

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**DARALAN KESİTLİ KATMANLI KOMPOZİT KİRİŞLERİN SERBEST
TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Berke TÜRKKAL

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

OCAK 2023

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ ★ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

**DARALAN KESİTLİ KATMANLI KOMPOZİT KİRİŞLERİN SERBEST
TİTREŞİM ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Berke TÜRKKAL
(511171146)**

Uçak ve Uzay Mühendisliği Anabilim Dalı

Uçak ve Uzay Mühendisliği Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL

OCAK 2023

İTÜ, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü'nün 511171146 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi Berke TÜRKKAL, ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “DARALAN KESİTLİ KATMANLI KOMPOZİT KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ” başlıklı tezini aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof.Dr. Aytaç ARIKOĞLU**
İstanbul Teknik Üniversitesi

Dr. Öğr. Üye. Serhat YILMAZ
Milli Savunma Üniversitesi

Teslim Tarihi : 28 Aralık 2022
Savunma Tarihi : 23 Ocak 2023





Aileme,



ÖNSÖZ

Öncelikle yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam boyunca verdiği destekler ile yön gösteren, değerli hocam Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL'a en içten dileklerimle saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans tez çalışmam boyunca bana yardımlarını eksik etmeyen Ahmet Gökay ÖZTÜRK'e, Mustafa Tolga YAVUZ'a, Ece EKMEKÇİ'ye, Bilge Dilara İSKEÇELİ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim süresince manevi olarak desteklerini esirgemeyen aileme, Dilara COŞKUN'a ve kıymetli arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Ocak 2023

Berke Türkkal
(Makine Mühendisi)



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	vii
İÇİNDEKİLER	ix
KISALTMALAR.....	xi
SEMBOLLER	xiii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	xv
ŞEKİL LİSTESİ.....	xvii
ÖZET	xxi
SUMMARY	xxv
1. GİRİŞ	1
1.1 Literatür Taraması	1
1.2 Tezin Amacı	3
2. KİRİŞ TEORİLERİ.....	5
2.1 Euler-Bernouilli Kiriş Teorisi	6
2.2 Rayleigh Kiriş Teorisi	6
2.3 Kayma Kiriş Teorisi	7
2.4 Timoshenko Kiriş Teorisi.....	7
3. TİTREŞİM.....	9
3.1 Kiriş Titreşimi	9
3.1.1 Fiziksel model	10
3.1.2 Sınır şartları.....	11
3.1.2.1 Basit mesnetli kiriş	12
3.1.2.2 Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest kiriş.....	13
3.1.2.3 İki uçtan ankastre mesnetli kiriş.....	13
3.1.3 Euler-Bernouilli kirişinin matematik modeli	14
3.1.4 Dikdörtgensel üniform kesitli Euler-Bernouilli kirişlerinde serbest titreşim hareket denklemi	15
3.1.5 Bir ekseninde daralan Euler-Bernouilli kirişlerinde serbest titreşim hareket denklemi.....	16
4. DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ	17
4.1 Analitik Çözüm	17
4.1.1 Basit mesnetli üniform kesitli metalik kirişin çözümü	18
4.1.2 Ankastre mesnetli üniform kesitli metalik kirişin çözümü	20
4.1.3 İki uçtan ankastre mesnetli üniform kesitli metalik kirişin çözümü	23
4.2 Diferansiyel Dönüşüm Metodu İle Çözüm	25
4.2.1 Dönüştürülmüş sınır şartları.....	28
4.2.1.1 Basit mesnetli kiriş için DTM sınır şartları.....	28
4.2.1.2 Ankastre mesnetli kiriş için DTM sınır şartları.....	28
4.2.1.3 İki uçtan ankastre mesnetli kiriş için DTM sınır şartları.....	29
4.2.2 Üniform kesitli metalik kirişin DTM ile çözümü	29
5. KOMPOZİT YAPILAR	33

5.1 Kompozitlerin Sınıflandırılması	33
5.1.1 Matris malzemelerine göre kompozit malzemeler	33
5.1.1.1 Polimer matrisli kompozitler	33
5.1.1.2 Metal matrisli kompozitler	34
5.1.1.3 Seramik matrisli kompozitler	34
5.1.1.4 Karbon matrisli kompozitler	35
5.1.2 Takviye elemanına göre kompozit malzemeler	35
5.1.2.1 Fiber takviyeli kompozitler	35
5.1.2.2 Partikül takviyeli kompozitler	35
5.1.2.3 Dolgu kompozitler	36
5.1.2.4 Katmanlı kompozitler	36
5.2 Kompozit Yapıların Titreşimi	36
5.2.1 Düzlem durumunda gerilmeler ve gerinimler için koordinat dönüşüm ilişkileri	40
5.2.2 Açılı yerleştirilmiş fiberlere sahip katmanlı kompozitler	43
5.2.2.1 Açılı yerleştirilmiş fiberlere sahip katmanlı kompozitlerin düzlem gerilme problemlerinde rijitlik ve esneklik matris dönüşümleri	43
5.2.2.2 Ortotropik malzemeler için rijitlik ve esneklik matrisinin dönüşümleri	45
5.2.2.3 Gerilme düzleminde kompozit katmanlar	46
5.2.3 Katmanlı kompozit yapı kabulleri ve yapının özellikleri	49
5.2.3.1 Tek bir katmanın rijitlik matrisinin hesaplanması	50
5.2.3.2 Katmanlı yapının gerinim-yer değiştirme ilişkisi	50
5.2.3.3 Katmanlı kompozitin düzlem içi kuvvetleri ve momentleri	52
5.2.3.4 Her katman için orta düzlem gerinimlerinin hesaplanması	55
5.2.3.5 Her katmanda indüklenen orta düzlem gerilmelerinin hesaplanması	56
5.3 Katmanlı Kompozit Kirişlerin Titreşim Analizi	56
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	59
6.1 Metalik Kirişler	59
6.1.1. Uniform kesitli metalik kiriş	59
6.1.2. Daralan Kesitli Metalik Kiriş	65
6.2 Katmanlı Kompozit Kirişler	67
6.2.1 Uniform kesitli katmanlı kompozit kiriş	69
6.2.2. Daralan kesitli katmanlı kompozit kiriş	78
7. YORUMLAR	85
KAYNAKLAR	91
EKLER	93
ÖZGEÇMİŞ	119

KISALTMALAR

DTM : Diferansiyel Dönüşüm Metodu

Ref : Referans





SEMBOLLER

A	: Kesit Alanı
[A]	: Uzama Rijitlik Matrisi
A₀	: Kiriş Kök Kesit Alanı
b	: Giriş Genişliği
[B]	: Kaplin Rijitlik Matrisi
b₀	: Kiriş Kök Genişliği
c	: Daralma Oranı
[D]	: Eğilme Rijitlik Matrisi
E, E₁₁, E₁₂	: Elastisite Modülü
E_{eq}	: Eş Değer Elastisite Modülü
F[k]	: DTM Dönüşüm Fonksiyonu
G₁₂, G₁₃, G₂₃	: Kayma Modülü
I	: Atalet Momenti
K_x, K_y, K_{xy}	: Eğilme Eğriliği
L	: Kiriş Boyu
M_x, M_y, M_{xy}	: Moment Bileşenleri
N_x, N_y, N_{xy}	: Düzlem İçi Kuvvetler
[Q]	: Hook Kanunu Matrisi
t	: Zaman
v	: Poisson Oranı
v	: Kesme Kuvveti
y	: Yer Değiştirme
ε	: Gerinim
θ	: Yerleştirme Açısı
π	: Pi Sayısı
ρ	: Yoğunluk
ω	: Doğal Frekans
σ	: Gerilme



ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

Çizelge 2.1 : Kiriş teorilerinin karşılaştırılması [8].	7
Çizelge 4.1 : Ankastre mesnetli kiriş için βnL değerleri.....	23
Çizelge 4.2 : İki ucu ankastre mesnetli kiriş için βnL değerleri.....	25
Çizelge 4.3 : DTM dönüşüm fonksiyonları.	26
Çizelge 4.4 : $x=0$ konumunda sınır şartlarının DTM dönüşüm fonksiyonları.....	27
Çizelge 4.5 : $x=L$ konumunda sınır şartlarının DTM dönüşüm fonksiyonları.	27
Çizelge 6.1 : Düşük karbonlu çelik mekanik özellikleri.....	59
Çizelge 6.2 : Ankastre mesnetli kiriş serbest titreşim ilk 6 modunun frekansı.	60
Çizelge 6.3 : Ankastre mesnetli sınır şartı.	62
Çizelge 6.4 : Basit mesnetli sınır şartı.	62
Çizelge 6.5 : İki uçtan ankastre mesnetli sınır şartı.	62
Çizelge 6.6 : Farklı genişlik-kalınlık oranına sahip kirişlerin 1. doğal frekansları. ..	64
Çizelge 6.7 : Farklı narinlik oranına sahip kirişlerin 1. doğal frekansları.	64
Çizelge 6.8 : Farklı daralma oranına sahip kirişlerin 1. doğal frekansı-1.....	66
Çizelge 6.9 : Farklı daralma oranına sahip kirişlerin 1.doğal frekansı-2.....	67
Çizelge 6.10 : Farklı daralma oranına sahip kirişlerin farklı sınır şartlarında 1.modunun doğal frekansları.	67
Çizelge 6.11 : Referans ile mevcut çalışmanın karşılaştırılması.	68
Çizelge 6.12 : Karbon epoksi (AS4/3501-6) kompozit malzemesinin mekanik özellikleri.	69
Çizelge 6.13 : Eleman sayısı ve eşdeğer elastisite modülü (Eeq) ilişkisi.....	69
Çizelge 6.14 : Kompozit malzemenin özellikleri.	70
Çizelge 6.15 : [0/90/90/0] yerleşim açılı kompozit kiriş ilk 4 modunun doğal frekansı.	70
Çizelge 6.16 : 20 narinlik oranına sahip kirişlerin doğal frekansı.	71
Çizelge 6.17 : 50 narinlik oranına sahip kirişlerin doğal frekansı.	72
Çizelge 6.18 : 100 narinlik oranına sahip kirişin doğal frekansı.	72
Çizelge 6.19 : Yerleşim açılarının doğal frekans üzerindeki etkisi.	73
Çizelge 6.20 : Katman sayısının doğal frekans üzerindeki etkisi.	74
Çizelge 6.21 : Ankastre mesnetli kirişin ilk 6 modu.	77
Çizelge 6.22 : Basit mesnetli kirişin ilk 6 modu.....	77
Çizelge 6.23 : İki uçtan ankastre mesnetli kirişin ilk 6 modu.	78
Çizelge 6.24 : NCT301 grafit epoksi malzemesinin mekanik özellikleri.....	79
Çizelge 6.25 : Ankastre mesnetli daralan kesitli katmanlı kompozit kirişin ilk 4 modunun doğal frekansı.	79
Çizelge 6.26 : Basit mesnetli daralan kesitli katmanlı kompozit kirişin ilk 4 modunun doğal frekansı.	80
Çizelge 6.27 : İki uçtan ankastre mesnetli daralan kesitli katmanlı kompozit kirişin ilk 4 modunun doğal frekansı.	80
Çizelge 6.28 : Daralma oranının 1. Doğal frekansa etkisi.	80
Çizelge 6.29 : Daralma oranının ankastre mesnetli kirişin doğal frekansına etkisi..	81

Çizelge 6.30 :	Daralma oranının basit mesnetli kirişin doğal frekansına etkisi.....	81
Çizelge 6.31 :	Daralma oranının iki uçtan ankastre mesnetli kirişin doğal frekansına etkisi.	81
Çizelge 6.32 :	Yerleştirme açılarının ve daralma oranının 1. doğal frekansa etkisi. .	82
Çizelge 6.33 :	Ankastre Mesnetli Daralan Kesitli Kirişte Narinlik Oranının Doğal Frekansa Etkisi.....	82
Çizelge 6.34 :	Basit mesnetli daralan kesitli kirişte narinlik oranının doğal frekansa etkisi.....	83



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1 : Ankastre mesnetli kiriş.	10
Şekil 3.2 : Basit mesnetli kiriş.	11
Şekil 3.3 : İki ucu ankastre mesnetli kiriş.	11
Şekil 3.4 : Basit mesnetli kiriş.	12
Şekil 3.5 : Ankastre mesnetli kiriş.	13
Şekil 3.6 : İki ucu ankastre mesnetli kiriş.	13
Şekil 3.7 : Daralan kesitli Euler-Bernoulli kirişi.	16
Şekil 4.1 : $\cosh\beta L \cos\beta L = -1$ grafiği.	22
Şekil 4.2 : $\cosh\beta L \cos\beta L = 1$ grafiği.	24
Şekil 5.1 : Fiber, matris ve kompozitte uzunlamasına yükleme ve bunun sonucunda oluşan gerilmeler.	37
Şekil 5.2 : Gerilme ve gerinimler için koordinat dönüşümleri: (a)İki eksen takımının gösterimi. (b)x-y düzleminden kesit. (c)1-3 düzleminden kesit.	40
Şekil 5.3 : Gerilmeler ve koordinat sistemlerinin ilişkileri: (a) ε_{xx} için dönüşüm. (b) ε_{xx} için dönüşüm. (c) γ_{xy} için dönüşüm. (d) γ_{xy} dönüşüm açıları.	42
Şekil 5.4 : x-ekseni ile θ açısı yapan fiberler.	44
Şekil 5.5: Katmanlı kompozit kirişin katman yapısı: (a) Kompozit kirişten alınan bir parça. (b)Kompozit kirişin xz düzlemine göre kesit görünüşü.	51
Şekil 5.6 : Kirchhoff hipotezi.	51
Şekil 5.7 : Katmanlı kompozit yapıdan alınan diferansiyel eleman.	53
Şekil 5.8 : Katmanlara göre gerilme ve gerinim dağılımı.	56
Şekil 6.1 : Kiriş boyutları.	59
Şekil 6.2 : Ankastre mesnetli kirişin titreşim analizi sonuçları ve mod şekilleri: (a)1.Mod. (b)2.Mod. (c)3.Mod. (d)4.Mod. (e)5.Mod. (f)6.Mod.	61
Şekil 6.3 : Ankastre mesnetli kirişin 1. mod şekli ve doğal frekansı.	63
Şekil 6.4 : Basit mesnetli kirişin 1. mod şekli ve doğal frekansı.	63
Şekil 6.5 : İki ucu ankastre mesnetli kirişin 1. mod şekli ve doğal frekansı.	63
Şekil 6.6 : 0 daralma oranına sahip kirişin 1. modu.	65
Şekil 6.7 : 0,25 daralma oranına sahip kirişin 1. modu.	65
Şekil 6.8 : 0,5 daralma oranına sahip kirişin 1. modu.	66
Şekil 6.9 : 0,75 daralma oranına sahip kirişin 1. Modu.	66
Şekil 6.10 : 1 daralma oranına sahip kirişin 1. modu.	66
Şekil 6.11 : [0/90/90/0] Yerleşim açılı kompozit kirişin 1. Modu.	70
Şekil 6.12 : [0/90/90/0] Yerleşim açılı kompozit kirişin 2. modu.	71
Şekil 6.13 : [0/90/90/0] Yerleşim açılı kompozit kirişin 3.modu.	71
Şekil 6.14 : [30/-30/-30/30] yerleşim açılı 4 katmanlı kirişin 1.modu.	75
Şekil 6.15 : [-30/30/-30/-30/30/-30] yerleşim açılı 6 katmanlı kirişin 1.modu.	75
Şekil 6.16 : [30/-30/30/-30/-30/30/-30/30] yerleşim açılı 8 katmanlı kirişin 1. modu.	75
Şekil 6.17 : [-30/30/-30/30/-30/-30/30/-30/30/-30] yerleşim açılı 10 katmanlı kirişin 1. modu.	76

Şekil 6.18 : [30/-30/30/-30/30/-30/-30/30/-30/30/-30/30] yerleşim açılı 12 katmanlı girişin 1.modu.....	76
Şekil 6.19 : Ankastre mesnetli giriş.	76
Şekil 6.20 : Basit mesnetli giriş.	77
Şekil 6.21 : İki ucu ankastre mesnetli giriş.	77
Şekil 6.22 : Orta düzlem daralan katmanlı kompozit giriş (Model M).....	79
Şekil 7.1 : Eşdeğer elastisite modüşü ve eleman sayısı ilişkisi.	86
Şekil 7.2 : Sınır şartlarının doğal frekans üzerindeki etkisi.	86
Şekil 7.3 : Genişlik kalınlık oranının (b/h) doğal frekansa etkisi.	87
Şekil 7.4 : Narinlik oranının (L/h) doğal frekansa etkisi.	87
Şekil 7.5 : Katman sayısının doğal frekans üzerindeki etkisi	88
Şekil 7.6 : Yerleştirme açısının doğal frekans üzerindeki etkisi.....	88
Şekil 7.7 : Basit mesnetli girişlerde daralma oranının doğal frekans üzerindeki etkisi.	89
Şekil 7.8 : İki ucu ankastre mesnetli girişlerde daralma oranının doğal frekans üzerindeki etki.....	89
Şekil 7.9 : Ankastre mesnetli girişlerde daralma oranının doğal frekans üzerindeki etkisi.	90
Şekil A. 1 : Modal modülünün seçilmesi.	94
Şekil A. 2 : Malzeme özelliklerinin girilmesi.	95
Şekil A. 3 : Geometrinin Oluşturulması.	95
Şekil A. 4 : Geometrinin Çizilmesi.....	96
Şekil A. 5 : Geometrinin oluşturulması ve katıya dönüştürülmesi.	96
Şekil A. 6 : Modelin güncellenmesi.....	97
Şekil A. 7 : Modelin düzenlenmesi.....	97
Şekil A. 8 : Geometriye malzemin atanması.	98
Şekil A. 9 : Kafes elemanlarının oluşturulması.	98
Şekil A. 10 : Kafes elemanların oluşturulması.	99
Şekil A. 11 : Sınır şartlarının oluşturulması.	99
Şekil A. 12 : Çözümün oluşturulması.	100
Şekil A. 13 : Problemin çözülmesi.	100
Şekil A. 14 : Mod şekil sonuçlarının oluşturulması.....	101
Şekil A. 15 : Tüm sonuçların değerlendirilmesi.	101
Şekil A. 16 : Sonuçların görselleştirilmesi.	102
Şekil A. 17 : ACP Modülünün Seçimi.....	102
Şekil A. 18 : Malzeme atanması	103
Şekil A. 19 : Geometrinin oluşturulması.	103
Şekil A. 20 : Yüzey modelinin seçilmesi.....	104
Şekil A. 21 : Yüzeyin oluşturulması.	104
Şekil A. 22 : Modelin güncellenmesi.....	105
Şekil A. 23 : Modelin düzenlenmesi.....	105
Şekil A. 24 : Giriş kalınlığının girilmesi ve malzeme atanması.	106
Şekil A. 25 : Kafes elemanların oluşturulması.	106
Şekil A. 26 : Giriş üzerindeki kafes elemanlar.	107
Şekil A. 27 : Uzunluk birimi seçimi.	107
Şekil A. 28 : Kurulumun düzenlenmesi.....	108
Şekil A. 29 : Kumaşın oluşturulması.	108
Şekil A. 30 : Katman kalınlığı ve malzemesinin belirlenmesi.....	109
Şekil A. 31 : Yığın oluşturulması için pencerenin açılması.....	109
Şekil A. 32 : Yerleştirme açılarının belirlenmesi.....	110

Şekil A. 33 : Rozet penceresinin açılması.	110
Şekil A. 34 : Orijinin belirlenmesi.....	111
Şekil A. 35 : Yönlü seçim takımı penceresinin açılması.....	111
Şekil A. 36 : Yönlü seçim takımının oluşturulması.....	112
Şekil A. 37 : Model grubu oluşturulması.....	112
Şekil A. 38 : Katman oluşturma penceresinin açılması.....	113
Şekil A. 39 : Katmanların oluşturulması.....	113
Şekil A. 40 : Yerleşim çizimlerinin güncellenmesi.....	114
Şekil A. 41 : Modal analiz ile ACP Pre modülünün bağlanması.....	114





DARALAN KESİTLİ KATMANLI KOMPOZİT KİRİŞLERİN SERBEST TİTREŞİM ANALİZİ

ÖZET

Kompozit malzemeler fiziksel veya kimyasal olarak birbirinden büyük farklılıkları ve birbirlerine göre farklı avantajları olan, iki veya daha fazla malzemenin makro seviyede fiziksel olarak bir araya gelmesiyle oluşturulan malzemelerdir. Günümüzde özellikle havacılık alanındaki mevcut olan rekabet mühendisleri hafif ve yüksek dayanımlı malzemeler üretmeye yönlendirmiştir. Bu doğrultuda kompozit malzemelerin kullanımı her geçen gün daha yaygınlaşmaktadır.

Titreşim, bir denge noktası veya sabit bir referans eksenini etrafında cismin yaptığı mekanik salınımdır. Titreşim bazı durumlarda istenilen bir şey olsa da özellikle mekanik yapılarda hasara, enerji kayıplarına ve gürültüye neden olabileceğinden dolayı istenmemektedir. Bu sebepten ötürü sistem tasarımlarında ve mühendislik hesaplamalarında sistemin titreşim karakteristiğinin bilinmesi büyük önem teşkil etmektedir.

Uzunluğu diğer boyutlarına göre çok daha büyük olan ve uzunlamasına eksenine gelen dik kuvvetler altında çalışan yapılar kiriş olarak adlandırılmaktadır. Kiriş boyunun, kiriş kalınlığına oranına narinlik oranı denilmektedir. Narinlik oranı 10'dan büyük olan tüm yapılar narin yapılar olarak nitelendirilir.

Kirişler, geçmişten günümüze kadar havacılık alanında kritik rol oynamıştır. Tek motorlu uçakların kafes-kiriş gövdesinde kullanıldığı gibi günümüzde de yarı-monokok gövdeli uçaklarda ana yük taşıyıcısı olarak kullanılmaktadır. Destek elemanı olarak kullanılan bu elemanların kontrolsüz titreşimleri sonucunda sistemin hasar görmemesi için sistemin titreşim karakteristiğinin belirlenmesi ve bu doğrultuda sönümleme elemanlarının seçilmesi büyük önem arz etmektedir.

Havacılık gibi yüksek riskli bir alanında kritik rol oynayan yapıların davranışlarının belirlenmesi kuşkusuz ki tasarım aşamasında büyük öneme sahiptir. Bu sebepten dolayı geçmişten günümüze bu konuda pek çok çalışma yapılmış ve yöntemler geliştirilmiştir. Günümüzde kirişlerin karakteristik davranışlarını analiz etmek için yüksek doğruluk ve hassasiyete sahip paket programlar kullanılıyor olsa da bu programların temelini oluşturan birçok kiriş teorisi bulunmaktadır. Kiriş teorileri, sonlu elemanlar analizlerine geçilmeden önce henüz tasarım aşamasındayken hızlı ve doğru sonuçlar veren yöntemlerdir. Günümüzde kirişlerin analizleri için birçok kiriş teorisi bulunmaktadır. Bu kiriş teorilerinden en yaygın kullanıma sahip olanları ise Euler-Bernoulli, Rayleigh, Kayma ve Timoshenko kiriş teorileridir. Bu teorilerde, kiriş davranışlarını yöneten hareket denklemleri kısmi diferansiyel denklemler olarak ifade edilerek sınır ve başlangıç koşullarında çözülmektedir.

Bu doğrultuda literatürde farklı yöntemlerle yapılmış birçok çalışma bulunmaktadır. Bunlardan bazılarında kiriş modeli olarak Euler-Bernoulli Kiriş modeli kullanılırken, bir kısmında Timoshenko kiriş modeli kullanılarak metalik, katmanlı kompozit ve sandviç yapılı kompozitler üzerinde çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar arasında daralan kesitli dönen kirişleri konu alan bir çalışmada, dönme hareketinin kirişe sağladığı rijitlik ve daralan kesidin sebep olduğu zayıflık incelenmiştir [1]. Bir başka çalışmada viskoelastik çekirdekli sandviç kompozitler incelenmiş ve çekirdek kalınlığının doğal frekansa etkisi gösterilmiştir [2]. Transfer matrisi yöntemi kullanılan bir çalışmada ise narinlik oranının ve kiriş genişliğinin doğal frekansa olan etkileri incelenmiştir [3]. Katmanlı kompozit kirişleri konu alan bir diğer çalışmada ise Euler-Bernoulli kiriş teorisi kabulüyle sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak serbest titreşim analizi yapılmış ve katman sayısının, yerleştirme açısının serbest titreşime olan etkileri okuyucuya sunulmuştur. Kompozit kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerinin Laplace alanında analiz edildiği bir çalışmada ise Timoshenko kiriş teorisi temel alınmış ve paket programlardan %80 daha hızlı bir yöntem geliştirilmiştir [4].

Literatür taramasının ardından özellikle daralan kesitli, katmanlı kompozit kirişlerin analizinde sonlu elemanlar yönteminin kullanıldığı tespit edilmiş ve bu tez çalışması kapsamında bu yöntem ile aynı hassasiyet ve doğruluğa sahip, daha hızlı bir yöntem geliştirilmesi amacıyla çalışmalar yapılmıştır.

Euler-Bernoulli yaklaşımı sayesinde hızlı bir şekilde gerilme-gerinim dağılımı elde edilebildiğinden ve yükleme hakkında bilgi sahibi olunabildiğinden dolayı ilk hesaplamalarda bu yaklaşım oldukça kullanışlıdır. Detay analizlerde kiriş yapısı daha da detaylandırılarak farklı kiriş modelleri ile sistem tekrar çözülür. İlk yaklaşım olan Euler-Bernoulli sonuçları ile arada büyük fark olması durumunda kullanılan yeni yaklaşımın sınır şartları ve kabulleri kontrol edilerek sistem tekrar çözülür.

Bu genel yaklaşımın geliştirilecek olan yönteme temel olması amacıyla, bu çalışma kapsamında Euler-Bernoulli kiriş teorisi temel alınarak farklı malzeme tipi ve geometrik özelliklere sahip kirişlerin serbest titreşim analizi için bir yöntem geliştirilmiştir. Geliştirilen yöntem ile metalik ve katmanlı kompozitten oluşan, uniform ve daralan kesitli kirişler incelenmiş ve geliştirilen metodun doğruluğu referanslar ile doğrulanmıştır. Geliştirilen yöntemin doğruluğu kanıtlandıktan sonra sınır şartlarının, geometrik özelliklerin doğal frekanslar üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Çalışma kapsamında öncelikle uniform kesitli metalik kirişler ele alınmıştır. Oluşturulan modeller, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest, basit mesnetli ve iki ucu ankastre mesnetli sınır şartlarında Diferansiyel Dönüşüm Metodu (DTM) kullanılarak Mathematica programında yazılan kod ile ve ANSYS paket programı ile sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak çözülmüş ve elde edilen sonuçlar analitik olarak elde edilen sonuçlarla ve referanslarla karşılaştırılmıştır. Daha sonrasında daralan kesitli metalik kirişler incelenmiş ve uniform kesitli kirişlerde olduğu gibi Mathematica programında yazılan DTM kodu ile elde edilen ve ANSYS programından elde edilen sonuçlar referanslar ile karşılaştırılmıştır.

Denklemlerin çözüm yöntemi olarak kullanılan DTM kodunun doğruluğu metalik kiriş çalışmalarıyla kanıtlandıktan sonra öncelikle uniform kesitli katmanlı kompozitten oluşan kirişlerin serbest titreşim analizinin hızlı bir şekilde yapılabilmesi için ortotropik özelliklere sahip olan kirişlerin farklı yerleşim açıları ve kalınlıkları göz önünde bulundurularak eş değer elastisite modülleri bulunmuş ve bu sayede o kirişe

karşılık gelen isotropik kiriş modellenmiştir. Daha sonrasında ise daralan kesitli katmanlı kompozit kirişlerin modellenmesi için bir yöntem geliştirilerek daralma oranları eş değer elastisite modülünün hesabına dahil edilmiştir. Geliştirilen yöntemde daralan kesitli kompozit kiriş, küçük elemanlara bölünerek her bir eleman için eş değer elastisite modülü hesaplanmış ve bu küçük parçalardan yola çıkarak incelenen kirişin eş değer elastisite modülü bulunmuştur. Farklı sayıda elemanlara bölerek ideal eleman sayısı bulunmuş ve elde edilen eş değer elastisite modülleri kullanılarak farklı katman yapılarına ve geometrik özelliklere sahip kirişler analiz edilmiş elde edilen sonuçların doğruluğu referanslar ile karşılaştırılarak gösterilmiştir. Sonuçların doğruluğu ispatlandıktan sonra sınır şartlarının, narin oranının, daralma oranının, genişlik-kalınlık oranının ve yerleştirme açılarının doğal frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Çalışma sonunda, geliştirilen yöntem için optimum eleman sayısı belirlenmiş, sınır şartlarındaki kısıtların doğal frekans üzerindeki etkisi gösterilmiş, daralma oranı, narinlik oranı ve genişlik kalınlık oranının ve yerleştirme açılarının serbest titreşimde doğal frekansa etkisi tespit edilmiştir. Literatürde kullanılan yöntemlerden elde edilen sonuçlara son derece yakın sonuçlar veren çok hızlı bir yöntem geliştirilmiştir.



FREE VIBRATION ANALYSIS OF LAMINATED TAPERED COMPOSITE BEAM

SUMMARY

Composite materials are materials that are physically or chemically different from each other and have different advantages over each other, and are formed by the physical combination of two or more materials at the macro level. Today, competition, especially in the field of aviation, has led engineers to produce light and high-strength materials. In this direction, the use of composite materials is becoming more common day by day.

Vibration is the mechanical oscillation of an object around an equilibrium point or a fixed reference axis. Although vibration is desirable in some cases, it is undesirable, especially since it can cause damage to mechanical structures, energy losses and noise. For this reason, it is of great importance to know the vibration characteristics of the system in system designs and engineering calculations.

Structures whose length is much larger than their other dimensions and which work under vertical forces to their longitudinal axis are called beams. The ratio of the beam length to the beam thickness is called the slenderness ratio. All structures with a slenderness ratio greater than 10 are considered slender structures.

Beams have played a critical role in aviation from past to present. As it is used in the truss fuselage of single-engine airplanes, it is still used as the main load carrier in semi-monocoque airplanes today. In order not to damage the system as a result of uncontrolled vibrations of these elements used as support elements, it is of great importance to determine the vibration characteristics of the system and to select damping elements accordingly.

Determining the behaviors of structures that play a critical role in a high-risk field such as aviation is undoubtedly have great importance at the design stage. For this reason, many studies and methods have been developed on this subject from past to present. Although packaged softwares with high accuracy and precision are used today to analyze the characteristic behavior of beams, there are many beam theories that form the basis of these softwares. Beam theories are methods that give fast and accurate results while they are still in the design phase before moving on to finite element analysis. Today, there are many beam theories for the analysis of beams. Euler-Bernoulli, Rayleigh, Shear and Timoshenko beam theories are the most widely used beam theories. In these theories, the equations of motion governing beam problems are expressed as partial differential equations and solved in boundary and initial conditions.

In this direction, there are many studies conducted with different methods in the literature. While Euler-Bernoulli beam model is used as beam model in some of them, Timoshenko beam model is used in some of them. Various studies have been carried out on metallic, laminated composite and sandwich composites with these beam

models. Among these studies, in a study on rotating beams with tapered section, the rigidity provided by the rotational movement to the beam and the weakness caused by the tapered section were examined [1]. In another study, sandwich composites with viscoelastic core were examined and the effect of core thickness on natural frequency was shown [2]. In a study using the transfer matrix method, the effects of slenderness ratio and beam width on natural frequency were investigated [3]. In another study on laminated composite beams, free vibration analysis was carried out using the finite element method with the acceptance of Euler-Bernoulli beam theory, and the effects of the number of layers and ply angle on free vibration were presented to the reader. In a study in which the free and forced vibrations of composite beams were analyzed in the Laplace field, Timoshenko beam theory was based and a method that is 80% faster than package programs has been developed [4].

After the literature review, it was determined that the finite element method was used in the analysis of tapered laminated composite beams, and within the scope of this thesis, studies were carried out to develop a faster method with the same sensitivity and accuracy with this method.

This approach is very useful in the first calculations, since the stress-strain distribution can be obtained quickly and information about the loading can be obtained thanks to the Euler-Bernoulli approach. In the detailed analysis, the beam structure is further detailed and the system is solved again with different beam models. If there is a big difference between the Euler-Bernoulli results, which is the first approach, the system is solved again by checking the boundary conditions and assumptions of the new approach used.

In order to use this general approach as a basis for the method to be developed, a method for free vibration analysis of beams with different material types and geometric properties has been developed based on the Euler-Bernoulli beam theory within the scope of this study. With the developed method, beams with uniform and tapered cross-sections consisting of metallic and laminated composites were examined and the accuracy of the developed method was verified with references. After proving the accuracy of the developed method, the effect of boundary conditions and geometric properties on natural frequencies was investigated.

Within the scope of the study, first of all, metallic beams with uniform cross-section are discussed. The models created were solved using the code written in the Mathematica program (by using the Differential Transformation Method (DTM)) and the finite element method with the ANSYS package software in boundary conditions with fixed-free, simply supported and fixed-fixed. The results obtained were compared with results analytically obtained and references. Afterwards, metallic beams with tapered section were examined and the results obtained with the DTM code written in the Mathematica program and obtained from the ANSYS program, as in the beams with uniform section, were compared with the references.

After the correctness of the DTM code, which is used as the solution method of the equations, has been proven by metallic beam studies, first of all, studies have been carried out to quickly perform free vibration analysis of beams consisting of layered composite with uniform cross section. In this direction, by taking into account the different placement angles and thicknesses of the beams with orthotropic properties, equivalent elasticity modules were found and the isotropic beam corresponding to that beam was modeled. Afterwards, a method was developed for the modeling of tapered composite beams and the tapered ratios were included in the calculation of the

equivalent modulus of elasticity. In the developed method, the tapered section composite beam was divided into small elements and the equivalent elasticity modulus was calculated for each element, and the equivalent elasticity modulus of the investigated beam was found from these small parts. The ideal number of elements was found by dividing them into different numbers of elements, and beams with different layer structures and geometric properties were analyzed using the obtained equivalent elasticity modules, and the accuracy of the results obtained was shown by comparing them with the references. After verifying the accuracy of the results, the effects of boundary conditions, slender ratio, tapered ratio, width-thickness ratio, and ply angles on natural frequency were investigated.

At the end of the study, the optimum number of elements for the developed method was determined, the effect of the constraints in the boundary conditions on the natural frequency was shown, the effects of tapered ratio, slenderness ratio, width-thickness ratio and ply angles on the natural frequency in free vibration were determined. A very rapid method has been developed that gives results very close to the results obtained from the methods used in the literature.





1. GİRİŞ

Kirişler uzunlamasına eksene dik kuvvetler altında çalışan, diğer iki boyutunun uzunluğuna göre daha küçük olduğu yapılardır. Günümüzde birçok yapının temelini oluşturan kirişler havacılık alanında da büyük öneme sahiptir. Tek motorlu uçaklarda görülen kafes-kiriş gövde yapısında kullanıldığı gibi günümüzde yaygın olarak kullanılan yarı-monokok gövdelerin ana yük taşıyıcıları olarak kullanılmaktadır.

Havacılık alanında büyük öneme sahip olan kirişlerin davranışlarının belirlenmesi kuşkusuz ki kritik öneme sahiptir. Bu sebeple geçmişten günümüze kirişlerin davranışlarının incelenmesi için çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Günümüzde bu analizler gerçeğe çok yakın sonuçlar veren paket programlar sayesinde kolayca yapılıyor olsa da bu programlara öncülük eden birçok kiriş teorisi bulunmaktadır. Kiriş teorileri, kirişlerin sonlu eleman analizlerinden önce özellikle tasarım aşamasında hızlı ve doğru sonuçlar veren teorilerdir. Günümüzde birçok kiriş teorisi olmakla birlikte bunlardan en yaygın kullanıma sahip olan teoriler Euler-Bernoulli, Rayleigh, Kayma ve Timoshenko Kiriş teorileridir. Bu teoriler, titreşen kiriş problemlerini, hareket denkleminin kısmi diferansiyel denklem ifadesi, dış kuvvetlerin fonksiyonu, sınır ve başlangıç koşulları arasından formüle etmektedir [8].

1.1 Literatür Taraması

Bu bölümde metalik ve kompozit kirişlerin, serbest ve zorlanmış titreşim analizleri üzerine yapılan çalışmalar hakkında bir literatür taraması sunulmaktadır.

Geçmişten günümüze hava araçlarında kullanılan ince cidarlı yapılarda destek elemanı olarak kullanılan kirişlerin karakteristik özelliklerinin belirlenmesi için farklı yöntemler kullanılarak çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

Sn. Özge Özdemir ve arkadaşları diferansiyel dönüşüm metodu kullanarak dönen ve daralan Euler-Bernoulli ve Timoshenko kirişinin titreşim analizi üzerinde çalışmıştır. Yaptığı çalışmalarda dönme hızı, daralma oranı, narinlik oranı ve kullanılan kiriş teorisine göre kayma deformasyonu parametreleri dahil edilmiştir. Bu çalışmalar

sonucunda kirişin dönme hareketinin kirişe rijitlik sağladığını ve bu rijitliğin daralmanın sebep olduğu zayıflamaya göre daha baskın olduğu, dönme hızının artması ile kirişin doğal frekansının arttığı tespit edilmiştir. Yüksek daralma oranının ilk eğilme doğal frekansını arttırırken, sonraki frekansları düşürdüğü gösterilmiştir [1].

Ayrıca kritik bir daralma oranının var olduğu ve bu noktadan sonra daralma oranının etkisinin terse döndüğü gösterilmiştir.

Sn. Aytaç Arıkoğlu ve Sn. İbrahim Özkol viskoelastik çekirdekli üç katmanlı sandviç kompozit kirişlerin titreşim analizi üzerine yaptığı çalışmada ilk kez sandviç yapılı kompozit kirişlerde diferansiyel dönüşüm metodu kullanılmıştır. Hamilton prensibine göre sistemin denklemleri çıkartılmış ve diferansiyel dönüşüm metodu ile çözülmüştür. Bu çalışma kapsamında sınır şartlarının, çekirdek kalınlığının, kiriş uzunluğunun doğal frekans üzerine etkilerini incelemiştir [2].

Sn. Vebil Yıldırım, Sn. Erol Sancaktar ve Sn. Erhan Kırıl, simetrik çapraz katmanlara sahip kompozit kirişlerin düzlem içi ve düzlem dışı serbest titreşim analizlerini transfer matrisi yöntemi kullanarak, kesme ve uzama deformasyonları etkilerini göz önünde bulundurarak incelemiştir. Çalışmaları kapsamında, çeşitli sınır koşullarının, farklı narinlik oranlarının, kirişin yüksekliğinin genişliğine oranının ve malzeme türlerinin serbest titreşim frekansları üzerindeki etkisini göstermiştir. Çalışma sonucunda narinlik oranının artmasıyla doğal frekansın arttığı, ancak kiriş yüksekliğinin kiriş genişliğine oranının artmasıyla doğal frekansın düştüğü tespit edilmiştir [3].

Sn. F. Fırat Çalım ise çalışmasında düzgün olmayan kompozit kirişlerin serbest ve zorlanmış titreşimlerini Laplace dönüşümü kullanarak analiz etmiş, fiber yerleşim açılarının titreşime etkilerini incelemeyi amaçlamıştır. Sistemi yöneten denklemin türetilmesinde dönel atalet ve kayma deformasyonları dahil edilerek Timoshenko kiriş teorisini temel alınarak çözülmüştür. Çalışmanın sonucunda kullanılan yöntemin paket programlar ile iyi ölçüde uyumluluk sağladığı ve problemin çözüm hızının paket programa göre %80 daha hızlı olduğu, fiber yerleşim açılarının artmasıyla doğal frekansın düştüğü, genliğin ise arttığı tespit edilmiştir [4].

Sn. A. Babu Arumugam ve arkadaşları çalışmalarında kalınlık ve genişlik boyunca daralan katmanlı kompozit kirişlerin serbest titreşimini yöneten diferansiyel denklemin çözümü için merkez kaç ve ön gerilme gibi dönme etkilerini içeren yüksek dereceli kayma deformasyonu teorisine dayalı sonlu elemanlar formülasyonu

sunmuştur. Elde ettikleri sonuçlar mevcut olan sonlu elemanlar yöntemi ve deneysel sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Çalışma sonucunda dönme hızının doğal frekansa etkisinin yanı sıra kalınlıkta daralan kirişlerde fiber yerleşim açısının doğal frekansa önemli etkileri olduğu, genişlikte daralan kirişlerde ise fiber yerleşim açısının doğal frekansta önemli etkileri olmadığı gösterilmiştir [5].

