



**T.C.  
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**LİE CEBİRLERİNİN 2- ÇAPRAZLANMIŞ  
MODÜLLERİNDE İZOMORFİZM TEOREMLERİ**

**Sueda Şeyma ŞAVKLIYILDIZ**

**BURDUR, 2023**

T.C.  
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

LİE CEBİRLERİNİN 2-ÇAPRAZLANMIŞ  
MODÜLLERİNDE İZOMORFİZM TEOREMLERİ

Sueda Şeyma ŞAVKLIYILDIZ

Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL

BURDUR, 2023

## ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Lie Cebirlerin 2-Çaprazlanmış Modüllerinde İzomorfizm**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

13 / 01 / 2023

(İmza)

Sueda Şeyma ŞAVKLIYILDIZ

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, karşılaştığım her zorlukta destek olan ve çalışmamı titizlikle takip eden çok değerli danışman hocam **Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL**'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardım ve desteğini benden hiç esirgemeyen, bilgi birikimi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi **Dr. Öğr. Üyesi Selim ÇETİN** ve **Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL**'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

**Ocak, 2023**

**Sueda Şeyma ŞAVKLIYILDIZ**

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR .....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	iv
ÖZET.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER .....	3
3. LİE CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ .....	15
3.1. Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülü .....	15
3.2. Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modüllerinin Alt Çaprazlanmış Modülü ve İdeali .	17
3.3. Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Bölüm Modülü.....	22
3.4. Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri için İzomorfizm Teoremleri.....	23
4. LİE CEBİRLERİNİN 2 –ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ .....	28
4.1. Lie Cebirlerin Çaprazlanmış Modül Kavramı.....	28
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	39
KAYNAKLAR.....	40

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\text{id}$	: Birim dönüşüm
$\hookrightarrow$	: İçerme dönüşümü
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\text{inc}$	: İçerme dönüşümü
$\text{gör } \partial$	: $\partial$ homomorfizminin görüntüsü
$\text{çek } \partial$	: $\partial$ homomorfizminin çekirdeği
$A \times B$	: $A$ ve $B$ kümelerinin kartezyen (direkt) çarpımı
$\otimes$	: Yarı direkt çarpım
$L_1 \leq L_2$	: $L_1, L_2$ 'nin alt cebiridir
$L_1 \trianglelefteq L_2$	: $L_1, L_2$ 'nin ideali
$\partial \mid$	: $\partial$ homomorfizminin kısıtlanması
$(i) \Rightarrow (ii)$	: (i) var olduğunda (ii) var olur
$(i) \Leftarrow (ii)$	: (ii) var olduğunda (i) var olur
$(i) \Leftrightarrow (ii)$	: (i) ve (ii) birbirine denktir
$(G, M, \partial)$	: Çaprazlanmış modül
$A/B$	: Bölüm kümesi
$A \cong B$	: $A$ ile $B$ birbirine izomorftur.
$A \cup B$	: $A$ ve $B$ kümelerinin birleşimi
$A \cap B$	: $A$ ve $B$ kümelerinin kesişimi
$A \subseteq B$	: $A$ kümesi, $B$ kümesinin alt kümesidir
$A \not\subseteq B$	: $A$ kümesi, $B$ kümesinin alt kümesi değildir
$A \supseteq B$	: $A$ kümesi, $B$ kümesini kapsar
$A \setminus B$	: $A$ kümesinin $B$ kümesinden farkı
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değildir
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değildir
$\emptyset$	: Boş küme
$\exists$	: Vardır
$\forall$	: Her

$:=$	: Tanım olarak eşittir
:	: Öyle ki
$[, ]$	: Lie Cebiri braketi
■	: İspat tamamlanmıştır
<i>İng.</i>	: İngilizce karşılığı



# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## Lie Cebirlerin 2-Çaprazlanmış Modüllerinde İzomorfizm Teoremleri

Sueda Şeyma ŞAVKLIYILDIZ

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Utku GÜRDAL

Ocak, 2023

Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modüllerinde izomorfizm teoremleri üzerine hazırlanan bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünde gerekli olan bilgilere ve literatür geçmişine yer verilmiştir.

İkinci bölümde Lie cebirlerinde kullanılan bazı temel kavramlara yer verilmiş ve tez için gerekli olan teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde Lie cebirlerinin çaprazlanmış modül kavramı tanımlanarak, Lie cebirlerinin çaprazlanmış modül homomorfizmi ve bunların çekirdek ve görüntülerine yer verilmiştir. Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin Lie alt çaprazlanmış modülleri, Lie çaprazlanmış idealleri ve Lie cebirlerinin çaprazlanmış bölüm modülleri incelenmiştir. Ayrıca Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri için izomorfizm teoremleri ifade ve ispat edilmiştir.

Dördüncü bölümde Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modüllerinin tanımı verilerek yapının gerekli özellikleri vasıtasıyla üçüncü bölümde tanımlanan kavramlar ve verilen teoremler Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülleri için genelleştirilecek şekilde ifade ve ispat edilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar yorumlanarak, literatür kazanımlarına değinilmiş ve ayrıca ileride yapılabilecek olan bazı çalışmalar konusunda fikirler beyan edilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Lie cebiri, Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri, Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülleri, Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülleri için izomorfizm teoremleri

# SUMMARY

M. Sc. Thesis

**Isomorphism theorems on 2- crossed modules of Lie algebras**

**Sueda Şeyma ŞAVKLIYILDIZ**

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics**

**Supervisor: Assoc. Dr. Öğr.Üyesi Utku GÜRDAL**

**January, 2023**

This thesis on isomorphism theorems in 2 –crossed modules of Lie algebras consists of five chapters.

In the first part of the thesis, necessary information and literature history are given.

In the second chapter, some basic concepts used in Lie algebras are given and theorems necessary for the thesis are expressed.

In the third chapter, the concept of a crossed module of Lie algebras is defined, and crossed module homomorphism of Lie algebras and their kernel and images are given. Lie subcrossed modules of crossed modules of Lie algebras, Lie crossed ideals and quotient crossed modules of Lie algebras are studied. Also, isomorphism theorems for crossed modules of Lie algebras are stated and proved.

In the fourth chapter, the definition of a 2 –crossed module of Lie algebras is given, and the concepts and theorems given in the third chapter are generalized for 2 –crossed modules of Lie algebras, and they are proved by means of the properties of the structure.

In the last part, the results obtained are interpreted, the literature gains are mentioned, and also ideas about some future studies are expressed.

**Keywords:** Lie algebra, crossed modules of Lie algebras, 2 –crossed modules of Lie algebras, isomorphism theorems for 2 –crossed modules of Lie algebras

# 1. GİRİŞ

Sonsuz küçük dönüşümleri sistematik olarak incelemek amacıyla 19. yüzyılın ikinci yarısında, önce Marius Sophus Lie, daha sonra da Wilhelm Killing tarafından birbirlerinden bağımsız olarak tanımlanmış bir cebirsel yapı olan Lie cebirleri, yaklaşık olarak yarım yüzyıl sonra bugünkü adı ve terminolojisi ile birlikte, Herman Weyl tarafından ele alınmıştır. Lie cebirleri diferansiyel geometride önemli bir yeri bulunan ve aynı zamanda topolojik bir grup olan Lie grupları ile yakından bağlantı içerisinde bulunan, antisimetri ve Jacobi özdeşliği adı verilen iki özel şartı sağlayan ve genel anlamda birleşmeli veya değişmeli olmayan cebirsel yapılardır. Lie grupları ile birlikte Lie cebirleri, matematiksel açıdan ilginç olmalarının yanı sıra fizik başta olmak üzere birçok uygulamalı alanda kullanışlılığını kanıtlamış olan yapılardır. Özel olarak, kuantum mekaniği ve parçacık fiziği alanındaki çalışmalarda bu yapılar yoğun bir şekilde kullanılmaktadır.

Whitehead tarafından gruplar için 1947 ve 1949 yılları arasında geliştirilen çaprazlanmış modül kavramı (Whitehead, 1949) orijinal olarak gruplar için verilmiş olan bir genelleştirmedir ve ilk iki homotopi grubuyla ilişkili olarak ortaya çıkmıştır. Bu kavram hem grupları hem de sabitlenmiş bir grubun normal alt gruplarını harici nesnelere genellemektedir. Bu konuda yapılan bazı öncü ve tarihsel açıdan önemli çalışmalardan bazıları (Brown ve Higgins, 1981), (Brown, 1982), (Brown ve Huebschmann, 1982) ve (Brown, 1984) şeklinde verilebilir.

Çaprazlanmış modül kavramı ilk olarak grupların kategorisi üzerinde tanımlanmış olmakla birlikte gruplar dışındaki birçok cebirsel nesne ve özellikle de çeşitli cebir yapıları için de ilerleyen dönemlerde çaprazlanmış modül kavramları literatüre girmiştir. Burada ilgilendiğimiz Lie cebirlerinin çaprazlanmış modül yapısı 1988 yılında Ellis tarafından tanımlanmıştır (Ellis, G. J., 1988).

Çaprazlanmış modüller ilgili cebirsel nesnelere iki boyutlu bir varyasyonu olarak düşünülebilirler. Bu yaklaşımı daha da üst boyutlara taşımak mümkündür. Burada kendimizi çaprazlanmış modüllerin bir üst boyutuna sınırlıyoruz. Bu boyutta çaprazlanmış kareler ve  $2 -$  çaprazlanmış modüller olarak literatürde karşımıza çıkmaktadır. Lie cebirleri için çaprazlanmış kare kavramı yine Ellis tarafından verilmiştir.  $2 -$  çaprazlanmış modül kavramının Lie cebirleri için tanımlanması da yine Ellis tarafından olmuştur.

Bu konuda değinilmesi yerinde olacak bazı ek alışmalar (T. Porter, 1986), (Z. Arvasi ve T. Porter, 1996) olarak sıralanabilir.

Bu tezin ikinci bölümünde Lie cebirleri için gerekli olan tanımlara ve Lie cebirleri için izomorfizm teoremlerine yer verilmiştir.

nc bölümde Lie cebirlerinin literatürde yer alan tanımı, Lie alt çaprazlanmış modül ve Lie ideal tanımı, Lie cebirlerinin çaprazlanmış modül homomorfizmlerinin çekirdeği ve görüntüsü, Lie cebirlerinin çaprazlanmış bölüm modülü yer almıştır. Ayrıca Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri için izomorfizm teoremlerine ve bunların ispatlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Lie cebirlerinin 2-çaprazlanmış modül tanımı verilmiş, nc bölümde Lie cebirlerin çaprazlanmış modüllerinde verilen yapılar Lie cebirlerinin 2 –aprazlanmış modülleri için uyarlanıp, ispatlanmıştır. Böylece Lie cebirlerinin 2 –aprazlanmış modülleri için birinci, ikinci ve nc izomorfizm teoremleri ve ispatları elde edilmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

Tezin bu bölümü, Lie cebirleri başta olmak üzere, tezin geri kalanında gerekli olacak cebirsel yapıların tanıtılmasına ayrılmıştır. Bu bölümdeki tanımlar, teoremler ve örneklerin tamamı (İşler, N., 2022) kaynağından derlenmiştir.

**Tanım 2.1 (İkili işlem):**  $G$  boş olmayan bir küme olmak üzere  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  şeklindeki bir fonksiyona  $G$  üzerinde bir **ikili işlem** (İng. binary operation) denir.  $a, b \in G$  olmak üzere  $\cdot$  ( $a, b$ ) elemanı için  $a \cdot b$  ya da kısaca  $ab$  gösterimi kullanılır.

**Tanım 2.2 (Grup):** Boş olmayan bir  $G$  kümesi üzerinde bir  $\cdot$  ikili işlemi verilsin. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa  $(G, \cdot)$  ikilisine bir **grup** (İng. group) denir.

- (i)  $\forall a, b, c \in G$  için  $(ab)c = a(bc)$  (Birleşme özelliği)
- (ii)  $\forall a \in G$  için  $\exists 1_G \in G$  öyle ki  $a1_G = 1_G a = a$  (Birim eleman özelliği)
- (iii)  $\forall a \in G$  için  $\exists a^{-1} \in G$  öyle ki  $aa^{-1} = a^{-1}a = 1_G$  (Ters eleman özelliği.)

Bu şartlara ilaveten eğer

- (iv)  $\forall a, b \in G$  için  $ab = ba$  (Değişme özelliği)

sağlanıyorsa bu gruba **Abel (değişmeli) grup** (İng. abelian group) denir.

**Tanım 2.3 (Halka):** Bir  $H$  kümesi üzerinde  $+$  ve  $\cdot$  ikili işlemleri verilsin.

- (i)  $(H, +)$  bir değişmeli gruptur.
- (ii)  $H$  kümesi  $\cdot$  işlemine göre birleşme özelliğine sahiptir, yani  $\forall x, y, z \in H$  için

$$x(yz) = (xy)z$$

- (iii)  $\cdot$  işleminin  $+$  işlemi üzerine dağılma özelliği vardır, yani  $\forall x, y, z \in H$  için

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

Bu üç özellik sağlanıyorsa,  $(H, +, \cdot)$  üçlüsüne bir **halka** (İng. ring) denir.

Bir,  $H$  halkasında  $+$  (toplama) işleminin birim elemanı genellikle  $0_H$  veya kısaca  $0$  ile gösterilir ve bu elemana halkanın sıfırı veya etkisiz elemanı denir. Ayrıca bir  $H$  halkasında, her  $x \in H$  için

$$x1_H = 1_H x = x$$

olacak şekilde bir  $1_H \in H$  elemanı varsa  $H$  halkasına **birimli halka** (*İng.* unitary ring) denir ve bu eleman kısaca 1 ile de gösterilir.  $\forall x, y \in H$  için

$$xy = yx$$

ise  $H$ 'ye **değişmeli halka** (*İng.* commutative ring) denir.

**Tanım 2.4 (Cisim):** Bir  $\mathbb{K}$  kümesi üzerinde  $+$  ve  $\cdot$  gibi iki işlem verilmiş olsun.

- (i)  $(\mathbb{K}, +)$  bir değişmeli gruptur,
- (ii)  $(\mathbb{K} \setminus \{0_K\}, \cdot)$  bir değişmeli gruptur,
- (iii)  $\cdot$  işleminin  $+$  işlemi üzerine dağılma özelliği vardır

özellikleri sağlanıyorsa  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  üçlüsüne bir **cisim** (*İng.* field) denir.

Bu tanıma göre bir cismin, sıfır elemanı hariç her elemanının çarpma işlemine göre tersi bulunan birimli ve değişmeli bir halka olduğuna dikkat edelim.

**Tanım 2.5 (Vektör Uzayı):**  $\mathbb{K}$  bir cisim,  $(V, \oplus)$  bir değişmeli grup ve  $\bullet : \mathbb{K} \times V \rightarrow V$  bir fonksiyon olmak üzere eğer

- (i)  $(\alpha\beta) \bullet \mathbf{v} = \alpha \bullet (\beta \bullet \mathbf{v})$
- (ii)  $(\alpha + \beta) \bullet \mathbf{v} = (\alpha \bullet \mathbf{v}) \oplus (\beta \bullet \mathbf{v})$
- (iii)  $\alpha \bullet (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = (\alpha \bullet \mathbf{u}) \oplus (\alpha \bullet \mathbf{v})$
- (iv)  $1 \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v}$

özellikleri her  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$  için sağlanıyorsa  $(V, (R, +, \cdot), \oplus, \bullet)$  yapısına  $\mathbb{K}$  cismi üzerinde bir **vektör uzayı** (*İng.* vector space) denir. Burada  $\mathbb{K}$ 'nin elemanları skaler,  $V$ 'nin elemanlarına da vektör olarak adlandırılır.

