T.C.
SİİRT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORANTILI CAPUTO TÜREVİ YARDIMIYLA ELDE EDİLEN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS

Enis TOKTAŞ
(203114002)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL

Ocak-2023
SİİRT

TEZ KABUL VE ONAYI

Enis TOKTAŞ tarafından hazırlanan "Orantılı Caputo Türevi Yardımıyla Elde Edilen Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Sumudu Dönüşümü Uygulamaları" adlı tez çalışması 17/01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan	
Prof. Dr. Ali AKGÜL	…………………..
Danışman	
Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL	…………………..
Üye	
Doç. Dr. Ebru CAVLAK ASLAN	…………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Harun BEKTAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖN SÖZ

Tez konusunun belirlenmesi ve yürütülmesi aşamasında, her türlü yardım ve desteği esirgemeyen, bilgi ve hoşgörülerinden yararlandığım, kıymetli danışman hocam Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL' e teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Siirt üniversitesinde bulunduğum süre boyunca bana yol gösteren ve yardımcı olan, bilgi ve birikimlerinden yararlandığım, yardımını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Ali AKGÜL' e canı gönülden teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Hiç bir zaman ümidini benden yitirmeyen ve her zaman en büyük destekçilerim olan annem Hanife TOKTAŞ ve babam Selahattin TOKTAŞ' a çok teşekkür ederim.

Tez sürecinde ve öncesinde hayatıma dahil olan değerli eşim Meral TOKTAŞ' a teşekkür ederim.

Yüksek Lisans eğitimim sırasında dünyaya gelen çocuklarım Çınar TOKTAŞ ve Yusuf TOKTAŞ' ın bana verdikleri manevi desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Enis TOKTAŞ
SİİRT-2023

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

Kısaltma	**Açıklama**
C	: Caputo
CP	: Sabit Orantılı
CPC	: Sabit Orantılı Caputo
LSD	: Laplace-Sumudu Dualitesi
PC	: Orantılı Caputo
RL	: Riemann-Liouville

Simge	**Açıklama**
Γ(w)	: Gamma Fonksiyonu
β(m,w)	: Beta Fonksiyonu
$E_{\varrho}(z)$	: Bir Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{\varrho,\beta}(z)$	: İki Parametreli Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{\varrho,\beta}^{q}$	: Genel Mittag-Leffler Fonksiyonu
R	: Reel Sayılar Kümesi
C	: Kompleks Sayılar Kümesi
L[f(t)]	: Laplace Dönüşümü
F(s)	: Laplace Dönüşümü
S[f(t)]	: Sumudu Dönüşümü
G(Ψ)	: Sumudu Dönüşümü
${}_{0}^{RL}D_{t}^{\beta}$	: Riemann-Liouville Kesirli Türev Operatörü
${}_{0}^{RL}I_{t}^{\beta}$	: Riemann-Liouville Kesirli İntegral Operatörü
${}_{0}^{C}D_{t}^{\varrho}$	: Caputo Kesirli Türev Operatörü
${}^{P}D_{\varrho}$	: Orantılı Türev Operatörü
${}^{CP}D_{\varrho}$	: Sabit Orantılı Türev Operatörü
${}_{0}^{PC}D_{t}^{\varrho}$	: Orantılı Caputo Türev Operatörü
${}_{0}^{CPC}D_{t}^{\varrho}$	: Sabit Orantılı Caputo Türev Operatörü
${}_{0}^{CPC}I_{t}^{\varrho}$	: Sabit Orantılı Caputo İntegral Operatörü
${}_{a}^{P}I_{t}^{\mu,v,q,k}$	: Prabhakar Kesirli İntegral Operatörü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

ORANTILI CAPUTO TÜREVİ YARDIMIYLA ELDE EDİLEN KESİRLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ UYGULAMALARI

Enis TOKTAŞ

Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL

2023, 87 + viii Sayfa

Kesirli türev ve integralleri tanımlamanın birkaç yolu vardır. Bu tezde son zamanlarda ortaya çıkan Caputo kesirli türevi ve Riemann-Liouville integralinin bir kombinasyonu olarak elde edilen sabit orantılı Caputo türevi ele alınmıştır.

Tez 6 bölümden oluşmaktadır. İlk iki bölümde kesirli diferansiyel denklemlerin tarihçesi ve öneminden bahsedilmiş ve gerekli tanım, teoremler verilmiştir. 3. bölümde Sumudu dönüşümü ve özellikleri tanıtılıp bu dönüşüm ile Laplace dönüşümü arasındaki ilişkiler açıklanmıştır. 4. bölümde literatüre yeni katılan sabit orantılı Caputo türevi geniş bir şekilde ele alınarak incelenmiştir. 5. bölümde bu türevi içeren bazı diferansiyel denklemler Sumudu dönüşümü kullanılarak çözülmüştür. 6. bölümde ise sonuçlardan bahsedilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Caputo türevi, Kesirli diferansiyel denklemler, Laplace dönüşümü, Mittag-Leffler çekirdeği, Orantılı Caputo türevi, Sumudu dönüşümü.

ABSTRACT

MS THESIS

APPLICATIONS OF SUMUDU TRANSFORM FOR FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OBTAINED WITH THE HELP OF PROPORTIONAL CAPUTO DERIVATIVE

Enis TOKTAŞ

The Graduate School of Natural and Applied Science of Siirt University
The Degree of Master of Science
In Mathematics

Supervisior : Assoc. Prof. Dr. Esra KARATAŞ AKGÜL

2023, 87 + viii Pages

There are several ways to define fractional derivatives and integrals. In this thesis, the constant proportional Caputo derivative obtained as a combination of the recently emerged Caputo fractional derivative and the Riemann-Liouville integral is discussed.

Thesis consists of 6 chapters. In the first two chapters, the history and importance of fractional differential equations are mentioned and necessary definitions and theorems are given. In chapter 3, the Sumudu transform and its properties are introduced and the relationships between this transform and Laplace transform are explained. In the 4th chapter, the constant proportional Caputo derivative, which has recently been added to the literature, has been extensively discussed. In the fifth chapter, some differential equations containing this derivative are solved using the Sumudu transform. In the 6th chapter, the results are mentioned.

Keywords: Caputo derivative, Fractional differential equations, Laplace transform, Mittag-Leffler kernel, Proportional Caputo derivative, Sumudu transform.

1. GİRİŞ

Basit formülasyonu ve buna bağlı kullanışlı olması sayesinde, diferansiyel denklemlerde Sumudu dönüşümünü kullanmak kolaylık sağlamaktadır. Sumudu dönüşümü, mühendislik matematiği ve uygulamalı bilimlerde bulunan kompleks problemlerin çözümünde kullanılması avantaj sağlamaktadır. Sumudu dönüşümü kullanışlı olmasına rağmen, bu dönüşüm ile ilgili literatürde yalnızca birkaç teorik araştırma yapılmıştır. Literatürde bulunan mevcut dönüşüm teorisi kitaplarının çoğu, Sumudu dönüşümüne atıfta bulunmaz. Atıfta bulunulmamasının nedeni ise, 80'lerin sonu ve 90'ların başına kadar bu kavram ile ilgili hiçbir dönüşüm çalışmasının olmamasıdır (Watugala, 1993).

Sumudu dönüşümü 1993 yılında Watugala tarafından literatüre kazandırılarak bu yöntem kullanılmaya başlanmıştır. Ardından, 1994 yılında Weerakoon, Sumudu dönüşümünün kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir olduğunu gösteren bir çalışma yapmıştır (Weerakoon, 1994; Watugala, 1993). 1998 yılında ise Watugala, Sumudu dönüşümünün adi diferansiyel denklemlerin ve mühendislik kontrol problem denklemlerin çözümünde etkili bir şekilde kullanılabileceğini göstermiştir (Watugala, 1998). Watugala'nın çalışmasının ardından Weerakoon, Sumudu dönüşümü için kompleks bir ters çevirme formülü sunan çalışmalar yapmıştır (Weerakoon, 1998). Nispeten bu yeni dönüşüm, dinamik sistemlere vurgu yaparak, integral diferansiyel denklemleri çözmek için dönüşümün nasıl kullanılacağını göstermiştir (Asiru, 2001; 2002; 2003). Ayrıca Watugala , kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerine dikkat çekerek Sumudu dönüşümünü iki değişkene genişletilmesini sağlamıştır (Watugala, 2002).

Deakin, Sumudu dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasında herhangi bir farklılık olmadığını ileri sürmesine rağmen, Weerakoon 1997' de Sumudu dönüşümü ile Laplace dönüşümünün birbirinden farklı olduğunu belirtmiştir. 2003 yılında Belgacem ve arkadaşları, Sumudu dönüşümünün Laplace dönüşümü ile olan ilişkisini farklı teoremleri kullanarak, Sumudu dönüşününü daha geniş alanlara taşımışlardır. Bu çalışmalar sayesinde Sumudu dönüşümü farklı alanlarda kullanılarak literatüre Sumudu dönüşümünün farklı özellikleri katılmıştır. Bu çalışmaların ardından, 2007 yılında Tchuenche ve Mbare çift katlı Sumudu yöntemini ve farklı özelliklerini literatüre katmışlardır (Aydın, 2021). Ayrıca, Belgacem, bu dönüşümün konvülasyon tipi integral denklemlere olan uygulamalarını yapmıştır (Belgacem, 2003). Bir Laplace-Sumudu ikiliği vurgulanarak, bu yeni dönüşümün birçok özelliği verilmiştir. Özellikle bazı temel fonksiyonların dönüşümlerinin tablosu yapılmıştır. Laplace dönüşüm listesine benzer şekilde, kapsamlı bir Sumudu dönüşüm listesi verilmiştir (Spiegel, 1965).

Kesirli hesap , son zamanlarda güncel hayatta karşılaşılan problemleri daha iyi düzenlemek için kullanılan verimli ve uygun bir araçtır (Mirzazadeh, 2016) . Kesirli hesap, matematik, mühendislik, biyoloji, finans, ekonomi ve sosyal bilimlerin farklı alanlarında hafıza etkileri olan karmaşık dinamik sistemleri açıklamak için geniş bir uygulanabilir özelliğe sahiptir (Günerhan ve ark., 2020).

Kesirli(Fraksiyonel) türev ya da Kesirli(Fraksiyonel) integral, klasik anlamda yüksek mertebeden türev veya n-katlı integral tanımlarını genelleştiren kavramlardır. Grünwald, Letnikov, Riemann, Liouville, Caputo, Euler, Abel, Fourier, Kober, Erdelyi, Hadamard, Riesz ve Laplace gibi matematikçiler bu kavramlar hakkında çalışmalar yaparak, yeni gelişmelere katkı sağlamışlardır. Şimdiye kadar bu kavramlar, teorik ve uygulamalı bilimde bulunan fizik, matematik, kimya, ekonomi ve mühendislik dallarında da kullanılmıştır. Yapılan çalışmalar sayesinde bu kavramların farklı uygulama alanlarında da kullanılabilir bir duruma gelmesinden dolayı bu kavramlara olan ilgi artmıştır (Örcan, 2018).

Caputo kesirli türevi, lokal olmayan durumları, kesirli diferansiyel denklemlerle modellemek için en kullanışlı operatördür. Caputo kesirli türevi, türevlenebilir bir $f(t)$ fonksiyonu için, $f'(t)$ türevine uygulanan bir kesirli integral operatörü tarafından tanımlanır (Baleanu ve ark., 2020). Uyumlu türev, 2014' de lokal, limit tabanlı bir tanım olarak sunuldu (Khalil ve ark., 2014). İlk olarak uyumlu kesirli türev olarak tanıtıldı, ancak bu tanım kesirli türevler için istenen bazı özelliklere sahip değildi. Bu operatörün özellikleri ve uygulamaları Anderson ve ark. (2015) ve diğer çalışmalarda yoğun bir şekilde incelenmiştir. Caputo kesirli türevinin tanım formülünde $f'(t)$ ifadesinin yerine Anderson ve ark. (2015)' nın tanımladığı daha genel bir orantısal türev yazılarak yeni bir kesirli operatör tanımlanmıştır. Bu yeni operatör orantılı bir türevin Riemann-Liouville integrali olarak veya bazı önemli durumlarda Riemann-Liouville integrali ve Caputo türevinin lineer bir kombinasyonu olarakda yazılabilir (Baleanu ve ark., 2020).

Kesirli türev ve integralleri tanımlamanın bir çok yolu vardır. Riemann-Liouville, Caputo, Marchaud, Hilfer ve Atangana-Baleanu bunlardan birkaçıdır (Atangana ve ark., 2016; Fernandez ve ark., 2019; Samko ve ark., 1993). Bu çeşitli tanımlar yapılarına ve özelliklerine göre genel sınıflara ayrılır (Baleanu ve ark., 2019). Kesirli diferansiyel denklemler için ilgi çekici olan özellikle Caputo kesirli türevidir. Klasik Riemann-Liouville kesirli türevi ile karşılaştırıldığında, Caputo, kesirli diferansiyel denklemler için kullanıldığında daha doğal başlangıç koşulları gerektirir (Diethelm, 2010). Bu ikisi o kadar temeldirki, diğer birçok kesirli türevin, kesirli integral operatörlerinden üretildiklerinde, ”Riemann-Liouville” veya ”Caputo” tipi olduğu söylenir. Caputo türevi, bir fonksiyonun standart türevine kesirli integral uygulamasıyla tanımlanırken, Riemann-Liouville kesirli türevi, kesirli integralin standart bir türevi alınarak tanımlanır (Baleanu ve ark., 2020).

Kesirli integral ve kesirli türev kavramları birbirinden ayrı çekirdekler yardımıyla tanımlanmıştır. Örneğin, kuvvet ilkesi Caputo ve Riemann-Liouville, üstel fonksiyon Caputo ve Fabrizio, Mittag-Leffler fonksiyonu ise Atangana ve Baleanu tarafından kullanılarak yeni kesirli operatörler oluşturulmuştur (Caputo ve ark., 2015; Atangana ve ark., 2016).

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1. Bazı Tanım, Teorem ve Özel Fonksiyonlar

Tanım 2.1.1.

Bağımlı değişkenlerin bir fonksiyonu ile bu fonksiyonların bağımsız değişkenlere göre türevleri arasında verilen bağıntıya diferansiyel denklem denir. Diferansiyel bir denklem

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

şeklinde yazılır. Bir diferansiyel denklemde tek bir değişkenin türevleri bulunuyorsa bu denklem çeşidine adi diferansiyel denklem denir (Yaşar, 2005).

Tanım 2.1.2.

Diferansiyel bir denklemde en az iki tane bağımsız değişken ile en az bir tane bağımlı değişken olması ve denklemdeki bağımlı değişkenin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevleri varsa bu denkleme kısmi türevli diferansiyel denklem denir (Koca, 2013).

Tanım 2.1.3.

Diferansiyel bir denklemdeki bağımlı bir değişkenin diğer bağımsız bir değişkene göre kesirli mertebeden türevleri mevcutsa bu denklemlere kesirli mertebeden diferansiyel denklemler denir (Öztürk, 2022).

Tanım 2.1.4.

Bir h fonksiyonunun integral yardımıyla yeni bir fonksiyon şeklinde tanımlanmasına integral dönüşümü denir. h bir fonksiyon olmak üzere

$$H(m) = \int_{a_1}^{a_2} P(m,k)h(k)dk$$

fonksiyonu h fonksiyonunun bir dönüşümü olur. P fonksiyonu ise dönüşüm çekirdeği adını alır (Dernek, 2001).

Tanım 2.1.5.

f fonksiyonu $t > t_0$ için

$$|f(t)| \leq Me^{ct} \text{ veya } |e^{-ct}f(t)| \leq M$$

olacak biçimde $c, M > 0$ ve $t_0 > 0$ sabitleri var olduğunda c üstel mertebelidir denir (Çakmak, 2019).

Tanım 2.1.6.

$z_2 = h(z_1)$ bir kompleks fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyon z_3 noktası ve bu z_3 noktasının bir komşuluğundaki bütün noktalarda türevi varsa h fonksiyonuna z_3 noktasında bir analitik fonksiyon denir (Çakmak, 2019).

Tanım 2.1.7.

h bir fonksiyon olmak üzere, bu h fonksiyonu bir E bölgesinin bütün noktalarda analitik ise h fonksiyonuna E bölgesinde analitiktir denir. E bölgesinde analitik olan h fonksiyonuna ise holomorfik ya da regüler fonksiyon denir (Çakmak, 2019).

Tanım 2.1.8.

h bir fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyon bir E bölgesinde ve aynı zamanda bu E bölgesindeki kutuplar dışındaki her yerde analitik olursa bu h fonksiyonuna meromorfiktir denir (Çakmak, 2019).

Tanım 2.1.9.

h bir fonksiyon olmak üzere, bu h fonksiyonun bir E bölgesindeki aykırılıkları yalnızca kutup noktaları olursa bu h fonksiyonuna E bölgesinde bir meromorf fonksiyondur denir (Çakmak, 2019).

Tanım 2.1.10.

h bir kompleks fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyon bir $w = w_0$ noktasında analitik olmazsa bu $w = w_0$ noktasına h fonksiyonun tekilliği ya da tekil noktası denir (Çakmak, 2019).

Tanım 2.1.11.

$t > 0$ için tanımlanan $f(t)$ fonksiyonunun $L[f(t)]$ veya $F(s)$ ile gösterilen $s > 0$ için Laplace dönüşümü

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

ile tanımlanır (Dernek, 2001).

Tanım 2.1.12.

Türevlenebilir bir $f(t)$ fonksiyonunun, başlangıç noktası $t = 0$ olan ve $\varrho \in (0,1)$ aralığına göre Caputo türevinin tanımı

$${}_0^C D_t^\varrho f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho} d\tau$$

şeklindedir (Baleanu ve ark., 2020).

Tanım 2.1.13.

Türevlenebilir bir $f(t)$ fonksiyonu ve $\beta > 0$ için Riemann-Liouville integralinin tanımı

$${}_0^{RL} I_t^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\beta-1} d\tau$$

biçimindedir (Baleanu ve ark., 2020).

Tanım 2.1.14.

Mittag-Leffler fonksiyonu, e^z üstel fonksiyonunun genellemesi olup, kesirli mertebeye sahip diferansiyel ve integral denklemlerin çeşitli fiziksel, kimyasal, ekonomik matematiksel modellerinin çözümleri olarak ortaya çıkmaktadır.
$\varrho > 0$ ve $z \in C$ olmak üzere, bir parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E_\varrho(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\varrho n + 1)}$$

şeklindedir.

İki parametreli Mittag-Leffler fonksiyonu ise $\varrho > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere

$$E_{\varrho,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\varrho n + \beta)}$$

şeklindedir (Haubold ve ark., 2011).

Ayrıca

i) $E_1(z) = e^z = E_{1,1}(z)$

ii) $E_\varrho(z) = E_{\varrho,1}(z)$

özellikleri de mevcuttur (Rahaman ve ark., 2020).

İspat i)

$$\begin{aligned} E_1(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= e^z \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} E_{1,1}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= e^z \end{aligned}$$

İki eşitlikte elde edilenler e^z ifadesine eşit olduğu görülür.

İspat ii)

$$E_\varrho(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\varrho n + 1)}$$

ve

$$E_{\varrho,1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\varrho n + \beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\varrho n + 1)}$$

Bu durumda, $\beta = 1$ olma durumunda ϱ nun her değerinde bu iki Mittag-Leffler fonksiyonlarının birbirine eşit olduğu görülür.

Tanım 2.1.15.

Genel Mittag-Leffler fonksiyonu

$$E^{q}_{\varrho,\beta}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m (q)_m}{\Gamma(\varrho m + \beta) m!}, \qquad (z, \beta, q, \varrho \in C, Re(\varrho) > 0)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $(q)_m = q(q+1)\cdots(q+m-1)$ ifadesi Prabhakar tarafından oluşturulan Pochhammer sembolüdür. Ayrıca $(1)_m = m!$ ve $E^{1}_{\varrho,\beta}(z) = E_{\varrho,\beta}(z)$' dir (Akgül ve ark., 2021).

Tanım 2.1.16.

$Re(w) > 0$ yakınsak ise Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(w) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{w-1} dt$$

eşitliği ile tanımlanır (Podlubny, 1998).
Gamma fonksiyonu için aşağdaki bazı temel özellikler sağlanır.
$i)$ $\Gamma(w+1) = w\Gamma(w)$
$ii)$ $\Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2)$
$iii)$ $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, ..., \Gamma(w+1) = w!$
İspat i)

$$\begin{aligned} \Gamma(w+1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{w+1-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{w} dt \end{aligned}$$

burada kısmi integrasyon yöntemi kullanılırsa $t^w = u, \quad e^{-t}dt = v$ olsun. buradan $wt^{w-1}dt = du, \quad -e^{-t} = v$ olur. Bulunan eşitlikler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &= -t^w e^{-t}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t} w t^{w-1} dt \\ &= 0 + w\int_0^{\infty} e^{-t} t^{w-1} dt \\ &= w\Gamma(w) \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Tanım 2.1.17.

$Re(m) > 0$ ve $Re(w) > 0$ ise Beta fonksiyonu

$$\beta(m,w) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{w-1}dt$$

eşitliği ile tanımlanır (Samko ve ark., 1993).

Tanım 2.1.18.

$h(t)$ ve $p(t)$ iki fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonların konvolüsyonları

$$\begin{aligned}(h*p)(t) &= \int_0^t h(t-\tau)p(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t h(\tau)p(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Bu bağıntıya konvolüsyon teoremi denir (Kaya, 2019).

Teorem 2.1.19.

$s > a$ için f ve g fonksiyonlarının Laplace dönüşümleri var olsun. Bu fonksiyonlar

$$L[f*g] = L[f]L[g]$$

şeklinde bir bağıntıya sahiptir (Kaya, 2019).

İspat 2.1.19.

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonların Laplace dönüşümleri

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx$$

ve

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-sq}g(q)dq$$

şeklindedir. Bu iki ifade taraf tarafa çarpıldığında

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx\int_0^\infty e^{-sq}g(q)dq$$

biçiminde yazılır. Buradan

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(q)\int_0^\infty e^{-sq}e^{-sx}f(x)dxdq$$

$$= \int_0^\infty g(q) \int_0^\infty e^{-s(x+q)} f(x) dx dq$$

şekline getirilir. Burada $x = t-q$ dönüşümü uygulanıp her iki tarafın türevi alınırsa $dx = dt$ olur ve yerine yazılırsa

$$F(s)G(s) = \int_{t=0}^\infty g(q) \int_{q=0}^\infty e^{-st} f(t-q) dt dq$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_{t=0}^\infty e^{-st} \left(\int_{q=0}^\infty f(t-q) g(q) dq \right) dt \\ &= L\left[\int_{q=0}^\infty f(t-q) g(q) dq \right] \\ &= L[f * g] \end{aligned}$$

istenen ifade elde edilir (Kaya, 2019).