Sn. Dewey H. Hodges ve Sn. Michael J. Rutkowski yaptıkları çalışmada dönen kirişlerin serbest titreşimini değişken mertebeli sonlu elemanlar yöntemi ile analiz etmiştir. Çalışma kapsamında kirişin kök kısmında bulunan ve kirişi dönme merkezine bağlayan merkez silindirin yarıçapı sıfır olan ve olmayan durumlar için, uniform kirişler, daralan kirişler ve süreksizlikleri olan uniform olmayan kirişler incelenmiş ve bu kirişler için sayısal sonuçlar sunulmuştur [6].

Sn. Mustafa Balcı, Sn. M.Oğuz Nalbant ve arkadaşları katmanlı kompozit kirişlerin Euler-Bernoulli kiriş teorisine göre sonlu elemanlar yöntemi kullanarak serbest titreşim analizini yapmışlardır. Yaptıkları çalışmada serbest mesneli, iki uçtan ankastre mesnetli ve bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest kirişlerin analizlerini gerçekleştirmiş ve narinlik oranının, fiber yerleşim açısının, katman sayısının ve sınır şartlarının doğal frekans üzerindeki etkilerini incelemişlerdir. Çalışmanın sonucunda narinlik oranının artmasıyla doğal frekansın azaldığını, ilk modun doğal frekansının katman sayısının artmasıyla arttığı okuyucuya sunulmuştur [7] .

1.2 Tezin Amacı

Hava araçlarında ince cidarlı yapılar büyük öneme sahip, sağlam ve hafif olmaları adına tercih edilen yapısal formlardır. Bu yapılara destek olması adına uzunlamasına elemanlar (stringerlar) kullanılır. Bu elemanlar yapısal olarak modellenirken ilk yaklaşım olarak Euler-Bernoulli yaklaşımı kabul edilir. Bu yaklaşım sayesinde hızlıca gerilme-gerinim dağılımı elde edilir ve yükleme hakkında bilgi alınır. Detay analizlerde kiriş yapısı daha teferruatlandırılarak (Rayleigh Kiriş, Kayma Kiriş ve Timoshenko Kiriş kabulleri ile) tekrar çözülür. İlk yaklaşım olan Euler-Bernoulli sonuçları ile aradaki farkın büyük olması durumunda sınır şartları ve kabuller kontrol edilir ve yapı tekrar çözülür. Bu genel yaklaşımın temel oluşturması amacıyla bu çalışmada uzunlamasına elemanlar Euler-Bernoulli kiriş modeli kabulü altında analiz edilmiştir. Bu yapıların metalik olması dışında kompozit olması halinde durum tekrar çözülmüş ve karşılaştırmalı olarak okuyucuya sunulmuştur.

Çalışma kapsamında metalik uniform kesitli ve kalınlık boyunca daralan metalik kesitlerin yanı sıra uniform kesitli ve kalınlık boyunca daralan katmanlı kompozit yapıların serbest titreşim analizi yapılarak doğal frekansları bulunmuştur.

Katmanlı kompozit yapıların doğal frekanslarının bulunması için katılık matrisinden yola çıkarak ortotropik olan kirişin izotropik eş değeri elde edilmiştir ve burada bulunan eş değer elastisite modülü kullanılarak diferansiyel dönüşüm metodu ile elde edilen sonuçlar, paket program sonuçlarıyla, analitik sonuçlarla ve referanslarla karşılaştırılarak okuyucuya sunulmuştur .



2. KİRİŞ TEORİLERİ

Kiriş veya kolon elemanları, boyutlarının birinin diğer iki boyutundan büyük olduğu bir yapı olarak tanımlanmaktadır [10]. Kiriş ekseninin, kirişin uzun olan boyutu boyunca uzandığı kabul edilmekle beraber, bu eksene dik olan kesiti kiriş eksenine boyunca değişebilmektedir. Mühendislik yapılarında T, I ve dikdörtgen kesitli kirişler yaygın olarak kullanılmaktadır.

Kiriş problemlerinin tam formülasyonu genel elastisite denklemleri cinsinden ilk olarak Pochhammer (1876) ve Chree (1889) tarafından incelenmiştir [11]. Ancak, uygulamalarda genellikle ihtiyaç duyulandan daha fazla bilgi verdiği için problemi çözmek pratik değildir [8]. Bu sebepten dolayı enine yer değiştirme için kabuller yaparak yaklaşık çözüme ulaşmak kirişlerin analizinde yeterli olmuştur.

Gelişen teknoloji ile birlikte karmaşık yapıların mühendislik analizlerinin yapılmasında bilgisayar temelli programlar yaygın olarak kullanılsa da tasarım aşamasında hızlı ve doğru analizler yaparak kritik değerlere göre tasarımın yapılması büyük önem arz etmektedir. Bu nedenle geçmişten günümüze üretilmiş kiriş teorileri mühendislere büyük ölçüde yol gösterici olmuştur. Bu teoriler çeşitli kabullere dayanarak geliştirilmiştir ve birbirlerine yakın ve doğru sonuçlar vermekle beraber, birbirlerine karşı hız, hassasiyet gibi farklı üstünlüklere sahiptirler. teknoloji ve artan insan ihtiyaçları doğrultusunda mevcut malzemelerden daha üstün malzemeler elde etme konusunda geçmişten günümüze birçok çalışma yapılmış ve hala yapılmaktadır. Özellikle havacılık alanındaki rekabet insanları daha hafif ve daha dayanıklı malzemeler üretmeye yönlendirmiştir. Bu doğrultuda hafif ve yüksek dayanımlı malzemeler olan kompozit malzemeler büyük önem kazanmıştır. Ayrıca yorulma ve korozyon direnci, elektriksel ve akustik yalıtım, ısıya karşı dayanıklılığı ile de ön plana çıkmaktadır. Ancak imalat maliyetinin yüksek olması, seri üretime uygun olmaması ve geri dönüştürülebilirlik oranının çok düşük olması gibi dezavantajlara sahiptir.

Kompozit malzemeler fiziksel veya kimyasal olarak birbirinden büyük oranda farklılıkları olan birbirleri içinde çözünmeyen en az 2 malzemenin fiziksel olarak makro seviyede birleştirilmesi ile oluşturulan malzemelerdir. Bu sayede kompoziti oluşturan malzemelerin tek başına sağlayamadığı mekanik özellikler elde edilmiş olur.

Kompozit malzemeler, matris ve takviye elemanı olarak adlandırılan iki temel bileşenden oluşmaktadır. Matris, kompozit yapıya şeklini veren, takviye elemanının etrafını sararak çevresel etkilerden koruyan, takviye elemanına yük aktaran ve tokluğa katkı veren bileşendir. Takviye elemanı ise kompozit yapının dayanım gibi mekanik özelliklerine doğrudan katkı sağlayan ve iletkenlik gibi özelliklerinde baskın olarak önemli rol oynayan bileşendir.

2.1 Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi

Klasik kiriş teorisi olarak da bilinen Euler-Bernoulli kiriş teorisi, ilk olarak 1750 yıllarında ortaya çıkmış olsa da 19. yüzyılın sonlarına doğru Eyfel Kulesi'nin yapımında kullanılmasıyla mühendisliğin yapı taşlarından biri haline gelmiştir. 18. yüzyılda Jacob Bernoulli'nin elastik bir kirişin herhangi bir noktasındaki eğriliğinin, o noktadaki eğilme momentiyle orantılı olduğunu keşfetmesi üzerine temelleri atılmıştır. Daniel Bernoulli'nin, titreşen bir kirişin diferansiyel hareket denklemini formüle etmesi ve Leonhard Euler'in farklı yükleme koşullarında elastik kirişleri incelemesinde kullanılması ile kabul edilmiştir.

Euler-Bernoulli modeli, eğilmeden kaynaklanan şekil değiştirme enerjisini ve yanal yer değiştirmeden kaynaklanan kinetik enerjiyi içermektedir [8]. Euler-Bernoulli kiriş teorisinde 3 temel kabul yapılmaktadır. Bunlar;

- Kiriş kesitleri deformasyondan sonra düzlem olarak kalır.
- Küçük deformasyon kabulü yapılır [$\sin\theta = \theta = \tan\theta = y'$, $\cos\theta = 1$).
- Kiriş, lineer, elastik, izotropik ve Poisson oranı etkisi ihmal edilir.

2.2 Rayleigh Kiriş Teorisi

Rayleigh kiriş teorisi, kesitin dönme etkisini dahil ederek Euler-Bernoulli kiriş teorisinde marjinal bir gelişme sağlamaktadır [8]. Bu sonuçta Euler-Bernoulli modeli ile hesaplanan doğal frekanslardaki fazla tahminler kısmen düzeltilmiş olmasa da hala olması gereken değerlere nazaran fazlalık bulunmaktadır. Buna rağmen düşük narinlik

oranına sahip eksenel hareket eden bir kiriş için Rayleigh kiriş modelinin kullanılması daha doğru sonuçlar sağlamaktadır [12].

2.3 Kayma Kiriş Teorisi

Kayma kiriş modeli, Euler-Bernoulli modeline kayma distorsiyonunu eklemektedir [8]. Bu sayede Euler-Bernoulli modelinin doğal frekans tahmininde önemli ölçüde iyileşme meydana gelmektedir. Ancak yine de eğilme etkisi dahil edilmediğinden dolayı kayma kiriş teorisi de istenilen hassasiyette sonuç vermemektedir.

2.4 Timoshenko Kiriş Teorisi

Euler-Bernoulli kiriş teorisi, ince kirişlerin düşük modlarının eğilme titreşimlerinin frekanslarını oldukça doğru bir şekilde tahmin etmesine rağmen, daha yüksek modlarda veya enine kayma deformasyonun ve döner atalet etkilerinin önemli hale geldiği kalın kirişler için hatalı hale gelmektedir [13]. Bu nedenden dolayı Timoshenko, Euler-Bernoulli kiriş teorisinin bu eksiklerinin giderilmesi amacıyla kayma ve dönme etkisini ekleyerek yeni bir kiriş teorisi önermiştir. Timoshenko modeli, ince olmayan kirişler ve kayma veya dönme etkilerinin ihmal edilebilir olmadığı yüksek frekanslar için büyük bir gelişmedir [8]. 4 kiriş teorisine ait kıyaslama tablosu Çizelge 2.1’de verilmiştir.

Çizelge 2.1 : Kiriş teorilerinin karşılaştırılması [8].

Kiriş Modeli	Eğilme Momenti	Yanal Yerdeğiştirme	Kayma Deformasyonu	Döner Atalet
Euler-Bernoulli	O	O	X	X
Rayleigh	O	O	X	O
Kayma	O	O	O	X
Timoshenko	O	O	O	O

Dört kiriş teorisinde yapılan başlıca kabuller şu şekilde sıralanabilir;

- Kirişin bir boyutu, diğer iki boyutuna göre önemli ölçüde büyüktür.
- Malzeme lineer elastiktir.

- Poisson oranı etkisi ihmal edilir.
- Kesit alanı simetriktir ve tarafsız eksen ile merkez eksenini çakışmaktadır.
- Tarafsız eksene dik olan düzlemler deformasyondan sonra da dik kalır.
- Dönme açısı küçüktür ve küçük açı kabulü uygulanır.



3. TİTREŞİM

Dinamiğin bir alt dalı olan titreşim, tekrarlanan hareketlerle ilgilenmektedir. Titreşim, temel olarak bir denge noktası veya sabit bir referans eksenini etrafında cismin yaptığı mekanik salınım olarak tanımlanabilir. Titreşim bazı durumlarda arzu edilse de özellikle mekanik yapılarda çoğu zaman hasarla sonuçlanabileceğinden, boş enerji harcanmasına sebep olacağından ve gürültüye sebebiyet vereceğinden ötürü istenmemektedir. Bu sebeplerden dolayı mühendislik hesaplamalarında sistemin titreşim karakteristiğinin belirlenmesi kritik öneme sahiptir. Titreşim olayı boyunca sürekli olarak potansiyel enerji ile kinetik enerji arasında dönüşüm olduğundan dolayı bu sistemlerin sönümlenmesi için yay gibi potansiyel enerjiyi depolayan elastik elemanlara, kinetik enerjiyi depolayan kütle gibi atalet elemanlarına ihtiyaç vardır. Bu elemanlar arasındaki enerji aktarımı ve sürtünme nedeniyle kaybolan enerji ile sistemin titreşimi sönümlenmektedir.

Mekanik sistemlerin titreşim analizinde dikkat edilmesi gereken bir diğer önemli nokta ise rezonanstır. Genliğin sonsuza gitmesi olarak tanımlanan rezonans durumu, sistemin titreşim frekansı ile doğal frekansın birbirine eşit olduğu durumlarda meydana gelir ve sistemin genliği sürekli olarak artarak sonsuza doğru gider. Rezonans, devam ettiği süreye bağlı olarak yıkıcı sonuçlara sebep olabileceğinden dolayı mekanik sistemlerde istenmeyen bir durumdur. 1940 yılında açılan ve açılışından birkaç ay sonra rüzgarın oluşturduğu titreşim sonucu rezonansa giren Tacoma Narrows köprüsünün yıkılması ise rezonans durumuna verilebilecek bir örnektir.

3.1 Kiriş Titreşimi

Kirişlerde narinlik oranı kirişin boyunun, kalınlığına oranı olarak tanımlanmaktadır ve bu oranın 10'dan büyük olduğu tüm yapılar narin yapılar olarak nitelendirilmektedir. Uçakların kanat yapılarının içerisinde destek elemanı olarak kullanılan uzunlamasına elemanlar (stringerlar) da narin elemanlar olarak kabul edilmektedir. Kontrolsüz titreşimleri sonucu bu gibi narin elemanların hasar görmemesi adına yer aldıkları

sistemlerde titreşim analizinin yapılarak sistemin karakterinin belirlenmesi ve ona göre sönümleme elemanlarının kullanılması büyük önem arz etmektedir. Bu sebepten dolayı bu yapıların titreşim karakteristik özelliklerini çıkartabilmek adına kiriş titreşimini incelemek gerekmektedir.

Kirişin başlangıç durumunda dikey bir yüklemeye maruz kalması ardından yük kaldırıldığında kiriş başlangıç noktasına geri döner ancak bir süre denge noktası etrafında salınım yapmaya devam eder. Bu durum kiriş titreşimi olarak adlandırılır.

Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi, kiriş titreşim analizlerinde basit bir model sağlayarak hızlı bir şekilde sistemin davranışı hakkında bilgi verdiğinden dolayı mühendislik uygulamalarında temel bir yaklaşımdır. Bu tez kapsamında da Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi yaklaşımıyla kirişlerin titreşim analizi yapılmıştır.

3.1.1 Fiziksel model

Bu tez kapsamında uçak kanatlarının modellenmesinde sıklıkla kullanılan ankastre mesnetli kirişlerin yanı sıra bir ucu sabit, bir ucu kayar mesnetten oluşan basit mesnet ile tutturulmuş ve iki ucu sabit mesnet ile sabitlenmiş uniform kesitli metalik ve katmanlı kompozit kirişler ile kalınlık doğrultusunda daralan metalik ve katmanlı kompozit kirişler Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi kabulü ile incelenmiştir.

Ankastre mesnetli kirişlerde (Şekil 3.1) mesnetin bağlı olduğu uçta iki yönde de hareket kısıtı olduğundan dolayı tepki kuvveti oluşurken dönme hareketlerine de izin verilmemektedir. Basit mesnetli kirişlerde (Şekil 3.2), sabit mesnetli tarafta iki yönde de hareket kısıtı olduğundan tepki kuvveti oluşurken dönme hareketlerine izin verilmektedir. Kayar mesnetli uçta ise, mesnet düşey doğrultuda harekete izin vermediğinden dolayı bu yönde tepki kuvveti oluşurken yatay yönde harekete ve dönmelere izin vermektedir. İki ucu ankastre mesnetli kirişlerde (Şekil 3.3) ise iki uçta da hareket ve dönme kısıtı bulunmaktadır.



Şekil 3.1 : Ankastre mesnetli kiriş.



Şekil 3.2 : Basit mesnetli kiriş.



Şekil 3.3 : İki ucu ankastre mesnetli kiriş.

3.1.2 Sınır şartları

Sınırında birtakım şartların bilindiği bir bölgede çözülmesi gereken diferansiyel denklemler veya diferansiyel denklem sistemi sınır değer problemleri olarak tanımlanmaktadır. Bu sınır değer problemlerinin çözülmesi için gerek duyulan kısıtlar da sınır şartları olarak adlandırılmaktadır. Uzayda çözülecek olan diferansiyel denklem problemlerinde sınır şartları kullanılmaktadır.

Adi diferansiyel denklemlerin ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan sınır şartlarının seçimi çözümün doğruluğu açısından kritik öneme sahiptir.

Sınır şartlarının tipleri aşağıdakiler gibidir;

- Dirichlet Tipi Sınır Şartı
- Neumann Tipi Sınır Şartı
- Robin Tipi Sınır Şartı
- Karışık Tip Sınır Şartı
- Cauchy Tipi Sınır Şartı

Dirichlet sınır şartında tanım kümesinin sınırlarında bilinmeyen bir fonksiyonun alması gereken değeri belirtir. Neumann tipi sınır şartı, adi diferansiyel denkleme veya kısmi diferansiyel denkleme uygulandığında bir çözümün türevinin bölge sınırlarında alacağı değerler elde edilirken, Robin tipi sınır şartı, bölge değerlerinin ve bu bölgenin

sınırdaki türevlerin lineer birleşiminden oluşmaktadır. Karışık tip sınır şartında ise bölgenin farklı bölümlerine farklı tip sınır şartı uygulanmaktadır. Bu tip sınır şartlarında dikkat edilmesi gereken husus ise sınır koşullarının tüm sınırlara uygulanırken sistemin serbest sınırında Neumann tipi sınır şartı uygulanmalıdır. Cauchy tipi sınır şartı hem bilinmeyen hem de türevleri için kullanılan sınır şartıdır.

Bu tez kapsamında kullanılacak olan basit mesnetli kiriş, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest ve iki ucu ankastre mesnetli kirişin sınır şartı denklemleri aşağıdaki gibidir;

3.1.2.1 Basit mesnetli kiriş

Basit menteşli kirişte (Şekil 3.4), uçlar sabitken bir uç kayıcıdır. Bu nedenle mesnetlerin olduğu noktalarda yani iki uçta çökme ve moment sıfırdır.



Şekil 3.4 : Basit mesnetli kiriş.

$$y(x, t) \Big|_{x=0, L} = 0 \quad (3.1)$$

$$M \Big|_{x=0, L} = 0 \quad (3.2)$$

Moment eğrilik ilişkisinden;

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = M \quad (3.3)$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0, L} = 0 \quad (3.4)$$

3.1.2.2 Bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest kiriş

Ankastre menteşli kirişte (Şekil 3.5), bir uç serbestken diğer uç ankastre mesnet ile sabitlendiğinden dolayı, serbest uça kesme kuvveti (v) ve moment sıfırken, ankastre mesnetli uça çökme ve eğim sıfırdır.



Şekil 3.5 : Ankastre mesnetli kiriş.

$$y(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (3.6)$$

$$M \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (3.7)$$

$$v(x, t) \Big|_{x=L} = 0 \Rightarrow v(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.8)$$
$$\Rightarrow EI(x) \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = 0$$

3.1.2.3 İki uçtan ankastre mesnetli kiriş

İki uçtan ankastre mesnetli kirişte (Şekil 4.6), iki uç da ankastre mesnet ile sabitlendiğinden dolayı, iki uçta da çökme ve eğim sıfırdır.



Şekil 3.6 : İki ucu ankastre mesnetli kiriş.

$$y(x, t) \Big|_{x, L=0} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x, L=0} = 0 \quad (3.10)$$

3.1.3 Euler-Bernouilli kirişinin matematik modeli

Şekilde enine yüklemeye maruz kalan ince kirişin üzerinden alınan diferansiyel elemanın serbest cisim diyagramı Şekil 1.b.'de verilmiştir. Şekilde kirişin boyu L , birim hacmin kütlesi ρ , kesit alanı A , eğilme momenti $M(x, t)$, kesme kuvveti $V(x, t)$ ve dış kuvvet $w(x, t)$ olarak verilmiştir.

Diferansiyel elemanın orta noktasının moment dengesi;

$$\sum M = 0 \quad (3.11)$$

$$(M + dM) - M - V \frac{dx}{2} - (V + dV) \frac{dx}{2} = 0 \quad (3.12)$$

$dxdV$ ifadesi ihmal edilebilir kadar küçük olduğu için ilgili terimler düştükten sonra;

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} \quad (3.13)$$

Düşey yönde Newton'un 2. Yasası yazılırsa;

$$\sum F = ma \quad (3.14)$$

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = V - (V + dV) + W(x, t) dx \quad (3.15)$$

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\frac{dV}{dx} + W(x, t) \quad (3.16)$$

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{dV}{dx} = W(x, t) \quad (3.17)$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \quad (3.18)$$

(3.18) numaralı denklem, (3.17) numaralı denklemin içerisine yazılırsa;

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = W(x, t) \quad (3.19)$$

Moment ile eğrilik ilişkisi;

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = M \quad (3.20)$$

(3.20) numaralı denklem, (3.19) numaralı denklemin içerisine yazılırsa;

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = W(x, t) \quad (3.21)$$

Serbest titreşim durumunda $W(x, t) = 0$ 'dır. Bu durumda serbest titreşim denklemi;

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.22)$$

3.1.4 Dikdörtgensel üniform kesitli Euler-Bernoulli kirişlerinde serbest titreşim hareket denklemi

Uniform dikdörtgensel kesitli kirişlerde kesit alanı ve alan momenti aşağıdaki gibidir;

$$A(x) = bd \quad (3.23)$$

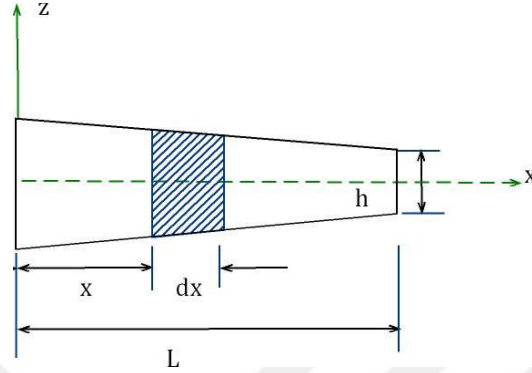
$$I(x) = \frac{1}{12}bh^3 \quad (3.24)$$

(3.23) ve (3.24) numaralı denklemler ana denklemimiz olan (3.22) numaralı denkleme yazılır ve ifade düzenlenirse;

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI(x) \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (3.25)$$

3.1.5 Bir ekseninde daralan Euler-Bernoulli kirişlerinde serbest titreşim hareket denklemi

Bir ekseninde daralan Euler-Bernoulli kirişinin (Şekil 3.7) kök tarafındaki kesit alanı (A_0) ve alan atalet momenti (I_0) aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.7 : Daralan kesitli Euler-Bernoulli kirişi.

$$A_0 = b_0 h_0 \quad (3.26)$$

$$I_0(x) = \frac{1}{12} b_0 h_0^3 \quad (3.27)$$

Kalınlık doğrultusunda daralan kirişler için aşağıdaki kabuller yapılmaktadır;

$$c = 1 - \left(\frac{h}{h_0} \right) \quad (3.28)$$

$$A(x) = A_0 \left(1 - \frac{cx}{L} \right)^n \quad (3.29)$$

$$I(x) = I_0 \left(1 - \frac{cx}{L} \right)^{n+2} \quad (3.30)$$

Burada c ise kirişin daralma oranını vermektedir.

Çalışmada kirişin kesit alanı uzunluk boyunca lineer olarak değiştiğinden $n = 1$ olarak alınmıştır ($n = 1$ durumu alan atalet momentinin kübik değişimini vermektedir).

(3.29) ve (3.30) numaralı denklemler, (3.14) numaralı denkleme yazılırsa

$$\rho A_0 \left(1 - \frac{cx}{L} \right) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + E I_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(1 - \frac{cx}{L} \right)^3 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.31)$$

4. DENKLEMLERİN ÇÖZÜMÜ

Bu tez kapsamında uniform kesitli ve kalınlık doğrultusunda bir eksenle daralan metalik ve kompozit kirişlerin serbest titreşim analizi ,analitik yöntemle, diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak ve paket program (ANSYS) ile yapılmıştır.

4.1 Analitik Çözüm

Değişkenlerine ayırma yöntemi ile kirişin yer değiştirmesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.1)$$

(4.1) numaralı denklem kullanılarak (3.25) numaralı denklem tekrar yazılırsa;

$$\rho A X(x) \ddot{T}(t) + EI X''''(x) T(t) = 0 \quad (4.2)$$

Denklem XT ile bölünürse

$$\rho A \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + EI \frac{X''''(x)}{X(x)} = 0 \quad (4.3)$$

$$EI \frac{X''''(x)}{X(x)} = -\rho A \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = k \quad (4.4)$$

Düşük mertebeli denklemden çözüme başlanır.

$$\ddot{T}(t) + \frac{k}{\rho A} T(t) = 0 \quad (4.5)$$

Sistemin karakteristik denklemi;

$$\lambda^2 + \frac{k}{\rho A} = 0 \quad (4.6)$$

Sistem salınımlı olduğundan dolayı çözümün sinüs, cosinüs formu aranır. Çözümün geometrik olması için;

$$\frac{k}{\rho A} = \omega^2 \rightarrow \lambda^2 = -\omega^2 \rightarrow \lambda = \pm i\omega \quad (4.7)$$

$$T(t) = A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t) \quad (4.8)$$

$A_1 = a \cos \varphi$ ve $B_1 = b \sin \varphi$ olarak alınırsa;

$$T(t) = a \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.9)$$

$$X''''(x) - \frac{k}{EI} X(x) = 0 \rightarrow X''''(x) - \beta^4 X(x) = 0 \quad (4.10)$$

$$\beta = \left(\frac{\rho A \omega^2}{EI} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \lambda^4 - \beta^4 = 0 \quad \begin{aligned} \uparrow \quad \lambda^2 &= \beta^2 \\ \downarrow \quad \lambda^2 &= -\beta^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \uparrow \quad \lambda_1 &= \beta \\ \downarrow \quad \lambda_2 &= -\beta \\ \uparrow \quad \lambda_3 &= i\beta \\ \downarrow \quad \lambda_4 &= -i\beta \end{aligned} \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$X(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x) \quad (4.13)$$

A, B, C ve D reel sabitlerdir.

(4.9) ve (4.13) numaralı denklemler kullanılarak tam çözüm şu şekilde elde edilir;

$$y(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} y(x, t) = & (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) \\ & + D \sinh(\beta x))(\cos(\omega t - \varphi)) \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.1.1 Basit mesnetli üniform kesitli metalik kirişin çözümü

Basit mesnetli kiriş için (3.1) ve (3.2) numaralı denklemler yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = & (-A \cos(\beta x) - B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) \\ & + D \sinh(\beta x)) \beta^2 (\cos(\omega t - \varphi)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sınır şartları uygulanırsa;

$$y(0, t) = 0 \rightarrow (A + C) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.17)$$

$$y(L, t) = 0 \rightarrow (A \cos(\beta L) + B \sin(\beta L) + C \cosh(\beta L) + D \sinh(\beta L)) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.18)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \rightarrow (-A + C) \beta^2 (\cos(\omega t - \varphi)) = 0 \quad (4.19)$$

$$EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \quad (4.20)$$

$$(-A \cos(\beta L) - B \sin(\beta L) + C \cosh(\beta L) + D \sinh(\beta L)) \beta^2 \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.21)$$

El ifadesi malzeme ve kirişin (βL) ait özellik olduğundan dolayı sıfır olamayacağı için (4.19) ve (4.20) numaralı denklemlerde belirtilmemiştir.

$\cos(\omega t - \varphi)$ ifadesi sıfır olamayacağından dolayı (4.17) ve (4.19) numaralı denklemler kullanılarak;

$$-A + C = 0 \text{ ve } A + C = 0 \Rightarrow A = C = 0 \quad (4.22)$$

Elde edilir.

(4.18) ve (4.21) numaralı denklemlere, (4.22) numaralı denklem uygulanır ve toplanırsa;

$$(A \cos(\beta L) + B \sin(\beta L) + C \cosh(\beta L) + D \sinh(\beta L)) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.23)$$

$$(-A \cos(\beta L) - B \sin(\beta L) + C \cosh(\beta L) + D \sinh(\beta L)) \beta^2 \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.24)$$

(4.23) ve (4.24) numaralı denklemler toplanırsa,

$$2D \sin(\beta L) = 0 \quad (4.25)$$

(4.23)-(4.25) numaralı denklemler hiperbolik olduğundan dolayı sadece sonsuzda sıfır olabilir bu nedenle $\beta > 0$ olmalıdır. Bu durumda;

$$\sinh(\beta L) \neq 0 \Rightarrow D = 0 \quad (4.26)$$

Böylece (4.21) numaralı denklem;

$$B \sin(\beta L) = 0 \quad (4.27)$$

(4.27) numaralı denklemde $B = 0$ sıfır olması durumunda $y(x, t) = 0$ olur ve bu da titreşimin olmadığı anlamına gelir. Bu nedenle;

$$B \neq 0 \Rightarrow \sin(\beta L) = 0 \quad (4.28)$$

Sinüs ifadesini sıfır yapan değerler göz önünde bulundurulduğunda,

$$\beta L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^+ \quad (4.29)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{L} \quad (4.30)$$

$\beta L = 0$ durumunda $\beta = 0$ olabilirdi ancak bu durumda orijinal diferansiyel denklem değişeceği için bu durum bizim problemimizin bir çözümü olamaz.

Bu durumda sistemin titreşiminin n . modunun doğal frekansı ise;

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \beta_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.31)$$

4.1.2 Ankastre mesnetli üniform kesitli metalik kirişin çözümü

Ankastre mesnetli kiriş için (3.5) numaralı denklem yeniden yazılırsa;

$$y(0, t) = 0 \rightarrow (A + C) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.32)$$

(4.32) numaralı denklemde $\cos(\omega t - \varphi)$ ifadesi sıfır olamayacağından dolayı,

$$\left. \begin{array}{l} (A + C) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \\ \cos(\omega t - \varphi) \neq 0 \end{array} \right\} A = -C \quad (4.33)$$

(3.6) numaralı denklemden;

$$\begin{aligned} \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = & \beta(-A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) + C \sinh(\beta x) \\ & + D \cosh(\beta x)) \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \quad (4.34)$$

$x = 0$ için, $\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = 0$;

$$\left. \begin{array}{l} \beta(B + D) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \\ \beta \neq 0 \\ \cos(\omega t - \varphi) \neq 0 \end{array} \right\} B = -D \quad (4.35)$$

(4.34) ve (4.35) numaralı denklemler (4.15) numaralı ana denklemde yerine yazılırsa,

$$y(x, t) = [C(\cosh(\beta x) - \cos(\beta x)) + D(\sinh(\beta x) - \sin(\beta x))] \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.36)$$

Bu durumda (3.7) numaralı sınır şartı yazılırsa,

$$\left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right| = \beta^2 [C(\cosh(\beta x) + \cos(\beta x)) + D(\sinh(\beta x) + \sin(\beta x))] \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.37)$$

$\left. \frac{\delta^2 y(x,t)}{\delta x^2} \right|_{x=L} = 0$ durumu için;

$$\begin{array}{l} \beta^2 [C(\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) + D(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L))] \cos(\omega t - \varphi) = 0 \\ \beta \neq 0 \\ \cos(\omega t - \varphi) \neq 0 \end{array} \quad (4.38)$$

$$C(\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) + D(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)) = 0 \quad (4.39)$$

(3.8) numaralı sınır şartı yeniden yazılırsa,

$$\left. \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \right| = \beta^3 [C(\sinh(\beta x) - \sin(\beta x)) + D(\cosh(\beta x) + \cos(\beta x))] \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.40)$$

$\left. \frac{\delta^3 y(x,t)}{\delta x^3} \right|_{x=L} = 0$ durumu için;

$$\begin{array}{l} \beta^3 [C(\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) + D(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L))] \cos(\omega t - \varphi) = 0 \\ \beta \neq 0 \\ \cos(\omega t - \varphi) \neq 0 \end{array} \quad (4.41)$$

$$C(\sinh(\beta L) - \sin(\beta L)) + D(\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)) = 0 \quad (4.42)$$

(4.39) ve (4.42) numaralı denklemler matris formunda yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \\ \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) & \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) \\ \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) & \cosh(\beta L) + \cos(\beta L) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

[A] matrisinin determinantı alınıp sıfıra eşitlenerek çözülürse;

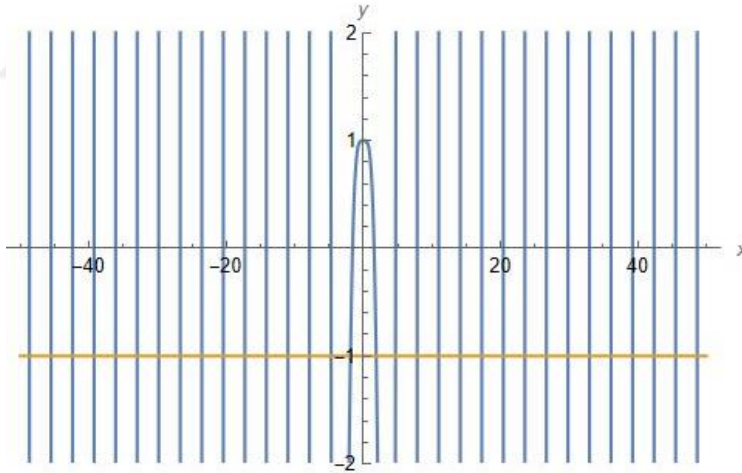
$$\det(A) = 0 \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \cosh^2(\beta L) + 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) + \cos^2(\beta L) \\ - (\sinh^2(\beta L) - \sin^2(\beta L)) = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

(63) numaralı denklem düzenlenirse,

$$\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = -1 \quad (4.47)$$

βL ifadesinin bulunması için (4.47) numaralı denklemin grafiği Şekil 4.1'deki gibi çizdirilir ve $y = -1$ doğrusu ile kesiştirilirse,



Şekil 4.1 : $\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = -1$ grafiği.

Burada kahverengi ile gösterilen $y = -1$ doğrusu gök mavi ile gösterilen $\cosh(\beta L) \cos(\beta L)$ grafiklerinin noktaları βL değerlerini vermektedir ve değerleri Çizelge 4.1'de verilmiştir.

Bu durumda sistemin titreşiminin n. modunun doğal frekansı ise;

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{E_{eq} I_{zz}}{A \rho L^4}} \quad (4.48)$$

Çizelge 4.1 : Ankastre mesnetli kiriş için $\beta_n L$ değerleri.

Mevcut Çalışma	Referans [14]
$\beta_1 L = 1.875$	$\beta_1 L = 1.875$
$\beta_2 L = 4.964$	$\beta_2 L = 4.964$
$\beta_3 L = 7.855$	$\beta_3 L = 7.855$
$\beta_4 L = 10.996$	$\beta_4 L = 10.995$

4.1.3 İki uçtan ankastre mesnetli üniform kesitli metalik kirişin çözümü

Sınır şartları yazılığ gerekli işlemler yapıldığında;

$$y(0, t) = 0 \rightarrow (A + C) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.49)$$

$$\left. \begin{array}{l} (A + C) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \\ \cos(\omega t - \varphi) \neq 0 \end{array} \right\} A = -C \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \beta(-A \sin(\beta x) + B \cos(\beta x) + C \sinh(\beta x) + D \cosh(\beta x)) \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.51)$$

$$x = 0 \text{ için; } \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = 0 ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \beta(B + D) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \\ \beta \neq 0 \\ \cos(\omega t - \varphi) \neq 0 \end{array} \right\} B = -D \quad (4.52)$$

$$y(x, t) = (-\cos(\beta x) - D \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x)) \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.53)$$

$$y(x, t) = (C(\cosh(\beta x) - \cos(\beta x)) + D(\sinh(\beta x) - \sin(\beta x))) \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.54)$$

$$x = L \text{ için, } y(L, t) = 0;$$

$$(C(\cosh(\beta L) - \cos(\beta L)) + D(\sinh(\beta L) - \sin(\beta L))) \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.55)$$

$$x = L \text{ için, } \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = 0;$$

$$\beta[C(\sinh(\beta L) + \sin(\beta L)) + D(\cosh(\beta L) - \cos(\beta L))] \cos(\omega t - \varphi) = 0 \quad (4.56)$$

$$\cos(\omega t - \varphi) \neq 0 \quad (4.57)$$

Denklemler matris formatında yazılırsa,

$$\begin{bmatrix} \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \\ \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) & \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.58)$$

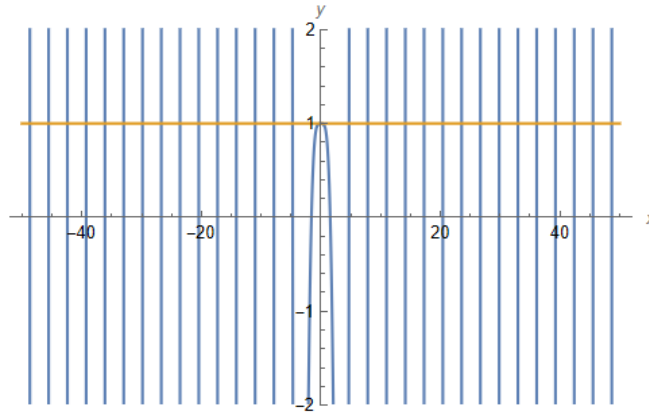
$$[A] = \begin{bmatrix} \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) & \sinh(\beta L) - \sin(\beta L) \\ \sinh(\beta L) + \sin(\beta L) & \cosh(\beta L) - \cos(\beta L) \end{bmatrix} \quad (4.59)$$

$[A]$ matrisinin determinantı alınıp sıfıra eşitlenerek ($\det(A) = 0$) çözülürse;

$$\begin{aligned} &\cosh^2(\beta L) - 2 \cosh(\beta L) \cos(\beta L) + \cos^2(\beta L) \\ &- (\sinh^2(\beta L) - \sin^2(\beta L)) = 0 \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 1 \quad (4.61)$$

βL ifadesinin bulunması için (4.61) numaralı denklemin grafiği Şekil 4.2'deki gibi çizdirilir ve $y = 1$ doğrusu ile kesiştirilirse,



Şekil 4.2 : $\cosh(\beta L) \cos(\beta L) = 1$ grafiği.

Burada kahverengi ile gösterilen $y = -1$ doğrusu ve mavi ile gösterilen $\cosh(\beta L)\cosh(\beta L)$ grafiklerinin kesişim noktaları βL değerlerini vermektedir ve bu değerler Çizelge 4.2'de verilmiştir. Bu durumda sistemin titreşiminin n . modunun doğal frekansı ise;

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{E_{eq} I_{zz}}{A \rho L^4}} \quad (4.62)$$

Çizelge 4.2 : İki ucu ankastre mesnetli kiriş için $\beta_n L$ değerleri.

Mevcut Çalışma	Referans [14]
$\beta_1 L = 4.730$	$\beta_1 L = 4.730$
$\beta_2 L = 7.853$	$\beta_2 L = 7.853$
$\beta_3 L = 10.996$	$\beta_3 L = 10.996$
$\beta_4 L = 14.137$	$\beta_4 L = 14.137$

4.2 Diferansiyel Dönüşüm Metodu İle Çözüm

Diferansiyel dönüşüm metodu (DTM) diferansiyel denklemlerin çözümünde sıkça kullanılan, Taylor serisini tamamen farklı bir şekilde formüle eden yarı sayısal yarı analitik bir tekniktir [15]. Diferansiyel dönüşüm metodu ilk olarak Zhou tarafından önerilmiş ve buradaki ana uygulaması, elektrik devresi analizinde hem linear hem de linear olmayan başlangıç değer problemini çözmüştür [16]. DTM, bir noktadaki analitik fonksiyonun türevini kesin sonucunu, bilinen ve bilinmeyen sınır şartları cinsinden hesaplanmasını sağlayan hızlı bir yöntemdir. Taylor Serisi yöntemi, sembolik hesaplama gerektirdiğinden yüksek dereceli diferansiyel denklemlerin çözümünde çok zaman alırken, DTM analitik Taylor Serisi çözümünün elde edilmesi için hızlı bir iteratif yöntemdir. Bu yöntemde, belirli dönüşüm kuralları uygulanır ve sistemi yöneten diferansiyel denklemler ve sınır şartları, orijinal fonksiyonların diferansiyel dönüşümleri cinsinden bir dizi cebirsel ifadeye dönüştürülür [17]. Bu cebirsel denklemlerin çözülmesi ile problemin çözümü elde edilir.