Bir vektör uzayı verildiğinde, herhangi bir karışıklığa neden olmayacağı için vektörler arasındaki toplama işlemi de  $+$  sembolü ile gösterilirken bir skaler ile bir vektörün çarpımı, bunların yan yana yazılması ile gösterilir. Buna göre, bir vektör ile bir skalerin çarpımının özelliklerini

- (i)  $(\alpha\gamma)\mathbf{v} = \alpha(\gamma\mathbf{v})$
- (ii)  $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$
- (iii)  $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{u}$
- (iv)  $1 \bullet \mathbf{v} = \mathbf{v}$

şeklinde daha sade olarak ifade edebiliriz. Bir  $\mathbb{K}$  cismi üzerindeki bir vektör uzayına  $\mathbb{K}$  cismini özel olarak vurgulamak için bazen  $\mathbb{K}$  –vektör uzayı da denir.

**Tanım 2.6 (Cebir):**  $C$  bir  $\mathbb{K}$  –vektör uzayı olsun.  $C$  üzerinde, çarpımsal şekilde (yan yana yazma ile) gösterilen ikinci bir işlem daha işlemi verilmiş olduğunu varsayalım. Eğer her  $\alpha \in \mathbb{K}$  ve  $x, y, z \in C$  için

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

özellikleri sağlanıyorsa  $C$  'ye bir **cebiri** (*İng.* algebra) denir. Eğer böyle bir cebirde

(ii) Birleşme:  $\forall x, y, z \in C$  için

$$(xy)z = x(yz)$$

özelligi de varsa  $C$  'ye **birleşimli cebiri** (*İng.* associative algebra) denir. Eğer

(iii) Değişme:  $\forall x, y \in C$  için

$$xy = yx$$

oluyorsa  $C$  'ye **değişmeli cebiri** (*İng.* commutative algebra) denir. Eğer  $\forall x \in C$  için

$$x1_C = 1_C x = x$$

olacak şekilde  $1_C \in C$  varsa  $C$  'ye **birimli cebiri** (*İng.* unitary algebra) denir.

**Tanım 2.7 (Lie Cebiri):**  $\mathfrak{y}$  bir  $\mathbb{K}$ -vektör uzayı ve  $\mathfrak{y}$  üzerinde

$$[ , ] : \mathfrak{y} \times \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{y}$$

işlemi tanımlansın. Eğer bu işlem  $\mathbb{K}$  –bilineer ise, yani  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$  ve  $\forall y, z, t \in \mathfrak{y}$  için

$$[y + z, t] = [y, t] + [z, t]$$

$$[y, z + t] = [y, z] + [y, t]$$

$$[\alpha y, z] = \alpha [y, z] = [y, \alpha z]$$

özelliklerini sağlıyorsa  $(\mathfrak{y}, [ , ])$  ikilisi bir  $\mathbb{K}$  –cebir olur. Bunun yanında eğer **antisimetri** (*İng.* antisymmetry) adı verilen,  $\forall y, z \in \mathfrak{y}$  için

$$[y, z] = -[z, y]$$

olması özelliği ve **Jacobi özdeşliği** (*İng.* Jacobi identity) adı verilen  $\forall y, z, t \in \mathfrak{y}$  için

$$[y, [z, t]] + [t, [y, z]] + [z, [t, y]] = 0$$

olması özelliği sağlanıyorsa  $(\mathfrak{y}, [ , ])$  ikilisine bir  $\mathbb{K}$  –**Lie cebiri** veya kısaca **Lie cebiri** (*İng.* Lie algebra) denir.

**Not:** Bir  $(\mathcal{Y}, [ , ])$  keyfi  $\mathbb{K}$  –Lie cebirinin değişmeli olması gerekmez.

**Örnek 2.8:** Her  $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$  için,  $\vec{e}_1 = (1,0,0), \vec{e}_2 = (0,1,0)$  ve  $\vec{e}_3 = (0,0,1)$  olmak üzere

$$x \wedge y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

ile tanımlanan vektörel çarpımıyla birlikte  $[x, y] = x \wedge y$  olarak tanımlanırsa  $\mathbb{R}^3$  vektör uzayı,  $\mathbb{R}$  üzerinde bir Lie cebiri yapısı belirtir. Gerçekten,

$$[kx, y] = (kx) \wedge y = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ kx_1 & kx_2 & kx_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = k(x \wedge y) = k[x, y]$$

$$\begin{aligned} [x + y, z] &= (x + y) \wedge z = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & x_3 + y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = x \wedge z + y \wedge z = [x, z] + [y, z] \end{aligned}$$

Ayrıca

$$[x, ky] = x \wedge (ky) = k(x \wedge y) = k[x, y]$$

ve

$$[x, y + z] = x \wedge (y + z) = x \wedge y + x \wedge z = [x, y] + [x, z]$$

olduğu da benzer şekilde görülür. Bunun yanında

$$[y, x] = y \wedge x = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = -x \wedge y = -[x, y]$$

olduğu da görölmektedir. Jacobi özdeşliğini görmek için

$$\begin{aligned} [x, [y, z]] &= [(x_1, x_2, x_3), (y_2z_3 - y_3z_2, y_3z_1 - y_1z_3, y_1z_2 - y_2z_1)] \\ &= (x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3), x_3(y_2z_3 - y_3z_2) \\ &\quad - x_1(y_1z_2 - y_2z_1), x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2)) \\ &= (x_2y_1z_2 - x_2y_2z_1 - x_3y_3z_1 + x_3y_1z_3, x_3y_2z_3 - x_3y_3z_2 - x_1y_1z_2 \\ &\quad + x_1y_2z_1, x_1y_3z_1 - x_1y_1z_3 - x_2y_2z_3 + x_2y_3z_2) \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} [y, [z, x]] &= (y_2z_1x_2 - y_2z_2x_1 - y_3z_3x_1 + y_3z_1x_3, y_3z_2x_3 - y_3z_3x_2 - y_1z_1x_2 \\ &\quad + y_1z_2x_1, y_1z_3x_1 - y_1z_1x_3 - y_2z_2x_3 + y_2z_3x_2) \end{aligned}$$

ve

$$[z, [x, y]] = (z_2x_1y_2 - z_2x_2y_1 - z_3x_3y_1 + z_3x_1y_3, z_3x_2y_3 - z_3x_3y_2 - z_1x_1y_2 \\ + z_1x_2y_1, z_1x_3y_1 - z_1x_1y_3 - z_2x_2y_3 + z_2x_3y_2)$$

olup bu vektörlerin toplanmasıyla

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = (0,0,0)$$

bulunur.

**Not:** Antisimetri özelliğinden dolayı, bir  $\mathfrak{y}$   $\mathbb{K}$ -Lie cebirinin değışmeli olması demek her  $y, z \in \mathfrak{y}$  için  $[y, z] = [z, y] = -[y, z]$ , yani  $[y, z] = -[y, z]$  olması demektir. Eğer  $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$  ise  $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$  cisminde her eleman kendisinin toplamsal tersi olduğundan bu durum her zaman sağlanır. Eğer  $\mathbb{K} \neq \mathbb{Z}_2$  ise  $\mathfrak{y}$  Lie cebirinin değışmeli olmasının anlamı her  $y, z \in \mathfrak{y}$  için  $[y, z] = 0$  olmasıdır.

**Tanım 2.9 (Alt Lie Cebiri):**  $\mathfrak{y}$  bir  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri ve  $\mathfrak{z}$ ,  $\mathfrak{y}$ 'nin bir alt kümesi olsun. Eğer her  $\alpha \in \mathbb{K}$  ve her  $z, z' \in \mathfrak{z}$  için  $\alpha z \in \mathfrak{z}$ ,  $z + z' \in \mathfrak{z}$  ve  $[z, z'] \in \mathfrak{z}$  oluyorsa,  $\mathfrak{z}$ 'ye  $\mathfrak{y}$ 'nin bir **alt Lie cebiri** (*İng.* Lie subalgebra) denir ve bu durum  $\mathfrak{z} \leq \mathfrak{y}$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.10 (İdeal):**  $\mathfrak{y}$  bir  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri ve  $\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{y}$ 'nin bir alt Lie cebiri olsun. Eğer her  $y \in \mathfrak{y}$  ve her  $i \in \mathfrak{i}$  için  $[y, i] \in \mathfrak{i}$  oluyorsa  $\mathfrak{i}$ 'ye  $\mathfrak{y}$ 'nin bir **ideali** (*İng.* ideal) denir ve bu durum  $\mathfrak{z} \trianglelefteq \mathfrak{y}$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.11 (Lie Cebir Homomorfizmi):**  $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$  iki  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri olmak üzere eğer bir  $f: \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{z}$  fonksiyonu her  $\alpha \in \mathbb{K}$ , her  $y, y' \in \mathfrak{y}$  için

$$f(\alpha y) = \alpha f(y)$$

$$f(y + y') = f(y) + f(y')$$

$$f([y, y']) = [f(y), f(y')]$$

olmasını sağlıyorsa  $f$ 'e bir **Lie cebir homomorfizmi** (*İng.* Lie algebra homomorphism) denir. Özel olarak  $f$  birebir ve örten ise  $f$ 'e bir **Lie cebir izomorfizmi** (*İng.* Lie algebra isomorphism) denir. Aralarında bir Lie cebir izomorfizmi tanımlanabilen Lie cebirlerinin **izomorf** (*İng.* isomorphic) denir. Eğer  $\mathfrak{y}$  ve  $\mathfrak{z}$  Lie cebirleri izomorf ise bu durum  $\mathfrak{y} \cong \mathfrak{z}$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 2.12 (Çekirdek ve Görüntü):**  $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$  iki  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri ve  $f: \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{z}$  bir Lie cebir homomorfizmi olmak üzere

$$\text{çek } f = \{y \in \mathfrak{y} : f(y) = 0_{\mathfrak{z}}\}$$

$$\text{gör } f = \{f(y) : y \in \mathfrak{y}\}$$

kümelerine sırasıyla  $f$ 'in çekirdeği (*İng.* kernel) ve görüntüsü (*İng.* image) denir.

**Tanım 2.13:**  $\mathfrak{y}$  bir Lie cebiri  $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{y}$  olmak üzere  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  ve  $\mathfrak{ij}$  kümeleri

$$\mathfrak{i} + \mathfrak{j} = \{a + b \mid a \in \mathfrak{i}, b \in \mathfrak{j}\}$$

$$\mathfrak{ij} = \{[a, b] \mid a \in \mathfrak{i}, b \in \mathfrak{j}\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca,  $\{\mathfrak{i}_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $\mathfrak{y}$ 'nin alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{i}_{\lambda}$$

kümesi

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{i}_{\lambda} = \{a_{\lambda_1} + \dots + a_{\lambda_n} \mid a_{\lambda_1} \in \mathfrak{i}_{\lambda_1}, \dots, a_{\lambda_n} \in \mathfrak{i}_{\lambda_n}, \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq \Lambda\}$$

şeklinde tanımlanır.

**Önerme 2.14:**  $\mathfrak{y}$  bir Lie cebiri olsun.

a)  $\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{y}$ 'nin bir ideali,  $\mathfrak{j}$ ,  $\mathfrak{y}$ 'nin bir Lie alt cebiri ise,  $\mathfrak{i} + \mathfrak{j}$  ve  $\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$  de  $\mathfrak{y}$ 'nin bir Lie alt cebiridir.

b)  $\{\mathfrak{i}_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ ,  $\mathfrak{y}$ 'nin ideallerinin bir ailesi ise,

$$\sum_{\lambda} \mathfrak{i}_{\lambda} \text{ ve } \bigcap_{\lambda} \mathfrak{i}_{\lambda}$$

da  $\mathfrak{y}$ 'nin bir idealidir.

**Önerme 2.15:**  $\mathfrak{y}$  ve  $\mathfrak{z}$  birer  $\mathbb{K}$  – Lie cebiri,

$$\varphi : \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{z}$$

bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebir homomorfizmi olsun. Bu durumda çek  $\varphi$ ,  $\mathfrak{y}$ 'nin bir idealidir ve gör  $\varphi$   $\mathfrak{y}$ 'nin bir alt Lie cebiridir.

**İspat:**  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $k, k_1, k_2 \in \text{çek } \varphi$  ve  $y \in \mathfrak{y}$  olsun. Bu durumda

$$\varphi(\alpha k) = \alpha \varphi(k) = \alpha 0_{\mathfrak{z}} = 0_{\mathfrak{z}}$$

olup  $\alpha k \in \text{çek } \varphi$ 'dir.  $k_1, k_2 \in \text{çek } \varphi$  olduğundan

$$\varphi(k_1 + k_2) = \varphi(k_1) + \varphi(k_2) = 0_{\mathfrak{z}} + 0_{\mathfrak{z}} = 0_{\mathfrak{z}}$$

olup  $k_1 + k_2 \in \text{çek } \varphi$ 'dir. Ayrıca

$$\varphi([y, k]) = [\varphi(y), \varphi(k)] = [\varphi(y), 0_{\mathfrak{z}}] = 0_{\mathfrak{z}}$$

olduğundan  $[y, k] \in \mathfrak{z}$  çek  $\varphi$  olur ve dolayısıyla çek  $\varphi \leq \mathfrak{z}$  'dir.

$\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $g, g_1, g_2 \in \mathfrak{g}$  gör  $\varphi$  olsun.

$$g = \varphi(y), g_1 = \varphi(y_1), g_2 = \varphi(y_2)$$

olacak şekilde  $y, y_1, y_2 \in \mathfrak{y}$  vardır. Buradan

$$\alpha g = \alpha \varphi(y) = \varphi(\alpha y)$$

$$g_1 + g_2 = \varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \varphi(y_1 + y_2)$$

olduğundan  $\alpha g, g_1 + g_2 \in \mathfrak{g}$  gör  $\varphi$  dir. Ayrıca

$$[g_1, g_2] = [\varphi(y_1), \varphi(y_2)] = \varphi([y_1, y_2])$$

olması da sağlandığından gör  $\varphi \leq \mathfrak{z}$  olur.

**Tanım 2.16 (Bölüm Lie Cebiri):**  $\mathfrak{y}$  bir  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri ve  $\mathfrak{i} \leq \mathfrak{y}$  olsun. Her  $y \in \mathfrak{y}$  için

$$y + \mathfrak{i} := \{y + i : i \in \mathfrak{i}\}$$

şeklinde tanımlanan kümeler **yan sınıf** (*İng.* coset) denir.  $\mathfrak{i}$  ideali için bütün yan sınıfların kümesi olan

$$\mathfrak{y}/\mathfrak{i} := \{y + \mathfrak{i} : y \in \mathfrak{y}\}$$

kümesine de **bölüm kümesi** (*İng.* quotient set) adı verilir. Her  $\alpha \in \mathbb{K}$  ve  $y, y_1, y_2 \in \mathfrak{y}$  için  $\mathfrak{y}/\mathfrak{i}$  kümesine; kümelerin cebirsel toplamı, skalerle çarpımı ve Lie çarpımı ile birlikte bir **bölüm Lie cebiri** (*İng.* quotient Lie algebra) denir.