Tanım 2.1.20.

Bir $f(\kappa)$ fonksiyonu $\kappa = q$ de her mertebeden türevi var ve mevcut ise

$$f(\kappa) = f(q) + f'(q)(\kappa - q) + \frac{f''(q)}{2!}(\kappa - q)^2 + \ldots + \frac{f^w(q)}{w!}(\kappa - q)^w + \ldots$$

serine

$$f(\kappa) = \sum_{w=0}^\infty \frac{f^w(q)}{w!}(\kappa - q)^w$$

fonksiyonunun $\kappa = q$ noktasındaki Taylor serisi veya Taylor açılımı denir. Bazı fonksiyonların Taylor seri açılımı aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\kappa} &= 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^w \ldots = \sum_{w=0}^\infty \kappa^w, \quad |\kappa| < 1 \\ e^\kappa &= 1 + \kappa + \frac{\kappa^2}{2!} + \ldots + \frac{\kappa^w}{w!} + \ldots = \sum_{w=0}^\infty \frac{\kappa^w}{w!}, \quad |\kappa| < \infty \\ sin\kappa &= \kappa - \frac{\kappa^3}{3!} + \frac{\kappa^5}{5!} + \ldots + (-1)^w \frac{\kappa^{2w+1}}{(2w+1)!} + \ldots = \sum_{w=0}^\infty (-1)^w \frac{\kappa^{2w+1}}{(2w+1)!}, \quad |\kappa| < \infty \\ cos\kappa &= 1 - \frac{\kappa^2}{2!} + \frac{\kappa^4}{4!} + \ldots + (-1)^w \frac{\kappa^{2w}}{(2w)!} + \ldots = \sum_{w=0}^\infty (-1)^w \frac{\kappa^{2w}}{(2w)!}, \quad |\kappa| < \infty \end{aligned}$$

Özel olarak $q = 0$ alındığında bu Taylor serisi

$$f(\kappa) = \sum_{w=0}^\infty \frac{f^w(0)}{w!}(\kappa)^w$$

şeklinde olur. Bu yeni seriye ise Maclaurin serisi veya Maclaurin açılımı adı verilir (Kurulay, 2006).

Tanım 2.1.21.

$\sum_{w=0}^{\infty} c_k(x-q)^w$ şeklinde ifade edilen seriye Kuvvet serisi denir. Bu ifadede c_k ifadesi serinin katsayılarıdır. Kuvvet serisindeki terimler x içerdiğinden dolayı, bu serinin yakınsaklık veya ıraksaklık olma durumu terimlerde bulunan x değerlerine bağlı olarak farklılık gösterecektir.

Bu kuvvet serisinin $|x-q| < P$ eşitsizliği için yakınsak olacağı en büyük P sayısı kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapıdır. Bu seriyi yakınsak yapan değerlerinin meydana getirdiği aralığa ise yakınsaklık aralığı denir (Pekalp, 2019).

Tanım 2.1.22.

Prabhakar kesirli integrali, $\mu > 0$ ve $v > 0$ için

$$ {}_{a}^{P}I_{t}^{\mu,v,q,k} f(t) = \int_{a}^{t} (t-\tau)^{v-1} E_{\mu,v}^{q}\bigg(k(t-\tau)^{\mu}\bigg) f(\tau)d\tau. $$

şeklindedir (Prabhakar, 1971; Kilbas ve ark., 2004).

Tanım 2.1.23.

Heaviside genelleşmiş fonksiyonu, diğer bir ismi ile Birim Basamak fonksiyonu şu şekillerde tanımlanır (Yeliz, 2003).

$$ H(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad \text{veya} \qquad H(t-a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases} $$

Tanım 2.1.24.

Dirac Delta genelleşmiş fonksiyonu aşağıdaki şekillerde tanımlanır. Dirac Delta fonksiyonu $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$ koşulunu sağlar (Yeliz, 2003).

$$ \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \qquad \text{veya} \qquad \delta(t-a) = \begin{cases} \infty, & t = a \\ 0, & t \neq a \end{cases} $$

3. SUMUDU DÖNÜŞÜMÜ VE ÖZELLİKLERİ

3.1. Sumudu Dönüşümünün Tanımı ve Özellikleri

Tanım 3.1.1.

$$A = \left\{ f(t) \quad | \quad \exists Z, \tau_1, \tau_2 > 0, \quad |f(t)| < Ze^{|t|/\tau_i}, \quad t \in (-1)^i \times [0, \infty) \right\}$$

fonksiyonlar kümesi üzerinde Sumudu dönüşümü şu şekilde tanımlanır

$$G(\psi) = S[f(t)] = \int_0^\infty f(\psi t)e^{-t}dt, \quad \psi \in (-\tau_1, \tau_2)$$

Diğer dönüşümlere göre, Sumudu dönüşümü birim koruyan özelliklere sahip olup, frekans alanına başvurmadan problemleri çözmek için kullanılabilir. Aslında, kendisi lineer olan Sumudu dönüşümü lineer fonksiyonları korur ve bu nedenle özellikle birimleri değiştirmez (Watugala, 1998; Belgacem, 2003).

Ayrıca Sumudu dönüşümü farklı bir şekilde de yazılabilir. $k = \psi t, (t = k/\psi)$ değişken değiştirmesi yapılarak her iki tarafın türevi alındığında

$$dk = \psi dt$$

buradan da,

$$dt = \frac{dk}{\psi}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade yerine yazılırsa

$$G(\psi) = \frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{k}{\psi}} f(k)dk$$

şeklinde olur. Buradan $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$G(\psi) = S[f(t)] = \frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt$$

biçiminde de yazılabilir (Çakmak, 2019).

Örnek 3.1.1.

$f(t) = 1$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned}
S[f(t)] &= S[1] = \frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}}(1)dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\psi}\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\psi}\left(\frac{1}{-\frac{1}{\psi}}e^{-\frac{t}{\psi}}\Big|_0^R\right) \\
&= \lim_{R\to\infty}(1 - e^{-\frac{R}{\psi}}) = 1
\end{aligned}$$

elde edileceğinden dolayı $S[1] = 1$ sonucuna ulaşılır (Çakmak, 2019).

Teorem 3.1.2.

$f(t)$ fonksiyonu A kümesinde olmak üzere, $F(s)$ bu $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü, $G(\psi)$ ise Sumudu dönüşümü olmak üzere

$$G(\psi) = \frac{F(\frac{1}{\psi})}{\psi}$$

olacak şekilde bir bağıntı vardır (Çakmak, 2019).

İspat 3.1.2.

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

şeklindedir. Bu dönüşümde $s = \frac{1}{\psi}$ alınırsa

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{\psi}t}f(t)dt = F(\frac{1}{\psi})$$

sağ taraftaki integral kısmın $F(\frac{1}{\psi})$ olduğu açıktır. Sumudu dönüşümünden

$$\begin{aligned}
G(\psi) &= \frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\psi}F(\frac{1}{\psi}) \\
&= \frac{F(\frac{1}{\psi})}{\psi}
\end{aligned}$$

eşitliği gerçeklenir (Çakmak, 2019).

Teorem 3.1.3.

$x > 0$ ve $\psi = 1$ olmak üzere t^{x-1} fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$G(\psi) = S[t^{x-1}] = \Gamma(x)\psi^{x-1}$$

şeklindedir (Çakmak, 2019).

İspat 3.1.3.

$x > 0$ için Gamma fonksiyonunun tanımından yararlanılarak integral

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\\ &= \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t(1)}dt\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifade de $s = 1$ için integralin t^{x-1} fonksiyonunun Laplace dönüşümü olduğu görülür. t^{x-1} fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$L[t^{x-1}] = \Gamma(x)$$

şeklinde olur. Burada $\psi = 1$ ve $s = 1$ için Sumudu ve Laplace dönüşümlerinin eşitliği sağlanmalıdır. Bundan dolayı bu integralin her iki tarafı $\psi = 1$ olmak üzere ψ^{x-1} ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\psi^{x-1} &= \int_0^\infty t^{x-1}\psi^{x-1}e^{-t}dt\\ &= \int_0^\infty (\psi t)^{x-1}e^{-t}dt\\ &= S[t^{x-1}] = G(\psi)\end{aligned}$$

şeklinde olur. Sağ taraftaki ifadenin t^{x-1} fonksiyonunun Sumudu dönüşümü olduğu görülür (Çakmak, 2019).

Teorem 3.1.4.

Sumudu dönüşümü lineerdir. c_1, c_2 keyfi sabitler, f_1 ve f_2 Sumudu dönüşümü mevcut olan iki fonksiyon ise aşağıdaki ifade

$$S[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)] = c_1S[f_1(t)] + c_2S[f_2(t)]$$

şeklinde yazılabilir (Baydemir, 2014).

İspat 3.1.4.

İntegral işleminin temel özelliklerinden ve Sumudu dönüşümünün tanımından yararlanılarak

$$\begin{aligned} S[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)] &= \int_0^\infty e^{-t}[c_1f_1(\psi t)+c_2f_2(\psi t)]dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}c_1f_1(\psi t)dt + \int_0^\infty e^{-t}c_2f_2(\psi t)dt \\ &= c_1\int_0^\infty e^{-t}f_1(\psi t)dt + c_2\int_0^\infty e^{-t}f_2(\psi t)dt \\ &= c_1S[f_1(t)]+c_2S[f_2(t)] \end{aligned}$$

şeklinde Sumudu dönüşümünün lineerlik özelliği ispatlanmış olur (Baydemir, 2014).

Teorem 3.1.5.

Herhangi bir $f(t)$ fonksiyonunun Laplace ve Sumudu dönüşümleri sırasıyla $F(s)$ ve $G(\psi)$ olsun. Bu durumda

$$S[f(at)] = G(a\psi)$$

eşitliği yazılabilir (Çakmak, 2019).

İspat 3.1.5.

$S[f(at)] = \int_0^\infty f(\psi at)e^{-t}dt$ integralinde $\psi a = w$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned} S[f(at)] = \int_0^\infty f(wt)e^{-t}dt &= S[f(t)] \\ &= G(w) = G(a\psi) \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca Sumudu dönüşümünün Laplace dönüşümü ile olan ilişkisinden yararlanılarak da aynı sonuç elde edilebilir.

$$L[f(at)] = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt$$

burada $at = k$ değişken değiştirmesi yapılırsa $adt = dk$ olur. Yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty e^{-s\frac{k}{a}}f(k)\frac{dk}{a} \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}k}f(k)dk \\ &= \frac{1}{a}F(\frac{s}{a}) \end{aligned}$$

ve

$$S[f(at)] = \int_0^\infty e^{-t} f(\psi at)dt$$

burada $\psi at = k$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\psi adt = dk$ olup yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-\frac{k}{\psi a}} f(k)\frac{dk}{\psi a} \\
&= \frac{1}{\psi a}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{\psi a}k} f(k)dk \\
&= \frac{1}{\psi a}F(\frac{1}{\psi a}) \\
&= \frac{F(\frac{1}{\psi a})}{\frac{1}{\psi a}}
\end{aligned}$$

olur. Burada $a\psi = w$ dönüşümü yapılır ve Teorem (3.1.2.) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
S[f(at)] &= \frac{F(\frac{1}{w})}{w} \\
&= G(w) \\
&= G(a\psi)
\end{aligned}$$

eşitliği tekrar gerçeklenir (Çakmak, 2019).

Teorem 3.1.6.

$f(t)$ bir fonksiyon olmak üzere, $[0,\infty)$ aralığında $f(t)$ fonksiyonu hem sürekli, hem de üstel mertebeden, aynı zamanda $f'(t)$ türevi ise $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli olsun. $\frac{1}{\psi} > a$ için

$$S[f'(t)] = \frac{S[f(t)] - f(0)}{\psi}$$

şeklindedir (Çakmak, 2019).

İspat 3.1.6.

$$\begin{aligned}
S[f'(t)] &= \frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}} f'(t)dt \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{\psi}\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}} f'(t)dt
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$f'(t)$ fonksiyonu her sonlu $0 \le t \le R$ kapalı aralığında en çok sonlu sayıda süreksizlik

noktalarına sahiptir. Bu noktalar $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n < R$ olsun.
Bu takdirde

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{1}{\psi} e^{-\frac{t}{\psi}} f'(t)dt &= \lim_{\epsilon\to 0}\Bigg[\Bigg(\int_{0+\epsilon}^{t_1-\epsilon} \frac{1}{\psi} e^{-\frac{t}{\psi}} f'(t)dt\Bigg) + \int_{t_1+\epsilon}^{t_2-\epsilon} \frac{1}{\psi} e^{-\frac{t}{\psi}} f'(t)dt + ... \\ &+ \Bigg(\int_{t_n+\epsilon}^{R-\epsilon} \frac{1}{\psi} e^{-\frac{t}{\psi}} f'(t)dt\Bigg)\Bigg]\end{aligned}$$

yazılabilir. Sağ tarafta bulunan integrallerin hepsinde integrand sürekli olduğu için hepsine kısmi integrasyon yöntemi uygulanır. Burada eşitliğin sağ tarafı

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\psi}\Bigg[\Bigg(e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)\Big|_{0+\epsilon}^{t_1-\epsilon} + \frac{1}{\psi}\int_{0+\epsilon}^{t_1-\epsilon} e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt\Bigg) + ... + \Bigg(e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)\Big|_{t_n+\epsilon}^{R-\epsilon} + \frac{1}{\psi}\int_{t_n+\epsilon}^{R-\epsilon} e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt\Bigg)\Bigg]$$

şeklinde olur. Bu ifadede gerekli sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki ifade oluşur.

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\psi}\Bigg[- f(0) + \frac{1}{\psi}\Bigg[\int_{0+\epsilon}^{t_1-\epsilon} e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt + \int_{t_1+\epsilon}^{t_2-\epsilon} e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt + ... + \int_{t_n+\epsilon}^{R-\epsilon} e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt\Bigg] \\ &+ e^{-\frac{R}{\psi}} f(R)\Bigg]\end{aligned}$$

Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$= \frac{1}{\psi}\Bigg[- f(0) + \frac{1}{\psi}\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt + e^{-\frac{R}{\psi}} f(R)\Bigg]$$

şeklinde olur.
$f(t)$ fonksiyonu ϱ-üstel mertebeden olduğundan, $\frac{1}{\psi} > \varrho$ şartı için
$\lim_{R\to\infty} e^{-\frac{R}{\psi}} f(R) = 0$
ve
$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{\psi}\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt = S[f(t)]$
olur. Böylelikle

$$S[f'(t)] = \frac{S[f(t)] - f(0)}{\psi}$$

istenen eşitlik elde edilir (Çakmak, 2019).

Teorem 3.1.7.

Mittag-Leffler fonksiyonunun Sumudu dönüşümü aşağıdaki şekilde

$$S[E_\varrho(-\frac{\varrho}{1-\varrho}t^\varrho)] = \frac{1}{1+\frac{\varrho s^\varrho}{1-\varrho}}$$

ifade edilir. Bu teorem için

$$\begin{aligned} |s|^\varrho &< \frac{1-\varrho}{\varrho} \\ |s| &< (\frac{1-\varrho}{\varrho})^{\frac{1}{\varrho}} \\ a^2+b^2 &< (\frac{1-\varrho}{\varrho})^{\frac{2}{\varrho}} \end{aligned}$$

şartları sağlanır (Atangana ve ark., 2020).

İspat 3.1.7.

Sumudu dönüşümü ve Laplace dönüşümü arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$S[t^\varrho] = s^{2\varrho+1}L[t^\varrho]$$

Önce bu ilişkinin ispatını yapalım. t^ϱ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü alınır.

$$\begin{aligned} S[t^\varrho] &= \int_0^\infty e^{-t}(\psi t)^\varrho dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t}(\psi)^\varrho(t)^\varrho dt \\ &= \psi^\varrho \int_0^\infty e^{-t}t^\varrho dt \\ &= \psi^\varrho\Gamma(\varrho+1) \end{aligned}$$

Burada $\psi = s$ değişken değiştirmesi yaparak, son eşitlikten devam edilirse

$$\begin{aligned} &= \psi^\varrho\Gamma(\varrho+1) \\ S[t^\varrho] &= s^\varrho\Gamma(\varrho+1) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de t^ϱ fonksiyonunun Laplace dönüşümü bulunursa

$$L[t^\varrho] = \int_0^\infty e^{-st}t^\varrho dt$$

Bu eşitlikte $st = k$ değişken değiştirmesi yaparak her iki tarafın t ye göre türevi alınırsa $sdt = dk$ olur. Bunlar yerine yazılıp son eşitlikten devam edilirse

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty e^{-st} t^\varrho \\
&= \int_0^\infty e^{-k} (\frac{k}{s})^\varrho \frac{dk}{s} \\
&= \frac{1}{s^{\varrho+1}} \int_0^\infty e^{-k} k^\varrho dk \\
&= \frac{1}{s^{\varrho+1}} \Gamma(\varrho+1) \\
L[t^\varrho] &= s^{-\varrho-1}\Gamma(\varrho+1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulduğumuz bu iki dönüşümün sonucu birbirine oranlanırsa

$$\frac{S[t^\varrho]}{L[t^\varrho]} = \frac{s^\varrho \Gamma(\varrho+1)}{s^{-\varrho-1}\Gamma(\varrho+1)} = s^{2\varrho+1}$$

olur. Buradan da

$$S[t^\varrho] = s^{2\varrho+1} L[t^\varrho]$$

istenen ilişki elde edilir.

Laplace, Sumudu dönüşümünün özellikleri ve Taylor seri açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
S\left[E_\varrho(-\frac{\varrho}{1-\varrho}t^\varrho)\right] &= S\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{-\varrho t^\varrho}{1-\varrho})^k}{\Gamma(\varrho k+1)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{-\varrho}{1-\varrho})^k}{\Gamma(\varrho k+1)} \left(S[t^{\varrho k}]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{-\varrho}{1-\varrho})^k}{\Gamma(\varrho k+1)} \left(s^{2\varrho k+1}(L[t^{\varrho k}])\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{-\varrho}{1-\varrho})^k}{\Gamma(\varrho k+1)} \left(s^{2\varrho k}(s^{-1-\varrho k}\Gamma(\varrho k+1))\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{-\varrho}{1-\varrho})^k}{\Gamma(\varrho k+1)} \left(s^{\varrho k}\Gamma(\varrho k+1)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{-\varrho}{1-\varrho})^k \left(s^{\varrho k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-\varrho}{1-\varrho}s^\varrho\right)^k \\
&= \frac{1}{1+\frac{\varrho s^\varrho}{1-\varrho}}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir (Atangana ve ark., 2020).

3.2. Sumudu Dönüşümünün Varlığı

Teorem 3.2.1.

$f(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli, $t > t_0$ için ϱ-üstel mertebeden bir foksiyon olsun. $\frac{1}{\psi} > \varrho$ olmak üzere $S[f(t)]$ mevcuttur (Çakmak, 2019).

İspat 3.2.1.

Sumudu dönüşünün tanımı olan $\frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt$ integralinin $\frac{1}{\psi} > \varrho$ için yakınsak olduğunu gösterilir. Bu ifade önce

$$\frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt = \left(\frac{1}{\psi}\int_0^{t_0} e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt\right) + \left(\frac{1}{\psi}\int_{t_0}^\infty e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt\right)$$

şeklinde ayrılır. İfadenin $e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)$ olan kısmı $[0,t_0]$ aralığında parçalı sürekli olduğu için, ifadenin toplama şeklinde ayrılmış olan sağ tarafındaki $[t_0,\infty)$ aralığındaki integral hem mevcuttur hem de yakınsaktır. Buna göre sağ taraftaki bu integralin de $[t_0,\infty)$ aralığında yakınsak olduğu gösterilmelidir.

Karşılaştırma kuralı kullanılarak ve Tanım (2.1.5.) ϱ-üstel mertebeden $f(t)$ fonksiyonu, $t \geq t_0$ için $|f(t)| \leq Me^{\varrho t}$ şeklindedir. Her $t \geq t_0$ için

$$|e^{\frac{-t}{\psi}} f(t)| = e^{\frac{-t}{\psi}}|f(t)| \leq e^{\frac{-t}{\psi}} Me^{\varrho t} = Me^{\frac{-t}{\psi}} e^{\varrho t} = Me^{t(\varrho - \frac{1}{\psi})}$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafı integralde yerine yazılırsa $\frac{1}{\psi} > \varrho$ için

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^\infty Me^{t(\varrho-\frac{1}{\psi})}dt &= \int_{t_0}^\infty Me^{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)t}dt \\
&= M\int_{t_0}^\infty e^{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)t}dt \\
&= M\left(\frac{e^{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)t}}{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)}\right)\Bigg|_{t_0}^\infty \\
&= M\left[\left(\frac{e^{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)\infty}}{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)}\right) - \left(\frac{e^{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)t_0}}{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)}\right)\right] \\
&= M\left[0 - \left(\frac{e^{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)t_0}}{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)}\right)\right] \\
&= M\frac{e^{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)t_0}}{\frac{1}{\psi}-\varrho} < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. $t \geq t_0$ için

$$|e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)| \leq Me^{-\frac{t}{\psi}} e^{\varrho t} = Me^{-(\frac{1}{\psi}-\varrho)t}$$

olduğundan ve bundan daha büyük bir fonksiyon yakınsak olduğundan dolayı karşılaştırma kuralı gereği

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-\frac{t}{\psi}} f(t)dt$$

integrali $\frac{1}{\psi} > \varrho$ için yakınsaktır.
Böylelikle her iki integral var olduğundan $S[f(t)]$ mevcut olacaktır (Çakmak, 2019).

Teorem 3.2.2.

$$f(t) = \sum_{w=0}^{\infty} a_w t^w$$

şeklindeki kuvvet serisi fonksiyonuna Sumudu dönüşümü uygulandığında

$$G(\psi) = \sum_{w=0}^{\infty} w! a_w \psi^w$$

ifadesi elde edilir (Belgacem ve ark., 2005).

İspat 3.2.2.