$f=f(x)$ fonksiyonun k . dereceden diferansiyel dönüşümü, $x=x_0$ noktası çevresinde aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$F[k] = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (4.63)$$

Burada F_n , $f(x)$ fonksiyonun diferansiyel dönüşüm fonksiyonuna denk gelmektedir.

$f(x)$ fonksiyonu, F_n cinsinden ters dönüşüm yapılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x - x_0)^k F[k] \quad (4.64)$$

(4.63) numaralı denklem, (4.64) numaralı denklemin içersine yazılırsa;

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \left[\frac{d^k f(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (4.65)$$

Aynı zamanda bu ifade $x=x_0$ çevresinde Taylor serisidir.

Sıklıkla kullanılan fonksiyonların dönüşüm fonksiyonları tablolştırılmış ve bu dönüşümler Çizelge 4.3'te verilmiştir.

Çizelge 4.3 : DTM dönüşüm fonksiyonları.

Fonksiyon	Dönüştürölmüş Fonksiyon
$f(x) = g(x) \pm h(x)$	$F[k] = G[k] \pm H[k]$
$f(x) = \lambda g(x)$	$F[k] = \lambda G[k]$
$f(x) = g(x)h(x)$	$F[k] = \sum_{l=0}^k G[l]H[k-l]$
$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$	$F[k] = \frac{(k+n)!}{k!} G[k+n]$
$f(x) = x^n$	$F[k] = \delta(k-n)$
$f(x, t) = x^m t^n$	$F[k] = x^m \delta(k-n)$
$f(x, t) = x^m t^n u(x, t)$	$F[k] = x^m U[k-n](x)$
$f(x) = e^{\lambda x}$	$F[k] = \frac{\lambda^k}{k!}$
$f(x) = (1+x)^n$	$F[k] = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}$

Çizelge 4.3 (devam) : DTM dönüşüm fonksiyonları.

Fonksiyon	Dönüştürülmüş Fonksiyon
$f(x) = \sin(\omega x + \alpha)$	$F[k] = \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$
$f(x) = \cos(\omega x + \alpha)$	$F[k] = \frac{\omega^k}{k!} \cos\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right)$

Problemlerde sıklıkla kullanılan sınır şartlarının diferansiyel dönüşüm fonksiyonları tablolatırılmış ve Çizelge 4.4 ve Çizelge 5.4'te verilmiştir.

Çizelge 4.4 : x=0 konumunda sınır şartlarının DTM dönüşüm fonksiyonları.

Sınır Şartı	Dönüştürülmüş Sınır Şartı
$f(0) = 0$	$F[0] = 0$
$\frac{df(0)}{dx}$	$F[1] = 0$
$\frac{d^2 f(0)}{dx^2}$	$F[2] = 0$
$\frac{d^3 f(0)}{dx^3}$	$F[3] = 0$

Çizelge 4.5 : x=L konumunda sınır şartlarının DTM dönüşüm fonksiyonları.

Sınır Şartı	Dönüştürülmüş Sınır Şartı
$f(l) = 0$	$\sum_{k=0}^{\infty} F[k] = 0$
$\frac{df(l)}{dx}$	$\sum_{k=0}^{\infty} k F[k] = 0$
$\frac{d^2 f(l)}{dx^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) F[k] = 0$
$\frac{d^3 f(l)}{dx^3}$	$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2) F[k] = 0$

Eğer orijinal fonksiyon $f(x) = x^n y^m(x)$ ise dönüşüm fonksiyonu $F[k] = (\prod_{i=1}^{m-n} (k+i))F[k+m-n]$ olarak tanımlanabilir. Ayrıca $k < 0$ olduğu durumlarda $F[k] = 0$ 'dır [1].

4.2.1 Dönüştürülmüş sınır şartları

4.2.1.1 Basit mesnetli kiriş için DTM sınır şartları

(3.1) ve (3.2) numaralı sınır şartları Tablo 1. Ve 2.'ye göre dönüştürülürse,

$$y(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \xrightarrow{DTM} W[0] = 0 \quad (4.66)$$

$$y(x, t) \Big|_{x=L} = 0 \xrightarrow{DTM} \sum_{k=0}^{\infty} W[k] = 0 \quad (4.67)$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0 \xrightarrow{DTM} W[2] = 0 \quad (4.68)$$

$$EI(x) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0 \xrightarrow{DTM} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W[k] = 0 \quad (4.69)$$

4.2.1.2 Ankastre mesnetli kiriş için DTM sınır şartları

(3.2), (3.5), (3.6), (3.7) ve (3.8) numaralı sınır şartları Tablo 1. Ve Tablo 2.'ye göre dönüştürülürse,

$$y(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \xrightarrow{DTM} W[0] = 0 \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \xrightarrow{DTM} W[1] = 0 \quad (4.70)$$

$$\left. \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \xrightarrow{DTM} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)W[k] = 0 \quad (4.71)$$

$$\left. \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0 \xrightarrow{DTM} \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)(k-2)W[k] = 0 \quad (4.72)$$

4.2.1.3 İki uçtan ankastre mesnetli kiriş için DTM sınır şartları

$$y(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \xrightarrow{DTM} W[0] = 0 \quad (4.66)$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \xrightarrow{DTM} W[1] = 0 \quad (4.70)$$

$$y(x, t) \Big|_{x=L} = 0 \xrightarrow{DTM} \sum_{k=0}^{\infty} W[k] = 0 \quad (4.67)$$

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \xrightarrow{DTM} \sum_{k=0}^{\infty} kW[k] = 0 \quad (4.73)$$

4.2.2 Uniform kesitli metalik kirişin DTM ile çözümü

(4.5) numaralı denklem (4.2) numaralı denkleme yazılırsa,

$$\ddot{T}(t) + \frac{k}{\rho A} T(t) = 0 \text{ ve } \frac{k}{\rho A} = \omega^2$$

$$\ddot{T}(t) = -\omega^2 T(t)$$

$$\rho A \frac{-\omega^2 T(t)}{T(t)} + EI \frac{X''''(x)}{X(x)} = 0 \Rightarrow EIX''''(x) = \rho A \omega^2 X(x) \quad (4.74)$$

(4.74) numaralı denklemin iki tarafına da DTM dönüşümü uygulanırsa;

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} \xrightarrow{DTM} \frac{(k+4)!}{k!} W[k+4]$$

$$X(x) \xrightarrow{\text{DTM}} W[k]$$

$$W[k+4] = \omega^2 \frac{\rho A}{EI(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} W[k] \quad (4.75)$$

4.2.3 Bir ekseninde daralan metalik Euler-Bernoulli kirişlerin DTM ile çözümü

(3.31) numaralı denklem tekrar yazılır ve $y(x, t) = y(x)e^{i\omega t}$ kabulü ile türevler alınır,

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = i\omega y(x)e^{i\omega t} \quad (4.76)$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 y(x)e^{i\omega t} = -\omega^2 y(x, t) \quad (4.77)$$

$$\rho A_g \left(1 - \frac{cx}{L}\right) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} + EI_g \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(1 - \frac{cx}{L}\right)^3 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (3.31)$$

Denklemin iki parça şeklinde ele alırsak ve 2.terimdeki türevleri açarsak,

$$EI_g \left[\left(\frac{6c^2}{L^2} - \frac{6c^3x}{L^3} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(-\frac{3c}{L} + \frac{6c^2x}{L^2} - \frac{3c^3x^2}{L^3} \right) \frac{d^3 y}{dx^3} + \left(-\frac{3c}{L} + \frac{6c^2x}{L^2} - \frac{3c^3x^2}{L^3} \right) \frac{d^3 y}{dx^3} + \left(1 - \frac{cx}{L} \right)^3 \frac{d^4 y}{dx^4} \right] \quad (4.78)$$

(4.78) numaralı denklem, (3.31) numaralı ana denklemin içerisinde yazılırsa,

$$\begin{aligned} -\gamma^2 \left(1 - \frac{cx}{L}\right) \omega^2 y(x) + \left(\frac{6c^2}{L^2} - \frac{6c^3x}{L^3} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} \\ + \left(-\frac{3c}{L} + \frac{6c^2x}{L^2} - \frac{3c^3x^2}{L^3} \right) \frac{d^3 y}{dx^3} \\ + \left(-\frac{3c}{L} + \frac{6c^2x}{L^2} - \frac{3c^3x^2}{L^3} \right) \frac{d^3 y}{dx^3} + \left(1 - \frac{cx}{L} \right)^3 \frac{d^4 y}{dx^4} \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\gamma^2 = \frac{\rho A_g}{EI_g}$$

(4.79) numaralı denklem, 5 parça olarak incelenerek DTM uygulanırsa,

1.Terim;

$$-\gamma \left(1 - \frac{cx}{L}\right) \omega^2 y(x) \xrightarrow{\text{DTM}} -\gamma^2 \omega^2 W[k] + \gamma^2 \omega^2 \frac{c}{L} y(x) W[k-1] \quad (4.80)$$

2.Terim;

$$\begin{aligned} \frac{6c^2}{L^2} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{6c^3 x}{L^3} \frac{d^2 y}{dx^2} &\xrightarrow{\text{DTM}} \frac{6c^2}{L^2} (k+2)(k+1)W[k+2] \\ &\quad - \frac{6c^3}{L^3} \left(\prod_{i=0}^1 (k+i) \right) W[k+1] \\ &= \frac{6c^2}{L^2} (k+2)(k+1)W[k+2] \\ &\quad - \frac{6c^3}{L^3} (k)(k+1)W[k+1] \end{aligned} \quad (4.81)$$

3. ve 4. Terim aynı olduğu için, 2 terim tek bir dönüşüm ile gösterilebilir;

$$\begin{aligned} -\frac{3c}{L} \frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{6c^2 x}{L^2} \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{3c^3 x^2}{L^3} \frac{d^3 y}{dx^3} &\xrightarrow{\text{DTM}} \\ &\quad -\frac{3c}{L} (k+3)(k+2)(k+1)W[k+3] \\ &\quad + \frac{6c^2}{L^2} \left(\prod_{i=0}^2 (k+i) \right) W[k+2] \\ &\quad - \frac{3c^3}{L^3} \left(\prod_{i=-1}^1 (k+i) \right) W[k+1] \\ &= -\frac{3c}{L} (k+3)(k+2)(k+1)W[k+3] \\ &\quad + \frac{6c^2}{L^2} (k)(k+1)(k+2)W[k+2] \\ &\quad - \frac{3c^3}{L^3} (k-1)(k)(k+1)W[k+1] \end{aligned} \quad (4.82)$$

5.Terim;

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{cx}{L}\right)^3 \frac{d^4 y}{dx^4} &\xrightarrow{\text{DTM}} (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)W[k+4] \\
&- \frac{3c}{L} \left(\prod_{i=0}^3 (k+i) \right) W[k+3] \\
&+ \frac{3c^2}{L^2} \left(\prod_{i=-1}^2 (k+i) \right) W[k+2] \\
&- \frac{c^3}{L^3} \left(\prod_{i=-2}^1 (k+i) \right) W[k+1] \tag{4.83} \\
&= (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)W[k+4] \\
&- \frac{3c}{L} (k)(k+1)(k+2)(k+3)W[k+3] \\
&+ \frac{3c^2}{L^2} (k-1)(k)(k+1)(k+2)W[k+2] \\
&- \frac{c^3}{L^3} (k-2)(k-1)(k)(k+1)W[k+1]
\end{aligned}$$

(4.80), (4.81), (4.82) ve (4.83) numaralı denklemler toplanarak yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)W[k+4] \\
&= (k+3)(k+2)(k+1)W[k+3] \left(\frac{3ck}{L} - \frac{6c}{L} \right) \\
&+ (k+2)(k+1)W[k+2] \left(-\frac{3c^2}{L^2} (k^2 - k) \right. \\
&\quad \left. - \frac{12c^2 k}{L^2} - \frac{6c^2}{L^2} \right) \\
&+ (k+1)W[k+1] \left(\frac{c^3}{L^3} (k^2 - k)(k-2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{6c^3}{L^3} (k^2 - k) + \frac{6c^3 k}{L^3} \right) + W[k] \gamma^2 \omega^2 \\
&- W[k-1] \gamma^2 \omega^2 \frac{c}{L} \tag{4.84}
\end{aligned}$$

5. KOMPOZİT YAPILAR

Gelişen teknoloji ve artan insan ihtiyaçları doğrultusunda mevcut malzemelerden daha üstün malzemeler elde etme konusunda geçmişten günümüze birçok çalışma yapılmış ve hala yapılmaktadır. Özellikle havacılık alanındaki rekabet insanları daha hafif ve daha dayanıklı malzemeler üretmeye yönlendirmiştir. Bu doğrultuda hafif ve yüksek dayanımlı malzemeler büyük önem kazanmıştır. Ayrıca yorulma ve korozyon direnci, elektriksel ve akustik yalıtım, ısıya karşı dayanıklılığı ile de ön plana çıkmaktadır. Ancak imalat maliyetinin yüksek olması, seri üretime uygun olmaması ve geri dönüştürülebilirlik oranının çok düşük olması gibi dezavantajlara sahiptir.

Kompozit malzemeler fiziksel veya kimyasal olarak birbirinden büyük oranda farklılıkları olan birbirleri içinde çözünmeyen en az 2 malzemenin fiziksel olarak makro seviyede birleştirilmesi ile oluşturulan malzemelerdir. Bu sayede kompoziti oluşturan malzemelerin tek başına sağlayamadığı mekanik özellikler elde edilmiş olur. Kompozit malzemeler, matris ve takviye elemanı olarak adlandırılan iki temel bileşenden oluşmaktadır. Matris, kompozit yapıya şeklini veren, takviye elemanının etrafını sararak çevresel etkilerden koruyan, takviye elemanına yük aktaran ve tokluğa katkı veren bileşendir. Takviye elemanı ise kompozit yapının dayanım gibi mekanik özelliklerine doğrudan katkı sağlayan ve iletkenlik gibi özelliklerinde baskın olarak önemli rol oynayan bileşendir.

5.1 Kompozitlerin Sınıflandırılması

Kompozit malzemelerin üretiminde çok fazla sayıda malzeme kullanılabildiğinden dolayı kesin olarak belirlenmiş sınıflandırmaları bulunmamakla beraber, matris ve fiber yapılarına göre iki ana grupta incelenebilmektedir.

5.1.1 Matris malzemelerine göre kompozit malzemeler

5.1.1.1 Polimer matrisli kompozitler

Karbon, polietilen, aramid gibi yüksek performans göstern fiberlerdeki ve matris malzemelerinde kullanılan polimerlerdeki gelişim sayesinde polimer matrisli

kompozitler mühendislikte yaygın bir kullanıma sahiptir. Polimer malzemelerin liflerle pekiştirilmesiyle elde edilmektedir. Bu kompozitler, yüksek korozyon ve yorulma direncine sahip, işlenmesi, şekillendirilmesi ve üretilmesi kolay olmasının yanı sıra yüksek termal genleşmeye ve düşük termal dirence sahip malzemelerdir. Bu kompozitler, termoset matrisli ve termoplastik matrisli kompozitler olarak iki gruba ayrılır.

Termoset matrisler, fiber takviyeli kompozit üretiminde yaygın olarak kullanılan ve sıvı halde bulunan, katılaştırıcı ilavesi ile katı hale gelen matrislerdir. Termoset reçineler izotropik malzemelerdir.

Termoset matrislerin en önemli özelliği ise sünek yapıya sahip olmasından dolayı ısı ile eritilip soğutulularak katılaştırılması ve tekrar şekillendirilebilen matrisler olmasıdır. Termoplastik matrisler amorf ve yarı kristal yapıda olabilirler.

5.1.1.2 Metal matrisli kompozitler

Metal matrisli kompozitler, metal malzemenin kendi kullanım sıcaklığından daha yüksek sıcaklıklarda kullanılabilmesi ihtiyacını karşılamak amacıyla geliştirilmiş ana malzemesi metal ve metal alaşımı olan malzemelerdir. Metalik fazdaki malzemenin, bazı takviye malzemelerinin vakum ile emdirme, karıştırma, elektroliz ile kaplama, dökme gibi yöntemler ile pekleştirilmesi ile elde edilen bu malzemeler metallerin plastik şekil değiştirme özelliklerini, seramiklerin ise yüksek elastisite modülü özelliklerini bünyesinde barındırır. Düşük yoğunluk, yüksek mukavemet ve esneklik modülü, yüksek toklu ısıl şoka karşı yüksek dayanım ve tekrar üretilebilir iç yapıya sahip olması sayesinde imalatının zor ve yüksek maliyetli olmasına rağmen havacılık ve uzay alanlarında yaygın bir kullanıma sahiptir.

5.1.1.3 Seramik matrisli kompozitler

Seramik fazın düşük süneklik ve tokluğa sahip olmasından dolayı, karbon, cam, metal, seramik gibi çeşitli takviye malzemeleri ile pekleştirilmesiyle elde edilen bu kompozitler, seramik malzemelerin yüksek sıcaklıklarda çalışması gereken parçalarında kullanılmaktadır. Seramik matrisli kompozitlerde, matris malzemesi olarak genelde Al_2O_3 , SiC , Si_3N_4 , B_4C yaygın olarak kullanılmaktadır. Zırhlar, çeşitli askeri amaçlı kullanılan parçalar, uzay araçları ve roket kompozitler üzerinde

son yıllarda yapılan çalışmalar bu kompozitlerin biomalzeme olarak insan vücudunda da kullanımına olanak sağlamıştır.

5.1.1.4 Karbon matrisli kompozitler

Karbon-Karbon kompozit olarak da bilinen bu malzemeler, kırılgan ve kuvvet zayıflığı olan karbon matrisin yükek kuvvetli karbon fiber ile takviye edilmesiyle elde edilmektedir. Hafif olması, termal şoklara karşı yüksek dirençli olması, yüksek gerilme dayanımına sahip olması ve oksidatif olmayan ortamlarda **2000 °C**'den yüksek sıcaklıklarda bu özelliklerini koruyabilmeleri en önemli özellikleridir. Ancak çok yüksek sıcaklıklarda kararlı olmalarına rağmen koruyucu bir tabakayla kaplanmadığı veya kimyasal olarak geliştirilmediği takdirde oksijenli atmosferde **400 °C** gibi sıcaklıklarda oksitlenmektedir. Kaplama işlemleri, uygulanan karmaşık prosedürler, yüksek maliyetleri ve nispeten yeni olduklarından dolayı çok yaygın bir kullanıma sahip olmasalar da roket motorları, uçak ve yarış otomobilleri gibi yüksek performans gerektiren alanlarda kullanılmaktadırlar.

5.1.2 Takviye elemanına göre kompozit malzemeler

5.1.2.1 Fiber takviyeli kompozitler

Uygun matris malzemesi ile fibere liflerin birleştirilmesiyle elde edilen bu kompozitlerde matris yükü fibere iletir ve yükün büyük bir kısmı fiber tarafından taşınır. Fiberlerin boyutları, yerleşim doğrultuları kompozitin özellikleride önemli bir rol oynamaktadır. Birbirlerine paralel olarak yerleştirilen fiberli kompozitler, malzemenin fiber doğrultusunda çok yüksek mukavemete sahipken, fiber doğrultusundan çıkıldıkça mukavemeti düşmektedir. Birbirlerine dik olarak konumlandırılmış fiberlere sahip kompozitlerde iki yönde de yüksek mukavemet elde etmek mümkündür. Ayrıca fiberler matrisin içerisinde kısa veya kesik yapıda bulunabilirler. Fiber takviyeli kompozitler genellikle anizotropik olmakla beraber, fiberlerin matris içerisinde homojen bir şekilde dağıtılmasıyla yarı-izotropik de olabilirler.

5.1.2.2 Partikül takviyeli kompozitler

Partikül takviyeli kompozit malzemeler, bir ya da birden fazla malzemedan oluşan genellikle küresel, ellipsoidal, çok yüzlü veya rastgele şekilli mikroskopik veya

makroskopik partiküllerin matris malzemesi içerisinde rastgele yerleştirilmesiyle oluşan malzemelerdir. Fiber takviyeli kompozitlerde olduğu gibi partikül takviyeli kompozitlerde de matris yükü iletme görevi görürken, partiküller yükü taşımaktadır [9]. Ortalama partikül boyutu 1 mm'den büyük ve partikül oranı hacimsel olarak %50'den fazladır. Beton, alüminyum takviyeli poliüretan kauçuk en çok bilinen partikül takviyeli kompozitlerdir. Partikül takviyeli kompozitlere nükleer reaktörlerde rastlamak mümkündür.

5.1.2.3 Dolgu kompozitler

Birbiri içerisinde çözünmeyen ve birbirleriyle kimyasal tepkimeye girmeyen üç boyutlu sürekli yapıya sahip matris malzemesinin, dolgu malzemesi ile doldurulması ya da malzemeye emdirilmesiyle elde edilen kompozitlerdir. Matris düzfüne petekli, hücreli veya gözenekli bir yapıya sahip bir iskelet görevi görürken, dolgu malzemesi ise metalik, organik veya seramik esaslı olabilmektedir.

5.1.2.4 Katmanlı kompozitler

Aynı veya farklı doğrultularda fiber bulunduran en az iki tabakanın üst üste yerleştirilerek bir araya gelmesiyle oluşan tabakalı kompozitler en eski ve uygulamalarda en çok rastlanan kompozitlerdir. Bu kompozitler matris içerisinde rastgele veya tek yönlü yönelmiş elyafı tabakalardan oluşabileceği gibi farklı elyaf takviyeleri barındıran tabakalardan da oluşabilmektedir. Bu kompozitlerin yaygın kullanıma sahip olmasının en önemli nedeni ise her tabakanın fiber yönünün malzemenin maruz kalacağı yüklere göre seçilebiliyor olmasıdır. Tabakalı kompozitler, yerleşim açısı, malzeme türü, tabaka kalınlığı göz önünde bulundurularak simetrik veya asimetrik olarak ikiye ayrılmaktadır. Tabakalı kompozitler uçakların kanat ve kuyruk bölümlerinin yüzey kaplamalarında yaygın olarak kullanılmaktadır.

5.2 Kompozit Yapıların Titreşimi

Matris içerisindeki fiberleri tek yönde uzanan katmanlı kompozitlere tek yönlü laminar denilmektedir. Fiber yönlerine paralel yükleme durumunda tek yönlü laminaların karakter analizini yaparsak,

$$\varepsilon_f = \varepsilon_m = \varepsilon_c \quad (5.1)$$

Fiberlerdeki (ε_f), matristeki (ε_m) ve kompozit yapılarıdaki (ε_c) gerilmeler eşit olmalıdır.

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f = E_f \varepsilon_c \quad (5.2)$$

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_m = E_m \varepsilon_c \quad (5.3)$$

$$P = P_f + P_m \quad (5.4)$$

Burada P , toplam çekme yüklemesi, P_f , fiberlerde indüklenen toplam çekme yüklenmesi, P_m ise matriste indüklenen toplam çekme yüklemesidir (Bknz Şekil 5.1).

$$A_c = A_m + A_f \quad (5.5)$$

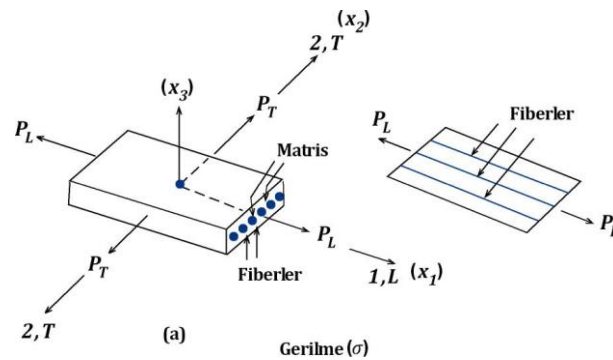
Burada A_c kompozitin, A_f fiberin, A_m ise matrisin net kesit alanını göstermektedir.

$$\sigma_c A_c = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \Rightarrow \sigma_c = \sigma_f \frac{A_f}{A_c} + \sigma_m \frac{A_m}{A_c} \quad (5.6)$$

$$\sigma_c = \sigma_f v_f + \sigma_m v_m = \sigma_f v_f + \sigma_m (1 - v_f) \quad (5.7)$$

$$v_f = \frac{A_f}{A_c} \quad (5.8)$$

$$v_m = 1 - v_f \quad (5.9)$$



Şekil 5.1 : Fiber, matris ve kompozitte uzunlamasına yükleme ve bunun sonucunda oluşan gerilmeler.

(5.7) numaralı denklemin her iki tarafı ϵ_c 'ye bölünürse;

$$E_L = E_1 = E_f v_f + E_m v_m = E_f v_f + E_m (1 - v_f) \quad (5.10)$$

$$E_L = E_1 = \frac{P}{A_c \epsilon_1}, \quad v_{LT} = v_{12} = -\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \quad (5.11)$$

Burada E_1 uzunlamasına kompozit tabakanın uzunlamasına modülüdür. 2 alt indisi, enine yönü belirtirken, v ise poisson oranını göstermektedir.

$$v_{12} = v_f v_f + v_m v_m \quad (5.12)$$

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + v_f)}, \quad G_m = \frac{E_m}{2(1 + v_m)} \quad (5.13)$$

$$E_T = E_2 = \frac{E_f E_m}{E_f v_m + E_m v_m} \quad (5.14)$$

$$G_{LT} = G_{12} = \frac{G_f G_m}{G_f v_m + G_m v_f} \quad (5.15)$$

Ortotropik malzemeler için temel denklemler ve gerilme-gerinim ilişkisi yönünden incelersek,

$$E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\epsilon_{11}}, \quad E_2 = \frac{\sigma_{22}}{\epsilon_{22}}, \quad E_3 = \frac{\sigma_{33}}{\epsilon_{33}} \quad (5.16)$$

v_{12} , x_1 yönünde uzama gerilmesidir. Birinci alt indis yükleme yönünü belirtirken, ikinci indis yanal yönde çekmeyi belirtir.

x_2 yönünde uygulanan σ_{22} gerilmesi nedeniyle aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$\epsilon_{11}^{(2)} = -\frac{v_{21} \sigma_{22}}{E_2} \quad (5.17)$$

$$v_{21} = -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}}, \quad v_{31} = -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}, \quad v_{23} = -\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{22}} \quad (5.18)$$

Üç normal gerilmenin ($\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$) aynı anda uygulanmasından kaynaklanan toplam gerilmeler şu şekilde yazılır;

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(1)} + \varepsilon_{11}^{(2)} + \varepsilon_{11}^{(3)} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} - \frac{\sigma_{22}V_{21}}{E_2} - \frac{\sigma_{33}V_{31}}{E_3} \quad (5.19)$$

$$\varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^{(1)} + \varepsilon_{22}^{(2)} + \varepsilon_{22}^{(3)} = -\frac{\sigma_{11}V_{12}}{E_1} + \frac{\sigma_{22}}{E_2} - \frac{\sigma_{33}V_{32}}{E_3} \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33}^{(1)} + \varepsilon_{33}^{(2)} + \varepsilon_{33}^{(3)} = -\frac{\sigma_{11}V_{13}}{E_1} - \frac{\sigma_{22}V_{23}}{E_2} - \frac{\sigma_{33}}{E_3} \quad (5.21)$$

12, 23 ve 31 düzlemlerinde kesme testleri yaparak,

$$2\varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}}, \quad 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}}, \quad 2\varepsilon_{13} = \gamma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} \quad (5.22)$$

Burada $\gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ mühendislik gerinimi iken, G_{12}, G_{23}, G_{13} kayma modülüdür.

(106) numaralı denklemden (109) numaralı denkleme kadar olan denklemler matris formunda yazılırsa,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{V_{21}}{E_2} & -\frac{V_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{V_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{V_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{V_{13}}{E_1} & -\frac{V_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2G_{12}} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

Burada alt indislerin karşılığı aşağıdaki gibidir,

$$1 \rightarrow xx, 2 \rightarrow yy, 3 \rightarrow zz, 4 \rightarrow yz, 5 \rightarrow zx, 6 \rightarrow xy$$

(5.53) numaralı denklemde 6x6'lık matris esneklik matrisidir ve tersi rijitlik matrisini vermektedir.

$$[S]^{-1} = [C] \quad (5.24)$$

[S] ve [C] matrisleri simetrik matrislerdir. Bu durumda,

$$\frac{v_{21}}{E_2} = \frac{v_{12}}{E_1}, \quad \frac{v_{31}}{E_3} = \frac{v_{13}}{E_1}, \quad \frac{v_{32}}{E_3} = \frac{v_{23}}{E_2} \quad (5.25)$$

(5.25) numaralı denklemden,

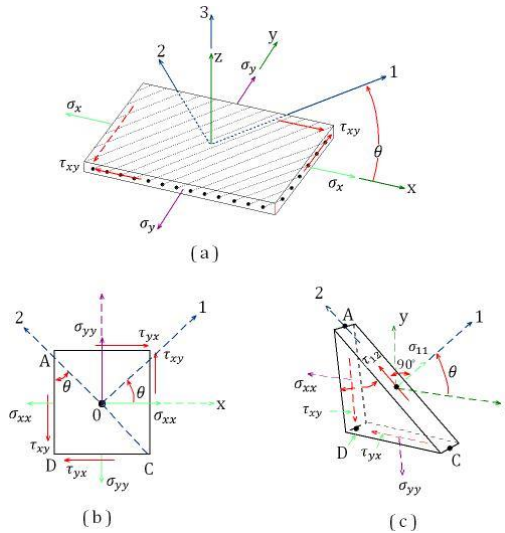
$$v_{21} = \frac{E_2}{E_1} v_{12} \quad (5.26)$$

Enine izotropik olan ortotropik malzemelerde lifler 1-2 düzleminde ve elastik özellikler 2-3 yönünde aynıdır. Böylece $E_{22} = E_{33}$, $v_{12} = v_{13}$ ve $G_{12} = G_{13}$ olur. Bu malzemeler için,

$$G_{23} = \frac{E_{22}}{2(1 + v_{23})} \quad (5.27)$$

5.2.1 Düzlem durumunda gerilmeler ve gerinimler için koordinat dönüşüm ilişkileri

Kompozit katmanların içerisindeki fiberler, xy düzleminde x eksenine θ açısı ile yerleştirildiğinden dolayı xy ve 12 düzlemleri arasındaki dönüşüm yapmak gerekmektedir. Burada Şekil 5.2'de de görüldüğü gibi 1 fiber yönüne paralel eksen iken, 2 ise düzlem üzerinde fiberlere dik olan eksen göstermektedir. Ayrıca fiber katmanlarda fiberler farklı açılarla yerleştirilebileceğinden dolayı gerilmeler ve gerinimler için koordinat sistemleri arasında dönüşüm yapmak gerekmektedir.



Şekil 5.2 : Gerilme ve gerinimler için koordinat dönüşümleri: (a)İki eksen takımının gösterimi. (b)x-y düzleminde kesit. (c)1-3 düzleminde kesit.

Sol yüzey (AD) alanı A_0 olarak kabul edilirse, alt yüzey (DC) $A_0 \tan \theta$ ve eğimli yüzey (AC) ise $A_0 \sec \theta$ olarak tanımlanabilir.

1 eksenini doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa,

$$\sigma_{11} = \sigma_{xx} \cos^2 \theta + \sigma_{yy} \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (5.28)$$

2 eksenini doğrultusunda kuvvet dengesi yazılırsa,

$$\tau_{12} = -(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (5.29)$$

2 eksenini, 1 eksenine $\theta+90^\circ$ ile yerleştirilmiş olduğundan dolayı,

$$\sigma_{22} = \sigma_{xx} \sin^2 \theta + \sigma_{yy} \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \cos \theta \sin \theta \quad (5.30)$$

Bu 3 denklem matris formunda yazılırsa,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

(5.31) numaralı denklem aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\vec{\sigma}^{12} = [T_\sigma] \vec{\sigma}^{xy} \quad (5.32)$$

Burada,

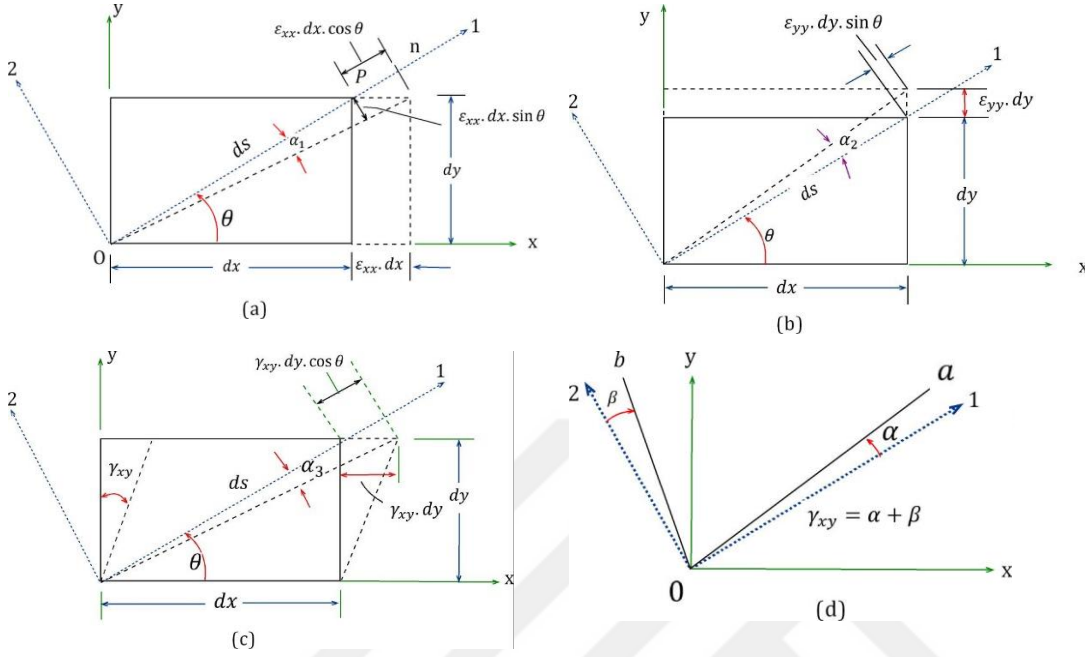
$$\vec{\sigma}^{12} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}, \quad \vec{\sigma}^{xy} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

12 koordinat sistemindeki gerilmeler cinsinden xy koordinat sistemindeki gerilmeleri cinsinden ifade etmek için θ yerine $-\theta$ konarak elde edilir.

$$\vec{\sigma}^{xy} = [T_\sigma]^{-1} \vec{\sigma}^{12} = [T_\sigma(-\theta)] \vec{\sigma}^{12} \quad (5.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & -\cos \theta \sin \theta & -(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$



Şekil 5.3 : Gerilmeler ve koordinat sistemlerinin ilişkileri: (a) ϵ_{xx} için dönüşüm. (b) ϵ_{yy} için dönüşüm. (c) γ_{xy} için dönüşüm. (d) γ_{xy} dönüşüm açıları.

xy düzlemindeki gerinimler cinsinden normal gerinim ϵ_{11} aşağıdaki gibi yazılır,

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{xx} \cos^2 \theta + \epsilon_{yy} \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (5.36)$$

2 yönündeki normal gerinim ise (5.36) numaralı denklemde θ ifadesi yerine $\theta + 90^\circ$ yazılarak bulunur,

$$\epsilon_{22} = \epsilon_{xx} \sin^2 \theta + \epsilon_{yy} \cos^2 \theta - \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (5.37)$$

12 düzlemindeki kayma gerinimi ise,

$$\gamma_{12} = \sigma + \beta \quad (5.38)$$

$$\alpha_1 = \frac{\epsilon_{xx} dx \sin \theta}{ds} = \epsilon_{xx} \sin \theta \cos \theta \quad (5.39)$$

$$\alpha_2 = \frac{\epsilon_{yy} dy \cos \theta}{ds} = \epsilon_{yy} \sin \theta \cos \theta \quad (5.40)$$

$$\alpha_3 = \frac{\gamma_{xy} dy \sin \theta}{ds} = \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (5.41)$$

$$\alpha = -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin \theta \cos \theta - \gamma_{xy} \sin^2 \theta \quad (5.42)$$

(5.42) numaralı denklemde θ ifadesi yerine $\theta + 90^\circ$ yazarak β hesaplanırsa,

$$\beta = -(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy} \cos^2 \theta \quad (5.43)$$

(5.38) numaralı denklemde α ve β yerlerine yazılırsa,

$$\gamma_{12} = -2(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}) \sin \theta \cos \theta + \gamma_{xy}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \quad (5.44)$$

Elde edilen gerilim denklemleri matris formunda yazılırsa,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -2\cos \theta \sin \theta & 2\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

$$\vec{\varepsilon}^{12} = [T_\varepsilon] \vec{\varepsilon}^{xy} \quad (5.46)$$

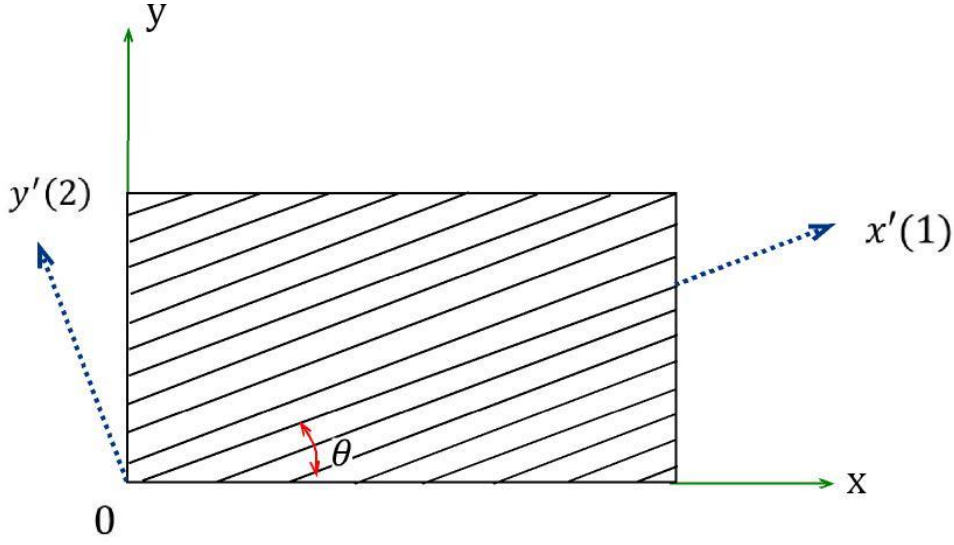
Gerilme dönüşümünde olduğu gibi θ yerine $-\theta$ koyarak (5.45) ve (5.46) numaralı ifadelerin tersi bulunabilir.

$$\vec{\varepsilon}^{xy} = [T_\varepsilon]^{-1} \vec{\varepsilon}^{12} = [T_\varepsilon(-\theta)] \vec{\varepsilon}^{12} \quad (5.47)$$

5.2.2 Açılı yerleştirilmiş fiberlere sahip katmanlı kompozitler

5.2.2.1 Açılı yerleştirilmiş fiberlere sahip katmanlı kompozitlerin düzlem gerilme problemlerinde rijitlik ve esneklik matris dönüşümleri

Tüm fiberlerin Şekil 5.4'te görüldüğü gibi birbirine paralel bir şekilde x eksenine θ açısı ile yerleştirildiği bir katmanda rijitlik ve esneklik matrislerinin dönüşümü aşağıdaki gibidir.



Şekil 5.4 : x-ekseni ile θ açısı yapan fiberler.