Yukarıda tanımlanan bölüm Lie cebiri, kümeler arasındaki cebirsel işlemlere göre bir  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri olup, bu cebir üzerindeki işlemler için

$$(y_1 + \mathfrak{i}) + (y_2 + \mathfrak{i}) = y_1 + y_2 + \mathfrak{i}$$

$$\alpha(y + \mathfrak{i}) = \alpha y + \mathfrak{i}$$

$$[y_1 + \mathfrak{i}, y_2 + \mathfrak{i}] = [y_1, y_2] + \mathfrak{i}$$

özdeşlikleri vardır. Ayrıca

$$y_1 + \mathfrak{i} = y_2 + \mathfrak{i} \Leftrightarrow y_1 - y_2 \in \mathfrak{i}$$

$$y + \mathfrak{i} \in \mathfrak{y}/\mathfrak{i} \Leftrightarrow y \in \mathfrak{i}$$

denklikleri de sağlanır.

**Teorem 2.17 (Lie Cebirler için 1. İzomorfizm Teoremi):**  $\mathfrak{y}$ ,  $\mathfrak{z}$  birer  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri,

$$\varphi : \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{z}$$

Lie cebir homomorfizmi ise

$$\mathfrak{y}/\text{çek } \varphi \cong \text{gör } \varphi$$

olur.

**İspat:**  $\phi : \mathfrak{y}/\text{çek } \varphi \rightarrow \text{gör } \varphi$  fonksiyonu

$$\phi(y + \text{çek } \varphi) = \varphi(y)$$

olarak tanımlansın.

**İyi Tanımlılık:**  $\forall y_1, y_2 \in \mathfrak{y}$  için

$$\begin{aligned} y_1 + \text{çek } \varphi = y_2 + \text{çek } \varphi &\Rightarrow y_1 - y_2 \in \text{çek } \varphi \\ &\Rightarrow \varphi(y_1 - y_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(y_1) - \varphi(y_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(y_1) = \varphi(y_2) \\ &\Rightarrow \phi(y_1 + \text{çek } \varphi) = \phi(y_2 + \text{çek } \varphi) \end{aligned}$$

**Birebirlik:**  $\forall y_1, y_2 \in \mathfrak{y}$  için

$$\begin{aligned} \phi(y_1 + \text{çek } \varphi) = \phi(y_2 + \text{çek } \varphi) &\Rightarrow \varphi(y_1) = \varphi(y_2) \\ &\Rightarrow \varphi(y_1) - \varphi(y_2) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi(y_1 - y_2) = 0 \\ &\Rightarrow y_1 - y_2 \in \text{çek } \varphi \\ &\Rightarrow y_1 + \text{çek } \varphi = y_2 + \text{çek } \varphi \end{aligned}$$

**Örtenlik:**  $g \in \text{gör } \varphi$  olsun.

$$\varphi(y) = g$$

olacak şekilde  $y \in \mathfrak{y}$  vardır.

$$y + \text{çek } \varphi \in \mathfrak{y}/\text{çek } \varphi$$

elemanını ele alırsak

$$\phi(y + \text{çek } \varphi) = \varphi(y) = g$$

olur.

**Homomorfizm:**  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, y, y_1, y_2 \in \mathfrak{y}$  için

$$\begin{aligned} \phi(\alpha(y + \text{çek } \varphi)) &= \phi(\alpha y + \text{çek } \varphi) \\ &= \varphi(\alpha y) \\ &= \alpha \varphi(y) \\ &= \alpha \phi(y + \text{çek } \varphi) \\ \phi(y_1 + \text{çek } \varphi + y_2 + \text{çek } \varphi) &= \phi(y_1 + y_2 + \text{çek } \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi(y_1 + y_2) \\
&= \varphi(y_1) + \varphi(y_2) \\
&= \phi(y_1 + \text{çek } \varphi) + \phi(y_2 + \text{çek } \varphi) \\
\phi([y_1 + \text{çek } \varphi, y_2 + \text{çek } \varphi]) &= \phi([y_1, y_2] + \text{çek } \varphi) \\
&= \varphi([y_1, y_2]) \\
&= [\varphi(y_1), \varphi(y_2)] \\
&= [\phi(y_1 + \text{çek } \varphi), \phi(y_2 + \text{çek } \varphi)].
\end{aligned}$$

**Önerme 2.18:**  $\mathfrak{y}$  bir  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri,  $\mathfrak{j} \leq \mathfrak{i} \leq \mathfrak{y}$  ve  $\mathfrak{j} \leq \mathfrak{y}$  ise,  $\mathfrak{j} \leq \mathfrak{i}$  ve  $\mathfrak{i}/\mathfrak{j} \leq \mathfrak{y}/\mathfrak{j}$ 'dir.

**İspat:**  $j \in \mathfrak{j}$  ve  $i \in \mathfrak{i}$  olsun.  $\mathfrak{j} \leq \mathfrak{y}$  ve  $i \in \mathfrak{y}$  olduğu  $[j, i] \in \mathfrak{j}$  olur. Böylece  $\mathfrak{j} \leq \mathfrak{i}$ 'dir.

$\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{y}$  olduğundan  $\mathfrak{i}/\mathfrak{j} \subseteq \mathfrak{y}/\mathfrak{j}$ 'dir.

$$i_1 + \mathfrak{j}, i_2 + \mathfrak{j} \in \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$$

ise  $i_1, i_2 \in \mathfrak{i}$  olup  $i_1 + i_2 \in \mathfrak{i}$  olmasından

$$(i_1 + \mathfrak{j}) + (i_2 + \mathfrak{j}) = i_1 + i_2 + \mathfrak{j} \in \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$$

olur.  $\forall i \in \mathfrak{i}, \alpha \in \mathbb{K}$  için  $\alpha i \in \mathfrak{i}$  olmasından  $\alpha i + \mathfrak{j} \in \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$  olur.  $\alpha i + \mathfrak{j} = \alpha(i + \mathfrak{j})$  olduğu

da dikkate alınırsa her  $i + \mathfrak{j} \in \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$  ve  $\alpha \in \mathbb{K}$  için  $\alpha(i + \mathfrak{j}) \in \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$  olduğu görülmüş olur.

$i \in \mathfrak{i}, y \in \mathfrak{y}$  olmak üzere  $i + \mathfrak{j} \in \mathfrak{i}/\mathfrak{j}, y + \mathfrak{j} \in \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$  için

$$[i + \mathfrak{j}, y + \mathfrak{j}] = [i, y] + \mathfrak{j}$$

ve  $[i, y] \in \mathfrak{i}$  olduğundan

$$[i + \mathfrak{j}, y + \mathfrak{j}] \in \mathfrak{i}/\mathfrak{j}$$

olur. Böylece  $\mathfrak{i}/\mathfrak{j} \leq \mathfrak{y}/\mathfrak{j}$  olur.

**Teorem 2.19 (Lie Cebirler için 2. İzomorfizm Teoremi):**  $\mathfrak{y}$  bir  $\mathbb{K}$ -Lie cebiri,  $\mathfrak{j} \leq \mathfrak{i} \leq \mathfrak{y}$  ve  $\mathfrak{j} \leq \mathfrak{y}$  ise,

$$\mathfrak{y}/\mathfrak{j} / \mathfrak{i}/\mathfrak{j} \cong \mathfrak{y}/\mathfrak{i}$$

olur.

**İspat:** Verilenler altında

$$\varphi: \mathcal{Y}/\mathcal{J}/\mathcal{I}/\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{Y}/\mathcal{I}$$

$$\varphi(y + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J}) = y + \mathcal{I}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

**İyi Tanımlılık:**  $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$  için

$$y_1 + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J} = y_2 + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J}$$

ise

$$(y_1 + \mathcal{J}) - (y_2 + \mathcal{J}) \in \mathcal{I}/\mathcal{J}$$

yani

$$y_1 - y_2 + \mathcal{J} \in \mathcal{I}/\mathcal{J}$$

olur. Bu durumda,

$$y_1 - y_2 + \mathcal{J} = \mathcal{I} + \mathcal{J}$$

olacak şekilde en az bir  $i \in \mathcal{I}$  vardır. Buradan

$$y_1 - y_2 - i \in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$$

olmasından

$$y_1 - y_2 = (y_1 - y_2 - i) + i \in \mathcal{I} \Rightarrow y_1 + \mathcal{I} = y_2 + \mathcal{I}$$

$$\Rightarrow \varphi(y_1 + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J}) = \varphi(y_2 + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J}).$$

**Birebirlik:**  $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$  için

$$\varphi(y_1 + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J}) = \varphi(y_2 + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J}) \Rightarrow y_1 + \mathcal{I} = y_2 + \mathcal{I}$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 \in \mathcal{I}$$

$$\Rightarrow y_1 - y_2 + \mathcal{J} \in \mathcal{I}/\mathcal{J}$$

$$\Rightarrow (y_1 + \mathcal{J}) - (y_2 + \mathcal{J}) \in \mathcal{I}/\mathcal{J}$$

$$\Rightarrow y_1 + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J} = y_2 + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J}$$

**Örtenlik:**  $y \in \mathcal{Y}$  olmak üzere,  $y + \mathcal{I} \in \mathcal{Y}/\mathcal{I}$  olsun. Bu durumda

$$y + \mathcal{J} + \mathcal{I}/\mathcal{J} \in \mathcal{Y}/\mathcal{J}/\mathcal{I}/\mathcal{J}$$

olup

$$\varphi(y + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}) = y + \mathfrak{i}$$

elde edilir.

**Homomorfizm:**  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, y, y_1, y_2 \in \mathfrak{y}$  için

$$\begin{aligned} \varphi\left(\alpha\left(y + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right)\right) &= \varphi(\alpha y + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}) \\ &= \alpha y + \mathfrak{j} \\ &= \alpha(y + \mathfrak{j}) \\ &= \alpha\varphi\left(y + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left(y_1 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j} + y_2 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right) &= \varphi\left(y_1 + y_2 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right) \\ &= y_1 + y_2 + \mathfrak{i} \\ &= y_1 + \mathfrak{i} + y_2 + \mathfrak{i} \\ &= \varphi\left(y_1 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right) + \varphi\left(y_2 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi\left([y_1 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}, y_2 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}]\right) &= \varphi\left([y_1, y_2] + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right) \\ &= [y_1, y_2] + \mathfrak{i} \\ &= [y_1 + \mathfrak{i}, y_2 + \mathfrak{i}] \\ &= \left[\varphi\left(y_1 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right), \varphi\left(y_2 + \mathfrak{j} + \mathfrak{i}/\mathfrak{j}\right)\right]. \end{aligned}$$

**Teorem 2.20 (Lie Cebirleri için 3. İzomorfizm Teoremi):**  $\mathfrak{j} \leq \mathfrak{y}, \mathfrak{i} \trianglelefteq \mathfrak{y}$  ise

$$\mathfrak{j}/\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j} \cong \mathfrak{i} + \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$$

izomorfizmi vardır.

**İspat:**  $\varphi(\mathfrak{j} + \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}) = \mathfrak{j} + \mathfrak{i}$  ile tanımlı

$$\varphi: \mathfrak{j}/\mathfrak{i} \cap \mathfrak{j} \rightarrow \mathfrak{i} + \mathfrak{j}/\mathfrak{i}$$

fonksiyonunu ele alalım.

**İyi Tanımlılık:**  $\forall y_1, y_2 \in \mathfrak{y}$  için

$$y_1 + \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j} = y_2 + \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$$

olsun. Bu durumda

$$y_1 - y_2 \in \mathfrak{i} \cap \mathfrak{j}$$

olup

$$y_1 - y_2 \in \mathfrak{i}$$

dır. Buradan,

$$y_1 + i = y_2 + i$$

olup

$$\varphi(y_1 + i \cap j) = \varphi(y_2 + i \cap j)$$

elde edilir.

**Birebirlik:**  $\forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$  için

$$\begin{aligned}\varphi(y_1 + i \cap j) = \varphi(y_2 + i \cap j) &\Rightarrow y_1 + i = y_2 + i \\ &\Rightarrow y_1 - y_2 \in i\end{aligned}$$

olur. Ayrıca  $y_1, y_2 \in j$  olduğundan  $y_1 - y_2 \in j$  olur.

Dolayısıyla  $y_1 - y_2 \in i \cap j$  olup

$$y_1 + i \cap j = y_2 + i \cap j$$

**Örtenlik:**  $i \in i, j \in j$  olmak üzere,  $i + j + i \in i + j/i$  olsun.

$i \in i$  olduğundan,

$$i + j + i = i + i + j + i = i + j + i = j + i$$

olur.

Ayrıca,  $j + i \cap j \in j/i \cap j$  için

$$\varphi(j + i \cap j) = j + i = i + j + i$$

olur.

**Homomorfizm:**  $\forall \alpha \in \mathbb{K}, y, y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$  için

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha(y + i \cap j)) &= \varphi(\alpha y + i \cap j) \\ &= \alpha y + i \\ &= \alpha(y + i) \\ &= \alpha\varphi(y + i \cap j)\end{aligned}$$

$\forall y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$  için

$$\begin{aligned}\varphi(y_1 + i \cap j + y_2 + i \cap j) &= \varphi(y_1 + y_2 + i \cap j) \\ &= y_1 + y_2 + i \\ &= y_1 + i + y_2 + i \\ &= \varphi(y_1 + i \cap j) + \varphi(y_2 + i \cap j) \\ \varphi([y_1 + i \cap j, y_2 + i \cap j]) &= \varphi([y_1, y_2] + i \cap j) \\ &= [y_1, y_2] + i \\ &= [y_1 + i, y_2 + i] \\ &= [\varphi(y_1 + i \cap j), \varphi(y_2 + i \cap j)]\end{aligned}$$

### 3. LİE CEBİRLERİN ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLÜ

Bu bölümde, Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerine ön hazırlık olarak Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri ile ilgili genel literatür bilgisi (İşler, N., 2022) kaynağından derlenerek verilmiştir.

#### 3.1. Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülü

**Tanım 3.1.1 :**  $\mathfrak{y}$  bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebiri ve  $\mathfrak{s}$  bir  $\mathfrak{y}$  – Lie cebiri olsun.

$$d : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{y}$$

$\mathbb{K}$  – Lie cebir homomorfizmi verilsin. Bu durumda homomorfizm olma şartlarından,  $\forall k \in \mathbb{K}, \forall s_1, s_2 \in \mathfrak{s}$  ve  $\forall y \in \mathfrak{y}$  için

- (i)  $d(s_1 + s_2) = d(s_1) + d(s_2)$
- (ii)  $d([s_1, s_2]) = [d(s_1), d(s_2)]$
- (iii)  $d(ks_1) = kd(s_1)$

sağlanmakta olup bunun yanında

$$\cdot : \mathfrak{y} \times \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}$$

dış işlemi

**CM1)** Her  $y \in \mathfrak{y}$  ve her  $s \in \mathfrak{s}$  için

$$d(y \cdot s) = [y, d(s)]$$

**CM2)** Her  $s_1, s_2 \in \mathfrak{s}$  için

$$d(s_1) \cdot s_2 = [s_1, s_2]$$

şartlarını sağlıyorsa  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  üçlüsüne bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebir çaprazlanmış modülü denir.