$f(t)$ fonksiyonu Tanım (3.1.1.) içerisinde verilen A kümesinde olsun. Eğer $f(t)$ fonksiyonu

$$f(t) = \sum_{w=0}^{\infty} a_w t^w, \quad I \subset R$$

bir kuvvet serisi fonksiyonu ve Tanım (2.1.20.) de $q = 0$ için Taylor fonksiyonu şu şekilde verilir

$$f(t) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{f^{(w)}(0)}{w!} t^w$$

Bu Taylor fonksiyonunun Sumudu dönüşümü alınıp, Gamma fonksiyonundan yararlanarak

$$\begin{aligned} S[f(t)] &= S\left[\sum_{w=0}^{\infty} \frac{f^{(w)}(0)}{w!} t^w\right] \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{w=0}^{\infty} \frac{f^{(w)}(0)}{w!} (\psi t)^w\right) e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \left(\sum_{w=0}^{\infty} \frac{f^{(w)}(0)}{w!} \psi^w t^w\right) e^{-t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{f^{(w)}(0)}{w!}\psi^{w}\left(\int\limits_{0}^{\infty}t^{w}e^{-t}dt\right), \quad (Gamafonksiyonu = \Gamma(w) = \int_{0}^{\infty}e^{-t}t^{w-1}dt)\\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{f^{(w)}(0)}{w!}\psi^{w}\left(\Gamma(w+1)\right), \quad (\Gamma(w+1) = w!)\\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{f^{(w)}(0)}{w!}\psi^{w}(w!)\\
S[f(t)] &= \sum_{w=0}^{\infty}f^{(w)}(0)\psi^{w}
\end{aligned}$$

ifadesi oluşur. Şimdi $f^{w}(0)$ ifadesini elde etmek için $f(t) = \sum\limits_{w=0}^{\infty}a_w t^w$ kuvvet serisi fonksiyonunun n. mertebeden türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{w=0}^{\infty}a_w t^w\\
f'(t) &= \sum_{w=0}^{\infty}a_w w t^{w-1}\\
f''(t) &= \sum_{w=0}^{\infty}a_w w(w-1)t^{w-2}\\
&.\\
&.\\
&.\\
f^{w}(t) &= \sum_{w=0}^{\infty}a_w w(w-1)(w-2)...(w-w)t^{w-w} = \textstyle\sum_{w=0}^{\infty}a_w w!
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $t = 0$ alınırsa

$$f^{w}(0) = \sum_{w=0}^{\infty}a_w w!$$

şeklinde yazılır. Bulunan bu sonuç tekrar yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
S[f(t)] &= \sum_{w=0}^{\infty}f^{(w)}(0)\psi^{w}\\
S[f(t)] &= G(\psi) = \sum_{w=0}^{\infty}a_w w!\psi^{w}
\end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
S[(1+t)^m] &= S\left[\sum_{w=0}^{m}C_w^m t^w\right]\\
&= S\left[\sum_{w=0}^{m}\frac{m!}{w!(m-w)!}\psi^{w}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{w=0}^{m} \frac{m!}{(m-w)!}\psi^{w} \\
&= \sum_{w=0}^{m} P_{w}^{m}\psi^{w}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Dolayısıyla Sumudu dönüşümü C_w^m kombinasyonları, P_w^m permütasyonlara dönüştürür (Belgacem ve ark., 2005).

Ayrıca, $\psi = 0$ içeren bir aralıkta $S[f(t)]$ 'nin yakınsaması şartı aşağıdaki koşullar altında sağlanır

$$
f^{(w)}(0) \to 0, \quad w \to \infty, \quad \lim_{w\to\infty} \left| \frac{f^{(w+1)}(0)}{f^{(w)}(0)}\psi \right| < 1
$$

Bu, $S[f(t)]$ 'nin yakınsama yarıçapı r 'nin

$$
r = \lim_{w\to\infty} \left| \frac{f^{w}(0)}{f^{(w+1)}(0)} \right|
$$

ifadenin içindeki $f^{(w)}(0)$ dizisine bağlı olduğu anlamına gelmektedir (Belgacem ve ark., 2005).

Tablo 3.1. Bazı özel fonksiyonlar (Belgacem ve ark., 2005)

(1) Gama fonksiyonu	$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1}e^{-u}du, n > 0$
(2) Beta fonksiyonu	$B(m,w) = \int_0^1 u^{m-1}(1-u)^{w-1}du = \frac{\Gamma(m)\Gamma(w)}{\Gamma(m+w)}$
(3) Bessel fonksiyonu	$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)} \times 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - ...$
(4) Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu	$I_n(x) = i^{-n}J_n(ix) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)} \times 1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4(2n+2)} - ...$
(5) Hata fonksiyonu	$erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t e^{-u^2}du$
(6) Tamamlayıcı hata fonksiyonu	$erf(t) = 1 - erf(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_t^\infty e^{-u^2}du$
(7) Üstel integral	$Ei(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}du$
(8) Sinüs integral	$Si(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}du$
(9) Cosinüs integral	$Ci(t) = \int_0^t \frac{\cos u}{u}du$
(10) Fresnel sinüs integrali	$S(t) = \int_0^t \sin u^2 du$
(11) Fresnel cosinüs integrali	$C(t) = \int_0^t \cos u^2 du$
(12) Laguerre polinomları	$L_w(t) = \frac{e^t}{w!}\frac{d^w}{dt^w}(t^w e^{-t}), w = 0, 1, 2, ...$

Örneğin aşağıdaki fonksiyonu düşünelim.

$$f(t) = \begin{cases} ln(t+1), & t \in (-1, 1] \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

$f(t) = \sum\limits_{w=1}^{\infty} (-1)^{w-1} (t^w/w)$ olduğundan dolayı, $u = 0$ dışında ve yakınsama yarıçapı r

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{w-1}(w-1)!}{(-1)^w w!} \right| \\ &= \lim_{w\to\infty} \frac{1}{w} = 0 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$S[f(t)] = \sum_{w=1}^{\infty} (-1)^{w-1}(w-1)! u^w$$

olarak yazılır (Belgacem ve ark., 2005).

Teorem 3.2.3.

$G(\psi) = \sum\limits_{w=0}^{\infty} b_w \psi^w$ kuvvet serisinin ters Sumudu dönüşümü olan $f(t)$ fonksiyonu

$$S^{-1}[G(\psi)] = f(t) = \sum_{w=0}^{\infty} \left(\frac{1}{w!}\right) b_w t^w$$

şeklinde verilir (Belgacem ve ark., 2005).

3.3. Laplace-Sumudu Dualitesi ve Ters Sumudu Formülü

$Re(s) > 0$ için tanımlanan Laplace dönüşümü şu şekilde verilmektedir.

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Sumudu dönüşümünün integral tanımı dikkate alındığında, Sumudu ve Laplace dönüşümleri arasında aşağıdaki gibi ifade edilen bir dualite ilişkisi ortaya çıkmaktadır.

$$G\left(\frac{1}{s}\right) = sF(s)$$

ve

$$F\left(\frac{1}{\psi}\right) = \psi G(\psi)$$

Yukarıda verilen ilişkiler yardımıyla, Sumudu ve Laplace dönüşümlerinin $\delta(t)$ Dirac delta fonksiyonuna ve $H(t)$ Heaviside fonksiyonuna uygulandığında aşağıdaki ilişkiler elde edilir.

$$S[H(t)] = L[\delta(t)] = 1$$

ve

$$S[\delta(t)] = L[H(t)] = \frac{1}{\psi}$$

Önce Heaviside fonksiyonun Laplace dönüşümü bulunur. Laplace dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$L[H(t)] = \int_0^\infty e^{-\psi t} H(t) dt$$

yazılır. Heaviside fonksiyonu Tanım (2.1.23.) gereğince $t \geq 0$ aralığında $H(t) = 1$ dir. Buradan eşitliğe devam edilirse

$$\begin{aligned} L[H(t)] &= \int_0^\infty e^{-\psi t}(1) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\psi t} dt \\ &= \left. \frac{e^{-\psi t}}{-\psi} \right|_0^\infty \\ &= \frac{e^{-\psi(\infty)}}{-\psi} - \frac{e^{-\psi(0)}}{-\psi} \\ &= 0 + \frac{1}{\psi} \\ &= \frac{1}{\psi} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yine aynı fonksiyonun Sumudu dönüşümü bulunursa, Sumudu dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$S[H(t)] = \frac{1}{\psi} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}} H(t) dt$$

olarak yazılır. Heaviside fonksiyonu Tanım (2.1.23.) gereğince $t \geq 0$ aralığında $H(t) = 1$ dir. Buradan eşitliğe devam edilirse

$$\begin{aligned}
S[H(t)] &= \frac{1}{\psi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\psi}}(1)dt \\
&= \frac{1}{\psi}\int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\psi}}dt \\
&= \frac{1}{\psi}\left(\frac{e^{-\frac{t}{\psi}}}{-\frac{1}{\psi}}\bigg|_0^{\infty}\right) \\
&= -\left(e^{\frac{-\infty}{\psi}} - e^{-\frac{0}{\psi}}\right) \\
&= -(0-1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Şimdi de Dirac Delta fonksiyonunun Laplace ve Sumudu dönüşümleri bulunur. Birim Basamak fonksiyonu $u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ ve Laplace dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
L[\delta(t-a)] &= \int_0^{\infty} \delta(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)e^{-st}u(t)dt \\
&= e^{-sa}u(a) \\
&= \begin{cases} e^{-sa}, & a > 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

olur. Burada sağ limit alınırsa

$$L[\delta(t)] = \lim_{a \to o^+} L[\delta(t-a)] = 1$$

sonucu elde edilir (Anonymous, 2022). Benzer şekilde Dirac Delta fonksiyonunun Sumudu dönüşümü bulunur. Yine Birim Basamak fonksiyonu ve Sumudu dönüşümünün tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
S[\delta(t-a)] &= \frac{1}{\psi}\int_0^{\infty} \delta(t-a)e^{-\frac{t}{\psi}}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)e^{-\frac{t}{\psi}}u(t)dt \\
&= e^{-\frac{a}{\psi}}u(a)
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{a}{\psi}}, & a > 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

olur. Burada da sağ limit alınarak

$$S[\delta(t)] = \lim_{a \to o^+} S[\delta(t-a)] = 1$$

elde edilerek istenen eşitlik bulunmuş olur (Anonymous, 2022). Benzer şekilde, Sumudu ve Laplace dönüşümleri $sin(t)$ ve $cos(t)$ fonksiyonlarına da uygulanırsa

$$S[\cos(t)] = L[\sin(t)] = \frac{1}{1+\psi^2}$$

ve

$$S[\sin(t)] = L[\cos(t)] = \frac{\psi}{1+\psi^2}$$

sonuçları elde edilir (Belgacem ve ark., 2005).

Örnek 3.3.

$f(t) = cos(at)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümünü bulalım.

$$\begin{aligned} S[f(t)] = S[cos(at)] &= \frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}} cos(at)dt \\ &= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\left(\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}} cos(at)dt\right) \end{aligned}$$

Burada kısmi integrasyon yöntemi kullanılır. $cos(at) = p$ ve $e^{-\frac{t}{\psi}}dt = dv$ olsun. Burada $-asin(at) = dp$ ve $\frac{e^{-\frac{t}{\psi}}}{-\frac{1}{\psi}} = (-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}} = v$ olur. Bulunan bu ifadeler $pv - \int_0^R vdp$ olan kısmi integrasyon yönteminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\left(\left(cos(at)(-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}}\Big|_0^R\right) - \left(\int_0^R (-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}}(-a)sin(at)dt\right)\right) \\ &= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\left(\left(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} - cos(a0).(-\psi)e^{-\frac{0}{\psi}}\right) - \left(a\psi\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}} sin(at)dt\right)\right) \\ &= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\left(\left(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} - 1.(-\psi)1\right) - \left(a\psi\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}} sin(at)dt\right)\right) \\ &= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\left(\left(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + \psi\right) - \left(a\psi\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}} sin(at)dt\right)\right) \end{aligned}$$

Burada $\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}} sin(at)dt$ integralinde tekrar kısmi integrasyon yöntemi uygulanır. $sin(at) = k$ ve $e^{-\frac{t}{\psi}}dt = dm$ olsun. Buradan $acos(at) = dk$ ve $\frac{e^{-\frac{t}{\psi}}}{-\frac{1}{\psi}} = (-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}} = m$ olur. Bulunan ifadeler $km - \int_0^R mdk$ kısmi integrasyon yönteminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(\Big(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + \psi\Big) - a\psi\Big(sin(at)(-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}}\Bigg|_0^R \\
&- \int_0^R (-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}}acos(at)dt\Big)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(\Big(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + \psi\Big) - a\psi\Big(sin(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} - sin(a0)(-\psi)e^{-\frac{0}{\psi}} \\
&+ a\psi\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Big)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(\Big(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + \psi\Big) - a\psi\Big(sin(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} - 0 \\
&+ a\psi\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Big)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(\Big(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + \psi\Big) - a\psi\Big(sin(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} \\
&+ a\psi\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Big)\Bigg) \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(\Big(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + \psi\Big) - a\psi sin(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} \\
&- a^2\psi^2\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg) \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + \psi - a\psi sin(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}}\Bigg) \\
&- \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(a^2\psi^2\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg) \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(cos(a\infty)(-\psi)e^{-\frac{\infty}{\psi}} + \psi - a\psi sin(a\infty)(-\psi)e^{-\frac{\infty}{\psi}}\Bigg) \\
&- \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(a^2\psi^2\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg)
\end{aligned}
$$

$-1 \le cos(a\infty) \le 1$ ile $-1 \le sin(a\infty) \le 1$ fonksiyonları bir reel sayı ve $e^{-\frac{\infty}{\psi}} = \frac{1}{e^{\frac{\infty}{\psi}}} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(0 + \psi - 0\Bigg) \\
&- \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(a^2\psi^2\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(\psi\Bigg) \\
&- \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(a^2\psi^2\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg) \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg(\psi - a^2\psi^2\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg) \\
&= \lim_{R\to\infty}\Bigg(\frac{\psi}{\psi} - \frac{a^2\psi^2}{\psi}\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg) \\
&= \lim_{R\to\infty}\Bigg(1 - a^2\psi^2\Bigg[\frac{1}{\psi}\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg]\Bigg) \\
&= \lim_{R\to\infty}\Bigg(1 - a^2\psi^2 S[cos(at)]\Bigg) \\
S[cos(at)] &= 1 - a^2\psi^2 S[cos(at)]
\end{aligned}
$$

burada $S[cos(at)]$ yalnız bırakılırsa

$$
S[cos(at)] = \frac{1}{1 + a^2\psi^2}
$$

sonucu bulunur (Çakmak, 2019).

Örnek 3.4.

$f(t) = sin(at)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümünü bulalım.

$$
\begin{aligned}
S[f(t)] &= \frac{1}{\psi}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\psi}}sin(at)dt \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg[sin(at)(-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}}\Big|_0^R - \int_0^R(-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}}acos(at)dt\Bigg] \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg[sin(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + au\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}cos(at)dt\Bigg] \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg[sin(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + au(cos(at)(-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}}\Big|_0^R \\
&- \int_0^R(-\psi)e^{-\frac{t}{\psi}}(-a)sin(at)dt)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg[sin(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + au(cos(aR)(-\psi)e^{-\frac{R}{\psi}} + \psi \\
&- a\psi\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}sin(at)dt)\Bigg] \\
&= \frac{1}{\psi}\lim_{R\to\infty}\Bigg[a\psi^2 - a^2\psi^2\int_0^R e^{-\frac{t}{\psi}}sin(at)dt\Bigg] \\
&= au - a^2\psi^2 S[sin(at)]
\end{aligned}
$$

$$S[sin(at)] = \frac{a\psi}{1+a^2\psi^2}$$

şeklinde bulunur (Çakmak, 2019).

Teorem 3.3.1.

$f(t)$ fonksiyonunun türevinin ve integralinin Sumudu dönüşümleri

$$S[f^{'}(t)] = \frac{S[f(t)] - f(0)}{\psi}$$

ve

$$S\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \psi S[f(t)]$$

şeklindedir (Belgacem ve ark., 2005).

LSD ilişkisi aşağıdaki örnekle de gösterilebilir.

Örnek 3.3.1.

$$x(t) = 1 - e^{-t}$$

çözümünü elde etmek için aşağıdaki başlangıç değer problemini çözelim.

$$\frac{dx}{dt} + x = 1, \qquad x(0) = 0$$

Laplace dönüşümünden

$$F(s)(s+1) = 1/s$$

ve

$$F(s) = 1/s(1+s) = 1/s - 1/(1+s)$$

elde edilir. Sumudu dönüşümünün Teorem (3.3.1.) özelliği kullanılır.

$$[G(u)/\psi] + G(\psi) = 1$$

$G(\psi)$ Sumudu dönüşümü olmak üzere

$$\begin{aligned} G(\psi) &= S[x(t)] = \frac{\psi}{(\psi+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{1+\psi} \end{aligned}$$

Tablo (2)' deki (1) ve (5) dönüşümleri kullanılarak

$$x(t) = S^{-1}[G(\psi)]$$

ters Sumudu yöntemi yardımıyla istenen çözüm bulunur (Belgacem ve ark., 2005).

Teorem 3.3.2.

$f(t)$ fonksiyonu A kümesinde olmak üzere, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(\psi)$ olsun. $f(t)$ fonksiyonunun ters Sumudu dönüşüm formülü

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F\left(\frac{1}{s}\right)\frac{ds}{s}$$

şeklindedir. Bazı fonksiyonlara ters Sumudu dönüşüm formülünü uygulamak zor olduğundan, verilen tablolardan fonksiyonların ters Sumudu dönüşümlerinden yararlanılır (Öztürk, 2022).

Tablo 3.2. Fonksiyonların Sumudu dönüşümleri (Belgacem ve ark., 2005)

	$f(t)$	$G(u) = S(f(t))$
1	1	1
2	t	u
3	$\frac{t^{w-1}}{(w-1)!}, w = 1, 2, ...$	u^{w-1}
4	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}, n > 0$	u^{n-1}
5	e^{at}	$\frac{1}{1-au}$
6	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, n = 1, 2, ...$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
7	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$	$\frac{u^{n-1}}{(1-au)^n}$
8	$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
9	$\cos at$	$\frac{1}{1+a^2u^2}$
10	$\frac{e^{bt}\sin at}{a}$	$\frac{u}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
11	$e^{bt}\cos at$	$\frac{1-bu}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
12	$\frac{\sinh at}{a}$	$\frac{u}{1-a^2u^2}$
13	$\cosh at$	$\frac{1}{1-a^2u^2}$

14	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}, a \neq b$	$\frac{u}{(1-bu)(1-au)}$
15	$\frac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}, a \neq b$	$\frac{1}{(1-bu)(1-au)}$
16	$\frac{\sin at-at\cos at}{2a^3}$	$\frac{u^3}{(1+a^2u^2)^2}$
17	$\frac{t\sin at}{2a}$	$\frac{u^2}{(1+a^2u^2)^2}$
18	$\frac{\sin at+at\cos at}{2a}$	$\frac{u}{(1+a^2u^2)^2}$
19	$\cos at - \frac{1}{2}at\sin at$	$\frac{1}{(1+a^2u^2)^2}$
20	$t\cos at$	$\frac{u(1-a^2u^2)}{(1+a^2u^2)^2}$
21	$\frac{at\cosh at-\sinh at}{2a^3}$	$\frac{u^3}{(1-a^2u^2)^2}$
22	$\frac{t\sinh at}{2a}$	$\frac{u^2}{(1-a^2u^2)^2}$
23	$\frac{\sinh +at\cosh at}{2a}$	$\frac{u}{(1-a^2u^2)^2}$
24	$\cosh at + \frac{1}{2}at\sinh at$	$\frac{1}{(1-a^2u^2)^2}$
25	$t\cosh at$	$\frac{u(1+a^2u^2)}{(1-a^2u^2)^2}$

26	$\frac{(3-a^2t^2)\sin at-3at\cos at}{8a^5}$	$\frac{u^5}{(1+a^2u^2)^3}$
27	$\frac{t\sin at-at^2\cos at}{8a^3}$	$\frac{u^4}{(1+a^2u^2)^3}$
28	$\frac{(1+a^2t^2)\sin at-at\cos at}{8a^3}$	$\frac{u^3}{(1+a^2u^2)^3}$
29	$\frac{3t\sin at+at^2\cos at}{8a}$	$\frac{u^2}{(1+a^2u^2)^3}$
30	$\frac{\left(3-a^2t^2\right)\sin at+5at\cos at}{8a}$	$\frac{u}{(1+a^2u^2)^3}$
31	$\frac{(8-a^2t^2)\cos at-7at\sin at}{8}$	$\frac{1}{(1+a^2u^2)^3}$
32	$\frac{t^2\sin at}{2a}$	$\frac{u^3(3-a^2u^2)}{(1+a^2u^2)^3}$
33	$\frac{1}{2}t^2\cos at$	$\frac{u^2(1-3a^2u^2)}{(1+a^2u^2)^3}$
34	$\frac{1}{6}t^3\cos at$	$\frac{u^3(1-6a^2u^2+a^4u^4)}{(1+a^2u^2)^4}$
35	$\frac{t^3\sin at}{24a}$	$\frac{u^4\left(1-a^2u^2\right)}{(1+a^2u^2)^4}$
36	$\frac{(3+a^2t^2)\sinh at-3at\cosh at}{8a^5}$	$\frac{u^5}{(1-a^2u^2)^3}$
37	$\frac{at^2\cosh at-t\sinh at}{8a^3}$	$\frac{u^4}{(1-a^2u^2)^3}$

38	$\frac{at\cosh at+(a^2t^2-1)\sinh at}{8a^3}$	$\frac{u^3}{(1-a^2u^2)^3}$
39	$\frac{3t\sinh at+at^2\cosh at}{8a}$	$\frac{u^2}{(1-a^2u^2)^3}$
40	$\frac{(3+a^2t^2)\sinh at+5at\cosh at}{8a}$	$\frac{u}{(1-a^2u^2)^3}$
41	$\frac{(8+a^2t^2)\cosh at+7at\sin at}{8}$	$\frac{1}{(1-a^2u^2)^3}$
42	$\frac{t^2\sinh at}{2a}$	$\frac{u^3(3+a^2u^2)}{(1-a^2u^2)^3}$
43	$\frac{1}{2}t^2\cosh at$	$\frac{u^2(1+a^2u^2)}{(1-a^2u^2)^3}$
44	$\frac{1}{6}t^3\cosh at$	$\frac{u^3(1+6a^2u^2+a^4u^4)}{(1-a^2u^2)^4}$
45	$\frac{t^3\sinh at}{24a}$	$\frac{u^4(1+a^2u^2)}{(1-a^2u^2)^4}$
46	$\frac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}+e^{-3at/2}\right\}$	$\frac{u^2}{1+a^3u^3}$
47	$\frac{e^{at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}+\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$	$\frac{u}{1+a^3u^3}$
48	$\frac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)$	$\frac{1}{1+a^3u^3}$
49	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{-\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}+e^{3at/2}\right\}$	$\frac{u^2}{1-a^3u^3}$