Düzlem gerilmelerinde sadece sıfır olmayan gerilmeler dikkate alındığında,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.48)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.49)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

$$\vec{\sigma} = [C]\vec{\varepsilon} \quad (5.51)$$

$$\vec{\sigma}' = [C']\vec{\varepsilon}' \quad (5.52)$$

$$\vec{\varepsilon} = [S]\vec{\sigma} \quad (5.53)$$

$$\vec{\varepsilon}' = [S']\vec{\sigma}' \quad (5.54)$$

(5.52) numaralı denklemin her iki tarafı $[T_\sigma]$ ile çarpılırsa,

$$[T_\sigma]\vec{\sigma} = [T_\sigma][C]\vec{\varepsilon} \quad (5.55)$$

(5.55) numaralı denklemin sağ tarafı $[T_\varepsilon]^{-1}[T_\varepsilon]$ ile çarpılırsa,

$$[T_\sigma]\vec{\sigma} = [T_\sigma][C][T_\varepsilon]^{-1}[T_\varepsilon]\varepsilon \quad (5.56)$$

(5.52) ve (5.56) numaralı denklemlerde,

$$\vec{\sigma}' = [T_\sigma]\vec{\sigma}, \quad [C'] = [T_\sigma][C][T_\varepsilon]^{-1}, \quad [C'] = [T_\varepsilon]\vec{\varepsilon} \quad (5.57)$$

5.2.2.2 Ortotropik malzemeler için rijitlik ve esneklik matrisinin dönüşümleri

x_1, x_2 ve x_3 eksenleri 3 simetri düzlemine diktir.

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

İki matris de 12 sıfır olmayan eleman içerirken bunlardan sadece 9 tane bağımsızdır.

$$[C] = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

$$[L] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{D} \begin{bmatrix} E_1 \left(1 - \frac{E_3}{E_2} v_{23}^2\right) & E_1 \left(v_{12} + \frac{E_3}{E_2} v_{13} v_{23}\right) & E_3 (v_{13} + v_{12} v_{23}) \\ E_2 \left(v_{12} + \frac{E_3}{E_2} v_{13} v_{23}\right) & E_2 \left(1 - \frac{E_3}{E_1} v_{13}^2\right) & E_3 \left(v_{23} + \frac{E_2}{E_1} v_{12} v_{13}\right) \\ E_3 (v_{13} + v_{12} v_{23}) & E_3 \left(v_{23} + \frac{E_2}{E_1} v_{12} v_{13}\right) & E_3 \left(1 - \frac{E_2}{E_1} v_{12}^2\right) \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Burada

$$D = \frac{E_1 E_2 E_3 - v_{23}^2 E_1 E_3^2 - v_{12}^2 E_2^2 E_3 - 2v_{12} v_{13} v_{23} E_2 E_3^2 - v_{13}^2 E_2 E_3^2}{E_1 E_2 E_3} \quad (5.63)$$

5.2.2.3 Gerilme düzleminde kompozit katmanlar

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.64)$$

Ortotropik katmanlarda $Q_{16} = Q_{26} = 0$ 'dır. Bu durumda;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \Rightarrow \vec{\sigma}^{12} = [Q] \vec{\varepsilon}^{12} \quad (5.65)$$

Burada [Q] matrisi Hook Kanunu matrisidir.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - v_{12}v_{21}}, \quad Q_{22} = \frac{E_2}{1 - v_{12}v_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}, \quad (5.66)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{E_2 v_{12}}{1 - v_{12}v_{21}}, \quad Q_{16} = Q_{26} = Q_{62} = 0$$

Düzlemsel gerilme durumunda ortotropik malzemeler için sadece 4 adet bağımsız malzeme sabiti vardır. Bunlar,

- 1) Fiber doğrultusunda Young Modülü (E_1)
- 2) Enine doğrultudaki Young Modülü (E_2)
- 3) Uzunlamasına doğrultudaki kayma modülü (G_{12})
- 4) Enine doğrultudaki Poisson oranı (v_{12})

Gerilme ve gerinim arasındaki ilişki ise (5.65) numaralı denklemin tersi ile gösterilebilir,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (5.67)$$

veya

$$\vec{\varepsilon}^{12} = [S] \vec{\sigma}^{12} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_2}, \\
S_{21} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{16} &= S_{61} = 0, & S_{26} &= S_{62} = 0
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Pratikte x-y koordinat sistemi ile malzemenin koordinat sistemi çakışık değildir. Bu nedenle bir dönüşüme ihtiyaç duyulur. Koordinat sistemi dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.70}$$

veya

$$\vec{\sigma}^{12} = [T_\sigma] \vec{\sigma}^{xy} \tag{5.71}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.72}$$

veya

$$\vec{\varepsilon}^{12} = [T_\varepsilon] \vec{\varepsilon}^{xy} \tag{5.73}$$

x-y koordinat sistemindeki gerilmeler ve şekil değiştirmeler arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibi ifadelerin birleştirilmesi ile bulunabilir,

$$\vec{\sigma}^{xy} = [T_\sigma]^{-1} \vec{\sigma}^{12} = [T_\sigma]^{-1} [Q] \vec{\varepsilon}^{12} = [T_\sigma]^{-1} [Q] [T_\varepsilon] \vec{\varepsilon}^{xy} \tag{5.74}$$

(5.74) numaralı denklem tekrar yazılırsa,

$$\vec{\sigma}^{xy} = [\bar{Q}] \vec{\varepsilon}^{xy} \tag{5.75}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{5.76}$$

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \tag{5.77}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{12} &= \bar{Q}_{21} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
&+ Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
\end{aligned} \tag{5.78}$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \tag{5.79}$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{61} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ &+ (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta\end{aligned}\quad (5.80)$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{26} = \bar{Q}_{62} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ &+ (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta\end{aligned}\quad (5.81)$$

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &+ Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)\end{aligned}\quad (5.82)$$

Bu ifadeler daha sade bir şekilde yeniden yazılırsa,

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (5.83)$$

$$\bar{Q}_{12} = U_4 - U_3 \cos 4\theta \quad (5.84)$$

$$\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \quad (5.85)$$

$$\bar{Q}_{16} = -\frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \quad (5.86)$$

$$\bar{Q}_{26} = -\frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \quad (5.87)$$

$$\bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cos 4\theta \quad (5.88)$$

Burada,

$$U_1 = \frac{1}{8}(3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}) \quad (5.89)$$

$$U_2 = \frac{1}{2}(Q_{11} - Q_{22}) \quad (5.90)$$

$$U_3 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}) \quad (5.91)$$

$$U_4 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}) \quad (5.92)$$

$$U_5 = \frac{1}{8}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}) \quad (5.93)$$

5.2.3 Katmanlı kompozit yapı kabulleri ve yapının özellikleri

Pratik uygulamalarda kullanılan kompozit yapılar plakalardan oluşan katmanlı bir yapıya sahiptir. Katmanlı kompozit yapıların mekanik davranışlarının belirlenmesi geliştirilen denklemlerde bazı temel kabuller yapılmaktadır. Bu kabuller;

- 1) Katmanlı kompozit malzemeler, kalınlık, genişlik, uzunluk veya çap gibi düzlem için boyutlara göre incedir.
- 2) Katmanlı yapı veya her katman üniform kalınlıktadır ve ortotropik yapıya sahiptir.
- 3) Katmanlar birbirlerine mükemmel şekilde bağlanmıştır.
- 4) Katmanlı kompozit yapılarda gerilmeler ve yer değiştirmeler küçüktür.
- 5) Katmanlı kompozit yapının orta yüzeyi genellikle referans düzlem olarak seçilir ve buna enine olan doğrultu z eksenini olarak seçilir. Ayrıca yapı referans düzleme göre simetrik olmadığı sürece referans düzlemin nötr düzlem olmayacağı ve saf eğilme altında referans düzlemde gerilmelerin sıfır olmayacağı göz önünde bulundurulmalıdır.
- 6) Orta düzleme dik elemanlar deformasyondan sonra düz ve orta düzleme dik kalır.
- 7) 6 numaralı kabul, normal gerilmelerin ve kesme gerilmelerinin ($\epsilon_z, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$) sıfır olduğunu göstermektedir.

Fiberlerin katmanlara yerleştirilme açılarına göre yaygın olarak kullanılan bazı özel katmanlı kompozit yapılar vardır. Bunlar şu şekildedir;

- 1) Tek yönlü yapılar: Tüm katmanlarındaki lifler aynı yerleştirme açısına sahiptir.
- 2) Çapraz katmanlı yapılar: Birbirini takip eden katmanlarda 0° veya 90° yerleştirme açısına sahip fiberlerin bulunduğu yapılardır.
- 3) Açılı katmanlı yapılar: Birbirini takip eden katmanlardaki fiberlerin $\theta, -\theta$ gibi açılara sahip olduğu yapılardır.
- 4) Simetrik katmanlı yapılar: Orta düzlem etrafındaki kalınlık yönünde ilerlerken simetrik yerleştirme açısına sahip katmanlardan oluşan yapılardır. Bu katmanlarda orta düzlemin altında ve üzerinde eşit mesafelerdeki katmanların malzeme özellikleri, yerleştirme açıları ve kalınlıkları özdeşdir.

- 5) Asimetrik katmanlı yapılar: Bu yapılarda orta düzleme göre eşit uzaklıkta olan orta düzlemin alt ve üst kısmında yer alan katmanların fiber yerleştirme açıları θ ve $-\theta$ şeklindedir.

5.2.3.1 Tek bir katmanın rijitlik matrisinin hesaplanması

Düzlemsel gerilme durumundaki 12 koordinat sisteminde yer alan ve 3 numaralı eksenin katmana dik olduğu, ince ortotropik k. katmanın gerilme-gerinim ilişkisi şu şekildedir.

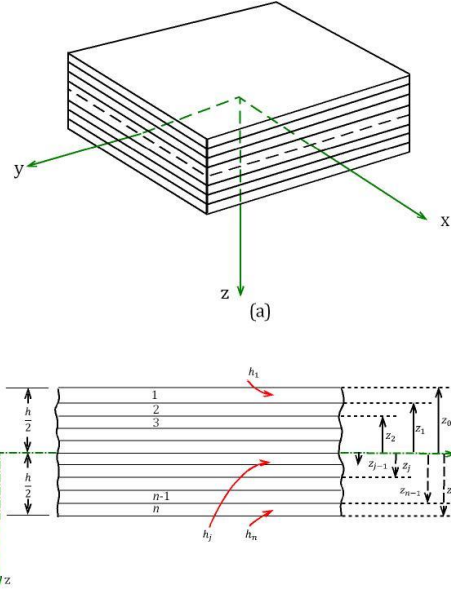
$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{12} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}^{12} \quad (5.94)$$

(5.75) numaralı denklemi elde ettiğimiz gibi (5.94) numaralı denklemi yeniden düzenlediğimizde,

$$\vec{\sigma}_k^{xy} = [\bar{Q}]_k \vec{\varepsilon}_k^{xy} \quad (5.95)$$

5.2.3.2 Katmanlı yapının gerinim-gerinim-gerinim ilişkisi

Şekil 5.5'te gösterildiği gibi toplam kalınlığı h olan, n tane ortotropik katmandan oluşan kompozit yapı ele alınmıştır. $x - y - z$ koordinatları yapının orta düzlemine yerleştirilmiş ve aşağı yönde z eksenini pozitif olarak alınmıştır. k . katmanın koordinatları x_1^k, x_2^k, x_3^k ve yerleştirme açısı $\theta^k, z = z_{k-1}$ ve $z = z_k$ katmanları arasındaki bu katmanın kalınlığı h_k 'dir. Deforme olmuş yapının koordinatları ise $(x + u, y + v, z + w)$ 'dir. Yükleme nedeniyle yapının yer değiştirmesi ise (u_0, v_0, w_0) 'dir.



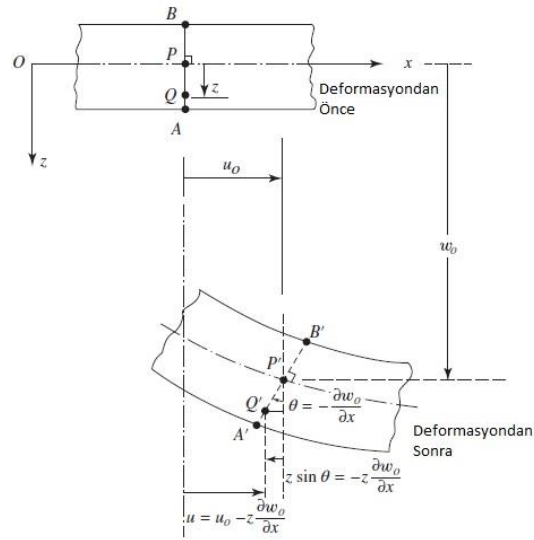
Şekil 5.5: Katmanlı kompozit kirişin katman yapısı: (a) Kompozit kirişten alınan bir parça. (b) Kompozit kirişin xz düzlemine göre kesit görünüşü.

Şekil 5.6’da görülen diferansiyel eleman göz önüne alınırsa, Kirchhoff Hipotezine göre;

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (5.96)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (5.97)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (5.98)$$



Şekil 5.6 : Kirchhoff hipotezi.

xy düzleminde gerinimler,

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_{x_0} + zK_x \quad (5.99)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \varepsilon_{y_0} + zK_y \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \gamma_{xy_0} + zK_{xy} \end{aligned} \quad (5.101)$$

Burada K_x ve K_y eğilme eğriliği, K_{xy} ise burulma eğriliğidir.

$$K_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad K_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.102)$$

$$K_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.103)$$

5.2.3.3 Katmanlı kompozitin düzlem içi kuvvetleri ve momentleri

Katmanlı kompozit yapının Şekil 5.7’de gösterilen diferansiyel elemanına etki eden düzlem içi kuvvetler ve momentler aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (5.104)$$

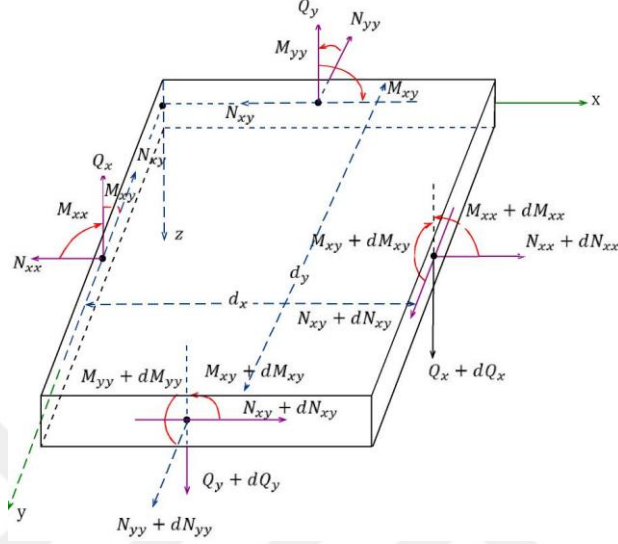
Burada N_x , N_y ve N_{xy} düzlemiçi bileşke kuvvetlerdir.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (5.105)$$

Burada M_x , M_y ve M_{xy} düzlemiçi bileşke momentlerdir.

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (5.106)$$

Burada ise v_x ve v_y kayma kuvvetinin bileşkesidir.



Şekil 5.7 : Katmanlı kompozit yapıdan alınan diferansiyel eleman.

Kuvvetlerin bileşkeleri

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\} \end{aligned} \quad (5.107)$$

$$\vec{N} = [A]\vec{\varepsilon}^0 + [B]\vec{K} \quad (5.108)$$

Burada,

$$\vec{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}^0 = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}, \quad \vec{K} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.109)$$

$$[A] = [A_{ij}] = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (5.110)$$

$$[B] = [B_{ij}] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (5.111)$$

Burada n, kompozit yapının katman sayısıdır, (5.110) numaralı denklem kompozit yapının uzama rijitlik matrisiyken birimi (N/m) veya (lb/in)'dir. (5.111) numaralı denklem ise kaplin rijitlik (coupling stiffness) matrisiyken birimi (N) veya (lb)'dir.

Moment bileşikleri

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz = \sum_{k=1}^n \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} z \, dz \right. \\ &\quad \left. + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} z^2 \, dz \right\} \end{aligned} \quad (5.112)$$

Burada $[\bar{Q}]_k$ integralinin dışına, ε^0 ve $\vec{K}$ vektörleri is toplamın dışına çıkabilir.

$$\vec{M} = [B]\varepsilon^0 + [D]\vec{K} \quad (5.113)$$

Burada,

$$\vec{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.114)$$

$$[D] = [D_{ij}] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (5.115)$$

(5.115) numaralı denklemi kompozit yapının eğilme rijitlik matrisiyken birimi (N-m) veya (lb-in)'dir.

(5.108) ve (5.113) numaralı denklemlerin birleştirilmesi ile kompozit yapının nihai denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}^0 \\ \vec{K} \end{Bmatrix} \quad (5.116)$$

Her katman için orta düzlem gerinimlerinin hesaplanması

(5.116) numaralı denklem iki ayrı denklem olarak yeniden yazılır ve $\vec{\varepsilon}^0$ orta düzlem gerinimleri için çözülürse,

$$\begin{aligned} \vec{N} &= [A]\vec{\varepsilon}^0 + [B]\vec{K} \\ \vec{M} &= [B]\vec{\varepsilon}^0 + [D]\vec{K} \end{aligned} \Rightarrow \vec{\varepsilon}^0 = [A]^{-1}\vec{N} - [B]^{-1}\vec{K} \quad (5.117)$$

(5.117) numaralı denklem yeniden düzenlenirse,

$$\vec{M} = [B][A]^{-1}\vec{N} - ([B][A]^{-1}[B] + [D])\vec{K} \quad (5.118)$$

(5.116) numaralı denklem kısmi olarak ters çevrilirse,

$$\begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}^0 \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A^*] & [B^*] \\ [C^*] & [D^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{K} \end{Bmatrix} \quad (5.119)$$

Burada,

$$\begin{aligned} [A^*] &= [A]^{-1} \\ [B^*] &= -[A]^{-1}[B] \\ [C^*] &= [B][A]^{-1} \\ [D^*] &= [D] - [B][A]^{-1}[B] \end{aligned} \quad (5.120)$$

(5.120) numaralı denklemler kullanılarak, (5.118) numaralı denklem çözülürse,

$$\vec{K} = [D^*]^{-1}\vec{M} - [D^*]^{-1}[C^*]\vec{N} \quad (5.121)$$

$$\vec{\varepsilon}^0 = ([A^*] - [B^*][D^*]^{-1}[C^*])\vec{N} + [B^*][D^*]^{-1}\vec{M} \quad (5.122)$$

(5.121) ve (5.122) numaralı denklemler orta düzlem gerinimlerini ve eğriliklerini bulmak için matris formunda yazılırsa,

$$\begin{Bmatrix} \vec{\varepsilon}^0 \\ \vec{K} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A'] & [B'] \\ [C'] & [D'] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{N} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \quad (5.123)$$

Burada,

$$\begin{aligned} [A'] &= [A]^* - [B^*][D^*]^{-1}[C^*] \\ [B'] &= [B^*][D^*]^{-1} \\ [C'] &= -[D^*]^{-1}[C^*] \\ [D'] &= [D^*]^{-1} \end{aligned} \quad (5.124)$$

Kompozit yapının orta düzlem gerinimleri ve eğrilikleri bilindikten sonra k. katmanın orta düzlemindeki gerinimler aşağıdaki denklem ile bulunabilir (k=1,2,3,...,n).

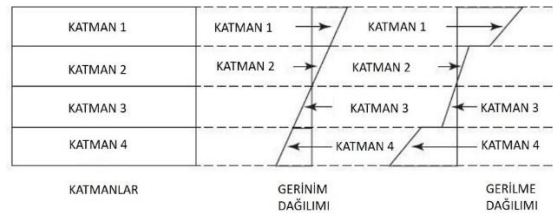
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_k \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.125)$$

Her katmanda indüklenen orta düzlem gerilmelerinin hesaplanması

Katmanlı kompozit yapının rijitlik matrisi kullanılarak bilinen gerinim-gerilme ilişkilerinden k. katmanda indüklenen gerilmeler aşağıdaki şekilde belirlenir ve Şekil 5.8'deki gibi gösterilir.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_k [\bar{Q}]_k \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.126)$$

Burada z_k , katmanlı kompozit yapının orta düzleminde k. katmanın orta düzlemine olan mesafedir.



Şekil 5.8 : Katmanlara göre gerilme ve gerinim dağılımı.

Gerinim yapı boyunca sürekli ve lineer olarak değişirken gerilmeler lineer ancak katmanlı kompozit yapı boyunca süreksiz, her bir katmanın içerisinde sürekli olarak değişmektedir.

5.3 Katmanlı Kompozit Kirişlerin Titreşim Analizi

Katmanlı kompozit kirişleri yöneten denklem, katmanlı kompozit plakaların basitleştirilmiş bir hali olarak incelenebilir. Kirişlerin basit olması adına katmanlı

kompozit yapının simetrik olduğu varsayılır. Böylece denklemler eğilme yer değiştirmeleri ve düzlem içi yer değiştirmeleri için birbirinden ayrılır.

Denklemler aşağıdaki şekilde ifade edilir,

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.127)$$

Burada w orta düzlemin yer değiştirmesi, D_{ij} ise eğilme rijitliğidir. (5.127) numaralı denklem ters çevrilirse,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & D_{16}^* \\ D_{12}^* & D_{22}^* & D_{26}^* \\ D_{16}^* & D_{26}^* & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.128)$$

Burada ters matrisin elemanları,

$$D_{11}^* = (D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26})/D^* \quad (5.129)$$

$$D_{12}^* = (D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66})/D^* \quad (5.130)$$

$$D_{16}^* = (D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16})/D^* \quad (5.131)$$

$$D^* = D_{11}(D_{22}D_{66} - D_{26}D_{26}) + D_{12}(D_{16}D_{26} - D_{12}D_{66}) + D_{16}(D_{12}D_{26} - D_{22}D_{16}) \quad (5.132)$$

Kiriş analizlerinde sadece eğilme momenti (M_{xx}) dikkate alınır diğer (M_{yy}, M_{xy}) momentler sıfır olarak kabul edilir.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -D_{11}^* M_{xx} \quad (5.133)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -D_{12}^* M_{xx} \quad (5.134)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -D_{16}^* M_{xx} \quad (5.135)$$

Kirişin genişliğinin uzunluğuna göre çok küçük olduğu kabul edilirse,

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + I_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5.136)$$

Burada,

$$I_0 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (5.137)$$

Burada, n toplam katman sayısı, $\rho^{(k)}$, k. katmanın yoğunluğu, $(z_k - z_{k-1})$ ise k. katmanın kalınlığıdır.

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(b E_{eq} I_{zz} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (5.138)$$

Burada, $\bar{I}_0 = b I_0 = b \rho h$ girişin birim uzunluk başına kütesini vermektedir.

Euler-Bernoulli denklemi ile (5.138) numaralı karşılaştırıldığında aşağıdaki eşitlikler elde edilmektedir.

$$M = b M_{xx} \quad (5.139)$$

$$E_{eq} = \frac{12}{h^3 D_{11}^*} \quad (5.140)$$

$$I_{zz} = \frac{1}{12} b h^3 \quad (5.141)$$

(5.140) numaralı denklemde elde edilen eşdeğer elastisite modülü sayesinde katmanlı kompozit giriş izotropik bir girişmiş gibi analitik olarak ve DTM ile çözülebilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmanın bu kısmında farklı geometrilere ve malzeme özelliklerine sahip kirişler, farklı sınır şartları altında çeşitli parametrelerin doğal frekanslar üzerindeki etkisinin incelenmesi adına analiz edilmiştir.

6.1 Metalik Kirişler

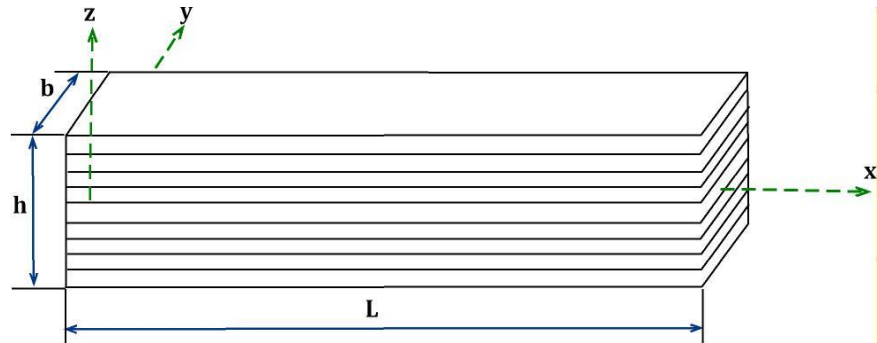
6.1.1 Uniform kesitli metalik kiriş

Çalışma kapsamında hem uniform kesitli hem de daralan kesitli kirişler için Çizelge 6.1.'de verilen mekanik özellikleri verilen düşük karbonlu çelik kullanılmıştır.

Çizelge 6.1 : Düşük karbonlu çelik mekanik özellikleri.

Yoğunluk (ρ) [kg/m ³]	Elasite Modülü (E) [GPa]	Poisson Oranı (ν)
7856	210	0.3

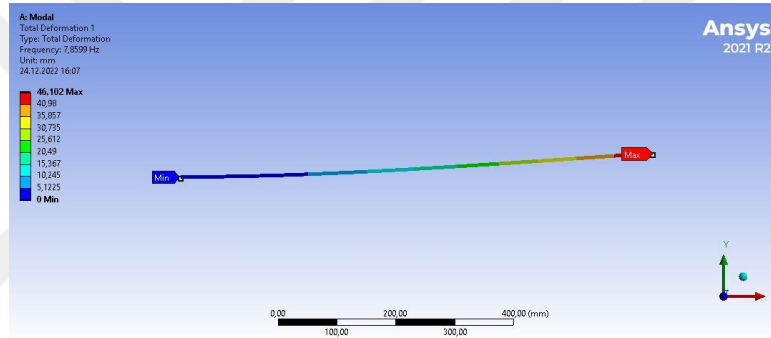
Metalik uniform kesitli kiriş için boyu (L) 0.8m, genişliği (b) 0.05m ve yüksekliği (h) 0.006m olan (Bknz. Şekil 6.1) Çizelge 6.1.'de mekanik özellikleri verilen malzemeden yapılmış bir kiriş alınarak, bir uçtan ankastre mesnetli sınır şartında analitik olarak, geliştirilen yöntem kullanılarak ve ANSYS paket programı ile 3 farklı şekilde çözülerek ilk 6 modun doğal frekansları referans makale ile karşılaştırılmıştır ve Çizelge 6.2'de verilmiştir. ANSYS analiz sonuçları ise Şekil 6.2'de verilmiştir. Karşılaştırma sırasında referans makaledeki burulma titreşimleri elelenmiştir.



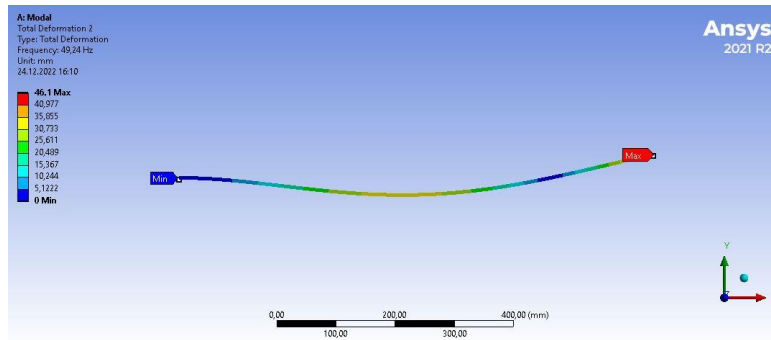
Şekil 6.1 : Kiriş boyutları.

Çizelge 6.2 : Ankastre mesnetli kiriş serbest titreşim ilk 6 modunun frekansı.

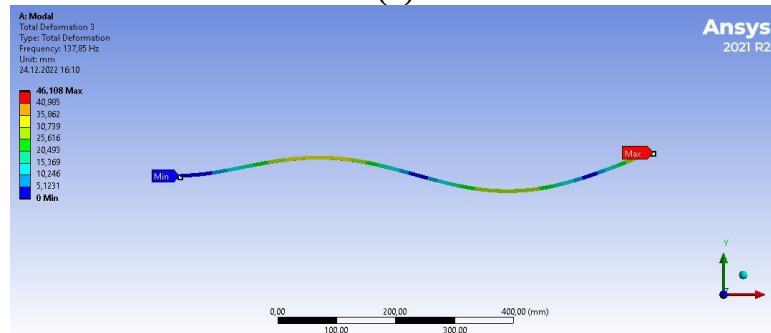
Mod	Ref [18] (Deneysel) [Hz]	Ref [18] (Sonlu Elemanlar) [Hz]	Analitik [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
1	7,677	7,677	7,83	7,83	7,86
2	48,1	48,1	49,07	49,07	49,24
3	134,691	134,69	137,396	137,396	137,85
4	264,013	264,01	269,242	269,242	270,13
5	436,634	436,63	445,066	445,076	446,55
6	688,895	688,89	664,886	664,867	667,1



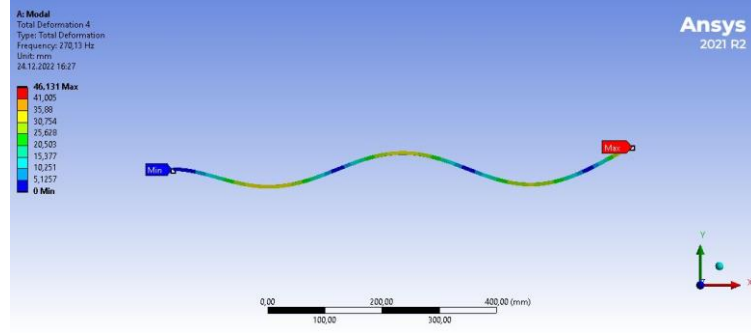
(a)



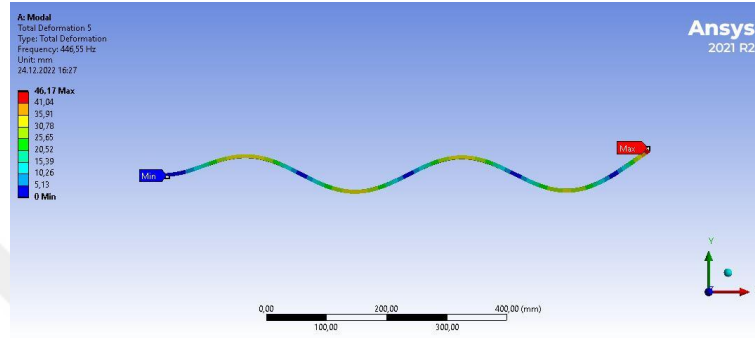
(b)



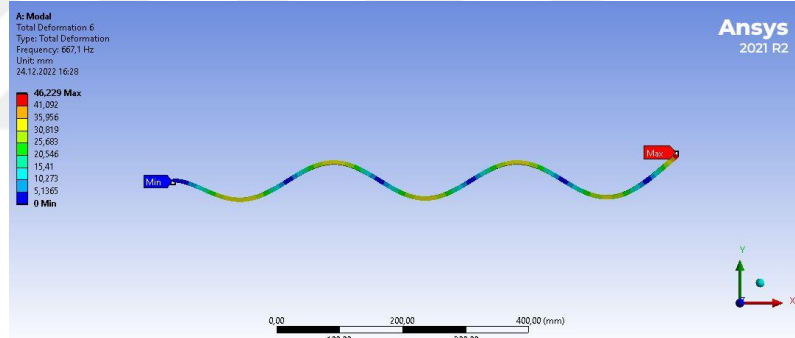
(c)



(d)



(e)



(f)

Şekil 6.2 : Ankastre mesnetli kirişin titreşim analizi sonuçları ve mod şekilleri:
(a)1.Mod. (b)2.Mod. (c)3.Mod. (d)4.Mod. (e)5.Mod. (f)6.Mod.

Sınır şartlarının doğal frekans üzerindeki etkilerinin incelenmesi için sırasıyla bir uçtan ankastre mesnetli diğer uçtan serbest, basit mesnetli ve iki uçtan ankastre mesnetli sınır şartlarına sahip bir kiriş için 3 farklı durumda analiz yapılmıştır. Sınır şartlarındaki kısıtların artmasının serbest titreşimde doğal frekansa etkisi incelenmiş, geliştirilen yöntem ile elde edilen sonuçlar ve ANSYS sonuçları, analitik sonuçlar ile karşılaştırılmıştır ve sonuçlar Çizelge 6.3, Çizelge 6.4 ve Çizelge 6.5'te mod şekilleri ise Şekil 6.3 – Şekil 6.5'te verilmiştir.

Çizelge 6.3 : Ankastre mesnetli sınır şartı.

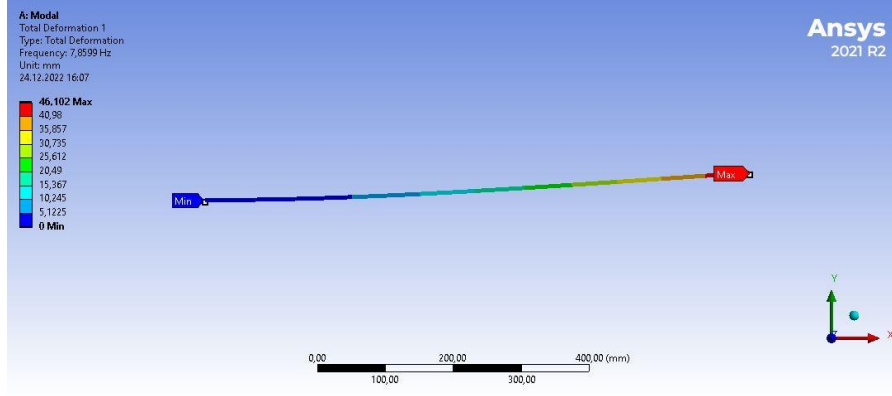
Mod	Analitik [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
1	7,83	7,83	7,86
2	49,07	49,07	49,24
3	137,396	137,396	137,85
4	269,242	269,242	270,13
5	445,066	445,076	446,55
6	664,886	664,867	667,1

Çizelge 6.4 : Basit mesnetli sınır şartlı.

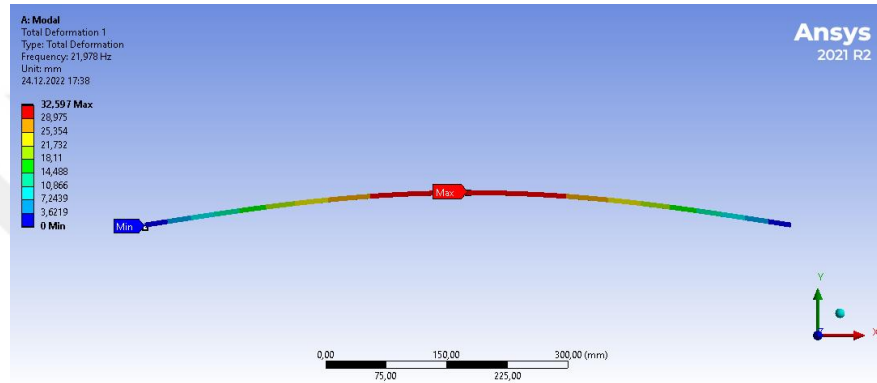
Mod	Analitik [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
1	21,979	21,979	21,978
2	87,916	87,916	87,893
3	197,812	197,812	197,68
4	351,665	351,665	351,19
5	549,477	549,477	548,05
6	791,247	791,247	787,22

Çizelge 6.5 : İki uçtan ankastre mesnetli sınır şartı.

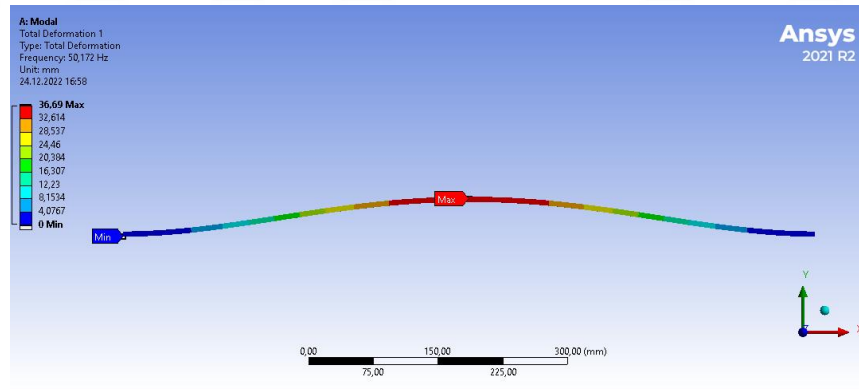
Mod	Analitik [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
1	49,844	49,824	50,172
2	137,335	137,342	138,23
3	269,264	269,245	270,88
4	445,066	445,076	447,65
5	664,886	664,867	668,55
6	928,584	928,616	933,51



Şekil 6.3 : Ankastre mesnetli kirişin 1. mod şekli ve doğal frekansı.



Şekil 6.4 : Basit mesnetli kirişin 1. mod şekli ve doğal frekansı.



Şekil 6.5 : İki ucu ankastre mesnetli kirişin 1. mod şekli ve doğal frekansı.

Kirişlerin serbest titreşim analizinde kiriş genişliğinin (b) doğal frekans üzerindeki etkisinin incelenmesi için farklı genişlik-kalınlık (b/h) oranına sahip bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest kirişlerin 1. modları analitik yöntemle ve geliştirilen yöntem ile hesaplanmış, ANSYS sonuçları ile karşılaştırılmıştır ve Çizelge 6.6’da verilmiştir.

Çizelge 6.6 : Farklı genişlik-kalınlık oranına sahip kirişlerin 1. doğal frekansları.

b/h	Analitik [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
0,25	7,829	7,83	7,831
0,5	7,829	7,83	7,831
0,75	7,829	7,83	7,832
1	7,829	7,83	7,832
1,25	7,829	7,83	7,833
1,5	7,829	7,83	7,834
1,75	7,829	7,83	7,835
2	7,829	7,83	7,835

Serbest titreşim analizinde narinlik oranının (L/h) kirişin doğal frekansı üzerindeki etkisini belirlemek için iki uçtan ankastre mesnetle tutturulmuş kirişin farklı narinlik oranına sahip halleri için 1. modunun doğal frekansı geliştirilen yöntem ve ANSYS ile elde edilmiş, sonuçlar analitik çözümün sonuçları ile karşılaştırılmıştır ve sonuçlar Çizelge 6.7’de verilmiştir.

Çizelge 6.7 : Farklı narinlik oranına sahip kirişlerin 1. doğal frekansları.

L/h	Analitik [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
10	2092,315	2092,35	2061,5
20	523,079	523,088	540,24
50	83,693	83,694	85,587
100	20,923	20,924	21,423
200	5,231	5,231	5,356

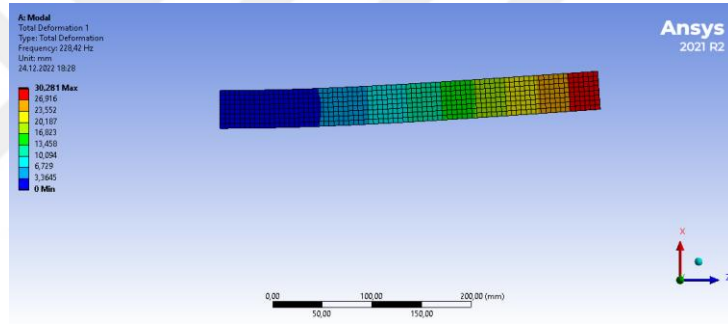
6.1.2 Daralan Kesitli Metalik Kiriş

Çalışmanın bu bölümünde Çizelge 6.1.’de verilen mekanik özelliklere sahip genişliği (b) 0,0381m, boyu (L) 0,381m ve kök kalınlığı ($h_{kök}$) 0,0381m olan daralan kesitli metalik kiriş incelenmiştir.

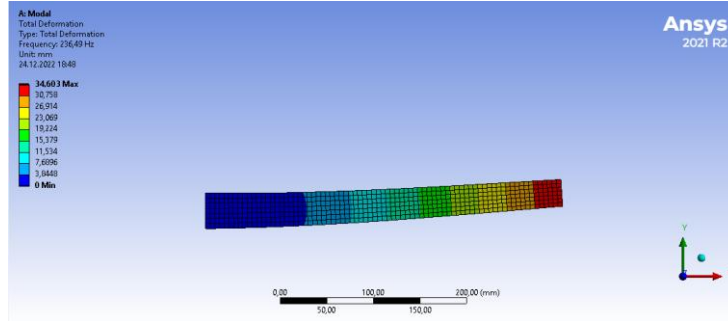
Daralma oranının (c) doğal frekans üzerindeki etkisinin incelenmesi için bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest olan farklı daralma oranlarına sahip kirişlerin ilk üç modunun doğal frekansları geliştirilen yöntem ile çözülmüş ve ANSYS paket programından elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılmıştır ve sonuçlar Çizelge 6.8 ve Çizelge 6.9’da mod şekilleri ise Şekil 6.6- Şekil 6.10’da verilmiştir.

Kirişin daralma oranı Denklem 6.1’de gösterilmiştir.

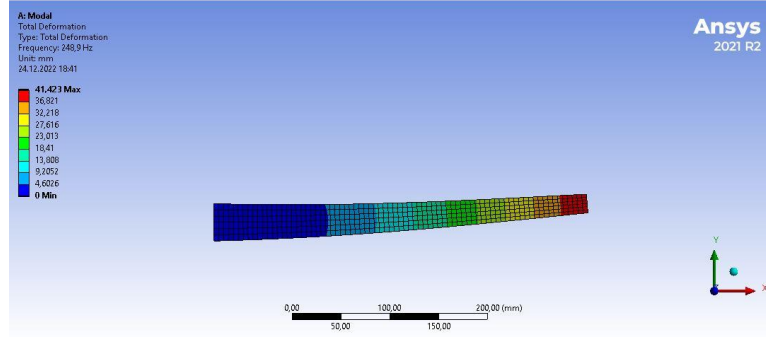
$$c = 1 - \left(\frac{h_{uç}}{h_{kök}} \right) \quad (6.1)$$



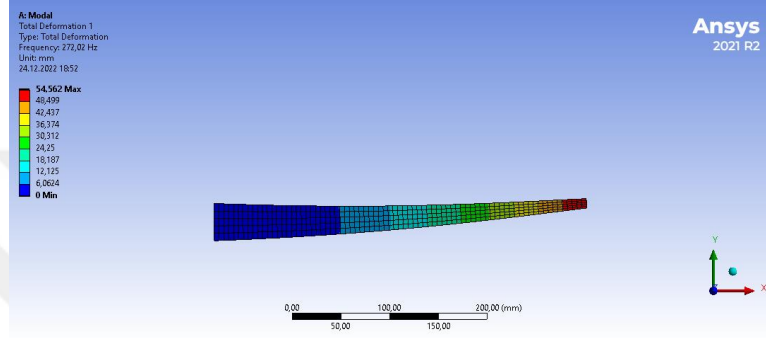
Şekil 6.6 : 0 daralma oranına sahip kirişin 1. modu.



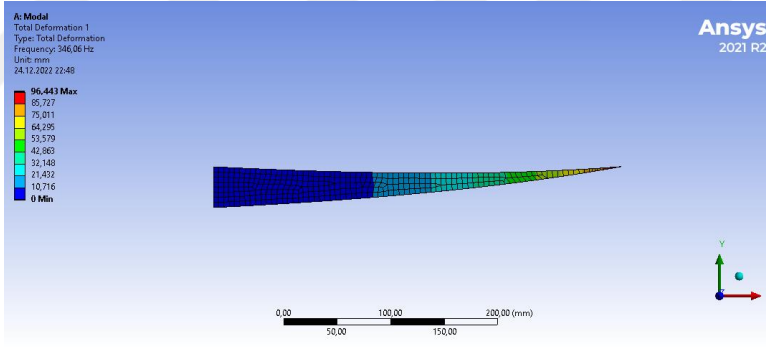
Şekil 6.7 : 0,25 daralma oranına sahip kirişin 1. modu.



Şekil 6.8 : 0,5 daralma oranına sahip kirişin 1. modü.



Şekil 6.9 : 0,75 daralma oranına sahip kirişin 1. Modü.



Şekil 6.10 : 1 daralma oranına sahip kirişin 1. modü.

Çizelge 6.8 : Farklı daralma oranına sahip kirişlerin 1. doğal frekansı-1.

		c=0		c=0,25		c=0,5	
	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]	
Mod	[Hz]		[Hz]		[Hz]		
1	219,212	218,53	226,708	236,49	238,4	248,9	
2	1373,78	1366,4	1262,76	1270,5	1142,2	1161,5	
3	3846,62	3586,5	3414,63	3259,4	2946,81	2879,1	

Çizelge 6.9 : Farklı daralma oranına sahip kirişlerin 1.doğal frekansı-2.

Mod	c=0,75		c=1	
	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
1	260,397	272,02	333,115	346,06
2	1009,04	1036,5	967,279	981,57
3	2417,49	2417,5	1953,79	1916,1

Sınır şartlarının ve daralma oranının eş zamanlı olarak doğal frekansa etkisinin incelenmesi için farklı daralma oranlarına sahip kirişler üç farklı sınır şartında (bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest, basit mesnetli ve iki uçtan ankastre mesnetli) incelenmiş ve 1. doğal frekansları Çizelge 6.10.'da gösterilmiştir.

Çizelge 6.10 : Farklı daralma oranına sahip kirişlerin farklı sınır şartlarında 1.modunun doğal frekansları.

Daralma Oranı (c)	Bir Ucu Ankastre Mesnetli Diğer Ucu Serbest		Basit Mesnetli		İki Ucu Ankastre Mesnetli	
	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
0,25	226,708	236,49	802,140	805,89	1822,11	1820
0,5	238,4	248,9	444,004	450,56	1018,47	1031,8
0,75	260,397	272,02	333,516	341,71	791,094	821,69

6.2 Katmanlı Kompozit Kirişler

5. bölümde hesaplanışı anlatılan eş değer elastisite modülünün (E_{eq}) yardımıyla uniform kesitli ve daralan kesitli katmanlı kompozit malzemelerin titreşim hesabı yapılmıştır yapılan hesaplamaların doğrulukları referanslarla karşılaştırılarak ispatlandıktan sonra yerleşim açısı katman sayısı gibi değişkenlerin doğal frekans üzerindeki etkisi incelenmiştir.

Geliştirilen yaklaşımda titreşim analizinde kullanılacak olan eş değer elastisite modülü (E_{eq}), kirişin küçük elemanlara bölünmesi ve varsa kesitteki daralmanın basamak şekline çevrilmesi esasına dayalı olarak her bir elemanın eş değer elastisite modülünün hesaplanması ve bu değerlerin ortalamasının alınmasıyla elde edilmiştir. Hesaplama sırasında kullanılan MATLAB kodu Ek B'ye eklenmiştir. Elde edilen eş değer elastisite modülünün (E_{eq}) doğruluğunun ispatlanması adına hesaplamada kullanılan eğilme rijitlik matrisinin 1. satır 1. sütun elemanı olan D_{11} elamanın referans makale ile karşılaştırılması Çizelge 6.11.'de gösterilmiştir.

Çizelge 6.11 : Referans ile mevcut çalışmanın karşılaştırılması.

Konum [m]	D_{11} [19] [N-m]	D_{11} Mevcut Çalışma [N-m]	Fark [%]
0,03048	8,023	8,058	0,434
0,06096	7,876	7,91	0,430
0,09144	7,731	7,765	0,438
0,12192	7,588	7,621	0,433
0,1524	7,446	7,479	0,441
0,18288	7,306	7,338	0,436
0,21336	7,168	7,2	0,444
0,24384	7,032	7,063	0,439
0,27432	6,898	6,928	0,433
0,3048	6,765	6,795	0,441

Eş değer elastisite modülünün hesaplanmasında boyu (L) 0,381m, genişliği (b) 0,0254m, kalınlığı (h) 0,0254m olan, [45/30/30/45] yerleşim açısına sahip 4 katmanlı, 0.5 daralma oranına sahip mekanik özellikleri Çizelge 6.12'de verilen kiriş kullanılarak yapılmıştır.

Çizelge 6.12 : Karbon epoksi (AS4/3501-6) kompozit malzemesinin mekanik özellikleri.

E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}	ρ
[Gpa]	[Gpa]	[Gpa]	[Gpa]	[Gpa]		[kg/m ³]
144,8	9,65	4,14	4,14	3,45	0,3	1389,23

Bu analiz sırasında eş değer elastisite modülünün bulunması için kirişin en az kaç elemana bölünmesi gerektiği ile ilgili yapılan çalışmanın sonucu ise Çizelge 6.13.'te gösterilmiştir.

Çizelge 6.13 : Eleman sayısı ve eşdeğer elastisite modülü (E_{eq}) ilişkisi.

Eleman Sayısı	E_{eq} [GPa]
2	11,911
4	12,178
10	12,359
20	12,423
50	12,462
100	12,475
1000	12,487
10000	12,488
100000	12,488

6.2.1 Uniform kesitli katmanlı kompozit kiriş

Narinlik oranı (L/h) 20 olan 1m uzunluğunda(L), 0,05m genişliğinde (b), mekanik özellikleri Çizelge 6.14.'te verilen 4 katmanlı [0/90/90/0] yerleşim açılı, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest olan kompozit kirişin ilk 4 doğal frekansı geliştirilen yöntem ile bulunan eş değer elastisite modülü (E_{eq}) ile analitik olarak, ve yeni geliştirilen yöntem ile hesaplanmış.

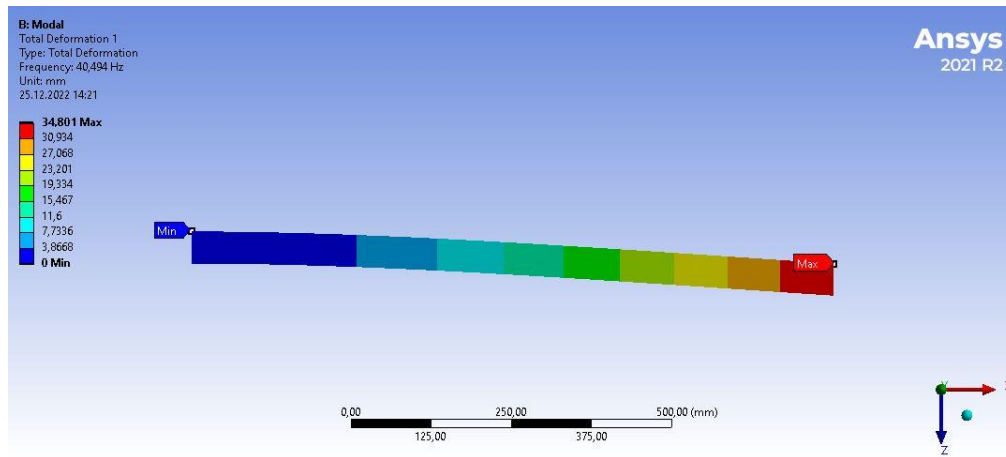
Çizelge 6.14 : Kompozit malzemenin özellikleri.

E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{13}	G_{23}	ν_{12}	ρ
[Gpa]	[Gpa]	[Gpa]	[Gpa]	[Gpa]		[kg/m ³]
38	3,80	1,96	1,96	0,76	0,25	1295

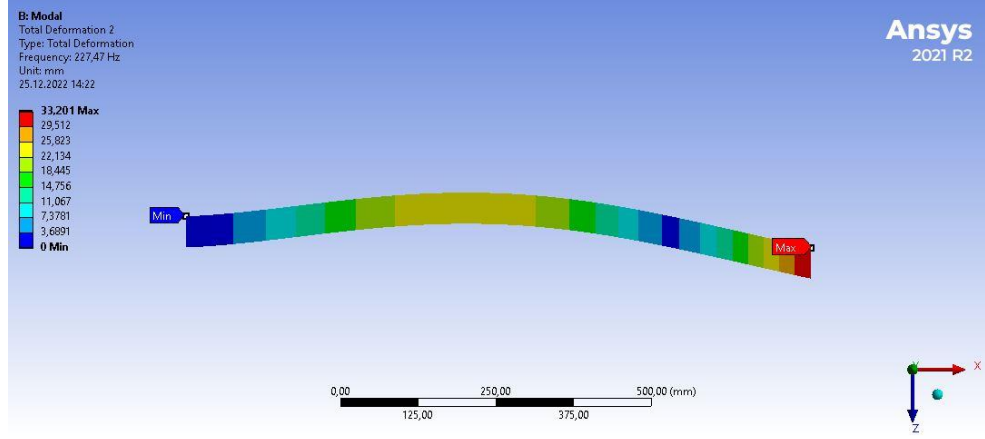
Elde edilen sonuçlar ANSYS paket programından alınan sonuçlar ve referans makale sonuçları ile karşılaştırılmış ve sonuçlar Çizelge 6.15.'te mod şekilleri ise Şekil 6.11-Şekil 6.13'te verilmiştir.

Çizelge 6.15 : [0/90/90/0] yerleşim açılı kompozit kiriş ilk 4 modunun doğal frekansı.

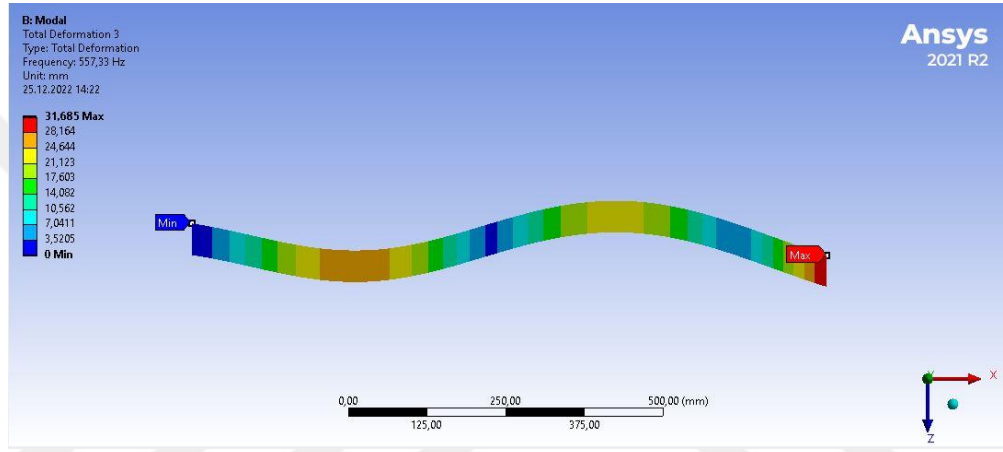
Mod	Analitik [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	Referans [7] [Hz]
1	41,3	40,494	41,279	41,3
2	258,7	227,47	258,694	258,7
3	724,4	557,33	724,351	724,4
4	1419,4	944,39	1419,44	1419,4



Şekil 6.11 : [0/90/90/0] Yerleşim açılı kompozit kirişin 1. Modu.



Şekil 6.12 : [0/90/90/0] Yerleşim açılı kompozit kirişin 2. modu.



Şekil 6.13 : [0/90/90/0] Yerleşim açılı kompozit kirişin 3.modu.

Katmanlı kompozit kirişlerin doğal frekansları üzerinde narinlik oranının etkisinin belirlenmesi için aynı yerleşim açısına sahip, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest, aynı malzemeden üretilmiş kirişlerin doğal frekansları geliştirilen yöntem ile elde edilmiş ve sonuçlar ANSYS paket programından elde edilen ve analitik olarak bulunan sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçlar Çizelge 6.16.-6.18’de verilmiştir.

Çizelge 6.16 : 20 narinlik oranına sahip kirişlerin doğal frekansı.

Mod	Analitik [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]
1	41,274	40,494	41,279
2	258,684	227,47	258,694
3	724,396	557,33	724,351
4	1419,299	944,39	1419,44

Çizelge 6.17 : 50 narinlik oranına sahip kirişlerin doğal frekansı.

Mod	Analitik [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]
1	6,604	6,355	6,605
2	41,389	39,045	41,391
3	115,903	106,06	115,896
4	227,088	199,45	227,11

Çizelge 6.18 : 100 narinlik oranına sahip kirişin doğal frekansı.

Mod	Analitik [Hz]	ANSYS [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]
1	1,651	1,593	1,651
2	10,347	9,932	10,348
3	28,976	27,587	28,974
4	56,772	53,441	56,778

Oryantasyon açılarının doğal frekans üzerindeki etkisinin incelenmesi için Çizelge 6.12.'de mekanik özellikleri verilen kompozit malzemeden üretilmiş narinlik oranı (L/h) 15, boyu (L) 0,381m, genişliği (b) 0,0254m olan, farklı yerleşim açılı iki uçtan ankastre mesnetli kirişlerin 1.doğal frekansları Çizelge 6.19.'da verilmiştir.

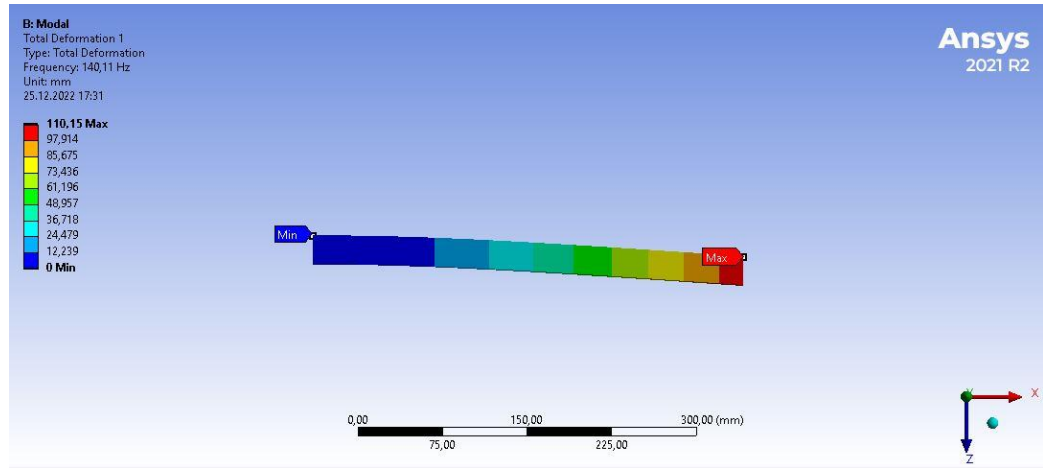
Doğal frekans üzerinde etkisi olan bir diğer etken ise katman sayısıdır. Bu kapsamda kirişin toplam kalınlığı sabit kalacak şekilde farklı katman sayısına sahip, mekanik özellikleri Çizelge 6.12.'de verilen malzemeden yapılmış, narinlik oranı (L/h) 15 olan, bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest kirişler analiz edilmiş ve elde edilen sonuçlar Çizelge 6.20'da analitik sonuçlarla karşılaştırılarak verilmiştir. Mod şekilleri ise Şekil 6.14- Şekil 6.18'de verilmiştir.

Çizelge 6.19 : Yerleşim açılarının doğal frekans üzerindeki etkisi.

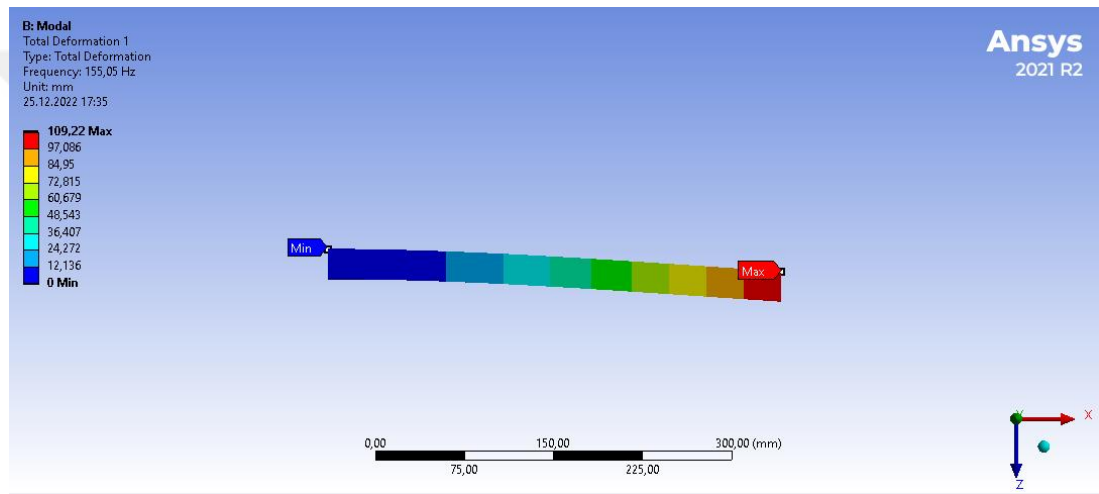
$[\theta/\theta]$	Açı (°)	Analitik [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
	0	1836,286	1836,29	1378,8
	15	1045,241	1045,24	1141,6
	30	651,427	651,427	643,46
	45	517,404	517,403	510,52
	60	474,953	474,953	464,32
	75	470,767	470,767	459,98
	90	474,045	474,045	460,47

Çizelge 6.20 : Katman sayısının doğal frekans üzerindeki etkisi.

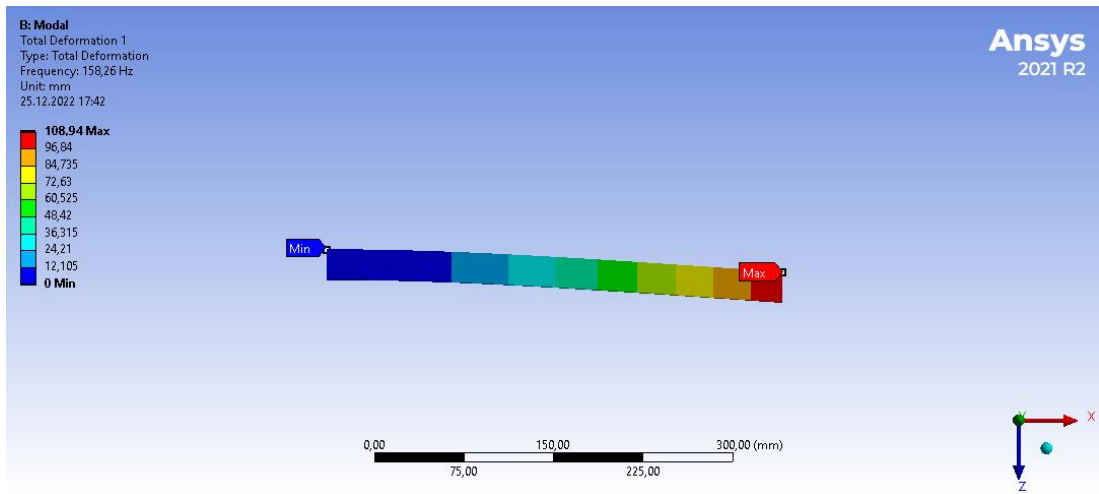
Katman Sayısı	Yerleşim Açısı	Mod	Analitik [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	ANSYS [Hz]
4	[30/-30/-30/30]	1	139,274	139,289	140,11
		2	872,876	872,91	823,66
		3	2444,325	2444,17	2117,3
6	[-30/30/-30/-30/30/-30]	1	154,151	154,168	155,05
		2	966,116	966,154	904,95
		3	2705,425	2705,26	2305,6
8	[30/-30/30/-30/-30/30/-30/30]	1	157,298	157,316	158,26
		2	985,844	985,882	922,99
		3	2760,669	2760,5	2349,4
10	[-30/30/-30/30/-30/-30/30/-30/30/-30]	1	158,989	159,007	159,99
		2	996,44	996,479	932,69
		3	2790,341	2790,17	2372,7
12	[30/-30/30/-30/30/-30/-30/30/-30/30/-30/30]	1	159,758	159,775	160,78
		2	1001,256	1001,29	937,09
		3	2803,828	2803,65	2383,3



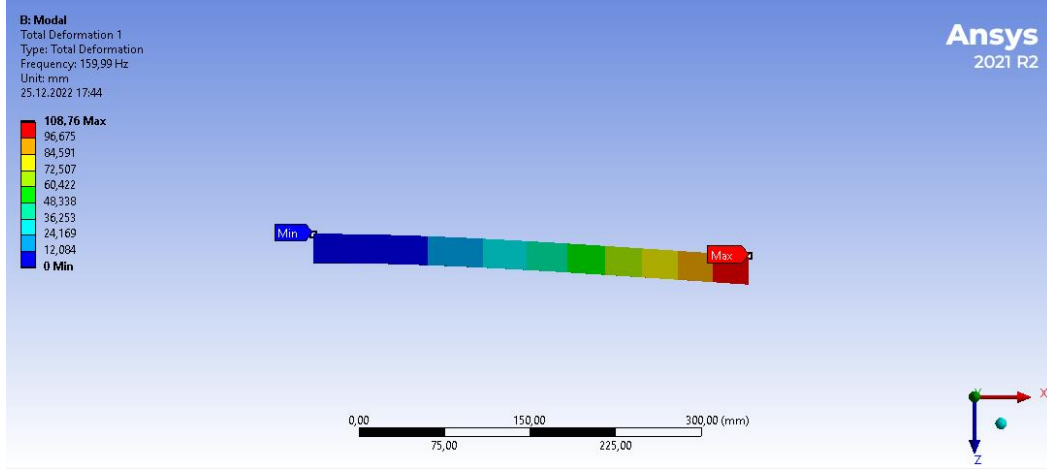
Şekil 6.14 : $[30/-30/-30/30]$ yerleşim açılı 4 katmanlı kirişin 1.modu.



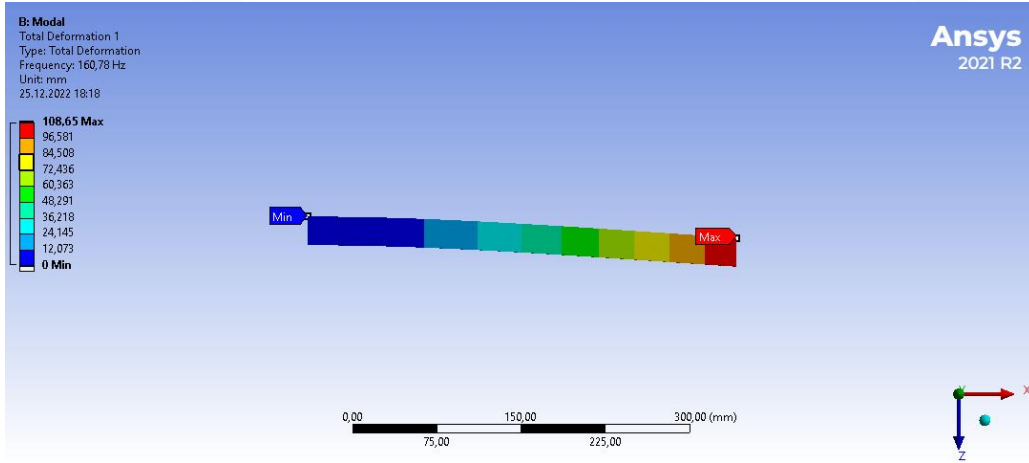
Şekil 6.15 : $[-30/30/-30/-30/30/-30]$ yerleşim açılı 6 katmanlı kirişin 1.modu.



Şekil 6.16 : $[30/-30/30/-30/-30/30/-30/30]$ yerleşim açılı 8 katmanlı kirişin 1. modu.



Şekil 6.17 : [-30/30/-30/30/-30/-30/30/-30/30/-30] yerleşim açılı 10 katmanlı kirişin 1. modu.



Şekil 6.18 : [30/-30/30/-30/30/-30/-30/30/-30/30] yerleşim açılı 12 katmanlı kirişin 1.modu.

Katmanlı kompozit kirişler üzerinde narinlik oranının etkisinin belirlenmesi için narinlik oranı (L/h) 100 olan, mekanik özellikleri Çizelge 6.12’de verilen, 2,54m uzunluğunda (L), 4 katmanlı, [45/-45/-45/45] yerleşim açılı kiriş, üç farklı sınır şartında (ankastre mesnetli (Şekil 6.19), basit mesnetli (Şekil 6.20), iki ucu ankastre mesnetli (Şekil 6.21)) geliştirilen yöntem ile analiz edilmiş ve sonuçlar analitik sonuçlarla ve ANSYS sonuçları ile karşılaştırılarak Çizelge 6.21.-6.23.’te verilmiştir.



Şekil 6.19 : Ankastre mesnetli kiriş.

Çizelge 6.21 : Ankastre mesnetli kirişin ilk 6 modu.

Mod	DTM [Hz]	Analitik [Hz]	ANSYS [Hz]
1	2,021	2,021	2,026
2	12,6642	12,664	12,687
3	35,46	35,46	35,485
4	69,4878	69,488	69,428
5	114,868	114,866	114,54
6	171,593	171,598	170,67



Şekil 6.20 : Basit mesnetli kiriş.

Çizelge 6.22 : Basit mesnetli kirişin ilk 6 modu.

Mod	DTM [Hz]	Analitik [Hz]	ANSYS [Hz]
1	5,72	5,67	5,688
2	22,879	22,679	22,647
3	51,477	51,027	50,849
4	91,514	90,714	90,039
5	142,991	141,741	139,96
6	205,907	204,107	199,63



Şekil 6.21 : İki ucu ankastre mesnetli kiriş.

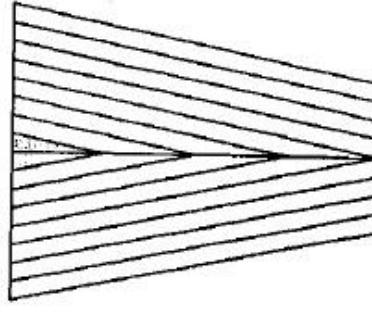
Çizelge 6.23 : İki uçtan ankastre mesnetli kirişin ilk 6 modu.

Mod	DTM [Hz]	Analitik [Hz]	ANSYS [Hz]
1	12,859	12,864	12,912
2	35,446	35,444	35,543
3	69,489	69,494	69,555
4	114,868	114,866	114,72
5	171,593	171,598	170,91
6	239,664	239,655	237,96

6.2.2 Daralan kesitli katmanlı kompozit kiriş

Çalışmanın bu kısmında literatürde Model M olarak adlandırılan, orta düzlemde daralan Şekil 6.22.'de gösterilen daralan eksenli kirişlerin serbest titreşim analizi yapılmıştır. Bu tip daralan kesitli kirişlerde, katmanlar kirişin orta düzlemine belirli açılarla ve orta düzleme simetrik olarak yerleştirilerek daralma oranı elde edilmektedir. Kirişin kök kısmından (kalın olan kısım), uç kısmına (ince olan kısım) doğru ilerledikçe verilen daralma oranına bağlı olarak tabakalar orta katmandan simetrik olarak incelenerek kaybolmaktadır. Bu sayede kök kısmında ve uç kısmında farklı kalınlıklar elde edilmektedir.

Geliştirilen yöntem ile yapılan serbest titreşim analizlerinde kiriş kökten uca doğru belirli sayıda ve eşit boyuttaki elemanlara bölünerek küçük ve uniform kesitli parçalar halinde incelenmiştir. Elde edilen her elemanın kalınlığı bir önceki elemandan daha ince olduğundan dolayı kirişteki daralma basamak şekline indirgenmiştir. Her bir elemanın eş değer elastisite modülü (E_{eq}) 5.Bölümde anlatıldığı gibi yazılan MATLAB kodu ile tek tek hesaplanmış ve daha sonrasında bu değerlerin ortalaması alınarak eş değer elastisite modülü (E_{eq}) hesaplanmış ve daha sonrasında DTM kullanılarak serbest titreşim analizi yapılmıştır.



Şekil 6.22 : Orta düzlem daralan katmanlı kompozit kiriş (Model M).

Bu bölümde geliştirilen yöntem ile elde edilen doğal frekans sonuçları literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılıp doğruluğu ispatlandıktan sonra, sınır şartlarının, daralma oranının ve yerleşim açılarının doğal frekans üzerindeki etkisi incelenmiş ve sonuçlar paylaşılmıştır.

Mekanik özellikleri Çizelge 6.24.'te verilen kompozit malzemeden yapılmış boyu (L) 0,3048m olan her bir katmanının kalınlığı (t) 0,0001524m olan kök kısmında $[(0/90)_8]_S$ yerleşim açılı 32 katman bulunan, uç kısmında $[(0/90)_7/0]_S$ yerleşim açısına sahip 30 katman bulunan kiriş üç farklı sınır şartında analiz edilmiştir.

Çizelge 6.24 : NCT301 grafit epoksi malzemesinin mekanik özellikleri.

E_{11} [Gpa]	E_{22}, E_{33} [Gpa]	G_{12}, G_{13} [Gpa]	G_{23} [Gpa]	ν_{21}, ν_{31}	ν_{23}	ρ [kg/m ³]
144	12,14	4,48	3,2	0,017	0,458	1660,8

Elde edilen sonuçlar referans ile karşılaştırılıp Çizelge 6.25.-6.27.'da gösterilmiştir (Referans makaleden alınan değerler rad/s'den Hz'e çevrilerek verilmiştir).

Çizelge 6.25 : Ankastre mesnetli daralan kesitli katmanlı kompozit kirişin ilk 4 modunun doğal frekansı.

Mod	Ref [19] [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	Fark [%]
1	60,975	60,996	0,035
2	372,052	371,998	0,015
3	1033,668	1033,368	0,029
4	2021,491	2020,822	0,033

Çizelge 6.26 : Basit mesnetli daralan kesitli katmanlı kompozit kirişin ilk 4 modunun doğal frekansı.

Mod	Ref [19] [Hz]	Ref [20] [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]
1	164,657	164,230	164,595
2	658,718	651,970	658.476
3	1482.084	1448.573	1481.537
4	2634.778	2531.550	2651.314

Çizelge 6.27 : İki uçtan ankastre mesnetli daralan kesitli katmanlı kompozit kirişin ilk 4 modunun doğal frekansı.

Mod	Ref [19] [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	Fark [%]
1	373.295	373.158	0,037
2	1028.994	1028.615	0,037
3	2017.241	2016.493	0,037
4	3334.582	3341.315	0,201

Çizelge 6.12.'de mekanik özellikleri verilen kompozit malzemeden oluşan, narinlik oranı (L/h) 15 olan, katman kalınlığı (t) 0,00635m, toplam kök kalınlığı ($h_{kök}$) 0,0254m ve boyu (L) 0,381m olan, [60/-60/-60/60] yerleşim açılı iki uçtan ankastre mesnet ile tutturulmuş bir kirişlerde daralma oranının (c) doğal frekansa etkisinin incelenmesi için farklı daralma oranlarında analiz yapılmış ve elde edilen sonuçlar referans ile karşılaştırılarak Çizelge 6.28.'de verilmiştir.

Çizelge 6.28 : Daralma oranının 1. Doğal frekansa etkisi.

Daralma Oranı (c)	Ref [4] [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]	Fark [%]
0	477,374	477,374	3,112
0,25	405,81	415,293	2,283
0,5	342,66	347,621	1,427
0,75	267,96	269,788	0,678

Daralma oranının yerleştirme açısından bağımsız olarak etkisinin incelenmesi ve aynı zamanda sınır şartlarının doğal frekans üzerinde etkisinin belirlenmesi için üç farklı sınır şartında, [0/0/0/0] yerleşim açılı, mekanik özellikleri Çizelge 6.12’de verilen, 0,381m boyunda, katman kalınlığı (t) 0,00635m olan 4 katmanlı kirişler analiz edilmiş ve sonuçları referanslar ile karşılaştırılarak Çizelge 6.29-6.31.’de verilmiştir.

Çizelge 6.29 : Daralma oranının ankastre mesnetli kirişin doğal frekansına etkisi.

Daralma Oranı (c)	Ref [4] [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]
0	278,43	288,577
0,25	288,52	298,444
0,5	304,04	314
0,75	332,79	342,794

Çizelge 6.30 : Daralma oranının basit mesnetli kirişin doğal frekansına etkisi.

Daralma Oranı (c)	Ref [4] [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]
0	753,22	810,47
0,25	665,36	703,973
0,5	560,88	583
0,75	427,27	439,049

Çizelge 6.31 : Daralma oranının iki uçtan ankastre mesnetli kirişin doğal frekansına etkisi.

Daralma Oranı (c)	Ref [4] [Hz]	Mevcut Çalışma [Hz]
0	1376,46	1836,29
0,25	1267,57	1599,12
0,5	1125,86	1340,74
0,75	928,81	1041,42

Yerleştirme açısının ve daralma oranının 1. doğal frekansa etkisinin incelenmesi için narinlik oranı (L/h) 15 olan, 0,381m boyunda (L), 4 katmanlı, $[\theta/-\theta/-\theta/\theta]$ yerleştirme açılı ve katman kalınlığı (t) 0,00635m olan, mekanik özellikleri Çizelge 6.12.'de verilen, basit mesnetli kirişlerin serbest titreşim analiz sonuçları Çizelge 6.32'de verilmiştir.

Çizelge 6.32 : Yerleştirme açılarının ve daralma oranının 1. doğal frekansa etkisi.

θ [°]	Yerleřtirm Açısı [$\theta/-\theta/-\theta/\theta$]	1. Doğal Frekans [Hz]			
	c=0	c=0,25	c=0,5	c=0,75	
0	810,047	703,973	584,499	439,049	
15	595,143	481,565	373,085	270,513	
30	390,985	316,426	241,582	173,319	
45	252,112	214,704	173,122	127,967	
60	210,629	182,86	151,577	113,759	
75	207,704	180,496	149,855	112,565	
90	209,117	181,734	150,891	113,343	

Narinlik oranının doğal frekansa etkisinin incelenmesi için kökte 32, uçta 30 katmandan oluşan, farklı narinlik oranlarına (L/h) sahip, katman kalınlığı (t) 0,0001524m olan, mekanik özellikleri Çizelge 6.24'te verilen kompozit malzemeden yapılmış kirişler basit mesnetli ve bir uçtan ankastre mesnetli diğer uçtan serbest sınır şartlarında analiz edilmiştir. Sonuçlar Çizelge 6.33 ve Tablo 6.34'te verilmiştir.

Çizelge 6.33 : Ankastre Mesnetli Daralan Kesitli Kirişte Narinlik Oranının Doğal Frekansa Etkisi.

L/h	1.Frekans [Hz]	2. Frekans [Hz]	3. Frekans [Hz]	4. Frekans [Hz]
20	572,988	3538,38	9865,15	19310,4
50	87,35	526,947	1459,12	2851,02
100	20,025	115,935	317,146	617,648
200	21,538	57,286	110,669	85,894

Çizelge 6.34 : Basit mesnetli daralan kesitli kirişte narinlik oranının doğal frekansa etkisi.

L/h	1.Frekans [Hz]	2. Frekans [Hz]	3. Frekans [Hz]	4. Frekans [Hz]
20	1574,5	6298,27	14171	25192,8
50	231,987	928,212	2088,38	3712,59
100	50,052	200,461	250,948	801,595
200	8,862	35,671	80,182	142,466



7. YORUMLAR

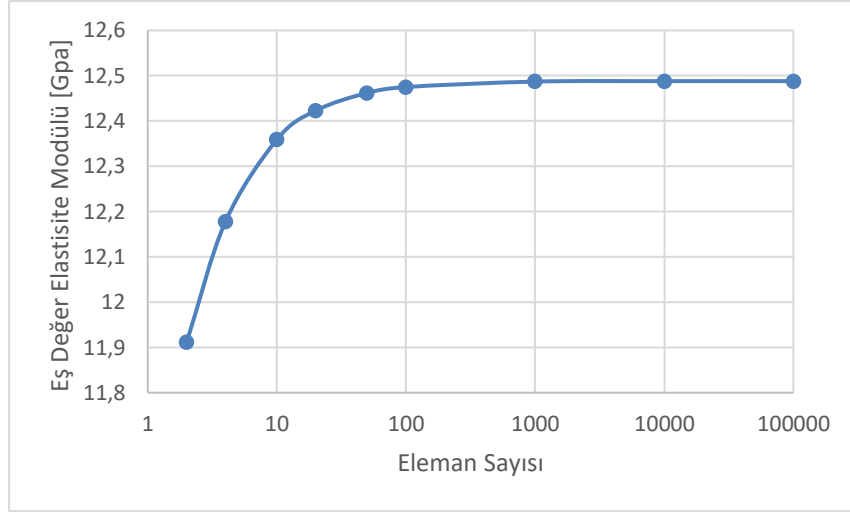
Havacılık alanında özellikle destek elemanı olarak kullanılan ve kritik öneme sahip kirişlerin karakteristik davranışlarının bilinmesi sistemin tasarlanması ve çalışmasında büyük önem teşkil etmektedir. Bu sebepten dolayı tarih boyunca kirişlerin incelenmesi için çeşitli teoriler ve yaklaşımlar geliştirilmiştir. Günümüzde bu hesaplamalar tasarım sonunda bilgisayar destekli paket programlarla gerçeğe çok yakın sonuçlar alacak şekilde yapılıyor olsa da uzun zamanlar gerektirdiği için tasarım esnasında daha pratik ve doğru sonuçlar veren yaklaşımlar kullanılmaktadır.

Tez çalışması kapsamında Euler-Bernoulli kiriş teorisi seçilerek literatürde bulunan çeşitli kiriş çalışmaları incelenmiştir. Öncelikli olarak metalik malzemeden oluşan uniform kesitli ve daralan kesitli kirişler incelemeye alınmıştır. Daha sonrasında ise katmanlı kompozitten oluşan uniform kesitli ve daralan kesitli kirişler incelenmiştir. Katmanlı kompozit yapılar için yeni bir yaklaşım geliştirilmiş, yapılan analizler sonrası elde edilen sonuçlar literatürde farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmış ve sonuçların son derece yakın olduğu tespit edilerek geliştirilen yöntemin doğruluğu ispatlanmıştır.

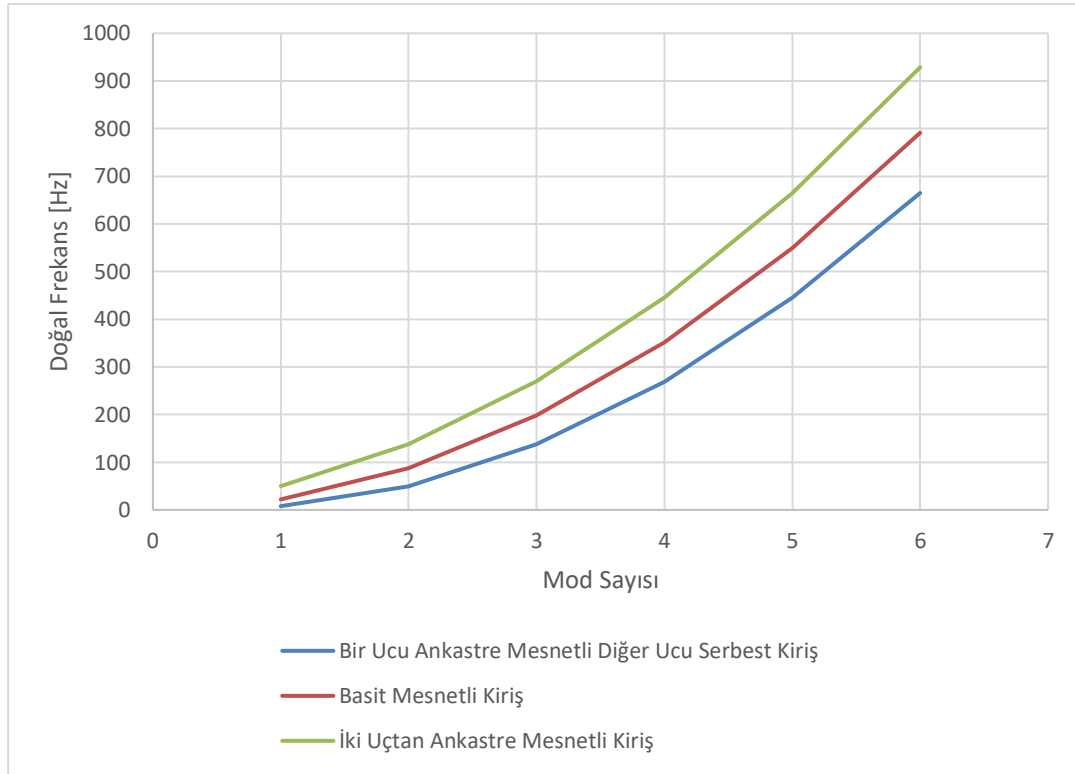
Tez çalışması sonrasında elde edilen bulgular ise şu şekildedir;

Geliştirilen yöntemde kirişin en az 10000 elemana bölünmesi gerektiği, 10000 elemandan sonra ise elde edilen eş değer elastisite modülünün bir değere yakınsadığı tespit edilmiş ve grafiği Şekil 7.1’de verilmiştir.

Sınır şartlarının doğal frekansa etkisinin incelenmesi için tez çalışma boyunca üç farklı sınır şartında (bir ucu ankastre mesnetli diğer ucu serbest, basit mesnetli ve iki ucu ankastre mesnetli) analiz çalışmaları yapılmış ve sınır şartlarındaki kısıtlamaların artmasının doğal frekansı arttırdığı tespit edilmiş ve grafiği Şekil 7.2’de verilmiştir.

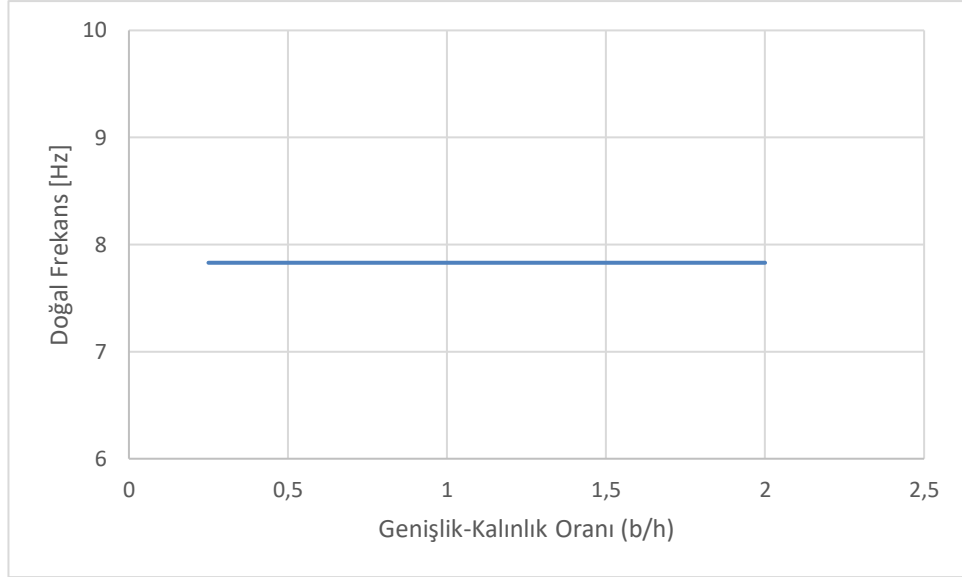


Şekil 7.1 : Eşdeğer elastisite modülü ve eleman sayısı ilişkisi.



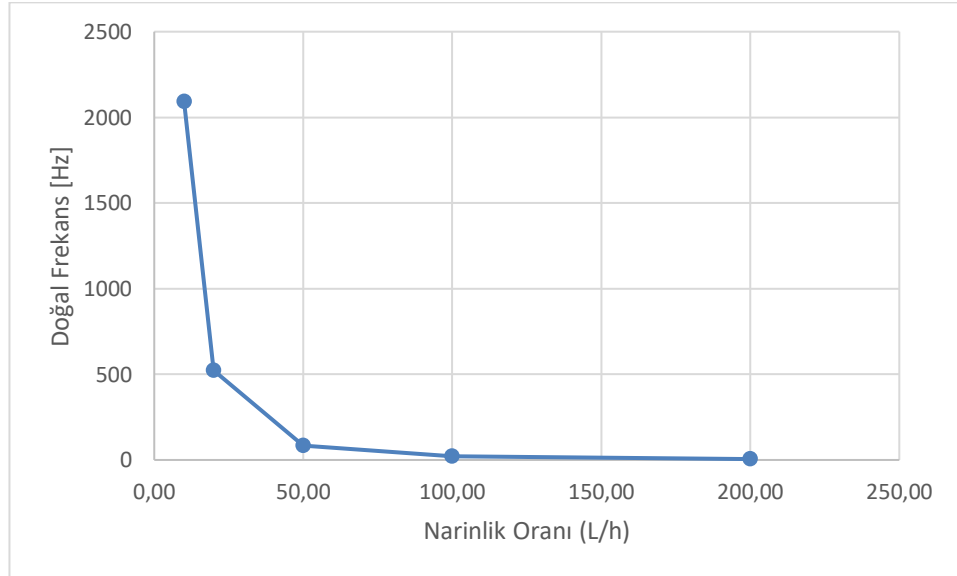
Şekil 7.2 : Sınır şartlarının doğal frekans üzerindeki etkisi.

Analizde kullanılan kirişlerin geometrik özelliklerinden biri olan genişliğin (b), doğal frekansa etkisinin incelenmesi için farklı genişlik ve kalınlık oranına (b/h) sahip kirişler analiz edilmiş ve Euler-Bernoulli kiriş kabulünde doğal frekansın kiriş genişliğinden bağımsız olduğu tespit edilmiş ve Şekil 7.3'te gösterilmiştir.



Şekil 7.3 : Genişlik kalınlık oranının (b/h) doğal frekansa etkisi.

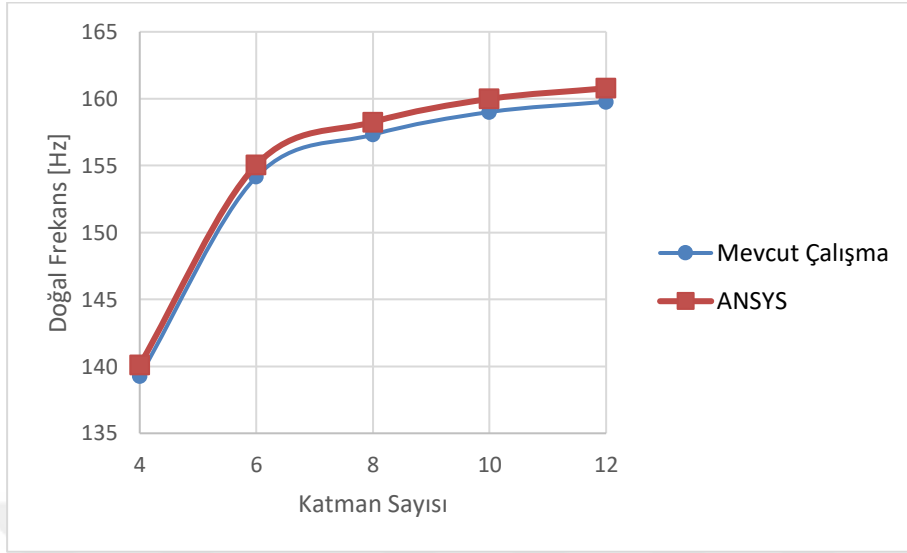
Kirişin bir başka geometrik özelliği olan narinlik oranının, uniform kesitli ve daralan kesitli hem metalik hem de katmanlı kompozit kirişlerin doğal frekansı üzerindeki etkisinin tespit edilmesi için farklı narinlik oranlarında analizler yapılmış ve kirişin kesit şekline ve malzeme türüne bağlı olmaksızın narinlik oranının artmasıyla doğal frekansın düştüğü tespit edilmiş ve grafiği Şekil 7.4'te verilmiştir.



Şekil 7.4 : Narinlik oranının (L/h) doğal frekansa etkisi.

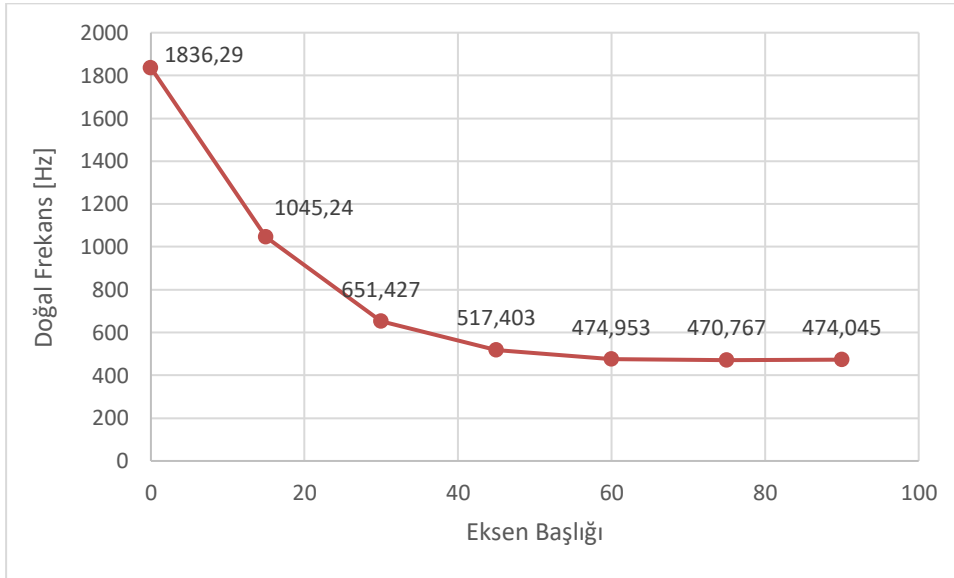
Katman sayısının katmanlı kompozit kirişlerin doğal frekansına etkisinin incelenmesi için toplam kalınlığının sabit kaldığı ancak katman sayısının değişken olduğu kirişler ile yapılan analizler sonucu katman sayısının artmasıyla doğal

frekansın arttığı ancak bu artışın sonsuza kadar devam etmediği bir noktadan sonra bir değeri yakınsadığı tespit edilmiş ve Şekil 7.5'te gösterilmiştir.



Şekil 7.5 : Katman sayısının doğal frekans üzerindeki etkisi

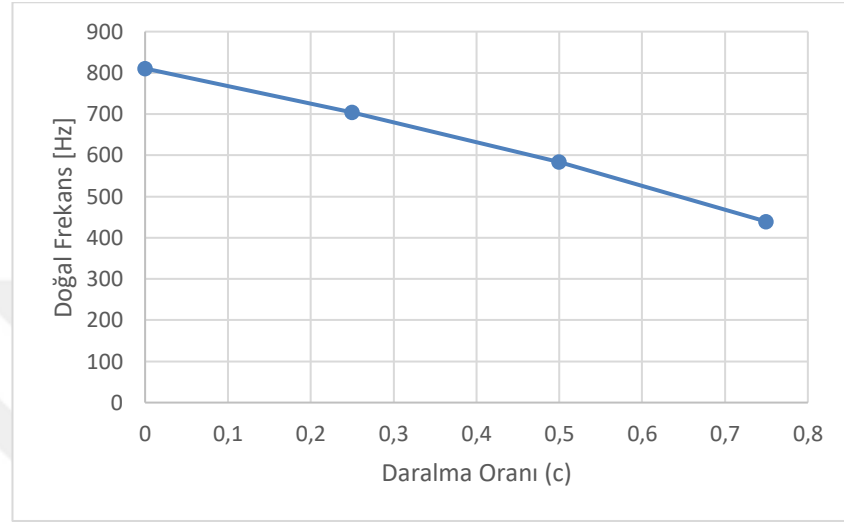
Yerleştirme açılarının hem uniform kesitli hem de daralan kesitli katmanlı kompozit kirişlerin doğal frekansı üzerindeki etkisinin incelenmesi farklı yerleştirme açılara sahip kirişler analiz edilmiştir. Analiz sonucunda yerleştirme açısının 0° 'den 90° 'ye doğru gidildikçe azaldığı ancak 90° 'ye geldiğinde arttığı tespit edilmiş ve Şekil 7.6'da grafiği verilmiştir.



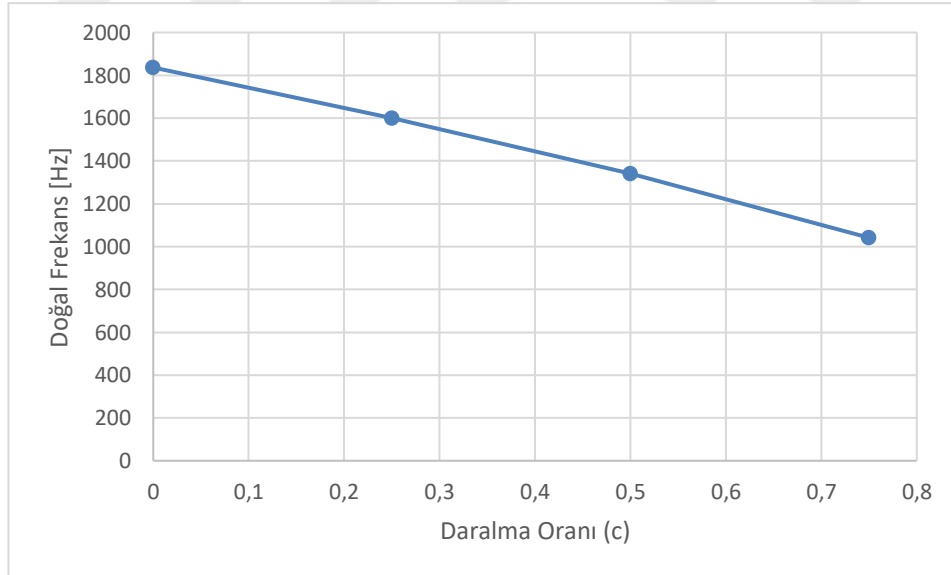
Şekil 7.6 : Yerleştirme açısının doğal frekans üzerindeki etkisi.

Daralan kesitli metalik ve katmanlı kompozit kirişlerde daralma oranının doğal frekansa etkisinin incelenmesi için farklı daralma oranlarına sahip hem metalik hem de katmanlı kompozit kirişler analiz edilmiş ve elde edilen sonuçlar

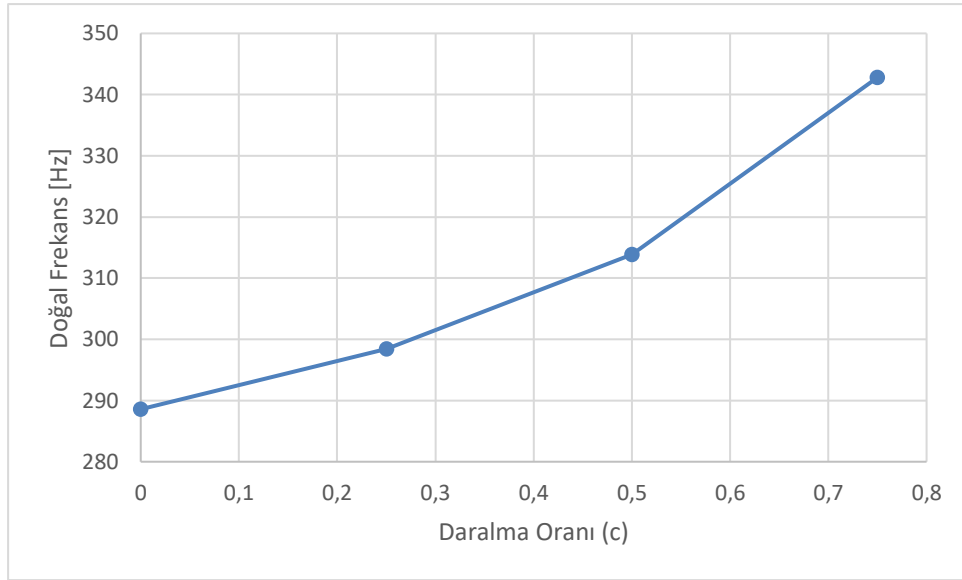
doğrultusunda, daralma oranının artmasıyla, kirişte ince olan uca doğru gidildikçe kütle dağılımının azaldığı, bundan dolayı ankastre mesnetli kirişlerde daralma oranının artmasıyla doğal frekansın arttığı, ancak basit mesnetli ve iki uçtan ankastre mesnetli kirişlerde ise ince olan uça sınır şartlarından dolayı kirişin hareketinde kısıt meydana geldiğinden dolayı doğal frekansın azaldığı tespit edilmiş ve grafikleri Şekil 7.7-Şekil 7.9’da verilmiştir.



Şekil 7.7 : Basit mesnetli kirişlerde daralma oranının doğal frekans üzerindeki etkisi.



Şekil 7.8 : İki ucu ankastre mesnetli kirişlerde daralma oranının doğal frekans üzerindeki etki.



Şekil 7.9 : Ankastre mesnetli kirişlerde daralma oranının doğal frekans üzerindeki etkisi.

KAYNAKLAR

- [1] **Ozdemir Ozgumus, O. ve Kaya, M.O.** (2008). Vibration analysis of a rotating tapered Timoshenko beam using DTM, *Meccanica.*, **45**, 33-42.
- [2] **Arıkoğlu, A. ve Özkol, İ.** (2010). Vibration analysis of composite sandwich beams with viscoelastic core by using differential transform method, *Composite Structures*, **92**, 3031-3039.
- [3] **Yıldırım, V. Sancaktar, E. Ve Kırıl, E** (1999). Free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **15**, 651-660.
- [4] **Çalım, F.F.** (2009). Free and forced vibrations of non-uniform composite beams, *Composite Structures*, **88**, 413-423..
- [5] **Arumugam. A.B. Rajamohan. V. Pandey, A. ve Sudhagar, P.E.** (2016). Finite element vibration analysis of rotating laminated composite beam with varying cross-section using HSDT, *International Journal on Interactive Design and Manufacturing*, **11**, 703-712.
- [6] **Hodges, D.H. ve Rutkowski, M.J.** (1981). Free-Vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite-element method, *AIAA Journal*, **19**, 1559-1466.
- [7] **Balcı, M. Nalbant, M.O. Kara,E. ve Gündoğdu, O.** (2014). Free vibration analysis of a laminated composite beam with various boundary conditions, *International Journal of Automotive and Mechanical Engineering*, **9**, 1734-1746.
- [8] **Han, S.M. Benaroya, H. Wei, T.** (1999). Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories, *Journal of Sound and Vibration*, **225**, 935-988.
- [9] **Palanikumar, K. (H. Hocheng)**, Machining Technology for Composite Materials, Woodhead Publishing, Birleşik Krallık, 2012.
- [10] **Özdemir, M.T.** (2019) *Euler-Bernoulli Kiriş Teorisi kullanılarak Farklı kesit ve Sınır Koşullarında Çelik Lifli Kolonun Burkulma ve Titreşim Analizi* (Yüksek Lisans Tezi). Bursa Uludağ Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Bursa.
- [11] **Love, A.E.H.** A treatise on the Mathematical theory of Elasticity, Dover Publications, New York, 1927.
- [12] **Chang, J.R., Lin, W.J., Huang, C.J. ve Choi S.T.** (2010). Vibration and Stability of an axially moving Rayleigh Beam, *Applied Mathematical Modelling* **34**, 1482-1397.

- [13] **Bhashyam, G.R. Prathap. G.** (1981). The Second Frequency Spectrum of Timoshenko Beams, *Journal of Sound and Vibration*, **76**, 407-420.
- [14] **Singiresu S. Rao**, Mechanical Vibrations 5th Edition, Prentice Hall, Amerika Birleşik Devletleri, 2010.
- [15] **Arıkoğlu, A. ve Özkol, İ.** (2006). Solution of differential-difference equations by using differential transfor method, *Applied Mathematics and Computation*, **174**, 1216-1228.
- [16] **Odibat Z.M.** (2008). Differential transfor method for solving Volterra integral equation with separable kernels, *Mathematical and Computer Modelling*, **48**, 1144-1149.
- [17] **Jena, S.K. ve Chakraverty, S.** (2018). Free vibration analysis of Euler-Bernoulli nanobeam using differential transform method, *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, **7**.
- [18] **Chaphalkar, S.P. ve Subhash, N.K. Meshram. A.M.** (2015). Modal analysis of cantilever beam structure using finite element analysis and experimental analysis, *American Journal of Engineering Research*, **4**, 178-185.
- [19] **Chen, L.** (2004). *Free vibration analysis of tapered composite beams using hierarchical finite element method (Yüksek Lisans Tezi)*. Concordia Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler, Montreal.
- [20] **Ghayour, R. Ghayour, M. ve Ziaei, R.S.** (2010). Vibration analysis of tapered rotating composite beams using the hierarchical finite element, *Applied Computational Mechanics*, **4**, 157-170.

EKLER

EK A: Paket program (ANSYS) kullanımı.

EK B: MATLAB eşdeğer elastisite modülü hesaplaması



EK A

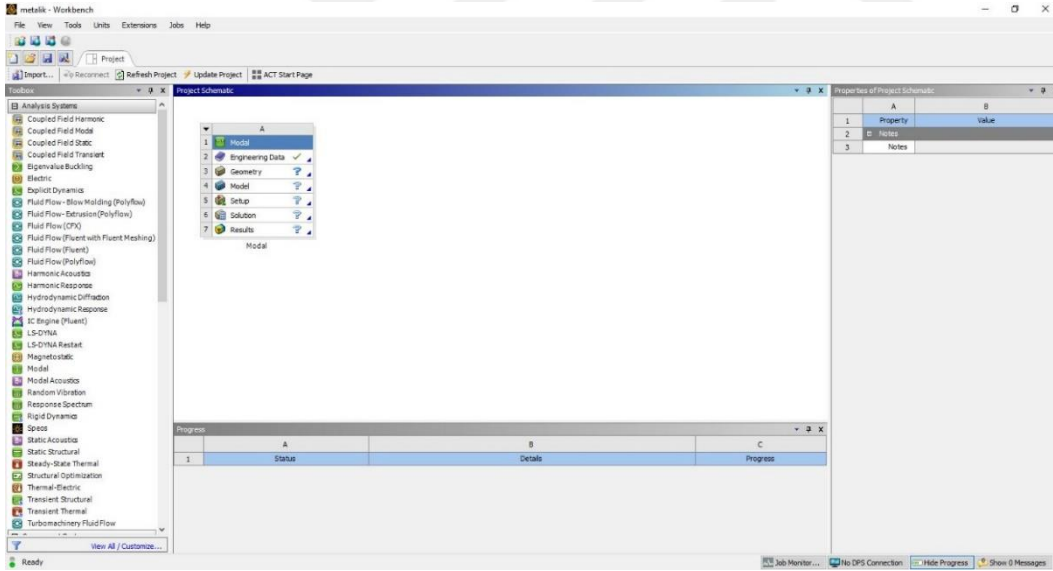
Paket Program ile Çözümü

Paket program çözümü için ANSYS programı seçilmiştir. Metalik kiriş analizleri “Modal Modülü”nde yapılırken, kompozit kirişlerin analizinde yapı ANSYS içerisinde yer alan “ACP Pre” modülünde oluşturulup yine “Modal Modülü”nde analiz edilmiştir.

Metalik kirişlerin çözümü

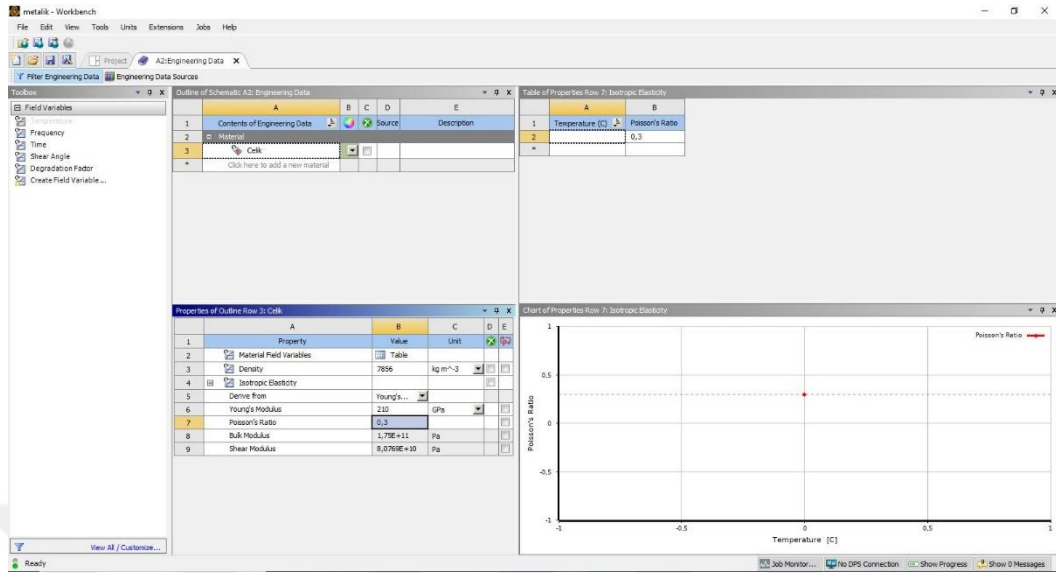
Tez kapsamında meetalik kirişlerin serbest titreşim analizleri aşağıdaki adımlar izlenerek ANSYS programında yapılmıştır.

ANSYS programının arayüzünde sol tarafta bulunan “Modal” modülü sürüklenerek çalışma alanına taşınır (Şekil A.1).



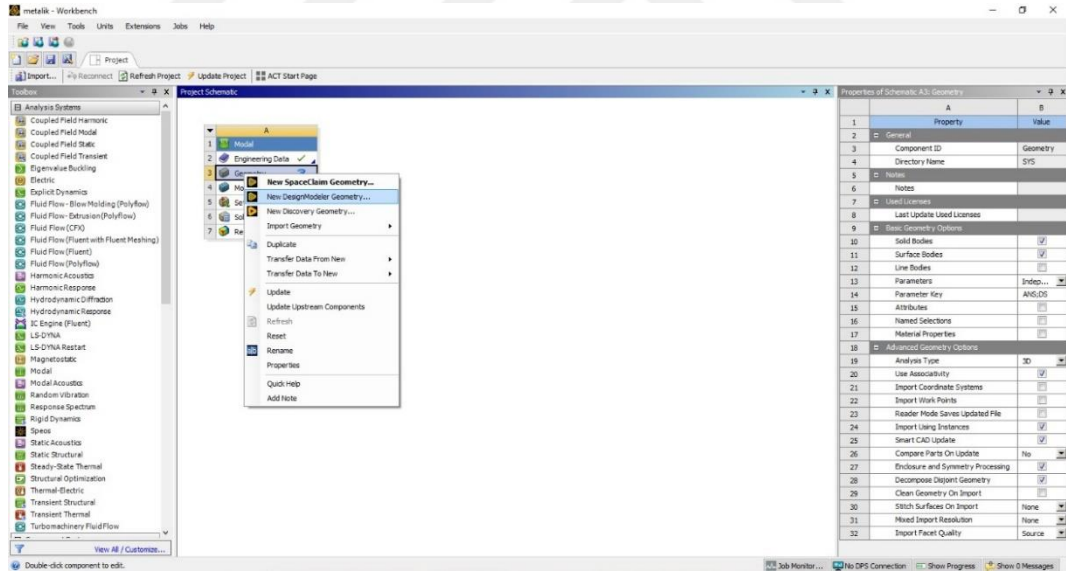
Şekil A. 1 : Modal modülünün seçilmesi.

“Mühendislik Verisi” kısmına tıklanarak kullanılacak malze seçilir veya oluşturulur (Şekil A.2).



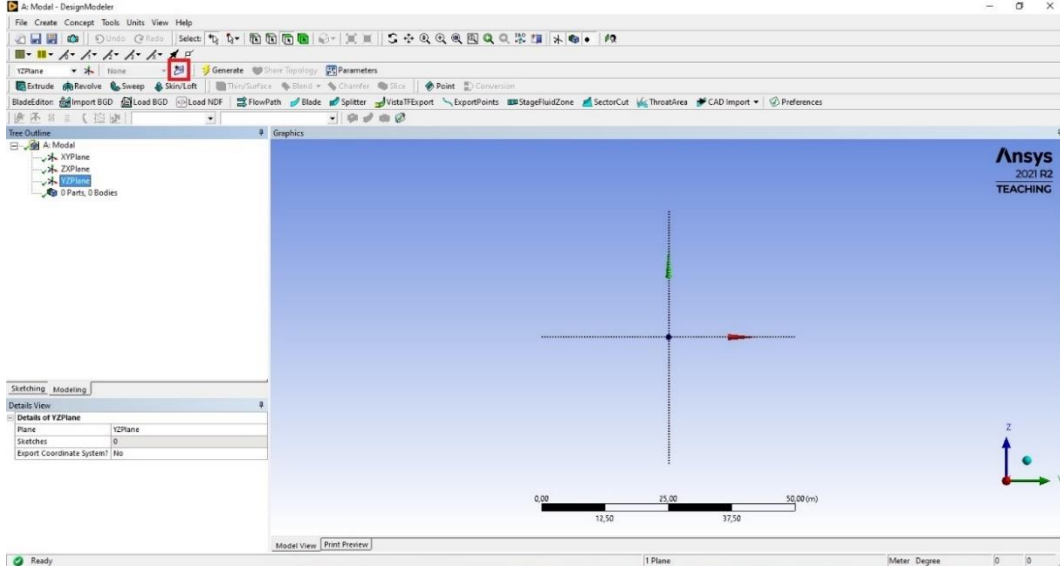
Şekil A. 2 : Malzeme özelliklerinin girilmesi.

“Geometri” sekmesine sağ tıklanarak “Yeni Dizayn Modüler Geometri” seçilir (Şekil A.3).



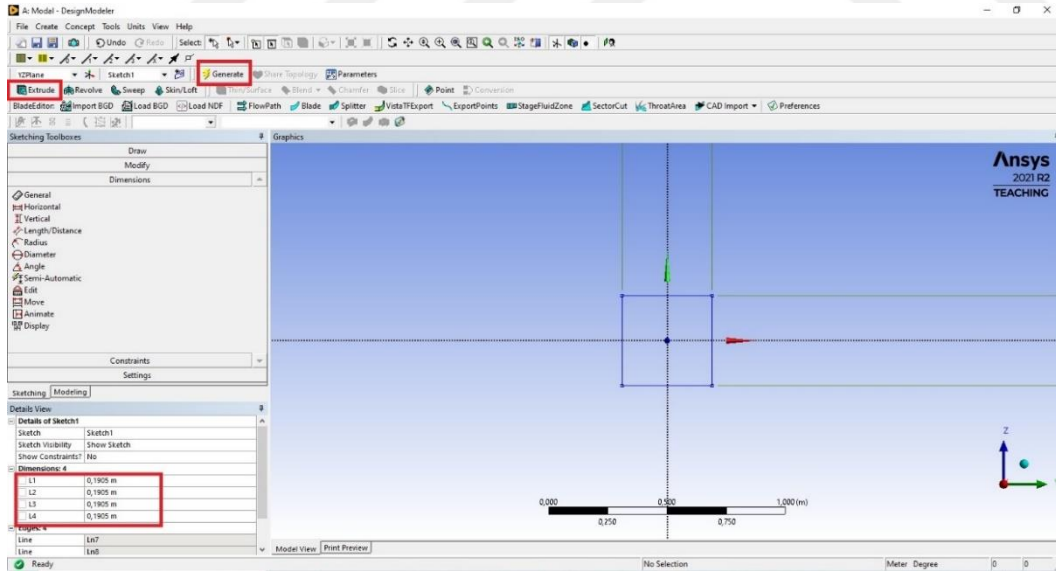
Şekil A. 3 Geometrinin Oluşturulması.

Açılan pencerede yer alan kırmızı ile işaretlenmiş “Taslak Oluştur” butonuna tıklanır (Şekil A.4)



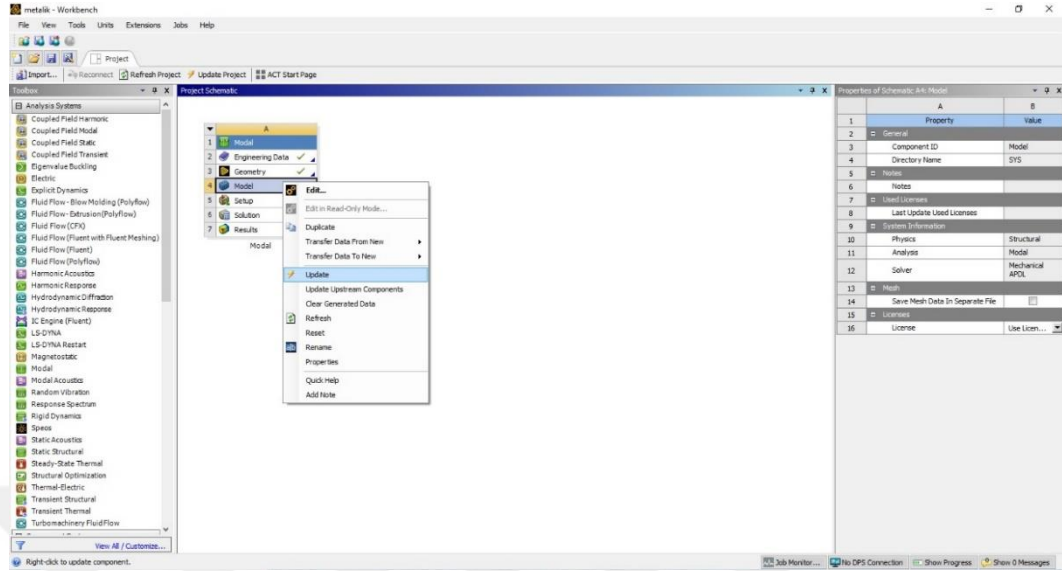
Şekil A. 4 Geometrinin Çizilmesi.

Açılan taslak ekranında sırasıyla çizilecek düzlem seçilir, daha sonra geometri çizilir ve ölçülendirilir. Geometri çizimi bittikten sonra sol üst tarafta bulunan kırmızı ile çerçevelenmiş “Uzat” butonuna tıklanarak geometrinin uzunluğu girilir ve çizim katı hale getirildikten sonra “Oluştur” butonuna tıklanarak geometri oluşturma işlemi tamamlanır ve pencere kapatılır (Şekil A.5).

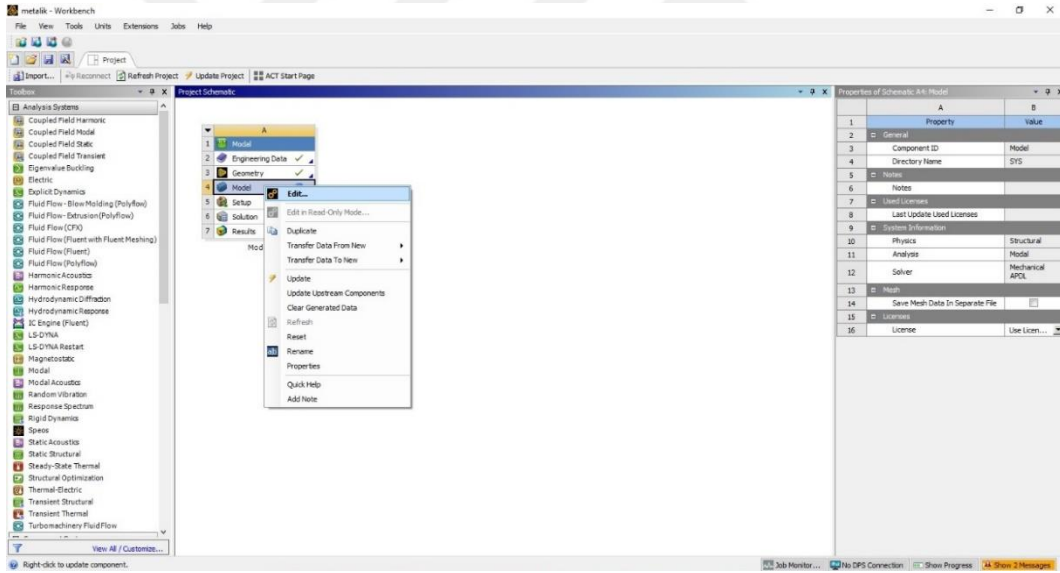


Şekil A. 5 Geometrinin oluşturulması ve katıya dönüştürülmesi.

“Model” kısmına sağ tıklanarak “Güncelle”ye tıklanır (Şekil A.6). Daha sonrasında tekrar sağ tıklanarak “Düzenle” butonuna tıklanır (Şekil A.7).

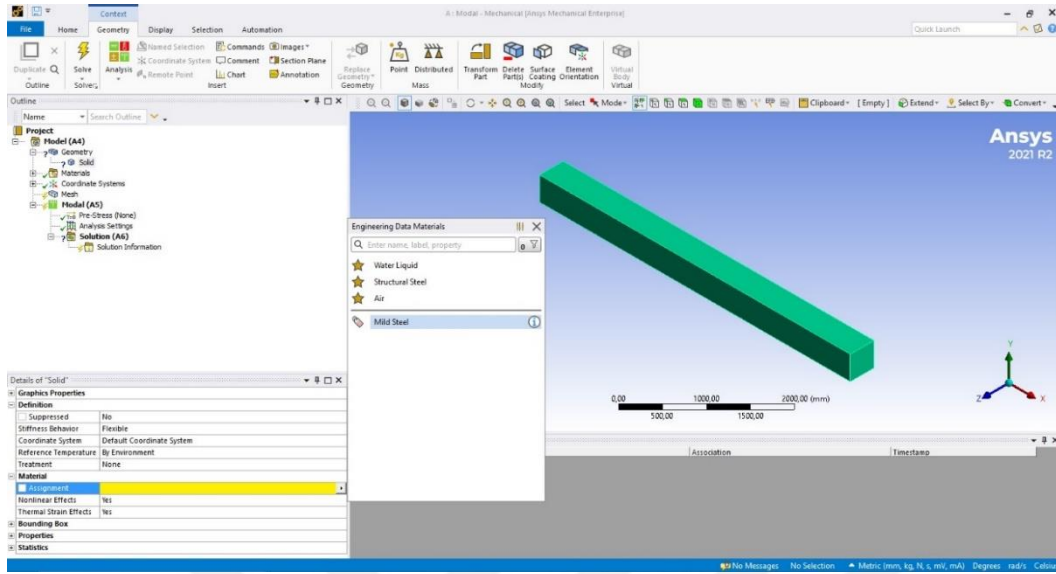


Şekil A. 6 Modelin güncellenmesi.



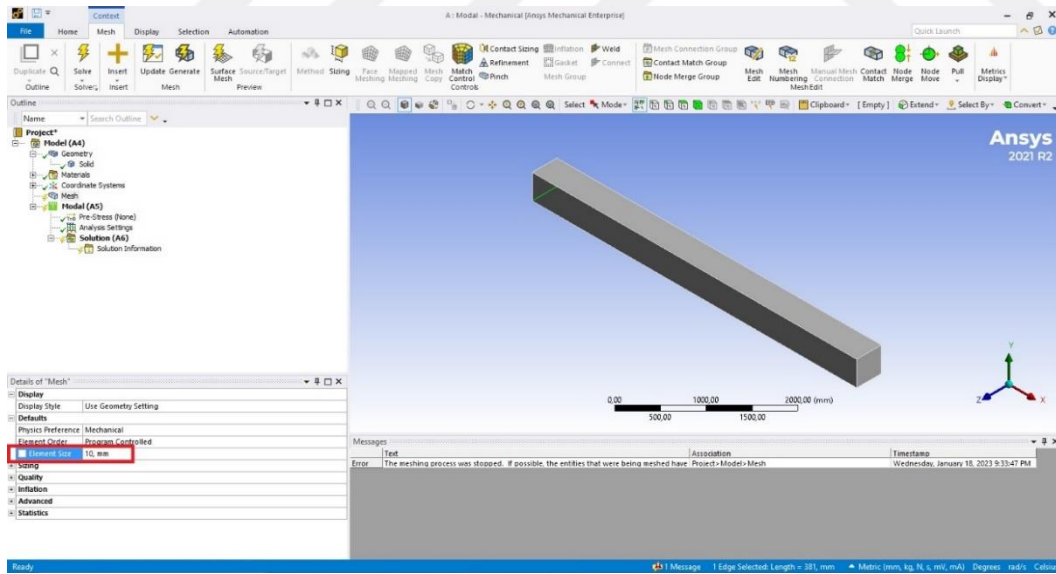
Şekil A. 7 Modelin düzenlenmesi.

Açılan ekranda “Geometri” sekmesinin altındaki “Katı” butonuna tıklanarak geometrinin malzemem ataması yapılır (Şekil A.8).



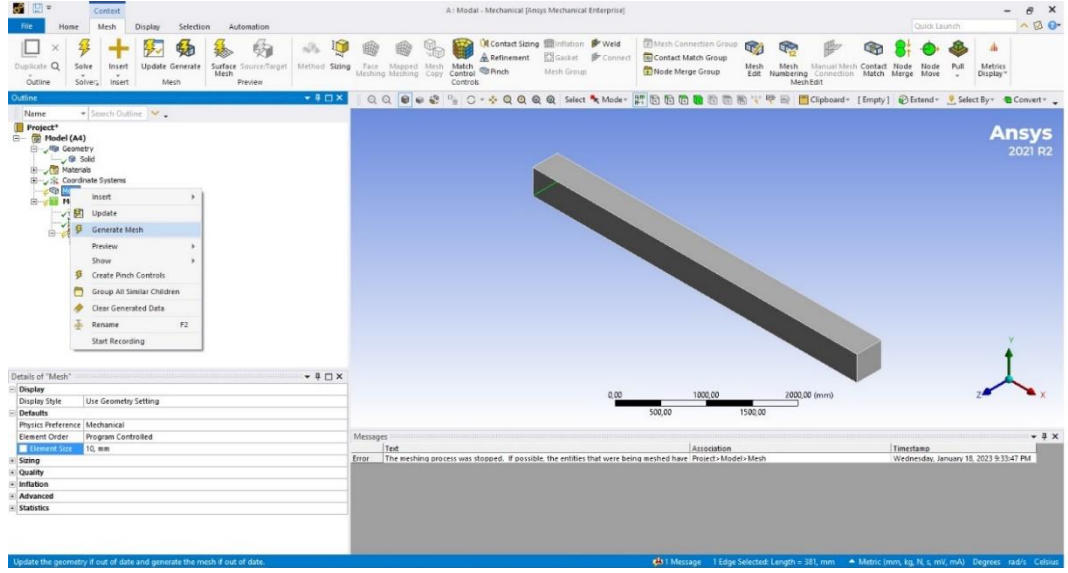
Şekil A. 8 Geometriye malzemin atanması.

Malzeme ataması yapıldıktan sonra “Kafes” sekmesine gelerek katı model seçilir ve “Eleman Boyutu” kısmına eleman boyut değeri girilir (Şekil A.9).



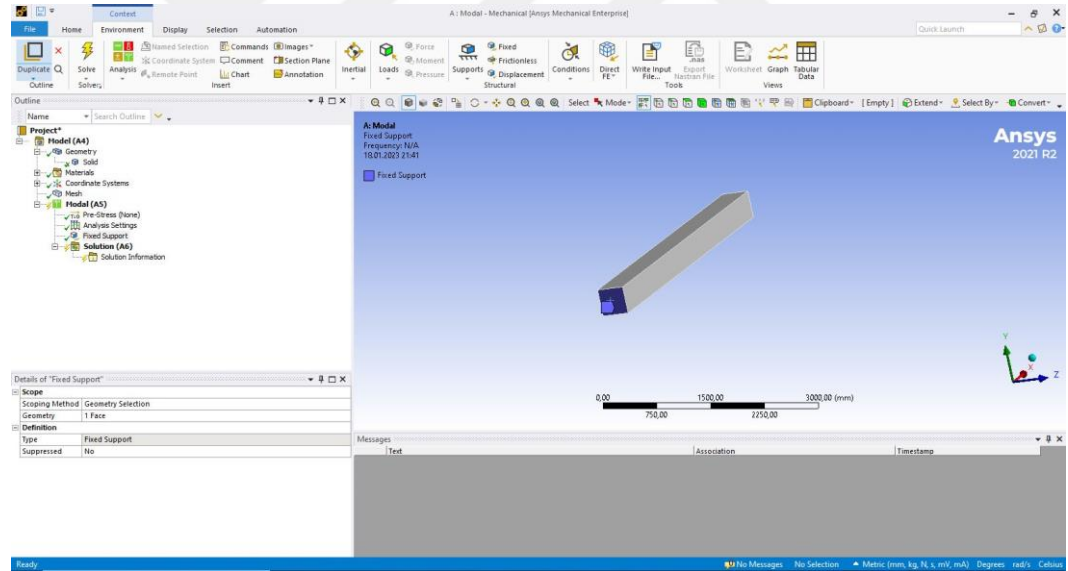
Şekil A. 9 Kafes elemanlarının oluşturulması.

Kafes eleman boyutu girildikten sonra “Kafes” butonuna sağ tıklanır ve “Kafes Oluştur” kısmına tıklanır (Şekil A.10).



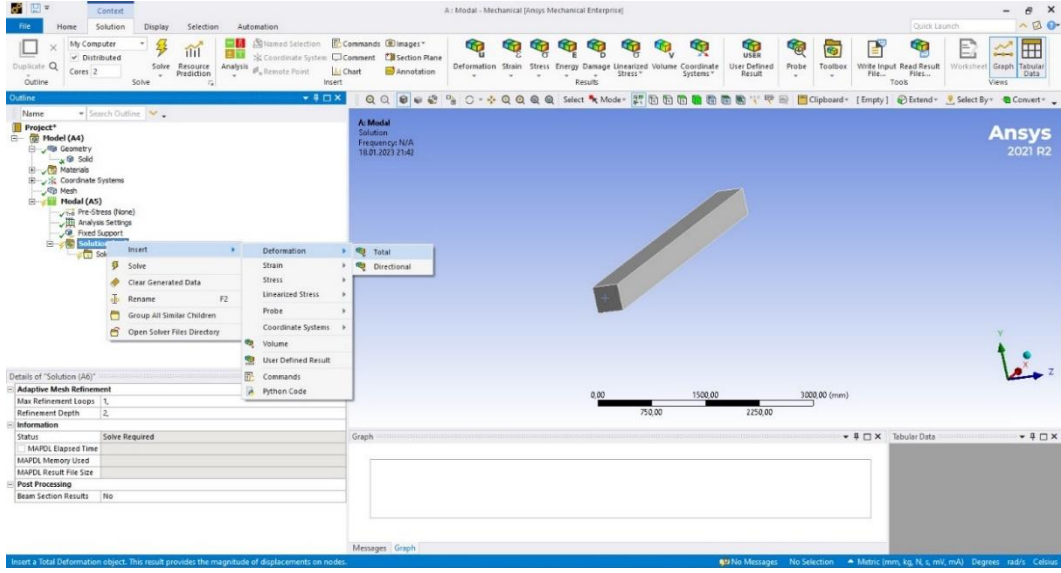
Şekil A. 10 Kafes elemanların oluşturulması.

Modal kısmına gelerek katı üzerinde çözülecek probleme uygun olarak sınır şartları oluşturulur (Şekil A.11).



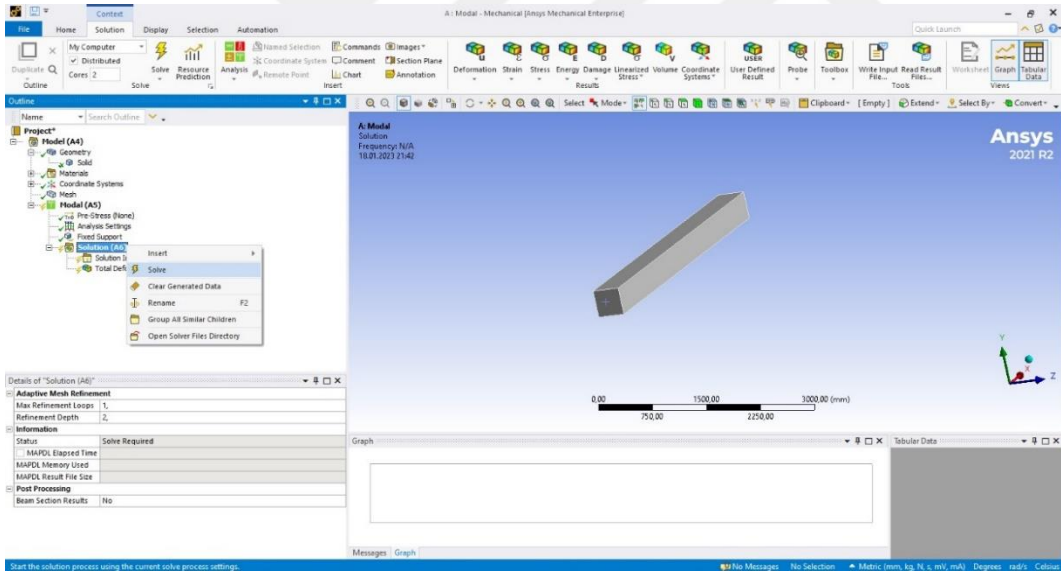
Şekil A. 11 Sınır şartlarının oluşturulması.

Sınır şartları oluşturulduktan sonra “Çözüm” kısmına sağ tıklanarak “Deformasyon” sekmesinin altında yer alan “Toplam Deformasyon” seçilerek elde etmek istenen çözüm oluşturulur (Şekil A.12).



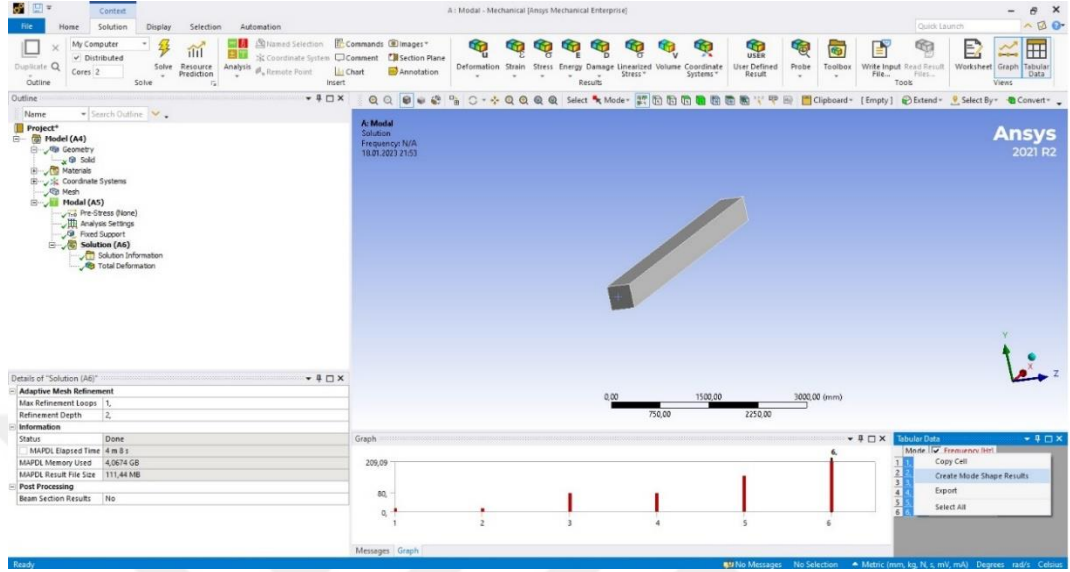
Şekil A. 12 Çözümün oluşturulması.

Daha sonrasında “Çözüm” sekmesine tekrar sağ tıklanarak “Çöz” komutu seçilerek problem çözündürülür (Şekil A.13).



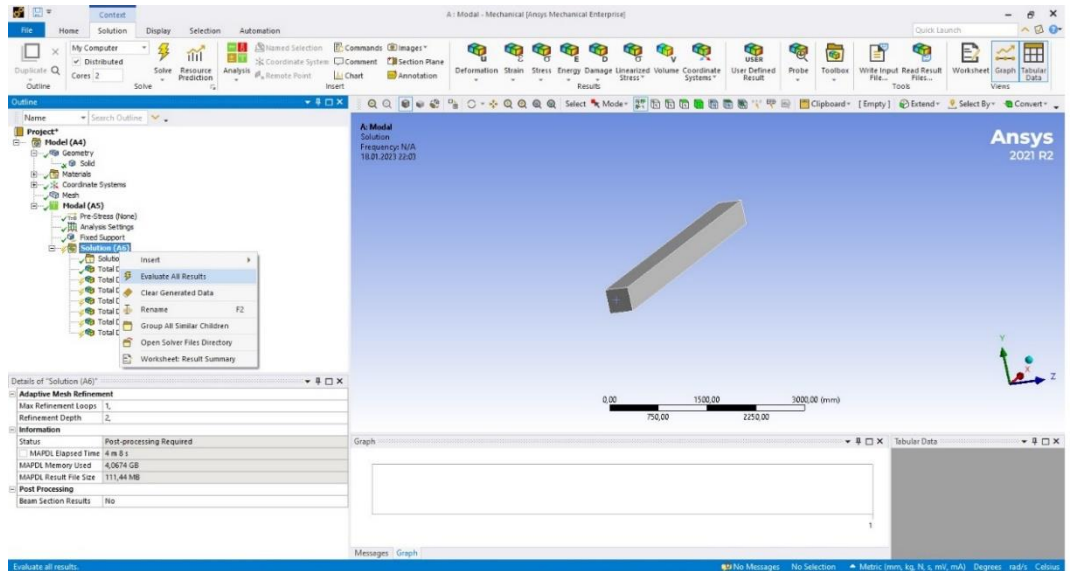
Şekil A. 13 Problemin çözündürülmesi.

Problem çözüldükten sonra sağ alt kısımda yer alan “Mod” kısmında yer alan tüm değerler seçilir ve sağ tıklanır. Açılan pencere “Mod Şekil Sonuçlarını Oluştur” butonuna tıklanır (Şekil A.14).

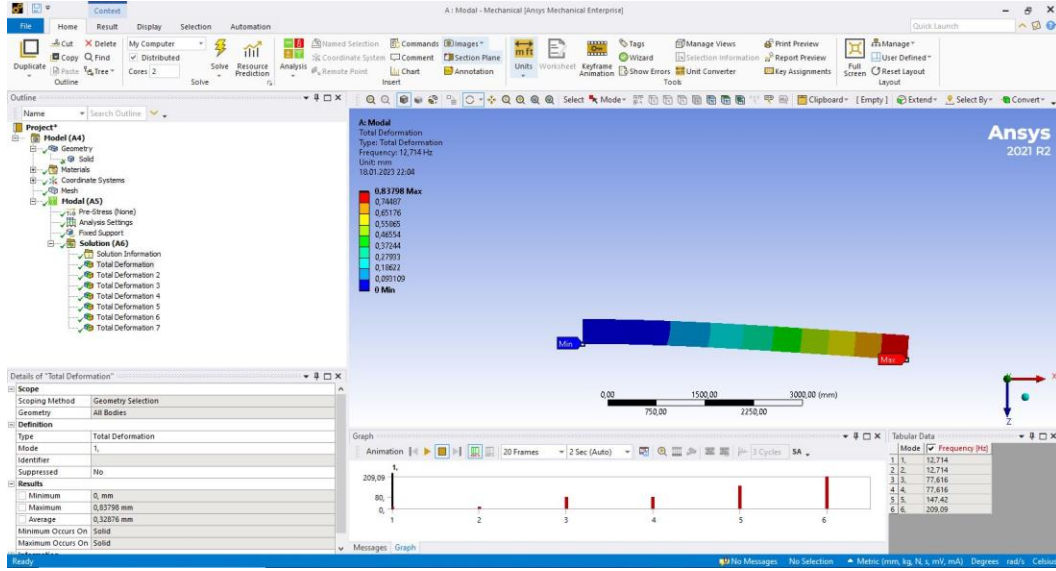


Şekil A. 14 Mod şekil sonuçlarının oluşturulması.

Tekrar “Çözüm” butonuna sağ tıklanarak “Tüm Sonuçları Değerlendir” butonuna tıklanarak (Şekil A.15), tüm sonuçlar görselleştirilir (Şekil A.16).



Şekil A. 15 Tüm sonuçların değerlendirilmesi.

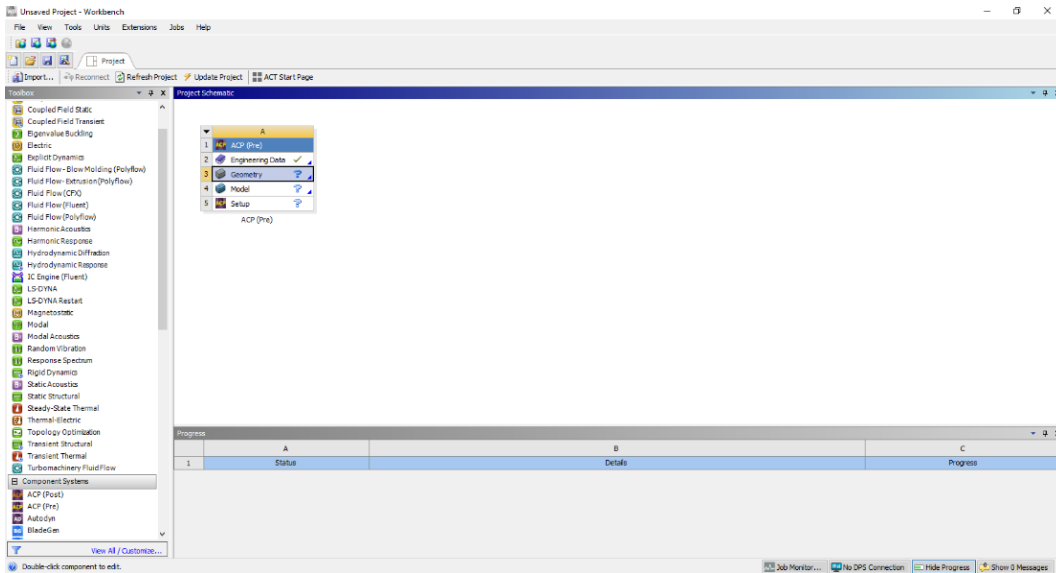


Şekil A. 16 Sonuçların görselleştirilmesi.

Kompozit kirişlerin çözümü

Tez çalışması kapsamında üniform kesitli katmanlı kompozit kirişlerin serbest titreşim analizleri ANSYS programında aşağıdaki adımlar izlenerek yapılmıştır.

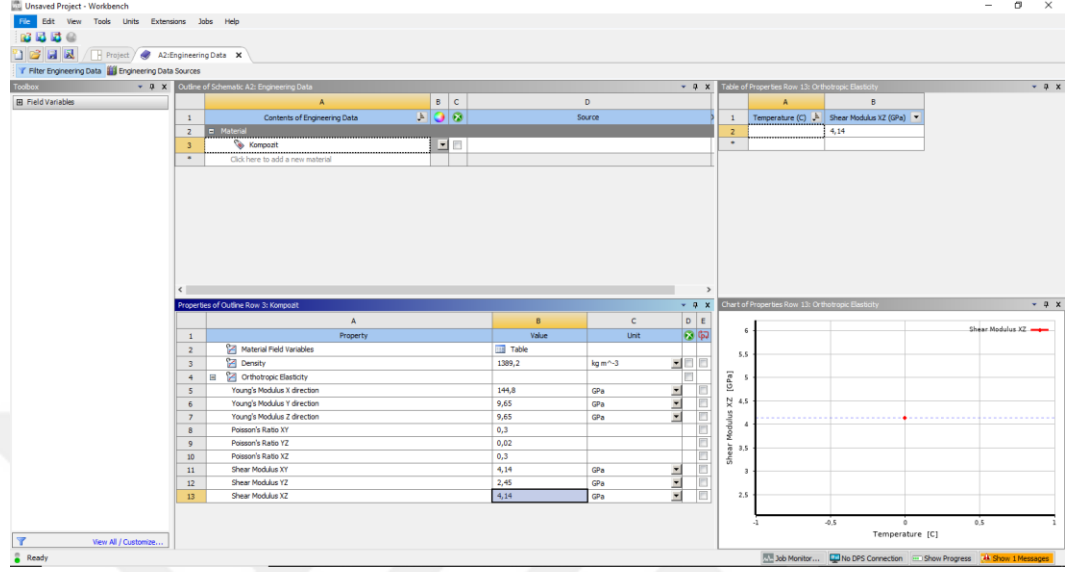
ANSYS programının arayüzünde sol tarafta bulunan “ACP Pre” modülü sürüklenerek çalışma alanına taşınır (Şekil A. 17).



Şekil A. 17: ACP Modülünün Seçimi

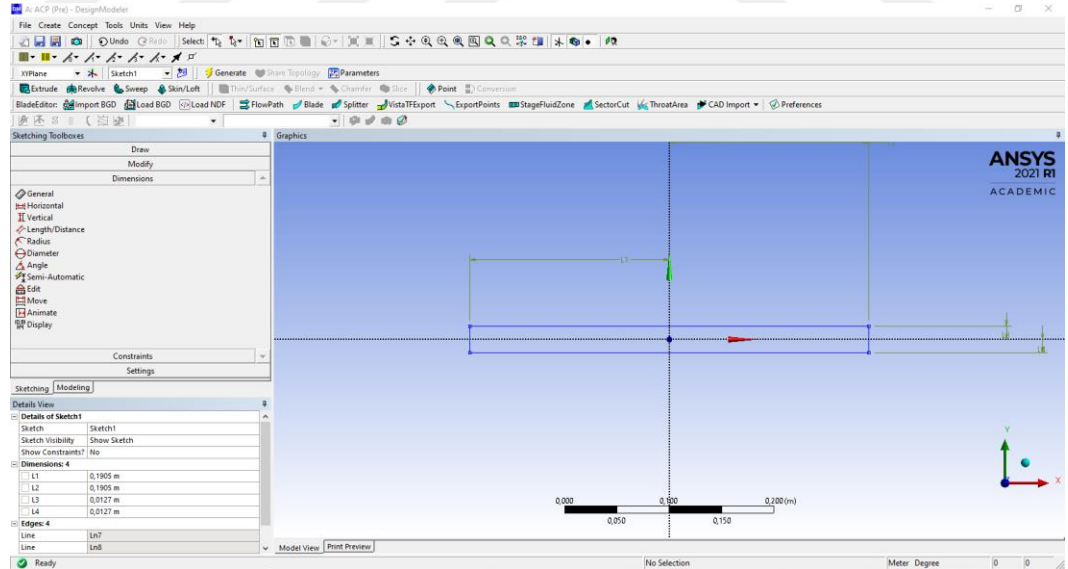
Daha sonrasında malzeme özelliklerini belirlemek için “Mühendislik Verileri” kısmına tıklanır ve açılan pencerede malzeme özellikleri girilir (Şekil A. 18).

Öncelikle malzeme adı verildikten sonra sol taraftaki bölümden yoğunluk ve elastik özellikler sekmesinin altındaki ortotropik elastisite kısmına tıklanarak malzemenin yoğunluğu ve mekanik özellikleri eklenir.



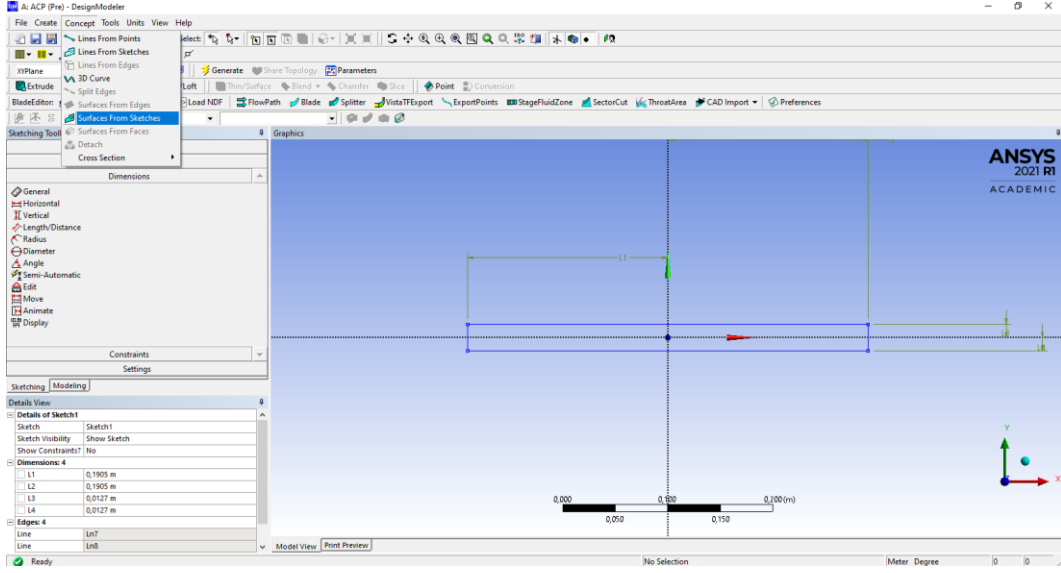
Şekil A. 18: Malzeme atanması

Malzeme özellikleri girildikten sonra “Geometri” kısmına tıklanarak kirişimizin geometrisi oluşturulur (Şekil A.19).



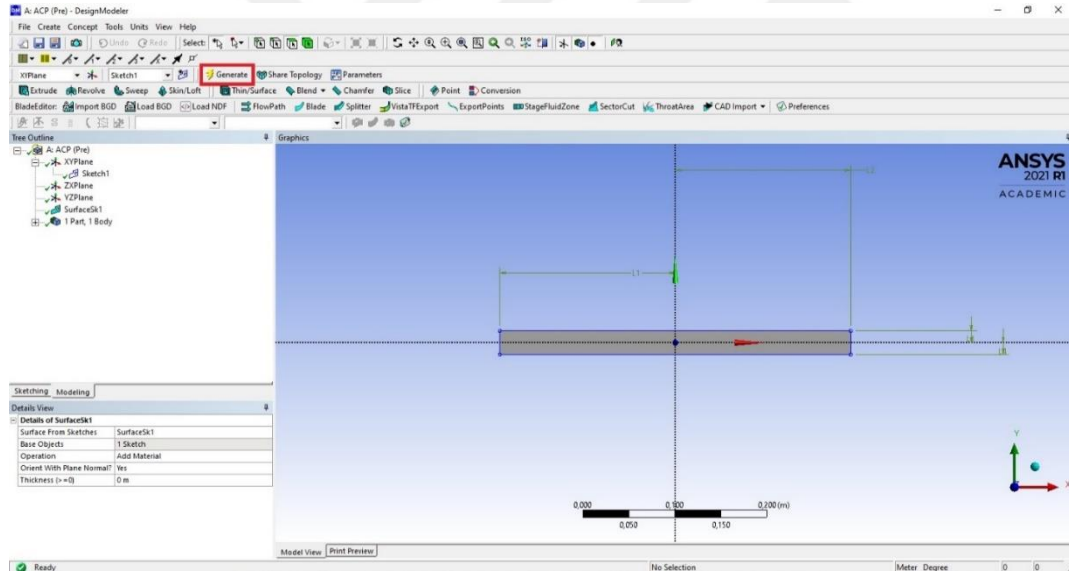
Şekil A. 19 : Geometrinin oluşturulması.

Geometri oluşturulduktan sonra “Konsept” sekmesine tıklanır ve “Taslaktan Yüzeye” maddesine tıklanır (Şekil A.20).



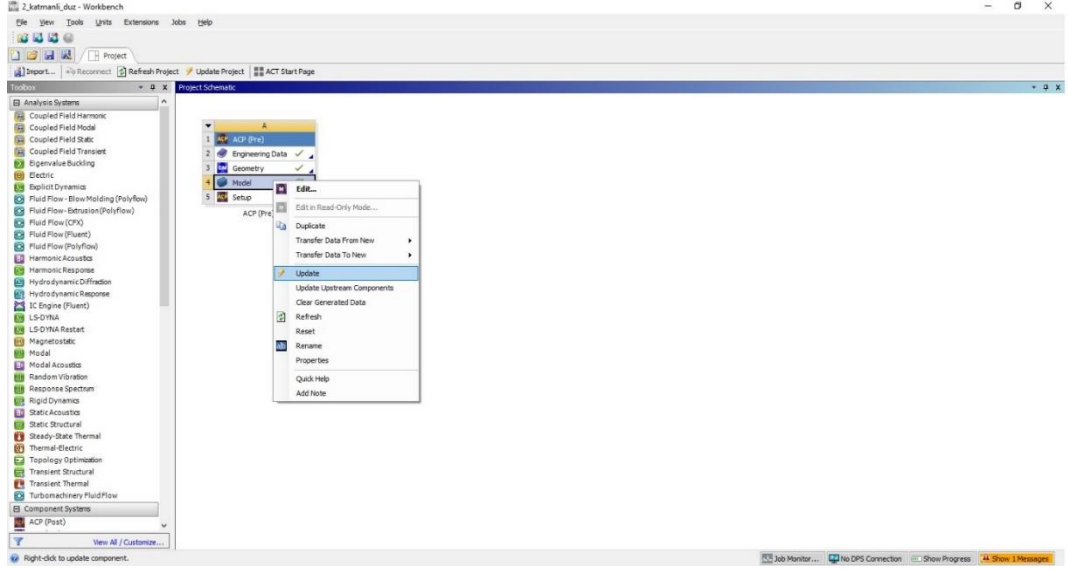
Şekil A. 20 : Yüzey modelinin seçilmesi.

Daha sonrasında “Oluştur” butonuna tıklararak geometrimiz kabuk yapıya dönüştürülür ve pencere kapatılır (Şekil A.21).



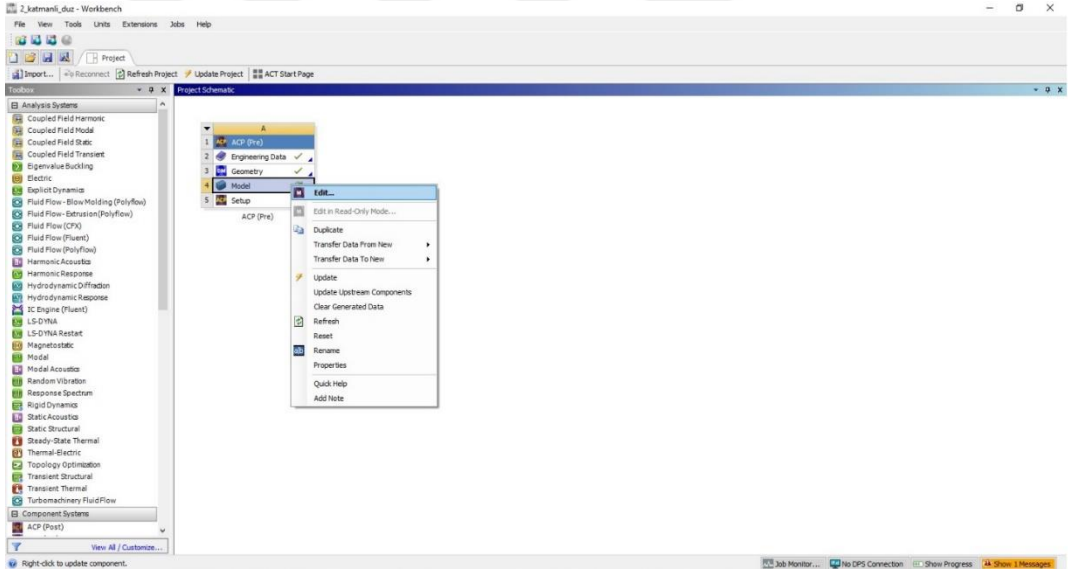
Şekil A. 21 : Yüzeyin oluşturulması.

Çalışma alanına geri döndüğümüzde “Model”e sağ tıklanarak “Güncelle” kısmına tıklanır (Şekil A.22).



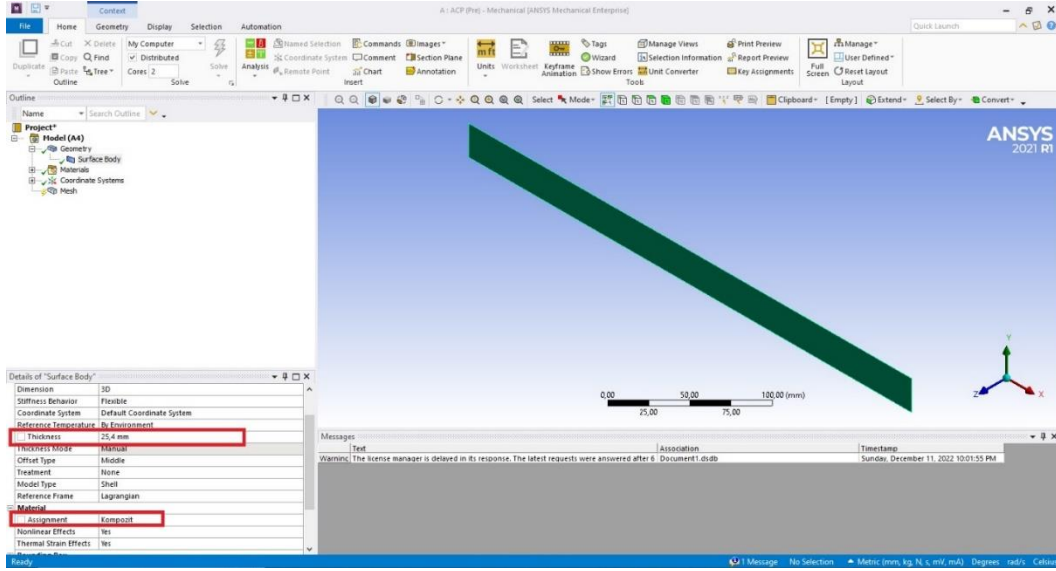
Şekil A. 22 : Modelin güncellenmesi.

Güncelleme yapıldıktan sonra tekrar “Model”e sağ tıklanır ve “Düzenle” kısmına tıklanır (Şekil A. 23).



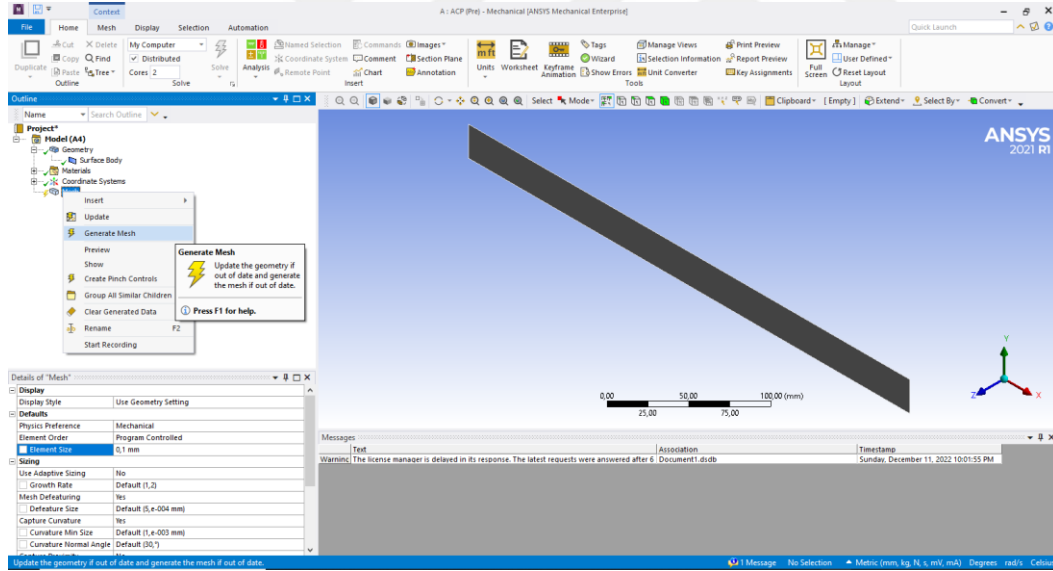
Şekil A. 23 : Modelin düzenlenmesi.

Açılan pencerede “Geometri” kısmına tıklanarak kirişimizin toplam kalınlığı girilir ve ilk adımda oluşturduğumuz kompozit malzeme seçilir (Şekil A.24)

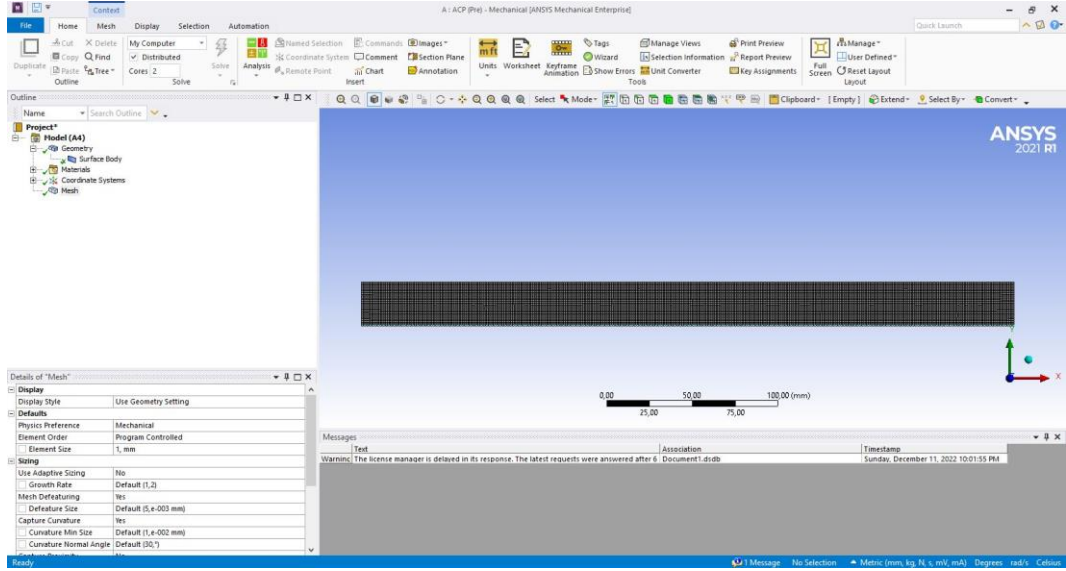


Şekil A. 24: Kiriş kalınlığının girilmesi ve malzeme atanması.

Malzeme ataması yapıldıktan sonra “Kafes” kısmına tıklanarak sonlu elemanlar yöntemi için kullanılacak olan elemanları oluşturmak için kafes boyutu girilir ve “Kafes Oluştur” kısmına tıklanarak oluşturulur (Şekil A.25- Şekil A.26).

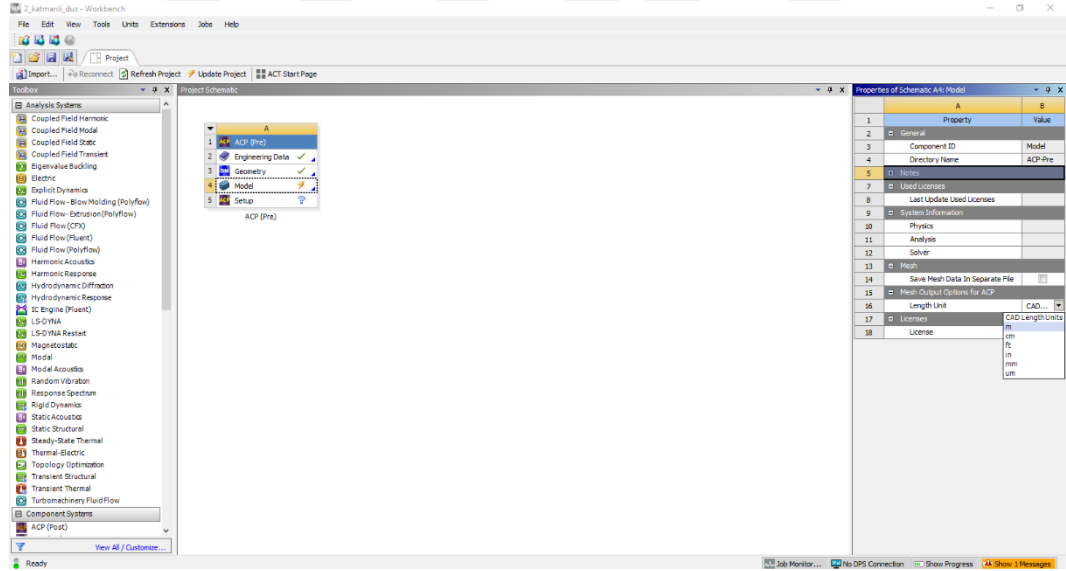


Şekil A. 25 : Kafes elemanların oluşturulması.



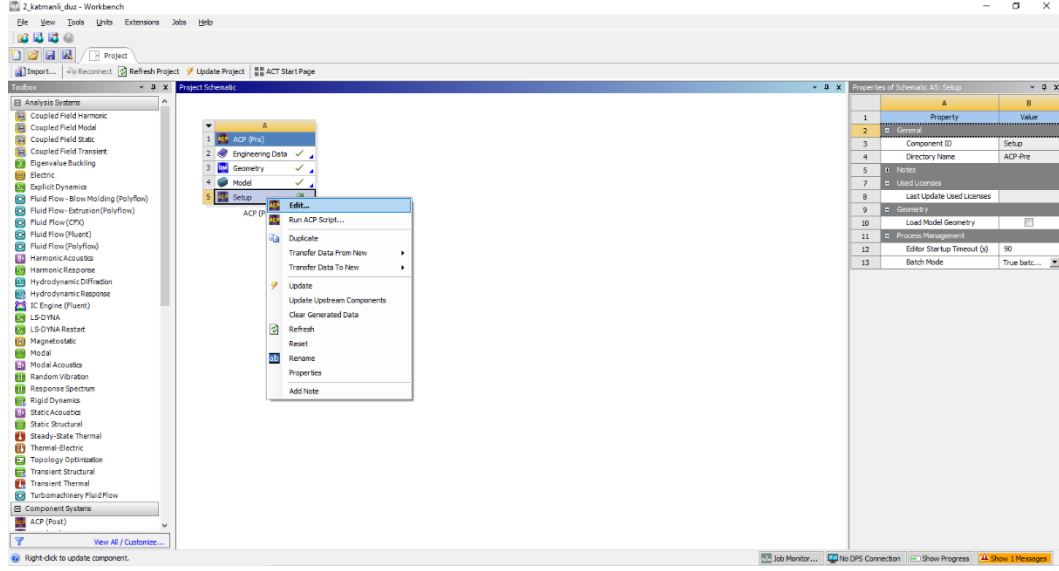
Şekil A. 26: Kiriş üzerindeki kafes elemanlar.

Kafes elemanlara böldükten sonra pencere kapatılıp tekrar çalışma alanına dönülür. Daha sonrasında “Model”e tıklanarak sağ taraftan “Uzunluk Birimi” metre olarak seçilir ve sonrasında “Model”e sağ tıklanarak güncellenir (Şekil A.27).



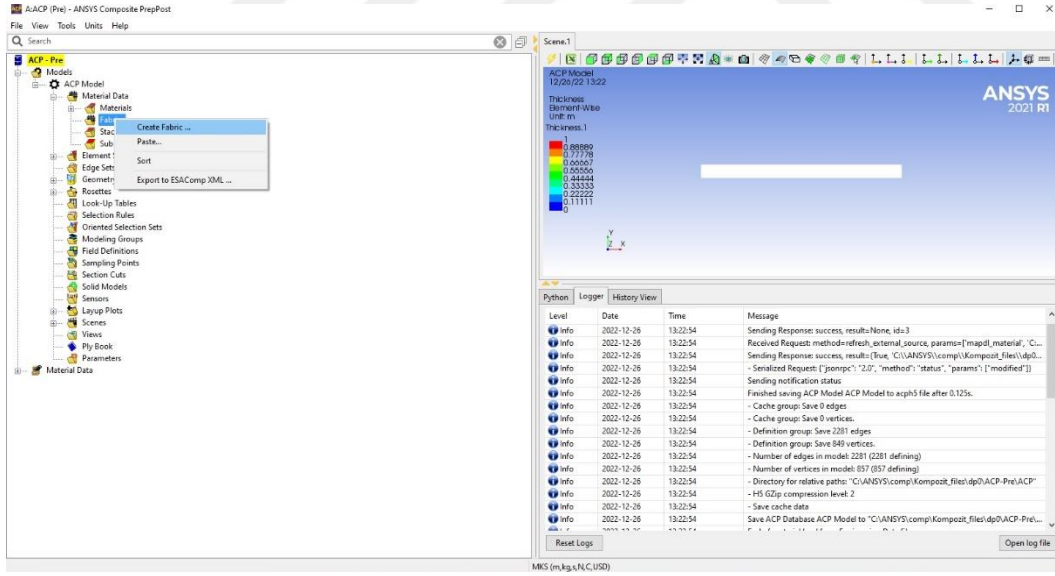
Şekil A. 27 : Uzunluk birimi seçimi.

Güncelleme tamamlandıktan sonra “Kurulum” kısmına sağ tıklanarak düzenleye tıklanır (Şekil A.28).

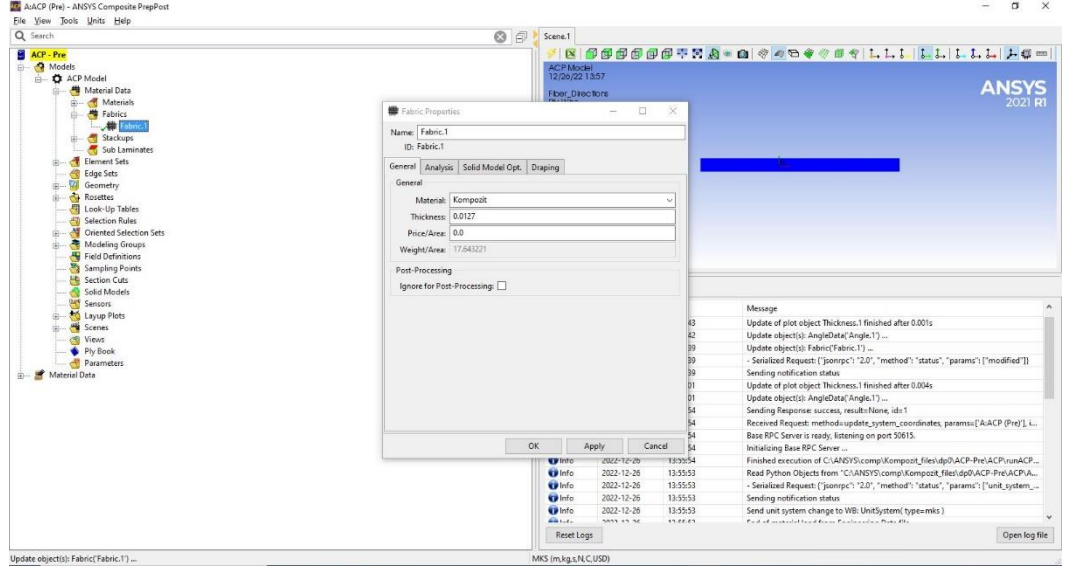


Şekil A. 28 : Kurulumun düzenlenmesi.

Açılan ekranda “Malzeme Verileri” sekmesi altında bulunan “Kumaş” sekmesine sağ tıklanarak “Kumaş Oluştur” sekmesi seçilir (Şekil A.29). Daha sonrasında açılan pencerede katman kalınlığı girilir ve katman malzemesi atanır ve “Uygula” butonuna tıklanır (Şekil A.30).

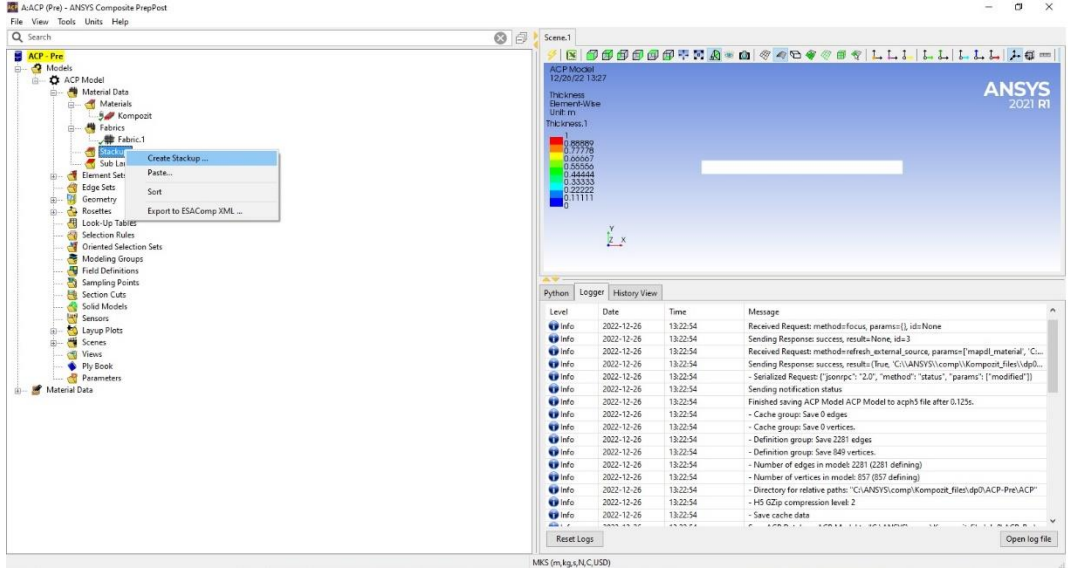


Şekil A. 29 : Kumaşın oluşturulması.

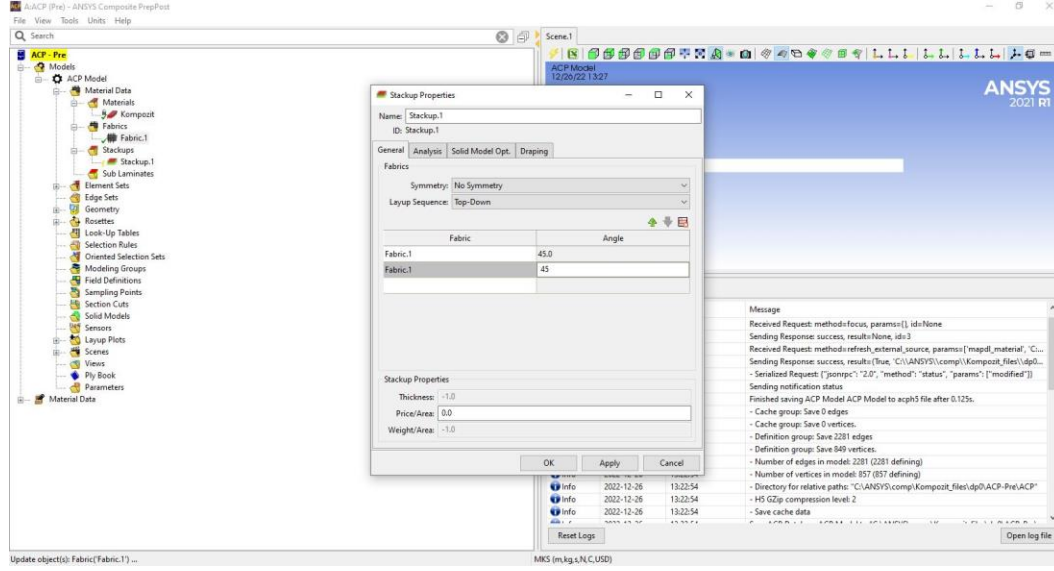


Şekil A. 30 : Katman kalınlığı ve malzemesinin belirlenmesi.

“Yığınlar” sekmesine sağ tıklanarak “Yığın Oluştur” komutu seçilir ve açılan pencerede dokümanlar ve yerleştirme açıları seçilir “Uygula” butonuna tıklanır (Şekil A.31 - Şekil A.32).

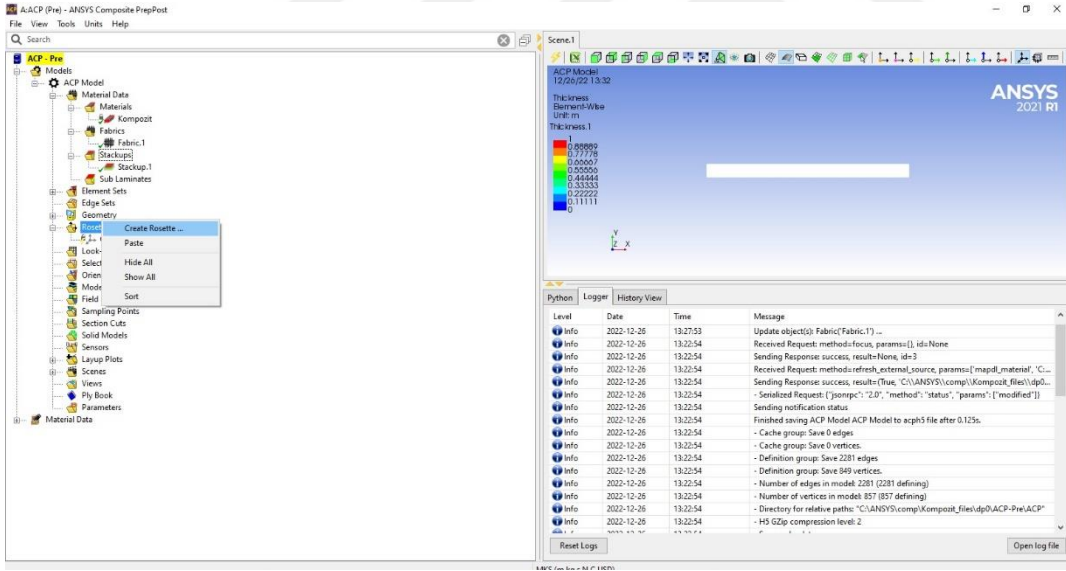


Şekil A. 31 : Yığın oluşturulması için pencerenin açılması.

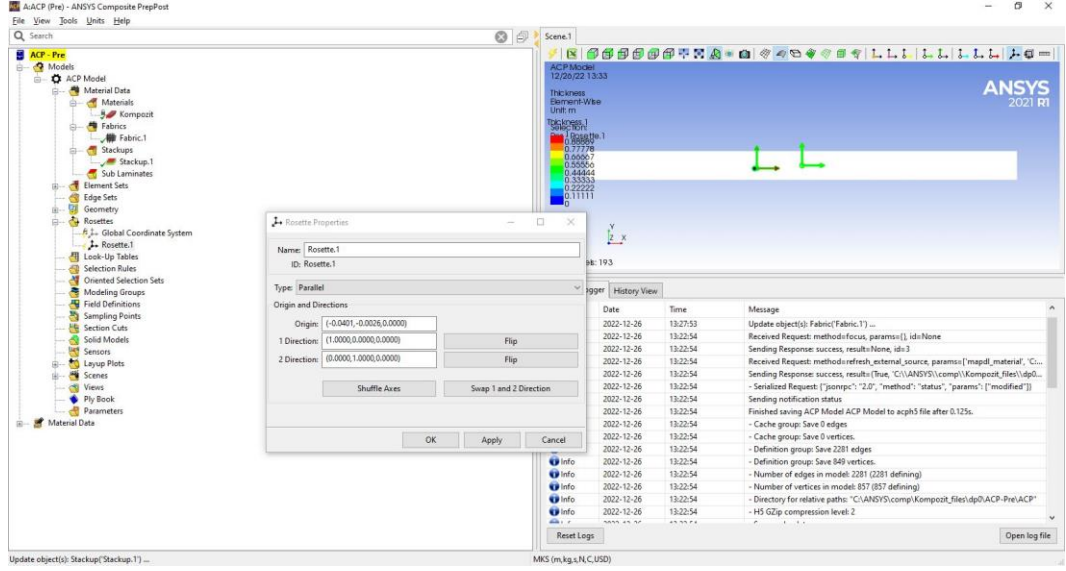


Şekil A. 32 : Yerleştirme açılarının belirlenmesi.

Daha sonrasında “Rozetler” sekmesine sağ tıklanarak “Rozet Oluştur” butonuna tıklanır (Şekil A.33). Açılan pencerede “Orijin” kısmına gelerek kiriş üzerinde rastgele bir nokta seçilir ve “Uygula” butonuna tıklanır (Şekil A.34).

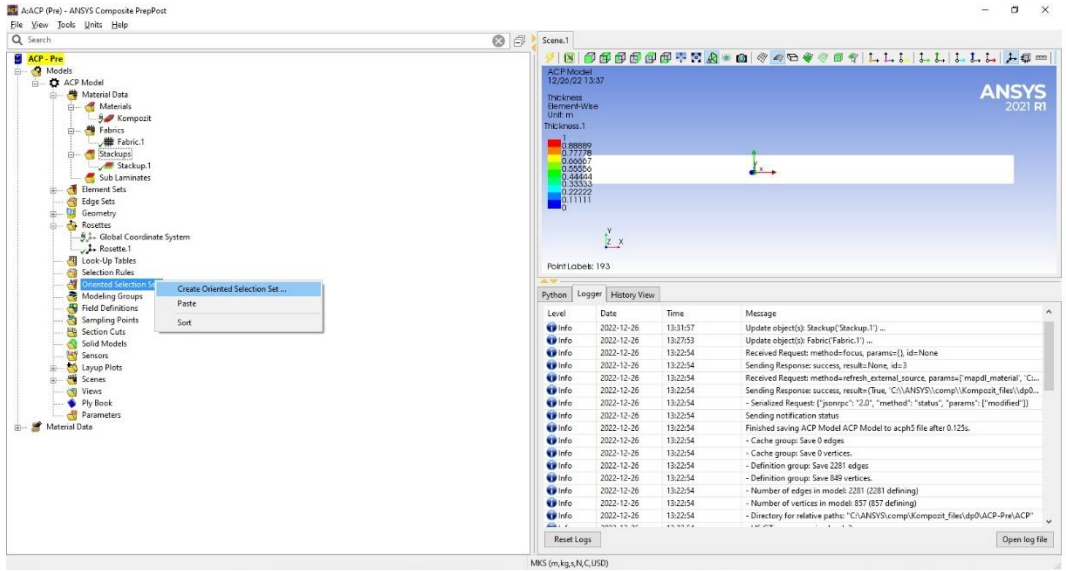


Şekil A. 33 : Rozet penceresinin açılması.

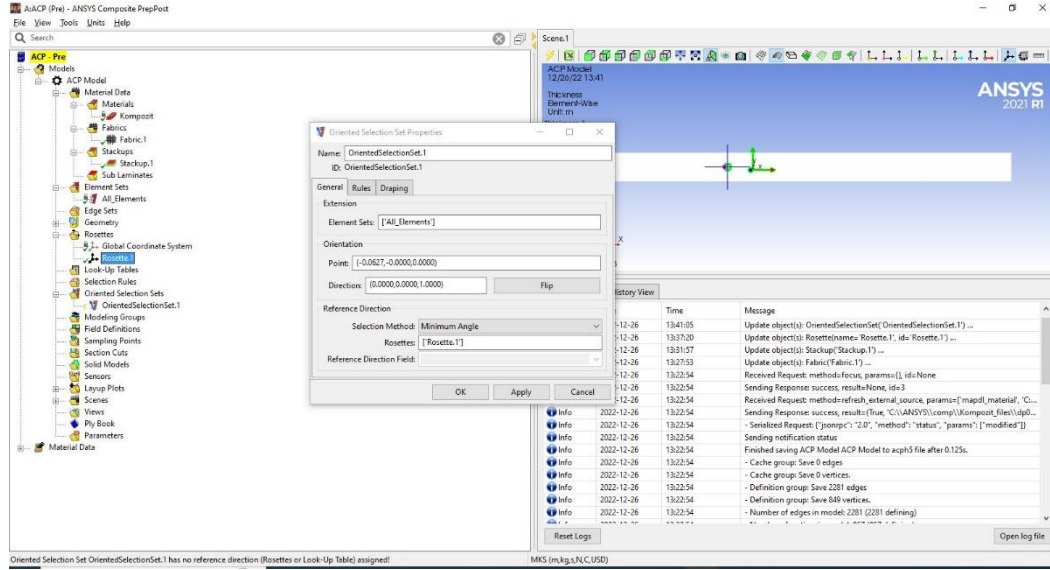


Şekil A. 34 : Orijinin belirlenmesi.

Rozetler oluşturulduktan sonra “Yönlü Seçim Takımı” sekmesine sağ tıklanarak “Yönlü Seçim Takımı Oluştur” sekmesi seçilir (Şekil A.35). Daha sonrasında açılan pencerede “Element Seti” kısmında “Bütün Elementler” seçilir, “Nokta” kısmına ise kiriş üzerinden rastgele bir nokta seçilir ve daha sonra “Rozetler” kısmına ise oluşturduğumuz rozet seçilir, “Uygula” butonuna tıklanır ve böylece katmanların hengi doğrultuda üst üste yerleştirileceği seçilmiş olur (Şekil A.36).

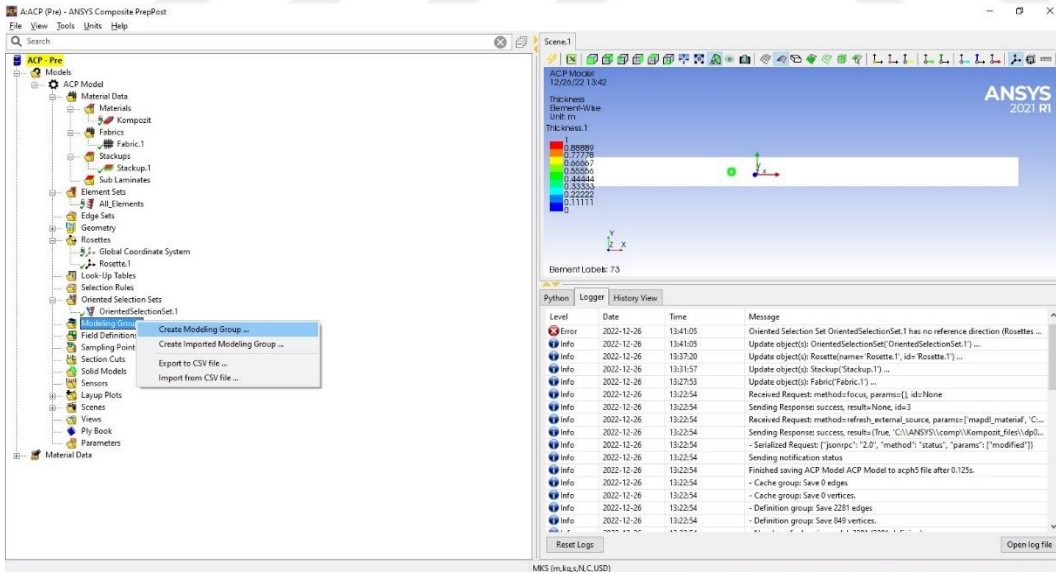


Şekil A. 35 : Yönlü seçim takımı penceresinin açılması.

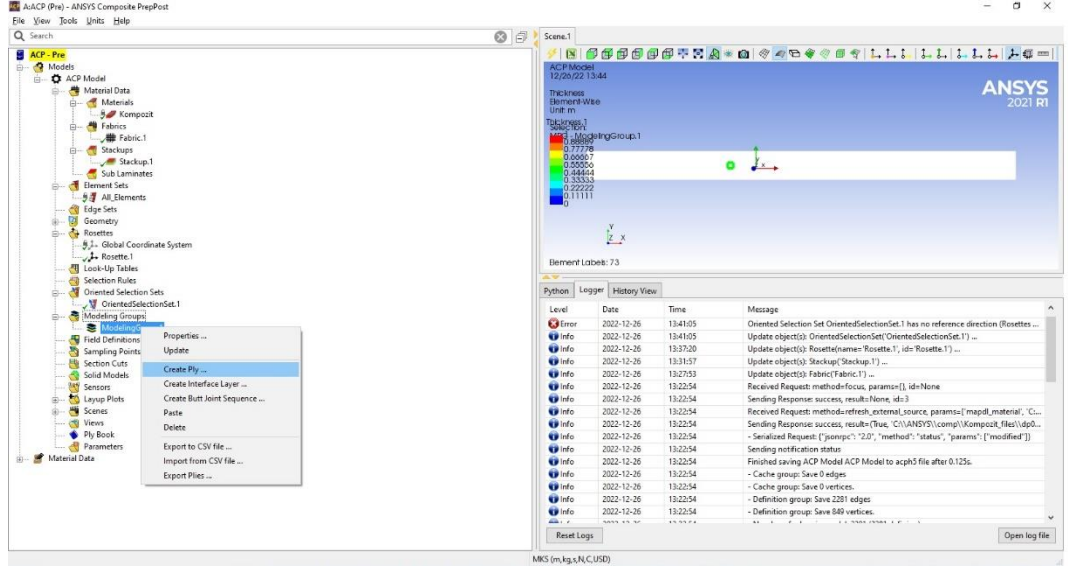


Şekil A. 36 : Yönlü seçim takımının oluşturulması.

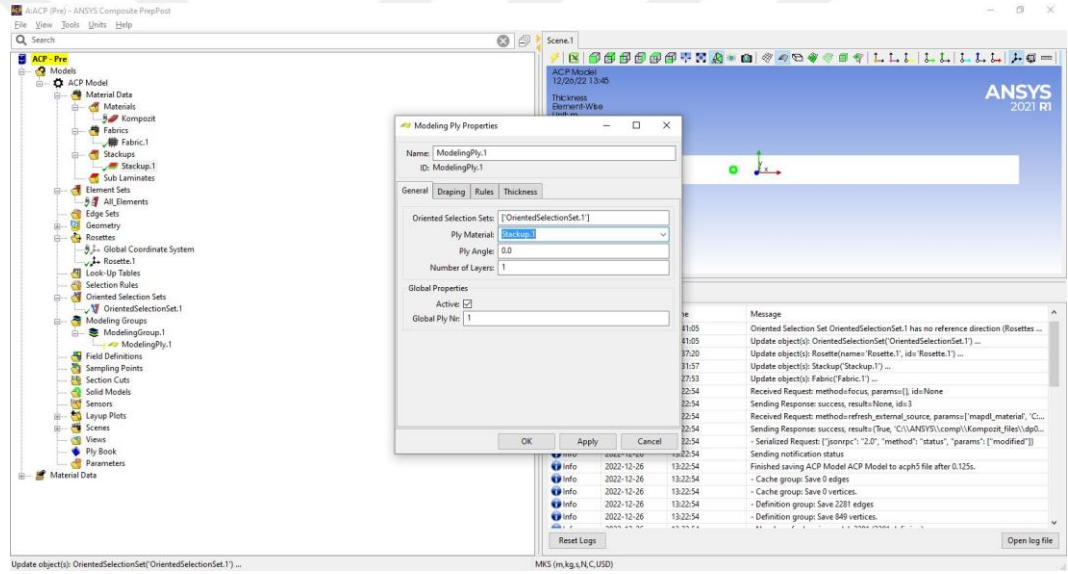
“Yönlü Seçim Takımı” oluşturulduktan sonra “Model Grubu” sekmesine sağ tıklanarak “Model Grubu Oluştur” seçilir (Şekil A.37). oluşturulan “Model Grubu”na sağ tıklanarak “Katman Oluştur” seçilir (Şekil A.38). Çıkan pencerede oluşturulan yönlü seçim takımı seçilir, daha sonra “Katman Malzemesi” olarak oluşturduğumuz yığın seçilir ve “Uygula” butonuna tıklanır (Şekil A.39).



Şekil A. 37 : Model grubu oluşturulması.

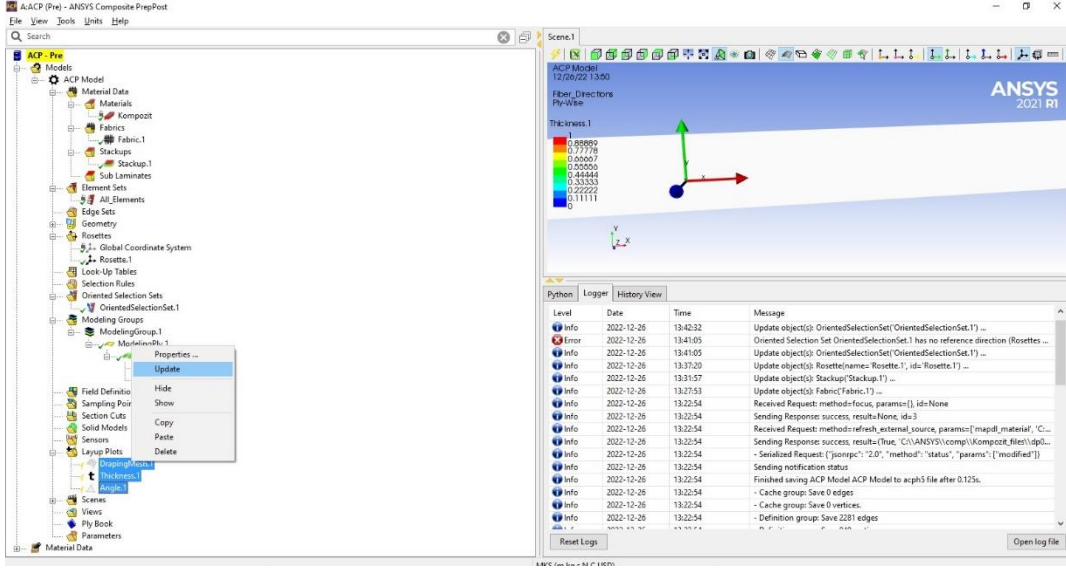


Şekil A. 38 : Katman oluşturma penceresinin açılması.



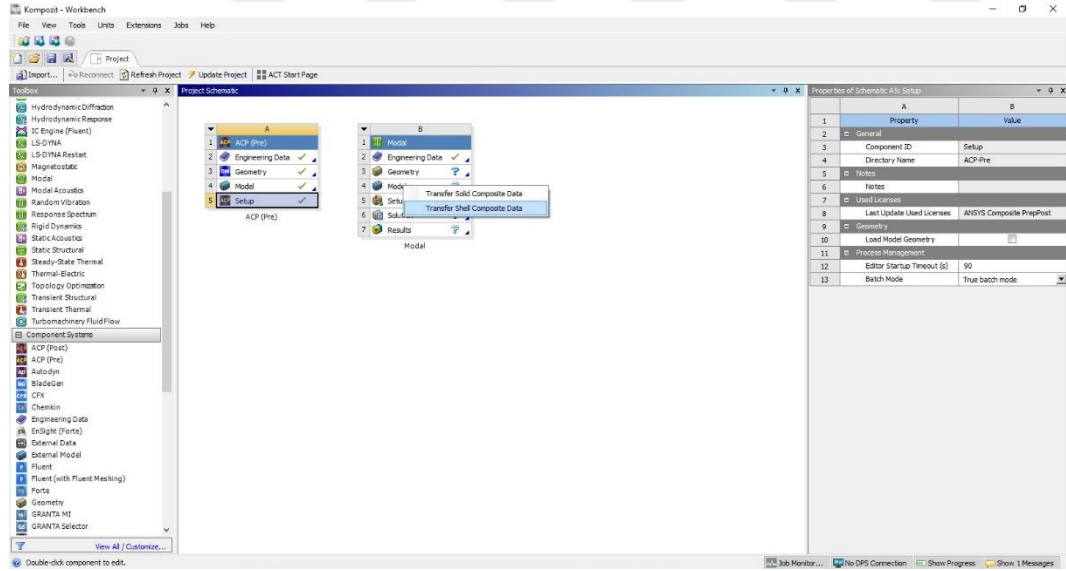
Şekil A. 39 : Katmanların oluşturulması.

Daha sonrasında “Yerleşim Çizimi” sekmesi altında kalan tüm maddelere sağ tıklanarak “Güncelle” seçilir (Şekil A.40).



Şekil A. 40 : Yerleşim çizimlerinin güncellenmesi.

Güncelleme yapıldıktan sonra “Kurulum” penceresi kapatılır ve çalışma alanına geri dönülür. Daha sonra sol tarafta yer alan “Modal Analiz” başlığı çalışma alanına sürüklenir ve ACP Pre modülünün “Kurulum” sekmesinde “Modal”ın “Kurulum” kısmına “Kabuk Olarak Veriyi Aktar” seçilerek bağlantı oluşturulur.



Şekil A. 41 : Modal analiz ile ACP Pre modülünün bağlanması.

EK B

Eşdeğer elastisite modülünün hesaplanmasında kullanılan Matlab kodu.

```
clc
clear all
format long
%Mid-Plane Tapered
n=4; %Katman Sayısı
rho=1389.23; %Yogunluk
N=10000; %Eleman sayısı 10000'den sonra
sabitleniyor

%Katman Açıları
Tetha(1) = 90; % 1. Katman Acisi
Tetha(2) = 0;
Tetha(3) = 90;
Tetha(4) = 0;

%Kiriş Boyutları

%phi=0.25; %Daralma Açısı Derece
%phi=1.432; %0.75
%phi=0.95484; %0.5
%phi=0.47745; %0.25
phi=0;
L=0.381; %Kiriş Boyu
b=0.0254; %genislik

for i=1:n
    h(i)=0.00635; % katman kalınlığı
end

% Malzeme Mekanik Ozellik Hesaplari

E_11= 144.8*10^9;
E_22= 9.65*10^9;
E_33=E_22;

V_12= 0.3;
V_21 = (E_22 / E_11) * V_12;
V_21=0.017;
```

```

G_12 = 4.14*10^9;
G_13 = G_12;
G_23 = 3.45*10^9;

Q_11 = E_11 / (1- (V_12 * V_21));
Q_22 = E_22 / (1- (V_12 * V_21));
Q_12 = (E_22 * V_12) / (1 - (V_12*V_21));
Q_21 = Q_12;
Q_66 = G_12;

Delta=L/N
j=0;
nn=n;
phi=deg2rad(phi);
h_top=0;
for i=1:n/2
    h_top=h_top+h(i); % Kök tarafı orta düzlem
ile kirişin üst noktası arasındaki mesafe
end

for k=1:N
    h_top=h_top-(Delta*tan(phi));
    zz=0;
    Teta=0;

    for i=1:(nn/2)
        zz(i,:) = (h_top-((i-
1)*h(i)));
        if zz(i,:) <= 0
            zz(i,:)=0;
        end
    end

    end
    for i=1:(nn/2)
        if zz(i,:)==0
            nn=nn-2;
        end
    end
end

for i=1:(nn/2)

    z_pri(i,:) = -(zz(i,:));

```

```

end

zz(nn/2+1,:)=0;

for i=1:nn/2
    zz(2+(nn)-i,:)=z_pri(i,:);
end

for i = 1:nn/2
    %Teta(nn/2-i+1)=Tetha_pri(i);
    Teta(i)=Tetha(i);
end

for i=1:nn/2
    Teta(nn/2+i)=Tetha(nn/2-i+1);
end

zet=0;
zet=flip(zz);

for i=1:nn
    Teta(i) = deg2rad(Teta(i));
    Q_b(1,1,i) = (Q_11*(cos(Teta(i)))^4
)+
    (2*(Q_12+(2*Q_66))*(sin(Teta(i)))^2*(cos(Teta(i)
))^2)+(Q_22*(sin(Teta(i)))^4);
    Q_b(1,2,i) = ((Q_11+Q_22-
    (4*Q_66))*((sin(Teta(i)))^2)*(cos(Teta(i)))^2) +
    (Q_12*((sin(Teta(i)))^4 + (cos(Teta(i)))^4))) ;
    Q_b(2,1,i) = Q_b(1,2,i);
    Q_b(2,2,i) =
    (Q_11*(sin(Teta(i)))^4)+2*(Q_12+(2*Q_66))*((sin(
    Teta(i)))^2)*(cos(Teta(i)))^2 +
    Q_22*(cos(Teta(i)))^4;
    Q_b(1,3,i) = (Q_11-Q_12-
    (2*Q_66))*(sin(Teta(i)))*(cos(Teta(i)))^3+(Q_12-
    Q_22+(2*Q_66))*((sin(Teta(i)))^3)*cos(Teta(i));
    Q_b(3,1,i) = Q_b(1,3,i);
    Q_b(2,3,i) = (Q_11-Q_12-
    (2*Q_66))*(sin(Teta(i)))^3*cos(Teta(i))+(Q_12-
    Q_22+(2*Q_66))*sin(Teta(i))*(cos(Teta(i)))^3;

```

```

Q_b(3,3,i) = (Q_11+Q_22-(2*Q_12)-
(2*Q_66))*(sin(Teta(i)))^2*(cos(Teta(i)))^2+(Q_6
6*((sin(Teta(i)))^4)+(cos(Teta(i)))^4));
Q_b(3,2,i) = Q_b(2,3,i)      ;
    end
    DD=0;
    z_=0;
    D=0;
    for i=1:nn

        z_ = ((zet(i+1))^3)-(zet(i))^3      ;

        D = D+(Q_b(:, :, i)*z_)      ;
    end

    D = (1/3)*D;
    DD=det(D);

    D_11_star(k)= ((D(2,2)*D(3,3))-
D(2,3)*D(2,3))/DD;
    kont=0;
    %h_top(k)=zet(nn+1)+abs(zet(1));
    I_zz(k)=(b*(2*h_top)^3)/12; %h_top üst
noktanın konumu olduğu için 2 ile çarpıldı
    I_0(k)=b*2*h_top*rho;
    E(k)=b/(I_zz(k)*D_11_star(k));
    yuk(k)=h_top*2;
    kont=0;
end

E_eq=0;
I_av=0;
for k=1:N
    E(k)=b/(I_zz(k)*D_11_star(k));
    E_eq=E_eq+E(k);
    I_av=I_av+I_zz(k);
end

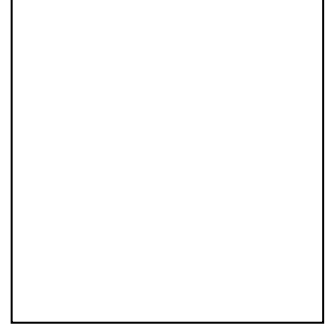
E_eq=E_eq/N
Izz=I_av/N

```

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad

: Berke TÜRKAL



ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2017, İstanbul Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

Türkkal, B. Çinkılıç, A.Kapkın S. Determining the mechanical properties of sandwich composite materials for aviation applications.