**Tanım 3.1.2 (Lie cebir çaprazlanmış modül homomorfizmi):**

$(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  ve  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', d')$  iki  $\mathbb{K}$  – Lie cebir çaprazlanmış modülü olsun ve

$$(\theta, \sigma) : (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d) \rightarrow (\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', d')$$

dönüşüm çifti verilsin.

- (i)  $\theta : \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{s}'$  bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebir homomorfizmi
- (ii)  $\sigma : \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{y}'$  bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebir homomorfizmi
- (iii)  $\theta(y \cdot s) = \sigma(y) \cdot \theta(s)$

şartları sağlanıyor ve

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{s} & \xrightarrow{\theta} & \mathfrak{s}' \\
d \downarrow & & \downarrow d' \\
\mathfrak{y} & \xrightarrow{\sigma} & \mathfrak{y}'
\end{array}$$

diyagramı değişmeli ise, yani  $d'\theta = \sigma d$  oluyorsa,  $(\theta, \sigma)$  ikilisine bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebir çaprazlanmış modül homomorfizmi denir.

**Örnek 3.1.3:**  $\mathfrak{i}, \mathfrak{s}$ 'nin ideali ve  $d: \mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{y}$  içerme dönüşümü olsun. Bu durumda  $(\mathfrak{i}, \mathfrak{s}, d)$  Lie cebirlerinin bir çaprazlanmış modülüdür.

Her  $k \in \mathbb{K}$  ve  $i, i_1, i_2 \in \mathfrak{i}$  için

$$d: \mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{s}$$

$$d(i_1 + i_2) = i_1 + i_2 = d(i_1) + d(i_2)$$

$$d([i_1, i_2]) = [i_1, i_2] = [d(i_1), d(i_2)]$$

$$d(ki) = ki = kd(i)$$

olduğundan  $d$  bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebir homomorfizimidir.

$$\cdot : \mathfrak{y} \times \mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{i}$$

$$y \cdot i = [y, i]$$

etkisini tanımlayabiliriz. Çünkü  $\mathfrak{i}, \mathfrak{y}$ 'nin ideali olduğundan  $[y, i] \in \mathfrak{i}$ 'dir ve böylece  $\mathfrak{y}$ 'nin  $\mathfrak{i}$  üzerine bir etkisi verilmiş olur. Burada, her  $y \in \mathfrak{y}$  ve  $i, i_1, i_2 \in \mathfrak{i}$  için

$$\text{CM1) } d(y \cdot i) = d([y, i]) = [y, i] = [y, d(i)]$$

$$\text{CM2) } d(i_1) \cdot i_2 = [d(i_1), i_2] = [i_1, i_2]$$

Böylece  $(\mathfrak{i}, \mathfrak{y}, d)$  bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebir çaprazlanmış modüldür.

**Önerme 3.1.4:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$   $\mathbb{K}$  – Lie cebirlerin bir çaprazlanmış modülü ise gör  $d, \mathfrak{y}$ 'nin bir idealidir.

**İspat:**  $i_1, i_2 \in \mathfrak{i}$  gör  $d$  olsun. Bu durumda  $i_1 = ds_1, i_2 = ds_2$  olacak şekilde  $s_1, s_2 \in \mathfrak{s}$  vardır. Buradan

$$i_1 - i_2 = ds_1 - ds_2 = d(s_1 - s_2), s_1 - s_2 \in \mathfrak{s}$$

olup  $i_1 - i_2 \in \mathfrak{i}$  gör  $d$  elde edilir.

$i \in \mathfrak{i}$  gör  $d$  ve  $k \in \mathbb{K}$  olsun.  $ds = i$  olacak şekilde  $s \in \mathfrak{s}$  vardır. Buradan

$$ki = kds = d(ks), ks \in \mathfrak{s}$$

olduğundan  $ki \in \text{gör } d$ 'dir.

$i \in \text{gör } d$  ve  $y \in \mathfrak{y}$  olsun.  $ds = i$  olacak şekilde  $s \in \mathfrak{s}$  vardır.

ve

$$[y, i] = [y, ds] = d(y \cdot s), y \cdot s \in \mathfrak{s}$$

olduğundan  $[y, i] \in \text{gör } d$ 'dir. Dolayısıyla  $d, \mathfrak{s}$ 'nin bir idealidir.

**Önerme 3.1.5:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olmak üzere çek  $d, \mathfrak{s}$ 'nin bir idealidir.

**İspat:**  $\forall s_1, s_2 \in \text{çek } d$  olsun.  $ds_1 = ds_2 = 0_{\mathfrak{y}}$  ve

$$d(s_1 - s_2) = ds_1 - ds_2 = 0_{\mathfrak{y}} - 0_{\mathfrak{y}} = 0_{\mathfrak{y}}$$

olduğundan  $s_1 - s_2 \in \text{çek } d$  olur.  $\forall s \in \text{çek } d$  ve  $\forall k \in \mathbb{K}$  için  $ds = 0_{\mathfrak{y}}$  olup

$$d(ks) = kds = k0_{\mathfrak{y}} = 0_{\mathfrak{y}}$$

elde edilir.  $\forall s \in \text{çek } d$  ve  $\forall s' \in \mathfrak{s}$  için  $ds = 0_{\mathfrak{s}}$  olup

$$d[s, s'] = [ds, ds'] = [0_{\mathfrak{y}}, ds'] = 0_{\mathfrak{y}}$$

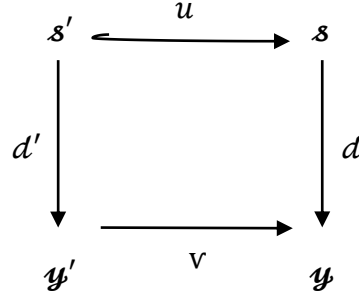
elde edilir. Böylece çek  $d, \mathfrak{s}$ 'nin bir idealidir.

### 3.2. Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modüllerinin Alt Çaprazlanmış Modülü ve İdeali

Bu alt bölümde, Lie cebirlerinin alt çaprazlanmış modüllerinin ve ideallerinin tanımına ve bunlarla ilgili özelliklere yer verilmiştir.

**Tanım 3.2.1:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$ ,  $\mathbb{K}$ -Lie cebirlerinin bir çaprazlanmış modülü olsun.  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$ 'nin bir  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', d')$  alt çaprazlanmış modülü şu şekilde tanımlanır.

- i)  $\mathfrak{s}'$ ,  $\mathfrak{s}$ 'nin alt cebiri ve  $\mathfrak{y}'$ ,  $\mathfrak{y}$ 'nin alt cebiridir.
- ii)  $\mathfrak{y}'$ 'nin  $\mathfrak{s}'$  üzerine etkisi,  $\mathfrak{y}$ 'nin,  $\mathfrak{s}$  üzerine etkisinin kısıtlanmışdır.
- iii)  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', d')$  bir çaprazlanmış  $\mathfrak{y}'$  - modülüdür.
- iv) Çaprazlanmış modüllerin homomorfizmlerinin



diyagramı,  $u$  ve  $v$  içermeye dönüşümlerini göstermek üzere değişmelidir.

Eğer  $(s', y', d')$ ,  $(s, y, d)$ 'nin bir alt çaprazlanmış modülü ise bu durum kısaca  $(s', y', d') \leq (s, y, d)$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 3.2.2:**  $i, y$ 'nin bir ideali olsun.  $I_y$  birim dönüşümü ve  $\iota : i \rightarrow y$  içermeye dönüşümü olmak üzere  $y$ 'nin  $i$  üzerine  $\forall y \in y$  ve  $\forall i \in i$  için  $y \cdot i = [y, i]$  ile tanımlanan etki ile birlikte  $(i, y, \iota)$  çaprazlanmış modülü  $(y, y, I_y)$  çaprazlanmış modülünün bir alt çaprazlanmış modülüdür. Gerçekten,  $\forall y \in y$  ve  $\forall i, j \in i$  için,

$$\text{CM1) } \iota(y \cdot i) = y \cdot i = [y, i] = [y, \iota(i)]$$

$$\text{CM2) } \iota(i) \cdot j = i \cdot j = [i, j]$$

olduğu görülür

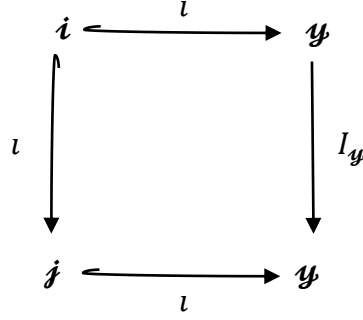
**Tanım 3.2.3:**  $(s', y', d')$ ,  $(s, y, d)$ 'nin bir alt çaprazlanmış modülü olmak üzere eğer  $\forall s \in s, s' \in s', y, y_1, y_2 \in y, y' \in y'$  aşağıdakiler sağlanıyorsa  $(s', y', d')$ ,  $(s, y, d)$ 'nin bir idealidir denir ve bu durum kısaca  $(s', y', d') \trianglelefteq (s, y, d)$  şeklinde gösterilir.

- i)  $[y, y'] \in y$ , yani  $y', y$ 'nin idealidir,
- ii)  $[y', s] \in s'$ ,
- iii)  $[y, s'] \in s'$

**Uyarı 3.2.4:**  $(s', y', d')$ ,  $(s, y, d)$ 'nin bir ideali ise,  $s'$  nün de  $s$ ' nin bir ideali olduğuna dikkat edelim. Gerçekten  $\forall s \in s, s' \in s'$  ise  $[s, s'] = d'(s) \cdot s' = d(s) \cdot s' \in s'$ .

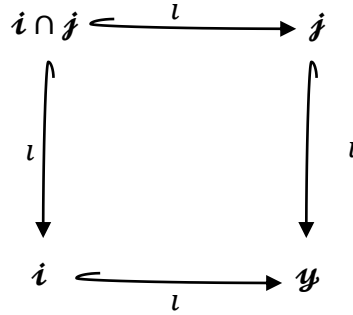
**Örnek 3.2.5:** Kendi üzerine Lie parantaziyle yaptığı etki ile birlikte  $(y, y, I_y)$  çaprazlanmış modülünü ele alalım.  $i$  ve  $j, y$ 'nin ideali ve  $i \subseteq j$  olmak üzere  $(i, j, \iota)$  çaprazlanmış modülü  $(y, y, I_y)$ 'nin bir idealidir. Gerçekten,  $i, y$ 'nin ideali olduğu için aynı zamanda  $i, j$ 'nin

de idealidir ve böylece  $j$   $i$ 'ye de etki yapar. Bu nedenlerden dolayı  $(i, j, \iota)$ ,  $(y, y, I_y)$  nin bir ideali olur.



**Örnek 3.2.6:**  $i, y$  Lie cebirinin bir ideali ise,  $(i, i, I_i)$  çaprazlanmış modülü de  $(y, y, I_y)$ 'nin bir idealidir. Gerçekten, bir önceki örnekte  $j$  yerine  $i$  alırsak  $(i, i, I_i)$ ,  $(y, y, I_y)$ 'nin bir ideali olur.

**Örnek 3.2.7:**  $i$  ve  $j, y$ 'nin idealleri olsun. Bu durumda,  $(i \cap j, i, \iota)$ ,  $(j, y, \iota)$ 'nin ideali ve  $(i \cap j, j, \iota)$ ,  $(i, y, \iota)$ 'nin idealidir. Gerçekten,  $i \cap j, j$ 'nin ideali olduğundan alt cebiridir ve  $i, y$ 'nin ideali olduğundan alt halkasıdır.  $i, i \cap j$  üzerine,  $y$ 'nin  $j$  üzerine yaptığı gibi etkide bulunur.  $(i \cap j, i, \iota)$  üçlüsü  $i \cap j, i$ 'nin ideali olduğu için bir çaprazlanmış modüldür ve açık olarak



diyagramı değişmelidir.

Böylece  $(i \cap j, i, \iota)$  çaprazlanmış modülü  $(j, y, \iota)$ 'nin bir alt çaprazlanmış modülü olur.  $j(i \cap j) \subseteq i \cap j$  ve  $i, y$ 'nin idealidir. Ayrıca  $i$  ve  $j, y$ 'nin ideali olduklarından  $ij \subseteq i, ij \subseteq j$  ve  $ij \subseteq i \cap j$  olur.  $i \cap j$  de  $y$ 'nin ideali olduğundan  $y(i \cap j) \subseteq i \cap j$ 'dir. Dolayısıyla buradan  $(i \cap j, i, \iota)$ ,  $(j, y, \iota)$ 'nin idealidir.

Diğer taraftan  $(i \cap j, j, \iota)$ ,  $(i, y, \iota)$ 'nin bir alt çaprazlanmış modülü olduğundan  $i(i \cap j) \subseteq i \cap j$ 'dir. Hem  $i$  hem de  $j, y$ 'nin ideali olduklarından  $ij \subseteq i, ij \subseteq j$  ve böylece

$ij \subseteq i \cap j$  elde edilir. Burada  $i \cap j, \mathfrak{y}$ 'nin ideali olacağından  $\mathfrak{y}(i \cap j) \subseteq i \cap j$ 'dir. Dolayısıyla buradan  $(i \cap j, j, \iota) \preceq (i, \mathfrak{y}, \iota)$  olduğu elde edilir.

**Önerme 3.2.8:** i)  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  çaprazlanmış modülünün alt çaprazlanmış modüllerinin herhangi bir  $\{(i_\lambda, j_\lambda, d_\lambda)\}$  ailesinin kesişimi de bir alt çaprazlanmış modüldür.

ii)  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  çaprazlanmış modülünün ideallerinin herhangi bir  $\{(i_\lambda, j_\lambda, d_\lambda)\}$  ailesinin kesişimi de bir idealdir.

**İspat:** i) Her  $\lambda$  için  $i_\lambda, \mathfrak{s}$ 'nin alt cebiri olduğundan  $\cap i_\lambda$  de  $\mathfrak{s}$ 'nin alt cebiridir. Ayrıca  $j_\lambda$ 'lar de  $\mathfrak{y}$ 'nin alt halkası olduğundan  $\cap j_\lambda$  da  $\mathfrak{y}$ 'nin alt halkasıdır.  $j \in \cap j_\lambda, i \in \cap i_\lambda$  olsun. Böylece her  $\lambda$  için  $j \in j_\lambda$  ve  $i \in i_\lambda$  olduğundan  $j \cdot i \in i_\lambda$  olur ki, buradan  $j \cdot i \in \cap i_\lambda$  bulunur. Her bir  $(i_\lambda, j_\lambda, d_\lambda)$  bir çaprazlanmış modül olduğundan

$$\text{CM1) } \forall i \in \cap i_\lambda, \forall j \in \cap j_\lambda \text{ için } d(j \cdot i) = [j, di]$$

$$\text{CM2) } \forall i_1, i_2 \in \cap i_\lambda \text{ için } d(i_1) \cdot i_2 = [i_1, i_2]$$

olduğu, alt çaprazlanmış modül olduğu gösterilmek istenen yapılardaki etkilerin ve sınır dönüşümlerinin  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$ 'deki etki ve sınır dönüşümünün kısıtlamaları olmasından görülür ve açık olarak

$$\begin{array}{ccc} \bigcap i_\lambda & \xleftarrow{\iota} & \mathfrak{s} \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ \bigcap j_\lambda & \xleftarrow{\iota} & \mathfrak{y} \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

ii)  $(\cap i_\lambda, \cap j_\lambda, d_\lambda)$ 'nin alt çaprazlanmış modül olduğu ilk kısımdan görülmektedir.  $\cap(\mathfrak{s}i_\lambda) = \mathfrak{s}(\cap i_\lambda)$  olduğuna dikkat edilirse her  $\lambda$  için  $\mathfrak{s}i_\lambda \subseteq i_\lambda$  olmasından,  $\mathfrak{s}(\cap i_\lambda) \subseteq \cap i_\lambda$  olur. Her bir  $j_\lambda, \mathfrak{y}$ 'nin ideali olduğundan  $\cap j_\lambda$  de  $\mathfrak{y}$ 'nin idealidir. Yine her  $\lambda$  için,  $\mathfrak{s}j_\lambda \subseteq i_\lambda$  olduğundan, her iki tarafta kesişiminin alınmasıyla  $\cap(\mathfrak{s}j_\lambda) \subseteq \cap i_\lambda$  ve dolayısıyla,  $\mathfrak{s}(\cap j_\lambda) \subseteq \cap i_\lambda$  elde edilir. Son olarak,  $\mathfrak{y}(\cap i_\lambda) \subseteq \cap i_\lambda$  olduğu benzer şekilde görülür. ■

**Uyarı 3.2.9:** Yukarıdaki önermede varlığı gösterilen  $(\cap i_\lambda, \cap j_\lambda, d_\lambda)$  alt çaprazlanmış modülü veya ideali,  $\cap(i_\lambda, j_\lambda, d_\lambda)$  şeklinde de gösterilir.