50	$\frac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}+e^{3at/2}\right\}$	$\frac{u}{1-a^3u^3}$
51	$\frac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)$	$\frac{1}{1-a^3u^3}$
52	$\frac{1}{4a^3}\left(\sin at\cosh at-\cos at\sinh at\right)$	$\frac{u^3}{1+4a^4u^4}$
53	$\frac{1}{2a^2}\sin at\sinh at$	$\frac{u^2}{1+4a^4u^4}$
54	$\frac{1}{2a}\left(\sin at\cosh at+\cos at\sinh at\right)$	$\frac{u}{1+4a^4u^4}$
55	$\cos at\cosh at$	$\frac{1}{1+4a^4u^4}$
56	$\frac{1}{2a^3}\left(\sinh at-\sin at\right)$	$\frac{u^3}{1-a^4u^4}$
57	$\frac{1}{2a^2}\left(\cosh at-\cos at\right)$	$\frac{u^2}{1-a^4u^4}$
58	$\frac{1}{2a}\left(\sinh at+\sin at\right)$	$\frac{u}{1-a^4u^4}$
59	$\frac{1}{2}\left(\cosh at+\cos at\right)$	$\frac{1}{1-a^4u^4}$
60	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$	$\frac{1}{\sqrt{u}\left[\sqrt{1+au}+\sqrt{1+bu}\right]}$
61	$\frac{erf\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1+au}}$

62	$\frac{e^{at}erf\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$	$\frac{\sqrt{u}}{1-au}$
63	$e^{at}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-be^{b^2t}erfc\left(b\sqrt{t}\right)\right\}$	$\frac{1}{\sqrt{u}(\sqrt{1-au}+b)}$
64	$J_0\left(at\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1+a^2u^2}}$
65	$I_0\left(at\right)$	$\frac{1}{\sqrt{1-au^2}}$
66	$a^wJ_w(at); w>-1$	$\frac{\left(\sqrt{1+a^2u^2}-1\right)^w}{u^w\sqrt{1+au^2}}$
67	$a^wI_w(at); w>-1$	$\frac{\left(1-\sqrt{1-a^2u^2}\right)^w}{u^w\sqrt{1-a^2u^2}}$
68	$J_0\left(a\sqrt{t(t+2b)}\right)$	$\frac{e^{(b/u)}\left(1-\sqrt{1+a^2u^2}\right)}{\sqrt{1+a^2u^2}}$
69	$J_0\left(a\sqrt{t^2-b^2}\right), t>b$	$\frac{e^{(b/u)}\left(\sqrt{1+a^2u^2}\right)}{\sqrt{1+a^2u^2}}$
70	$erf\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$1-e^{-a/\sqrt{u}}$
71	$erfc\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$e^{-a/\sqrt{u}}$
72	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{t}$	$\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1+au}{1+bu}\right)$
73	$Ci\left(at\right)$	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2u^2}{a^2u^2}\right)$

74	$Ei\,(at)$	$\ln\left(\frac{1+au}{au}\right)$
75	$\ln t$	$-\gamma + \ln u$
76	$\frac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$	$\frac{1}{u}\ln\left(\frac{1+a^2u^2}{1+b^2u^2}\right)$
77	$\ln^2 t$	$\frac{\pi^2}{6} + (\gamma - \ln u)^2$
78	$lnt + \gamma$; γ= 0.5772156...	$-lnu$
79	$(lnt + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$; γ = 0.5772156...	$\ln^2 u$
80	$t^w \ln t; w > -1$	$u^w\left[\Gamma'(w+1) + \Gamma(w+1)\ln u\right]$
81	$\frac{\sin at}{t}$	$\frac{\tan^{-1} au}{u}$
82	$Si(at)$	$\tan^{-1} au$
83	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2\sqrt{at}}$	$\frac{1}{\sqrt{u}}e^{au}erfc\sqrt{au}$
84	$\frac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t^2}$	$\frac{1}{u}e^{1/4a^2u^2}erfc\left(\frac{1}{2au}\right)$
85	$erf(at)$	$e^{1/4a^2u^2}erfc\left(\frac{1}{2au}\right)$

86	$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\cos(a/u)\{\pi/2-Si(a/u)}{au}-\frac{\sin(a/u)Ci(a/u)}{au}$
87	$\frac{t}{t^2+a^2}$	$\frac{\sin(a/u)[(\pi/2)-Si(a/u)]}{u}+\frac{\cos(a/u)Ci(a/u)}{u}$
88	$\tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)$	$\cos\left(\frac{a}{u}\right)\left\{\frac{\pi}{2}-Si\left(\frac{a}{u}\right)\right\}-\sin\left(\frac{a}{u}\right)Ci\left(\frac{a}{u}\right)$
89	$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{t^2+a^2}{a^2}\right)$	$\sin\left(\frac{a}{u}\right)\left\{\frac{\pi}{2}-Si\left(\frac{a}{u}\right)\right\}+\cos\left(\frac{a}{u}\right)Ci\left(\frac{a}{u}\right)$
90	$\frac{1}{t}\ln\left(\frac{t^2+a^2}{a^2}\right)$	$\frac{[\pi/2-Si(a/u)]^2+Ci^2(a/u)}{u}$
91	$N(t)$	0
92	$\delta(t)$	$\frac{1}{u}$
93	$\delta(t-a)$	$\frac{e^{-a/u}}{u}$
94	$u(t-a)$	$e^{-a/u}$
95	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{w}\sin\frac{w\pi x}{a}\cos\frac{w\pi t}{a}$	$\frac{\sinh(x/u)}{\sinh(a/u)}$
96	$\frac{4}{\pi}\sum_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{2w-1}\sin\frac{(2w-1)\pi x}{2a}\sin\frac{(2w-1)\pi t}{2a}$	$\frac{\sinh(x/u)}{\cosh(a/u)}$
97	$\frac{t}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{w}\cos\frac{w\pi x}{a}\sin\frac{w\pi t}{a}$	$\frac{\cosh(x/u)}{\sinh(a/u)}$

98	$1+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{2w-1}\cos\frac{(2w-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2w-1)\pi t}{2a}$	$\frac{\cosh(x/u)}{\cosh(a/u)}$
99	$\frac{xt}{a}+\frac{2a}{\pi^2}\sum\limits_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{w^2}\sin\frac{w\pi x}{a}\sin\frac{w\pi t}{a}$	$\frac{u\sinh(x/u)}{\sinh(a/u)}$
100	$t+\frac{8a}{\pi^2}\sum\limits_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{(2w-1)^2}\cos\frac{(2w-1)\pi x}{2a}\sin\frac{(2w-1)\pi t}{2a}$	$\frac{u\cosh(x/u)}{\cosh(a/u)}$
101	$\frac{1}{2}(t^2+x^2-a^2)-\frac{16a^2}{\pi^3}\sum\limits_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{(2w-1)^3}\times\cos\frac{(2w-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2w-1)\pi t}{2a}$	$\frac{u^2\cosh(x/u)}{\cosh(a/u)}$
102	$\frac{2\pi}{a^2}\sum\limits_{w=1}^{\infty}(-1)^w ne^{-w^2\pi^2 t/a^2}\sin\frac{w\pi x}{a}$	$\frac{\sinh(x/\sqrt{u})}{u\sinh(a/\sqrt{u})}$
103	$\frac{\pi}{a^2}\sum\limits_{w=1}^{\infty}(-1)^w(2n-1)e^{-(2w-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\frac{(2w-1)\pi x}{2a}$	$\frac{\cosh(x/\sqrt{u})}{u\cosh(a/\sqrt{u})}$
104	$\frac{2}{a}\sum\limits_{w=1}^{\infty}(-1)^{w-1}e^{-(2w-1)^2\pi^2 t/4a^2}\sin\frac{(2w-1)\pi x}{2a}$	$\frac{\sinh(x/\sqrt{u})}{\sqrt{u}\cosh(a/\sqrt{u})}$
105	$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\sum\limits_{w=1}^{\infty}(-1)^w e^{-w^2\pi^2 t/a^2}\cos\frac{w\pi x}{a}$	$\frac{\cosh(x/\sqrt{u})}{\sqrt{u}\sinh(a/\sqrt{u})}$
106	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum\limits_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{w}e^{-w^2\pi^2 t/a^2}\sin\frac{w\pi x}{a}$	$\frac{\sinh(x/\sqrt{u})}{\sinh(a/\sqrt{u})}$
107	$1+\frac{4}{\pi}\sum\limits_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{2n-1}e^{-(2w-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos$	$\frac{(2w-1)\pi x}{2a}\frac{\cosh(x/\sqrt{u})}{\cosh(a/\sqrt{u})}$
108	$\frac{xt}{a}+\frac{2a^2}{\pi^3}\sum\limits_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{w^3}(1-e^{-w^2\pi^2 t/a^2})\sin\frac{w\pi x}{a}$	$\frac{u\sinh(x/\sqrt{u})}{\sinh(a/\sqrt{u})}$
109	$\frac{1}{2}(x^2-a^2)+t-\frac{16a^2}{\pi^3}\sum\limits_{w=1}^{\infty}\frac{(-1)^w}{(2w-1)^3}e^{-(2w-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\frac{(2w-1)\pi x}{2a}$	$\frac{u\cosh(x/\sqrt{u})}{\cosh(a/\sqrt{u})}$

110	$1-2\sum_{w=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_w^2 t/a^2}J_0(\lambda_w x/a)}{\lambda_w J_1(\lambda_w)}$	$\frac{J_0(ix/\sqrt{u})}{J_0(ia/\sqrt{u})}$
111	$\lambda_1,\lambda_2,...$ pozitif kökler olmak üzere $J_0(\lambda)=0$ $\frac{1}{4}(x^2-a^2)+t+2a^2\sum_{w=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_w^2 t/a^2}J_0(\lambda_w x/a)}{\lambda_w{}^3 J_1(\lambda_w)}$	$\frac{uJ_0(ix/\sqrt{u})}{J_0(ia/\sqrt{u})}$
112	$\lambda_1,\lambda_2,...$ pozitif kökler olmak üzere $J_0(\lambda)=0$ $\begin{cases} t, & 0\le t\le a \\ 2a-t, & a<t<2a; f(t+2a)=f(t) \\ 1, & 0<t<a \\ -1 & a<t<2a; f(t+2a)=f(t)\end{cases}$	$u\tanh\left(\frac{a}{2u}\right)\tanh\left(\frac{a}{2u}\right)$
113	$\left\lvert\sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)\right\rvert$	$\frac{\pi a u}{a^2+\pi^2u^2}\coth\left(\frac{a}{2u}\right)$
114	$\sin\left(\frac{\pi t}{a}\right)\ 0\le t\le a$	$\frac{\pi a u}{(a^2+\pi^2u^2)\left(1-e^{-a/u}\right)}$
115	$\begin{cases} 0, & a<t<2a; f(t+2a)=f(t) \\ t/a, & 0\le t\le a, f(t+a)=f(t)\end{cases}$	$\frac{u}{a}-\frac{e^{-a/u}}{1-e^{-a/u}}$
116	$\begin{cases} 0, & 0\le t<a; \\ 1, & 0\le t\le a, t\ge a; f(t+2a)=f(t)\end{cases}$	$e^{-a/u}$
117	$1; a\le t\le a+\varepsilon$	$e^{-a/u}\left(1-e^{-\varepsilon/u}\right)$
118	$n+1, na\le t<(n+1)a, n=0,1,2,...$	$\frac{1}{1-e^{-a/u}}$
119	$w^2, w\le t<w+1, w=0,1,2,..$	$\frac{e^{-1/u}+e^{-2/u}}{\left(1-e^{-1/u}\right)^2}$

120	$r^w, w \leq t < w+1, w = 0, 1, 2, \ldots$	$\frac{1-e^{-1/u}}{1-re^{-1/u}}$
121	$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi t}{a}\right), 0 \leq t \leq a & , 0 \leq t < a; \\ 0, & t > a \end{cases}$	$\frac{\pi a u\left(1+e^{-a/u}\right)}{a^2+\pi^2 u^2}$

3.4. Çoklu Türevler, İntegrasyonlar ve Konvolüsyonlar için Sumudu Teoremleri

Teorem 3.4.1.

$f(t)$, A kümesinde bir fonksiyon ve $G_w(\psi)$, $f(t)$ fonksiyonunun w.mertebeden türevin Sumudu dönüşümü olsun. $f(t)$ fonksiyonu için w. mertebeden türevi $f^{(w)}(t)$ ve $w \geq 1$ olmak üzere

$$G_w(\psi) = \frac{G(\psi)}{\psi^w} - \sum_{k=0}^{w-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\psi^{w-k}}$$

şeklindedir (Belgacem ve ark., 2005).

İspat 3.4.1.

Tümevarım yöntemi uygulanırsa

$w = 1$ için , Teorem (3.3.1.) , $G_w(\psi)$ ifadesini sağlamaktadır.

w için $G_w(\psi)$ ifadesinin geçerli olduğu varsayılıp $w+1$ için doğru olduğu gösterilir. Teorem (3.3.1.) kullanılarak

$$\begin{aligned}
G_{w+1}(\psi) &= S[(f^w(t))'] = \frac{S[f^w(t)] - f^w(0)}{\psi} \\
&= \frac{G_w(\psi) - f^{(w)}(0)}{\psi} \\
&= \frac{G(\psi)}{\psi^w} - \sum_{k=0}^{w-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\psi^{w-k}} \\
&= \frac{G(\psi)}{\psi^{w+1}} - \sum_{k=0}^{w} \frac{f^{(k)}(0)}{\psi^{w+1-k}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Fonksiyonun ikinci türevinin Sumudu dönüşümü olan $G_2(\psi)$

$$\begin{aligned}
G_2(\psi) &= S[f''(t)] \\
&= \frac{G(\psi) - f(0)}{\psi^2} - \frac{f'(0)}{\psi}
\end{aligned}$$

elde edilmektedir.

Örneğin, ikinci dereceden bir denklemin genel çözümü için

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + w^2 y(t) = 0$$

denkleminin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$S\left[\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right] + S[w^2 y(t)] = S[0]$$

$$\begin{aligned} S[y''] + S[w^2 y(t)] &= S[0] \\ \left(\frac{G(\psi) - y(0)}{\psi^2} - \frac{y'(0)}{\psi}\right) + w^2 G(\psi) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Burada $G(\psi)$ yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned} G(\psi) &= \frac{y(0) + \psi y'(0)}{1 + w^2\psi^2} \\ &= \frac{y(0)}{1 + w^2\psi^2} + \frac{\psi y'(0)}{1 + w^2\psi^2} \end{aligned}$$

olur. Son olarak her iki tarafa ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} S^{-1}[G(\psi)] &= S^{-1}\left[\frac{y(0)}{1 + w^2\psi^2} + \frac{\psi y'(0)}{1 + w^2\psi^2}\right] \\ &= y(0)S^{-1}[\frac{1}{1 + w^2\psi^2}] + y'(0)S^{-1}[\frac{\psi}{1 + w^2\psi^2}] \end{aligned}$$

Tablo (3.2.) de bulunan 8. ve 9. özellikler yardımıyla

$$y(t) = y(0)\cos(wt) + \frac{y'(0)}{w}\sin(wt)$$

çözümü elde edilir.
Bu teorem, Sumudu dönüşümünün, önceki örnekte olduğu gibi diferansiyel denklemleri çözmek için Laplace dönüşümü gibi kullanılabileceğini göstermektedir (Belgacem ve ark., 2005).

Teorem 3.4.2.

$f(t)$ fonksiyonu A kümesinde olmak üzere ve $G^w(\psi)$, $f(t)$ fonksiyonunun w. mertebeden türevinin Sumudu dönüşümü olsun. $f(t)$ fonksiyonuna w kez art arda integral uygulanırsa

$$Y^w(t) = \int \int_0^t \ldots \int_0^t f(\tau)(d\tau)^w$$

olur. Sonra $w \geq 1$ için

$$G^w(\psi) = S[Y^w(t)] = \psi^w G(\psi)$$

şeklindedir (Belgacem ve ark., 2005).

İspat 3.4.2.

Tümevarım yöntemi uygulanırsa

$w = 1$ için Teorem (3.3.1.), $G^w(\psi)$ ifadesini sağlamaktadır. w için $G^w(\psi)$ ifadesinin geçerli olduğunu varsayıp, $w+1$ için doğruluğu gösterilir. Teorem (3.3.1.) kullanılarak

$$\begin{aligned} G^{w+1}(\psi) &= S[Y^{w+1}(t)] = S\left[\int_0^t Y^w(\tau)d\tau\right] \\ &= \psi S[Y^w(t)] \\ &= \psi[\psi^w G(\psi)] \\ &= \psi^{w+1}G(\psi) \end{aligned}$$

$w+1$ için doğru olduğu görülür.

Ayrıca bu teorem, Sumudu konvolüsyonunu genelleştirmektedir.

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

konvolüsyon ifadesinin Sumudu dönüşümü

$$S[f * g](t) = \psi F(\psi)G(\psi)$$

şeklindedir (Belgacem ve ark., 2005).

Teorem 3.4.3.

$f(t), g(t), h(t), h_1(t), h_2(t), ...,$ ve $h_w(t)$ fonksiyonları A kümesinde olsun. Sumudu dönüşümleri ise $F(\psi), G(\psi), H(\psi), H_1(\psi), H_2(\psi), ...$ ve $H_w(t)$ olsun.

$$(f * g)^w(t) = \int \int_0^t ... \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)(d\tau)^w$$

ifadesinin Sumudu dönüşümü

$$S[(f * g)^w(t)] = \psi^w F(\psi)G(\psi)$$

şeklindedir.

Herhangi bir $w \geq 1$ tamsayısı için

$$S[(h_1 * h_2 * ... * h_w)(t)] = \psi^{w-1}H_1(\psi)H_2(\psi)...H_w(\psi)$$

şeklindedir. Özellikle, A kümesinde alınan f, g, h fonksiyonları olmak üzere, $(f * g * h)$ nın Sumudu dönüşümü

$$S[(f * g * h)(t)] = \psi^2 F(\psi) G(\psi) H(\psi)$$

biçimindedir (Belgacem ve ark., 2005).

Teorem 3.4.4.

$f(t)$ ve $g(t)$ birer fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonların sırasıyla Laplace dönüşümleri $F(s)$ ve $G(s)$, Sumudu dönüşümleri ise $M(\psi)$ ve $N(\psi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^\infty f(t) g(t-\tau) d\tau \\ S[(f * g)(t)] &= \psi M(\psi) N(\psi) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır (Çakmak, 2019).

İspat 3.4.4.

$f * g$ konvolüsyonunun Laplace dönüşümü Teorem (2.1.19.) gereğince

$$L[(f * g)(t)] = F(s)G(s) = F(\frac{1}{\psi})G(\frac{1}{\psi})$$

şeklinde olup, Sumudu dönüşümü ise Teorem (3.1.2.) gereğince

$$S[(f * g)(t)] = \frac{1}{\psi} L[(f * g)(t)]$$

şeklindedir. Teorem (3.1.2.) de

$$M(\psi) = \frac{F(\frac{1}{\psi})}{\psi}$$

ve

$$N(\psi) = \frac{G(\frac{1}{\psi})}{\psi}$$

olduğundan, $f * g$ konvolüsyon ifadesinin Sumudu dönüşümü

$$\begin{aligned} S[(f * g)(t)] &= \frac{1}{\psi} L[(f * g)(t)] \\ &= \frac{F(\frac{1}{\psi})G(\frac{1}{\psi})}{\psi} \\ &= \psi \frac{F(\frac{1}{\psi})}{\psi} \frac{G(\frac{1}{\psi})}{\psi} \end{aligned}$$

$$= \psi M(\psi)N(\psi)$$

şeklinde elde edilir (Çakmak, 2019).

3.5. Sumudu Çoklu Öteleme Teoremleri

Sumudu dönüşümü, çeşitli fonksiyonel işlemleri nasıl etkilediğine dair bazı kuralları ayırt etmek için etkili bir şekilde kullanılabilmektedir.

$$S\left[tf'(t)\right] = \psi \frac{dG(\psi)}{d\psi}$$

ve

$$S[te^t] = \frac{\psi}{(1-\psi)^2}$$

biçimindedir.

Sumudu dönüşümünün $t^w f(t)$ 'ye nasıl etki ettiği sorulabilir. Eğer $f(t) = \sum_{w=0}^{\infty} a_w t^w$ Teorem (3.2.2.) kuvvet serisi fonksiyonu şeklinde ise

$$\begin{aligned} S[tf(t)] &= \sum_{w=0}^{\infty}(w+1)!a_w\psi^{w+1} \\ &= \psi\sum_{w=0}^{\infty}(w+1)!a_w\psi^{w} \\ &= \psi\frac{d}{d\psi}\sum_{w=0}^{\infty}w!a_w\psi^{w+1} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu sonuç $w = 1$ bu sorunun cevap bulmasına yardımcı olmaktadır (Belgacem, 2003).

Teorem 3.5.1.

$f(t)$ fonksiyonu A kümesinde olmak üzere, $G(\psi)$, $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü olsun. $tf(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S[tf(t)] = \psi\frac{d(\psi G(\psi))}{d\psi} = \psi^2\frac{d}{d\psi}G(\psi) + \psi G(\psi)$$

şeklinde verilir (Belgacem ve ark., 2005; Çakmak, 2019).

İspat 3.5.1.

$$\begin{aligned} S[tf(t)] &= \int_0^{\infty}(\psi t)f(\psi t)e^{-t}dt \\ &= \psi\int_0^{\infty}(t)f(\psi t)e^{-t}dt \end{aligned}$$

Burada $tf(\psi t) = u$ ve $e^{-t}dt = dv$ olsun. Sonra $\frac{d}{dt}(tf(\psi t))dt = du$ ve $\frac{e^{-t}}{-1} = -e^{-t} = v$ olur. Bunlar $uv - \int_0^\infty vdu$ kısmi integrasyon yönteminde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&= \psi\left(\left(tf(\psi t)(-e^{-t})\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-t})\frac{d}{dt}(tf(\psi t))dt\right) \\
&= \psi\left(\left(\infty f(\psi\infty)(-e^{-\infty}) - 0f(\psi 0)(-e^{-0})\right) + \int_0^\infty (e^{-t})\frac{d}{dt}(tf(\psi t))dt\right) \\
&= \psi\left((0-0) + \int_0^\infty (e^{-t})\frac{d}{dt}(tf(\psi t))dt\right) \\
&= \psi\int_0^\infty \frac{d}{dt}(tf(\psi t))e^{-t}dt \\
&= \psi\int_0^\infty \left(f(\psi t) + \psi t f'(\psi t)\right)e^{-t}dt \\
&= \psi\left(\int_0^\infty e^{-t}f(\psi t)dt + \int_0^\infty (\psi t)f'(\psi t)e^{-t}dt\right) \\
&= \psi\left(G(\psi) + \psi\frac{d}{d\psi}G(\psi)\right) = \psi\left(\psi G(\psi)\right)' = \psi\frac{d[\psi G(\psi)]}{d\psi}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir (Belgacem ve ark., 2005).

