -H - H^T \end{bmatrix} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.15)$$

olacak şekilde $P_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, N$), G ve H matrisleri varsa o zaman

$$\mathcal{A} = \left\{ A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_N A_N, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \in [0, 1] \right\}$$

matris ailesi gürbüz kararlıdır ve $P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$ matrisi bu ailenin parametreye bağlı bir Lyapunov fonksiyonudur.

Kanıt. $\alpha_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ için $A(\alpha) = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_N A_N$ alalım. (4.15) eşitsizlikleri $i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere sırasıyla α_i sayılarıyla çarpılıp toplanırsa, $P(\alpha) = \sum_{i=1}^N \alpha_i P_i$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} GA(\alpha) + A(\alpha)^T G^T & P(\alpha) - G + A(\alpha)^T H^T \\ P(\alpha) - G^T + HA(\alpha) & -H - H^T \end{bmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

elde edilir. Şimdi (4.16) eşitsizliği soldan $[I \ A(\alpha)^T]$ matrisi ile sağdan da $[I \ A(\alpha)^T]^T$ ile çarpılırsa, her $\alpha_i \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^N \alpha_i = 1$ ve $P(\alpha) > 0$ için

$$A(\alpha)^T P(\alpha) + P(\alpha) A(\alpha) < 0$$

Lyapunov eşitsizliği elde edilir ki buna göre \mathcal{A} ailesi gürbüz kararlıdır. \square

Örnek 4.16.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

kararlı matrislerini ele alalım.

Bu matrisler için

$$A_1 A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri 5.1084, 0.3915 dir. $A_1 A_2^{-1}$ matrisinin negatif özdeğeri olma-

dağından Teorem 1.8'e göre $[A_1, A_2]$ segmenti gürbüz kararlıdır.

$$x \in \mathbb{R}^{14}, \quad P_1(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix}, \quad P_2(x) = \begin{bmatrix} x_4 & x_5 \\ x_5 & x_6 \end{bmatrix},$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} x_7 & x_8 \\ x_9 & x_{10} \end{bmatrix}, \quad H(x) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{13} & x_{14} \end{bmatrix}$$

alalım. Bu durumda denklem (4.15)'da ifade edilen matrisler

$$L_1(x) = \begin{bmatrix} G(x)A_1 + A_1^T G(x)^T & P_1(x) - G(x) + A_1^T H(x)^T \\ P_1(x) - G(x)^T + H(x)A_1 & -H(x) - H(x)^T \end{bmatrix}$$

$$L_2(x) = \begin{bmatrix} G(x)A_2 + A_2^T G(x)^T & P_2(x) - G(x) + A_2^T H(x)^T \\ P_2(x) - G(x)^T + H(x)A_2 & -H(x) - H(x)^T \end{bmatrix}$$

şeklinindedir. Buna göre 12×12 boyutlu

$$M(x) = \begin{bmatrix} L_1(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_1(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P_2(x) \end{bmatrix}$$

matrisi oluşturulur ve

$$M(x) < 0 \Leftrightarrow L_1(x) < 0, \quad L_2(x) < 0, \quad -P_1(x) < 0, \quad -P_2(x) < 0$$

dır. $\lambda_{\min}(M_0) = 0$ olacak şekilde

$$M_0 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 11 \end{bmatrix} \geq 0$$

matrisini alalım. $M(x)$ matrisini x_i 'lere ($i = 1, 2, \dots, 14$) göre ayrıştırdığımızda elde edilen M_i matrisleri ile birlikte

$$\hat{M}(x) = M_0 + x_1 M_1 + x_2 M_2 + \dots + x_{14} M_{14}$$

matrisi için M_i matrisleri ($i = 0, 1, 2, \dots, 14$) Frobenius normlarına göre birimleştirildiğinde $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{14}$ matrisleri elde edilir.

$$B(y) = B_0 + y_1 B_1 + y_2 B_2 + \dots + y_{14} B_{14}$$

için Algoritma 4.9'u uygulayalım. $K = [-10, 10]^{15}$ kutusunu oluşturalım.

$\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{15}) \in S \cap K$ ($\lambda = y_{15}$) olmak üzere bariyer fonksiyonu

$$\phi(\tilde{y}, \mu) = \frac{\rho}{\mu} y_{15} - \ln(\det(y_{15} I - B(y))) - \sum_{i=1}^{15} \ln(\gamma_i^2 - y_i^2) - \tilde{w}^T \tilde{y}$$

şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyon için $\alpha = 1$ dir. $\tilde{y}^0 = (0, \dots, 0, 2\lambda_{\max}(B_0)) = (0, 0, \dots, 0, 0.9780192) \in S^\circ \cap K^\circ$, $\varepsilon = 10^{-4}$ alınırsa,

k	μ_k	\tilde{y}^k
0	1	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.978019)
1	0.5	(1.536214, 1.241529, 1.009615, 0.575192, 0.283039, 0.887717, 0.694224, -0.396745, 1.616479, 1.085881, 1.148134, -0.587907, 2.479481, 1.748448, 0.353154)
2	0.220	(5.341253, 5.059795, 3.172757, 1.071088, 0.447845, 1.564029, 0.528372, -2.039322, 3.104320, 0.970789, 2.288494, -3.479190, 5.629742, 2.540454, 0.128389)
3	0.110	(8.801520, 8.527317, 5.140740, 1.495468, 0.447880, 2.284903, 1.178490, -3.703737, 4.337207, 0.728509, 3.017214, -6.301583, 8.664913, 3.263315, 0.019264)

k	μ_k	\tilde{y}^k
4	0.055	(9.725939, 9.475203, 5.688263, 1.720716, 0.296167, 2.288694, 2.502977, -4.387641, 5.211610, 0.302970, 2.931763, -7.282641, 9.272726, 3.343955, -0.016005)
5	0.027	(9.919087, 9.692639, 5.823781, 1.837666, 0.219250, 2.186702, 3.242503, -4.784200, 5.756825, -0.105128, 2.829322, -7.620323, 9.369561, 3.301650, -0.0265861)
\vdots	\vdots	\vdots
11	0.0004	(9.999257, 9.817878, 5.916570, 1.963930, 0.163872, 2.028717, 3.891228, -5.376982, 6.430752, -0.750041, 2.695250, -7.942490, 9.397416, 3.182928, -0.032443)
12	0.0002	(9.999630, 9.818759, 5.917300, 1.954962, 0.165851, 2.031972, 3.817663, -5.367940, 6.410795, -0.755158, 2.689805, -7.948618, 9.393754, 3.178941, -0.032471)

elde edilir. Bu sonuca göre $\lambda^{opt} \approx -0.730417 < 0$ ve dönüştürme işlemi sonucunda

$$\begin{aligned}
x_1 &= 129.866929, & x_2 &= 90.168794, & x_3 &= 76.849011, & x_4 &= 25.389441, \\
x_5 &= 1.523068, & x_6 &= 26.389574, & x_7 &= 7.206571, & x_8 &= -8.853733, \\
x_9 &= 12.950195, & x_{10} &= -1.405844, & x_{11} &= 6.240684, & x_{12} &= -16.894988, \\
x_{13} &= 22.273743, & x_{14} &= 6.639399
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu değerlere karşılık gelen $M(x^{12})$ matrisinin özdeğerleri:

$$\begin{aligned}
&-291.7091, & -188.9849, & -38.4796, \\
&-19.4370, & -16.9125, & -13.8664, \\
&-12.6321, & -6.8620, & -1.0421, \\
&-0.9957, & -0.7309, & -0.7306
\end{aligned}$$

olduğundan $M(x^{12}) < 0$ dir. $P_1(x^{12})$, $P_2(x^{12})$, $G(x^{12})$ ve $H(x^{12})$ matrisleri:

$$\begin{aligned} P_1(x^{12}) &= \begin{bmatrix} 129.866929 & 90.168794 \\ 90.168794 & 76.849011 \end{bmatrix} > 0, \\ P_2(x^{12}) &= \begin{bmatrix} 25.389441 & 1.523068 \\ 1.523068 & 26.389574 \end{bmatrix} > 0, \\ G(x^{12}) &= \begin{bmatrix} 7.206571 & -8.853733 \\ 12.950195 & -1.405844 \end{bmatrix}, \\ H(x^{12}) &= \begin{bmatrix} 6.240684 & -16.894988 \\ 22.273743 & 6.639399 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Bu matrisler için $L_1(x^{12}) < 0$ ve $L_2(x^{12}) < 0$ olduğundan Teorem 4.15'e göre $[A_1, A_2]$ segmenti gürbüz kararlıdır ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere $P(t) = (1 - t)P_1(x^{12}) + tP_2(x^{12})$ matrisi $[A_1, A_2]$ matris segmenti için parametreye bağlı Lyapunov fonksiyonudur.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir:

Tek parametrelili afın matrisler ailesine karşılık gelen tek parametrelili afın Lyapunov fonksiyonunun varlığı için yeter koşullar verilmiştir. Barmish'in iddiası (İddia 2.3) için verilen karşıt örnek, tez kapsamında geliştirilmiş algoritmalarla doğrulanmıştır. Çok parametrelili afın Lyapunov fonksiyonlarına örnekler verilmiştir.

Maksimal özdeğer fonksiyonunu esas alan bir iç nokta yöntemi verilmiştir. $[0, 1]$ aralığında değişen parametreye göre bir afın matrisler ailesi verildiğinde bu matrisler ailesine karşılık gelen Lyapunov eşitsizliğinin çözümü için simetrik matrislerin küre yüzeyi üzerinde maksimum özdeğerinin belirlenmesi gerekmektedir. Matematiksel yazılımlar yardımıyla bu maksimal özdeğeri belirlemede ortaya çıkan zorlukları aşmak için problem kutu yüzeyi üzerinde maksimal özdeğeri bulma problemine dönüştürülmüştür. Ayrıca $[0, 1]$ aralığını gridlemek yoluyla da maksimal özdeğerler yaklaşık olarak hesaplanabilmekte ve afın Lyapunov fonksiyonları belirlenebilmektedir.

Afın simetrik matrisler ailesinin maksimal özdeğerini bariyer yöntemiyle veren bir algoritma ek bariyer fonksiyonu ile modifiye edilerek ortak $P > 0$ çözümü problemlerine uygulanmıştır.

Tez kapsamında ele alınan problemler ayrıntılı açıklamalarıyla birlikte çok sayıda örnekler üzerinde incelenmiştir.

KAYNAKÇA

- [1] Barmish, B.R. (1983). Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-28(8), 848-850.
- [2] Barmish, B.R. (1994). New Tools for Robustness of Linear Systems. *Macmillan*.
- [3] Bhattacharyya, S.P., Chapellat, H. and Keel, L.H. (1995). Robust Control: The Parametric Approach. *Prentice Hall*.
- [4] Bialas, S. (1985). A necessary and sufficient condition for the stability of convex combinations of stable polynomials or matrices *Bull. Polish Acad. Sci., Tech. Sci.*, 33(9-10), 473-480.
- [5] Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). Linear Matrix Inequalities in systems and control theory. *Philadelphia, PA: SIAM*.
- [6] Dzhafarov, V. and Büyükköroğlu, T. (2022). On one inner point algorithm for common Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, vol. 167, 1-4.
- [7] Ebihara, Y. and Hagiwara, T. (2006). On the degree of polynomial parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of single parameter-dependent LTI systems: A counter-example to Barmish's conjecture. *Automatica*, 42, 1599-1603.
- [8] Elsner, L. and Monov, V. (2011). The Bialterne matrix Product Revised. *Linear Algebra And Its Applications*, 434, 1058-1066.
- [9] Esen, Ö. (2008). *Matris Denklemleri ve Matrisler Ailesinin Gürbüz Kararlılığı Problemleri*. Yayınlanmamış Doktora Tezi. Eskişehir: Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [10] Fainshil, L., Margaliot, M. and Chigansky, P. (2009). On the Stability of Positive Linear Switched Systems Under Arbitrary Switching Laws. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 4.
- [11] Feron, E., Apkarian, P. and Gahinet, P. (1996). Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 1041-1046.
- [12] Freund, R.M. (2004). Penalty and barrier methods for constrained optimization. *Lecture Notes, Massachusetts Institute of Technology*.
- [13] Fu, M. and Barmish, B.R. (1998). Maximal Unidirectional Perturbation Bounds for Stability of Polynomials and Matrices. *System & Control Letters*, 11, 173-179.
- [14] Garcia, G., Pradin, B., Tarbouriech, S., and Zeng, F. (2003). Robust Stabilization and Guaranteed Cost Control for Discrete-Time Linear Systems by Static Output Feedback. *Automatica*, vol. 39, pp. 1635-1641.

- [15] Gahinet, P., Apkarian, P. and Chilali, M. (1996). Affine parameter-dependent Lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41, 436-442.
- [16] Geromel, J.C., de Oliveira, M.C. and Hsu, L. (1998). LMI characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and its Applications*, 285, 69-80.
- [17] Giesl, P. and Hafstein S. (2015). Review on computational methods for Lyapunov functions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*, vol. 20, no. 8, 2291-2331.
- [18] Hinrichsen, D. and Martenson, B. (1990). Applications of analytic centers to feedback control systems. *in Control of Uncertain Systems, eds., Bremen, June 1989, Birkhauser, Basel, Boston.*
- [19] Henrion, D., Arzelier, D., Peaucelle, D., and Lasserre, J.B., (2004). On parameter-dependent Lyapunov functions for robust stability of linear systems. *Proceedings of The Conference on Decision and Control*, pp. 887-892.
- [20] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1994). Matrix Analysis. *Cambridge University Press.*
- [21] Jarre, F. (1993). An Interior-Point Method for Minimizing The Maximum Eigenvalue of a Linear Combination of Matrices. *SIAM J. Control and Optimization*, vol. 31, no. 5, pp. 1360-1377.
- [22] Khalil, H.K. (1982). On the existence of positive diagonal P such that $PA + A^T P < 0$. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. AC-27, no. 1, pp. 181-184.
- [23] Khalil, H.K. (2001). Nonlinear Systems. *Prentice Hall.*
- [24] Liberzon, D. (2003). Switching in Systems and Control. *Birkhauser*
- [25] Liberzon, D. and Tempo, R. (2004). Common Lyapunov Functions and Gradient Algorithms. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 6, pp. 990-994.
- [26] Lin, H. and Antsaklis, J. (2009). Stability and Stabilizability of Switched Linear Systems: A Survey of Recent Results *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 2, pp. 308-322.
- [27] Mori, T. and Kokame, H. (2000). A Parameter-Dependent Lyapunov Function for a Polytope of Matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 8.
- [28] Narendra, K.S. and Balakrishnan, J. (1994). A Common Lyapunov Function for Stable LTI Systems with Commuting A -Matrices. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 12.
- [29] Nemirovski, A. (1996). Interior Point Polynomial Time Methods in Convex Programming.

- [30] Nicoletta, B., Carli, R. and Schenato, L. (2018). Lyapunov Theory for Discrete Time Systems. *arXiv: 1809.05289v1*.
- [31] Oliveira, R.C.L.F and Peres, P.L.D. (2005). Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent Lyapunov functions: Asymptotically exact LMI conditions. *Linear Algebra and Its Applications*, 405, 209-228.
- [32] Parks, P.C. and Hahn, V. (1981). Stability Theory. *Prentice Hall*.
- [33] Polyak, B.T. and Shcherbakov, P.S. (2005). Hard Problems in Linear Control Theory: Possible Approaches to Solution. *Automation and Remote Control*. vol. 66, no. 5, pp. 681-718. *Translated from Avtomatika i Telemekhanika*, no. 5, pp. 7-46.
- [34] Polyak, B.T., Khlebnikov, M.V. and Shcherbakov, P.S. (2021). Linear Matrix Inequalities in Control Systems with Uncertainty. *Automation and Remote Control*, vol. 82, no. 1, pp. 1-40. *Translated from Avtomatika i Telemekhanika*, no. 1, pp. 3-54.
- [35] Saydy, L., Tits, A.L. and Abed, E.H. (1990). Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, vol. 3, pp. 34-371.
- [36] Shorten, R.N. and Narendra, K.S. (2002). Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for a finite number of stable second order linear time-invariant systems. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16:709-728.
- [37] Sun, Z. and Ge, S.S. (2005). Switched Linear Systems: Control and Design. *Springer*.
- [38] Syrmos, V.L., Abdallah, C.T., Dorato, P. and Grigoriadis K. (1997). Static Output Feedback: A Survey. *Automatica*, vol. 33, no. 2, pp. 125-137.
- [39] Yilmaz, S. (2020). Hurwitz Stability of Matrix Segment and The Common Solution Set of 2 and 3-Dimensional Lyapunov equations. *Sakarya University Journal of Science*, vol. 24, no. 2, pp. 357-364.
- [40] Zhang, X., Tsiotras, P., and Iwasaki, T., (2003). Parameter-dependent Lyapunov functions for exact stability analysis of single-parameter dependent LTI systems. *Proceedings of The Conference on Decision and Control*, pp. 5168-5173.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID : 0000-0002-9502-3648

Adı Soyadı : Birgül AKSOY

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi:

- 2011-2014, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı.
- 2007-2010, Dumlupınar Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.

Yayımları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- Aksoy, B. ve Büyükköroğlu, T. (2022). Bir Parametrelili Lyapunov Fonksiyonları ve Barmish'in İddiası. *International Dumlupınar Science & Mathematics Congress (IDUSMAC)*, Kütahya: Dumlupınar Üniversitesi, s.315.
- Aksoy, B. ve Büyükköroğlu, T. (2022). Lyapunov Eşitsizliklerinin Çözümü için Bir İç Nokta Yöntemi *Global Conference on Engineering Research (GLOBECER'22)*. Bandırma, s.431-432.
- Büyükköroğlu, T. ve Aksoy, B. (2022). Anahtarlama Doğrusal Sistemler için Ortak Kuadratik Lyapunov Fonksiyonları. *Araştırma Destek Projesi*, Eskişehir Teknik Üniversitesi.
- Büyükköroğlu, T. ve Aksoy, B. (2021). Tek Parametreye Bağlı LTI Sistemlerin Gürbüz Kararlılığı ve Lyapunov Fonksiyonları. *Bilimsel Araştırma Projesi*, Eskişehir Teknik Üniversitesi.