**İspat:**  $x \in \text{gör } \theta$ ,  $z \in \text{gör } \sigma$  olsun.  $s \in \mathfrak{s}$ ,  $y \in \mathfrak{y}$  olmak üzere  $x = \theta(s)$ ,  $z = \sigma(y)$  diyelim.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathfrak{s} & \xrightarrow{\theta} & \text{gör } \theta & \xleftarrow{\quad} & x \\
 \downarrow d & & \downarrow a & & \downarrow a \\
 \mathfrak{y} & \xrightarrow{\sigma} & \text{gör } \sigma & \xleftarrow{\quad} & z
 \end{array}$$

$z \cdot x = \sigma(y) \cdot \theta(s) = \theta(y \cdot s)$  olduğundan  $z \cdot x \in \text{gör } \theta$ 'dir. Ayrıca  $x = \theta(s)$  olmak üzere  $x \in \text{gör } \theta$  ise  $a(x) = a(\theta(s)) = \sigma(d(s))$  olup  $a(x) \in \text{gör } \sigma$  elde edilir. ■

### 3.3. Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Bölüm Modülü

Bu alt bölümde Lie cebirlerinin bölüm çaprazlanmış modülleri tanıtılmıştır.

**Önerme 3.3.1:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  Lie cebirlerinin bir çaprazlanmış modülü ve  $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d) \trianglelefteq (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  olsun.  $\mathfrak{s}/\mathfrak{i}$ ,  $\mathfrak{y}/\mathfrak{j}$  bölüm Lie cebirleri olmak üzere  $\forall y + \mathfrak{j} \in \mathfrak{y}/\mathfrak{j}$  ve  $\forall s + \mathfrak{i} \in \mathfrak{s}/\mathfrak{i}$  için  $\cdot : \mathfrak{y}/\mathfrak{j} \times \mathfrak{s}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{s}/\mathfrak{i}$  etkisi  $(y + \mathfrak{j}) \cdot (s + \mathfrak{i}) = y \cdot s + \mathfrak{i}$  ile,  $\bar{d}: \mathfrak{s}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{y}/\mathfrak{j}$  sınır homomorfizmi ise  $\bar{d}(s + \mathfrak{i}) = ds + \mathfrak{j}$  ile verilmek üzere  $(\mathfrak{s}/\mathfrak{i}, \mathfrak{y}/\mathfrak{j}, \bar{d})$  üçlüsü Lie cebirlerinin bir çaprazlanmış modülüdür.

**İspat:** Verilen etki iyi tanımlıdır, gerçekten  $s, s' \in \mathfrak{s}$  ve  $y, y' \in \mathfrak{y}$  için  $y + \mathfrak{j} = y' + \mathfrak{j}$  ve  $s + \mathfrak{i} = s' + \mathfrak{i}$  ise  $y - y' \in \mathfrak{j}$  ve  $s - s' \in \mathfrak{i}$ 'dir.  $(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d) \trianglelefteq (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  olduğundan dolayı  $y - y' \in \mathfrak{j}$ ,  $s \in \mathfrak{i}$  olmasından  $(y - y') \cdot s \in \mathfrak{i}$  olur ve  $s - s' \in \mathfrak{i}$ ,  $y' \in \mathfrak{j}$  olmasından da  $y' \cdot (s - s') \in \mathfrak{i}$  olur.  $\mathfrak{i}$ 'nin bir alt cebir olmasından

$$\begin{aligned}
 (y - y') \cdot s + y' \cdot (s - s') &= y \cdot s - y' \cdot s + y' \cdot s - y' \cdot s' \\
 &= y \cdot s - y' \cdot s' \in \mathfrak{i}.
 \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece buradan  $y \cdot s + \mathfrak{i} = y' \cdot s' + \mathfrak{i}$  olduğu görülür. Bu ise etkinin iyi tanımlı olduğu anlamına gelir.

Şimdi de  $\bar{d}: \mathfrak{s}/\mathfrak{i} \rightarrow \mathfrak{y}/\mathfrak{j}$  fonksiyonunun iyi tanımlı olduğunu gösterelim.  $s, s' \in \mathfrak{s}$  olmak üzere  $s + \mathfrak{i} = s' + \mathfrak{i}$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda  $s - s' \in \mathfrak{i}$  olur ve buradan  $d(s - s') \in \mathfrak{j}$  elde edilir ve buradan  $ds - ds' \in \mathfrak{j}$  olur. Bu ise  $ds + \mathfrak{j} = ds' + \mathfrak{j}$  olması anlamına gelir. Böylece  $\bar{d}$  iyi tanımlı olur.

$\bar{d}$ 'nin bir Lie cebir homomorfizmi olduğu ise  $d$ 'nin bir Lie cebir homomorfizmi olmasından ve bölüm Lie cebirindeki işlemlerin tanımlarından açıktır. ■

**Tanım 3.3.2:** Yukarıdaki önerme ile Lie cebirlerinin bir çaprazlanmış modülü olduğu gösterilen  $(\mathfrak{s}/\mathfrak{i}, \mathfrak{y}/\mathfrak{j}, \bar{d})$  üçlüsüne bölüm Lie çaprazlanmış modülü denir ve bu çaprazlanmış modül  $\frac{(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)}{(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d)}$  şeklinde gösterilir.

### 3.4 Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri için İzomorfizm Teoremleri

Bu alt bölümde, daha önce Lie cebirleri için verilmiş olan izomorfizm teoremlerini üst boyuta taşıyarak Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri için ifade ve ispat edeceğiz.

#### **Teorem 3.4.1 (Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri için 1. İzomorfizm Teoremi)**

$(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)$  ve  $(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, a)$  Lie cebirlerinin çaprazlanmış modülleri olsunlar ve Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin bir  $(\theta, \sigma): (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d) \rightarrow (\mathfrak{x}, \mathfrak{z}, a)$  homomorfizmi verilsin. Bu durumda  $\frac{(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d)}{(\text{çek } \theta, \text{çek } \sigma, d)} \cong (\text{gör } \theta, \text{gör } \sigma, a)$  olur.

**İspat:** Lie cebirleri için 1. İzomorfizm Teoremi gereğince,

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{s}/\text{çek } \theta & \xrightarrow{\bar{d}} & \mathfrak{y}/\text{çek } \sigma \\
 \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\
 \text{gör } \theta & \xrightarrow{a} & \text{gör } \sigma
 \end{array}$$

diyagramıyla verilen ve  $\forall s + \text{çek } \theta \in \mathfrak{s}/\text{çek } \theta$  için  $\alpha(s + \text{çek } \theta) = \theta(s)$  ve benzer şekilde  $\forall y + \text{çek } \sigma \in \mathfrak{y}/\text{çek } \sigma$  için  $\beta(y + \text{çek } \sigma) = \sigma(y)$  şeklinde tanımlanan fonksiyonların birer Lie cebir izomorfizmi oldukları bilinmektedir.

Bu nedenle  $\frac{(s, \mathbf{y}, d)}{(\text{çek } \theta, \text{çek } \sigma, d)} \cong (\text{gör } \theta, \text{gör } \sigma, a)$  izomorfizminin varlığını göstermek için sadece  $(\alpha, \beta): \left( \mathfrak{s}/\text{çek } \theta, \mathfrak{y}/\text{çek } \sigma, \bar{d} \right) \rightarrow (\text{gör } \theta, \text{gör } \sigma, a)$  ikilisinin bir Lie cebir homomorfizmi olmanın ek şartlarını sağladığını, yani etkileri ve sınır dönüşümlerini koruduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$\forall s + \text{çek } \theta \in \mathfrak{s}/\text{çek } \theta$  için

$$\begin{aligned} \beta(\bar{d}(s + \text{çek } \theta)) &= \beta(ds + \text{çek } \sigma) \\ &= \sigma(ds) \\ &= a(\theta(s)) \\ &= a(\alpha(s + \text{çek } \theta)) \end{aligned}$$

olduğundan  $\beta\bar{d} = a\alpha$  olup verilen diyagram değişmelidir. Ayrıca  $\forall y + \text{çek } \sigma \in \mathfrak{y}/\text{çek } \sigma$  ve  $\forall s + \text{çek } \theta \in \mathfrak{s}/\text{çek } \theta$  için

$$\begin{aligned} \beta(y + \text{çek } \sigma) \cdot \alpha(s + \text{çek } \theta) &= \sigma(y) \cdot \theta(s) \\ &= \theta(y \cdot s) \\ &= \alpha(y \cdot s + \text{çek } \theta) \\ &= \alpha((y + \text{çek } \sigma) \cdot (s + \text{çek } \theta)) \end{aligned}$$

olması da sağlandığından  $(\alpha, \beta)$  ikilisi Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin bir izomorfizmi olur. Böylece  $\frac{(s, \mathbf{y}, d)}{(\text{çek } \theta, \text{çek } \sigma, d)} \cong (\text{gör } \theta, \text{gör } \sigma, a)$  olur. ■

**Teorem 3.4.2 (Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri için 2. İzomorfizm Teoremi)**  
 $(\mathfrak{s}, \mathbf{y}, d)$  cebirlerin bir çaprazlanmış modülü olsun. Eğer  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, d) \leq (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d) \trianglelefteq (\mathfrak{s}, \mathbf{y}, d)$

ve  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, d) \trianglelefteq (\mathfrak{s}, \mathbf{y}, d)$  ise  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, d) \trianglelefteq (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d)$  ve  $\frac{\frac{(s, \mathbf{y}, d)}{(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, d)}}{(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d)} \cong \frac{(s, \mathbf{y}, d)}{(\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d)}$  olur.

**İspat:** İlk olarak  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, d) \trianglelefteq (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d)$  olduğunu gösterelim.  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, d) \leq (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d)$  ve  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, d) \trianglelefteq (\mathfrak{s}, \mathbf{y}, d)$  olduğu verilmiştir.  $\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{j} \subseteq \mathbf{y}$  olduğundan  $\forall i \in \mathfrak{i}, \forall j \in \mathfrak{j}, \forall n \in \mathfrak{n}$  ve  $\forall m \in \mathfrak{m}$  için  $j \cdot m, i \cdot n \in \mathfrak{m}$  olup  $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, d) \trianglelefteq (\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, d)$  olması sağlanır.

Şimdi izomorfizmin varlığını gösterelim. Cebirler için 2. İzomorfizm Teoremi'nden

$$\forall s + m + i/m \in \mathfrak{s}/m/i/m \text{ için } \alpha: \mathfrak{s}/m/i/m \rightarrow \mathfrak{s}/i, \alpha(s + m + i/m) = s + i,$$

$$\forall y + n + j/n \in \mathfrak{y}/n/j/n \text{ için } \beta: \mathfrak{y}/n/j/n \rightarrow \mathfrak{y}/j, \beta(y + n + j/n) = y + j$$

fonksiyonlarının birer Lie cebir izomorfizmi oldukları bilinmektedir. Bu nedenle teoremi ispatlamak için  $(\alpha, \beta): \left( \mathfrak{s}/\mathfrak{m}/\mathfrak{i}/\mathfrak{m}, \mathfrak{y}/\mathfrak{n}/\mathfrak{j}/\mathfrak{n}, \bar{d} \right) \rightarrow (\mathfrak{s}/\mathfrak{i}, \mathfrak{y}/\mathfrak{j}, \bar{d})$  ikilisinin Lie cebir homomorfizmi olmanın diğer şartlarını sağladığını göstermek yeterli olacaktır.

İlk olarak, verilen Lie cebir homomorfizmi ikilisinin sınır dönüşümlerini korunduğunu görmek için  $s + m + \mathfrak{i}/\mathfrak{m} \in \mathfrak{s}/\mathfrak{m}/\mathfrak{i}/\mathfrak{m}$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} \beta \bar{d}(s + m + \mathfrak{i}/\mathfrak{m}) &= \beta \left( \bar{d}(s + m) + \mathfrak{j}/\mathfrak{n} \right) \\ &= \beta \left( \partial s + n + \mathfrak{j}/\mathfrak{n} \right) \\ &= ds + \mathfrak{j} \\ &= \bar{d}(s + \mathfrak{i}) \\ &= \bar{d}\alpha(s + m + \mathfrak{i}/\mathfrak{m}) \end{aligned}$$

olduğuna dikkat edelim. Buradan  $\beta \bar{d} = \bar{d}\alpha$  olup

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{s}/\mathfrak{m}/\mathfrak{i}/\mathfrak{m} & \xrightarrow{\bar{d}} & \mathfrak{y}/\mathfrak{n}/\mathfrak{j}/\mathfrak{n} \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathfrak{s}/\mathfrak{i} & \xrightarrow{\bar{d}} & \mathfrak{y}/\mathfrak{i} \end{array}$$

diyagramı değişmelidir, yani verilen ikili sınır homomorfizmlerini korur.

Lie çaprazlanmış modül etkilerinin verilen dönüşüm altında korunduğunu göstermek

için ise,  $y + n + \mathfrak{j}/\mathfrak{n} \in \mathfrak{y}/\mathfrak{n}/\mathfrak{j}/\mathfrak{n}$  ve  $s + m + \mathfrak{i}/\mathfrak{m} \in \mathfrak{s}/\mathfrak{m}/\mathfrak{i}/\mathfrak{m}$  olmak üzere;

$$\begin{aligned} \beta \left( y + n + \mathfrak{j}/\mathfrak{n} \right) \cdot \alpha \left( s + m + \mathfrak{i}/\mathfrak{m} \right) &= (y + \mathfrak{j}) \cdot (s + \mathfrak{i}) \\ &= y \cdot s + \mathfrak{i} \\ &= \alpha(y \cdot s + m + \mathfrak{i}/\mathfrak{m}) \\ &= \alpha \left( (y + n) \cdot (s + m) + \mathfrak{i}/\mathfrak{m} \right) \\ &= \alpha \left( \left( y + n + \mathfrak{j}/\mathfrak{n} \right) \cdot \left( s + m + \mathfrak{i}/\mathfrak{m} \right) \right) \end{aligned}$$

olduğunu gözlemlemek yeterlidir. Böylece  $(\alpha, \beta)$  bir Lie çaprazlanmış modül izomorfizmi

$$\text{olup } \frac{\frac{(s, \mathbf{y}, d)}{(m, n, d)}}{\frac{(i, j, d)}{(m, n, d)}} \cong \frac{(s, \mathbf{y}, d)}{(i, j, d)} \text{ elde edilir. } \blacksquare$$

**Teorem 3.4.3 (Lie Cebirlerinin Çaprazlanmış Modülleri için 3. İzomorfizm Teoremi)**

$(s, \mathbf{y}, d)$  Lie cebirlerinin bir çaprazlanmış modülü olsun. Eğer  $(\mathfrak{b}, \mathfrak{q}, d) \leq (s, \mathbf{y}, d)$  ve  $(i, j, d) \leq (s, \mathbf{y}, d)$  ise bu durumda  $\frac{(\mathfrak{b}, \mathfrak{q}, d)}{(\mathfrak{b} \cap i, \mathfrak{q} \cap j, d)} \cong \frac{(\mathfrak{b} + i, \mathfrak{q} + j, d)}{(i, j, d)}$  olur.

**İspat:** Cebirler için 3. İzomorfizm Teoremi'nden

$$\forall b + \mathfrak{b} \cap i \in \mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap i \text{ için, } \alpha: \mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap i \rightarrow \mathfrak{b} + i/i, \alpha(b + \mathfrak{b} \cap i) = b + i,$$

$$\forall q + \mathfrak{q} \cap j \in \mathfrak{q}/\mathfrak{q} \cap j \text{ için, } \beta: \mathfrak{q}/\mathfrak{q} \cap j \rightarrow \mathfrak{q} + j/j, \beta(q + \mathfrak{q} \cap j) = q + j$$

ile tanımlı fonksiyonların birer izomorfizm olduklarını biliyoruz. Bu nedenle teoremi ispatlamak için,  $(\alpha, \beta): (\mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap i, \mathfrak{q}/\mathfrak{q} \cap j, \tilde{d}) \rightarrow (\mathfrak{b} + i/i, \mathfrak{q} + j/j, \bar{d})$  ikilisinin Lie çaprazlanmış cebir homomorfizmi olmanın, sınır dönüşümleri ve etkilerle ilgili kalan şartlarını da sağladığını göstermek yeterli olacaktır.

$$b + \mathfrak{b} \cap i \in \mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap i \text{ olmak üzere;}$$

$$\begin{aligned} \beta \tilde{d}(b + \mathfrak{b} \cap i) &= \beta(db + \mathfrak{q} \cap j) \\ &= db + j \\ &= \bar{d}(b + i) \\ &= \bar{d}\alpha(b + \mathfrak{b} \cap i) \end{aligned}$$

olduğundan  $\beta \tilde{d} = \bar{d} \alpha$  olup

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap i & \xrightarrow{\tilde{d}} & \mathfrak{q}/\mathfrak{q} \cap j \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ \mathfrak{b} + i/i & \xrightarrow{\bar{d}} & \mathfrak{q} + j/j \end{array}$$

diyagramı değişmelidir.

$$\text{Ayrıca, } q + \mathfrak{q} \cap j \in \mathfrak{q}/\mathfrak{q} \cap j \text{ ve } b + \mathfrak{b} \cap i \in \mathfrak{b}/\mathfrak{b} \cap i \text{ olmak üzere;}$$

$$\beta(q + \mathfrak{q} \cap j) \cdot \alpha(b + \mathfrak{b} \cap i) = (q + j) \cdot (b + i)$$

$$\begin{aligned} &= q \cdot b + i \\ &= \alpha(q \cdot b + \mathcal{I} \cap i) \\ &= \alpha((q + \mathcal{Q} \cap j) \cdot (b + \mathcal{I} \cap i)) \end{aligned}$$

olduğundan  $(\alpha, \beta)$  ikilisi etkileri de korur. ■



## 4. LİE CEBİRLERİNİN 2 –ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLERİ

Bu bölümde, Lie cebirlerin çaprazlanmış modüllerinin yapısına bir boyut daha eklenerek elde edilen Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülleri üzerinde durulacaktır. Burada öncelikle Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modüllerinin tanımı, 2 –alt çaprazlanmış Lie cebir, ideal, çekirdek, görüntü ve ayrıca bölüm 2 –çaprazlanmış modülleri tanıtılmıştır. İzomorfizm teoremlerine kadar olan içerik (Üçeş, Ö., 2016) kaynağından yeniden yorumlanarak derlenmiştir. Son olarak, Lie cebirlerin 2 çaprazlanmış modüllerinin izomorfizm teoremlerinin ifadelerine ve ispatlarına yer verilmiştir.

### 4.1. Lie Cebirlerin Çaprazlanmış Modül Kavramı

Bu alt bölümde Lie cebirlerinin 2 çaprazlanmış modüller ve morfizmlerinin tanımı ifade edilerek temel özellikleri incelenmiştir.

**Tanım 4.1.1:**  $\mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{y}$ ,  $\mathfrak{m}$  bir  $\mathbb{K}$  – Lie cebir ve  $d_1: \mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{m}$ ,  $d_2: \mathfrak{s} \rightarrow \mathfrak{y}$  birer Lie cebir homomorfizmi olmak üzere gör  $d_2 \subseteq \text{çek } d_1$  oluyorsa

$$\mathfrak{s} \xrightarrow{d_2} \mathfrak{y} \xrightarrow{d_1} \mathfrak{m}$$

yapısı  $\mathbb{K}$  –Lie cebirlerinin 2 –zincir kompleksi olarak adlandırılır. İlaveten gör  $d_2 \subseteq \mathfrak{y}$  ve gör  $d_1 \subseteq \mathfrak{m}$  ise bu yapıya bir normal 2 –kompleks denir.

**Tanım 4.1.2:**  $\mathbb{K}$  –Lie cebirlerin bir normal 2 –kompleksi verildiğinde

$$\mathfrak{s} \xrightarrow{d_2} \mathfrak{y} \xrightarrow{d_1} \mathfrak{m}$$

yapısına ek olarak bir

$$\{, \} : \mathfrak{y} \times \mathfrak{y} \longrightarrow \mathfrak{s}$$

$\mathbb{K}$  –bilineer fonksiyonu verilmiş olsun. Ayrıca  $\mathfrak{m}$ 'nin  $\mathfrak{s}$  ve  $\mathfrak{y}$ 'ye etkisi ve  $\mathfrak{y}$ 'nin  $\mathfrak{s}$ 'ye etkisi bulunsun. Bu durumda  $\forall s, s_1, s_2 \in \mathfrak{s}$ ,  $y, y_1, y_2, y_3 \in \mathfrak{y}$  ve  $m \in \mathfrak{m}$  için aşağıdakiler sağlanıyorsa bu yapı Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülü olarak adlandırılır.

- 1)  $d_1(y \cdot m) = [d_1(y), m]$  ve  $d_2(s \cdot m) = d_2(s) \cdot m$
- 2)  $d_2\{y_1, y_2\} = y_1 \cdot d_1(y_2) - [y_1, y_2]$
- 3)  $\{d_2(s_1), d_2(s_2)\} = [s_2, s_1]$

- 4)  $\{d_2(s), y\} = s \cdot d_1(y) - s \cdot y$
- 5)  $\{y, d_2(s)\} = -s \cdot y$
- 6)  $\{y_1, [y_2, y_3]\} = \{[y_1, y_2], y_3\} - \{[y_1, y_3], y_2\} + \{y_1, y_2\} \cdot d_1(y_3) - \{y_1, y_3\} \cdot d_1(y_2)$
- 7)  $\{[y_1, y_2], y_3\} = \{y_1, [y_2, y_3]\} + \{[y_1, y_3], y_2\} - \{y_1, y_2\} \cdot d_1(y_3) + \{y_1, y_3\} \cdot d_1(y_2)$
- 8)  $\{y_1, y_2\} \cdot m = \{y_1 \cdot m, y_2\} + \{y_1, y_2 \cdot m\}$

Karışıklık riski olmadığında bir

$$s \xrightarrow{d_2} y \xrightarrow{d_1} m$$

2 –çaprazlanmış modülü bazen  $(s, y, m, d_2, d_1)$  veya kısaca  $(s, y, m)$  şeklinde gösterilir. Buradaki  $\{, \}$  küme parantezine Peiffer Liftingi adı verilir.

Bir

$$s \xrightarrow{d_2} y \xrightarrow{d_1} m$$

2 –çaprazlanmış modülü verildiğinde, bir

$$s \xrightarrow{d_2} y$$

çaprazlanmış modülü ve

$$y \xrightarrow{d_1} m$$

ile

$$s \xrightarrow{d_1 d_2} m$$

ön çaprazlanmış modülleri elde edilir. Ayrıca  $d_2 \subseteq \ker d_1$  olduğundan son verilen ön çaprazlanmış modülü ve  $\forall s \in s$  için  $d_1 d_2(s) = 0_m$  elde edilir.

**Tanım 4.1.3:** Lie cebirlerinin

$$s \xrightarrow{d_2} y \xrightarrow{d_1} m$$

ve

$$s' \xrightarrow{d'_2} y' \xrightarrow{d'_1} m'$$

gibi iki tane 2- çaprazlanmış modülü verilsin. Bir

$$\Phi: (s, y, m, d_2, d_1) \rightarrow (s', y', m', d'_2, d'_1)$$

2 –çaprazlanmış modül homomorfizmi,

$$\alpha: s \rightarrow s'$$

$$\beta: y \rightarrow y'$$

$$\gamma: m \rightarrow m'$$

olmak üzere Lie cebir homomorfizmlerinin

$$\begin{array}{ccccc} s & \xrightarrow{d_2} & y & \xrightarrow{d_1} & m \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ s' & \xrightarrow{d'_2} & y' & \xrightarrow{d'_1} & m' \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan ( $\beta d_2 = d'_2 \alpha$ ,  $\gamma d_1 = d'_1 \beta$ ) ve

$$\alpha(s \cdot m) = \alpha(s) \cdot \gamma(m)$$

$$\beta(y \cdot m) = \beta(y) \cdot \gamma(m)$$

$$\alpha\{y_1, y_2\} = \{\beta(y_1), \beta(y_2)\}.$$

özelliklerine sahip olan bir  $\Phi: (\alpha, \beta, \gamma)$  üçlüsüdür.  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$ 'nın her biri Lie cebirlerinin birer izomorfizmi ise, bu durumda  $\Phi$ 'nin bir 2 – çaprazlanmış modül izomorfizmi olduğu söylenir.

2 – çaprazlanmış modüllerin bir

$$\Phi: (s, y, m, d_2, d_1) \rightarrow (s', y', m', d'_2, d'_1)$$

homomorfizmi ayrıca  $y$ 'nin  $s$  üzerindeki her iki etkisini de korur.

$$\alpha(s \cdot y) = \alpha(-\{y, d_2(s)\}) = -\{\beta(y), \beta d_2(s)\} = -\{\beta(y), d'_2 \alpha(s)\} = \alpha(s) \cdot \beta(y)$$

ve

$$\alpha(s \cdot d_1(y)) = \alpha(s) \cdot \gamma d_1(y) = \alpha(s) \cdot d'_1 \beta(y)$$

Ayrıca  $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma)$  bir 2 – çaprazlanmış modül homomorfizmi ise,

$$(\alpha, \beta): (s, y, d_2) \rightarrow (s', y', d'_2)$$

bir çaprazlanmış modül homomorfizmi olur.

**Tanım 4.1.4:** Lie cebirlerinin bir

$$\mathfrak{s} \xrightarrow{d_2} \mathfrak{y} \xrightarrow{d_1} \mathfrak{m}$$

2 – çaprazlanmış modülü verilsin. Ayrıca

$$\mathfrak{s}' \xrightarrow{d'_2} \mathfrak{y}' \xrightarrow{d'_1} \mathfrak{m}'$$

de bir 2 – çaprazlanmış modül olsun. Eğer  $\mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{s}$ ,  $\mathfrak{y}' \subseteq \mathfrak{y}$ ,  $\mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{m}$ ,  $d'_1 = d_1|_{\mathfrak{y}}$ ,  $d'_2 = d_2|_{\mathfrak{s}}$  ve etkiler ile Peiffer liftingi ilk verilen 2 – çaprazlanmış modüldekilerinin kısıtlamaları olmak üzere  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}', d'_2, d'_1)$ 'ne,  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$ 'nin bir 2 – alt çaprazlanmış modülü olduğu söylenir. Bu durum  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}') \leq (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 4.1.5:** Bir

$$\mathfrak{s} \xrightarrow{d_2} \mathfrak{y} \xrightarrow{d_1} \mathfrak{m}$$

2 – çaprazlanmış modülünün bir  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$  2 – alt çaprazlanmış modülü verildiğinde,

- 1)  $\mathfrak{y}' \trianglelefteq \mathfrak{y}$  ve  $\mathfrak{m}' \trianglelefteq \mathfrak{m}$
- 2)  $y' \cdot m \in \mathfrak{y}'$ ,  $s' \cdot m \in \mathfrak{s}'$
- 3)  $y \cdot m' \in \mathfrak{y}'$ ,  $s \cdot m' \in \mathfrak{s}'$
- 4)  $\{y', y\}, \{y, y'\} \in \mathfrak{s}'$

olması eğer her  $s \in \mathfrak{s}$ ,  $s' \in \mathfrak{s}'$ ,  $y \in \mathfrak{y}$ ,  $y' \in \mathfrak{y}'$ ,  $m \in \mathfrak{m}$  ve  $m' \in \mathfrak{m}'$  için sağlanıyorsa,  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$ 'nin  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$ 'nin bir ideali olduğu söylenir ve bu durum  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}') \trianglelefteq (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$  şeklinde gösterilir.

Koşul (4) gereği, ayrıca  $s \in \mathfrak{s}$ ,  $s' \in \mathfrak{s}'$ ,  $y \in \mathfrak{y}$  ve  $y' \in \mathfrak{y}'$  için  $s' \cdot y \in \mathfrak{s}'$  ve  $s \cdot y' \in \mathfrak{s}'$  olduğuna dikkat edelim. Gerçekten de  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$ ,  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$ 'in bir idealiyse  $\forall s \in \mathfrak{s}$ ,  $s' \in \mathfrak{s}'$ ,  $y \in \mathfrak{y}$  ve  $y' \in \mathfrak{y}'$  için,

$$\begin{aligned} s' \cdot y &= -\{y, d_2 s'\} \in \mathfrak{s}' \\ s \cdot y' &= -\{y', d_2(s)\} \in \mathfrak{s}' \end{aligned}$$

ve ayrıca

$$s' \cdot d_1(y) \in \mathfrak{s}', s \cdot d_1(y') \in \mathfrak{s}'.$$

ek olarak,  $\mathfrak{s}' \trianglelefteq \mathfrak{s}$  olduğundan

$$s' \cdot s = s' \cdot d_2(s) \in \mathfrak{s}'$$

bu argümanların bir sonucu olarak,  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', d_2)$ ,  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, d_2)$ 'nin bir ideali ve  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$ ,  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$ 'in bir idealidir.

**Tanım 4.1.6:** 2 – çaprazlanmış modüllerin

$$\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1) \rightarrow (\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}' d_2', d_1').$$

bir homomorfizmi verilsin.  $\Phi$ 'nin çekirdeği çek  $\Phi = (\text{çek } \alpha, \text{çek } \beta, \text{çek } \gamma)$  ile tanımlanır ve  $\Phi$ 'nin görüntüsü ise gör  $\Phi = (\text{gör } \alpha, \text{gör } \beta, \text{gör } \gamma)$  ile tanımlanır.

çek  $\Phi$ 'nin  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$ 'nin ideali olduğunu ve gör  $\Phi$ 'nin  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$  2 –altçaprazlanmış modülü olduğu görülebilir. Örneğin çek  $\Phi$ 'nin idealliğin dördüncü koşulunu sağladığını görmek için,  $k \in \text{çek } \beta$ ,  $y \in \mathfrak{y}$  olmak üzere

$$\alpha\{y, k\} = \{\beta(y), \beta(k)\} = \{\beta(y)0_{\mathfrak{y}'}\} = \{\beta(y), d_2'(0_{\mathfrak{s}'})\} = -(0_{\mathfrak{s}'} \cdot \beta(y)) = 0_{\mathfrak{s}'}$$

$$\alpha\{k, y\} = \{\beta(k), \beta(y)\} = \{0_{\mathfrak{y}'}, \beta(y)\} = \{d_2'(0_{\mathfrak{s}'}), \beta(y)\} = 0_{\mathfrak{s}'} \cdot d_1(y) - 0_{\mathfrak{s}'} \cdot y = 0_{\mathfrak{s}'}$$

elde ederiz ki bu da  $\{y, k\}, \{k, y\} \in \text{çek } \alpha$  olduğunu verir.

**Tanım 4.1.7:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$  Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülü olsun ve  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$ ,  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$ 'nin bir ideali olsun. Bu takdirde,  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}) / (\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$  bölüm 2 –çaprazlanmış modülü  $(\mathfrak{s}/\mathfrak{s}', \mathfrak{y}/\mathfrak{y}', \mathfrak{m}/\mathfrak{m}', \overline{d_2}, \overline{d_1})$  beşlisiyle verilir. Burada  $\overline{d_2}, \overline{d_1}$  ve Peiffer Liftingi

$$\overline{d_2}(s + \mathfrak{s}') = d_2(s) + \mathfrak{y}'$$

$$\overline{d_1}(y + \mathfrak{y}') = d_1(y) + \mathfrak{m}'$$

$$\{y_1 + \mathfrak{y}', y_2 + \mathfrak{y}'\} = \{y_1, y_2\} + \mathfrak{s}'$$

ile verilir ve  $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'$ 'nün  $\mathfrak{s}/\mathfrak{s}'$  ve  $\mathfrak{y}/\mathfrak{y}'$  üzerindeki etkisi ve  $\mathfrak{y}/\mathfrak{y}'$ 'nün  $\mathfrak{s}/\mathfrak{s}'$  üzerindeki etkisi şu şekilde verilir

$$(s + \mathfrak{s}') \cdot (m + \mathfrak{m}') = (s \cdot m) + \mathfrak{s}'$$

$$(y + \mathfrak{y}') \cdot (m + \mathfrak{m}') = (y \cdot m) + \mathfrak{y}'$$

$$(s + \mathfrak{s}') \cdot (y + \mathfrak{y}') = (s \cdot y) + \mathfrak{s}'$$

Yukarıdaki tanımda  $(\mathfrak{s}/\mathfrak{s}', \mathfrak{y}/\mathfrak{y}', \mathfrak{m}/\mathfrak{m}', \overline{d_2}, \overline{d_1})$  beşlisinin tüm etkilerinin ve homomorfizminin iyi tanımlı olduğu ön çaprazlanmış modüllerden görülmektedir. Aşağıda Peiffer Lifting'in de iyi tanımlı olduğunu gösteriyoruz

**Teorem 4.1.8:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$  Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülü ve  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$ ,  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$ 'nin 2 –çaprazlanmış ideali olsun. Bu durumda bölüm 2 –çaprazlanmış modülünün Peiffer Lifting'i iyi tanımlıdır.

**İspat:** İdeal tanımına göre  $\forall y \in \mathfrak{y}$  ve  $y' \in \mathfrak{y}'$  için  $\{y', y\}, \{y, y'\} \in \mathfrak{s}'$  olduğu bilinmektedir. Şimdi  $\mathfrak{y}/\mathfrak{y}'$ 'nde  $y_1 + \mathfrak{y}' = y_2 + \mathfrak{y}'$  olduğunu varsayalım. Bu durumda  $y_1 - y_2 \in \mathfrak{y}'$  olduğundan,

$$\{y_2, y\} - \{y_1, y\} = \{y_2 - y_1, y\} = \{0_{\mathfrak{y}'}, y\} = 0_{\mathfrak{s}} \in \mathfrak{s}'$$

olup  $\{y_2, y\} - \{y_1, y\} \in \mathfrak{s}'$  elde edilir. Buradan  $\{y_1 + \mathfrak{y}', y + \mathfrak{y}'\} = \{y_2 + \mathfrak{y}', y + \mathfrak{y}'\}$  ve  $\{y + \mathfrak{y}', y_1 + \mathfrak{y}'\} = \{y + \mathfrak{y}', y_2 + \mathfrak{y}'\}$  olduğu anlaşılır.

**Önerme 4.1.9:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$  Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülü ve  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$   $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$ 'nin 2 –alt çaprazlanmış modülü olsun.  $\forall s \in \mathfrak{s}, y \in \mathfrak{y}$  ve  $m \in \mathfrak{m}$  için  $\mathbf{q}_1(s) = s + \mathfrak{s}', \mathbf{q}_2(y) = y + \mathfrak{y}', \mathbf{q}_3(m) = m + \mathfrak{m}'$  olacak şekilde verilen  $\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$  üçlüsü  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$ 'den  $(\mathfrak{s}/\mathfrak{s}', \mathfrak{y}/\mathfrak{y}', \mathfrak{m}/\mathfrak{m}', \overline{d}_2, \overline{d}_1)$ 'ye bir 2 –çaprazlanmış modül homomorfizmidir ve  $\mathbf{Q}$ 'nun çekirdeği  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$ 'ne eşittir.

**İspat:**  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$  ve  $\mathbf{q}_3$ 'ün kanonik dönüşümler adı verilen cebir homomorfizmleri oldukları bilinmektedir. Diğer koşullar aşağıdaki denklemlerden görülebilmektedir,  $\forall s \in \mathfrak{s}, y \in \mathfrak{y}, m \in \mathfrak{m}$  için

$$\overline{d}_2 \mathbf{q}_1(s) = \overline{d}_2(s + \mathfrak{s}') = d_2(s) + \mathfrak{y}' = \mathbf{q}_2 d_2(s)$$

$$\overline{d}_1 \mathbf{q}_2(y) = \overline{d}_1(y + \mathfrak{y}') = d_1(y) + \mathfrak{m}' = \mathbf{q}_3 d_1(y)$$

$$\{\mathbf{q}_2(y_1), \mathbf{q}_2(y_2)\} = \{y_1 + \mathfrak{y}', y_2 + \mathfrak{y}'\} = \{y_1, y_2\} + \mathfrak{s}' = \mathbf{q}_1(\{y_1, y_2\})$$

$$\mathbf{q}_3(s) \cdot \mathbf{q}_1(m) = (s + \mathfrak{s}') \cdot (m + \mathfrak{m}') = (s \cdot m) + \mathfrak{s}' = \mathbf{q}_1(s \cdot m)$$

$$\mathbf{q}_3(y) \cdot \mathbf{q}_2(m) = (y + \mathfrak{y}') \cdot (m + \mathfrak{m}') = (y \cdot m) + \mathfrak{y}' = \mathbf{q}_2(y \cdot m)$$

Bilinen cebirsel özdeşliklerin bir sonucu olarak

$$\text{çek } \mathbf{Q} = (\text{çek } \mathbf{q}_1, \text{çek } \mathbf{q}_2, \text{çek } \mathbf{q}_3) = (\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$$

olduğu elde edilir.

Bu önermenin aşağıdaki sonucu, burada verilen ideal tanımının kategorik anlamda da doğru bir tanım olduğunu göstermektedir.

**Sonuç 4.1.10:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$  2 –çaprazlanmış modül ve  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}') \leq (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$  olsun.

$(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$ 'nin bir ideal olması için gerek ve yeter koşul, bir  $(\mathfrak{s}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{m}^*, d_2^*, d_1^*)$  2 –çaprazlanmış modülü ve bir  $\Phi: (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1) \rightarrow (\mathfrak{s}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{m}^*, d_2^*, d_1^*)$  2 –çaprazlanmış modül homomorfizmi için çek  $\Phi = (\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$  olmasıdır.

**Teorem 4.1.11:**  $\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1) \rightarrow (\mathfrak{s}^*, \mathfrak{y}^*, \mathfrak{m}^*, d_2^*, d_1^*)$  bir 2 –çaprazlanmış modül homomorfizmi ise

$$\frac{(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})}{\text{çek } \Phi} \cong \text{gör } \Phi.$$

**İspat:** 2 – çaprazlanmış modüller arasında bir  $\bar{\Phi} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}) : \frac{(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})}{\text{çek } \Phi} \rightarrow \text{gör } \Phi$  dönüşümünü,  $\bar{\alpha} : \frac{\mathfrak{s}}{\text{çek } \alpha} \rightarrow \text{gör } \alpha$ ,  $\bar{\beta} : \frac{\mathfrak{y}}{\text{çek } \beta} \rightarrow \text{gör } \beta$  ve  $\bar{\gamma} : \frac{\mathfrak{m}}{\text{çek } \gamma} \rightarrow \text{gör } \gamma$  Lie cebirleri için birinci izomorfizm teoreminin ispatında kullanılan alışılmış cebir izomorfizmleri olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda,  $\bar{\alpha}(s + \text{çek } \alpha) = \alpha(s)$ ,  $\bar{\beta}(y + \text{çek } \beta) = \beta(y)$  ve  $\bar{\gamma}(m + \text{çek } \gamma) = \gamma(m)$  olur.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\mathfrak{s}}{\text{çek } \alpha} & \xrightarrow{\bar{d}_2} & \frac{\mathfrak{y}}{\text{çek } \beta} & \xrightarrow{\bar{d}_1} & \frac{\mathfrak{m}}{\text{çek } \gamma} \\ \downarrow \bar{\alpha} & & \downarrow \bar{\beta} & & \downarrow \bar{\gamma} \\ \text{gör } \alpha & \xrightarrow{d_2^*} & \text{gör } \beta & \xrightarrow{d_1^*} & \text{gör } \gamma \end{array}$$

Yukarıdaki diyagramın değişmeli olduğu, çaprazlanmış modüller ile ilgili benzer izomorfizm teoreminden gelir. O halde,

$$\begin{aligned} \{\bar{\beta}(y_1 + \text{çek } \beta), \bar{\beta}(y_2 + \text{çek } \beta)\} &= \{\beta(y_1), \beta(y_2)\} \\ &= \alpha(\{y_1, y_2\}) \\ &= \bar{\alpha}(\{y_1, y_2\} + \text{çek } \alpha) \\ &= \bar{\alpha}(\{y_1 + \text{çek } \beta, y_2 + \text{çek } \beta\}). \end{aligned}$$

olmasından  $\bar{\Phi}$ 'nin 2 –çaprazlanmış modül izomorfizmi olduğu elde edilir.

**Tanım 4.1.12:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$ 'in  $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{m}_1)$  ve  $(\mathfrak{s}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{m}_2)$  gibi 2 adet 2 –alt çaprazlanmış modülü verilsin.  $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{m}_1)$  ve  $(\mathfrak{s}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{m}_2)$ 'nin kesişimleri,  $(\mathfrak{s}_1, \mathfrak{y}_1, \mathfrak{m}_1) \cap (\mathfrak{s}_2, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{m}_2) := (\mathfrak{s}_1 \cap \mathfrak{s}_2, \mathfrak{y}_1 \cap \mathfrak{y}_2, \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$  şeklinde tanımlanır.

**Önerme 4.1.13:** Bir 2 –çaprazlanmış modülün herhangi iki 2 –alt çaprazlanmış modülünün kesişimi de yine bir 2 –alt çaprazlanmış modüldür. Ayrıca, her iki 2 –alt çaprazlanmış modül de bir ideal ise kesişimleri de bir idealdir.

**İspat:** 2 –alt çaprazlanmış modül ve ideal tanımlarından hemen görülür.

**Tanım 4.1.14:**  $(s, y, m, d_2, d_1)$  bir 2 –çaprazlanmış modül olsun ve  $(s, y, m)$ 'nin  $(s', y', m')$  ve  $(s'', y'', m'')$  gibi iki 2 –alt çaprazlanmış modülü verilsin. Bu durumda  $(s', y', m')$  ve  $(s'', y'', m'')$ 'nün cebirsel toplamı  $(s', y', m') + (s'', y'', m'') := (s' + s'', y' + y'', m' + m'')$  şeklinde tanımlanır.

**Önerme 4.1.15:** Bir  $(s, y, m, d_2, d_1)$  2 –çaprazlanmış modülü, onun bir  $(s', y', m')$  ideali ve bir  $(s'', y'', m'')$  2 –alt çaprazlanmış modülü verilsin. Bu durumda,

(i)  $(s', y', m') + (s'', y'', m'')$ ,  $(s, y, m)$ 'nin 2 –alt çaprazlanmış modülüdür.

(ii) Eğer ek olarak  $(s'', y'', m'')$  ideal ise, bu durumda  $(s', y', m') + (s'', y'', m'')$  de  $(s, y, m)$ 'nin bir idealidir.

**İspat:** (i)  $d_2(s' + s'') \subseteq y' + y''$  ve  $d_1(y' + y'') \subseteq m' + m''$  olduğu açıktır.  $s' \in s', y' \in y', m' \in m', s'' \in s'', y'' \in y''$  ve  $m'' \in m''$  için

$$(m' + m'') \cdot (s' + s'') = s' \cdot m' + s' \cdot m'' + s'' \cdot m' + s'' \cdot m'' \in s' + s''$$

ve

$$(m' + m'') \cdot (y' + y'') = y' \cdot m' + y' \cdot m'' + y'' \cdot m' + y'' \cdot m'' \in y' + y''.$$

Ayrıca  $y'_1, y'_2 \in y', y''_1, y''_2 \in y''$  için

$$\{y'_1 + y''_1, y'_2 + y''_2\} = \{y'_1, y'_2\} + \{y''_1, y''_2\} + \{y''_1, y'_2\} + \{y'_1, y''_2\} \in y' + y''$$

olduğu elde edilir.

(ii) 1)  $y' + y'' \subseteq y$  ve  $m' + m'' \subseteq m$  olması,  $y', y'' \subseteq y$  ve  $m', m'' \subseteq m$  olmasından elde edilir.

2)  $(y' + y'') \cdot m = (y' \cdot m) + (y'' \cdot m) \in y'' + y'$  ve  $(s' + s'') \cdot m = (s' \cdot m) + (s'' \cdot m) \in s'' + s'$ .

3)  $y \cdot (m' + m'') = (y \cdot m') + (y \cdot m'') \in y'' + y'$  ve  $s \cdot (m' + m'') = (s \cdot m') + (s \cdot m'') \in s'' + s'$ .

4)  $\{y' + y'', y\} = \{y', y\} + \{y'', y\} \in y' + y''$  ve  $\{y, y' + y''\} = \{y, y'\} + \{y, y''\} \in y' + y''$ .

**Teorem 4.1.16:**  $(s, y, m, d_2, d_1)$  bir 2 –çaprazlanmış modül,  $(s', y', m')$ ,  $(s, y, m)$ 'nin bir ideali ve  $(s'', y'', m'')$ ,  $(s, y, m)$ 'nin bir 2 –alt çaprazlanmış modülü olsun. O halde

$$\frac{(s'', y'', m'')}{(s', y', m') \cap (s'', y'', m'')} \cong \frac{(s', y', m') + (s'', y'', m'')}{(s', y', m')}$$

olsun.

**İspat:**  $\alpha(s'') = s'' + s'$ ,  $\beta(y'') = y'' + y'$  ve  $\gamma(m'') = m'' + m'$  ile bir

$$\Phi = (\alpha, \beta, \gamma) : (s'', y'', m'') \rightarrow \frac{(s', y', m') + (s'', y'', m'')}{(s', y', m')}$$

dönüşümü tanımlayalım.

Her  $s' + s'' + s' \in \frac{s'+s''}{s'}$  için, burada  $s' \in s'$ ,  $s'' \in s''$  iken  $s' \in s'$  olduğundan  $s' + s'' + s' = s'' + s' + s' = s'' + s'$  eşitliği vardır. Bu nedenle  $\alpha(s'') = s'' + s' = s' + s'' + s'$  olur. Bu durum, gör  $\alpha = \frac{s'+s''}{s'}$  olduğunu, yani  $\alpha$ 'nın örten olduğunu gösterir. Benzer şekilde, gör  $\beta = \frac{y'+y''}{y'}$  ve gör  $\gamma = \frac{m'+m''}{m'}$  olur ve böylece

$$\text{gör } \Phi = \frac{(s', y', m') + (s'', y'', m'')}{(s', y', m')}$$

olduğu elde edilir.

Öte yandan,  $s'' \in s''$  için  $\alpha(s'') = 0_{\frac{s'+s''}{s'}}$   $\Leftrightarrow s'' + s' = s' \Leftrightarrow s'' \in s'$  olur ki bunun anlamı çek  $\alpha = s' \cap s''$  olmasıdır. Benzer şekilde, çek  $\beta = y' \cap y''$  ve çek  $\gamma = m' \cap m''$  olur, yani çek  $\Phi = (s', y', m') \cap (s'', y'', m'')$  olur.

Teorem 4.1.11'e göre  $\frac{(s'', y'', m'')}{\text{çek } \Phi} \cong$  gör  $\Phi$  olduğundan

$$\frac{(s'', y'', m'')}{(s', y', m') \cap (s'', y'', m'')} \cong \frac{(s', y', m') + (s'', y'', m'')}{(s', y', m')}$$

olur.

**Önerme 4.1.17:**  $(s, y, m, d_2, d_1)$  bir 2 –çaprazlanmış modül,  $(s', y', m') \leq (s, y, m)$ ,  $(s'', y'', m'') \leq (s, y, m)$  ve  $(s', y', m') \leq (s'', y'', m'')$  olsun. Bu şartlar altında,  $\frac{(s'', y'', m'')}{(s', y', m')} \leq \frac{(s, y, m)}{(s', y', m')}$  olması için gerek ve yeter şart  $(s'', y'', m'') \leq (s, y, m)$  olmasıdır.

**İspat:** Burada  $\frac{(s'', y'', m'')}{(s', y', m')}$ , nün,  $\frac{(s, y, m)}{(s', y', m')}$ , nün bir 2 –alt çaprazlanmış modülü olduğu açıktır.

(1) Cebirler için  $\mathfrak{y}'' \trianglelefteq \mathfrak{y} \Leftrightarrow \frac{\mathfrak{y}''}{\mathfrak{y}'} \trianglelefteq \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}'}$  ve  $\mathfrak{m}'' \trianglelefteq \mathfrak{m} \Leftrightarrow \frac{\mathfrak{m}''}{\mathfrak{m}'} \trianglelefteq \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}'}$  olduğu bilinir.

(2)  $\mathfrak{y}'' \cdot \mathfrak{m} \in \mathfrak{y}'' \Leftrightarrow (\mathfrak{y}'' \cdot \mathfrak{m}) + \mathfrak{y}' \in \frac{\mathfrak{y}''}{\mathfrak{y}'}$   $\Leftrightarrow (\mathfrak{y}'' + \mathfrak{y}') \cdot (\mathfrak{m} + \mathfrak{m}') \in \frac{\mathfrak{y}''}{\mathfrak{y}'}$

$\mathfrak{s}'' \cdot \mathfrak{m} \in \mathfrak{s}'' \Leftrightarrow (\mathfrak{s}'' \cdot \mathfrak{m}) + \mathfrak{s}' \in \frac{\mathfrak{s}''}{\mathfrak{s}'}$   $\Leftrightarrow (\mathfrak{s}'' + \mathfrak{s}') \cdot (\mathfrak{m} + \mathfrak{m}') \in \frac{\mathfrak{s}''}{\mathfrak{s}'}$ .

(3)  $\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{m}'' \in \mathfrak{y}'' \Leftrightarrow (\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{m}'') + \mathfrak{y}' \in \frac{\mathfrak{y}''}{\mathfrak{y}'}$   $\Leftrightarrow (\mathfrak{y} + \mathfrak{y}') \cdot (\mathfrak{m}'' + \mathfrak{m}') \in \frac{\mathfrak{y}''}{\mathfrak{y}'}$

$\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{m}'' \in \mathfrak{s}'' \Leftrightarrow (\mathfrak{s} \cdot \mathfrak{m}'') + \mathfrak{s}' \in \frac{\mathfrak{s}''}{\mathfrak{s}'}$   $\Leftrightarrow (\mathfrak{s} + \mathfrak{s}') \cdot (\mathfrak{m}'' + \mathfrak{m}') \in \frac{\mathfrak{s}''}{\mathfrak{s}'}$ .

(4)  $\{\mathfrak{y}'', \mathfrak{y}\} \in \mathfrak{s}'' \Leftrightarrow \{\mathfrak{y}'', \mathfrak{y}\} \mathfrak{s}' \in \frac{\mathfrak{s}''}{\mathfrak{s}'}$   $\Leftrightarrow \{\mathfrak{y}'' \mathfrak{y}', \mathfrak{y} \mathfrak{y}'\} \in \frac{\mathfrak{s}''}{\mathfrak{s}'}$

$\{\mathfrak{y}, \mathfrak{y}''\} \in \mathfrak{s}'' \Leftrightarrow \{\mathfrak{y}, \mathfrak{y}''\} \mathfrak{s}' \in \frac{\mathfrak{s}''}{\mathfrak{s}'}$   $\Leftrightarrow \{\mathfrak{y} \mathfrak{y}', \mathfrak{y}'' \mathfrak{y}'\} \in \frac{\mathfrak{s}''}{\mathfrak{s}'}$ .

**Teorem 4.1.18:**  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m}, d_2, d_1)$  Lie cebirlerinin bir 2 –çaprazlanmış modülü olmak üzere,  $(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')$  ile  $(\mathfrak{s}'', \mathfrak{y}'', \mathfrak{m}'')$ ,  $(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})$ 'nin  $\mathfrak{s}' \subseteq \mathfrak{s}'$ ,  $\mathfrak{y}' \subseteq \mathfrak{y}''$  ve  $\mathfrak{m}' \subseteq \mathfrak{m}''$  olacak şekilde iki ideali olsun. Bu durumda aşağıdaki denklik vardır.

$$\frac{\frac{(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})}{(\mathfrak{s}', \mathfrak{y}', \mathfrak{m}')}}{(\mathfrak{s}'', \mathfrak{y}'', \mathfrak{m}'')} \cong \frac{(\mathfrak{s}, \mathfrak{y}, \mathfrak{m})}{(\mathfrak{s}'', \mathfrak{y}'', \mathfrak{m}'')}$$

**İspat:**  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$ 'yı aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\alpha = \frac{\mathfrak{s}/\mathfrak{s}'}{\mathfrak{s}''/\mathfrak{s}'} \rightarrow \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}'}, \alpha(\mathfrak{s} + \mathfrak{s}'(\mathfrak{s}''/\mathfrak{s}')) = \mathfrak{s} + \mathfrak{s}''$$

$$\beta = \frac{\mathfrak{y}/\mathfrak{y}'}{\mathfrak{y}''/\mathfrak{y}'} \rightarrow \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}''}, \beta(\mathfrak{y} + \mathfrak{y}'(\mathfrak{y}''/\mathfrak{y}')) = \mathfrak{y} + \mathfrak{y}''$$

$$\gamma = \frac{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}''/\mathfrak{m}'} \rightarrow \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}''}, \gamma(\mathfrak{m} + \mathfrak{m}'(\mathfrak{m}''/\mathfrak{m}')) = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}''$$

Bunların birer cebir izomorfizmi oldukları bilinmektedir.

Aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\mathfrak{s}/\mathfrak{s}'}{\mathfrak{s}''/\mathfrak{s}'} & \xrightarrow{\overline{d_2}} & \frac{\mathfrak{y}/\mathfrak{y}'}{\mathfrak{y}''/\mathfrak{y}'} & \xrightarrow{\overline{d_1}} & \frac{\mathfrak{m}/\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}''/\mathfrak{m}'} \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{s}''} & \xrightarrow{\overline{d_2}} & \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}''} & \xrightarrow{\overline{d_1}} & \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}''} \end{array}$$

$\forall s \in \mathcal{S}, y, y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$  ve  $m \in \mathcal{M}$  için

$$\begin{aligned}\beta \bar{d}_2(s + s'(s''/s')) &= \beta(\bar{d}_2(s + s') \mathbf{y}''/\mathbf{y}') = \beta(d_2(s) + \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}')) = d_2(s) + \mathbf{y}'' \\ &= \bar{d}_2(s + s'') = \bar{d}_2 \alpha(s + s'(s''/s')) \\ \gamma \bar{d}_1(y + \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}')) &= \gamma(\bar{d}_1(y + \mathbf{y}') \mathbf{m}''/\mathbf{m}') = \gamma(d_1(y) + \mathbf{m}'(\mathbf{m}''/\mathbf{m}')) \\ &= d_1(y) + \mathbf{m}'' = \bar{d}_1(y + \mathbf{y}'') = \bar{d}_1 \beta(y + \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}'))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha(s + s'(s''/s')) \cdot (m + \mathbf{m}'(\mathbf{m}''/\mathbf{m}')) &= \alpha(((s + s') \cdot (m + \mathbf{m}')) s''/s') \\ &= \alpha((s \cdot m) + s'(s''/s')) \\ &= (s \cdot m) + s'' \\ &= (s + s') \cdot (m + \mathbf{m}'') \\ &= \alpha(s + s'(s''/s')) \cdot \gamma(m + \mathbf{m}'(\mathbf{m}''/\mathbf{m}'))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(y + \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}')) \cdot (m + \mathbf{m}'(\mathbf{m}''/\mathbf{m}')) &= \beta(((y + \mathbf{y}') \cdot (m + \mathbf{m}')) \mathbf{y}''/\mathbf{y}') \\ &= \beta((y \cdot m) + \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}')) \\ &= (y \cdot m) + \mathbf{y}'' \\ &= (y + \mathbf{y}'') \cdot (m + \mathbf{m}'') \\ &= \beta(y + \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}')) \cdot \gamma(m + \mathbf{m}'(\mathbf{m}''/\mathbf{m}'))\end{aligned}$$

Ek olarak

$$\begin{aligned}\alpha\{y_1 + \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}'), y_2 + \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}')\} &= \alpha(\{y_1 + \mathbf{y}', y_2 + \mathbf{y}'\}(s''/s')) \\ &= \alpha(\{y_1, y_2\} + s'(s''/s')) \\ &= \{y_1, y_2\} + s'' \\ &= \{y_1 + \mathbf{y}'', y_2 + \mathbf{y}''\} \\ &= \{\beta(y_1 \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}')), \beta(y_2 \mathbf{y}'(\mathbf{y}''/\mathbf{y}'))\}\end{aligned}$$

elde edilir. ■

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerinin teorisinde önemli bir yere sahip olması beklenen üç temel izomorfizm teoremi ifade edilmiş ve bu sonuçlar açık bir şekilde ispatlanmıştır. Lie cebirlerinin çaprazlanmış modüllerindeki bu izomorfizm teoremlerinden yararlanılarak Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modülleri için bu üç temel izomorfizm teoreminin varlığı tespit edilmiş ve ispatlanmıştır. Ayrıca daha önce tanımlanmamış olan kavramlardan, Lie cebirlerinin 2 –çaprazlanmış modüllerinin idealleri ve bu ideallere bölümleri de izomorfizm teoremlerini ifade edebilmek için gerekli olduklarından burada tanımlanmışlardır.

Bu çalışmanın matematikte ve Lie cebirlerinin yaygın kullanımı dikkate alındığında fizikte ve mühendislikte kullanım alanları bulması öngörülebilir. Ayrıca bu çalışmanın özellikle Lie cebirlerinde ve cebirsel topolojinin Lie teorisiyle ilgili kısımlarında kaynak olması ve bu konuda çalışma yapmak isteyenler için bir temel oluşturması amaçlanmıştır. Bu çalışma boyutsal olarak ileri taşınarak Lie cebirlerinin  $n$  –çaprazlanmış modülleri veya bunlara kısmen denk olan diğer yapılar üzerinde de benzer teoremlerin elde edilmesi, ya da bölüm nesnelere yararlanılarak çeşitli cebirsel seriler oluşturulması ve kategorik yapılar kurulması daha sonraki çalışmalarda ele alınabilecek bazı konuları kapsamaktadır.

## KAYNAKLAR

- Arvasi, Z., Porter T., 1996. Simplicial and Crossed Resolutions of Commutative Algebras. *Journal of Algebra*, 181, 426-448.
- Brown, R., 1982. Non-Abelian cohomology and the homotopy classification of maps. In *Homotopie Alge'brique et Algebre Locale, Conf. Marseille-Luminy 1982*, 3-114.
- Brown, R., 1984. Coproducts of crossed P-modules: applications to second homotopy groups and to the homology of groups. *Topology*, 23 3, 337-345.
- Brown, R., Higgins, P. J., 1981. The equivalence of  $\infty$  –groupoids and crossed complexes. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, 22 4, 371-386.
- Brown, R., Huebschmann, J., 1982. Identities among relations. *Low dimensional topology*, Ed. R. Brown and TL Thickstun, London Math. Soc. Lecture Notes, 46, 153-202.
- Ellis, G. J., 1988. Higher Dimensional Crossed Modules of Algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 52, 3, 277-282.
- İşler, N., 2022. Lie cebirlerinin çaprazlanmış kareleri ve morfizmleri için izomorfizm teoremleri, Yüksek lisans tezi, Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Burdur.
- Porter, T., 1986. Homology of Commutative Algebras and an Invariant of Simis and Vasconcelos. *Journal of Algebra*, 99, 458-465.
- Üçeş, Ö., 2016. Yüksek mertebeden leibniz çaprazlanmış modüller, Yüksek lisans tezi, Osmaniye Karamanoglu Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi, Eskişehir.
- Whitehead, J.H.C., 1949. Combinatorial Homotopy II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55, 5, 453-496.