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\frac{dG(\psi)}{d\psi} = G'(\psi) &= \frac{d}{d\psi}\int_0^\infty \frac{1}{\psi}e^{\frac{-t}{\psi}}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\psi}\frac{1}{\psi}e^{\frac{-t}{\psi}}f(t)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\psi^3}e^{\frac{-t}{\psi}}(tf(t))dt - \int_0^\infty \frac{1}{\psi^2}e^{\frac{-t}{\psi}}f(t)dt \\
&= \frac{1}{\psi^2}S[tf(t)] - \frac{1}{\psi}S[f(t)] \\
\frac{dG(\psi)}{d\psi} &= \frac{1}{\psi^2}S[tf(t)] - \frac{1}{\psi}G(\psi)
\end{aligned}
$$

yazılır. Bu ifadede $S[tf(t)]$ yalnız bırakılırsa

$$S[tf(t)] = \psi^2\frac{d}{d\psi}G(\psi) + \psi G(\psi)$$

istenen eşitlik elde edilir (Çakmak, 2019).

Teorem 3.5.2.

$S[f(t)] = G(\psi)$ olmak üzere

$$S[t^2 f(t)] = \psi^4 \frac{d^2}{d\psi^2} G(\psi) + 4\psi^3 \frac{d}{d\psi} G(\psi) + 2\psi^2 G(\psi)$$

şeklindedir (Çakmak, 2019).

İspat 3.5.2.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{d\psi^2} G(\psi) &= G''(\psi) = \frac{d}{d\psi^2} \int_0^\infty \frac{1}{\psi} e^{\frac{-t}{\psi}} f(t) dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \psi^2} \frac{1}{\psi} e^{\frac{-t}{\psi}} f(t) dt = \frac{d}{d\psi} G'(\psi) \\
&= \frac{d}{d\psi} \left(\int_0^\infty \frac{1}{\psi^3} e^{\frac{-t}{\psi}} (t f(t)) dt - \int_0^\infty \frac{1}{\psi^2} e^{\frac{-t}{\psi}} f(t) dt \right) \\
&= \left(\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\psi^3} e^{\frac{-t}{\psi}} \right) (t f(t)) dt \right) - \left(\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\psi^2} e^{\frac{-t}{\psi}} \right) f(t) dt \right) \\
&= \left(\int_0^\infty \frac{-3}{\psi^4} e^{\frac{-t}{\psi}} (t f(t)) dt + \int_0^\infty \frac{t}{\psi^5} e^{\frac{-t}{\psi}} (t f(t)) dt \right) + \left(\int_0^\infty \frac{2}{\psi^3} e^{\frac{-t}{\psi}} f(t) dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^\infty \frac{t}{\psi^4} e^{\frac{-t}{\psi}} (t f(t)) dt \right) \\
&= \frac{2}{\psi^2} S[f(t)] - \frac{4}{\psi^3} S[t f(t)] + \frac{1}{\psi^4} S[t^2 f(t)]
\end{aligned}$$

Önceki teoremde $S[t f(t)]$' nin bulunan eşiti yazılırsa

$$\frac{d^2}{d\psi^2} G(\psi) = \frac{2}{\psi^2} S[f(t)] - \frac{4}{\psi^3} (\psi^2 \frac{d}{d\psi} G(\psi) + \psi G(\psi)) + \frac{1}{\psi^4} S[t^2 f(t)],$$

elde edilir. Böylelikle

$$\frac{d^2}{d\psi^2} G(\psi) = \frac{2}{\psi^2} G(\psi) - \frac{4}{\psi} G(\psi) - \frac{4}{\psi^2} G(\psi) + \frac{1}{\psi^4} S[t^2 f(t)]$$

ifadesi oluşur. Burada $S[t^2 f(t)]$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$S[t^2 f(t)] = \psi^4 \frac{d^2}{d\psi^2} G(\psi) + 4\psi^3 \frac{d}{d\psi} G(\psi) + 2\psi^2 G(\psi)$$

istenen sonuç elde edilir (Çakmak, 2019).

Tablo 3.3. Sumudu dönüşümünün özellikleri (Belgacem ve ark., 2005).

Formül	Açıklama
$G(u) = S\left[h(t)\right] = \int_0^\infty h(ut)e^{-t}dt, -\tau_1 < u < \tau_2$	$f \in A$ için Sumudu dönüşümünün tanımı
$G(u) = \frac{F(1/u)}{u}, F(s) = \frac{G(1/s)}{s}$	Laplace dönüşümüyle dualitesi
$S\left[ah(t) + bp(t)\right] = aS\left[h(t)\right] + bS\left[p(t)\right]$	Lineerlik özelliği
$G_1(u) = S\left[f'(t)\right] = \frac{G(u)-f(0)}{u} = \frac{G(u)}{u} - \frac{f(0)}{u}$	
$G_2(u) = S\left[f''(t)\right] = \frac{G(u)}{u^2} - \frac{f(0)}{u^2} - \frac{f'(0)}{u}$	Fonksiyon türevlerinin Sumudu dönüşümleri
$G_n(u) = S\left[f^{(n)}(t)\right] = \frac{G(u)}{u^n} - \frac{f(0)}{u^n} - \ldots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{u}$	
$S\left[\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = uG(u)$	Bir fonksiyonun integralinin Sumudu dönüşümü
$S\left[f(at)\right] = G(au)$	Birinci dereceden koruma teoremi
$S\left[t\frac{df(t)}{dt}\right] = u\frac{dG(u)}{du}$	İkinci dereceden koruma teoremi
$S\left[e^{at}f(t)\right] = \frac{1}{1-au}G\left(\frac{u}{1-au}\right)$	Birinci öteleme teoremi
$S\left[f(t-a)H(t-a)\right] = e^{-a/u}G(u)$	İkinci öteleme teoremi
$\lim\limits_{u\to 0} G(u) = \lim\limits_{t\to 0} f(t)$	Başlangıç değer teoremi
$S[h * p] = uS[h(t)]S[p(t)]$	Konvolüsyon Sumudu dönüşümü
$(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$	Konvolüsyon teoremi

Teorem 3.5.3.

A kümesinde alınan $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(\psi)$ ve $G(\psi)$ fonksiyonunun $k.$ mertebeden türevi $G_k(\psi)$ olsun. $t^w f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $a_o^w = w!,\quad a_w^w = 1,\quad a_1^w = w!w,\quad a_{w-1}^w = w^2$ ve $k = 2, 3, ..., w-2$ için

$$a_k^w = a_{k-1}^{w-1} + (w+k)a_k^{w-1}$$

olmak üzere

$$S[t^w f(t)] = \psi^w \sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi)$$

şeklinde verilir (Belgacem ve ark., 2005).

İspat 3.5.3.

$f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(\psi)$ olsun ve $a_0^0 = 1$ 'dir. Ayrıca, Teorem (3.5.1.) $tf(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümünün $\psi G + \psi^2 G_1$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $a_0^1 = 1$ ve $a_1^1 = 1$ dir. Tümevarım yöntemini gerçekleştirmek için a_k^w ifadesinde w'yi doğru kabul edip, $w+1$'in doğru olduğu gösterilir. $Y(\psi) = S[t^w f(t)]$ olarak yazılırsa

$$\begin{aligned} S[t^{w+1} f(t)] &= S[t(t^w f(t))] \\ &= \psi \frac{d(\psi Y(\psi))}{d\psi} \end{aligned}$$

burada Teorem (3.5.1.) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= \psi(\psi Y(\psi))' \\
&= \psi(\psi' Y(\psi) + \psi Y'(\psi)) \\
&= \psi(1Y(\psi) + \psi Y'(\psi)) \\
&= \psi(Y(\psi) + \psi Y'(\psi)) \\
&= \psi(Y(\psi) + \psi \frac{dY(\psi)}{d\psi}) \\
&= \psi Y(\psi) + \psi^2 \frac{dY(\psi)}{d\psi} \\
&= \psi Y(\psi) + \psi^2 Y_1(\psi) \\
&= \psi S[t^w f(t)] + \psi^2 \frac{dS[t^w f(t)]}{d\psi} \\
&= \psi\left(\psi^w \sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi)\right) + \psi^2\left(\frac{d}{d\psi}\psi^w \sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^{w+k} G_k(\psi)\right) \\
&= \psi^{w+1} \sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^2 \frac{d}{d\psi} \sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^{w+k} G_k(\psi) \\
&= \psi^{w+1} \sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^2\left(\sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^{w+k} G_k(\psi)\right)'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^2\left(\sum_{k=0}^{w} a_k^w [(\psi^{w+k})' G_k(\psi) + \psi^{w+k}(G_k)'(\psi)]\right)\\
&= \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^2\left(\sum_{k=0}^{w} a_k^w [(w+k)\psi^{w+k-1} G_k(\psi) + \psi^{w+k} G_{k+1}(\psi)]\right)\\
&= \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^{w+1}\left(\sum_{k=0}^{w} a_k^w [(w+k)\psi^{k} G_k(\psi) + \psi^{k+1} G_{k+1}(\psi)]\right)\\
&= \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} a_k^w [(w+k)\psi^{k} G_k(\psi)] + \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w}[a_k^w \psi^{k+1} G_{k+1}(\psi)]\\
&= \left(\psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} a_k^w [(w+k)\psi^{k} G_k(\psi)]\right) + \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w}[a_k^w \psi^{k+1} G_{k+1}(\psi)]\\
&= \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} (w+k+1) a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w} a_k^w \psi^{k+1} G_{k+1}(\psi)
\end{aligned}$$

$k < 0$ yada $k > w$, $a_k^w = 0$ için denklem şu şekilde yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned}
S[t^{w+1} f(t)] &= \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w+1} (w+k+1) a_k^w \psi^k G_k(\psi) + \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w+1} a_{k-1}^w \psi^k G_k(\psi)\\
&= \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w+1} [(w+k+1) a_k^w + a_{k-1}^w]\psi^k G_k(\psi)\\
&= \psi^{w+1}\sum_{k=0}^{w+1} [a_k^{w+1}]\psi^k G_k(\psi)
\end{aligned}$$

Özellikle a_k^w ifadesinde, $a_0^1 = 1 = 1^2$ için , a_{w-1}^w katsayısı

$$\begin{aligned}
a_{w-1}^w &= a_{w-2}^{w-1} + (2w-1) a_{w-1}^{w-1}\\
&= a_{w-2}^{w-1} + (2w-1)
\end{aligned}$$

tamsayıların ardışık kareleriyle aynı olan denklem

$$w^2 = (w-1)^2 + (2w-1)$$

şeklindedir.

Teorem (3.5.3.) keyfi bir w pozitif tamsayı için genelleştirir ve $w = 1$ ve $w = 2$ durumlarını sağlar (Asiru, 2001). Ayrıca, Teorem (3.5.3.) herhangi bir negatif olmayan tam sayı çifti (w, k) için a_k^w katsayıları için bir tekrarlama ilişkisi kurmaktadır. Aşağıda verilen tablo, $w = 0, 1, 2, 3, 4$ ve 5 için bu değerlerin tüm katsayılarını göstermektedir.

w/k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	2	4	1			
3	6	18	9	1		
4	24	96	72	16	1	
5	120	600	600	200	25	1

a_k^w ifadesinde a_k^6 katsayılarını elde etmek için $w = 6$ için son sıradaki tablo kullanılır.

$$\begin{aligned}
a_0^6 &= 720 \\
a_1^6 &= 4320 \\
a_2^6 &= 5400 \\
a_3^6 &= 2400 \\
a_4^6 &= 450 \\
a_5^6 &= 6^2 = 36 \\
a_6^6 &= 1
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir (Belgacem ve ark., 2005).

Teorem 3.5.4.

$f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $G(\psi)$, $f(t)$ fonksiyonunun $n.$ mertebeden türevi $f^{(n)}(t)$ ve $G(\psi)$ nun $n.$ mertebeden türevi $G_n(\psi)$ olsun. $t^n f^{(n)}(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$S[t^n f^{(n)}(t)] = \psi^n G_n(\psi)$$

şeklinde verilir (Belgacem ve ark., 2005).

İspat 3.5.4.

$f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü

$$G(\psi) = \int_0^\infty f(\psi t)e^{-t}dt$$

biçimindedir. Bu nedenle, $n = 1, 2, 3, \cdots$ için aşağıdaki ifade mevcuttur.

$$\begin{aligned}
G_n(\psi) &= \int_0^\infty \frac{d^n}{d\psi^n} f(\psi t)e^{-t}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d^n}{d\psi^n}(\psi t) f^{(n)}(\psi t)dt \\
&= \int_0^\infty t^n f^{(n)}(\psi t)e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{\psi^n}\int_0^\infty (\psi t)^n f^{(n)}(\psi t)e^{-t}dt \\
&= \frac{1}{\psi^n} S[t^n f^{(n)}(t)]
\end{aligned}$$

denklemin her iki tarafı ψ^n ile çarpılarak istenen eşitlik elde edilir.

Şimdi, düşük n değerleri için, teorem (3.5.3.) ve teorem (3.5.4.)' ün birleştirilmesi ile aşağıdaki sonuçlar verilebilir (Belgacem ve ark., 2005).

Sonuç 3.5.5.

$G(\psi) = S[f(t)]$ fonksiyonunun $n.$ mertebeden türevi $G_n(\psi)$ olsun

$$\begin{aligned}
S[t^2 f'(t)] &= \psi^2[2G_1(\psi) + \psi G_2(\psi)] \\
S[t^3 f'(t)] &= \psi^3[6G_1(\psi) + 6\psi G_2(\psi) + \psi^2 G_3(\psi)] \\
S[t^4 f''(t)] &= \psi^4[12G_2(\psi) + 8\psi G_3(\psi) + \psi^2 G_4(\psi)]
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir (Belgacem ve ark., 2005).

4. ORANTILI CAPUTO TÜREVİ

”Orantılı” veya ”Uyumlu” olarak adlandırılan genel kesirli olmayan diferansiyel operatörü

$$^{P}D_{\varrho}f(t) = K_1(\varrho,t)f(t) + K_0(\varrho,t)f'(t)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Anderson ve ark., 2015). Burada K_0 ve K_1 ifadeleri, tüm $t \in R$ için aşağıdaki koşulları sağlayan t değişkeninin ve $\varrho \in [0,1]$ parametresinin fonksiyonlarıdır.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varrho\to 0^+} K_0(\varrho,t) = 0; \quad \lim_{\varrho\to 1^-} K_0(\varrho,t) = 1; \quad K_0(\varrho,t) \neq 0, \quad \varrho \in (0,1];\\
&\lim_{\varrho\to 0^+} K_1(\varrho,t) = 1; \quad \lim_{\varrho\to 1^-} K_1(\varrho,t) = 0; \quad K_1(\varrho,t) \neq 0, \quad \varrho \in [0,1).
\end{aligned}$$

Bu, standart türev operatörü $Df(t) = f'(t)$ nin kontrol teorisinde kullanışlı olan keyfi ϱ parametresine bağlı bir genellemesi olarak görülebilir (Anderson ve ark., 2015).
K_0 ve K_1 fonksiyonlarının sadece ϱ ya bağlı olarak t ye göre sabit olduğu, ”CP” olarak gösterilen ”sabit orantılı” türev operatörü

$$^{CP}D_{\varrho}f(t) = K_1(\varrho)f(t) + K_0(\varrho)f'(t)$$

şeklindedir (Baleanu ve ark., 2020).

Bu alt başlıkta Caputo türevi, Riemann-Liouville operatörlerinin tanımı, ikisi arasındaki ilişkiler ve bu operatörlerin Sumudu ve Laplace dönüşümleri verilmiştir.

4.1. Kesirli Türev Operatörlerinin Bazı Özellikleri

Teorem 4.1.1.

Caputo türevinin tanımı kullanılarak

$${}_{0}^{C}D_{t}^{\varrho}f(t) = {}_{0}^{RL}I_{t}^{1-\varrho}f'(t)$$

ifadesi elde edilir (Baleanu ve ark., 2020).

İspat 4.1.1.

Türevlenebilir bir $f(t)$ fonksiyonunun $t = 0$ başlangıç değeri ile $\varrho \in (0,1)$ aralığı için kesirli Caputo türevinin tanımı aşağıdaki şekildedir (Baleanu ve ark., 2020)

$${}_{0}^{C}D_{t}^{\varrho}f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau$$

İntegrallenebilir bir $f(t)$ fonksiyonun $\beta > 0$ için kesirli Riemann-Liouville integralinin tanımı aşağıdaki şekildedir (Baleanu ve ark., 2020)

$$
{}_0^{RL}I_t^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\beta-1} d\tau
$$

Caputo türevinin tanımında $1-\varrho = \beta$ değişken değiştirmesi yapılarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$
\begin{aligned}
{}_0^{C}D_t^{\varrho} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{\beta-1} d\tau \\
&= {}_0^{RL}I_t^{\beta} f'(t) \\
&= {}_0^{RL}I_t^{1-\varrho} f'(t)
\end{aligned}
$$

Bu ifadede, eşitliğin sol tarafı Caputo türevinin tanımı, sağ tarafı ise Riemann-Liouville integralinin tanımı olmaktadır. Buradan da Caputo türevi ile Riemann-Liouville integrali arasındaki ilişki

$$
{}_0^{C}D_t^{\varrho} f(t) = {}_0^{RL}I_t^{1-\varrho} f'(t)
$$

şeklinde ifade edilerek ispat tamamlanmış olur.
Caputo türevinin diğer bilinen özellikleri aşağıda verilmiştir (Baleanu ve ark., 2020).

$$
\begin{aligned}
{}_0^{RL}I_t^{\varrho}\, {}_0^{C}D_t^{\varrho} f(t) &= f(t) - f(0); \\
{}_0^{C}D_t^{\varrho}\, {}_0^{RL}I_t^{\varrho} f(t) &= f(t) - \frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)} \lim_{t\to 0} {}_0^{RL}I_t^{\varrho} f(0); \\
L[{}_0^{C}D_t^{\varrho} f(t)] &= s^{\varrho} L[f(t)] - s^{\varrho-1} f(0)
\end{aligned}
$$

Burada L, t' nin bir fonksiyonundan, s' nin bir fonksiyonuna dönüştüren Laplace dönüşümünü ifade eder (Baleanu ve ark., 2020).

Teorem 4.1.2.

Bir $f(t)$ fonksiyonunun kesirli Caputo türevinin Riemann-Liouville integrali

$$ {}_{0}^{RL}I_{t}^{\varrho}{}_{0}^{C}D_{t}^{\varrho}f(t) = f(t)-f(0) $$

şeklindedir (Baleanu ve ark., 2020).

İspat 4.1.2.

${}_{0}^{C}D_{t}^{\varrho}f(t)=v(t)$ olsun.

$$ \begin{aligned} {}_{0}^{RL}I_{t}^{\varrho}{}_{0}^{C}D_{t}^{\varrho}f(t) &= {}_{0}^{RL}I_{t}^{\varrho}v(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_{0}^{t}v(\tau)(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_{0}^{t}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_{0}^{\tau}f'(s)(\tau-s)^{-\varrho}ds\right)(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau \end{aligned} $$

buradaki t ve τ sınırları

$$ 0\le s\le\tau $$
$$ 0\le\tau\le t $$

şeklindedir. Bu sınırlar

$$ 0\le s\le t $$
$$ s\le\tau\le t $$

yeni sınır aralıkları biçimine dönüşür. Bu yeni sınırlar yerine yazılır ve devam edilirse

$$ =\frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_{0}^{t}f'(s)\int_{s}^{t}(\tau-s)^{-\varrho}(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau ds $$

şeklinde olur. Burada $\int_{s}^{t}(\tau-s)^{-\varrho}(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau$ integralini Beta fonksiyonuna benzetmek için değişken değiştirmesi yapılır. $\tau = mk+n$ şeklinde lineer olsun. Bu bağıntıda Beta fonksiyonun sınırları olan $k=0$ ve $k=1$ ile $s\le\tau\le t$ aralığının sınırları olan $\tau=s$ ve $\tau=t$ için bağıntıda yerine yazılırsa

$k=0$ ve $\tau=s$ için $s=m.0+n$, buradan $s=n$ olur.

$k=1$ ve $\tau=t$ için $t=m.1+n$, buradan $t=m+n$ ve $m=t-s$ olur.

Bulunan ifadeler lineer bağıntıda yerine yazılırsa $\tau=(t-s)k+s$ ve $\tau-s=(t-s)k\ (*)$ elde edilir. Bu bağıntının her iki tarafın k değişkenine göre türevi alınırsa $d\tau=(t-s)dk$

$(**)$ elde edilir.

$\tau = (t-s)k + s$ bağınıtısında $-\tau = -(t-s)k - s$ -> $t - \tau = t - (t-s)k - s$ -> $t - \tau = (t-s)(1-k)$ $(***)$ elde edilir.

Elde edilen $\tau - s = (t-s)k$ $(*)$, $d\tau = (t-s)dk$ $(**)$ ve $t - \tau = (t-s)(1-k)$ $(***)$ bu eşitlikler yukarıdaki integral denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f'(s)\int_s^t (\tau-s)^{-\varrho}(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f'(s)\int_0^1 \big((t-s)k\big)^{-\varrho}\big((t-s)(1-k)\big)^{\varrho-1}\big((t-s)dk\big)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f'(s)\int_0^1 (t-s)^{-\varrho}k^{-\varrho}(t-s)^{\varrho-1}(1-k)^{\varrho-1}(t-s)dkds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f'(s)\left(\int_0^1 k^{-\varrho}(1-k)^{\varrho-1}dk\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f'(s)\left(\frac{\Gamma(1-\varrho)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(1-\varrho+\varrho)}\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\left(\frac{\Gamma(1-\varrho)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(1-\varrho+\varrho)}\right)\int_0^t f'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\left(\frac{\Gamma(1-\varrho)\Gamma(\varrho)}{\Gamma(1)}\right)\int_0^t f'(s)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\left(\frac{\Gamma(1-\varrho)\Gamma(\varrho)}{1}\right)\int_0^t f'(s)ds \\
&= \int_0^t f'(s)ds \\
&= f(s)\Big|_0^t \\
&= f(t) - f(0)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3.

Türevlenebilir bir $f(t)$ fonksiyonunun kesirli Caputo türevinin Laplace dönüşümü ”L” olmak üzere

$$L[{}_0^C D_t^{\varrho} f(t)] = s^{\varrho} L[f(t)] - s^{\varrho-1} f(0)$$

şeklindedir (Baleanu ve ark., 2020).

İspat 4.1.3.
Caputo türevinin tanımı, Laplace dönüşümü, konvolüsyon teoremi ve Gamma fonksiyonundan yararlanarak

$$\begin{aligned}
L[{}_0^C D_t^{\varrho} f(t)] &= L[\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho} d\tau] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} L[\int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho} d\tau] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} L[f'(t) * t^{-\varrho}] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} (L[f'(t)] L[t^{-\varrho}]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} L[f'(t)] (L[t^{-\varrho}]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} L[f'(t)] \int_0^{\infty} e^{-st} t^{-\varrho} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} L[f'(t)] (\Gamma(1-\varrho) s^{\varrho-1}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \Gamma(1-\varrho) (L[f'(t)] s^{\varrho-1}) \\
&= L[f'(t)] s^{\varrho-1} \\
&= [sL[f(t)] - f(0)] s^{\varrho-1} \\
&= s^{\varrho} L[f(t)] - s^{\varrho-1} f(0)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Lemma 4.1.4.

Türevleneblir bir $f(t)$ fonksiyonunun kesirli Caputo türevinin Sumudu dönüşümü "$S[f(t)]$" olmak üzere

$$S[{}_0^C D_t^{\varrho} f(t)] = \psi^{-\varrho} S[f(t)] - \psi^{-\varrho} f(0)$$

biçimindedir (Karataş Akgül ve ark., 2021).
İspat 4.1.4.
Caputo türevinin tanımı, Sumudu dönüşümü ve konvolüsyon teoreminden yararlanarak

$$\begin{aligned}
S[{}_0^C D_t^{\varrho} f(t)] &= S\left[\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho} d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} S\left[\int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho} d\tau\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} S[f'(t) * t^{-\varrho}] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} (\psi S[f'(t)] S[t^{-\varrho}]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \Big(\psi S[f'(t)] \big(\psi^{-\varrho} \Gamma(1-\varrho) \big) \Big) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \Gamma(1-\varrho) \psi \psi^{-\varrho} (S[f'(t)]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \Gamma(1-\varrho) \psi \psi^{-\varrho} \Big(\frac{S[f(t)] - f(0)}{\psi} \Big) \\
&= \psi^{\varrho} (S[f(t)] - f(0)) \\
&= \psi^{-\varrho} S[f(t)] - \psi^{-\varrho} f(0)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

4.2. Hibrit Kesirli-Orantılı Caputo Türevi

İntegral formülü olarak yazılan Caputo kesirli türevindeki $f'(\tau)$ ifadesinin yerine ${}^{P}D_{\varrho} f(t)$ yazılarak yeni bir kesirli-orantılı operatör tanımlanır. Böylece orantılı ve Caputo tanımlarını birleştirerek hibrit bir kesirli-orantılı operatör

$$
{}_{0}^{PC}D_{t}^{\varrho} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_{0}^{t} \Big(K_1(\varrho,\tau) f(\tau) + K_0(\varrho,\tau) f'(\tau) \Big) (t-\tau)^{-\varrho} d\tau
$$

şeklinde elde edilir.

Özellikle, K_0 ve K_1' in ${}^{CP}D_{\varrho}$ operatöründe t' den bağımsız olduğu özel durum Tanım (4.2.1.)' de formülüze edilmiştir (Baleanu ve ark., 2020).

Tanım 4.2.1.

Orantılı-Caputo hibrit opertaörü iki olası yoldan biriyle tanımlanabilir. Ya aşağıdaki genel yolla

$$
{}_{0}^{PC}D_{t}^{\varrho} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_{0}^{t} \Big(K_1(\varrho,\tau) f(\tau) + K_0(\varrho,\tau) f'(\tau) \Big) (t-\tau)^{-\varrho} d\tau
$$

burada $1 - \varrho = \beta$ dönüşümü yapılarak

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{0}^{t} \Big(K_1(\varrho,\tau) f(\tau) + K_0(\varrho,\tau) f'(\tau) \Big) (t-\tau)^{\beta-1} d\tau \\
&= {}_{0}^{RL}I_{t}^{\beta} \Big(K_1(\varrho,t) f(t) + K_0(\varrho,t) f'(t) \Big) \\
&= {}_{0}^{RL}I_{t}^{1-\varrho} \Big(K_1(\varrho,t) f(t) + K_0(\varrho,t) f'(t) \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t \bigg(K_1(\varrho,\tau)f(\tau)+K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)\bigg)(t-\tau)^{\beta-1}d\tau \\
&= \int_0^t \bigg(K_1(\varrho,\tau)f(\tau)+K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)\bigg)\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}d\tau \\
&= \int_0^t \bigg(K_1(\varrho,\tau)f(\tau)+K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)\bigg)\frac{(t-\tau)^{1-\varrho-1}}{\Gamma(1-\varrho)}d\tau \\
&= \int_0^t \bigg(K_1(\varrho,\tau)f(\tau)+K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)\bigg)\frac{(t-\tau)^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}d\tau \\
&= \bigg(K_1(\varrho,t)f(t)+K_0(\varrho,t)f'(t)\bigg)*\bigg(\frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}\bigg)
\end{aligned}
$$

ya da daha basit bir ifadeyle

$$
\begin{aligned}
{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t \bigg(K_1(\varrho)f(\tau)+K_0(\varrho)f'(\tau)\bigg)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t K_1(\varrho)f(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau \\
&+ \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t K_0(\varrho)f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau \\
&= K_1(\varrho)\bigg(\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau\bigg) \\
&+ K_0(\varrho)\bigg(\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau\bigg) \\
&= K_1(\varrho){}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f(t)+K_0(\varrho){}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t)
\end{aligned}
$$

şeklinde ifade edilir. İkinci ifade Riemann-Liouville integralinin ve Caputo türevinin basit bir lineer kombinasyonudur. (Burada PC orantılı Caputo, CPC ise sabit orantılı Caputo olarak temsil edilir). Bu formüllerin her ikisinde de fonksiyon uzay bölgesinde f fonksiyonunun türevlenebilir olmalı ve hem f hemde f' fonksiyonları L^1 uzayında olmalıdır (Baleanu ve ark., 2020).

Önerme 4.2.2.

PC ve CPC operatörleri lokal değil ve tekildir.

İspat 4.2.2.

Lokal olmaması, bu operatörlerin integrallerle tanımlanmasından kaynaklanmaktadır. Hem ${}_0^{PC}D_t^{\varrho}f(t)$ hemde ${}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t)$, 0 ile t arasındaki tüm τ için $f(\tau)$ değerlerine bağlıdır. Bu integraller de tekildir. Çünkü, bu integraller tıpkı Riemann-Liouville operatörleri gibi, çekirdekte $(t-\tau)^{-\varrho}$ işlevi kullanılarak tanımlanır. Bu fonksiyon, $0<\varrho<1$ aralığında integralin $\tau=t$ bitiş noktasında integrallenebilir bir tekilliğe sahiptir (Baleanu ve ark., 2020).

Teorem 4.2.3.

$\varrho = 0$ ve $\varrho = 1$ sınırlayıcı durumlarda, aşağıdaki özel durumlar yazılabilir.

$$\begin{aligned}\lim_{\varrho\to 0} {}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t) &= \lim_{\varrho\to 0} {}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau \\ \lim_{\varrho\to 1} {}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t) &= \lim_{\varrho\to 1} {}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t) = f'(t)\end{aligned}$$

Böylece, yeni operatörler bir anlamda bir foksiyonun integrali ve türevi arasında ilişki sağlar (Baleanu ve ark., 2020).

İspat 4.2.3.

Birinci ifade için

$$\begin{aligned}\lim_{\varrho\to 0} {}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t) &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t \Big(K_1(\varrho,\tau)f(\tau) + K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)\Big)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau \\ &= \lim_{\varrho\to 0} \int_0^t K_1(\varrho,\tau)f(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau + \lim_{\varrho\to 0} \int_0^t K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau \\ &= \lim_{\varrho\to 0} \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t K_1(\varrho,\tau)f(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau \\ &+ \lim_{\varrho\to 0} \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau\end{aligned}$$

$\lim_{\varrho\to 0^+} K_0(\varrho,t) = 0$ ve $\lim_{\varrho\to 0^+} K_1(\varrho,t) = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{\Gamma(1-0)} \int_0^t (1)f(\tau)(t-\tau)^{-0}d\tau + \frac{1}{\Gamma(1-0)} \int_0^t (0)f'(\tau)(t-\tau)^{-0}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^t f(\tau)d\tau + 0 \\ &= \int_0^t f(\tau)d\tau\end{aligned}$$

elde edilerek istenen eşitlik bulunmuş olur. İkinci ifade ise

$$\begin{aligned}\lim_{\varrho\to 1} {}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t) &= \lim_{\varrho\to 1} \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t \Big(K_1(\varrho,\tau)f(\tau) + K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)\Big)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau \\ &= \lim_{\varrho\to 1} \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t K_1(\varrho,\tau)f(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau \\ &+ \lim_{\varrho\to 1} \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)} \int_0^t K_0(\varrho,\tau)f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho}d\tau\end{aligned}$$

$\lim_{\varrho\to 1^-} K_0(\varrho,t) = 1$ ve $\lim_{\varrho\to 1^-} K_1(\varrho,t) = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t (0) f(\tau)(t-\tau)^{-1} d\tau \\
&+ \lim_{\varrho\to 1}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t (1) f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho} d\tau \\
&= 0 + \lim_{\varrho\to 1}\frac{1}{\Gamma(1-\varrho)}\int_0^t f'(\tau)(t-\tau)^{-\varrho} d\tau \\
&= \lim_{\varrho\to 1}\int_0^t f'(\tau)\frac{(t-\tau)^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)} d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{\varrho\to 1} {}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t) = \lim_{\varrho\to 1} f'(t) * \frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}
$$

eşitliğin her iki tarafının Laplace dönüşümü alınırsa

$$
\begin{aligned}
L\left[\lim_{\varrho\to 1} {}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t)\right] &= L\left[\lim_{\varrho\to 1} f'(t) * \frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}\right] \\
&= \lim_{\varrho\to 1} L\left[f'(t) * \frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}\right] \\
&= \lim_{\varrho\to 1} L[f'(t)] L\left[\frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}\right] \\
&= \lim_{\varrho\to 1} L[f'(t)]\left(\frac{s^{\varrho-1}\Gamma(1-\varrho)}{\Gamma(1-\varrho)}\right) \\
&= \lim_{\varrho\to 1} L[f'(t)] s^{\varrho-1} \\
&= L[f'(t)] \lim_{\varrho\to 1} s^{\varrho-1} \\
&= L[f'(t)] s^{1-1} \\
&= L[f'(t)] s^{0} \\
&= L[f'(t)](1) \\
&= L[f'(t)]
\end{aligned}
$$

ve eşitliğin her iki tarafına ters Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
L^{-1}L\left[\lim_{\varrho\to 1} {}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t)\right] &= L^{-1}L[f'(t)] \\
\lim_{\varrho\to 1} {}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t) &= f'(t)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilerek istenen ispat tamamlanmış olur.

Bazı kesirli diferansiyel denklemlerin çözümüde dahil olmak üzere, bir çok türevde faydalı olacak olan Laplace dönüşümü ve Sumudu dönüşümü ile ilgili aşağıda iki sonuç verilebilir. PC operatörü, Riemann-Liouville ve Caputo diferansiyel integrallerinin lineer birleşimi olmadığından ve daha kompleks olduğundan dolayı, bu teorem yalnızca CPC operatörünü kapsar (Baleanu ve ark., 2020).

Teorem 4.2.4.

CPC operatörünün Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$L[{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t)] = \left[\frac{K_1(\varrho)}{s} + K_0(\varrho)\right]s^{\varrho}L[f(t)] - K_0(\varrho)s^{\varrho-1}f(0)$$

Burada, $f(t)$ türevlenebilir bir fonksiyondur. Öyleki f ve f', pozitif reel sayılarda lokal L^1' dir ve onun Laplace dönüşümü $L[f(t)]$ mevcuttur (Baleanu ve ark., 2020).

İspat 4.2.4.

Riemann-Liouville integralinin ve Caputo türevinin $0 < \varrho < 1$ aralığında Laplace dönüşümleri Teorem (4.1.3.) ve Teorem (4.2.6.) da şu şekilde verilir.

$$L[{}_0^{RL}I_t^{\varrho}f(t)] = s^{-\varrho}L[f(t)], \qquad L[{}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t)] = s^{\varrho}L[f(t)] - s^{\varrho-1}f(0)$$

CPC operatörünün Laplace dönüşümü Tanım (4.2.1.), Teorem (4.2.6.) ve Teorem (4.1.3.) kullanılarak

$$\begin{aligned}
L[{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t)] &= L[K_1(\varrho){}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f(t) + K_0(\varrho){}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t)] \\
&= K_1(\varrho)L[{}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f(t)] + K_0(\varrho)L[{}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t)] \\
&= K_1(\varrho)(s^{-(1-\varrho)}L[f(t)]) + K_0(\varrho)(s^{\varrho}L[f(t)] - s^{\varrho-1}f(0)) \\
&= (K_1(\varrho)s^{\varrho-1} + K_0(\varrho)s^{\varrho})L[f(t)] - K_0(\varrho)s^{\varrho-1}f(0)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilerek ispatlanır (Baleanu ve ark., 2020).

Lemma 4.2.5.

CPC operatörünün Sumudu dönüşümü

$$S[{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t)] = [K_1(\varrho)\psi + K_0(\varrho)]\psi^{-\varrho}S[f(t)] - K_0(\varrho)\psi^{-\varrho}f(0)$$

şeklindedir. $f(t)$ fonksiyonunun Sumudu dönüşümü $S[f(t)]$ mevcuttur. (Karataş Akgül ve ark., 2021).

İspat 4.2.5.

Riemann-Liouville integralinin ve Caputo türevinin Sumudu dönüşümleri Teorem (4.2.7.) ve Lemma (4.1.4.) de verildiğinden

$$S[{}_0^{RL}I_t^{\varrho}f(t)] = \psi^{\varrho}S[f(t)], \qquad S[{}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t)] = \psi^{-\varrho}S[f(t)] - u^{-\varrho}f(0)$$

şeklindedir. Burada Tanım (4.2.1.), Teorem (4.2.7.) ve Lemma (4.1.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
S[{}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t)] &= S[K_1(\varrho){}_0^{RL}I_t^{1-\varrho} f(t) + K_0(\varrho){}_0^{C}D_t^{\varrho} f(t)] \\
&= K_1(\varrho)S[{}_0^{RL}I_t^{1-\varrho} f(t)] + K_0(\varrho)S[{}_0^{C}D_t^{\varrho} f(t)] \\
&= K_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}S[f(t)] + K_0(\varrho)\psi^{-\varrho}(S[f(t)] - f(0)) \\
&= [K_1(\varrho)\psi + K_0(\varrho)]\psi^{-\varrho}S[f(t)] - K_0(\varrho)\psi^{-\varrho}f(0)
\end{aligned}$$

istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.2.6.

$f(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon ve L Laplace dönüşümü olmak üzere, Riemann-Liouville integralinin Laplace dönüşümü aşağıdaki şekildedir (Baleanu ve ark., 2020).

$$L[{}_0^{RL}I_t^{\varrho} f(t)] = s^{-\varrho}L[f(t)]$$

İspat 4.2.6.

Riemann-Liouville integrali, konvolüsyon teoremi ve Laplace dönüşümü kullanılarak

$$\begin{aligned}
L[{}_0^{RL}I_t^{\varrho} f(t)] &= L\left[\frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}L\left[\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}L[f(t) * t^{\varrho-1}] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}(L[f(t)]L[t^{\varrho-1}]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}(L[t^{\varrho-1}]L[f(t)]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\left(\int_0^\infty e^{-st}t^{\varrho-1}dt\right)L[f(t)]
\end{aligned}$$

Son eşitlikteki integral ifadesinde $st = k$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\left(\int_0^\infty e^{-k}\Big(\frac{k}{s}\Big)^{\varrho-1}\frac{dk}{s}\right)L[f(t)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_0^\infty\left(\frac{1}{s}e^{-k}k^{\varrho-1}s^{1-\varrho}dk\right)L[f(t)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}s^{-\varrho}\left(\int_0^\infty e^{-k}k^{\varrho-1}dk\right)L[f(t)] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)}s^{-\varrho}\Gamma(\varrho)L[f(t)]
\end{aligned}$$

$$= \quad s^{-\varrho} L[f(t)]$$

istenen sonuç elde edilir.

Lemma 4.2.7.

$f(t)$ integrallenebilir bir fonksiyon ve $S[f(t)]$ Sumudu dönüşümü olmak üzere, Riemann-Liouville integralinin Sumudu dönüşümü

$$S[{}_0^{RL}I_t^{\varrho} f(t)] = \psi^{\varrho} S[f(t)]$$

şeklindedir.

İspat 4.2.7.

Konvolüsyon teoremi ve Sumudu dönüşümünün tanımından yararlanılarak

$$\begin{aligned}
S[{}_0^{RL}I_t^{\varrho} f(t)] &= S\left[\frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)} S\left[\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)} S[f(t) * t^{\varrho-1}] \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)} (\psi S[f(t)] S[t^{\varrho-1}]) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \psi S[f(t)](\psi^{\varrho-1}\Gamma(\alpha)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\varrho)} \Gamma(\alpha)\psi\psi^{\varrho-1} S[f(t)] \\
&= \psi^{\varrho} S[f(t)]
\end{aligned}$$

şeklinde istenen sonuç elde edilir.

4.3. Orantılı Caputo Türevinin Kesirli İntegral Operatörü

Hem PC hemde CPC kesir operatörleri, orantılı türevler ile Riemann-Liouville integralinin bir birleşimi olarak verilebildiğinden, yani

$${}_0^{PC}D_t^{\varrho} f(t) = {}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}[{}^{P}D_{\varrho} f(t)] \qquad , \qquad {}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t) = {}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}[{}^{CP}D_{\varrho} f(t)]$$

kesirli operatörlerini tersine çevirmek için, hem Riemann-Liouville integralini hem de orantılı türevler ${}^{P}D_{\varrho}$ ve ${}^{CP}D_{\varrho}$' yı tersine çevirmek yeterli olacaktır. Riemann-Liouville integrali, Riemann-Liouville türevi yardımıyla tersi bulunur. Orantılı türevin tersi de Anderson ve ark. (2015) ' de mevcuttur (Baleanu ve ark., 2020).

4.3.1. Laplace dönüşümü yardımıyla CPC operatörünün tersinin elde edilmesi

CPC kesirli operatörünü tersine çevirmenin alternatif bir yolu, Laplace dönüşümünü ve Teorem (4.2.4.) sonucunu kullanmaktır. $f(0) = 0$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
L[{}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t)] &= \left[\frac{K_1(\varrho)}{s} + K_0(\varrho)\right] s^{\varrho} L[f(t)] - K_0(\varrho) s^{\varrho-1} f(0) \\
&= \left[\frac{K_1(\varrho)}{s} + K_0(\varrho)\right] s^{\varrho} L[f(t)] - K_0(\varrho) s^{\varrho-1}(0) \\
L[{}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t)] &= K_0(\varrho)\left[1 + \frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)} s^{-1}\right] s^{\varrho} L[f(t)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu eşitlikte ${}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t) = k(t)$ yazılarak $L[f(t)]$ yalnız bırakılır Taylor serisinden yararlanılırsa

$$
\begin{aligned}
L[f(t)] &= \left(K_0(\varrho)\left[1 + \frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)} s^{-1}\right] s^{\varrho}\right)^{-1} L[k(t)] \\
&= (K_0(\varrho))^{-1} (s^{\varrho})^{-1} \left[1 + \frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)} s^{-1}\right]^{-1} L[k(t)] \\
&= \frac{1}{K_0(\varrho)} s^{-\varrho} \sum_{w=0}^{\infty} \left[\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)} s^{-1}\right]^{w} L[k(t)] \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w+1}} \left(s^{-\varrho-w} L[k(t)]\right)
\end{aligned}
$$

şekline getirilir. (Bu seriler sadece $|\frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)} s^{-\varrho}| < 1$ koşulu altında yakınsar. Ancak, burada sadece formal bir türetme yapılır. t-bölgesinde bulunan seri her yerde yakınsak olur. Burada $f(t)$ yi $k(t)$ cinsinden yazmak için iki olası yol vardır.

Bunlardan biri, Teorem (4.2.6.) da verilen Riemann-Liouville kesirli integrali ${}_0^{RL}I_t^{\varrho} k(t)$ nin Laplace dönüşümünün herhangi bir pozitif ϱ sayısı için $s^{-\varrho} L[k(t)]$ olduğunu kullanarak

$$
f(t) = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w+1}} {}_0^{RL}I_t^{\varrho+w} k(t)
$$

fonksiyonu elde edilir.

İkinci yol ise, $L[f(t)]$ ifadesinin sağ tarafı bir kuvvet serisi şekline getirilerek Mittag-Leffler fonksiyonundan yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
L[f(t)] &= \left[\sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w+1}} s^{-\varrho-w}\right] L[k(t)] \\
&= \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-K_1(\varrho))^{w}}{K_0(\varrho))^{w+1}} L\left[\frac{t^{\varrho+w-1}}{\Gamma(\varrho+w)}\right] L[k(t)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= L\left[\frac{t^{\varrho-1}}{K_0(\varrho)}\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}t\right)^w\frac{1}{\Gamma(w+\varrho)}\right]L[k(t)]\\
&= L\left[\frac{t^{\varrho-1}}{K_0(\varrho)}E_{1,\varrho}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}t\right)\right]L[k(t)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, $\varrho > 0$ için tanımlanan Mittag-Leffler tipi $E_{\varrho,\beta}(x) = \sum_{w=0}^{\infty}\frac{x^w}{\Gamma(w\varrho+\beta)}$ fonksiyonu kullanılır.
Bu nedenle, CPC türevinin tersi için Teorem (4.3.2.1.) alternatif ifade olarak bulunur (Baleanu ve ark., 2020).

4.3.2. Sumudu dönüşümü yardımıyla CPC operatörünün tersinin elde edilmesi

CPC kesirli operatörünü tersine çevirmenin alternatif bir yolu, Sumudu dönüşümünü ve Teorem (4.2.5.) sonucunu kullanmaktır. $f(0) = 0$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
S[{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t)] &= [K_1(\varrho)\psi + K_0(\varrho)]\psi^{-\varrho}S[f(t)] - K_0(\varrho)\psi^{-\varrho}f(0)\\
&= [K_1(\varrho)\psi + K_0(\varrho)]\psi^{-\varrho}S[f(t)] - K_0(\varrho)\psi^{-\varrho}(0)\\
&= [K_1(\varrho)\psi + K_0(\varrho)]\psi^{-\varrho}S[f(t)]\\
S[{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t)] &= K_0(\varrho)\left[1+\frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\psi\right]\psi^{-\varrho}S[f(t)]
\end{aligned}
$$

elde edilir. ${}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t) = h(t)$ yazılarak ve Taylor serisi kullanılarak $S[f(t)]$ yalnız bırakılırsa

$$
\begin{aligned}
S[f(t)] &= \left(K_0(\varrho)\left[1+\frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\psi\right]\psi^{-\varrho}\right)^{-1}S[h(t)]\\
&= \frac{1}{K_0(\varrho)}\psi^{\varrho}\left[1+\frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\psi\right]^{-1}S[h(t)]\\
&= \frac{1}{K_0(\varrho)}\psi^{\varrho}\sum_{w=0}^{\infty}\left(-\frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^w S[h(t)]\\
S[f(t)] &= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}\psi^{w+\varrho}S[h(t)] \quad (*)
\end{aligned}
$$

şekline getirilir. (Bu seriler sadece $|\frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\psi^{\varrho}| < 1$ koşulu altında yakınsar. Ancak, burada sadece formal bir türetme yapılır. t-bölgesinde bulunan seri her yerde yakınsak olur.)
$f(t)$ yi $h(t)$ cinsinden yazmak için iki olası yol vardır. Birinci yol, Teorem (4.2.7.) de verilen Riemann-Liouville integrali ${}_0^{RL}I_t^{\varrho}h(t)$ nin Sumudu dönüşümü olan $\psi^{-\varrho}S[h(t)]$ ifadesinin kullanılmasıdır.

$$
S[{}_0^{RL}I_t^{\varrho}h(t)] = \psi^{\varrho}S[h(t)]
$$

ifadesinden

$$
\begin{aligned}
S[{}_0^{RL}I_t^{w+\varrho}h(t)] &= \psi^{w+\varrho}S[h(t)] \\
S^{-1}S[{}_0^{RL}I_t^{w+\varrho}h(t)] &= S^{-1}[\psi^{w+\varrho}S[h(t)]] \\
{}_0^{RL}I_t^{w+\varrho}h(t) &= S^{-1}[\psi^{w+\varrho}S[h(t)]]
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (*) eşitliğinin her iki tarafının ters sumudu dönüşümü alınırsa

$$
\begin{aligned}
S[f(t)] &= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}\psi^{w+\varrho}S[h(t)] \\
S^{-1}S[f(t)] &= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}S^{-1}(\psi^{w+\varrho}S[h(t)]) \\
f(t) &= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}{}_0^{RL}I_t^{w+\varrho}h(t)
\end{aligned}
$$

birinci olası yolun sonucu bulunur.

İkinci olası yol ise (*) eşitliğinin Mittag-Leffler fonksiyon tipi şeklinde yazılmasıdır. Yani

$$
\begin{aligned}
S[f(t)] &= \left[\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}(\psi^{w+\varrho})\right]S[h(t)] \\
&= S\left[\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}\left(\frac{t^{w+\varrho}}{\Gamma(w+1+\varrho)}\right)\right]S[h(t)] \\
&= S\left[\frac{t^{\varrho}}{K_0(\varrho)}\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}t\right)^w\frac{1}{\Gamma(w+1+\varrho)}\right]S[h(t)] \\
&= S\left[\frac{t^{\varrho}}{K_0(\varrho)}E_{1,1+\varrho}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}t\right)\right]S[h(t)]
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Teorem 4.3.2.1.

CPC kesirli türevinin ters operatörü şu şekilde verilir.

$$
\begin{aligned}
{}_0^{CPC}I_t^{\varrho}f(t) &= \frac{1}{K_0(\varrho)}\int_0^t(t-\tau)^{\varrho-1}E_{1,\varrho}\left(-\frac{K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}(t-\tau)\right)f(\tau)d\tau \\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t)
\end{aligned}
$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}\,{}_0^{CPC}I_t^{\varrho}f(t) &= f(t)-\frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}\lim_{t\to 0}{}_0^{RL}I_t^{\varrho}f(t); \\
{}_0^{CPC}I_t^{\varrho}\,{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t) &= f(t)-exp\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}t\right)f(0)
\end{aligned}
$$

ters ilişkileri sağlanır (Baleanu ve ark., 2020).

İspat 4.3.2.1.

Bu iki ifadenin kesirli integral operatörü için eşdeğerliliği seri formül yakalaşımından dolayı açıktır (Fernandez ve ark., 2019; Baleanu ve ark., 2018). Hem $f(t)$ hemde ${}_0^{CPC}I_t^{\varrho}f(t)$ nin $t = 0$ da sıfır olduğu durumda, yukarıdaki ifadeler Laplace dönüşümleriyle birlikte kullanmak, ${}_0^{CPC}I_t^{\varrho}f(t)$ nin tam olarak ${}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t)$ nin iki taraflı tersi olduğunu gösterir. Genel olarak seri formülünden yararlanarak ters çevirme sonuçlarını ispatlamak için Tanım (4.2.1.) de verilen ${}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t) = K_1(\varrho){}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f(t) + K_0(\varrho){}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t)$ eşitlik ile Teorem (4.3.2.1.) de verilen ${}_0^{CPC}I_t^{\varrho}f(t) = \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t)$ de verilen eşitlikler kullanılarak

Birinci ilişki

$$\begin{aligned}
{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}{}_0^{CPC}I_t^{\varrho}f(t) &= {}_0^{CPC}D_t^{\varrho}({}_0^{CPC}I_t^{\varrho}f(t)) \\
&= {}_0^{CPC}D_t^{\varrho}\left(\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t)\right) \\
&= \left(K_1(\varrho){}_0^{RL}I_t^{1-\varrho} + K_0(\varrho){}_0^{C}D_t^{\varrho}\right)\left(\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t)\right) \\
&= K_1(\varrho){}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}(\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t)) \\
&+ K_0(\varrho){}_0^{C}D_t^{\varrho}(\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^w}{(K_0(\varrho))^{w+1}}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t)) \\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w+1}}{(K_0(\varrho))^{w+1}}(-1)^w{}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t) \\
&+ \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w}}(-1)^w{}_0^{C}D_t^{\varrho}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t) \\
&= -\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w+1}{}_0^{RL}I_t^{w+1}f(t) + \sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w}{}_0^{C}D_t^{\varrho}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t)
\end{aligned}$$

Riemann-Liouville ve Caputo operatörlerinin standart özelliklerinden

$${}_0^{C}D_t^{\varrho}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t) = {}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}\frac{d}{dt}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}f(t) = {}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w-1}f(t)$$

yazılabilir. Herhangi bir $w \geq 1$ için bu ifade basitçe ${}_0^{RL}I_t^{w}f(t)$' ye eşittir. Oysaki $w = 0$ için Baleanu ve ark. (2020) tarafından bu eşitlik

$${}_0^{C}D_t^{\varrho}{}_0^{RL}I_t^{\varrho}f(t) = {}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}{}_0^{RL}D_t^{1-\varrho}f(t) = f(t) - \frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}\lim_{t\to 0}{}_0^{RL}I_t^{\varrho}f(t)$$

olarak verilmiştir. Bu durumda bulunan bu ifadeler son eşitlikte yerine yazılır ve $\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w+1}{}_0^{RL}I_t^{w+1}f(t) = \sum_{w=1}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w}f(t)$ olduğundan işleme devam edilirse

$$\begin{aligned}
{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}{}_0^{CPC}I_t^{\varrho}f(t) &= -\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w+1}{}_0^{RL}I_t^{w+1}f(t)+\sum_{w=1}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w}f(t)\\
&+ f(t)-\frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}\lim_{t\to 0}{}_0^{RL}I_t^{\varrho}f(t)\\
&= f(t)-\frac{t^{-\varrho}}{\Gamma(1-\varrho)}\lim_{t\to 0}{}_0^{RL}I_t^{\varrho}f(t)
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve dolayısıyla birinci ilişkinin eşitliği gösterilmiş olur.

İkinci ilişki ise yine Tanım (4.2.1.), Teorem (4.3.2.1.) ve Teorem (4.1.1.) de verilen ${}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t)={}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f'(t)$ eşitlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
{}_0^{CPC}I_t^{\varrho}{}_0^{CPC}D_t^{\varrho}f(t) &= {}_0^{CPC}I_t^{\varrho}(K_1(\varrho){}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f(t)+K_0(\varrho){}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t))\\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w+1}}{}_0^{RL}I_t^{\varrho+w}(K_1(\varrho){}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f(t)+K_0(\varrho){}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t))\\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w+1}}{(K_0(\varrho))^{w+1}}(-1)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w+\varrho}{}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f(t)\\
&+ \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w}}(-1)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w+\varrho}{}_0^{C}D_t^{\varrho}f(t)\\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w+1}}{(K_0(\varrho))^{w+1}}(-1)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w+\varrho}{}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f(t)\\
&+ \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w}}(-1)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w+\varrho}{}_0^{RL}I_t^{1-\varrho}f'(t)\\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w+1}}{(K_0(\varrho))^{w+1}}(-1)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w+1}f(t)\\
&+ \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w}}(-1)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w+1}f'(t)\\
&= \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w+1}}{(K_0(\varrho))^{w+1}}(-1)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w+1}f(t)\\
&+ \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(K_1(\varrho))^{w}}{(K_0(\varrho))^{w}}(-1)^{w}{}_0^{RL}I_t^{w}\big({}_0^{RL}I_t^{1}f'(t)\big)
\end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned}
{}_0^{RL}I_t^{1}f'(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^t f^{'}(\tau)(t-\tau)^{1-1}d\tau\\
&= (1)\int_0^t f^{'}(\tau)(1)d\tau\\
&= \int_0^t f^{'}(\tau)d\tau\\
&= f(\tau)\big|_0^t
\end{aligned}$$

$$= \quad f(t) - f(0)$$

olarak bulunur. Bulunan bu sonuç yerine yazılıp işleme devam edilirse

$$\begin{aligned}
&= -\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w+1} {}_0^{RL}I_t^{w+1} f(t) + \sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w}(f(t) - f(0)) \\
&= -\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w+1} {}_0^{RL}I_t^{w+1} f(t) + \sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(t) \\
&- \sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(0) \\
&= -\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w+1} {}_0^{RL}I_t^{w+1} f(t) + \sum_{w=0}^{0}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{0} {}_0^{RL}I_t^{0} f(t) \\
&+ \sum_{w=1}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(t) \\
&- \sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(0) \quad (*)
\end{aligned}$$

burada $\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(t)$ ifadesinde $w = 0$ için ayrı bakılırsa

$$\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(t) = \sum_{w=0}^{0}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{0} {}_0^{RL}I_t^{0} f(t) = (1){}_0^{RL}I_t^{0} f(t) = {}_0^{RL}I_t^{0} f(t)$$

buradan aynı şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned}
{}_0^{RL}I_t^{0} f(t) &= \lim_{\varrho\to 0}\frac{1}{\Gamma(\varrho)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\varrho-1}d\tau \\
&= \lim_{\varrho\to 0}\int_0^t f(\tau)\frac{(t-\tau)^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho)}d\tau \\
{}_0^{RL}I_t^{0} f(t) &= \lim_{\varrho\to 0}\left(f(t) * \frac{(t)^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho)}\right)
\end{aligned}$$

burada her iki tarafın Laplace dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
L[{}_0^{RL}I_t^{0} f(t)] &= L\left[\lim_{\varrho\to 0}\left(f(t) * \frac{(t)^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho)}\right)\right] \\
&= \lim_{\varrho\to 0} L\left[\left(f(t) * \frac{(t)^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho)}\right)\right] \\
&= \lim_{\varrho\to 0} L[f(t)]L\left[\frac{(t)^{\varrho-1}}{\Gamma(\varrho)}\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\varrho\to 0} L[f(t)]s^{-\varrho+1-1}\frac{\Gamma(1+\varrho-1)}{\Gamma(\varrho)}\\
&= \lim_{\varrho\to 0} L[f(t)]s^{-\varrho+1-1}\frac{\Gamma(\varrho)}{\Gamma(\varrho)}\\
&= \lim_{\varrho\to 0} L[f(t)]s^{-\varrho}\\
&= L[f(t)]s^{-0}\\
&= L[f(t)](1)\\
L[{}_0^{RL}I_t^0 f(t)] &= L[f(t)]
\end{aligned}
$$

burada her iki tarafa ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
L^{-1}L[{}_0^{RL}I_t^0 f(t)] &= L^{-1}L[f(t)]\\
{}_0^{RL}I_t^0 f(t) &= f(t)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Bulunan bu sonuç $(*)$ da yerine yazılıp kalınan yerden çözüme devam edilirse

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w+1} {}_0^{RL}I_t^{w+1} f(t) + f(t) + \sum_{w=1}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(t)\\
&- \sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(0)
\end{aligned}
$$

burada $\sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w+1} {}_0^{RL}I_t^{w+1} f(t) = \sum_{w=1}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(t)$ olup kalınan yerden devam edilirse

$$
= f(t) - \sum_{w=0}^{\infty}\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}\right)^{w} {}_0^{RL}I_t^{w} f(0)
$$

olur. Burada ${}_0^{RL}I_t^{w} f(0)$ ifadesi bulunur.

$$
\begin{aligned}
{}_0^{RL}I_t^{w} f(0) &= \frac{1}{\Gamma(w)}\int_0^t f(0)(t-\tau)^{w-1}d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(w)}f(0)\int_0^t (t-\tau)^{w-1}d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(w)}f(0)\left(\frac{t^w}{w}\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(w)w}f(0)t^w
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{w!} f(0) t^w \\
&= \frac{t^w}{w!} f(0)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur ve yerine yazılıp devam edilirse

$$
\begin{aligned}
&= f(t) - \sum_{w=0}^{\infty} \left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)} \right)^w \frac{t^w}{w!} f(0) \\
&= f(t) - \left(\sum_{w=0}^{\infty} \left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)} t \right)^w \frac{1}{w!} \right) f(0)
\end{aligned}
$$

burada Taylor serisi $\sum_0^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ eşiti kullanılarak

$$
= f(t) - e^{\left(\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)} t \right)} f(0)
$$

elde edilerek ikinci ilişkide gösterilmiş olur. Böylece her iki ters ilişki belirtildiği gibi bulunur (Baleanu ve ark., 2020).

Teorem 4.3.2.2.

CPC kesirli integral operatörü ${}_{0}^{CPC}I_t^{\varrho}$, Prabhakar integral operatörünün özel bir durumudur. Yani, Prabhakar' ın dört parametresi sırasıyla 1, ϱ, 1 ve $\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}$' dır (Baleanu ve ark., 2020).

İspat 4.3.2.2.

Prabhakar kesirli integrali, $\mu > 0$ ve $v > 0$ için şu şekilde tanımlanır (Prabhakar, 1971; Kilbas ve ark., 2004)

$$
{}_{a}^{P}I_t^{\mu,v,q,k} f(t) = \int_a^t (t-\tau)^{v-1} E_{\mu,v}^{q} \left(k(t-\tau)^{\mu} \right) f(\tau) d\tau
$$

Burada $\mu = 1$, $v = \varrho$, $q = 1$ ve $k = \frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}$ yazılarak

$$
{}_{0}^{CPC}I_t^{\varrho} f(t) = {}_{a}^{P}I_t^{1,\varrho,1,\frac{-K_1(\varrho)}{K_0(\varrho)}} f(t)
$$

elde edilir.

Prabhakar operatörler sınıfı, içinde birkaç önemli işlem türü içermesinden dolayı geniş bir işleme sahiptir. Hibrit CPC operatörüde Prabhakar sınıfına giren özel bir durumdur. Ancak, genel PC operatörü, Prabhakar' dan farklı işlemlere sahiptir (Baleanu ve ark., 2020).

5. UYGULAMALAR

Envanter problemlerinde kesirli hesabın kullanılmasına yönelik çalışmalarda Rahaman ve ark. (2020) üretim hızının yanında talebin sabit olmasınada dikkat ederek bozulmuş ürünlere ait keyfi sıralı bir EPQ modeli ve bu durumu ifade eden diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

$$\frac{df(t)}{dt} + \theta_1 f(t) = [m - nf(t)] - [q - rs_r + sf(t)], \qquad 0 \le t \le t_1.$$

Bu denklemde s_r satış fiyatı, T toplam zaman döngüsü, t_1 üretim süresi, $t = t_1$ anında f_{max} en yüksek envanter seviyesi, θ_1 ise $[0, t_1]$ aralığındaki bozulma oranını ifade etmektedir. Aynı zamanda $f(0) = 0$ başlangıç koşulu olarak alınır. $t = t_1$ olduğunda $f(t_1) = f_{max}$ değerini verir.

Üretim oranı, stok veya mevcut envantere bağlıdır. Genel olarak, stok seviyesi yüksek olduğu için ürün oranı düşürülmelidir. Yani m, n pozitif sabitler için $W = m - nf(t)$ ve $f(t)$ eldeki envanter veya stoktur.

Üretimin talebi stok ve fiyata bağlıdır. Satış fiyatı düşük olduğunda, talep artar. Ayrıca stoğun çok olması talepte olumlu sonuç vermektedir. Bu, bir marketin/mağazanın showroom'una odaklandığımızda kolayca anlaşılabilir. Showroom'da bulunan daha fazla ürün miktarı genellikle müşteriyi olumlu etkiler. Dolayısıyla talep, $V = q - rs_r + sf(t)$ tarafından verilen fiyat ve stokun bir fonksiyonudur. Burada q; r; s pozitif sabitlerdir ve s_r ürünün fiyatıdır.

Üretim çiftliği üretime ilk başladığında W oranında başlar. Bu sistem diğer taraftan talebi V oranında karşılarken θ_1 oranında bir bozulma durumu yaşayacaktır. Bu durumda $t = t_1$ eşitliğinde yetecek kadar ürüne sahip olunduğunda üretim çiftliği üretim faaliyetine ara verir. Daha sonra yeterli olan bu ürün stok miktarı, müşterilerin ihiyacını gidererek aşamalı olarak azalmaya başlar . $[t_1, T]$ zaman aralığında ise bozulmaya başlar. Daha sonra, T döngü uzunluğuda, bu üretim çiftliği üretimi tekrar aktif hale getirir.

Şimdi bu EPQ modeli diferansiyel denkelemini Sabit Orantılı Caputo kesirli operatörünü kullanarak Sumudu dönüşümü metodu yardımıyla çözelim.

Sabit orantılı Caputo kesirli türev operatörü ${}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t)$ şeklindedir. Yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$${}_0^{CPC}D_t^{\varrho} f(t) + \theta_1 f(t) = [m - nf(t)] - [q - rs_r + sf(t)]$$

olur. Bu denklemin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$S[{}_0^{CPC}D_t^{\alpha} f(t)] + S[\theta_1 f(t)] = S[m - nf(t)] - S[q - rs_r + sf(t)]$$

olur. Lemma (4.2.5.) sonucu denklemde yerine yazılırsa

$$[k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}]S[f(t)] + \theta_1 S[f(t)] = m - nS[f(t)] - q + rs_r - sS[f(t)]$$

ifadesi oluşur. Gerekli düzenlemeler yapılıp $S[f(t)]$ ifadesi yalnız bırakılırsa

$$\begin{aligned}
S[f(t)] &= \frac{m-q+rs_r}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho} + n + s} \\
&= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\left[\frac{1}{1+\frac{k_1(\varrho)u^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}}{n+s}}\right] \\
&= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\left[1+\frac{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}}{n+s}\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\sum_{i=0}^{\infty}\left[-\frac{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}}{n+s}\right]^{i} \\
&= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(n+s)^i}[k_1(\varrho)u^{1-\varrho}+k_0(\varrho)u^{-\varrho}]^i \\
&= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{(n+s)^i}\sum_{p=0}^{i}\binom{i}{p}[k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}]^{i-p}[k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}]^p \\
&= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i}\frac{(-1)^i}{(n+s)^i}\binom{i}{p}[k_1(\varrho)]^{i-p}[k_0(\varrho)]^p\psi^{(1-\varrho)(i-p)-\varrho i}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafının ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i}\frac{(-1)^i}{(n+s)^i}\binom{i}{p}[k_1(\varrho)]^{i-p}[k_0(\varrho)]^p\frac{t^{((1-\varrho)i-p)}}{\Gamma((1-\varrho)i-p+1)} \\
&= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i}\frac{(-1)^i}{(n+s)^i}\frac{i!}{(i-p)!p!}[k_1(\varrho)]^{i-p}[k_0(\varrho)]^p\frac{t^{((1-\varrho)i-p)}}{\Gamma((1-\varrho)i-p+1)}
\end{aligned}$$

olur. Burada $i - p = l$ alınır ve yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
f(t) &= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i}\frac{(-1)^{p+l}}{(n+s)^{p+l}}\frac{(p+l)!}{(l)!p!}[k_1(\varrho)]^l[k_0(\varrho)]^p\frac{t^{-\varrho(p+l)+l}}{\Gamma(-\varrho(p+l)+l+1)} \\
&= \left[\frac{m-q+rs_r}{n+s}\right]\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{i}\frac{(p+l)!}{(l)!p!}\left[-\frac{k_0(\varrho)t^{-\varrho}}{n+s}\right]^p\left[-\frac{k_1(\varrho)t^{-\varrho+1}}{n+s}\right]^l\frac{1}{\Gamma((1-\varrho)l-\varrho p+1)}
\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$f(t) = E^1_{1-\varrho,-\varrho,1}\left(-\frac{k_1(\varrho)t^{1-\varrho}}{n+s}, -\frac{k_0(\varrho)t^{-\varrho}}{n+s}\right)$$

şeklinde istenen çözüm elde edilir.

Benzer bir şekilde, başka bir diferansiyel denklemi yine sabit orantılı Caputo kesirli opertaötünü kullanarak Sumudu dönüşümü metodu yardımıyla çözülür. Bu diferansiyel denklem

$$ {}_{a}^{CPC}D_t^{\varrho} f(t) = -f(t) + \frac{2}{\Gamma[3-\varrho]} t^{(2-\varrho)} - \frac{1}{\Gamma[2-\varrho]} t^{(1-\varrho)} + t^2 - t \quad ; \quad t > 0 \quad ; \quad 0 < \varrho \leq 1, $$

$$ {}_{a}^{CPC}D_t^{0.5} f(t) + f(t) = t^2 + \frac{\Gamma[3]}{\Gamma[2.5]} t^{1.5} \quad ; \quad t > 0 $$

şeklindedir (Akgül ve ark., 2022). Bu denklem $f(0) = 0$ başlangıç koşulu ile ele alınır. Bu denklemi Sumudu dönüşümü yöntemini kullanarak çözmek için, aşağıdaki şekilde denklemin her iki tarafının Sumudu dönüşümü alınır.

$$ S[{}_{a}^{CPC}D_t^{\varrho} f(t)] = -S[f(t)] + \frac{2}{\Gamma[3-\varrho]} S[t^{(2-\varrho)}] - \frac{1}{\Gamma[2-\varrho]} S[t^{(1-\varrho)}] + S[t^2] - S[t] $$

Burada Lemma (4.2.5.) eşiti yerine yazılırsa

$$ k_1(\varrho)S[f(t)]\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)[S[f(t)] - f(0)]\psi^{-\varrho} + S[f(t)] = 2\psi^{(2-\varrho)} - \psi^{(1-\varrho)} + 2\psi^2 - \psi $$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılarak

$$ S[f(t)] = \frac{2\psi^{(2-\varrho)} - \psi^{(1-\varrho)} + 2\psi^2 - \psi}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho} + 1} $$

$S[f(t)]$ yalnız bırakılır. Bu denklemin her iki tarafına ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa

$$ \begin{aligned} f(t) &= S^{-1}\left[\frac{2\psi^{(2-\varrho)}}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho} + 1}\right] - S^{-1}\left[\frac{\psi^{(1-\varrho)}}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho} + 1}\right] \\ &\quad + S^{-1}\left[\frac{2\psi^2}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho} + 1}\right] - S^{-1}\left[\frac{\psi}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho} + 1}\right] \end{aligned} $$

olur. Denklemde her terimi harflendirerek ayrı ayrı ele alınır.

Burada $A = \frac{2\psi^{(2-\varrho)}}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}+1}$ olsun. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$ \begin{aligned} A &= 2\psi^{(2-\varrho)} \frac{1}{1 - (-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} - k_0(\varrho)\psi^{-\varrho})} \\ &= 2\psi^{(2-\varrho)} \sum_{i=0}^{\infty} \left[-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} - k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^i \\ &= 2\psi^{(2-\varrho)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{i} (-1)^i \binom{i}{w} \left[k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}\right]^{(i-w)} \left[k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^w \\ &= 2\psi^{(2-\varrho)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{i} (-1)^i \left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)} \left[k_0(\varrho)\right]^w \binom{i}{w} \psi^{(1-\varrho)(i-w)-\varrho w} \end{aligned} $$

$$= \quad 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\psi^{(1-\varrho)i-w+2-\varrho}$$

olur. Son eşitliğin her iki tarafının ters Sumudu dönüşümü alınarsa

$$S^{-1}[A] = 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\frac{t^{(1-\varrho)i-w+2-\varrho}}{\Gamma((1-\varrho)i-w+3-\varrho)}$$

ifadesi elde edilir. Denklemde $z = i - w$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} S^{-1}[A] &= 2\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}(-1)^{(z+w)}\left[k_1(\varrho)\right]^{z}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{t^{(1-\varrho)z-\varrho w+2-\varrho}}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+3-\varrho)} \\ S^{-1}[A] &= 2t^{(2-\varrho)}\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}\left[-k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right]^{z}\left[-k_0(\varrho)t^{-\varrho}\right]^{w}\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{1}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+3-\varrho)} \end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu seri

$$S^{-1}[A] = 2t^{(2-\varrho)}E^{1}_{1-\varrho,-\varrho,3-\varrho}\Bigg(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\Bigg)$$

şeklinde yazılabilir.

İkinci terim için $B = \frac{\psi^{(1-\varrho)}}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}+1}$ olsun. Bu ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} B &= \psi^{(1-\varrho)}\frac{1}{1-(-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}-k_0(\varrho)\psi^{-\varrho})} \\ &= \psi^{(1-\varrho)}\sum_{i=0}^{\infty}\left[-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}-k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^{i} \\ &= \psi^{(1-\varrho)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\binom{i}{w}\left[k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^{w} \\ &= \psi^{(1-\varrho)}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\psi^{(1-\varrho)(i-w)-\varrho w} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\psi^{(1-\varrho)i-w+1-\varrho} \end{aligned}$$

ifadesi oluşur. Buradan da denklemin her iki tarafının ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$S^{-1}[B] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\frac{t^{(1-\varrho)i-w+1-\varrho}}{\Gamma((1-\varrho)i-w+2-\varrho)}$$

olur. Bu ifadede $z = i - w$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} S^{-1}[B] &= \sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}(-1)^{(z+w)}\left[k_1(\varrho)\right]^{l}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{t^{(1-\varrho)z-\varrho w+1-\varrho}}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+2-\varrho)} \\ S^{-1}[B] &= t^{(1-\varrho)}\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}\left[-k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right]^{z}\left[-k_0(\varrho)t^{-\varrho}\right]^{w}\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{1}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+2-\varrho)} \end{aligned}$$

olur. Bu seri

$$S^{-1}[B] = t^{(1-\varrho)} E^{1}_{1-\varrho,-\varrho,2-\varrho}\Bigg(- k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\Bigg)$$

şeklinde de yazılabilir.

Üçüncü terim $C = \frac{2\psi^2}{k_1(\varrho)u^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}+1}$ olsun. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
C &= 2\psi^2 \frac{1}{1-(-k_1(\varrho)u^{1-\varrho} - k_0(\varrho)\psi^{-\varrho})} \\
&= 2\psi^2 \sum_{i=0}^{\infty} \left[-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} - k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^i \\
&= 2\psi^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{j} (-1)^i \binom{i}{w} \left[k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}\right]^{(i-w)} \left[k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^w \\
&= 2\psi^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{i} (-1)^i \left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)} \left[k_0(\varrho)\right]^w \binom{i}{w} \psi^{(1-\varrho)(i-w)-\varrho w} \\
&= 2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{i} (-1)^i \left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)} \left[k_0(\varrho)\right]^w \binom{i}{w} \psi^{(1-\varrho)i-w+2}
\end{aligned}$$

yazılır. Denklemin her iki tarafının ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$S^{-1}[C] = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{i} (-1)^i \left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)} \left[k_0(\varrho)\right]^w \binom{i}{w} \frac{t^{(1-\varrho)i-w+2}}{\Gamma((1-\varrho)i-w+3)}$$

olur. Denklemde $z = i - w$ alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
S^{-1}[C] &= 2 \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} (-1)^{(z+w)} \left[k_1(\varrho)\right]^z \left[k_0(\varrho)\right]^w \frac{(w+z)!}{w!z!} \frac{t^{(1-\varrho)z-\varrho w+2}}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+3)} \\
S^{-1}[C] &= 2t^2 \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{z=0}^{\infty} \left[-k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right]^z \left[-k_0(\varrho)t^{-\varrho}\right]^w \frac{(w+z)!}{w!z!} \frac{1}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+3)}
\end{aligned}$$

yazılır. Bu seri

$$S^{-1}[C] = 2t^2 E^{1}_{1-\varrho,-\varrho,3}\Bigg(- k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\Bigg)$$

şeklinde yazılır.

Dördüncü terim $D = \frac{\psi}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}+1}$ olsun. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
D &= \psi \frac{1}{1-(-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} - k_0(\varrho)\psi^{-\varrho})} \\
&= u \sum_{i=0}^{\infty} \left[-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} - k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^i \\
&= \psi \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{i} (-1)^i \binom{i}{w} \left[k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}\right]^{(i-w)} \left[k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^w \\
&= \psi \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{w=0}^{i} (-1)^i \left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)} \left[k_0(\varrho)\right]^w \binom{i}{w} \psi^{(1-\varrho)(i-w)-\varrho w}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\psi^{(1-\varrho)i-w+1}$$

olur. Denklemin her iki tarafının ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$S^{-1}[D] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\frac{t^{(1-\varrho)i-w+1}}{\Gamma((1-\varrho)i-w+2)}$$

olur.Bu ifadede $z = i - w$ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
S^{-1}[D] &= \sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}(-1)^{(z+w)}\left[k_1(\varrho)\right]^{z}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{t^{(1-\varrho)z-\varrho w+1}}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+2)}\\
S^{-1}[D] &= t\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}\left[-k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right]^{z}\left[-k_0(\varrho)t^{-\varrho}\right]^{w}\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{1}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+2)}
\end{aligned}$$

yazılır. Bu seri

$$S^{-1}[D] = tE^{1}_{1-\varrho,-\varrho,2}\left(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right)$$

şekilde yazılabilir.

Son olarak bulunan sonuçlar yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
f(t) &= 2t^{(2-\varrho)}E^{1}_{1-\varrho,-\varrho,3-\varrho}\left(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right)\\
&\quad -t^{(1-\varrho)}E^{1}_{1-\varrho,-\varrho,2-\varrho}\left(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}-k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right)\\
&\quad +2t^{2}E^{1}_{1-\varrho,-\varrho,3}\left(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}-k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right)\\
&\quad -tE^{1}_{1-\varrho,-\varrho,2}\left(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde istenen sonuç elde edilir.

Aynı örnek $\varrho = 0.5$ için çözülür.

$$S[{}^{CPC}_{a}D^{0.5}_{t}f(t)] + S[f(t)] = S[t^{2}] + \frac{\Gamma[3]}{\Gamma[2.5]}S[t^{1.5}]$$

denkleminde Lemma (4.2.5.) kullanılarsa

$$k_1(\varrho)S[f(t)]\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)[S[f(t)] - f(0)]\psi^{-\varrho} + S[f(t)] = \Gamma(3)\psi^{2} + 1.5045$$

olur. Burada da $S[f(t)]$ yalnız bırakılırsa

$$S[f(t)] = \frac{2\psi^{2}}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho} + 1} + \frac{1.5045}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho} + k_0(\varrho)\psi^{-\varrho} + 1}$$

olur. Denklemin her iki tarafının ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$f(t) = S^{-1}\left[\frac{2\psi^2}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}+1}\right] - S^{-1}\left[\frac{1.5045}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}+1}\right]$$

elde edilir. Bu ifadede birinci terim için $M = \frac{2\psi^2}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}+1}$ olsun. Burada da gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
M &= 2\psi^2\frac{1}{1-(-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}-k_0(\varrho)\psi^{-\varrho})} \\
&= 2\psi^2\sum_{i=0}^{\infty}\left[-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}-k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^i \\
&= 2\psi^2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^i\binom{i}{w}\left[k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^w \\
&= 2\psi^2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^i\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^w\binom{i}{w}\psi^{(1-\varrho)(i-w)-\varrho w} \\
&= 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^i\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^w\binom{i}{w}\psi^{(1-\varrho)i-w+2}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Buradan da her iki tarafın ters Sumudu dönüşümü alınırsa

$$S^{-1}[M] = 2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^i\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^w\binom{i}{w}\frac{t^{(1-\varrho)i-w+2}}{\Gamma((1-\varrho)i-w+3)}$$

olur. Bu ifadede $z = i - w$ değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned}
S^{-1}[M] &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}(-1)^{(z+n)}\left[k_1(\varrho)\right]^z\left[k_0(\varrho)\right]^w\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{t^{(1-\varrho)z-\varrho w+2}}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+3)} \\
S^{-1}[M] &= 2t^2\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}\left[-k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right]^z\left[-k_0(\varrho)t^{-\varrho}\right]^w\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{1}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+3)}
\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bu seri

$$S^{-1}[M] = 2t^2E^1_{1-\varrho,-\varrho,3}\bigg(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\bigg)$$

şekilde de yazılabilir.

İkinci terim için ise $N = \frac{1.5045}{k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}+k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}+1}$ olsun. Burada da düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
N &= 1.5045\frac{1}{1-(-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}-k_0(\varrho)\psi^{-\varrho})} \\
&= 1.5045\sum_{i=0}^{\infty}\left[-k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}-k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1.5045\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\binom{i}{w}\left[k_1(\varrho)\psi^{1-\varrho}\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\psi^{-\varrho}\right]^{w}\\
&= 1.5045\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\psi^{(1-\varrho)(i-w)-\varrho w}\\
&= 1.5045\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\psi^{(1-\varrho)i-w}
\end{aligned}
$$

olur. Denklemin her iki tarafına ters Sumudu dönüşümü yöntemi uygulanırsa

$$
S^{-1}[N] = 1.5045\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{i}(-1)^{i}\left[k_1(\varrho)\right]^{(i-w)}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\binom{i}{w}\frac{t^{(1-\varrho)i-w}}{\Gamma((1-\varrho)i-w+1)}
$$

şeklinde yazılır. Bu ifade de $z = i - w$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
S^{-1}[N] &= 1.5045\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}(-1)^{(z+w)}\left[k_1(\varrho)\right]^{z}\left[k_0(\varrho)\right]^{w}\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{t^{(1-\varrho)z-\varrho w}}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+1)}\\
S^{-1}[N] &= 1.5045\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{z=0}^{\infty}\left[-k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\right]^{z}\left[-k_0(\varrho)t^{-\varrho}\right]^{w}\frac{(w+z)!}{w!z!}\frac{1}{\Gamma((1-\varrho)z-\varrho w+1)}
\end{aligned}
$$

olur. Bu seri

$$
S^{-1}[N] = 1.5045E^{1}_{1-\alpha,-\alpha,1}\Bigg(-k_0(\alpha)t^{-\alpha}, -k_1(\alpha)t^{(1-\alpha)}\Bigg)
$$

şeklinde yazılabilir.

Son olarak bulunan bu sonuçlar yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
f(t) &= 2t^2E^{1}_{1-\varrho,-\varrho,3}\Bigg(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\Bigg)\\
&+ 1.5045E^{1}_{1-\varrho,-\varrho,1}\Bigg(-k_0(\varrho)t^{-\varrho}, -k_1(\varrho)t^{(1-\varrho)}\Bigg)
\end{aligned}
$$

istenen sonuç elde edilir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada birbiriyle ilişkili olan mevcut kesirli operatörlerin bir kombinasyonu olarak ifade edilerek yeni kesirli sabit orantılı Caputo türevi ele alınmıştır. Oluşturulan bu yeni kesirli türev daha geniş bir yelpazede gerçek verilerin modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu türev özellikle kontrol teorisinde ve mühendislikte geniş alana sahiptir.

Kesirli analiz ile Mittag-Leffler fonksiyonları arasında bir bağlantı vardır ve bu, CPC türevi kullanılarak ele alınan diferansiyel denklemlerin çözümü ile burada gösterilmiştir. Sumudu dönüşümü kullanılarak hesaplanan çözümler, çok yakın zamanda tanımlanan ve literatürde çeşitli uygulamaları var olan iki değişkenli ve üç değişkenli Mittag-Leffler fonksiyonu cinsinden ifade edilebilir.

İleride kontrol teorisinde önemli olan matematiksel modeller ele alınıp bu türevin etkisi incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

Anonymous, 2022. Laplace transform of Dirac Delta function, Mathematics, https://math.stackexchange.com/questions/1690741/laplace-transform-of-dirac-delta-function [Ziyaret Tarihi: 15 Aralık 2022].

Anderson, D.R. and Ulness, D. J., 2015. Newly defined conformable derivates, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 10, 109-137.

Akgül, E.K., Akgül, A., Alqahtani, R. T., 2021. A new application of the Sumudu transform for the falling body problem, *journal of function spaces*, volume 2021, 8.

Akgül, E.K., Jamshed, W., Nisar, K.S., Elagan, S.K., Alshehri, N.A., 2021. On solutions of gross domestic product model with different kernels, *Alexandria Engineering Journal*, 61, 1289-1295.

Akgül, E.K. and Akgül, A., 2022. New applications of Sumudu transform method with different fractional derivatives, *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 8 (5), 1-12.

Asiru, M.A., 2001. Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, no. 6, 906–910.

Asiru, M.A., 2002. Further properties of the Sumudu transform and its applications, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, no. 3, 441–449.

Asiru, M.A., 2003. Classroom note: application of the Sumudu transform to discrete dynamic systems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, no. 6, 944–949.

Atangana, A. and Akgül, A., 2020. Can transfer function and Bode diagram be obtained from Sumudu transform, *Alenxandria Engineering Journal*.

Atangana, A. and Baleanu, D., 2016. New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model, *Thermal Science*, 20(2), 763-769.

Aydın, M., 2021. Üç Katlı Sumudu Dönüşümü ve Bazı Diferansiyel Denklemlere Uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, *Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Konya.

Baleanu, D. And Fernandez, A., 2018. On some new properties of fractional derivates with Mittag-Leffler kernel, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 59, 444-462.

Baleanu, D. and Fernandez, A., 2019. On fractional operators and their classifications, *Mathematics*, 7, 830.

Baleanu, D., Fernandez, A., Akgül, A., 2020. On a fractional operator combining proportional and classical differintegrals, *Mathematics*, 8(3), 360.

Baydemir, B., 2014. Adi ve Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sumudu Dönüşüm Metodu ile Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, *Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Elazığ.

Belgacem, F.B.M., Karaballi, A.A., Kalla, S. L., 2003. Analytical investigations of the Sumudu transform and applications to integral production equations, *Mathematical Problems in Engineering*, no. 3, 103–118.

Belgacem, F.B.M. and Karaballi, A. A., 2005. Sumudu transform fundamental properties investigations and applications, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006, 1-23.

Caputo, M. and Fabrizio, M., 2015. A new definition of fractional derivative without singular kernel, *Progress in Fractional Differentiation and Applications* 1, 2, 73-85.

Çakmak, N.B., 2019. Sumudu Dönüşümü ve Diferansiyel Denklemlere Uygulaması, Yüksek Lisans Tezi, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Sakarya.

Çek, Y., 2005. Laplace, Ters Laplace Dönüşümleri ve Diferansiyel Denkleme Uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul.

Dernek, A., 2001. Diferansiyel Denklemler, *Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi*, İstanbul.

Diethelm, K., 2010. The analysis of fractional differential equations: An application-Oriented exposition using differantial operators of Caputo type, *Springer*.

Fernandez, A., Özarslan, M.A., Baleanu, D., 2019. On fractional calculus with general analytic kernels, *Apply. Math. Comput.*, 354, 248-265.

Günerhan, H., Dutta, H., Dokuyucu, M.A., Adel, A., 2020. Analysis of a fractional HIV model with Caputo and constant proportional Caputo operators, Chaos, *Solitons and Fractals*, 139, 110053.

Haubold, H.J., Mathai, A.M., Saxena, R.K., 2011. Mittag-Leffler functions and their applications, *Journal of applied mathematics*, 2011-2025.

Kaya, F., 2019. Sumudu Dönüşümlerinin Bazı Kısmi Türevli Denklemlere Uygulanması, Yüksek Lisans Tezi, *Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Sakarya.

Khalil, R., Horani, M.A., Yousef, A., Sababheh, M., 2014. A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.*, 264, 65-70.

Kilbas, A.A., Saigo, M., Saxena, R.K., 2004. Generalized Mittag-Leffler function and generalized fractional calculus operators, *Integral Transform. Spec. Func.*, 15, 31-49.

Koca, K., 2013. Kısmi Türevli Denklemler, *Gazi Kitabevi*, Ankara.

Kurulay, M., 2006. Diferensiyel Cebirsel Denklemlerin Kuvvet Serisi İle Çözümü, Yüksek Lisans Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, İstanbul, 3-4.

Mert, Y., 2003. Dirac Delta Genelleşmiş Fonksiyonunun Rassal Değişkenlerin Dağılımları Teorisinde Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, *Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 12-13.*

Mirzazadeh, M., 2016. A novel approach for solving fractional fisher equation using differential transform method, *Pramana*, 86 (5), 957-963.

Örcan, B., 2018. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çekirdek Üreten Metod İle Çözümleri,Yüksek Lisans Tezi, *Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Siirt.

Öztürk, G., 2022. Mittag-Leffler Çekirdekli Kesirli Diferansiyel Denklemlerin Laplace ve Sumudu Dönüşümleri ile Çözümleri, Yüksek Lisans Tezi, *Siirt Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Siirt.

Pekalp, M.H., 2019. Bir Geometrik Sürecin Ortalama Değer Ve Varyans Fonksiyonları İçin Kuvvet Serisi Açılımları Ve Tahminleri, Doktora Tezi, *Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 7-8.

Podlubny, I., 1998. Fractional differential equations, an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications, *Elsevier, Academic Press*, Volume 198, 1st Edition.

Prabhakar, T.R., 1971. A singular integral equation with a generalized Mittag-Leffler function in the kernel, *Yokohama Math. J.*, 19, 7-15.

Rahaman, M., Mondal, S.P., Shaikh, A.A, Pramanik, P., Roy, S., Maiti, M.K., Mondal, R., De, D., 2020. Artificial bee colony optimization-inspired synegetic study of fractional-order economic production quantitymodel, *Methodologies and Application*, 24:15341-15359.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O. I., 1993. Fractional integrals and derivatives, *Gordon and Breach Science Publishers*.

Samko, S.G. and Marichev, O.I., 1993. Fractional integrals and derivates: Theory and applications, *Gordon and Breach Science Publishers*.

Spiegel, M.R., 1965. Theory and problems of Laplace transforms, Schaums Outline Series, *McGraw-Hill*, New York.

Watugala, G.K., 1993. Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35–43.

Watugala, G.K., 1998. Sumudu transform; a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems, *Mathematical Engineering in Industry*, no. 4, 319–329.

Watugala, G.K., 2002. Sumudu transform for functions of two variables, *Mathematical Engineering in Industry*, no. 4, 293–302.

Weerakoon, S., 1994. Application of Sumudu transform to partial differential equations, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, no. 2, 277–283.

Weerakoon, S., 1998. Complex inversion formula for Sumudu transform, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, no. 4, 618–621.

Yaşar, İ.B., 2005. Diferansiyel Denklemler ve Uygulamaları, *Siyasal Kitabevi*, Yıldız Teknik Üniversitesi, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Enis TOKTAŞ

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Refhan Tümer Lisesi (Y.D.A.), Eyüpsultan, İSTANBUL**	**2002**
Üniversite	:	**Dumlupınar Üniversitesi, KÜTAHYA**	**2007**
Yüksek Lisans	:	**Siirt Üniversitesi, SİİRT**	**2023**
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2007	**İstanbul Murat Dergisi Dershaneleri**	**Matematik Öğretmeni**
2016	**Sarıyer Mürüvvet Evyap Okulları**	**Matematik Öğretmeni**
2018	**MEB**	**Matematik Öğretmeni**

UZMANLIK ALANI

Uygulamalı Matematik

YABANCI DİLLER

İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR