

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÖZEL SİNGÜLER EĞRİLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Bahar DOĞAN YAZICI

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

ARALIK 2022

**T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ÖZEL SİNGÜLER EĞRİLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

Bahar DOĞAN YAZICI

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Murat TOSUN

ARALIK 2022

Bahar DOĞAN YAZICI tarafından hazırlanan “ÖZEL SİNGÜLER EĞRİLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE” adlı tez çalışması 30.12.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :

Jüri Üyesi :



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “ÖZEL SİNGÜLER EĞRİLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(...../...../20.....).

(imza)

Bahar Doğan Yazıcı



Her zaman yanımda olan eşime, aileme ve tüm hocalarıma ithafen...



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, her konuda bilgi ve ilgisini benden esirgemeyen, tezimin planlanmasından oluşturulmasına kadar tüm aşamalarında desteklerini esirgemeyen, teşvik eden değerli danışman hocam Prof. Dr. Murat Tosun'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam sırasında bilgi ve deneyimlerini benimle paylaşan, bize gerek bilgi gerek ekip ortamı sunan Sakarya Üniversitesi Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine teşekkür ederim.

Her zaman beni destekleyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi değerli hocam Prof. Dr. Sıddıka Özkaldı Karakuş'a ve her alanda yardımlarını hissettiğim başta Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü Bölüm Başkanı değerli hocam Doç. Dr. Osman Zeki Okuyucu'ya ve bütün Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatımın her alanında desteklerini, sevgilerini hissettiğim, eğitimim için büyük fedakârlıklarda bulunan değerli eşim Mehmet Şükrü Yazıcı'ya ve değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Bahar DOĞAN YAZICI



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
ŞEKİL LİSTESİ	xv
ÖZET	xvii
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. Öklidyen Uzayda Eğriler Teorisi	5
2.2. Öklidyen Uzayda Yüzeyler Teorisi ve Regle Yüzeyler	11
2.3. Öklidyen Geoemetride Temel Singülerite Teori	14
3. ÖKLİD UZAYINDA FRAMED EĞRİLER VE FRAMED YÜZEYLER.....	19
3.1. Framed Eğrilerin Temel Özellikleri	19
3.2. 3-Boyutlu Öklidyen Uzayda Framed Eğriler	23
3.3. Framed Eğrilerin Uyarlanmış Çatıları	26
3.4. Framed Yüzeylerin Temel Özellikleri.....	31
4. ÖZEL FRAMED DÜZLEM EĞRİLERİ	35
4.1. Framed Normal Eğriler	35
4.1.1. Framed normal eğrilerin temel özellikleri.....	35
4.1.2. Framed normal eğrilerin karakterizasyonları	37
4.2. Framed Rektifiyan Eğrilerin Sınıflandırılması.....	47
4.2.1. Framed rektifiyan eğriler	47
4.2.2. Framed küresel eğrilerin genişlemesi yardımıyla framed rektifiyan eğriler	49
5. FRAMED EĞRİLER İÇİN BİR DİFERANSİYEL DENKLEM VE UYGULAMALARI.....	57
5.1. Framed Eğrilerin Uzaklık Kare Fonksiyonları ve Genel Bir Diferansiyel Denklem	57
5.2. Framed Eğriler için Genel Diferansiyel Denklemin Uygulamaları	61
5.2.1. Framed normal eğriler için bir diferansiyel denklem.....	61
5.2.2. Framed rektifiyan eğriler için bir diferansiyel denklem.....	63
5.2.3. Framed helisler için bir diferansiyel denklem.....	65
6. FRAMED EĞRİLERİN ADJOİNT EĞRİLERİ	71
6.1. Framed Eğrilerin Genel Çatısına Göre Adjoint Eğriler	71
6.2. Framed Eğrilerin Frenet-Tipi Çatısına Göre Adjoint Eğriler.....	76
6.3. Frenet-Tipi Framed Eğrilerin Adjoint Eğrileri ile Regle Yüzeyler	78
6.4. Frenet-Tipi Framed Eğrilerin Adjoint Eğrilerinin Özel Yüzeyleri	82
6.4.1. Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin normal yüzeyleri	83
6.4.2. Framed yüzey olarak Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin normal yüzeyleri	86

6.4.3. Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin binormal yüzeyleri	92
6.4.4. Framed yüzey olarak Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin binormal yüzeyleri	96
6.4.5. Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin genelleştirilmiş normal yüzeyleri	103
6.4.6. Framed yüzey olarak Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin genelleştirilmiş normal yüzeyleri	109
KAYNAKLAR.....	123
ÖZGEÇMİŞ.....	127



SİMGELER

$C \times \mathbb{R}$	: Cuspidal edge
SW	: Swallowtail
$CC\mathbb{R}$	: Cuspidal cross cap
Δ_2	: 3-boyutlu Stiefel manifoldu
$\{v, \eta_1, \eta_2\}$	: Framed eğrilerin genel çatısı
$\{v, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$	: Framed eğrilerin uyarlanmış çatısı
(l, m, n, α)	: Genel çatıya göre framed eğrilikler
(p, q, α)	: Uyarlanmış çatıya göre framed eğrilikler
$d^2(s)$	: Uzaklık kare fonksiyonu
(δ, μ_1, μ_2)	: Framed adjoint eğri
$\{\omega, \mu_1, \mu_2\}$	: Framed adjoint eğrilerin genel çatısı
$(l_\delta, m_\delta, n_\delta, \alpha_\delta)$	: Genel çatıya göre framed adjoint eğrilerin eğrilikleri
$(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$	: Frenet-tipi framed adjoint eğri
$(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\alpha})$	: Uyarlanmış çatıya göre framed adjoint eğrilerin eğrilikleri
$\{\bar{\omega}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}$	: Framed adjoint eğrilerin uyarlanmış çatısı
$\sigma(s)$	: Striksiyon eğrisi
$\varphi_\delta(s, u)$	: Frenet-tipi adjoint eğrilerin normal yüzeyleri
$\phi_\delta(s, u)$	: Frenet-tipi adjoint eğrilerin binormal yüzeyleri
$\Phi_\delta(s, u)$	: Frenet-tipi adjoint eğrilerin genelleştirilmiş normal yüzeyleri
S	: Singüler nokta kümesi
ξ	: Null vektör alanı
ζ	: Singüler eğri



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1. Ordinary cusp singülerliği.....	15
Şekil 2.2. Düzlem eğrilerinde singüler noktaların çeşitleri.....	15
Şekil 3.1. $\gamma(s)$ Frenet-tipi framed eğrisi.....	29
Şekil 3.2. $\gamma(s)$ framed küresel eğrisi.....	30
Şekil 3.3. $C \times \mathbb{R}$, SW , $CC\mathbb{R}$	33
Şekil 4.1. Framed normal eğri olarak küresel nephroid eğrisi.....	46
Şekil 4.2. S^2 küresi üzerinde küresel nephroid eğrisi.....	46
Şekil 4.3. $w(s)$ framed küresel eğrisinin genişlemesi ile $\gamma(s)$ framed rektifiyan eğrisi.....	56
Şekil 5.1. (5.7) denklemi ile verilen Frenet-tipi framed eğrisi.....	60
Şekil 5.2. (5.7) denklemi ile verilen Frenet-tipi framed eğrisinin diğer bir görünümü.....	60
Şekil 5.3. $\gamma(s)$ küresel kardiod eğrisi.....	63
Şekil 5.4. Framed helis olarak $\gamma(s)$ astroid eğrisi.....	69
Şekil 6.1. $\omega(s) = \eta_2(s)$ olarak framed düzlemleri.....	72
Şekil 6.2. $\gamma(s)$ framed eğrisi.....	81
Şekil 6.3. δ_1 regüler adjoint eğri.....	81
Şekil 6.4. δ_2 singüler adjoint eğri.....	82
Şekil 6.5. $\varphi(s, u)$ regle yüzeyi.....	82
Şekil 6.6. $\bar{\delta}_1(s)$ regüler adjoint eğrisinin M_1 normal yüzeyi.....	119
Şekil 6.7. $\bar{\delta}_2(s)$ singüler adjoint eğrisinin $\bar{M}_1$ normal yüzeyi.....	119
Şekil 6.8. $\bar{\delta}_1(s)$ regüler adjoint eğrisinin M_2 binormal yüzeyi.....	120
Şekil 6.9. $\bar{\delta}_2(s)$ singüler adjoint eğrisinin $\bar{M}_2$ binormal yüzeyi.....	120
Şekil 6.10. $\bar{\delta}_1(s)$ regüler adjoint eğrisinin M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyi.....	121
Şekil 6.11. $\bar{\delta}_2(s)$ singüler adjoint eğrisinin $\bar{M}_3$ genelleştirilmiş normal yüzeyi.....	121



ÖZEL SİNGÜLER EĞRİLERİN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

ÖZET

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olup, literatür incelemeleri verilmiştir.

İkinci bölümde Öklidyen uzayda eğri teori, yüzey teori ve temel singülerite teori için temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde özel bir singüler eğri olan framed eğriler tanıtılmıştır ve ayrıntılı olarak temel tanım ve teoremler verilmiştir. Framed eğrilerin varlık ve teklik koşulları, üç boyutlu Öklidyen uzayda framed eğriler, framed eğrilerin Bishop-tipi çatısı, framed eğrilerin Frenet-tipi çatısı ve framed eğrilerin Sabban-tipi çatısı verilmiştir. Ayrıca singüler bir yüzey olabilen framed yüzey teorisi tanıtılmıştır. Framed yüzeylerin temel değişmezleri, framed yüzeylerin eğrilikleri verilmiştir. Bu yapılar yardımıyla framed yüzeylerin cuspidal edge, swallowtail ve cuspidal cross cap yapılarına lokal difeomorfik olma şartları incelenmiştir.

Dördüncü bölümden itibaren tezin orjinal kısmı başlamaktadır. Dördüncü bölümde özel framed düzlem eğrileri tanıtılmıştır. İlk olarak framed normal eğriler ve karakterizasyonları verilmiştir. Bir framed normal eğrinin framed küresel eğri olması için gerek ve yeter koşullar ifade edilmiştir. Daha sonra framed küresel eğrilerin genişlemesi yardımıyla framed rektifiyan eğriler incelenmiştir. Her framed küresel eğri ile oluşturulan genişlemenin bir framed rektifiyan eğri olmayabileceği gösterilmiştir. Framed küresel eğri ile oluşturulan genişleme sonucu elde edilen framed rektifiyan eğrinin framed vektörleri ve framed eğrilikleri verilmiştir.

Beşinci bölümde framed eğriler için bir diferansiyel denklem tanıtılmıştır. Bu diferansiyel denklemin yapısı hakkında bazı önermeler ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, elde edilen diferansiyel denklemin dördüncü bölümde tanıtılan framed normal eğri, framed rektifiyan eğriler ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Diğer yandan, bu diferansiyel denklem sayesinde regüler helis eğrilerinin bir genellemesi olan framed helisler için yeni bir karakterizasyon verilmiştir.

Altıncı bölümde, özel bir integral eğrisi olan framed eğrilerin adjoint eğrileri tanımlanmıştır. İlk olarak framed eğrilerin genel çatısına göre adjoint eğriler verilmiştir. Daha sonra framed eğrilerin Frenet-tipi çatısına göre adjoint eğriler verilmiştir. Framed temel eğri ve adjoint eğrisi arasındaki ilişkiler açıklanmıştır. Bir framed adjoint eğrisinin framed Bertrand ve framed Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter koşullar ifade edilmiştir. Ayrıca, dayanak eğrisi bir framed eğri, doğrultaman vektörü ise regüler bir adjoint eğri olan regle yüzeyler tanıtılmıştır. Son olarak, framed adjoint eğrilerinin özel yüzeyleri olan normal yüzeyler, binormal yüzeyler ve genelleştirilmiş normal yüzeyler verilmiştir. Framed adjoint eğrilerinin normal, binormal ve genelleştirilmiş normal yüzeylerinin silindirik olma, açılabilir olma koşulları incelenmiştir ve striksiyon eğrileri verilmiştir. Ayrıca bu yüzeylerin tüm geometrik yapılarının yanı sıra singülerite tipleri incelenmiştir. İlk olarak framed eğrilerin adjoint eğrilerinin normal, binormal ve genelleştirilmiş normal yüzeylerinin

singüler nokta kümeleri oluşturulmuştur ve framed yüzey teorisi yardımıyla singüler noktalarının dejenere olmayan bir singüler nokta olması için koşullar verilmiştir. Daha sonra framed eğrilerin adjoint eğrilerinin normal, binormal ve genelleştirilmiş normal yüzeylerinin cross-cap, cuspidal edge, swallowtail ve cuspidal cross cap yapılarına lokal difeomorfik olma koşulları elde edilmiştir.



ON THE GEOMETRY OF SPECIAL SINGULAR CURVES

SUMMARY

This thesis consists of six chapters. The first chapter is the introduction and literature reviews are given.

In the second chapter, basic definitions and theorems for curve theory, surface theory and basic singularity theory in Euclidean space are given. For the theory of curves in Euclidean geometry, basic definitions such as regular curve, unit speed curve, Frenet-Serret formulas, integral curves, helices, Bertrand curves, Mannheim curves, Bishop frame, spherical curves, Sabban frame are given. For the theory of surfaces in Euclidean geometry, basic definitions such as patch, regular surface, surface normal, singular points of the surface, shape operator, Gaussian curvature, mean curvature, ruled surfaces, distribution parameter, developable ruled surfaces, cylindrical surfaces, cone surfaces, striction points, striction curve, normal surfaces, binormal surfaces, generalized normal surfaces are given. For the basic singularity theory in Euclidean geometry, definitions of ordinary cusp singularity in the plane, types of singular points in the plane, ordinary inflection singularity, A_k -singularity, cuspidal-edge, swallowtail and cuspidal cross cap are given.

In the third chapter, framed curves, which are a special singular curve, are introduced and basic definitions and theorems are given in detail. First, the definition of a framed curve in an n -dimensional Euclidean space is given. Existence and uniqueness theorems of framed curves are expressed by using the existence and uniqueness conditions of differential equations. Then, framed curves in three-dimensional Euclidean space, Bishop-type frame of framed curves, Frenet-type frame of framed curves and Sabban-type frame of framed curves are given. Also, the theory of framed surface, which can be a singular surface, is introduced. Fundamental invariants of framed surfaces and curvatures of framed surfaces are given. With the help of these structures, the local diffeomorphic conditions of the cuspidal edge, swallowtail and cuspidal cross cap structures of the framed surfaces were investigated.

From the fourth chapter, the original part of the thesis begins. In the fourth chapter, special framed plane curves are introduced. First, framed normal curves and their characterizations are given. Framed normal curves are considered as curves lying in the plane formed by the generalized normal and generalized binormal vectors of the position vectors of the framed curves. Some equations describing the relationships between framed curvatures of framed normal curves have been obtained. The behavior of these equations at regular and singular points has been investigated. The fact that a regular normal curve is a regular spherical curve, and a regular spherical curve is a regular normal curve has led to the investigation of the relationship between framed normal curves and framed spherical curves. Necessary and sufficient conditions are expressed for a framed normal curve to be a framed spherical curve. An important finding is that given a framed curve with at least one non-singular point, the necessary and sufficient condition for the curve to be a framed normal curve is a framed spherical

curve. Then, the framed rectifying curves were examined with the help of the dilation of the framed spherical curves. First, some theorems are stated for a framed curve to be a framed rectifying curve. The conditions that the framed curvature of the framed rectifying curves must meet are reminded. As a method, a moving frame was first created for framed spherical curves. Then, by using the frame elements obtained for framed spherical curves, the relationship with framed rectifying curves was examined. It has been shown that the dilation created by each framed spherical curve may not be a framed rectifying curve. Framed vectors and framed curves of the framed rectifying curve obtained because of the dilation created by the framed spherical curve are given.

In the fifth chapter, a differential equation for framed curves is introduced. First, the squared distance functions of the framed curves are introduced and a new function $h = \langle \gamma, \nu \rangle$ is given by using the distance squared function. A general differential equation is given for framed curves by using the squared distance function and the function h obtained from the distance squared function. Some propositions and conclusions about the structure of this differential equation are given. The general differential equation given for framed curves is a fourth-order differential equation with respect to the differential equation distance function if the curve is a regular framed curve, if the curve is a singular framed curve, it is a third-order differential equation with respect to the differential equation the function h . In addition, the relationship between the obtained differential equation and the framed normal curve, which was introduced in the fourth chapter, and the framed rectifying curves were examined. On the other hand, thanks to this differential equation, a new characterization is given for framed helices, which is a generalization of regular helix curves. The characterization given for framed helices in the literature is only a characterization based on their generalized curvature. In this thesis, the characterization created by using a general differential equation for framed curves is a characterization that includes the function that determines the singular points of the framed curve. At the end of the chapter, some examples supporting general differential equation theories for framed curves, theorems examining the relationship of framed normal and framed rectifying curves with this differential equation, and newly created characterizations for framed helices are given.

In the sixth chapter, adjoint curves of framed curves, which are a special integral curve, are defined. First, adjoint curves are given according to the general frame of framed curves. The relationships between the adjoint curves created according to the general frame and the framed vectors and framed curvatures of the framed curves are examined. Necessary and sufficient conditions are expressed for a framed adjoint curve to be a framed Bertrand and framed Mannheim curve. Then, adjoint curves are given according to the Frenet-type frame of the framed curves. The relationships between the framed base curve and the adjoint curve are explained. The relationships between the adjoint curves created according to the Frenet-type frame and the framed vectors and framed curvatures of the Frenet-type framed curves are investigated. It has been concluded that the adjoint curves formed according to the Frenet-type frame cannot be a planar curve, and if the Frenet-type framed curve is a framed helix, the adjoint curve is also a framed helix. In addition, ruled surfaces, whose base curve is a framed curve and whose direction vector is a regular adjoint curve, are introduced. With this ruled surface, some geometric characterizations such as being developable and cylindrical are included. Moreover, normal surfaces, binormal surfaces and generalized normal surfaces, which are the special surfaces of framed adjoint curves,

are given. Firstly, the normal surface M_1 is introduced which the base curve is an adjoint curve and direction is the generalized normal vector of the adjoint curve. The conditions for the surface M_1 to be developable have been obtained. It has been stated and proven that the surface M_1 is not a cylindrical surface. Conditions are expressed so that the striction curve of the surface M_1 is the adjoint curve, which is the base curve. In addition, all geometric structures of these surfaces as well as singularity types were examined. First, the singular point set of the surface is expressed as two separate sets, but using the general structure of framed curves, it is shown that it has only one singular set of points. Then, the cross-cap conditions of the surface M_1 are given for the created singular point set. Later, the surface is considered as a framed surface since it has singular points. Using the framed surface theory, a moving frame of the surface M_1 is constructed. In addition, the curvatures of the surface are expressed. After showing that the singular points of the surface M_1 are non-degenerate singular points, the cuspidal-edge, swallowtail and cuspidal cross cap structures of the surface were given local diffeomorphic conditions. Secondly, the binormal surface M_2 is introduced which the base curve is an adjoint curve and direction is the generalized binormal vector of the adjoint curve. Similar to the surface M_1 , the geometric structure of the surface M_2 was examined and singularity types were determined. Also, the singular points of the surface M_2 were shown to be non-degenerate singular points, but the surface proved not locally diffeomorphic to a cuspidal-edge, swallowtail, and cuspidal cross cap structures. Finally, the base curve, an adjoint curve, and the directrix of the generalized normal and generalized binormal vectors, the generalized normal surface M_3 is introduced. It is clearly stated that the generalized normal surface M_3 is a generalization of both the normal surface M_1 and the binormal surface M_2 . The singular point sets of the surface M_3 were formed as two separate sets. It is shown that, unlike the M_1 and M_2 surfaces, the surface M_3 has two sets of singular points. Moreover, necessary and sufficient conditions are expressed for the surface M_3 to be cross cap with respect to two separate singular point sets. After showing that the singular points are non-degenerate singular points for two separate singular point sets of the surface M_3 , the conditions for local diffeomorphic to the cuspidal edge, swallowtail and cuspidal cross cap structures are explained. At the end of the chapter, a Frenet-type framed curve is given and a regular adjoint curve and a singular adjoint curve are formed. Then, normal surface, binormal surface and generalized normal surface, whose base curve is a regular adjoint curve, are introduced. In addition, normal surface, binormal surface and generalized normal surface, whose base curve is a singular adjoint curve, are given. Therefore, some figures are given for the six ruled surfaces created. Therefore, this example has been an example that supports the theory.

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride eğriler, eğri aileleri, özel eğriler, yüzeyler çeşitli uzaylarda uzun yıllardır birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Eğriler teorisinde bir eğrinin sabit nicelikleri olan eğrilikleri ve burulmalarını tanımlayabilmek oldukça önemlidir. Bu tanımlamalarla eğrinin ilgili uzaydaki geometrik yapısı gibi birçok özellikleri araştırılmıştır. Tanımlanabilen eğrilikler ve burulmalar sayesinde bir eğrinin Frenet-Serret formülleri verilmiştir [1, 2].

Burada en hassas olan noktalardan biri bu tanımlamaları yapabilmek için eğrinin regüler bir eğri olma gerçeğidir. Genellikle literatürde çalışmalar bu durumu içermemiştir. Çünkü eğrinin teğet vektörü bir singüler noktada sürekli değildir. Dolayısıyla regüler eğriler için verilen teğet vektör alanı, normal vektör alanı, binormal vektör alanı, eğrilik ve burulma gibi Frenet elemanları ve bunlara bağlı Frenet formülleri singüler eğriler için verilememiştir. Dolayısıyla eğrilik ve burulma verilemediğinden diferansiyel geometride oldukça önemli bir teorem olan eğrilğin temel teoremi ifade edilememiştir.

Son zamanlarda birçok matematikçi bu durumu belirli koşullar altında ele alarak singüler eğriler için önemli çalışmalar yayınlamışlardır. Dolayısıyla artık singülerite teoride önemli ölçüde gelişmeler mevcuttur. Singülerite teoride singüler noktaların birçok çeşitleri bulunmaktadır. Bir düzlem eğrisi için singüler noktalar Rovenski tarafından sınıflandırılmıştır [3]. Eğri ve yüzey teorisi için kullanılabilecek diğer bir singülerite türü A_k - singülerliğidir [4-6].

Son yıllarda singüler noktalara sahip bir eğriyi incelemek ve belirli koşullar ile hareketli bir çatı tanımlayabilmek için ilk olarak düzlemde Legendre eğrileri [5-7]. Öklidyen düzlemde singüler bir eğri olabilen Legendre eğriler için birçok geometrik yapı inşa edilmiştir [7-10]. Daha sonra bu durum genelleştirilerek uzayda framed eğriler tanıtılmıştır [11]. Bir framed eğri singüler noktalara sahip hareketli bir çatıyla birlikte diferansiyellenebilir bir uzay eğrisidir. Honda ve Takahashi framed eğrilerin hem düzlemde Legendre eğrilerinin bir genellemesi hem de lineer bağımsız koşullarla regüler eğrilerin bir genellemesi olduğunu ifade etmişlerdir [11]. Ayrıca her singüler

noktaya sahip bir eğrinin de framed eğri olmayabileceği [12] çalışmasında açıklanmıştır.

Fukunaga ve Takahashi tarafından eğriler teorisi için oldukça önemli olan eğriliklerin varlık ve teklik teoremleri verilmiştir [12]. Ayrıca, framed eğriler için uyarlanmış çatılar verilmiştir [11, 13, 14]. Diğer yandan özel bir eğri olan ve Frenet vektörleri ile oluşturulan rektifiyan eğriler Chen tarafından tanımlanmıştır [15]. Regüler rektifiyan eğrilerin bir genellemesi olan hem regüler hem de singüler olabilen framed rektifiyan eğriler ise Wang ve Pei tarafından tanımlanmıştır [14]. Framed rektifiyan eğrilerin framed helisler ve bir Darboux vektörü ile ilişkileri açıklanmıştır [14].

Framed eğriler için en yeni çalışmalardan biri de framed eğrilerin Bertrand ve Mannheim eğrileri çalışmasıdır. Bu çalışmada framed eğriler kullanılarak singüler eğrilerin Bertrand ve Mannheim eğrileri araştırılmıştır. Bunun yanı sıra Honda ve Takahashi regüler eğriler için Bertrand ve Mannheim eğrilerini oluştururken bazı koşulların eksik olduğunu vurgulamışlar ve bu koşulu da çalışmalarına dahil etmişlerdir. Bu koşul non-dejenere olma koşuludur. Eğriler için bu koşul her $s \in I$ için $\gamma'(s) \wedge \gamma''(s) \neq 0$ olma koşuludur. Çalışmanın en güzel sonuçlarından biri ise regüler eğrilerin Bertrand ve Mannheim eğrileri aynı değil iken framed eğrilerin Bertrand ve Mannheim eğrilerinin denk olduğu sonucudur [16].

2019 yılında Fukunaga ve Takahashi, bir singüler yüzey olan framed yüzeyleri tanıtmışlardır [17]. Framed yüzeyler için hareketli bir çatı tanımlamışlar ve framed yüzeylerin temel değişmez fonksiyonlarını tanımlamışlardır. Yüzeyin singüler noktalarını bu temel değişmez fonksiyonlar yardımıyla tanımlamışlardır. Literatürde singüler yüzeyler için en yaygın örneklerden olan cuspidal-edge ve swallowtail yüzeylerinin framed yüzey olduklarını göstermişlerdir [17]-[20].

Diferansiyel geometride özel eğri denilen yapılar literatürde geniş bir yere sahiptir. Özel eğriler belirli koşulları sağlayan ve uzayda ilginç sonuçları olan eğri türleridir. Regüler eğriler için özel düzlem eğrileri olan rektifiyan eğriler ve normal eğriler için kapsamlı çalışmalar bulunur. [15,21,22] de normal ve rektifiyan eğrilerin karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra rektifiyan eğrilerin küresel eğiler ile ilişkisine dayanarak her küresel eğri ile oluşturulan genişlemenin rektifiyan eğri olamayabileceği verilmiştir [23]. Ancak bu çalışmalar da eğriler teorisinin diğer alanlarında olduğu gibi regüler olmayan eğriler için çok kısıtlıdır. Bu duruma eğri

üzerine kurulamayan Frenet çatısının ve singüler noktaların yarattığı tanımsızlıkların sebep olduğu görülebilir. Ancak yukarıda bahsedilen singülerite teoriler ve bu teorinin bir alt dalı olan framed ve Legendre eğri teorisi sayesinde özel eğri türlerine de kapsamlı bir yaklaşımda bulunabiliriz.

Özel singüler eğriler olan framed normal eğriler ve framed rektifiyan eğriler için bir sınıflandırma Doğan Yazıcı, Özkaldı Karakuş ve Tosun tarafından tanıtılmıştır [24, 25].

Diferansiyel geometride eğrilerin uzaklık fonksiyonları normları ile tanımlanır. Ancak regüler olmayan bir eğri için özellikle diferansiyellenebilir fonksiyonlar için uzaklık kare fonksiyonları kullanılmıştır. Literatürde regüler bir Frenet eğrisi için dördüncü basamaktan bir diferansiyel denklem elde edilmiş ve regüler eğriler ile ilişkisi verilmiştir [26]. Doğan Yazıcı, Özkaldı Karakuş ve Tosun tarafından iki durumu da içine alan framed eğriler için bir diferansiyel denklem tanımlanmıştır. Bu diferansiyel denklemin bazı özel eğriler ile ilişkisi incelenmiştir. Tanımlanan diferansiyel denklem kullanılarak framed helislerle ilgili yeni bir karakterizasyon tanımlanmıştır [27].

Eğriler için integral eğrileri ise literatürde önemli bir yere sahiptir. Bu eğriler Frenet vektörleri ile de oluşturulabilir ve yönlü eğriler olarak bilinir [28]. İntegral eğrilerin örneklerinden biri de regüler eğrinin binormal vektörü ile oluşturulan adjoint eğrisidir [29]. Literatür incelendiğinde adjoint eğrileri sadece regüler eğriler için tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasında ise framed eğri teorisi ile framed eğrilerin adjoint eğrileri tanıtılmıştır. Elde edilen adjoint eğrilerin hem regüler hem de singüler olabileceği açıklanmıştır. Framed eğrilerin adjoint eğrilerinin geometrik yapılarının yanı sıra framed yüzey teorisi yardımıyla yüzey teorileri incelenmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde yararlanmak üzere eğriler teorisi, yüzeyler teorisi, temel singülerite teori hakkında bazı temel tanım ve teoremler verilmektedir.

2.1. Öklidyen Uzayda Eğriler Teorisi

Tanım 2.1.1. $A \neq \emptyset$ bir küme, V , $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$f : A \times A \rightarrow V$$
$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

fonksiyonu,

A1. $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

A2. $\forall P \in A, \forall u \in V$ için $f(P, Q) = \vec{u}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır.

koşullarını sağlarsa, A kümesine V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay denir [30, 31].

Tanım 2.1.2. A , V vektör uzayı ile birleşen n – boyutlu bir afin uzay olsun. Eğer V vektör uzayı bir iç çarpım uzayı ise A afin uzayına bir Öklid uzayı denir [30, 31].

Tanım 2.1.3. $V = \mathbb{R}^n$ ve $F = \mathbb{R}$ olmak üzere, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ için, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$g(x, y) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

biçiminde tanımlanırsa, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir iç çarpım olur. Bu iç çarpıma, $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklid iç çarpımı denir.

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

değerine de $\vec{x}$ vektörünün uzunluğu veya normu denir ve $\mathbb{R}^n$ uzayı üzerinde tanımlanan Öklid iç çarpımı ile $\mathbb{R}^n$ uzayına Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilebilir [30, 31].

Tanım 2.1.4. $I \subseteq \mathbb{R}$, $I = (a, b)$ bir açık alt aralık olmak üzere

$$\begin{aligned} \gamma: I &\rightarrow E^n \\ t &\rightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t)) \end{aligned}$$

diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde, $\gamma(I) \subset E^n$ alt kümesine E^n Öklid uzayında diferansiyellenebilir bir eğri denir [30, 31].

Tanım 2.1.5. $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$ bir eğri olsun.

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

vektörüne γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki hız vektörü denir. Bu vektör γ eğrisine $\gamma(t)$ noktasında teğet olan vektördür [30, 31].

Tanım 2.1.6. Her noktasında hız vektörü sıfırdan farklı olan eğri regüler eğri olarak adlandırılır. Yani, her $t \in I$ için $\gamma'(t) \neq \vec{0}$ oluyorsa (yani $\|\gamma'(t)\| \neq 0$) eğriye regüler eğri denir [32].

Tanım 2.1.7. Bir $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$ eğrisinin her $t \in I$ noktasındaki hız vektörü olan $\gamma'(t)$ vektörü birim vektör ise (yani $\|\gamma'(t)\| = 1$) γ eğrisine birim hızlı eğri denir [32].

Tanım 2.1.8. X , E^n uzayında bir vektör alanı ve $P \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, her $t \in I$ için,

$$\gamma(t_0) = P, \quad \gamma'(t) = X(\gamma(t))$$

koşullarını sağlayan, $\gamma: I \rightarrow E^n$ eğrisine, X vektör alanının integral eğrisi denir [31].

Teorem 2.1.9. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere

$$\begin{aligned} T(s) &= \gamma'(s), \\ N(s) &= \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}, \\ B(s) &= T(s) \wedge N(s) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektörlerin $\{T(s), N(s), B(s)\}$ üçlüsü bir ortonormal sistemdir [30, 32].

Tanım 2.1.10. E^3 uzayında verilen bir γ eğrisi boyunca elde edilen $T(s), N(s), B(s)$ vektörlerine, sırasıyla, γ eğrisinin teğet vektör alanı, asli normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir. Ayrıca, $\{T, N, B\}$ çatısına Frenet çatısı denir [32].

Tanım 2.1.11. $\forall s \in I$ için $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ şeklinde tanımlı κ fonksiyonuna γ eğrisinin eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s) \in \mathbb{R}$ reel sayısına da γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği denir [32].

Teorem 2.1.12. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, $\kappa > 0$ eğrilikli ve τ burulmalı birim hızlı bir eğri olsun. O halde,

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

formüllerine Frenet formülleri denir. (T, N, B, κ, τ) ise Frenet elemanları olarak adlandırılır [30, 32].

Teorem 2.1.13. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve $\kappa > 0$ ve τ sırasıyla, eğrilik ve burulma olsun. Dolayısıyla,

$$\kappa = \|\gamma''\| \text{ ve } \tau = \frac{\langle \gamma', \gamma'' \wedge \gamma''' \rangle}{\|\gamma''\|^2}$$

eşitlikleri sağlanır [32].

Tanım 2.1.14. 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet vektörlerinin herhangi ikisinin gerdiği düzlemlere farklı isimler verilir. $sp\{T, N\}$ düzlemine oskülatör düzlem, $sp\{N, B\}$ düzlemine normal düzlem, $sp\{T, B\}$ düzlemine rektifiyan düzlem denir [31].

Teorem 2.1.15. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. Eğrinin bir doğru olması için gerek ve yeter koşul $\kappa(s) = 0$ olmasıdır [32].

Teorem 2.1.16. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. Eğrinin düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $\forall s \in I$ için $\tau(s) = 0$ olmasıdır [32].

Teorem 2.1.17. $\gamma : I \rightarrow E^3$ herhangi bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet vektörleri, κ eğriliği ve τ burulması

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}, \\ B(t) &= \frac{\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}, \\ N(t) &= B(t) \wedge T(t), \\ k(t) &= \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}, \\ \tau(t) &= \frac{\langle \gamma'(t) \wedge \gamma''(t), \gamma'''(t) \rangle}{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|^2} \end{aligned}$$

formülleri ile bulunur [31].

Tanım 2.1.18. E^3 uzayında merkezi a ve yarıçapı r olan bir küre S^2 ile gösterilir ve $S^2 = \{x \in E^3 \mid \langle x - a, x - a \rangle = r^2\}$ şeklinde tanımlanır. $\gamma : I \rightarrow E^3$ eğrisi, S^2 küresi üzerinde yatıyor ise eğriye küresel eğri denir [30, 32].

Tanım 2.1.19. E^3 uzayında eğriliği sıfırdan farklı bir γ eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere, T vektör alanı, sabit bir U vektörüyle sabit açı yapıyorsa, γ eğrisine helis denir. Buna göre bir $\gamma : I \rightarrow E^3$ eğrisi verilsin Her $t \in I$ için $\theta = \text{sabit}$ iken $\langle T(t), U \rangle = \cos \theta$ koşulunu sağlayan bir U vektörü varsa, γ eğrisine helis denir. Bir helis eğrisinin hem eğriliği hem de burulması sıfırdan farklı ve sabit ise, bir dairesel helis adını alır [31].

Teorem 2.1.20. Bir γ eğrisinin helis olması için gerek ve yeter koşul $\frac{\tau}{\kappa}$ oranının sabit olmasıdır [31].

Tanım 2.1.21. E^3 uzayında verilen γ ve γ^* eğrilerinin karşılıklı noktaları birebir eşlenmek üzere, γ ve γ^* eğrilerinin karşılıklı eşlenen noktalarında normalleri aynı doğrultuda ise, γ eğrisine Bertrand eğrisi, γ^* eğrisine de γ eğrisinin Bertrand eş eğrisi denir. $\{\gamma, \gamma^*\}$ eğri çiftine de Bertrand eğri çifti denir [31].

Teorem 2.1.22. $\{\gamma, \gamma^*\}$ bir Bertrand eğri çifti olsun. $\gamma(t)$ eğrisinin normal vektör alanı $N(t)$ olmak üzere, bu iki eğri arasında, $\lambda \in \mathbb{R} / \{0\}$ için,

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + \lambda N(t)$$

eşitliği yazılabilir. γ ve γ^* eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir [31].

Tanım 2.1.23. E^3 uzayında verilen γ ve γ^* eğrilerinin karşılıklı noktaları birebir eşlenmek üzere, γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki asal normal vektörünün doğrultusu ile γ^* eğrisinin $\gamma^*(t)$ noktasındaki binormal vektörünün doğrultusu aynı ise γ eğrisine Mannheim eğrisi, γ^* eğrisine de γ eğrisinin Mannheim eş eğrisi denir. $\{\gamma, \gamma^*\}$ eğri çiftine de Mannheim eğri çifti denir [31].

Teorem 2.1.24. $\{\gamma, \gamma^*\}$ bir Mannheim eğri çifti olsun. $\gamma(t)$ eğrisinin asal normal vektör alanı $N(t)$ olmak üzere, bu iki eğri arasında, $\lambda \in \mathbb{R} / \{0\}$ için,

$$\gamma^*(t) = \gamma(t) + \lambda N(t)$$

eşitliği yazılabilir. γ ve γ^* eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir. Bu eşitliğin olması, $\{\gamma, \gamma^*\}$ çiftinin bir Mannheim eğri çifti olmasını gerektirmez [31].

Tanım 2.1.25. $\gamma: I \rightarrow E^3$ regüler birim hızlı eğrisi için konum vektörü her zaman rektifiyan düzlemde yatan eğrilere rektifiyan eğriler denir. E^3 uzayında γ rektifiyan

eğrisinin konum vektörü, λ ve μ keyfi diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\gamma(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)B(s)$$

denklemini sağlarlar [15].

Tanım 2.1.26. $\gamma: I \rightarrow E^3$ regüler birim hızlı eğrisi için konum vektörü her zaman oskülatör düzlemde yatan eğrilere oskülatör eğriler denir. E^3 uzayında γ oskülatör eğrisinin konum vektörü, λ ve μ keyfi diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\gamma(s) = \lambda(s)T(s) + \mu(s)N(s)$$

denklemini sağlarlar [33].

Tanım 2.1.27. $\gamma: I \rightarrow E^3$ regüler birim hızlı eğrisi için konum vektörü her zaman normal düzlemde yatan eğrilere normal eğriler denir. E^3 uzayında γ normal eğrisinin konum vektörü, λ ve μ keyfi diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$\gamma(s) = \lambda(s)N(s) + \mu(s)B(s)$$

denklemini sağlarlar [22].

Tanım 2.1.28. Bishop çatısı, regüler bir eğrinin sıfıra eşit olabilen ikinci türevi olduğunda bile, hareketli bir çatı tanımlamaya alternatif bir yaklaşımdır. Bir ortonormal çatının bir eğri boyunca paralel taşınması, çatının her bir bileşeninin paralel taşınmasıyla ifade edilebilir. Bishop çatısı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ -k_1 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

Burada, $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop üçlüsü, k_1 ve k_2 ise Bishop eğrilikleri olarak adlandırılır.

Frenet vektörleri ile arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi(s) & \sin \phi(s) \\ 0 & -\sin \phi(s) & \cos \phi(s) \end{bmatrix}$$

olarak verilir. Burada, $\phi(s) = \arctan\left(\frac{k_2}{k_1}\right)$, $\tau(s) = \phi'(s)$, $\kappa(s) = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$ dir.

Bishop eğrilikleri ise,

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa \cos \phi(s), \\ k_2 &= \kappa \sin \phi(s) \end{aligned}$$

şeklindedir [34].

Tanım 2.1.29. $\gamma: I \rightarrow S^2$, $\gamma'(s) = t(s)$ ile regüler birim hızlı küresel eğri olsun. Eğer $d(s) = \gamma(s) \wedge t(s)$ şeklinde tanımlanırsa $\{\gamma(s), t(s), d(s)\}$ ortonormal bir çatıdır. Bu çatı γ küresel eğrisinin Sabban çatısı olarak adlandırılır ve Frenet-Serret tipi formüller

$$\begin{pmatrix} \gamma'(s) \\ t'(s) \\ d'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_g(s) \\ 0 & -\kappa_g(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ t(s) \\ d(s) \end{pmatrix}$$

ile verilir. Burada κ_g geodezik eğriliği,

$$\kappa_g(s) = \det(\gamma(s), t(s), t'(s))$$

ile tanımlanır [35].

Tanım 2.1.30. $\gamma: I \rightarrow E^3$, $\tau \neq 0$ burulması ile tanımlı regüler birim hızlı bir eğri olsun. γ eğrisinin Frenet çatısı $\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha\}$ ile verilsin. γ eğrisinin adjoint eğrisi,

$$\beta(s) = \int_{s_0}^s B_\alpha(s) ds$$

ile tanımlanır [29].

2.2. Öklidyen Uzayda Yüzeyler Teorisi ve Regle Yüzeyler

Tanım 2.2.1. $M \subset E^3$ ve $X: U \subset E^2 \rightarrow M \subset E^3$ diferensiyellenebilir dönüşümü E^3 uzayında bir koordinat yaması (lokal yüzey) oluşturur. Eğer, bu yama regülerse M cümlesine E^3 uzayında regüler bir yüzey denir [31].

Tanım 2.2.2. M yüzeyi, $X : U \subset E^2 \rightarrow M \subset E^3$ regüler yaması ile tanımlansın. Parametrik denklemi ile verilen M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}$$

şeklinde tanımlanır [31].

Tanım 2.2.3. Bir yüzeyin regülerliğini bozan noktalara yüzeyin singüler noktaları denir. Parametrik denklem ile verilen bir yüzeyin singüler noktaları,

$$X_u(q) \wedge X_v(q) = 0$$

olan noktalardır. Eğrilerde, teğet doğrusu tanımlanamayan noktalara eğrinin singüler noktaları dediğimiz gibi, yüzeylerde de yüzeye teğet düzlemin tanımlı olmadığı noktalara singüler nokta denir.

Yüzeylerde, kırılma noktalarında, sivri uç noktalarda veya X_u ve X_v nin birbirine paralel olduğu noktalarda singüler nokta vardır [31].

Tanım 2.2.4. N , yüzeyin birim normal vektör alanı, $\chi(M)$, M yüzeyinin vektör alanları uzayı ve D ise bir Riemann konneksiyonu olmak üzere

$$S(X_p) = D_{X_p} N = (X_p[a_1], X_p[a_2], X_p[a_3])$$

şeklinde tanımlı dönüşüme P noktasında şekil operatörü denir [30, 32].

Tanım 2.2.5. $M \subset E^3$ bir regüler yüzey olsun.

$$K : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S_p$$

fonksiyonuna $M \subset E^3$ yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu denir. Gauss eğriliği her yerde sıfır olan yüzeylere flat (düz) yüzeyler denir [32].

Tanım 2.2.6. $M \subset E^3$ bir regüler yüzey olsun.

$$H : M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$P \rightarrow H(P) = \frac{1}{2} \text{tr} S_p$$

fonksiyonuna $M \subset E^3$ yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu denir. Ortalama eğriliği sıfır olan yüzeylere minimal yüzeyler denir [32].

Tanım 2.2.7. $\gamma: I \rightarrow E^3$ bir eğri ve $\vec{d}(s)$, E^3 uzayında yönlü bir doğrunun birim doğrultman vektörü olsun. Bir regle yüzey, d doğrusunun $\gamma: I \rightarrow E^3$ eğrisine dayanarak hareketi ile oluşan özel bir yüzeydir ve

$$\varphi(s, u) = \gamma(s) + ud(s)$$

parametrik denklemi ile verilir. $u = 0$ iken $\gamma: I \rightarrow E^3$ eğrisine yüzeyin dayanak eğrisi denir. Eğer d vektörü sabitse yüzeye silindirik yüzey denir [2].

Tanım 2.2.8. M bir regle yüzey olmak üzere komşu iki doğrultmanın ortak dikmelerinin doğrultmanlar üzerinde bulunan ayaklarına boğaz (striksiyon) noktası denir [36].

Tanım 2.2.9. Bir regle yüzeyin bütün ana doğruları üzerindeki boğaz noktalarının geometrik yerine striksiyon eğrisi denir. Eğer M regle yüzeyi silindirik değil ise yüzeyin striksiyon eğrisi

$$\sigma(s) = \gamma(s) - \frac{\langle \gamma'(s), d'(s) \rangle}{\langle d'(s), d'(s) \rangle} d(s)$$

ile tanımlanır. Silindirik olmayan regle yüzeylerin singüler noktalarının striksiyon eğrisi üzerinde olduğu söylenebilir [39].

Tanım 2.2.10. M bir regle yüzey olmak üzere, regle yüzeyin komşu iki ana doğrusunun arasındaki en kısa mesafenin ana doğrular arasında bulunan açığa oranına regle yüzeyin dağılma parametresi denir ve

$$\delta = \frac{\det(\gamma'(s), d(s), d'(s))}{\langle d'(s), d'(s) \rangle}$$

denklemleri ile hesaplanır [36].

Tanım 2.2.11. M bir regle yüzey olmak üzere regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı olacak şekilde kalıyor ise regle yüzeye açılabilir denir [36].

Bir regle yüzeyin açılabilir olması için bazı karakterizasyonlar aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 2.2.12. i. M bir regle yüzey olmak üzere, M yüzeyinin açılabilir olabilmesi için gerek ve yeter koşul K Gauss eğriliği için $K = 0$ olmasıdır [37].

ii. Bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul dağılma parametresinin sıfır olmasıdır. Yani $\det(\gamma'(s), d(s), d'(s)) = 0$ olmasıdır [38].

Tanjant yüzeyi, koni, silindir ve düzlemler açılabilir regle yüzeylerdir.

Önerme 2.2.13. Eğer silindirik olmayan bir regle yüzeyin striksiyon eğrisi sabit ise regle yüzey bir konidir [39].

Tanım 2.2.14. $\gamma: I \rightarrow E^3$ bir eğri ve γ eğrisinin normal vektörü N ve binormal vektörü B iken sırasıyla

$$\begin{aligned}\varphi(s, u) &= \gamma(s) + uN(s), \\ \varphi(s, u) &= \gamma(s) + uB(s),\end{aligned}$$

regle yüzeylerine normal yüzey ve binormal yüzey adı verilir [39, 40].

Tanım 2.2.15. $\gamma: I \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri ve $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı olsun.

$q_n(s) = q_1(s)N(s) + q_2(s)B(s)$ iken

$$\varphi(s, u) = \gamma(s) + uq_n(s)$$

regle yüzeyine genelleştirilmiş normal yüzey denir. Burada $q_1(s)$ ve $q_2(s)$, $q_1^2(s) + q_2^2(s) = 1$ eşitliğini sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlardır [41].

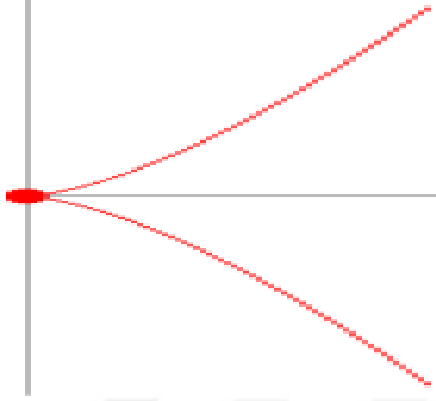
2.3. Öklidyen Geoemetrde Temel Singülerite Teori

Öklid geometride eğri ve yüzeylerin birçok singüler nokta sınıflandırmaları mevcuttur. Eğri ve yüzeyler için singüler nokta tanımlarını bir önceki kısımda vermiştik. Bu kısımda singüler nokta çeşitleri için bazı temel tanım ve teoremleri verelim. Temel bir singülerite çeşidi “ordinary cusp” noktalarıdır.

Tanım 2.3.1. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer

- i.) $\gamma'(s_0) = 0$,
- ii.) $\gamma''(s_0) \neq 0$ ve $\gamma'''(s_0) \neq 0$,
- iii.) $\gamma''(s_0)$ ve $\gamma'''(s_0)$ ve lineer bağımsızdır.

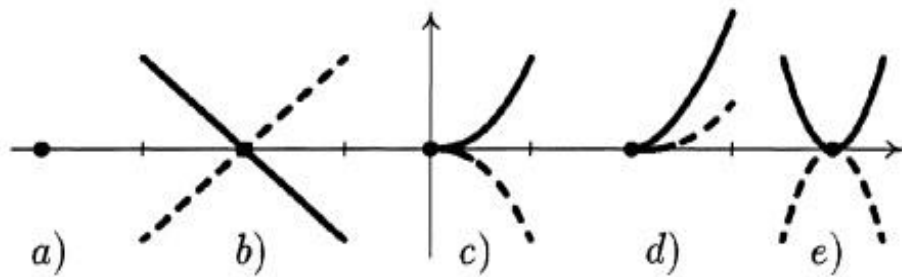
şartları sağlanır ise $\gamma:I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisi S_0 noktasında ordinary cusp singülerliğine sahiptir denir [42]. Öklidyen düzlemde bir ordinary cusp singülerliği (Şekil 2.1.)’de görülebilir.



Şekil 2.1. Ordinary cusp singülerliği.

Ayrıca, Rovenski tarafından düzlem eğrileri için singüler nokta sınıflandırmaları aşağıdaki gibi verilir [3] (Şekil 2.2.):

- a. İzole nokta: Singüler noktanın bir komşuluğu eğri üzerinde başka noktalar içermez.
- b. Çift nokta veya düğüm: Eğrinin iki dalı singüler noktada kesişir ancak teğet değildir.
- c. Birinci türden cusp noktası: Eğrinin iki dalı singüler noktadaki ortak yarı teğet doğrunun farklı taraflarından uzanır.
- d. İkinci türden cusp noktası: Eğrinin iki dalı singüler noktadaki ortak yarı teğet doğrunun bir tarafında yer alır.
- e. Öz-teğet noktası: Eğrinin iki dalı singüler noktada teğettir.



Şekil 2.2. Düzlem eğrilerinde singüler noktaların çeşitleri.

Örnek 2.3.2. $\gamma(s) = (s^2, s^3)$ eğrisi için $s_0 = 0$ bir ordinary cusp noktasıdır. Yani birinci türden bir cusp noktasıdır. $\gamma(s) = (s^2, s^4 + s^5)$ eğrisi için $s_0 = 0$ bir ikinci türden bir cusp noktasıdır. $\gamma(s) = (2s - s^2, 3s - s^3)$ eğrisi için $s_0 = 1$ bir singüler noktadır ve bu noktada yarı tanjant doğrusuna sahiptir [3].

Tanım 2.3.4. $\gamma: I \rightarrow S^2$ küresel bir eğri olsun. Eğrinin $\gamma(s_0)$ noktasında geodezik eğriliği için $k_g(s_0) = 0$ ve $k_g'(s_0) \neq 0$ ise $\gamma(s_0)$ noktasına ordinary inflection noktası denir [43].

Tanım 2.3.5. $F: (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^t, (s_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $f(s) = F_{x_0}(s, x_0)$ ile tanımlanan F fonksiyonuna f nin t -parametrelili açılımı denir [4].

Tanım 2.3.5. Bir f fonksiyonu s_0 noktasında, her $p = 1, \dots, k$ için $f^{(p)}(s_0) = 0$ ve $f^{(k+1)}(s_0) \neq 0$ şartlarını sağlarsa, f fonksiyonu s_0 noktasında A_k -singülerliğe sahiptir denir [4].

Tanım 2.3.6. F , f nin t -parametrelili açılımı ve $f(s)$ s_0 noktasında A_k -singüler olsun. $i = 1, 2, \dots, t$ ve λ_{ji} reel katsayılar olmak üzere

$$j^{(k-1)} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}(s, x_0) \right) (s_0) = \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{ji} (s - s_0)^j$$

eşitliğine s_0 noktasında $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ nin $(k-1)$ -jedi denir [4].

Tanım 2.3.7. F , f nin t -parametrelili açılımı ve $f(s)$ A - noktasında A_k -singüler olsun. s_0 noktasında $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ nin $(k-1)$ -jedi için λ_{ji} katsayılarından oluşan matrisin rankı $k \leq t$ iken k ise F fonksiyonuna versal açılım denir [4].

Tanım 2.3.8. $D_F = \{ x \in \mathbb{R}^t \mid (s, x) \text{ noktasında } F = \frac{\partial F}{\partial s} = 0 \text{ olacak şekilde } s \text{ bulunur} \}$ cümlesine F fonksiyonunun diskriminant cümlesi denir [4].

Yüzeylerin singüler nokta çeşitleri literatürde cuspidal edge (sivri kenar), swallowtail (kuyruklu kenar) ve cuspidal cross cap (sivri çapraz kenar) olarak incelenir. Şimdi bu kavramları tanıtalım ve versal açılım ile ilişkilerini verelim:

Tanım 2.3.9.

$$C \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 = x_2^3\}$$

ile tanımlanan yüzeye cuspidal edge,

$$SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v; u, v \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanan yüzeye swallowtail ve

$$CC\mathbb{R} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = v, x_2 = -2u^3 + uv^2, x_3 = 3u^4 - u^2v^2; u, v \in \mathbb{R}\}$$

ile tanımlanan yüzeye cuspidal cross cap denir [44].

Teorem 2.3.10. $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^t, (s_0, x_0)) \rightarrow \mathbb{R}$, f nin t -parametrelili açılımı, $f(s)$, S_0 noktasında A_k -singüler ve F fonksiyonu versal açılım olsun. O halde,

1. $k = 2$ ise D_F cümlesi ile $C \times \mathbb{R}^{t-1}$ cümlesi lokal diffeomorftur.
2. $k = 3$ ise D_F cümlesi ile $SW \times \mathbb{R}^{t-2}$ cümlesi lokal diffeomorftur [45].



3. ÖKLİD UZAYINDA FRAMED EĞRİLER VE FRAMED YÜZEYLER

Bu kısımda tezimizi inşa ettiğimiz framed eğriler ve framed yüzeyler için temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. Framed Eğrilerin Temel Özellikleri

Singüler noktalara sahip bir eğriyi incelemek ve belirli koşullar ile hareketli bir çatı tanımlayabilmek için düzlemde Legendre eğrileri [5-7] ve uzayda framed eğriler [11] tanıtılmıştır. Aslında bir framed eğri singüler noktalara sahip hareketli bir çatıyla birlikte diferansiyellenebilir bir uzay eğrisidir. Bir framed eğri inşa edebilmek amacıyla literatürde “Stiefel Manifoldu” olarak bilinen bir yapı

$$\Delta_{n-1} = \left\{ \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \right. \\ \left. \langle \eta_i, \eta_i \rangle = 1, \langle \eta_j, \eta_j \rangle = 1, \langle \eta_i, \eta_j \rangle = 0, i, j = 1, \dots, n-1 \right\}$$

olarak tanımlanır. Bu manifold $n(n-1)/2$ boyutlu ve diferansiyellenebilirdir. Eğer $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1}) \in \Delta_{n-1}$ olarak alınırsa, $v = \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{n-1}$ şeklinde bir birim vektör tanımlanabilir. Buradan görülür ki, $(\eta, v) \in \Delta_{n-1}$ ve $\det(\eta, v) = 1$ olur. n -boyutlu Öklid uzayında framed eğri tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 3.1.1. Eğer her $s \in I$ ve $i = 1, \dots, n-1$ için $\langle \gamma'(s), \eta_i(s) \rangle = 0$ ise $(\gamma, \eta): I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ yapısına framed eğri denir. Eğer $\eta: I \rightarrow \Delta_{n-1}$ varsa $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir framed temel eğri olarak adlandırılır [11].

$\gamma(s)$ framed temel eğrisi boyunca $\{\eta(s), v(s)\}$ hareketli çatısı tanımlanabilir ve Frenet-Serret tipi formüller

$$\begin{pmatrix} v'(s) \\ \eta'(s) \end{pmatrix} = A(s) \begin{pmatrix} v(s) \\ \eta(s) \end{pmatrix}$$

ile verilebilir. Burada her $i, j = 1, \dots, n$ için $A(s) = (a_{ij}(s)) \in o(n)$ dir ve $o(n)$ tüm ters simetrik matrislerin kümesidir. Ayrıca, $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu

$$\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$$

şeklinde verilir. Açıkça söylenebilir ki v bir birim vektör olduğundan, S_0 noktasının γ eğrisinin bir singüler noktası olması için gerek ve yeter koşul $\alpha(s_0) = 0$ olmasıdır. Burada $(a_{ij}(s), \alpha(s))$ fonksiyonlarına framed eğrinin eğrilikleri adı verilir ve bu eğrilikler framed eğrileri ve singüler noktaları karakterize etmek için oldukça önemlidir [11].

Tanım 3.1.2. (γ, η) ve $(\gamma^*, \eta^*): I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ framed eğriler olsun. Eğer her $s \in I$ için $X \in SO(n)$ matrisi ve sabit bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü

$$\gamma^*(s) = X(\gamma(s)) + x, \quad \eta^*(s) = X(\eta(s))$$

eşitliğini sağlar ise (γ, η) ve (γ^*, η^*) framed eğrileri eştir denir. Burada, $SO(n)$ özel ortogonal matrislerin kümesidir [11].

Framed eğrilerin eğrilikleri için lineer bir diferansiyel denklem sistemi kullanılarak varlık ve teklik teoremleri ve ispatlarını verelim:

Teorem 3.1.3. $(a_{ij}(s), \alpha(s)): I \rightarrow o(n) \times \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $(a_{ij}(s), \alpha(s))$ eğriliklerine karşılık bir $(\gamma, \eta): I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ framed eğrisi vardır [11].

İspat. $s = s_0$ sabit değerli bir parametre seçelim. $i, j = 1, \dots, n$ için $F(s) \in M(s), A(s) = (a_{ij}(s)) \in o(n)$ iken

$$\frac{d}{ds} F(s) = A(s)F(s), \quad F(s_0) = I_n.$$

başlangıç değer problemini düşünelim. Burada $M(s)$, $n \times n$ tipinde matrislerin kümesi ve I_n ise birim matristir. Lineer basit diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliklerini kullanarak söyleyebiliriz ki $F(s)$ bir çözüme sahiptir. $A(s) \in o(n)$ olduğundan,

$$\frac{d}{ds} (F^t(s)F(s)) = \left(\frac{d}{ds} F^t(s) \right) F(s) + F^t(s) \left(\frac{d}{ds} F(s) \right) = F^t(s) (A^t(s) + A(s)) F(s) = 0.$$

bulunur. Dolayısıyla, sabittir. Buradan, $F^t(s)F(s) = F^t(s_0)F(s_0) = I_n$ elde edilir ve $F(s)$ bir ortogonal matristir. Kabul edelim ki $F(s) = (\eta_1(s), \dots, \eta_{n-1}(s), v(s))^t$ olsun. $(d/ds)(\det F(s)) = 0$ olduğundan, $\det F(s) = \det F(s_0) = \det I_n = 1$ elde edilir. O halde, $v(s) = \eta_1(s) \wedge \dots \wedge \eta_{n-1}(s)$ dir. $x \in \mathbb{R}^n$ bir nokta iken

$$\gamma'(s) = \alpha(s)v(s), \quad \gamma(s_0) = x$$

başlangıç değer problemini düşünelim. Lineer basit diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin varlık ve tekliklerini kullanarak söyleyebiliriz ki $\gamma(s)$ bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla, $(a_{ij}(s), \alpha(s))$ eğriliklerine karşılık bir $(\gamma, \eta): I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ framed eğrisi vardır.

Teklik teoremini ispatlayabilmek için iki önerme verelim:

Önerme 3.1.4. (γ, η) ve $(\gamma^*, \eta^*): I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ eş framed eğriler olsun. O halde onların eğrilikleri de eşittir [11].

İspat. (γ, η) ve $(\gamma^*, \eta^*): I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ eş framed eğriler olduğundan, $X \in SO(n)$ matrisi ve sabit bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü

$$\gamma^*(s) = X(\gamma(s)) + x, \quad \eta^*(s) = X(\eta(s))$$

özellikliğini sağlar. v vektörünün tanımından, $v^*(s) = X(v(s))$ yazılabilir. O halde,

$$a_{ij}^*(s) = \left\langle (\eta_i^*)'(s), \eta_j^*(s) \right\rangle = \left\langle X(\eta_i'(s)), X(\eta_j(s)) \right\rangle = \left\langle \eta_i'(s), \eta_j(s) \right\rangle = a_{ij}(s),$$

$$(\gamma^*)'(s) = X(\gamma'(s)) = X(\alpha(s)v(s)) = \alpha(s)X(v(s)) = \alpha(s)v^*(s)$$

olur. Dolayısıyla, $a_{ij}(s) = a_{ij}^*(s)$ ve $\alpha(s) = \alpha^*(s)$ olduğu görülür.

Önerme 3.1.5. (γ, η) ve $(\gamma^*, \eta^*): I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ aynı eğriliklere sahip framed eğri olsunlar. Eğer $(\gamma(s_0), \eta(s_0)) = (\gamma^*(s_0), \eta^*(s_0))$ olacak şekilde $s = s_0$ parametresi varsa, (γ, η) ve (γ^*, η^*) eştir [11].

İspat. Kabul edelim ki $\eta_n(s) = v(s)$ olsun. $f(s) = \sum_{i=1}^n \langle \eta_i(s), \eta_i^*(s) \rangle$ ile bir $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonunu tanımlayalım. $a_{ij}(s) = a_{ij}^*(s)$ ve $a_{ij}(s) = -a_{ji}(s)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} f'(s) &= \sum_{i=1}^n \left(\langle \eta_i'(s), \eta_i^*(s) \rangle + \langle \eta_i(s), (\eta_i^*)'(s) \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left\langle \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(s) \eta_j(s) \right), \eta_i^*(s) \right\rangle + \left\langle \eta_i(s), \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^*(s) \eta_j^*(s) \right) \right\rangle \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_{ij}(s) + a_{ji}(s)) \langle \eta_i(s), \eta_j^*(s) \rangle = 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla, f sabittir. Ayrıca, $\eta(s_0) = \eta(s_0)$ ve buradan $v(s_0) = v^*(s_0)$ dir. O halde $f(s_0) = n$ olur ve f fonksiyonunun sabit değeri n dir. Cauchy- Schwarz eşitsizliğine göre her $i = 1, \dots, n$ için

$$\langle \eta_i(s), \eta_i^*(s) \rangle \leq \|\eta_i(s)\| \|\eta_i^*(s)\| = 1$$

bulunur. Eğer bu eşitsizliklerden bir tanesi katı olsaydı, $f(s)$ fonksiyonunun değeri n den küçük olurdu. O halde bu eşitsizlikler birbirine eşittir ve her $s \in I$ ve $i = 1, \dots, n$ için $\langle \eta_i(s), \eta_i^*(s) \rangle = 1$ olur. Dolayısıyla,

$$\|\eta_i(s) - \eta_i(s)\|^2 = \langle \eta_i(s), \eta_i(s) \rangle - 2 \langle \eta_i(s), \eta_i(s) \rangle + \langle \eta_i(s), \eta_i(s) \rangle = 0$$

olur. Her $s \in I$ ve $i = 1, \dots, n$ için $\eta_i(s) = \eta_i(s)$ bulunur.

$\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$, $(\gamma^*)'(s) = \alpha^*(s)v^*(s)$ olduğundan $\alpha(s) = \alpha(s)$ kabulü ile $(d/ds)(\gamma(s) - \gamma^*(s)) = 0$ bulunur. Bu ise $\gamma(s) - \gamma^*(s)$ değerinin sabit olduğunu gösterir. $\gamma(s_0) = \gamma^*(s_0)$ şartı ile her $s \in I$ için $\gamma(s) = \gamma^*(s)$ elde edilir.

Teorem 3.1.6. (γ, η) ve $(\gamma^*, \eta^*) : I \rightarrow \mathbb{R}^n \times \Delta_{n-1}$ aynı eğriliklere sahip framed eğri olsunlar. O halde (γ, η) ve (γ^*, η^*) framed eğrileri eşitir [11].

İspat. $s = s_0$ sabit değerli bir parametre seçelim. $X \in SO(n)$ matrisi ve sabit bir $x \in \mathbb{R}^n$ vektörü kullanılarak kabul edelim ki

$$\gamma^*(s_0) = X(\gamma(s_0)) + x, \quad \eta^*(s_0) = X(\eta(s_0))$$

olsun. Önerme 3.1.4'ten $(\gamma(s), \eta(s))$ ve $(X(\gamma(s)) + x, X(\eta(s)))$ framed eğrilerinin eğrilikleri eşittir. Önerme 3.1.5'ten her $s \in I$ için

$$\gamma^*(s) = X(\gamma(s)) + x, \quad \eta^*(s) = X(\eta(s))$$

yazılabilir. O halde (γ, η) ve (γ^*, η^*) framed eğrileri eştir.

3.2. 3-Boyutlu Öklidyen Uzayda Framed Eğriler

$(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed eğri ve $v(s) = \eta_1(s) \wedge \eta_2(s)$ olsun. Frenet-Serret tipi formülleri elde edelim:

$$v'(s) = a(s)v(s) + b(s)\eta_1(s) + c(s)\eta_2(s) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. (3.1) denkleminin her iki yandan, $v(s)$ ile iç çarpımları alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle v(s), v(s) \rangle &= 1 \Rightarrow \langle v'(s), v(s) \rangle = 0 = a(s), \\ \langle v(s), \eta_1(s) \rangle &= 0 \Rightarrow \langle v'(s), \eta_1(s) \rangle = - \underbrace{\langle v(s), \eta_1'(s) \rangle}_{m(s)}, \\ &\Rightarrow b(s) = -m(s), \\ \langle v(s), \eta_2(s) \rangle &= 0 \Rightarrow \langle v'(s), \eta_2(s) \rangle = - \underbrace{\langle v(s), \eta_2'(s) \rangle}_{n(s)}, \\ &\Rightarrow c(s) = -n(s). \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$\eta_1'(s) = d(s)v(s) + e(s)\eta_1(s) + f(s)\eta_2(s) \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) denkleminin her iki yandan, $\eta_1(s)$ ile iç çarpımları alınırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \eta_1(s), v(s) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \eta_1'(s), v(s) \rangle = m(s) = d(s), \\
\langle \eta_1(s), \eta_1(s) \rangle = 1 &\Rightarrow \langle \eta_1'(s), \eta_1(s) \rangle = 0 = e(s), \\
\langle \eta_2(s), \eta_1(s) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \eta_2'(s), \eta_1(s) \rangle = -\underbrace{\langle \eta_2(s), \eta_1'(s) \rangle}_{l(s)}, \\
&\Rightarrow f(s) = l(s).
\end{aligned}$$

olur. Son olarak,

$$\eta_2'(s) = g(s)v(s) + h(s)\eta_1(s) + \iota(s)\eta_2(s) \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) denkleminin her iki yandan, $\eta_2(s)$ ile iç çarpımları alınırsa,

$$\begin{aligned}
\langle \eta_2(s), v(s) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \eta_2'(s), v(s) \rangle = n(s) = g(s), \\
\langle \eta_2(s), \eta_1(s) \rangle = 0 &\Rightarrow \langle \eta_2'(s), \eta_1(s) \rangle = -\langle \eta_2(s), \eta_1'(s) \rangle = -l(s) = h(s), \\
\langle \eta_2(s), \eta_2(s) \rangle = 1 &\Rightarrow \langle \eta_2'(s), \eta_2(s) \rangle = 0 = \iota(s)
\end{aligned}$$

olur. (3.1), (3.2) ve (3.3) denklemleri sütun matrisi ile temsil edilirse,

$$\begin{pmatrix} v'(s) \\ \eta_1'(s) \\ \eta_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(s) & b(s) & c(s) \\ d(s) & e(s) & f(s) \\ g(s) & h(s) & \iota(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ \eta_1(s) \\ \eta_2(s) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır. O halde,

$$\begin{aligned}
a(s) &= e(s) = \iota(s) = 0, \\
b(s) &= -m(s), \quad d(s) = m(s), \\
c(s) &= -n(s), \quad g(s) = n(s), \\
f(s) &= l(s), \quad h(s) = -l(s)
\end{aligned}$$

eşitlikleri (3.4) matrisinde yerine yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} v'(s) \\ \eta_1'(s) \\ \eta_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -m(s) & -n(s) \\ m(s) & 0 & l(s) \\ n(s) & -l(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ \eta_1(s) \\ \eta_2(s) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

şeklinde verilir ve burada eğrilikler

$$\begin{aligned}
l(s) &= \langle \eta'_1(s), \eta_2(s) \rangle, \\
m(s) &= \langle \eta'_1(s), v(s) \rangle, \\
n(s) &= \langle \eta'_2(s), v(s) \rangle, \\
\alpha(s) &= \langle \gamma'(s), v(s) \rangle.
\end{aligned}$$

ile verilir [11].

Örnek 3.2.1. Eğer $\gamma'(s)$ ve $\gamma''(s)$ lineer bağımsız ise regüler eğriler framed eğriler için tipik bir örnektir. Kabul edelim ki, her $s \in I$ için $\gamma'(s)$ ve $\gamma''(s)$ lineer bağımsız iken $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olsun. Eğer, $\eta_1(s) = n(s)$ ve $\eta_2(s) = b(s)$ olarak alınırsa $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed eğri olur ve $v(s) = \eta_1(s) \wedge \eta_2(s) = t(s)$ şeklindedir. Dolayısıyla,

$$t(s) = \frac{\gamma'(s)}{\|\gamma'(s)\|}, \quad n(s) = \frac{(\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)) \wedge \gamma'(s)}{\|(\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)) \wedge \gamma'(s)\|}, \quad b(s) = \frac{\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)}{\|\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)\|}$$

şeklindedir [11].

Şimdi Frenet eğrileri ve regüler framed eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkileri verelim:

Önerme 3.2.2. Regüler bir framed eğrinin (l, m, n, α) eğrilikleri ile bir Frenet eğrisinin (κ, τ) eğrilikleri arasındaki ilişkiler

$$\kappa(s) = \frac{\sqrt{m^2(s) + n^2(s)}}{|\alpha(s)|}, \quad \tau(s) = \frac{m(s)n'(s) - m'(s)n(s) + (m^2(s) + n^2(s))l(s)}{\alpha(s)(m^2(s) + n^2(s))}$$

ile verilir [11].

İspat. (3.5) denklemlerine göre,

$$\begin{aligned}
\gamma'(s) &= \alpha(s)v(s), \\
\gamma''(s) &= \alpha'(s)v(s) - \alpha(s)m(s)\eta_1(s) - \alpha(s)n(s)\eta_2(s), \\
\gamma'''(s) &= (\alpha''(s) - \alpha(s)m^2(s) - \alpha(s)n^2(s))v(s) \\
&\quad - (2\alpha'(s)m(s) + \alpha(s)m'(s) - \alpha(s)n(s)l(s))\eta_1(s) \\
&\quad - (2\alpha'(s)n(s) + \alpha(s)n'(s) + \alpha(s)m(s)l(s))\eta_2(s)
\end{aligned} \tag{3.6}$$

olur. Buradan Frenet eğrileri için

$$\kappa(s) = \frac{\|\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)\|}{\|\gamma'(s)\|^3} \text{ ve } \tau(s) = \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s))}{\|\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)\|^2}$$

eşitlikleri ve (3.6) denklemlerinden elde edilen

$$\begin{aligned} \|\gamma'(s)\| &= |\alpha(s)|, \\ \|\gamma'(s) \wedge \gamma''(s)\| &= \alpha^2(s) \sqrt{m^2(s) + n^2(s)}, \\ \det(\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)) &= \alpha^3(s)(m(s)n'(s) - m'(s)n(s) + (m^2(s) + n^2(s))l(s)) \end{aligned}$$

ifadeleri kullanılırsa istenilen elde edilmiş olur.

Uyarı 3.2.3. $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ framed eğrisi için eğer $s_0 \in I$ için $(l, m, n, \alpha)(s_0) \neq 0$ oluyorsa bir framed immersiyon denir [11].

3.3. Framed Eğrilerin Uyarlanmış Çatıları

3.3.1. Framed eğrilerin Bishop-tipi çatısı

$(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, (l, m, n, α) eğrilikleri ile bir framed eğri olsun. $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon iken

$$\begin{pmatrix} \eta_1^*(s) \\ \eta_2^*(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) & -\sin \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) & \cos \varphi(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(s) \\ \eta_2(s) \end{pmatrix}$$

olsun. O halde $(\gamma, \eta_1^*, \eta_2^*): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ de bir framed eğridir ve

$$\begin{aligned} v^*(s) &= \eta_1^*(s) \wedge \eta_2^*(s) = (\cos \varphi(s) \eta_1(s) - \sin \varphi(s) \eta_2(s)) \wedge (\sin \varphi(s) \eta_1(s) + \cos \varphi(s) \eta_2(s)) \\ &= \eta_1(s) \wedge \eta_2(s) = v(s). \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi Bishop-tipi çatıya ait eğrilikleri elde edelim:

$$\begin{aligned} (\eta_1^*)'(s) &= (l(s) - \varphi'(s)) \sin \varphi(s) \eta_1(s) + (l(s) - \varphi'(s)) \cos \varphi(s) \eta_2(s) \\ &\quad + (m(s) \cos \varphi(s) - n(s) \sin \varphi(s)) v(s), \\ (\eta_2^*)'(s) &= -(l(s) - \varphi'(s)) \cos \varphi(s) \eta_1(s) + (l(s) - \varphi'(s)) \sin \varphi(s) \eta_2(s) \\ &\quad + (m(s) \sin \varphi(s) + n(s) \cos \varphi(s)) v(s). \end{aligned}$$

olur. Eğer $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu $l(s) = \varphi'(s)$ eşitliğini sağlarsa, $\{v(s), \eta_1^*(s), \eta_2^*(s)\}$ çatısına $\gamma(s)$ framed temel eğrisi boyunca Bishop-tipi çatı adı verilir. Buradan,

$$\begin{pmatrix} m^*(s) \\ n^*(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi(s) & -\sin \varphi(s) \\ \sin \varphi(s) & \cos \varphi(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m(s) \\ n(s) \end{pmatrix}$$

iken Frenet-Serret tipi türev formülleri

$$\begin{pmatrix} v'(s) \\ \eta_1^{**}(s) \\ \eta_2^{**}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -m^*(s) & -n^*(s) \\ m^*(s) & 0 & 0 \\ n^*(s) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ \eta_1^*(s) \\ \eta_2^*(s) \end{pmatrix}$$

ile verilir [11].

3.3.2. Framed eğrilerin Frenet-tipi çatısı

$(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, (l, m, n, α) eğrilikleri ile bir framed eğri olsun. $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon iken

$$\begin{pmatrix} \bar{\eta}_1(s) \\ \bar{\eta}_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(s) & -\sin \theta(s) \\ \sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1(s) \\ \eta_2(s) \end{pmatrix}$$

olsun. O halde $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ de bir framed eğridir ve

$$\begin{aligned} \bar{v}(s) &= \bar{\eta}_1(s) \wedge \bar{\eta}_2(s) = (\cos \theta(s) \eta_1(s) - \sin \theta(s) \eta_2(s)) \wedge (\sin \theta(s) \eta_1(s) + \cos \theta(s) \eta_2(s)) \\ &= \eta_1(s) \wedge \eta_2(s) = v(s). \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi Frenet-tipi çatıya ait eğrilikleri elde edelim:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1'(s) &= (l(s) - \theta'(s)) \sin \theta(s) \eta_1(s) + (l(s) - \theta'(s)) \cos \theta(s) \eta_2(s) \\ &\quad + (m(s) \cos \theta(s) - n(s) \sin \theta(s)) v(s), \\ \bar{\eta}_2'(s) &= -(l(s) - \theta'(s)) \cos \theta(s) \eta_1(s) + (l(s) - \theta'(s)) \sin \theta(s) \eta_2(s) \\ &\quad + (m(s) \sin \theta(s) + n(s) \cos \theta(s)) v(s). \end{aligned} \tag{3.7}$$

olur. Eğer $\theta: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu

$$m(s) \sin \theta(s) + n(s) \cos \theta(s) = 0 \text{ eşitliğini sağlarsa, } \{v(s), \bar{\eta}_1(s), \bar{\eta}_2(s)\} \text{ çatısına } \gamma(s)$$

framed temel eğrisi boyunca Frenet-tipi çatı adı verilir. Kabul edelim ki,

$m(s) = -p(s)\cos\theta(s)$ ve $n(s) = p(s)\sin\theta(s)$ olsun. Bu ifadeler (3.4) ve (3.7) denklemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} v'(s) &= -m(s)\eta_1(s) - n(s)\eta_2(s) \\ &= p(s)(\cos\theta(s)\eta_1(s) - \sin\theta(s)\eta_2(s)) \\ &= p(s)\bar{\eta}_1(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_1'(s) &= (l(s) - \theta'(s))(\sin\theta(s)\eta_1(s) + \cos\theta(s)\eta_2(s)) - p(s)v(s) \\ &= -p(s)v(s) + (l(s) - \theta'(s))\bar{\eta}_2(s), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_2'(s) &= -(l(s) - \theta'(s))(\cos\theta(s)\eta_1(s) - \sin\theta(s)\eta_2(s)) \\ &= -(l(s) - \theta'(s))\bar{\eta}_1(s). \end{aligned}$$

olur. O halde $p(s) = \|v'(s)\|$ ve $q(s) = l(s) - \theta'(s)$ iken Frenet-Serret tipi türev formülleri

$$\begin{pmatrix} v'(s) \\ \bar{\eta}_1'(s) \\ \bar{\eta}_2'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p(s) & 0 \\ -p(s) & 0 & q(s) \\ 0 & -q(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ \bar{\eta}_1(s) \\ \bar{\eta}_2(s) \end{pmatrix}$$

ile verilir [14].

Uyarı 3.3.2.1. Framed eğrilerin Frenet-tipi çatısı için $p(s) = \|v'(s)\| > 0$ şartı varsa bu tip eğrilere Frenet-tipi framed eğriler adı verilir. Yani $\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$ şeklinde bir eğri yazıldığında v birim ve regüler bir eğridir. O halde bir Frenet-tipi framed eğrinin Frenet tipi çatısını kurabilmek için tanımlanan v regüler olmalıdır. Dolayısıyla, Frenet-tipi bir framed eğri için $\bar{\eta}_1(s) = \frac{v'(s)}{\|v'(s)\|}$ ve $\bar{\eta}_2(s) = v(s) \wedge \bar{\eta}_1(s)$ yazılabilir.

Eğrilikler ise,

$$p(s) = \|v'(s)\| \text{ ve } q(s) = (l(s) - \theta'(s)) = \frac{\det(v(s), v'(s), v''(s))}{\|v'(s)\|^2}$$

şeklinde verilir [13].

Örnek 3.3.2.2. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ için

$$\gamma(s) = \left(\cos s^2, \sin s^2, \frac{s^3}{3} \right)$$

$$\bar{\eta}_1(s) = \frac{1}{\sqrt{(s^2+4)(16s^2(s^2+4)+4)}} \begin{pmatrix} -4s \cos s^2 (s^2+4) + 2s \sin s^2, \\ -4s \sin s^2 (s^2+4) - 2s \cos s^2, \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{\eta}_2(s) = \frac{1}{\sqrt{(16s^2(s^2+4)+4)}} \begin{pmatrix} 2 \cos s^2 + 4s^2 \sin s^2, \\ 2 \sin s^2 - 4s^2 \cos s^2, \\ 8s \end{pmatrix}$$

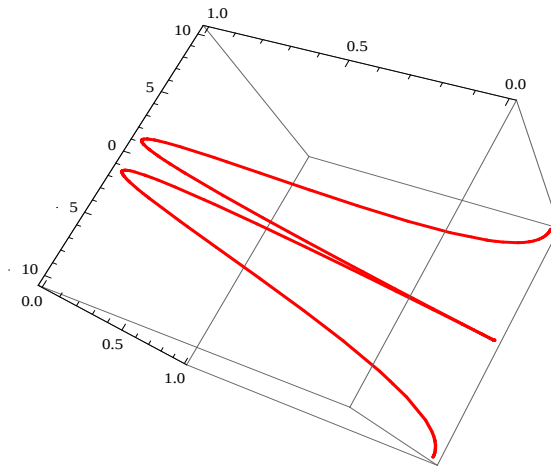
Frenet-tipi framed eğrisi ile verilsin (Şekil 3.1.). Buradan,

$$v(s) = \frac{(-2 \sin s^2, 2 \cos s^2, s)}{\sqrt{s^2+4}}$$

ve

$$p(s) = \frac{\sqrt{16s^2(s^2+4)+4}}{s^2+4}$$

şeklindedir. $\{v, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ framed eğrinin Frenet-tipi çatısıdır. Ayrıca $p(s) = \|v'(s)\| > 0$ olduğundan $\gamma(s)$ Frenet-tipi framed eğridir.



Şekil 3.1. $\gamma(s)$ Frenet-tipi framed eğrisi.

3.3.3. Framed eğrilerin Sabban-tipi çatısı

Tanım 3.3.3.1. $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed eğri olsun. Eğer γ framed temel eğrisi S^2 de bir eğri ise γ bir framed küresel eğri olarak adlandırılır [14].

$(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed küresel eğri olsun. $\gamma = \eta_1$ seçilirse, $v = \gamma \wedge \eta_2$ ve $\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$ şeklindedir. O halde (3.4) türev formülleri kullanılırsa,

$$\begin{pmatrix} \gamma'(s) \\ \eta_2'(s) \\ v'(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(s) & 0 & 0 \\ n(s) & 0 & 0 \\ -\alpha(s) & 0 & -n(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \eta_2(s) \\ v(s) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir çatı elde edilir. Bu çatıya framed eğrilerin Sabban-tipi çatısı veya framed eğrilerin küresel Frenet-Serret formülleri denir. Burada $(\alpha(s), n(s))$ ise framed küresel eğrilerin eğrilik fonksiyonları denir [14].

Örnek 3.3.3.2. Framed küresel eğrisi

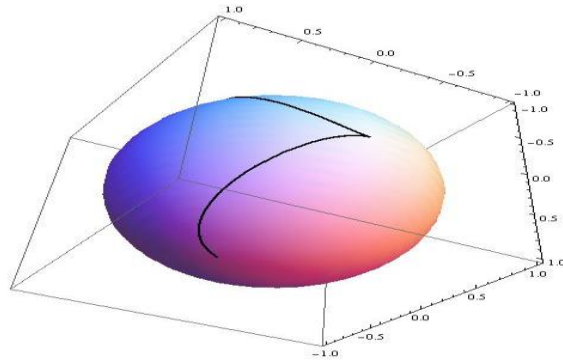
$$\gamma(s) = \frac{1}{\sqrt{1+s^4+s^6}}(1, s^2, s^3),$$

$$\eta_2(s) = \frac{1}{\sqrt{4+9s^2+s^6}}(s^3, -3s, 2)$$

ile verilsin (Şekil 3.2.). O halde $(\gamma, \eta_2): I \rightarrow S^2 \times \Delta_2$ framed küresel eğrisi için

$$v(s) = \frac{1}{\sqrt{(1+s^4+s^6)(4+9s^2+s^6)}}(2s^2+3s^4, -2+s^6, -3s-s^5)$$

dir. $\{\gamma, \eta_2, v\}$ framed küresel eğrinin Sabban-tipi çatısıdır [47].



Şekil 3.2. $\gamma(s)$ framed küresel eğrisi.

3.4. Framed Yüzeylerin Temel Özellikleri

Bir yüzey singüler noktalara sahip olduğunda birim normal vektör alanı bulunamaz. Ancak Öklidyen uzayda framed eğrileri benzer şekilde Fukunaga ve Takahashi tarafından framed yüzeyler inşa edilmiştir [17]. Şimdi framed yüzey teorisi için tezin ilerleyen kısımlarında faydalanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri inceleyelim.

Tanım 3.4.1. Eğer $x_u(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$ ve $x_v(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$ iken $\langle x_u(u, v), n(u, v) \rangle = 0$ ve $\langle x_v(u, v), n(u, v) \rangle = 0$ ise $(x, n, s): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ifadesine framed yüzey denir. Eğer $(n, s): U \rightarrow \Delta_2$ varsa $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir framed temel yüzeydir öyle ki (x, n, s) bir framed yüzeydir [17].

$x(u, v)$ boyunca $t(u, v) = n(u, v) \wedge s(u, v)$ iken $\{n(u, v), s(u, v), t(u, v)\}$ bir hareketli çatıdır. $c_i, d_i, e_i, f_i, g_i: U \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar iken

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_v \\ x_u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} n_v \\ s_v \\ t_v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & e_1 & f_1 \\ -e_1 & 0 & g_1 \\ -f_1 & -g_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ s \\ t \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} n_u \\ s_u \\ t_u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & e_2 & f_2 \\ -e_2 & 0 & g_2 \\ -f_2 & -g_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ s \\ t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde diferansiyel denklem sistem elde edilir ve bu fonksiyonlara yüzeyin temel değişmezleri denir. Yukarıdaki matrisleri sırasıyla, F_0, F_1, F_2 ile gösterirsek, eğer (u, v) bir singüler nokta ise $\det F_0(u, v) = 0$ dır. Diğer yandan temel değişmezlerle göre framed yüzeyin integrallenebilme koşulu

$$c_1 e_2 + d_1 f_2 = c_2 e_1 + d_2 f_1$$

şeklindedir [17].

Tanım 3.4.2. $(x, n, s): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed yüzey olsun.

$C_F = (J_F, K_F, H_F): U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir dönüşümü

$$\begin{aligned}
J_F &= \det \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \\
K_F &= \det \begin{pmatrix} e_2 & f_2 \\ e_1 & f_1 \end{pmatrix}, \\
H_F &= -\frac{1}{2} \left\{ \det \begin{pmatrix} c_2 & f_2 \\ c_1 & f_1 \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} d_2 & e_2 \\ d_1 & e_1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ile tanımlanır. $C_F = (J_F, K_F, H_F)$ ifadesine framed yüzeyin bir eğriliği denir [17].

Önerme 3.4.3. $x:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler bir yüzey olsun. O halde framed yüzeyin temel değişmezleri ve temel formlar arasındaki ilişkiler

$$\begin{aligned}
E &= c_2^2 + d_2^2, \quad F = c_2 d_2 + c_1 d_1, \quad G = c_1^2 + d_1^2, \\
L &= -c_2 e_2 - d_2 f_2, \quad M = -c_2 e_1 - d_2 f_1, \quad N = -c_1 e_1 - d_1 f_1
\end{aligned} \tag{3.10}$$

ile verilir [17].

Önerme 3.4.4. $x:U \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler yüzeyi için K Gauss eğriliği ve H ortalama eğriliği

$$K = \frac{K_F}{J_F}, \quad H = \frac{H_F}{J_F} \tag{3.11}$$

ile verilir [17].

$(x, n, s):U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, (F_0, F_1, F_2) temel değişmezleri ile bir framed yüzey olsun.

$I_F:U \rightarrow \mathbb{R}^8$ diferansiyellenebilir dönüşümü

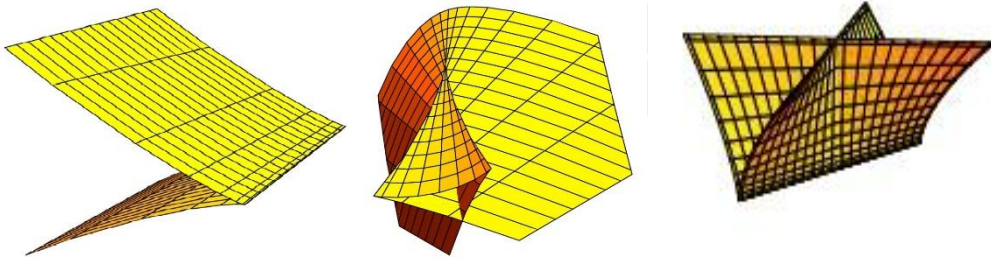
$$I_F = \left(C_F, \det \begin{pmatrix} c_2 & g_2 \\ c_1 & g_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} d_2 & g_2 \\ d_1 & g_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} e_2 & g_2 \\ e_1 & g_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} f_2 & g_2 \\ f_1 & g_1 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} c_2 & e_2 \\ c_1 & e_1 \end{pmatrix} \right)$$

ile tanımlanır. $I_F:U \rightarrow \mathbb{R}^8$ dönüşümüne (x, n, s) framed yüzeyinin bir eşlik dönüşümü denir. (x, n, s) bir immersiyon ise $(x, n, s):U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed immersiyondur [17]. Yüzeyin bir immersiyon, Legendre immersiyon veya framed immersiyon olması yüzeyin eğriliklerine bağlıdır. Aşağıdaki önerme ile bu sınıflandırmayı verebiliriz:

Önerme 3.4.5. $(x, n, s): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed yüzey ve $p \in U$ olsun.

1. x 'in, p civarında bir immersiyon yani bir regüler yüzey olması için gerek ve yeter koşul $J_F(p) \neq 0$ olmasıdır.
2. (x, n) 'in, p civarında bir Legendre immersiyon olması için gerek ve yeter koşul $C_F(p) \neq 0$ olmasıdır.
3. (x, n, s) 'in, p civarında bir framed immersiyon olması için gerek ve yeter koşul $I_F(p) \neq 0$ olmasıdır [17].

Framed yüzeyler singüler noktalara sahip olabildiğinden literatürde önemli yeri olan cuspidal edge, swallowtail ve cuspidal cross cap yüzeylerine difeomorfik olabilir.



Şekil 3.3. $C \times \mathbb{R}$, SW, $CC\mathbb{R}$.

$x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir frontal olsun. $\lambda(u, v) = \det(x_u, x_v, n)(u, v)$ şeklinde tanımlanan $\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna işaretli alan yoğunluk fonksiyonu denir. x 'in bir p singüler noktası dejenere olmayan bir nokta ise $d\lambda(p) \neq 0$ dır. Dolayısıyla, $S(x)$ singüler kümesi için $\delta(t): (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$, $\delta(0) = p$ ile tanımlı $\delta(t)$ eğrisine x 'in singüler eğrisi denir. Ayrıca, $\xi(t)$ 'nin $\ker dx_{\xi(t)}$ 'yi üretmesini sağlayan $\mathcal{S}$ boyunca bir null vektör alanı $\xi(t)$ vardır. Son olarak, $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığında $\Omega_x(t)$ fonksiyonu

$$\Omega_x(t) = \det\left((x \circ \delta)', n \circ \delta, dn(\xi)\right)(t) \quad (3.12)$$

ile tanımlanır [17]. Dolayısıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.4.6. $(x, n): U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times S^2$ bir Legendre yüzey ve $p \in U$ dejenere olmayan bir singüler nokta olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

1. Eğer $\xi\lambda(p) \neq 0$ ise, λ 'in p civarında bir front olması için gerek ve yeter koşul $\Omega_x(0) \neq 0$ olmasıdır.
2. p noktasında λ 'in cuspidal edge'ye A -eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul λ 'in p civarında bir front olması ve $\xi\lambda(p) \neq 0$ olmasıdır.
3. p noktasında λ 'in swallowtail'e A -eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul λ 'in p civarında bir front olması ve $\xi\lambda(p) = 0$ ve $\xi\xi\lambda(p) \neq 0$ olmasıdır.
4. p noktasında λ 'in cuspidal cross cap'a A -eşdeğer olması için gerek ve yeter koşul $\xi\lambda(p) \neq 0$ ve $\Omega_x(0) = 0$ ve $\Omega'_x(0) \neq 0$ olmasıdır.

Buradaki $\xi\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}$, λ 'nın ξ boyunca yönlü türevidir [17].

Teorem 3.4.7. $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $f(x, y)$ nin (x_0, y_0) noktasında cross-cap olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0, \det\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

veya

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \det\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\right) \neq 0$$

olmasıdır [41].

4. ÖZEL FRAMED DÜZLEM EĞRİLERİ

Öklidyen uzayda uyarlanmış framed vektörler $\{\nu, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ kullanılarak framed özel eğri türleri verilebilir. Sırasıyla, $(\nu\bar{\eta}_2), (\nu\bar{\eta}_1)$ ve $(\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2)$ düzlemleri ile tanımlanan eğriler framed rektifiyan eğriler [14], framed oskülatör eğriler ve framed normal eğriler [24] olarak adlandırılır. Bu eğriler singüler noktaya sahip eğrilerdir ve framed eğrilerin doğal yapısından kaynaklı olarak uzayda regüler normal, oskülatör ve rektifiyan eğrilerinin doğal bir genellemesi olurlar. Bu bölümde bu eğrilerden biri olan ve framed küresel eğriler ile ilişkisini kuracağımız framed normal eğriler tanıtılacaktır:

4.1. Framed Normal Eğriler

Bu kısımda Öklidyen uzayda framed normal eğriler için temel tanım ve teoremler, framed normal eğrilerin bazı karakterizasyonları ve framed küresel eğriler ile ilişkileri verilmiştir.

4.1.1. Framed normal eğrilerin temel özellikleri

Tanım 4.1.1.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed eğri olsun. Eğer, bazı $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ fonksiyonları için $\gamma(s)$ framed temel eğrisinin konum vektörü

$$\gamma(s) = \lambda(s)\bar{\eta}_1(s) + \mu(s)\bar{\eta}_2(s) \quad (4.1)$$

eşitliğini sağlarsa γ eğrisine framed normal eğri denir [24].

Teorem 4.1.1.2. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ ve $q(s) \neq 0$ framed eğrilikleri ile tanımlı bir framed eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin bir framed normal eğri olması için gerek ve yeter koşul eğrinin konum vektörünün genelleştirilmiş normal ve genelleştirilmiş binormal bileşenlerinin sırasıyla

$$\begin{aligned}\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle &= -\frac{\alpha(s)}{p(s)} \\ \langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle &= -\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)'\end{aligned}\tag{4.2}$$

sağlaması gerekir [24].

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(s)$ framed normal eğri olsun. O halde (4.1) denklemi geçerlidir. (4.1) denkleminin türevi alınırsa,

$$\gamma'(s) = \lambda'(s)\bar{\eta}_1(s) + \lambda(s)\bar{\eta}_1'(s) + \mu'(s)\bar{\eta}_2(s) + \mu(s)\bar{\eta}_2'(s)$$

bulunur. Frenet-tipi framed eğriler için türev formülleri kullanılarak,

$$\alpha(s)v(s) = \lambda'(s)\bar{\eta}_1(s) + \lambda(s)(-p(s)v(s) + q(s)\bar{\eta}_2(s)) + \mu'(s)\bar{\eta}_2(s) + \mu(s)(-q(s)\bar{\eta}_1(s))$$

bulunur. Katsayıların eşitliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= -\lambda(s)p(s), \\ \lambda'(s) - \mu(s)q(s) &= 0, \\ \mu'(s) + \lambda(s)q(s) &= 0\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Dolayısıyla,

$$\lambda(s) = -\frac{\alpha(s)}{p(s)}, \quad \mu(s) = -\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)'$$

olduğu görülür. Bu değerler, (4.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\gamma(s) = -\frac{\alpha(s)}{p(s)}\bar{\eta}_1(s) - \frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_2(s)$$

elde edilir. Tersine, kabul edelim ki (4.2) denklemleri sağlansın. (4.2) denkleminin ilk eşitliğin türevi alınırsa,

$$\alpha(s)\langle v(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle - p(s)\langle \gamma(s), v(s) \rangle + q(s)\langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle = -\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)'$$

olur. $\langle v(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle = 0$ olduğundan,

$$-p(s)\langle \gamma(s), v(s) \rangle + q(s)\langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle = -\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'$$

eşitliği sağlanır. (4.2) denkleminin ikinci eşitliği kullanılarak,

$$-p(s)\langle \gamma(s), v(s) \rangle - q(s)\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)' = -\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'$$

olur. $p(s), q(s) \neq 0$ olduğundan, $\langle \gamma(s), v(s) \rangle = 0$ olur. Bu ise $\gamma(s)$ eğrisinin framed normal eğri olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.1.3. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ framed normal eğri olsun.

1. Eğer s_0 noktası $\gamma(s)$ eğrisinin bir singüler noktası ise,

$$\lambda(s_0) = 0, \quad \mu(s_0) = \frac{\alpha'(s_0)}{p(s_0)qs_0}$$

denklemleri sağlanır.

2. $\gamma(s)$ eğrisi singüler noktalara sahip değil ise, yani eğri regüler bir framed eğri ise

$$\lambda(s) = -\frac{1}{\kappa(s)}, \quad \mu(s) = -\frac{1}{\alpha(s)\tau(s)}\left(\frac{1}{\kappa(s)}\right)'$$

şeklinde [24].

4.1.2. Framed normal eğrilerin karakterizasyonları

Teorem 4.1.2.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ ve $q(s) \neq 0$ framed eğrilikleri ile tanımlı bir framed eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin bir framed normal eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\alpha(s)q(s)}{p(s)} + \left(\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'\right)' = 0 \quad (4.3)$$

denkleminin sağlanmasıdır [24].

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(s)$ eğrisi bir framed normal eğri olsun. O halde, $\mu'(s) + \lambda(s)q(s) = 0$ denkleminde $\lambda(s)$ ve $\mu(s)$ fonksiyonları yerine yazılarak (4.3)

denklemini elde edilir. Tersine, kabul edelim ki $\gamma(s)$ framed eğrisi (4.3) denklemini sağlasın. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left[\gamma(s) + \frac{\alpha(s)}{p(s)} \bar{\eta}_1(s) + \frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_2(s) \right] \\ &= \frac{d}{ds} \left[\begin{aligned} & \alpha(s)v(s) + \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_1(s) + \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right) (-p(s)v(s) + q(s)\bar{\eta}_2(s)) \\ & + \left(\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \right)' \bar{\eta}_2(s) + \frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' (-q(s)\bar{\eta}_1(s)) \end{aligned} \right] \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.3) denklemini kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds} \left[\gamma(s) + \frac{\alpha(s)}{p(s)} \bar{\eta}_1(s) + \frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_2(s) \right] = 0 \text{ bulunur. Dolayısıyla } \gamma(s) \text{ eğrisi bir}$$

framed normal eğridir.

Teorem 4.1.2.2. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ ve $q(s) \neq 0$ framed eğrilikleri ile tanımlı bir en az bir singüler olmayan noktaya sahip bir framed eğri olsun. $\gamma(s)$ framed eğrisini $S^2(r)$ küresinde yatması için gerek ve yeter koşul $\gamma(s)$ eğrisinin bir framed normal eğri olmasıdır [24].

İspat. İlk olarak kabul edelim ki $\gamma(s)$ framed eğrisi m merkezli ve r yarıçaplı bir kürede yatsın. Dolayısıyla,

$$\langle \gamma(s) - m, \gamma(s) - m \rangle = r^2 \quad (4.4)$$

denklemini yazılabilir. (4.4) denkleminin türevi alınır,

$$\begin{aligned} & \langle \alpha(s)v(s), \gamma(s) - m \rangle + \langle \gamma(s) - m, \alpha(s)v(s) \rangle = 0 \\ & \Rightarrow 2\alpha(s) \langle v(s), \gamma(s) - m \rangle = 0 \\ & \Rightarrow \alpha(s) \langle v(s), \gamma(s) - m \rangle = 0 \end{aligned}$$

olur. $\gamma(s)$ framed eğrisi en az bir singüler olmayan noktaya sahip olduğundan, $\langle v(s), \gamma(s) - m \rangle = 0$ eşitliği elde edilir. Bu ise $\gamma(s)$ eğrisinin bir framed normal eğri olduğunu gösterir. Tersine, $\gamma(s)$ bir framed normal eğri olsun. O halde (4.3) denklemi sağlanır. Bir m vektörünü

$$m = \gamma(s) + \frac{\alpha(s)}{p(s)} \bar{\eta}_1(s) + \frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_2(s) \quad (4.5)$$

olarak düşünelim. (4.5) denkleminin türevi alınır,

$$\begin{aligned} m'(s) &= \gamma'(s) + \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_1(s) + \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right) \bar{\eta}_1'(s) + \left(\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \right)' \bar{\eta}_2(s) + \frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_2'(s) \\ &= \alpha(s)v(s) + \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_1(s) + \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right) (-p(s)v(s) + q(s)\bar{\eta}_2(s)) \\ &\quad + \left(\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \right)' \bar{\eta}_2(s) + \frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' (-q(s)\bar{\eta}_1(s)) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (4.3) denklemi kullanılırsa, $m'(s) = 0$ bulunur. Sonuç olarak, m sabittir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
& 2\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)' + 2\left(\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'\right)\left(\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'\right)' \\
& \Rightarrow 2\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)' \left[\frac{\alpha(s)}{p(s)} + \frac{1}{q(s)}\left(\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'\right)' \right] \\
& \Leftrightarrow 2\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)' \left[\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)q(s)}{p(s)} + \left(\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'\right)' \right) \right] \\
& \Rightarrow 2\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)' \left[\frac{1}{q(s)} \cdot 0 \right] \\
& \Rightarrow 0
\end{aligned}$$

ifadesi

$$\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)^2 + \left(\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'\right)^2 = c = \text{sabit}$$

denkleminin diferansiyelidir. Dolayısıyla,

$$\langle \gamma(s) - m, \gamma(s) - m \rangle = \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)^2 + \left(\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)'\right)^2 = c = \text{sabit}$$

ifadesi elde edilir. Buradan, $c = r^2$ alınabilir. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ framed eğrisi m merkezli ve r yarıçaplı bir kürede yatar.

Teorem 4.1.2.3. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ ve $q(s) \neq 0$ framed eğrilikleri ile tanımlı bir framed eğri olsun. $\gamma(s)$ eğrisinin framed normal eğri olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartların sağlanması gerekir:

1. $p(s), q(s)$ ve $\alpha(s)$ framed eğrilikleri, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sabitleri için,

$$\frac{\alpha(s)}{p(s)} = c_1 \cos\left(\int q(s) ds\right) + c_2 \sin\left(\int q(s) ds\right) \quad (4.6)$$

eşitliğini sağlar.

2. $\gamma(s)$ framed eğrisinin konum vektörünün genelleştirilmiş normal ve genelleştirilmiş binormal bileşenleri, sırasıyla

$$\begin{aligned} \langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle &= \left(-c_1 \cos\left(\int q(s) ds\right) - c_2 \sin\left(\int q(s) ds\right) \right) \\ \langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle &= \left(c_1 \sin\left(\int q(s) ds\right) - c_2 \cos\left(\int q(s) ds\right) \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

eşitliklerini sağlar. Tersine, eğer $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2, p(s) > 0, q(s) \neq 0$ framed eğrilikleri ile tanımlı bir framed eğrisi i. ve ii. şartlarından en az birini sağlarsa $\gamma(s)$ bir framed normal eğridir [24].

İspat. İlk olarak kabul edelim ki $\gamma(s)$ bir framed normal eğri olsun. O halde (4.3)

denklemini sağlanır. (4.3) denkleminde $t(s) = \frac{\alpha(s)}{p(s)}$ ve $z(s) = \frac{1}{q(s)}$ olarak yazılırsa,

$$\frac{t(s)}{z(s)} + (z(s)t'(s))' = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) denkleminde $x(s) = \int \frac{1}{z(s)} ds$ değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + t = 0 \quad (4.9)$$

diferansiyel denklemini elde edilir. Şimdi (4.9) diferansiyel denklemin çözümünü inceleyelim: (4.9) diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi $r^2 + 1 = 0$ şeklinde yazılabilir. $\Delta = b^2 - 4ac = -4 < 0$ olduğundan 2 farklı kompleks kök vardır. Bu kökler,

$r_1 = i$ ve $r_2 = -i$ şeklindedir. Dolayısıyla, (4.9) diferansiyel denkleminin çözümü,

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ iken

$$t(s) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

şeklindedir. Sonuç olarak,

$$t(s) = \frac{\alpha(s)}{p(s)} \text{ ve } x(s) = \int \frac{1}{z(s)} ds$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$\frac{\alpha(s)}{p(s)} = c_1 \cos\left(\int q(s)ds\right) + c_2 \sin\left(\int q(s)ds\right)$$

denklemini bulunur. Dolayısıyla 1 gösterilmiş olur.

$$\lambda(s) = -\frac{\alpha(s)}{p(s)}, \mu(s) = -\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)' \text{ denklemleri kullanılarak,}$$

$$\lambda(s) = -\frac{\alpha(s)}{p(s)} = -c_1 \cos\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \sin\left(\int q(s)ds\right)$$

$$\begin{aligned} \mu(s) &= -\frac{1}{q(s)}\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)}\right)' = -\frac{1}{q(s)}\left(c_1 \cos\left(\int q(s)ds\right) + c_2 \sin\left(\int q(s)ds\right)\right)' \\ &= -\frac{1}{q(s)}\left(-q(s)c_1 \sin\left(\int q(s)ds\right) + c_2 q(s) \cos\left(\int q(s)ds\right)\right) \\ &= \left(c_1 \sin\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \cos\left(\int q(s)ds\right)\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ framed normal eğrisi,

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= \left(-c_1 \cos\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \sin\left(\int q(s)ds\right)\right)\bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + \left(c_1 \sin\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \cos\left(\int q(s)ds\right)\right)\bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle &= c_1^2 + c_2^2 \\
\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle &= \left(-c_1 \cos\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \sin\left(\int q(s)ds\right) \right) \\
\langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle &= \left(c_1 \sin\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \cos\left(\int q(s)ds\right) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, 2 gösterilmiş olur. Tersine, kabul edelim ki 1 sağlansın. O halde (4.6) denkleminin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} = c_1 \cos\left(\int q(s)ds\right) + c_2 \sin\left(\int q(s)ds\right) \right)' \\
&= \left(\left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' = -c_1 q(s) \sin\left(\int q(s)ds\right) + c_2 q(s) \cos\left(\int q(s)ds\right) \right) \\
&= \left(\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' = -c_1 \sin\left(\int q(s)ds\right) + c_2 \cos\left(\int q(s)ds\right) \right) \\
&= \left(\left(\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \right)' = -c_1 q(s) \cos\left(\int q(s)ds\right) - c_2 q(s) \sin\left(\int q(s)ds\right) \right) \\
&= \left(\left(\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \right)' = q(s) \left(-c_1 \cos\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \sin\left(\int q(s)ds\right) \right) \right) \\
&= \left(\left(\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \right)' = -q(s) \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right) \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, son eşitlik kullanılarak, Teorem 4.1.2.1'in ispatına benzer bir şekilde,

$$\frac{d}{ds} \left[\gamma(s) + \frac{\alpha(s)}{p(s)} \bar{\eta}_1(s) + \frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \bar{\eta}_2(s) \right] = 0$$

bulunur. Bu ise $\gamma(s)$ eğrisinin framed normal eğri olduğunu gösterir. Şimdi, 2 şartının sağlandığını kabul edelim. Yani, (4.7) denklemleri sağlanır. (4.7) denkleminin ilk eşitliğinin türevi alınır ve (4.7) denkleminin ikinci eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\left(\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle \right)' &= -c_1 \cos \left(\int q(s) ds \right) - c_2 \sin \left(\int q(s) ds \right) \\
&= \alpha(s) \langle v(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle + \langle \gamma(s), -p(s)v(s) + q(s)\bar{\eta}_2(s) \rangle = c_1 q(s) \sin \left(\int q(s) ds \right) - c_2 q(s) \cos \left(\int q(s) ds \right) \\
&= -p(s) \langle \gamma(s), v(s) \rangle + q(s) \langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle = q(s) \left(c_1 \sin \left(\int q(s) ds \right) - c_2 \cos \left(\int q(s) ds \right) \right) \\
&= -p(s) \langle \gamma(s), v(s) \rangle + q(s) \langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle = q(s) \langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle \\
&= \langle \gamma(s), v(s) \rangle = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise eğrinin framed normal eğri olduğunu gösterir.

Örnek 4.1.2.4. $\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi,

$$\gamma(s) = \left(\frac{3}{4} \cos s - \frac{1}{4} \cos 3s, \frac{3}{4} \sin s - \frac{1}{4} \sin 3s, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right)$$

denklemleri ile verilsin (Şekil 4.1.). Bu eğri literatürde “nephroid” eğrisi olarak bilinir [13]. Diğer yandan,

$$\gamma'(s) = \left(-\frac{3}{4} \sin s + \frac{3}{4} \sin 3s, \frac{3}{4} \cos s - \frac{3}{4} \cos 3s, -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin s \right)$$

olup, $\gamma'(0) = (0, 0, 0)$ olup eğri regüler bir eğri değildir. Dolayısıyla,

$$\gamma'(s) = \alpha(s)v(s) = \left(\sqrt{3} \sin s \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2s, -\frac{1}{2} \right)$$

olarak yazılabilir. Yani singüler noktaları karakterize eden $\alpha(s)$ fonksiyonu,

$$\alpha(s) = \sqrt{3} \sin s$$

şeklinde ve genelleştirilmiş teğet olarak kabul edilen $v(s)$ birim vektörü

$$v(s) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2s, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2s, -\frac{1}{2} \right)$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_1(s) &= \frac{v'(s)}{\|v'(s)\|} = \frac{(-\sqrt{3} \sin 2s, \sqrt{3} \cos 2s, 0)}{\sqrt{3}} = (-\sin 2s, \cos 2s, 0) \\ \bar{\eta}_2(s) &= v(s) \times \bar{\eta}_1(s) = \left(\frac{\cos 2s}{2}, \frac{\sin 2s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}$$

olur. $p(s)$ ve $q(s)$ eğrilikleri ise

$$\begin{aligned}p(s) &= \|v'(s)\| = \sqrt{3} \\ q(s) &= \frac{\langle v(s) \times v'(s), v''(s) \rangle}{\|v'(s)\|^2} = -1\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Şimdi bu eğrinin framed normal eğri olduğunu gösterelim:

(4.1) denklemine göre,

$$\begin{aligned}& \left(\frac{3}{4} \cos s - \frac{1}{4} \cos 3s, \frac{3}{4} \sin s - \frac{1}{4} \sin 3s, \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s \right) \\ &= \lambda(s)(-\sin 2s, \cos 2s, 0) + \mu(s) \left(\frac{\cos 2s}{2}, \frac{\sin 2s}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)\end{aligned}$$

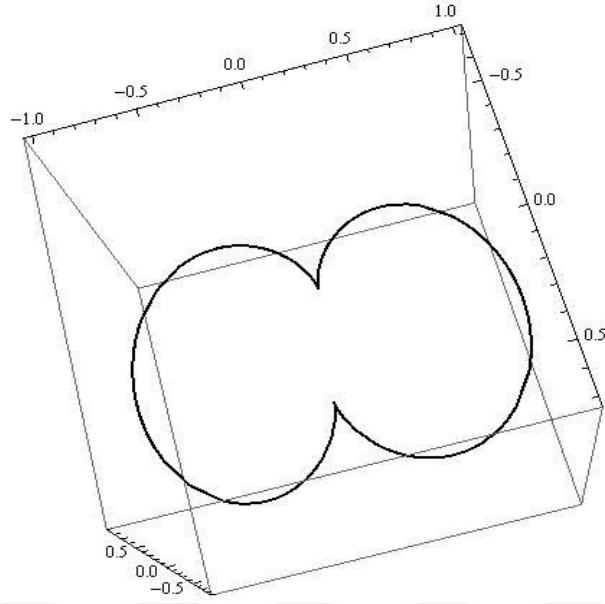
eşitliğini sağlayan $\lambda(s), \mu(s)$ fonksiyonlarını bulmalıyız. İki vektörün eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \cos s - \frac{1}{4} \cos 3s &= -\lambda(s) \sin 2s + \mu(s) \frac{\cos 2s}{2} \\ \frac{3}{4} \sin s - \frac{1}{4} \sin 3s &= \lambda(s) \cos 2s + \mu(s) \frac{\sin 2s}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos s &= \frac{\sqrt{3}}{2} \mu(s)\end{aligned}$$

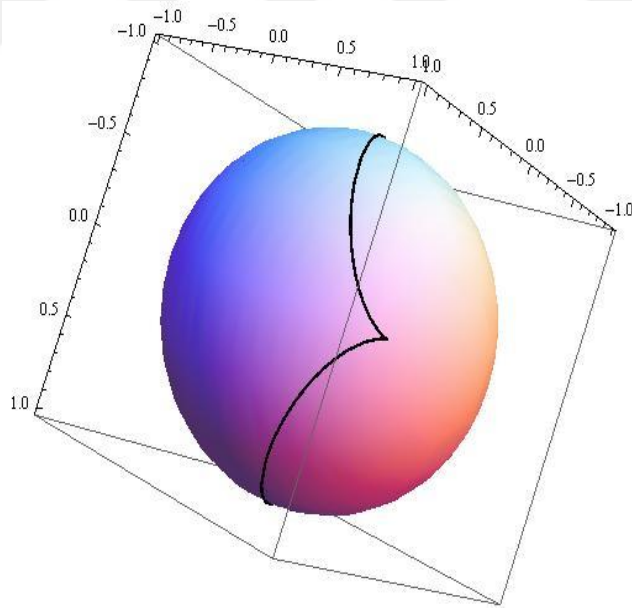
bulunur. Dolayısıyla, buradan $\mu(s) = \cos s$ ve $\lambda(s) = -\sin s$ elde edilir. Diğer yandan, eğri framed normal eğri ise Teorem 4.1.2.1'den (4.3) denkleminin sağlanması gerektiğini biliyoruz.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(s)q(s)}{p(s)} + \left(\frac{1}{q(s)} \left(\frac{\alpha(s)}{p(s)} \right)' \right)' &= \frac{(\sqrt{3} \sin s)(-1)}{\sqrt{3}} + \left(\frac{1}{-1} \left(\frac{\sqrt{3} \sin s}{\sqrt{3}} \right)' \right)' \\ &= (-\sin s) + (\sin s) \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, eğri bir framed normal eğridir [24]. Ek olarak, $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = 1$ olduğundan eğrinin birim kürede yatan framed küresel eğri olduğu açıktır (Şekil 4.2.).



Şekil 4.1. Framed normal eğri olarak küresel nephroid eğrisi.



Şekil 4.2. S^2 küresi üzerinde küresel nephroid eğrisi.

4.2. Framed Rektifiyan Eğrilerin Sınıflandırılması

Bu kısımda framed rektifiyan eğriler hakkında temel tanım ve teoremler, framed küresel eğrilerin genişlemesi yardımıyla framed rektifiyan eğriler ve bu genişlemeye dair bazı sınıflandırmalar verilmiştir.

4.2.1. Framed rektifiyan eğriler

Framed rektifiyan eğriler Wang, Pei ve Gao tarafından tanıtılmıştır [14]. Şimdi bu çalışmaya ait temel tanım ve teoremler verilip daha sonra framed rektifiyan eğrilerin sınıflandırılmasına ait bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Tanım 4.2.1.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed eğri olsun. Eğer, bazı $\beta(s)$ ve $\delta(s)$ fonksiyonları için $\gamma(s)$ framed temel eğrisinin konum vektörü

$$\gamma(s) = \beta(s)v(s) + \delta(s)\bar{\eta}_2(s) \quad (4.10)$$

eşitliğini sağlarsa γ eğrisine framed rektifiyan eğri denir [14].

Teorem 4.2.1.2. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ framed eğriliği ile bir framed eğri olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [14]:

1. $\gamma(s)$ framed eğri ve framed eğrilikleri arasında

$$\langle \gamma(s), v(s) \rangle' = \alpha(s)$$

ilişkisi mevcuttur.

2. Bazı pozitif C sabiti için $\gamma(s)$ eğrisinin uzaklık kare fonksiyonu,

$$f(s) = \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = \langle \gamma(s), v(s) \rangle^2 + C$$

eşitliğini sağlar.

3. $\langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle = c$, $c = \text{sabit}$

4. $\gamma(s)$ bir framed rektifiyan eğridir.

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(s)$ bir framed rektifiyan eğri olsun. Tanımdan, (4.10) eşitliği yazılabilir. (4.10) eşitliğinin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\beta'(s) &= \alpha(s), \\
\beta(s)p(s) &= \delta(s)q(s), \\
\delta'(s) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.11) denkleminin birinci ve üçüncü eşitliğinden, $\langle \gamma(s), v(s) \rangle' = \beta'(s) = \alpha(s)$ denklemi elde edilir. Dolayısıyla 1 ifadesi ispatlanmış olur. $\delta'(s) = 0$ olduğundan 3 ifadesi de ispatlanmış olur. (4.10) ve (4.11) denklemlerinden, $C = \delta^2$ bir pozitif sayı iken,

$$\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = \beta^2(s) + \delta^2 = \langle \gamma(s), v(s) \rangle^2 + C,$$

elde edilir. Dolayısıyla, 2 ifadesi ispatlanmış olur.

Tersine, kabul edelim ki 1 ifadesi sağlansın. Buradan,

$$\langle \gamma(s), v(s) \rangle' = \langle \alpha(s)v(s), v(s) \rangle + p(s)\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle = \alpha(s)$$

yazılabilir. $p(s) > 0$ olduğundan, $\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle = 0$ olur. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ bir framed rektifiyan eğridir. Kabul edelim ki 2 ifadesi sağlansın. Buradan, pozitif C sabiti için $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = \langle \gamma(s), v(s) \rangle^2 + C$ denkleminin türevi alınır,

$$2\langle \gamma(s), \alpha(s)v(s) \rangle = 2\langle \gamma(s), v(s) \rangle(\alpha(s) + p(s)\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle)$$

ve $\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle = 0$ bulunur. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ bir framed rektifiyan eğridir. Kabul edelim ki 3 ifadesi sağlansın. $c = \text{sabit}$ iken, $\langle \gamma(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle = c$ denkleminin türevi alınır,

$$\alpha(s)\langle v(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle - q(s)\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle = 0$$

olarak bulunur. $\langle v(s), \bar{\eta}_2(s) \rangle = 0$ ve 3 ifadesi için $q(s) \neq 0$ olduğundan $\langle \gamma(s), \bar{\eta}_1(s) \rangle = 0$ şeklinde bulunur. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ bir framed rektifiyan eğridir.

İlerleyen kısımlarda framed rektifiyan eğrilerin eğrilikleri arasında kullanacağımız ilişki aşağıdaki gibi verilir:

Teorem 4.2.1.3. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ ile bir framed eğri olsun. γ eğrisinin bir framed rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter koşul $c_1 \neq 0$ ve c_2 sabitleri için

$$\frac{q(s)}{p(s)} = c_1 \int \alpha(s) ds + c_2$$

olmasıdır [14].

4.2.2. Framed küresel eğrilerin genişlemesi yardımıyla framed rektifiyan eğriler

Regüler rektifiyan eğriler için bir sınıflandırma Chen tarafından yapılmıştır [15]. Ama bu regüler olmayan durum için yeterli değildir. Dolayısıyla regüler olmayan rektifiyan eğriler için bir genişleme Wang, Pei ve Gao tarafından framed eğriler kullanılarak verilmiştir [14]. Bu genişleme hem regüler hem de regüler olmayan rektifiyan eğrileri içerdiğinden oldukça kullanışlıdır. Şimdi bu genişlemeye ait temel teorem ve ispatını verelim:

Teorem 4.2.2.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ ile bir framed eğri olsun. γ eğrisinin bir framed rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter koşul $w(s)$, S^2 de bir framed eğri, c sabit ve ρ pozitif bir sayı iken

$$\gamma(s) = \rho \sqrt{\left(\tan^2 \left(\int |w'(s)| ds + c \right) + 1 \right)} w(s)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [14].

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(s)$ bir framed rektifiyan eğri olsun. Teorem 4.2.1.2'den, ρ pozitif bir sayı iken, $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = \beta^2(s) + \rho^2$ olur. Dolayısıyla, $\gamma(s)$ framed rektifiyan eğrisi, $w(s)$, S^2 de bir framed eğri iken,

$$\gamma(s) = \sqrt{\beta^2(s) + \rho^2} w(s) \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. (4.12) denkleminin türevi alınırsa,

$$\gamma'(s) = \frac{\beta(s)\alpha(s)}{\sqrt{\beta^2(s) + \rho^2}} w(s) + \sqrt{\beta^2(s) + \rho^2} w'(s) \quad (4.13)$$

olarak bulunur. $\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$ olduğundan $w'(s)$, $w(s)$ ye diktir. (4.13) denklemi gösterir ki,

$$|w'(s)| = \left| \frac{\rho \alpha(s)}{\beta^2(s) + \rho^2} \right|$$

şeklindedir. Buradan,

$$\int |w'(s)| ds + C = \arctan\left(\frac{\beta(s)}{\rho}\right)$$

şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\beta(s) = \rho \tan\left(\int |w'(s)| ds + C\right) \quad (4.14)$$

olur. (4.14) denklemi, (4.12) denkleminde yerine yazılırsa, istenilen elde edilir.

Tersine, $\gamma(s)$ framed eğrisi $w(s)$, S^2 de bir framed eğri, C sabit ve ρ pozitif bir sayı iken

$$\gamma(s) = \rho \sqrt{\tan^2\left(\int |w'(s)| ds + C\right) + 1} w(s)$$

denklemini sağlasın. Kabul edelim ki, $\beta(s) = \rho \tan\left(\int |w'(s)| ds + C\right)$ ve $\beta'(s) = \alpha(s)$ olsun. O halde,

$$\int |w'(s)| ds + C = \arctan\left(\frac{\beta(s)}{\rho}\right) \quad (4.15)$$

yazılabilir. (4.15) denkleminin türevi alınırsa,

$$\frac{\rho \beta(s)}{\beta^2(s) + \rho^2} = |w'(s)| \quad (4.16)$$

ve

$$\gamma'(s) = \frac{\beta(s)\alpha(s)}{\sqrt{\beta^2(s) + \rho^2}} w(s) + \sqrt{\beta^2(s) + \rho^2} w'(s) \quad (4.17)$$

bulunur. (4.16) ve (4.17) denklemlerine göre, $w'(s) = \beta(s)v(s)$ olduğundan $|w'(s)| = \alpha(s)$ dir. O halde, $\alpha(s) = \pm\beta(s)$, $\beta(s) = \pm\alpha(s)$ dir. Dolayısıyla,

$$\gamma(s) = \sqrt{\beta^2(s) + \rho^2} w(s)$$

olur ve uzaklık kare fonksiyonu Teorem 4.2.1.2 2 ifadesini sağlar. O halde, $\gamma(s)$ bir framed rektifiyan eğridir.

Sonuç 4.2.2.2. Framed küresel eğrilerin genişlemesi yardımıyla elde edilen framed rektifiyan eğrilerin denklemi

$$\gamma(s) = \rho \sqrt{\tan^2 \left(\int |w'(s)| ds + c \right) + 1} w(s)$$

ile verilir. Bu denklem,

$$\gamma(s) = \rho \sec \left(\int |w'(s)| ds + c \right) w(s)$$

formunda da yazılabilir. Ancak, regüler durumlar için Deshmukh, Chen ve Alshammari her küresel eğri ile oluşturulan genişlemenin sonucunun bir rektifiyan eğri olmayabileceğini göstermişlerdir [23]. Framed eğriler, lineer bağımsız koşullar altında regüler eğrilerin genelleştirilmiş hali olduğundan bu sonuç framed eğriler içinde verilebilir. Dolayısıyla, $w(s) = (\sin s, 0, \cos s)$ için genişleme kullanılarak,

$$\gamma(s) = \rho \left(\frac{\sin s}{\cos(s+c)}, 0, \frac{\cos s}{\cos(s+c)} \right) \quad (4.18)$$

bulunur. (4.18) denkleminin türevi alınırsa,

$$\gamma'(s) = \rho \frac{1}{\cos^2(s+c)} (\sin(s+c)\sin s + \cos(s+c)\cos s, 0, \sin(s+c)\cos s - \cos(s+c)\sin s)$$

olur. $\gamma'(s) = \alpha_\gamma(s)v_\gamma(s)$ olduğundan,

$$\alpha_\gamma(s) = \rho \frac{1}{\cos^2(s+c)}$$

ve

$$v_\gamma = (\sin(s+c)\sin s + \cos(s+c)\cos s, 0, \sin(s+c)\cos s - \cos(s+c)\sin s) \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir. (4.19) denklemini düzenlendiğinde, $v_\gamma(s) = (\cos c, 0, \sin c)$ bulunur.

O halde, $v_\gamma' = 0$ olur. Bu ise kabul ile çelişir ve diğer yandan framed rektifiyan eğrilerin eğriliklerinin pozitif olması gerekir. Dolayısıyla, γ framed rektifiyan eğri değildir [25]. Dolayısıyla, bu genişlemeye dair bazı özellikler verilecektir.

Önerme 4.2.2.3. $w(s)$, S^2 de en az bir singüler olmayan noktaya sahip bir framed eğri olsun. O halde, $\{w, v_w, w \wedge v_w\}$ bir ortonormal sistemdir ve p_w, α_w framed eğrilikler ve $h = \langle w \wedge v_w, v_w' \rangle$ iken

$$p_w = \sqrt{\alpha_w^2 + h^2}$$

şeklindedir [25].

İspat. $w(s)$, S^2 de en az bir singüler olmayan noktaya sahip bir framed eğri olsun. O halde,

$$\langle w(s), w(s) \rangle = 1 \quad (4.20)$$

olur. (4.20) denkleminin türevi alınarak, $w(s)$ framed eğri olduğundan, $\alpha_w \langle w, v_w \rangle = 0$ olur. Dolayısıyla, $w(s)$, S^2 de en az bir singüler olmayan noktaya sahip olduğundan $\langle w, v_w \rangle = 0$ olur. Dolayısıyla, $\{w, v_w, w \wedge v_w\}$ bir ortonormal sistemdir. Kabul edelim ki, $h = \langle w \wedge v_w, v_w' \rangle$ olsun. Dolayısıyla,

$$v_w' = (-\alpha_w)w + h(w \wedge v_w)$$

olur. $v_w' = p_w \bar{\eta}_{1w}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_{1w} &= -\frac{\alpha_w}{p_w} w + \frac{h}{p_w} w \wedge v_w \\ p_w &= \sqrt{\alpha_w^2 + h^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı 4.2.2.4. C^∞ teoride, her $s \in I$ için $f(s)g(s) = 0$ ise, her $s \in I$ için $f(s) = 0$ veya her $s \in I$ için $g(s) = 0$ ifadesi doğru değildir. Örneğin flat fonksiyonlar gibi

karşıt örnekler vardır. Dolayısıyla, f, g fonksiyonları reel analitik fonksiyonlar ise ifade doğrudur. O halde kullanılan fonksiyonlar reel analitik fonksiyonlar olarak kabul edilmiştir [25].

Teorem 4.2.2.5. $w(s)$, S^2 de bir framed küresel eğri iken γ framed eğrisinin bir genişlemesi $\gamma(s) = \rho \sqrt{\left(\tan^2\left(\int |w'(s)| ds + c\right) + 1\right)} w(s)$ olsun. O halde, p_w ve $\alpha_w \geq 0$ framed eğrilikler iken,

$$\begin{aligned} p_\gamma(s) &= \cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right) \sqrt{p_w^2 - \alpha_w^2}, \\ q_\gamma(s) &= \sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right) \sqrt{p_w^2 - \alpha_w^2}, \\ \alpha_\gamma(s) &= \rho \sec^2\left(\int |w'(s)| ds + c\right) \alpha_w(s), \\ v_\gamma(s) &= \sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right) w(s) + \cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right) v_w(s), \\ \bar{\eta}_{1\gamma}(s) &= w(s) \wedge v_w(s), \\ \bar{\eta}_{2\gamma}(s) &= \cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right) w(s) - \sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right) v_w(s). \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir [25].

İspat. $w(s)$, S^2 de bir framed küresel eğri iken γ framed eğrisinin bir genişlemesi

$$\gamma(s) = \rho \sec\left(\int |w'(s)| ds + c\right) w(s) \quad (4.21)$$

olsun. (4.21) denkleminin türevi alınırsa $\gamma'(s) = \alpha_\gamma(s) v_\gamma(s)$ ve $w'(s) = \alpha_w(s) v_w(s)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \alpha_\gamma(s) v_\gamma(s) &= \rho \frac{\sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right)}{\cos^2\left(\int |w'(s)| ds + c\right)} |\alpha_w(s)| w(s) \\ &\quad + \rho \frac{1}{\cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right)} \alpha_w(s) v_w(s). \end{aligned} \quad (4.22)$$

olur. Kabul edelim ki $\alpha_w(s) \geq 0$ olsun. O halde (4.22) denkleminde,

$$\begin{aligned} \alpha_\gamma(s) &= \rho \sec^2\left(\int |w'(s)| ds + c\right) \alpha_w(s), \\ v_\gamma(s) &= \sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right) w(s) + \cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right) v_w(s). \end{aligned}$$

ve

$$v_\gamma(s) = \sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right) w(s) + \cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right) v_w(s). \quad (4.23)$$

bulunur. (4.23) denkleminin türevi alınır, $h = \langle w \wedge v_w, v_w' \rangle$ iken

$$p_\gamma(s) \bar{\eta}_{1\gamma}(s) = \cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right) (hw \wedge v_w)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\bar{\eta}_{1\gamma}(s) = w(s) \wedge v_w(s),$$

ve

$$p_\gamma(s) = \cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right) \sqrt{|p_w^2 - \alpha_w^2|}.$$

olur. $\bar{\eta}_{2\gamma}(s) = v_\gamma(s) \wedge \bar{\eta}_{1\gamma}(s)$ olduğu kullanılırsa,

$$\bar{\eta}_{2\gamma}(s) = \cos\left(\int |w'(s)| ds + c\right) w(s) - \sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right) v_w(s) \quad (4.24)$$

olur. (4.24) denkleminin türevi alınır,

$$-q_\gamma(s) \bar{\eta}_{1\gamma}(s) = -\sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right) (hw \wedge v_w)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$q_\gamma(s) = \sin\left(\int |w'(s)| ds + c\right) \sqrt{|p_w^2 - \alpha_w^2|}$$

bulunur.

Sonuç 4.2.2.6. $w(s)$, S^2 de bir framed küresel eğri iken γ framed eğrisinin bir genişlemesi $\gamma(s) = \rho \sec\left(\int |w'(s)| ds + c\right) w(s)$ olsun. Eğer s_0 , $w(s)$ eğrisinin bir singüler noktası ise, s_0 , $\gamma(s)$ eğrisinin de bir singüler noktasıdır [25].

Sonuç 4.2.2.7. $w(s)$, S^2 de büyük bir çemberin bir yayı olmayan framed küresel eğri olsun. O halde, $\gamma(s) = \rho \sec\left(\int |w'(s)| ds + c\right) w(s)$ bir framed rektifiyan eğridir.

Örnek 4.2.2.8. $\omega: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ iken

$$w(s) = \frac{1}{3} \left(2 \cos s - \cos 2s, 2 \sin s - \sin 2s, 2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right)$$

denklemleri ile verilen küresel kardiod eğrisinin türevi alınır, 0 ve 2π noktasında singüler noktalara sahip olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$v_w(s) = \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} + \frac{8\sqrt{2}}{3} \cos^3 \frac{s}{2}, 2\sqrt{2} \sin \frac{s}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \sin^3 \frac{s}{2}, -\frac{1}{3} \right)$$

ve

$$\alpha_w(s) = \sqrt{2} \sin \frac{s}{2}$$

ile bir Frenet-tipi framed eğridir. Buradan, $|w'(s)| = \sqrt{2} \sin \frac{s}{2}$ olduğundan

$$\int |w'(s)| ds + c = -2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} + c$$

şeklinde hesaplanır. Kabul edelim ki, $\rho = 1$ ve $c = 0$ olsun. Dolayısıyla, Teorem (4.2.2.1)'den,

$$\gamma(s) = \left(\frac{2}{3} \sec \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \cos s - \frac{1}{3} \sec \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \cos 2s, \right. \\ \left. \frac{2}{3} \sec \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \sin s - \frac{1}{3} \sec \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \sin 2s, \frac{2\sqrt{2}}{3} \sec \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \cos \frac{s}{2} \right)$$

bulunur. Diğer yandan, Teorem 4.2.2.5'ten

$$v_\gamma(s) = \left(\frac{2}{3} \sin \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \cos s - \frac{1}{3} \sin \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \cos 2s, \right. \\ -2\sqrt{2} \cos \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \cos \frac{s}{2} + \frac{8\sqrt{2}}{3} \cos \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \cos^3 \frac{s}{2}, \\ \frac{2}{3} \sin \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \sin s - \frac{1}{3} \sin \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \sin 2s \\ 2\sqrt{2} \cos \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \sin \frac{s}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \cos \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \sin^3 \frac{s}{2}, \\ \left. \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \cos \frac{s}{2} - \frac{1}{3} \cos \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right) \right)$$

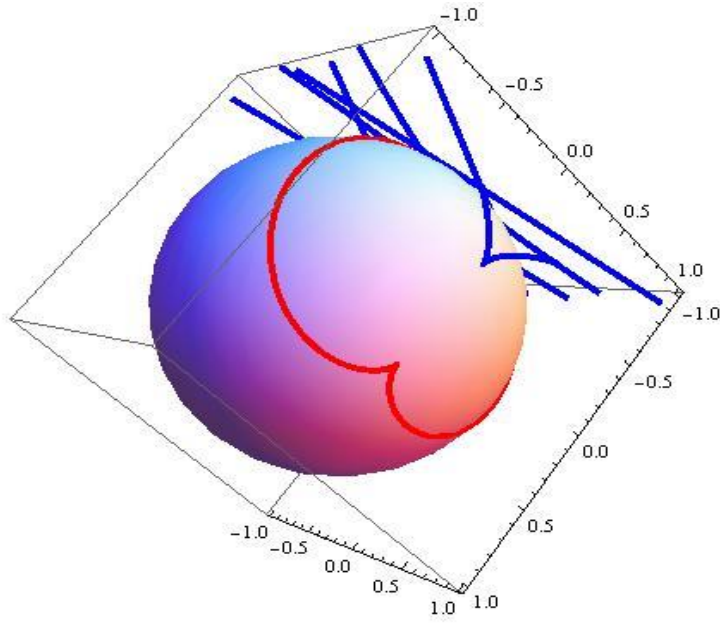
olur. Ayrıca, $p_w = |v_w'| = \sqrt{2}$ olduğundan,

$$\alpha_\gamma(s) = \sqrt{2} \sin \frac{s}{2} \sec^2 \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right),$$

$$p_\gamma(s) = \sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \cos \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right),$$

$$q_\gamma(s) = \sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \sin \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} \right).$$

olur [25].



Şekil 4.3. $w(s)$ framed küresel eğrisinin genişlemesi ile $\gamma(s)$ framed rektifiyan eğrisi.

5. FRAMED EĞRİLER İÇİN BİR DİFERANSİYEL DENKLEM VE UYGULAMALARI

Bu kısımda framed eğrilerin uzaklık kare fonksiyonları yardımıyla genel bir diferansiyel denklem verilmiştir ve bu diferansiyel denklemin framed normal eğriler, framed rektifiyan eğriler ve framed helisler ile ilişkisi incelenmiştir.

5.1. Framed Eğrilerin Uzaklık Kare Fonksiyonları ve Genel Bir Diferansiyel Denklem

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed temel eğrisi $p(s), q(s) \neq 0$ ile verilsin. Öklidyen uzayda regüler bir eğrinin uzaklık fonksiyonu $d(s) = \sqrt{\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle}$ ile verilir. Ancak eğri regüler değil ise $d(s)$ fonksiyonun türevleri singüler noktalarda tanımsızlık yaratabilir. Dolayısıyla singüler eğriler için uzaklık kare fonksiyonları kullanmak daha avantajlıdır. Bu duruma Wang ve Pei'nin framed rektifiyan eğriler için uzaklık kare fonksiyonları tanımını da örnek teşkil eder [14]. Dolayısıyla, singüler noktalara sahip $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed temel eğrisi için uzaklık kare fonksiyonu

$$d^2(s) = \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle \quad (5.1)$$

ile tanımlanır. Şimdi bu bölüm için önemli bir rol oynayan aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 5.1.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p, q \neq 0$ ile bir framed eğri olsun. $x = p^{-1}$, $y = q^{-1}$, $\alpha h = dd'$ iken,

$$\begin{aligned} (yx)h''' + (y'x + 2yx')h'' + \left((yx')' + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right)h' + \left(\frac{y}{x} \right)'h \\ = (yx)\alpha'' + (y'x + 2yx')\alpha' + \left((yx')' + \frac{x}{y} \right)\alpha \end{aligned} \quad (5.2)$$

diferansiyel denklemi sağlanır [27].

İspat. (5.1) denkleminin türevi alınırsa,

$$2dd' = 2\alpha \langle \gamma, v \rangle$$

bulunur. O halde $\alpha h = dd'$ ise

$$h = \langle \gamma, v \rangle \quad (5.3)$$

yazılabilir. (5.3) denkleminin türevi alınır ve Frenet-tipi framed eğriler için türev formülleri kullanılırsa,

$$x(h' - \alpha) = \langle \gamma, \bar{\eta}_1 \rangle \quad (5.4)$$

elde edilir. (5.4) denkleminin türevi alınır ve (5.3) denklemi kullanılırsa,

$$x'(h' - \alpha) + x(h'' - \alpha') = -p \langle \gamma, v \rangle + q \langle \gamma, \bar{\eta}_2 \rangle \quad (5.5)$$

olur. (5.3) ve (5.5) denklemleri kullanılarak,

$$yx'(h' - \alpha) + yx(h'' - \alpha') + \left(\frac{y}{x}\right)h = \langle \gamma, \bar{\eta}_2 \rangle \quad (5.6)$$

bulunur. Son olarak, (5.6) denkleminin türevi alınır ve (5.4) denklemi kullanılırsa, (5.2) denklemi elde edilir.

Sonuç 5.1.2.

1. Eğer γ eğrisi özel olarak regüler bir framed eğri ise, $h = \frac{dd'}{\alpha}$ olarak yazılabildiğinden, (5.2) diferansiyel denklemi d uzaklık fonksiyonuna göre 4. basamaktan bir diferansiyel denklemdir. Özel olarak, $\alpha = 1$ ise, γ eğrisi birim hızlı regüler bir eğri olacağından, $x = p^{-1}$, $y = q^{-1}$, $h = dd'$ iken

$$(yx)h''' + (y'x + 2yx')h'' + \left((yx')' + \frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)h' + \left(\frac{y}{x}\right)'h = \left((yx')' + \frac{x}{y}\right)$$

olur. Elde edilen bu diferansiyel denklem, birim hızlı regüler eğriler için bir diferansiyel denklemi verir [26].

2. Eğer γ eğrisi regüler olmayan bir eğri ise (yani singüler noktalara sahip bir eğri ise), singüler noktalarda α fonksiyonu sıfır olacağından, $h = \frac{dd'}{\alpha}$ eşitliği yazılamaz.

Dolayısıyla, (5.2) diferansiyel denklemi uzaklık kare fonksiyonu ile tanımlanan h fonksiyonuna göre 3. basamaktan bir diferansiyel denklemdir.

Örnek 5.1.3. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi,

$$\gamma(s) = \left((s-3)\cos s - \sin s, -(s-3)\sin s - \cos s, \frac{s^2}{2} - 3s \right) \quad (5.7)$$

parametrik gösterimiyle verilsin (Şekil 5.1.), (Şekil 5.2.). Eğri $s=3$ noktasında singüler noktaya sahip olduğundan Frenet eğrisi değildir. Ancak, $(v, \gamma): \mathbb{R} \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ dönüşümü ile γ bir framed temel eğridir ve genelleştirilmiş tanjant vektörü,

$$v(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin s, -\cos s, 1)$$

ve singüler noktaları karakterize eden $\alpha(s)$ fonksiyonu

$$\alpha(s) = \sqrt{2}(s-3)$$

şeklindedir. Framed eğrilikler hesaplanırsa, $p(s) = q(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ bulunur. Diğer yandan, uzaklık kare fonksiyonu ise

$$d^2(s) = \frac{s^4}{4} - 3s^3 + 10s^2 - 6s + 10$$

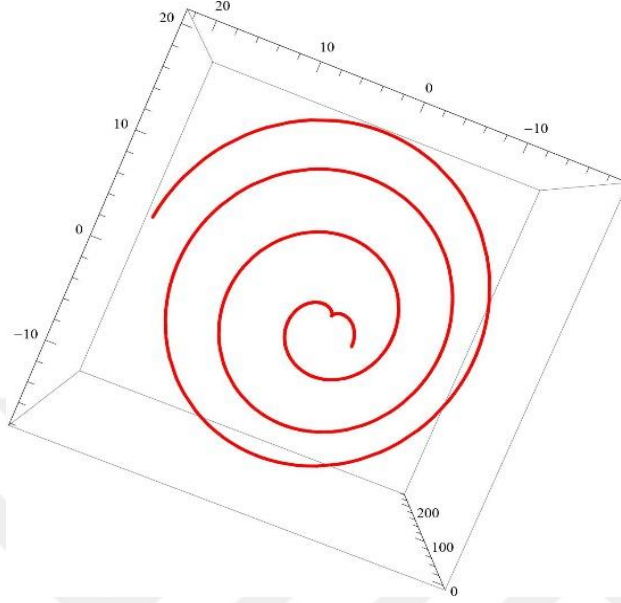
dir. $\alpha h = dd'$ olduğundan,

$$h(s) = \frac{s^2 - 6s + 2}{2\sqrt{2}}$$

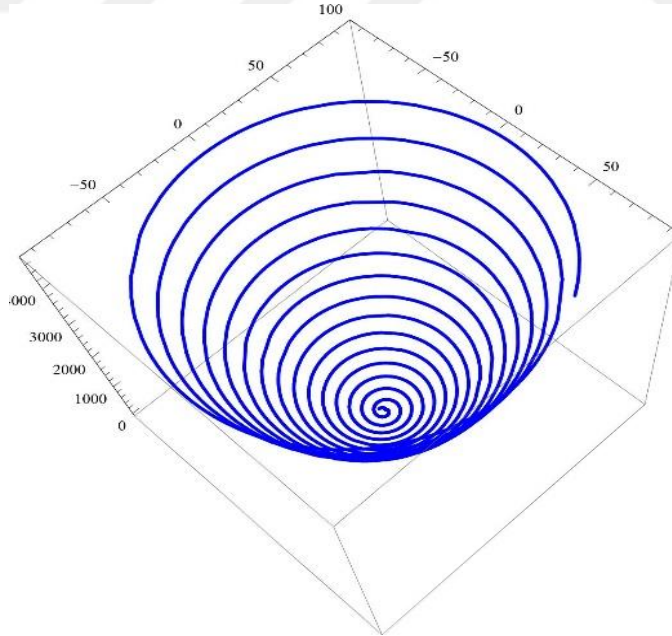
bulunur. Buradan, $h(s)$ fonksiyonun üç kez, $\alpha(s)$ fonksiyonun iki kez türevi alınır,

$$\begin{aligned} h'(s) &= \frac{s-3}{\sqrt{2}}, \quad h''(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h'''(s) = 0 \\ \alpha'(s) &= \sqrt{2}, \quad \alpha''(s) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, bu değerlerin (5.2) diferansiyel denklemi sağladığı görülür [27].



Şekil 5.1. (5.7) denklemi ile verilen Frenet-tipi framed eğrisi.



Şekil 5.2. (5.7) denklemi ile verilen Frenet-tipi framed eğrisinin diğer bir görünümü.

5.2. Framed Eğriler için Genel Diferansiyel Denklemin Uygulamaları

Bu kısımda (5.2) diferansiyel denkleminin tezimizin 4. bölümünde tanıttığımız özel framed düzlem eğrileri ve framed helisler ile ilişkisi incelenmiştir.

5.2.1. Framed normal eğriler için bir diferansiyel denklem

Teorem 4.1.2.3'e göre, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi bir framed normal eğri ise

$$\begin{aligned}\gamma(s) = & \left(-c_1 \cos\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \sin\left(\int q(s)ds\right) \right) \bar{\eta}_1(s) \\ & + \left(c_1 \sin\left(\int q(s)ds\right) - c_2 \cos\left(\int q(s)ds\right) \right) \bar{\eta}_2(s)\end{aligned}$$

denklemini sağlar. Buradan,

$$\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = c_1^2 + c_2^2 = \text{sabit}$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla, uzaklık kare fonksiyonu, $d^2(s) = c_1^2 + c_2^2 = \text{sabit}$ elde edilir. O halde (5.2) diferansiyel denkleminin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.2.1.1. En az bir singüler olmayan noktaya sahip $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisinin bir framed normal eğri olması için gerek ve yeter koşul $x = p^{-1}$, $y = q^{-1}$ iken

$$\left(y(\alpha x)' \right)' + \frac{\alpha x}{y} = 0 \quad (5.8)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [27].

İspat. Kabul edelim ki $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi framed normal eğri olsun. O halde

$$d^2(s) = c_1^2 + c_2^2 = \text{sabit} \quad (5.9)$$

(5.9) denkleminin türevi alınır $\alpha h = dd' = 0$ bulunur. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi en az bir singüler olmayan noktaya sahip olduğundan $h = 0$ olur. Bu eşitlik (5.2) diferansiyel denkleminde yerine yazılırsa, (5.8) denklemini bulur.

Sonuç 5.2.1.2. (5.8) denkleminde $x = p^{-1}$, $y = q^{-1}$ eşitlikleri yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{q} \left(\frac{\alpha}{p} \right)' \right)' + \frac{\alpha q}{p} = 0$$

denklemini bulunur. Bu karakterizasyonun ise (4.3) denklemini ile aynı olduğu görülür.

Sonuç 5.2.1.3. En az bir singüler olmayan noktaya sahip $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed normal eğrisi aynı zamanda framed küresel eğri olduğundan elde edilen sonuçlar framed küresel eğriler için de doğrudur. Açıkça, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed küresel eğrisi r yarıçaplı ve orijin merkezli bir kürede yatarsa, $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = r$ olur. Gerçekten $\alpha h = dd' = 0$ eşitliği elde edilir ve aynı karakterizasyonlar bulunur.

Örnek 5.2.1.4. Frenet-tipi framed eğri olarak $\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\gamma(s) = \left(\frac{2}{3} \cos s - \frac{1}{3} \cos 2s, \frac{2}{3} \sin s - \frac{1}{3} \sin 2s, \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos \frac{s}{2} \right)$$

küresel kardiod eğrisini düşünelim (Şekil 5.3.). Bu eğri $s = 0$ ve $s = 2\pi$ noktalarında singüler noktalara sahiptir. Diğer yandan, $\langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle = 1$ olduğundan framed küresel eğridir. $\gamma'(s) = \alpha(s)v(s)$ eşitliğinden $v(s): I \rightarrow S^2$ regüler küresel eğrisi,

$$v(s) = \left(-2\sqrt{2} \cos \frac{s}{2} + \frac{8\sqrt{2}}{3} \cos^3 \frac{s}{2}, 2\sqrt{2} \sin \frac{s}{2} - \frac{8\sqrt{2}}{3} \sin^3 \frac{s}{2}, -\frac{1}{3} \right)$$

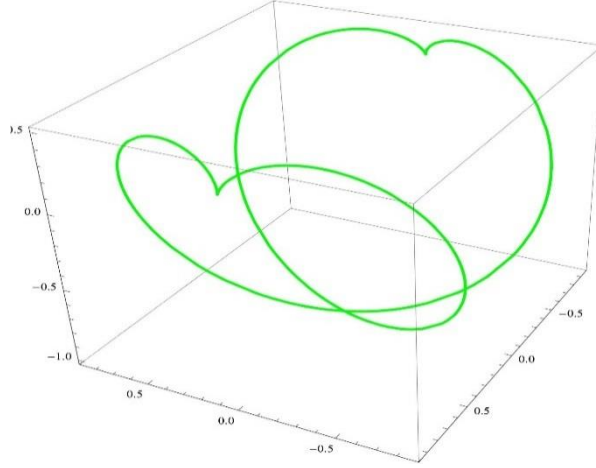
şeklinde bulunabildiğinden, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir Frenet-tipi framed eğridir ve framed eğrilikler,

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \sqrt{2} \sin \frac{s}{2}, \\ p(s) &= \sqrt{2}, \\ q(s) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca,

$$h = \langle \gamma, v \rangle = 0, \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = 2, \quad \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{s}{2}$$

ifadelerinin (5.8) denklemini sağladığı görülür.



Şekil 5.3. $\gamma(s)$ küresel kardiod eğrisi.

5.2.2. Framed rektifiyan eğriler için bir diferansiyel denklem

Teorem 4.2.1.2'e göre, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi bir framed rektifiyan eğri ise,

$C = \text{sabit}$ iken

$$d^2(s) = \langle \gamma(s), v(s) \rangle^2 + C = h^2 + C \quad (5.10)$$

eşitliği vardır. Framed rektifiyan eğriler için uzaklık kare fonksiyonunun bu tanımından ve (5.2) diferansiyel denkleminin bir sonucu olarak aşağıdaki Teoremi verebiliriz:

Teorem 5.2.2.1. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisinin bir framed rektifiyan eğri olması için gerek ve yeter koşul $x = p^{-1}$, $y = q^{-1}$ ve $h = \langle \gamma, v \rangle$ iken

$$\left(\frac{y}{x} \right)' h + \left(\frac{y}{x} \right) h' = 0 \quad (5.11)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [27].

İspat. Kabul edelim ki $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi bir framed rektifiyan eğri olsun. O halde framed rektifiyan eğriler için uzaklık kare fonksiyonu (5.10) denklemini sağlar. (5.10) denkleminin türevi alınırsa,

$$2dd' = 2\langle \gamma, v \rangle \langle \gamma, v \rangle',$$

$$dd' = hh' = \alpha h$$

olur. Framed rektifiyan eğriler için $h \neq 0$ olduğundan, $h' = \alpha$ olur. h, h', h'', h''' ifadeleri (5.2) denkleminde yerine yazılırsa, (5.11) diferansiyel denklemi elde edilir. Tersine, (5.11) denklemi sağlansın. (5.11) denkleminin her iki tarafının integrali alınır, a bir sabit iken $yh = ax$ elde edilir. $h' = \alpha$ olduğundan b integral sabiti için $h = \int \alpha(s) ds + b$ bulunur. Dolayısıyla,

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{a} \left(\int \alpha(s) ds + b \right)$$

denklemi bulunur. $x = p^{-1}$, $y = q^{-1}$, $\frac{1}{a} = c_1$ ve $\frac{b}{a} = c_2$ iken,

$$\frac{q}{p} = c_1 \int \alpha(s) ds + c_2$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla Teorem 4.2.1.3'ten $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir framed rektifiyan eğridir.

Teorem 5.2.2.2. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisinin bir r sabiti için,

$$\langle \gamma, \bar{\eta}_1 \rangle^2 + \langle \gamma, \bar{\eta}_2 \rangle^2 = r^2 \quad (5.12)$$

eşitliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul γ framed eğrisinin ya framed normal eğri ya da framed rektifiyan eğri olmasıdır [27].

İspat. İlk olarak kabul edelim ki, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi (5.12) denklemini sağlasın.

$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisini $v, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2$ vektörleri cinsinden, $\gamma = av + b\bar{\eta}_1 + c\bar{\eta}_2$ şeklinde yazabiliriz. O halde, uzaklık kare fonksiyonu,

$$d^2 = \langle \gamma, \gamma \rangle = a^2 + b^2 + c^2 = \langle \gamma, v \rangle^2 + \langle \gamma, \bar{\eta}_1 \rangle^2 + \langle \gamma, \bar{\eta}_2 \rangle^2$$

olarak bulunur. (5.12) denkleminde,

$$d^2 = \langle \gamma, v \rangle^2 + r^2 \quad (5.13)$$

bulunur. (5.13) denkleminin türevi alınırsa,

$$dd' = \langle \gamma, v \rangle (\alpha + p \langle \gamma, \bar{\eta}_1 \rangle)$$

olur. $h = \langle \gamma, v \rangle$ olduğundan, $h' = \alpha + p \langle \gamma, \bar{\eta}_1 \rangle$ olur. O halde,

$$dd' = hh' = \alpha h$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla, ya $h=0$ ya da $h=\alpha'$ olur. O halde, Sonuç 5.2.1.1 ve Sonuç 5.2.2.1'den $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi ya framed normal eğri ya da framed rektifiyan eğridir. Tersine, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi framed normal eğri olsun. O halde, $\langle \gamma, v \rangle = 0$ ve d sabittir. Dolayısıyla, (5.12) eşitliği bulunur. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi framed rektifiyan eğri olsun. Buradan, framed rektifiyan eğriler için uzaklık kare fonksiyonunu $d^2 = \langle \gamma, v \rangle^2 + C$ ile tanımlamıştık. Dolayısıyla, $C = r^2$ sabit iken, (5.12) denklemi bulunur.

5.2.3. Framed helisler için bir diferansiyel denklem

Bu kısımda regüler helislerin bir genellemesi olan framed helisler için (5.2) diferansiyel denklemine bağlı yeni bir diferansiyel denklem verilecektir. Önce framed helis kavramını tanıtalım:

Tanım 5.2.3.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ ile bir framed eğri olsun. Eğer sabit bir U birim vektörü, $\phi = \text{sabit}$ iken $\langle v, U \rangle = \cos \phi$ eşitliğini sağlarsa $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisine bir framed helis denir [14].

Framed helislerin eğriliklerinin karakterizasyonu için aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 5.2.3.2. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, $p(s) > 0$ ile bir framed eğri olsun. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisinin framed helis olması için gerek ve yeter koşul $\phi = \text{sabit}$ iken

$$\frac{q(s)}{p(s)} = \mp \cot \phi \quad (5.14)$$

bağıntısını sağlamasıdır [14].

(5.2) diferansiyel denklemine bağı olarak framed helisler için yeni bir karakterizasyonu aşağıdaki gibi verebiliriz:

Teorem 5.2.3.3. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisinin $p, q \neq 0$ ve $x = p^{-1}$, $y = q^{-1}$, $\alpha h = dd'$ iken framed helis olması için gerek ve yeter koşul, C integral sabiti için

$$y(x(h' - \alpha))' + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)h = \frac{x}{y} \left(\int \alpha ds + c\right) \quad (5.15)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [27].

İspat. Kabul edelim ki γ bir framed helis olsun. O halde Tanım 5.2.3.1' den U birim vektör ve $\phi =$ sabit iken

$$\langle v, U \rangle = \cos \phi \quad (5.16)$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, (5.16) denkleminin türevi alınır, $p \neq 0$ olduğundan $\langle \bar{\eta}_1, U \rangle = 0$ bulunur. Dolayısıyla, U birim vektörü

$$U = \cos \phi v + \sin \phi \bar{\eta}_2 \quad (5.17)$$

şeklinde yazılabilir. (5.17) ifadesinin türevi alınır,

$$p \cos \phi = q \sin \phi \quad (5.18)$$

olur. Ayrıca, $\langle \gamma, U \rangle' = \alpha \cos \phi$ olduğundan,

$$\langle \gamma, U \rangle = \cos \phi \int \alpha ds + c$$

olur. O halde,

$$h = \langle \gamma, v \rangle = \int \alpha ds + \bar{c} - \tan \phi \langle \gamma, \bar{\eta}_2 \rangle, \quad \bar{c} = \frac{c}{\cos \phi} \quad (5.19)$$

elde edilir. (5.19) eşitliğinin türevi alınır,

$$\begin{aligned} h' &= \alpha - \tan \phi \left[\langle \gamma, -q \bar{\eta}_1 \rangle \right], \\ h' - \alpha &= q \tan \phi \langle \gamma, \bar{\eta}_1 \rangle \end{aligned}$$

olur ve (5.18) denklemi kullanılırsa

$$x(h' - \alpha) = \langle \gamma, \bar{\eta}_1 \rangle \quad (5.20)$$

bulunur. (5.20) denkleminin tekrar türevi alınır,

$$x'(h' - \alpha) + x(h'' - \alpha') = -ph + q \langle \gamma, \bar{\eta}_2 \rangle$$

bulunur. (5.18) ve (5.19) denklemleri kullanılırsa,

$$x'(h' - \alpha) + x(h'' - \alpha') = q \cot \phi \left(\int \alpha ds + \bar{c} \right) - (\cot \phi + \tan \phi) qh \quad (5.21)$$

olur. Burada, (5.18) denkleminde,

$$\frac{y}{x} = \tan \phi, \quad \frac{x}{y} = \cot \phi \quad (5.22)$$

olduğu görülür. (5.21) ve (5.22) denklemleri birleştirildiğinde (5.15) denklemi elde edilir. Tersine, kabul edelim ki (5.15) denklemi sağlansın. (5.15) denkleminin türevi alınır

$$\begin{aligned} & (yx)h''' + (y'x + 2yx')h'' + \left((yx')' + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right)h' + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right)'h \\ &= (yx)\alpha'' + (y'x + 2yx')\alpha' + \left((yx')' + \frac{x}{y} \right)\alpha + \left(\frac{x}{y} \right)'h \left(\int \alpha ds + c \right) \end{aligned}$$

olur. Bu denklem (5.2) denklemi ile birleştirilirse,

$$\left(\frac{x}{y} \right)' (h - \int \alpha ds - c) = 0 \quad (5.23)$$

bulunur. Eğer $h = \int \alpha ds + c$ ise (5.15) denklemi

$$\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) \left(\int \alpha ds + c \right) - \frac{x}{y} \left(\int \alpha ds + c \right) = 0$$

ifadesine dönüşür ve $\left(\frac{y}{x}\right)\left(\int \alpha ds + c\right) = 0$ olur. $h \neq 0$ olduğundan, $\frac{y}{x} = 0$ bulunur ve

bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, (5.23) denkleminde $\left(\frac{x}{y}\right)' = 0$ olur ve bu ise γ framed eğrisinin bir framed helis olduğunu gösterir.

Örnek 5.2.3.4. $\gamma: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisinin parametrik denklemi

$$\gamma(s) = (\cos^3 s, \sin^3 s, \cos 2s)$$

ile verilsin (Şekil 5.4.). Bu eğri literatürde “astroid” eğrisi olarak bilinir [13]. Framed eğrilikler hesaplanırsa,

$$\alpha(s) = 5 \cos s \sin s,$$

$$p(s) = -\frac{3}{5},$$

$$q(s) = -\frac{4}{5}$$

olur. $q(s)/p(s) = \text{sabit}$ olduğundan framed eğrisi framed helistir. Şimdi Teorem 5.2.3.3 yardımıyla framed helisler için tanımladığımız yeni karakterizasyonun sağlandığını görelim:

Uzaklık kare fonksiyonu ve buna bağlı h fonksiyonu,

$$d^2(s) = \cos^6 s + \sin^6 s + \cos^2 2s,$$

$$h(s) = -\frac{3}{5} \cos^4 s + \frac{3}{5} \sin^4 s - \frac{4}{5} \cos 2s = -\frac{8}{5} \cos 2s$$

bulunur. $x = -\frac{5}{3}$, $y = -\frac{5}{4}$ iken (5.15) denkleminde bütün değerleri yerine yazarsak,

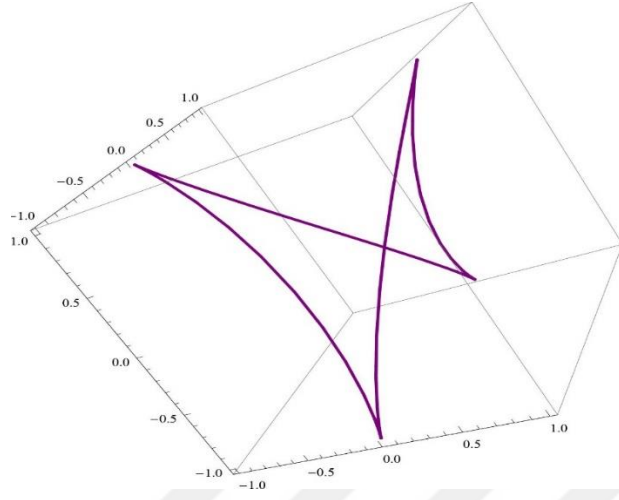
denklemin sol tarafı ve denklemin sağ tarafı sırasıyla,

$$y(x(h' - \alpha))' + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)h = \frac{4}{3} \cos 2s$$

ve

$$\frac{x}{y} \left(\int \alpha ds + c \right) = -\frac{8}{3} \sin^2 s + b$$

olur. $b = 4/3$ iken (5.15) denkleminin sağlandığı görölür ve γ eğrisi bir framed helistir [27].



Şekil 5.4. Framed helis olarak $\gamma(s)$ astroid eğrisi.



6. FRAMED EĞRİLERİN ADJOİNT EĞRİLERİ

Bu kısımda framed eğrilerin adjoint eğrileri başka bir ifadeyle bir integral eğrisi tanıtılacaktır. İlk olarak 6.1 kısmında framed eğrilerin genel çatıya göre adjoint eğrileri, daha sonra Frenet-tipi çatıya göre adjoint eğrileri tanıtılacaktır.

6.1. Framed Eğrilerin Genel Çatısına Göre Adjoint Eğriler

Tanım 6.1.1. $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ve $(\delta, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ framed eğri olsun. $\gamma(s)$ framed temel eğrisinin $\delta(s)$ framed temel adjoint eğrisi, $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon iken,

$$\delta(s) = \int_{s_0}^s \beta(s) \eta_2(s) ds \text{ veya } \delta'(s) = \beta(s) \eta_2(s) \quad (6.1)$$

ile tanımlanır.

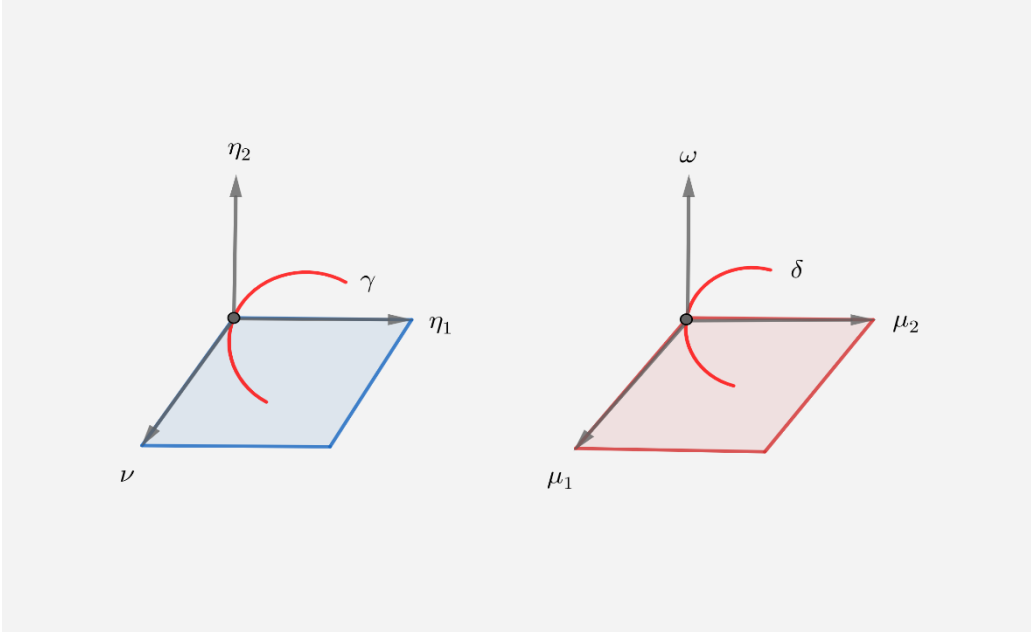
Uyarı 6.1.2. $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed eğri olsun. Eğer her $s \in I$ için γ framed eğrisinin adjoint eğrisine karşılık $\langle \beta(s) \eta_2(s), \mu_1(s) \rangle = 0$ ve $\langle \beta(s) \eta_2(s), \mu_2(s) \rangle = 0$ olacak şekilde $\mu_1, \mu_2: I \rightarrow \Delta_2$ vektörleri varsa δ adjoint eğrisi de framed temel eğridir ve $(\delta, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir framed eğridir.

$(\delta, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ eğrisi framed eğri olduğundan bir birim vektör $\omega = \mu_1 \wedge \mu_2$ şeklinde yazılabilir. Şimdi $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed eğrisi ve onun adjoint eğrisi $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ arasındaki ilişkiyi açıklayan aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 6.1.3. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed temel eğrisi $\{\gamma, \eta_1, \eta_2\}$ ve $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ adjoint eğrisi $\{\delta, \mu_1, \mu_2\}$ hareketli çatılar ile verilsin. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned}\omega(s) &= \eta_2(s), \\ \mu_1(s) &= \cos \theta(s) \nu(s) - \sin \theta(s) \eta_1(s), \\ \mu_2(s) &= \sin \theta(s) \nu(s) + \cos \theta(s) \eta_1(s).\end{aligned}$$

İspat. $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir framed temel eğri olduğundan, $\delta'(s) = \beta(s) \eta_2(s)$ eşitliği göz önüne alındığında $\omega(s) = \eta_2(s)$ yazılabilir.



Şekil 6.1. $\omega(s) = \eta_2(s)$ olarak framed düzlemleri.

$\omega(s) = \eta_2(s)$ olduğundan, Şekil (6.1)'e göre, $\theta(s): I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon iken

$$\begin{pmatrix} \mu_1(s) \\ \mu_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(s) & -\sin \theta(s) \\ \sin \theta(s) & \cos \theta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(s) \\ \eta_1(s) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

yazılabilir.

Teorem 6.1.4. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed temel eğrisi $\{\nu, \eta_1, \eta_2\}$ ve $\delta: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ adjoint eğrisi $\{\omega, \mu_1, \mu_2\}$ hareketli çatılar ile verilsin. Sırasıyla, (l, m, n, α) ve $(l_\delta, m_\delta, n_\delta, \alpha_\delta)$ framed eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}
l_\delta(s) &= -m(s) - \theta'(s), \\
m_\delta(s) &= -n(s) \cos \theta(s) - l(s) \sin \theta(s), \\
n_\delta(s) &= -n(s) \sin \theta(s) + l(s) \cos \theta(s), \\
\alpha_\delta(s) &= \beta(s).
\end{aligned}$$

İspat. (6.2) denklemindeki eşitliklerin ayrı ayrı türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\mu_1'(s) &= (-m(s) \sin \theta(s) - \theta'(s) \sin \theta(s))v(s) + (-m(s) \cos \theta(s) - \theta'(s) \cos \theta(s))\eta_1(s) \\
&\quad + (-n(s) \cos \theta(s) - l(s) \cos \theta(s))\eta_2(s)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mu_2'(s) &= (m(s) \cos \theta(s) + \theta'(s) \cos \theta(s))v(s) + (-m(s) \sin \theta(s) - \theta'(s) \sin \theta(s))\eta_1(s) \\
&\quad + (-n(s) \sin \theta(s) + l(s) \cos \theta(s))\eta_2(s)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde, δ adjoint eğrisinin framed eğrilikleri,

$$\begin{aligned}
l_\delta(s) &= \langle \mu_1'(s), \mu_2(s) \rangle = -m(s) - \theta'(s), \\
m_\delta(s) &= \langle \mu_1'(s), \omega(s) \rangle = \langle \mu_1'(s), \eta_2(s) \rangle = -n(s) \cos \theta(s) - l(s) \sin \theta(s), \\
n_\delta(s) &= \langle \mu_2'(s), \omega(s) \rangle = \langle \mu_2'(s), \eta_2(s) \rangle = -n(s) \sin \theta(s) + l(s) \cos \theta(s), \\
\alpha_\delta(s) &= \beta(s).
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Sonuç 6.1.5. γ framed temel eğrisinin singüler noktalarını $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu, $\mathcal{S}$ adjoint eğrisinin singüler noktalarını $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu karakterize eder.

Şimdi framed eğrilerinin adjoint eğrilerinin Bertrand ve Mannheim eğrisi olmaları için gerek ve yeter koşulları ifade edelim. İlk olarak framed Bertrand ve framed Mannheim eğri tanımını verelim:

Tanım 6.1.6. Eğer $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu

$$\delta(s) = \gamma(s) + \lambda \eta_1(s), \quad \eta_1(s) = \mu_1(s)$$

denklemini sağlarsa (γ, η_1, η_2) ve (δ, μ_1, μ_2) framed eğrilerine Bertrand çifti denir [16].

Tanım 6.1.7. Eğer $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu

$$\delta(s) = \gamma(s) + \lambda \eta_1(s), \quad \eta_1(s) = \mu_2(s)$$

denklemini sağlarsa (γ, η_1, η_2) ve (δ, μ_1, μ_2) framed eğrilerine Mannheim çifti denir [16].

Sonuç 6.1.8. $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$, (l, m, n, α) framed eğrilikleri ile verilmiş bir framed eğri olsun.

1. Sıfırdan farklı bir λ sabiti için $\alpha(s) + \lambda m(s) = 0$ ise, (γ, η_1, η_2) bir Bertrand eğrisidir.

2. Sıfırdan farklı bir λ sabiti için $\alpha(s) + \lambda m(s) = 0$ ise, (γ, η_1, η_2) bir Mannheim eğrisidir [16].

Teorem 6.1.9. $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ framed eğri ve onun adjoint eğrisi

$(\delta, \mu_1, \mu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ framed eğri olsun. $(\gamma, \eta_1, \eta_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ve

$(\delta, \mu_1, \mu_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ eğrilerinin Bertrand eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul

k tek bir tam sayı iken, $\theta(s) = \left(\frac{2k+1}{2} \right) \pi$, $\alpha(s) + \lambda m(s) = 0$, $\lambda = \text{sabit}$ ve

$\beta(s) = \lambda l(s)$ olmasıdır.

İspat. $\gamma(s)$ ve $\delta(s)$ framed eğrileri Bertrand eğri çifti olsunlar. Böylece, Tanım 6.1.6'dan

$$\delta(s) = \gamma(s) + \lambda \eta_1(s), \quad \eta_1(s) = \mu_1(s) \quad (6.3)$$

şeklinde yazılabilir. O halde, (6.2) denklemine göre, k tek bir tam sayı iken,

$\theta(s) = \left(\frac{2k+1}{2} \right) \pi$ elde edilir. (6.3) denkleminin türevi alınır,

$$\delta'(s) = \gamma'(s) + \lambda'(s) \eta_1(s) + \lambda(s) \eta_1'(s),$$

olur. $\delta(s)$ bir adjoint eğri olduğundan,

$$\beta(s)\eta_2(s) = (\alpha(s) + \lambda(s)m(s))v(s) + \lambda'(s)\eta_1(s) + \lambda(s)l(s)\eta_2(s)$$

yazılabilir. Buradan, $\alpha(s) + \lambda m(s) = 0$, $\lambda = \text{sabit}$ ve $\beta(s) = \lambda l(s)$ elde edilir.

Tersine, eğer her $s \in I$ için sıfırdan farklı bir λ sabiti $\alpha(s) + \lambda m(s) = 0$ denklemini sağlarsa, Sonuç 6.1.8'e göre $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ve $(\delta, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ eğrileri Bertrand eğri çiftidir.

Teorem 6.1.7. $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ framed eğri ve onun adjoint eğrisi $(\delta, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ framed eğri olsun. $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ve $(\delta, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ eğrilerinin Mannheim eğri çifti olması için gerek ve yeter koşul k çift bir tam sayı iken, $\theta(s) = k\pi$, $\alpha + \lambda m = 0$, $\lambda = \text{sabit}$ ve $\beta(s) = \lambda l(s)$ olmasıdır.

İspat. $\gamma(s)$ ve $\delta(s)$ framed eğrileri Mannheim eğri çifti olsunlar. O halde, Tanım 6.1.7'den

$$\delta(s) = \gamma(s) + \lambda \eta_1(s), \quad \eta_1(s) = \mu_2(s) \quad (6.4)$$

şeklinde yazılabilir. O halde, (6.2) denklemine göre, k çift bir tam sayı iken, $\theta(s) = k\pi$ elde edilir. (6.4) denkleminin türevi alınırsa,

$$\delta'(s) = \gamma'(s) + \lambda'(s)\eta_1(s) + \lambda(s)\eta_1'(s)$$

olur. $\delta(s)$ bir adjoint eğri olduğundan,

$$\beta(s)\eta_2(s) = (\alpha(s) + \lambda(s)m(s))v(s) + \lambda'(s)\eta_1(s) + \lambda(s)l(s)\eta_2(s)$$

yazılabilir. Buradan, $\alpha(s) + \lambda m(s) = 0$, $\lambda = \text{sabit}$ ve $\beta(s) = \lambda l(s)$ elde edilir. Tersine, eğer her $s \in I$ için sıfırdan farklı bir λ sabiti $\alpha(s) + \lambda m(s) = 0$ denklemini sağlarsa, Sonuç 6.1.8'e göre $(\gamma, \eta_1, \eta_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ve $(\delta, \mu_1, \mu_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ eğrileri Mannheim eğri çiftidir.

6.2. Framed Eğrilerin Frenet-Tipi Çatısına Göre Adjoint Eğriler

Bu kısımda bazı regle yüzeylerin geometrisini inceleyebilmek amacıyla, yukarıda verilen framed eğrilerin genel çatısına göre adjoint eğrilerinden sonra framed eğrilerin Frenet-tipi çatısına göre adjoint eğrileri tanıtılacaktır. Ayrıca, adjoint eğriler binormal doğrultu eğrisi olduklarından Tanım 6.2.1, Teorem 6.2.2 ve Teorem 6.2.3, [48] çalışmasıyla örtüşür.

Tanım 6.2.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ve $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğri olsun. Frenet-tipi çatıya göre, γ framed temel eğrisinin $\bar{\delta}(s)$ framed temel adjoint eğrisi, $\bar{\beta}: I \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon iken,

$$\bar{\delta}(s) = \int_{s_0}^s \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s) ds \text{ veya } \bar{\delta}'(s) = \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s) \quad (6.5)$$

ile tanımlanır.

$(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğrisi $\{\bar{v}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ hareketli çatısı ve (p, q, α) framed eğrilikleri, $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed adjoint eğri ise $\{\bar{w}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}$ hareketli çatısı ve $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\alpha})$ framed eğrilikleri ile ifade edilsin.

Teorem 6.2.2. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed temel eğrisi $\{\bar{v}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ ve $\bar{\delta}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ adjoint eğrisi $\{\bar{w}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}$ Frenet-tipi hareketli çatılar ile verilsin. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(s) &= \bar{\eta}_2(s), \\ \bar{\mu}_1(s) &= -\bar{\eta}_1(s), \\ \bar{\mu}_2(s) &= \bar{v}(s). \end{aligned} \quad (6.6)$$

İspat. $\bar{\delta}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir framed temel eğri olduğundan, $\bar{\delta}'(s) = \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s)$ eşitliği göz önüne alındığında $\bar{\omega}(s) = \bar{\eta}_2(s)$ yazılabilir. $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ bir Frenet-tipi framed eğri olduğundan $\|\bar{\omega}'(s)\| = q(s) > 0$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1(s) &= \frac{\bar{\omega}'(s)}{\|\bar{\omega}'(s)\|} = \frac{\bar{\eta}_2'(s)}{\|\bar{\eta}_2'(s)\|} = \frac{-q(s)\bar{\eta}_1(s)}{q(s)} = -\bar{\eta}_1(s), \\ \bar{\mu}_2(s) &= \bar{\omega}(s) \wedge \bar{\mu}_1(s) = \bar{\eta}_2(s) \wedge (-\bar{\eta}_1(s)) = \bar{v}(s).\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Teorem 6.2.3. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ framed temel eğrisi $\{v, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ ve $\bar{\delta}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ adjoint eğrisi $\{\bar{w}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}$ hareketli çatılar ile verilsin. Dolayısıyla, framed eğrilikler arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned}\bar{p}(s) &= q(s), \\ \bar{q}(s) &= p(s).\end{aligned}\tag{6.7}$$

İspat. Adjoint eğrinin Frenet-tipi çatıya göre framed eğrilikleri,

$$\begin{aligned}\bar{p}(s) &= \|\bar{\omega}'(s)\| = \|\bar{\eta}_2'(s)\| = q(s), \\ \bar{q}(s) &= \frac{\det(\bar{\omega}(s), \bar{\omega}'(s), \bar{\omega}''(s))}{\|\bar{\omega}'(s)\|^2} \\ &= \frac{\det(\bar{\eta}_2(s), \bar{\eta}_2'(s), \bar{\eta}_2''(s))}{\|\bar{\eta}_2'(s)\|^2} \\ &= \frac{p(s)q^2(s)}{q^2(s)} = p(s)\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 6.2.4. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ ve $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ framed eğrileri Frenet-tipi framed eğri olduklarından, (6.6) denklemine göre, $\bar{q}(s) > 0$ ve $q(s) > 0$ dır. Dolayısıyla $\bar{q}(s) > 0$ ve $q(s) > 0$ olduğundan $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ Frenet-tipi framed temel eğrisi ve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin adjoint temel eğrisi $\bar{\delta}: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ düzlemsel bir eğri olamaz.

Sonuç 6.2.5. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi bir framed helis olsun. O halde, $\frac{q(s)}{p(s)}$ oranı sabittir.

Dolayısıyla, $\frac{\bar{p}(s)}{\bar{q}(s)}$ oranı da sabittir. Yani, $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin adjoint eğrisi de bir framed helistir.

6.3. Frenet-Tipi Framed Eğrilerin Adjoint Eğrileri ile Regle Yüzeyler

Bu kısımda dayanak eğrisi singüler noktalara sahip bir Frenet-tipi framed eğri γ , doğrultmanı ise regüler bir adjoint eğri (Özel olarak $\bar{\beta}(s)=1$) $\bar{\delta}$ olan bir regle yüzeyin geometrisi incelenecektir. Bu regle yüzeyi $\varphi(s, u) = \gamma(s) + u\bar{\delta}(s)$ denklemi ile ifade edelim:

Teorem 6.3.1. γ bir framed temel eğri ve $\bar{\delta}$, adjoint eğrisi olsun. $\varphi(s, u) = \gamma(s) + u\bar{\delta}(s)$ regle yüzeyi için aşağıdaki karakterizasyonlar verilebilir:

1. $\varphi(s, u) = \gamma(s) + u\bar{\delta}(s)$ yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul $\langle \bar{\delta}(s), \alpha(s)\bar{\eta}_1(s) \rangle = 0$ olmasıdır.
2. En az bir singüler olmayan noktaya sahip $\gamma(s)$ eğrisi için $\varphi(s, u) = \gamma(s) + u\bar{\delta}(s)$ yüzeyi bir konik yüzey değildir.
3. $\varphi(s, u) = \gamma(s) + u\bar{\delta}(s)$ yüzeyi bir silindirik yüzey değildir.
4. Eğer (s_0, u_0) , $\varphi(s, u) = \gamma(s) + u\bar{\delta}(s)$ yüzeyinin bir singüler noktası ise $\alpha(s_0)(v(s_0) \wedge \bar{\delta}(s_0)) + u_0(\bar{\eta}_2(s_0) \wedge \bar{\delta}(s_0)) = 0$ eşitliği sağlanır.

İspat. 1. $\varphi(s, u)$ yüzeyinin dağılma parametresi hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\det\left(\gamma'(s), \bar{\delta}(s), \bar{\delta}'(s)\right)}{\left\|\bar{\delta}'(s)\right\|^2} &= \frac{\det\left(\alpha(s)v(s), \bar{\delta}(s), \bar{\eta}_2(s)\right)}{\left\|\bar{\eta}_2(s)\right\|^2} \\ &= -\det\left(\bar{\delta}(s), \alpha(s)v(s), \bar{\eta}_2(s)\right) \\ &= -\left\langle \bar{\delta}(s), \alpha(s)v(s) \wedge \bar{\eta}_2(s) \right\rangle \\ &= \left\langle \bar{\delta}(s), \alpha(s)\bar{\eta}_1(s) \right\rangle \end{aligned}$$

bulunur. O halde $\varphi(s, u)$ yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul $\left\langle \bar{\delta}(s), \alpha(s)\bar{\eta}_1(s) \right\rangle = 0$ olmasıdır.

2. Kabul edelim ki $\varphi(s, u)$ yüzeyinin striksiyon eğrisi $\sigma(s)$ olsun. O halde, regle yüzeyler için striksiyon eğrisi denklemlerinden

$$\begin{aligned} \sigma(s) &= \gamma(s) - \frac{\left\langle \gamma'(s), \bar{\delta}'(s) \right\rangle}{\left\langle \bar{\delta}'(s), \bar{\delta}'(s) \right\rangle} \bar{\delta}(s), \\ &= \gamma(s) - \frac{\left\langle \alpha(s)v(s), \bar{\eta}_2(s) \right\rangle}{\left\langle \bar{\eta}_2(s), \bar{\eta}_2(s) \right\rangle} \bar{\delta}(s), \\ &= \gamma(s), \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla, en az bir singüler olmayan noktaya sahip $\gamma(s)$ eğrisi için $\sigma'(s) = \gamma'(s) = \alpha(s)v(s) \neq 0$ olduğundan $\varphi(s, u)$ konik bir yüzey değildir.

3. $\varphi(s, u)$ yüzeyinin doğrultu vektörü $\bar{\delta}$ için $\bar{\delta}'(s) = \bar{\eta}_2(s)$ olur.

$\left\|\bar{\delta}'(s)\right\| = \left\|\bar{\eta}_2(s)\right\| = 1 \neq 0$ olduğundan $\varphi(s, u)$ yüzeyi silindirik değildir.

4. $\varphi(s, u)$ yüzeyinin kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \alpha(s)v(s) + u\bar{\eta}_2(s), \\ \varphi_u &= \bar{\delta}(s) \end{aligned}$$

ve $\varphi_s \wedge \varphi_u = \alpha(s) \left(v(s) \wedge \bar{\delta}(s) \right) + u \left(\bar{\eta}_2(s) \wedge \bar{\delta}(s) \right)$ bulunur. Eğer, (s_0, u_0) bir singüler nokta ise $(\varphi_s \wedge \varphi_u)(s_0, u_0) = 0$ dır ve istenilen gösterilmiş olur.

Örnek 6.3.2. $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ iken

$$\gamma(s) = \left(\frac{3s^2}{2}, \frac{\sqrt{6}s^3}{3}, \frac{s^4}{4} \right)$$

eğrisini düşünelim (Şekil 6.2.). O halde $s = 0$ bir singüler noktadır. Dolayısıyla,

$$\gamma'(s) = s(s^2 + 3) \left(\frac{s}{s^2 + 3}, \frac{\sqrt{6}s}{s^2 + 3}, \frac{s^2}{s^2 + 3} \right)$$

şeklinde yazılırsa,

$$\alpha(s) = s(s^2 + 3)$$

ve birim ve regüler bir eğri olacak şekilde

$$v(s) = \left(\frac{s}{s^2 + 3}, \frac{\sqrt{6}s}{s^2 + 3}, \frac{s^2}{s^2 + 3} \right)$$

ile belirlenir. Buradan direkt hesaplamalar ile,

$$\bar{\eta}_1(s) = \left(\frac{-\sqrt{6}s}{s^2 + 3}, \frac{-(s^2 - 3)}{s^2 + 3}, \frac{\sqrt{6}s}{s^2 + 3} \right),$$

$$\bar{\eta}_2(s) = \left(\frac{s^2}{s^2 + 3}, \frac{-\sqrt{6}s}{s^2 + 3}, \frac{3}{s^2 + 3} \right),$$

$$p(s) = \frac{\sqrt{6}}{s^2 + 3},$$

$$q(s) = \frac{\sqrt{6}}{s^2 + 3}$$

bulunur. Şimdi γ framed eğrisinin δ_1 ve δ_2 olacak şekilde iki farklı adjoint eğrisini düşünelim:

$\beta(s) = 1$ için regüler bir adjoint eğri (Şekil 6.3.),

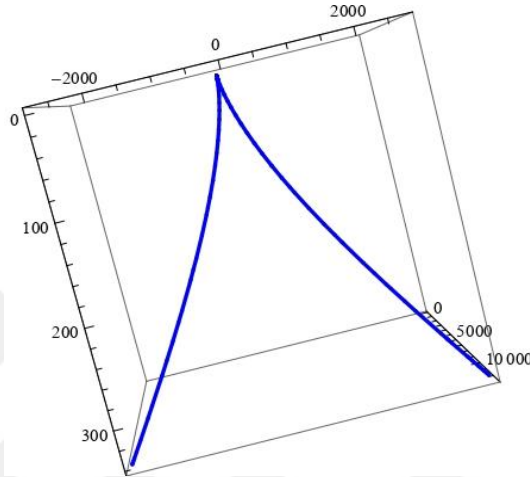
$$\delta_1(s) = \left(s - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\frac{\sqrt{6}}{2} \log(s^2 + 3), \sqrt{3} \arctan\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right) \right)$$

ve

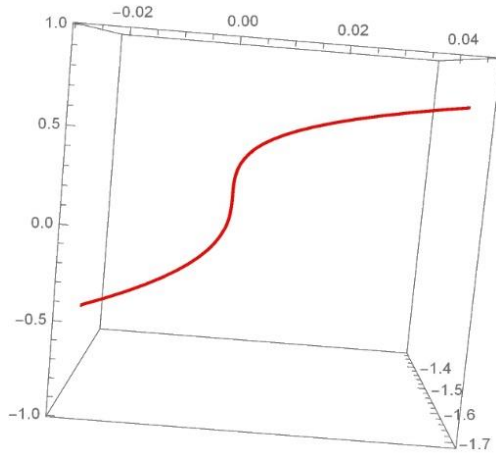
$\beta(s) = s$ için singüler bir adjoint eğri (Şekil 6.4.),

$$\delta_2(s) = \left(\frac{1}{2}(s^2 - 3\log(s^2 + 3)), -\sqrt{6}s + 3\sqrt{2} \arctan\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), \frac{3}{2}\log(s^2 + 3) \right)$$

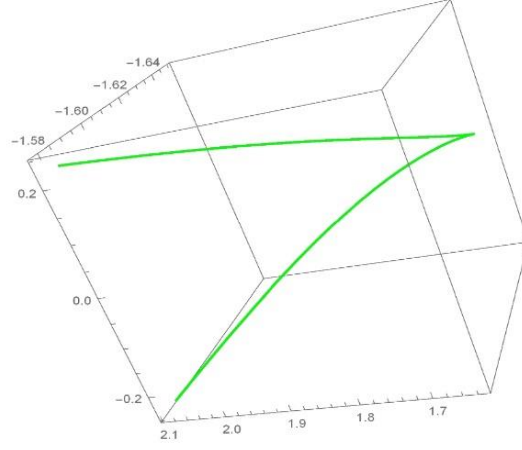
ile verilir.



Şekil 6.2. $\gamma(s)$ framed eğrisi.



Şekil 6.3. δ_1 regüler adjoint eğri.

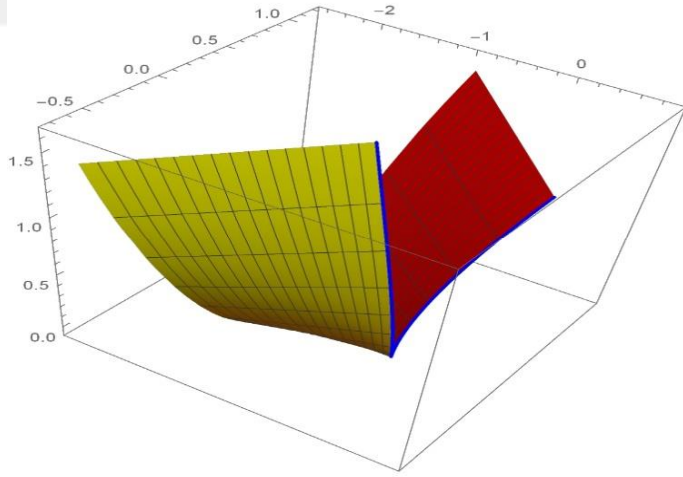


Şekil 6.4. δ_2 singüler adjoint eğri.

Dayanak eğrisi $\gamma(s)$, doğrultmanı ise regüler bir adjoint eğri δ_1 olan $\varphi(s, u)$ regle yüzeyi,

$$\varphi(s, u) = \left(\frac{3s^2}{2}, \frac{\sqrt{6}s^3}{3}, \frac{s^4}{4} \right) + u \left(s - \sqrt{3} \arctan\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right), -\frac{\sqrt{6}}{2} \log(s^2 + 3), \sqrt{3} \arctan\left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right) \right)$$

şeklindedir (Şekil 6.5.).



Şekil 6.5. $\varphi(s, u)$ regle yüzeyi.

6.4. Frenet-Tipi Framed Eğrilerin Adjoint Eğrilerinin Özel Yüzeyleri

Bu kısımda Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin normal yüzeyleri, binormal yüzeyleri ve genelleştirilmiş normal yüzeyleri tanıtılacaktır. Geometrik karakterizasyonlarının yanı sıra singülerite çeşitleri incelenecektir.

6.4.1. Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin normal yüzeyleri

Bu kısımda açılabilir bir regle yüzey olan Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin normal yüzeyleri tanıtılacaktır. Bu yüzeyin tüm geometrik yapısı ve singülerite çeşitleri incelenecektir.

$(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğrisi $\{\bar{v}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ hareketli çatısı ve (p, q, α) framed eğrilikleri, $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed adjoint eğri ise $\{\bar{w}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}$ hareketli çatısı ve $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\alpha})$ framed eğrilikleri ile verilsin. γ framed eğrisini asli normal yüzeyi

$$\varphi_\gamma(s, u) = \gamma(s) + u\bar{\eta}_1(s)$$

ile verilir. Bu yüzeyin tüm geometrik yapısı ve karakterizasyonları [47] çalışmasında verilmiştir. Biz dayanak eğrisi bir adjoint eğri ve doğrultmanı adjoint eğrinin genelleştirilmiş normali olan M_1 yüzeyini inceleyeceğiz. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin normal yüzeyini

$$M_1: \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{\mu}_1(s)$$

ile gösterelim. (6.6) denkleminde $\bar{\mu}_1(s) = -\bar{\eta}_1(s)$ olduğundan M_1 yüzeyini

$$M_1: \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 6.4.1.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğri ve adjoint eğrisi $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ olsun. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin normal yüzeyinin karakterizasyonları aşağıdaki gibi verilebilir:

1. M_1 yüzeyi açılabilir değildir.
2. M_1 yüzeyinin bir singüler nokta kümesi

$$S = \{(s, u) \mid \bar{\beta}(s) - uq(s) = 0, up(s) = 0\}$$

şeklindedir.

İspat. 1. M_1 yüzeyinin dağılma parametresi,

$$\begin{aligned} \frac{\det \left(\bar{\delta}'(s), -\bar{\eta}_1(s), -\bar{\eta}_1'(s) \right)}{\left\| -\bar{\eta}_1'(s) \right\|^2} &= \frac{\det \left(\bar{\beta}(s)\bar{\eta}_2(s), -\bar{\eta}_1(s), p(s)\bar{v}(s) - q(s)\bar{\eta}_2(s) \right)}{p^2(s) + q^2(s)}, \\ &= \frac{\langle \bar{\beta}(s)\bar{\eta}_2(s), p(s)\bar{\eta}_2(s) + q(s)\bar{v}(s) \rangle}{p^2(s) + q^2(s)}, \\ &= \frac{\bar{\beta}(s)p(s)}{p^2(s) + q^2(s)}. \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. $p(s) \neq 0$ ve singüler noktaları karakterize eden $\bar{\beta}(s)$ fonksiyonu her noktada sıfır olmadığından M_1 yüzeyi açılabilir değildir.

2. $\varphi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyinin kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (\varphi_{\bar{\delta}})_s &= \bar{\beta}(s)\bar{\eta}_2(s) + u(p(s)\bar{v}(s) - q(s)\bar{\eta}_2(s)), \\ (\varphi_{\bar{\delta}})_u &= -\bar{\eta}_1(s) \end{aligned}$$

ve $(\varphi_{\bar{\delta}})_s \wedge (\varphi_{\bar{\delta}})_u = (\bar{\beta}(s) - uq(s))\bar{v}(s) - up(s)\bar{\eta}_2(s)$ bulunur. Eğer, (s_0, u_0) bir singüler nokta ise $\bar{\beta}(s_0) - u_0q(s_0) = 0$ ve $u_0p(s_0) = 0$ dır. O halde, singüler nokta kümesi

$$S = \left\{ (s, u) \mid \bar{\beta}(s) - uq(s) = 0, up(s) = 0 \right\}.$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi M_1 yüzeyinin singülerite çeşitlerini inceleyebilmek amacı ile S kümesini S_1 ve S_2 olmak üzere iki ayrı kümeye ayıralım. Bu kümeler,

$$S_1 = \left\{ (s, 0) \mid \bar{\beta}(s) = 0 \right\}$$

ve

$$S_2 = \left\{ (s, u) \mid u = \frac{\bar{\beta}(s)}{q(s)} \neq 0, p(s) = 0 \right\}$$

şeklinde yazılabilir. Ancak Frenet-tipi framed eğriler için $p(s) \neq 0$ olduğundan, S_2 singüler nokta kümesi M_1 yüzeyinin singüler nokta kümesi olamaz. O halde, M_1 yüzeyinin tek singüler nokta kümesi S_1 dir. Şimdi M_1 yüzeyinin singülerite çeşitlerinin inceleyelim. Aşağıdaki teorem M_1 yüzeyinin bir cross-cap yüzeyi olması için gerekli şartları ifade eder:

Teorem 6.4.1.2. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğri ve adjoint eğrisi $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ olsun. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin normal yüzeyi M_1 olsun. Eğer $(s_1, u_1) \in S_1$ ve $\bar{\beta}'(s_1) \neq 0$ ise M_1 yüzeyi (s_1, u_1) noktasında bir cross-cap yüzeyidir.

İspat. İlk olarak M_1 yüzeyinin gerekli kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial s}(s, u) &= up(s)\bar{v}(s) + (\bar{\beta}(s) - uq(s))\bar{\eta}_2(s), \\ \frac{\partial \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s, u) &= -\bar{\eta}_1(s), \\ \frac{\partial^2 \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s, u) &= p(s)\bar{v}(s) - q(s)\bar{\eta}_2(s), \\ \frac{\partial^2 \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s, u) &= up'(s)\bar{v}(s) + (up^2(s) + uq^2(s) - \bar{\beta}(s)q(s))\bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (\bar{\beta}'(s) - uq'(s))\bar{\eta}_2(s)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde,

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s, u), \frac{\partial^2 \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s, u), \frac{\partial^2 \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s, u)\right) = p(s)\bar{\beta}'(s) + u(p'(s)q(s) - p(s)q'(s))$$

bulunur. Eğer, $(s_1, u_1) \in S_1$ ise,

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s_1, u_1), \frac{\partial^2 \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s_1, u_1), \frac{\partial^2 \varphi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s_1, u_1)\right) = p(s_1)\bar{\beta}'(s_1)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $p(s) \neq 0$ olduğundan eğer $\bar{\beta}'(s_1) \neq 0$ ise M_1 yüzeyi (s_1, u_1) noktasında bir cross-cap yüzeyidir.

Önerme 6.4.1.3. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_1 normal yüzeyi silindirik bir yüzey değildir.

İspat. Kabul edelim ki M_1 normal yüzeyi silindirik olsun. O halde $-\bar{\eta}_1'(s) = p(s)\bar{v}(s) - q(s)\bar{\eta}_2(s) = 0$ olur. Buradan, $p(s) = 0$ ve $q(s) = 0$ olur. Bu ise Frenet-tipi framed eğriler için kabulümüz ile çelişir. O halde, $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_1 normal yüzeyi silindirik bir yüzey değildir.

Teorem 6.4.1.4. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_1 normal yüzeyinin striksiyon eğrisinin $\bar{\delta}$ adjoint eğrisi olması için gerek ve yeter koşul $\bar{\beta} = 0$ olmasıdır.

İspat. Striksiyon eğri tanımından

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= \bar{\delta}(s) - \frac{\langle \bar{\delta}'(s), -\bar{\eta}_1'(s) \rangle}{\langle -\bar{\eta}_1'(s), -\bar{\eta}_1'(s) \rangle} \bar{\eta}_1(s), \\ &= \bar{\delta} - \frac{\langle \bar{\beta}(s)\bar{\eta}_2(s), p(s)\bar{v}(s) - q(s)\bar{\eta}_2(s) \rangle}{p^2(s) + q^2(s)}, \\ &= \bar{\delta} - \frac{-\bar{\beta}(s)q(s)}{p^2(s) + q^2(s)}\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $q \neq 0$ olduğundan $\bar{\beta} = 0$ olur.

6.4.2. Framed yüzey olarak Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin normal yüzeyleri

M_1 yüzeyi singüler noktalara sahip olduğundan bir framed yüzey olarak ele alabiliriz.

İlk olarak framed yüzey teorisini kullanarak, framed yüzeyi oluşturup yüzeyin eğriliklerini verelim:

$\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin normal yüzeyi $M_1: \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$ olsun.

$\Upsilon, Z: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonları için

$\langle (\varphi_{\bar{\delta}})_s(s, u), (\varphi_{\bar{\delta}})_1(s, u) \rangle = 0$ ve $\langle (\varphi_{\bar{\delta}})_u(s, u), (\varphi_{\bar{\delta}})_1(s, u) \rangle = 0$ olacak şekilde,

$$(\varphi_{\bar{\delta}})_1(s, u) = \cos \Upsilon(s, u)\bar{v}(s) + \sin \Upsilon(s, u)\bar{\eta}_2(s)$$

olsun. Dolayısıyla, $\langle (\varphi_{\bar{\delta}})_1(s, u), (\varphi_{\bar{\delta}})_2(s, u) \rangle = 0$ olacak şekilde

$$(\varphi_{\bar{\delta}})_2(s, u) = \cos Z(s, u)\bar{\eta}_1(s) + \sin Z(s, u)(\cos \Upsilon(s, u)\bar{\eta}_2(s) - \sin \Upsilon(s, u)\bar{v}(s))$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla, $\Delta = \left\{ \left((\varphi_{\bar{\delta}})_1, (\varphi_{\bar{\delta}})_2 \right) \in S^2 \times S^2 \mid \left\langle (\varphi_{\bar{\delta}})_1, (\varphi_{\bar{\delta}})_2 \right\rangle = 0 \right\}$

iken $\left((\varphi_{\bar{\delta}})_1, (\varphi_{\bar{\delta}})_2 \right) : S \times U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir framed yüzeydir. Buradan,

$(\varphi_{\bar{\delta}})_3 = (\varphi_{\bar{\delta}})_1 \wedge (\varphi_{\bar{\delta}})_2$ olacak şekilde,

$$(\varphi_{\bar{\delta}})_3(s, u) = -\sin Z(s, u) \bar{\eta}_1(s) + \cos Z(s, u) (\cos Y(s, u) \bar{\eta}_2(s) - \sin Y(s, u) \bar{v}(s))$$

ile hesaplanır. O halde, $\left\{ (\varphi_{\bar{\delta}})_1(s, u), (\varphi_{\bar{\delta}})_2(s, u), (\varphi_{\bar{\delta}})_3(s, u) \right\}$ M_1 yüzeyi için bir

hareketli çatıdır. Şimdi M_1 framed yüzeyinin temel değişmezlerini hesaplayalım:

$$(\phi_{\bar{\delta}})_u(s, u) = -\bar{\eta}_1(s),$$

$$(\phi_{\bar{\delta}})_s(s, u) = up(s) \bar{v}(s) + (\bar{\beta}(s) - uq(s)) \bar{\eta}_2(s)$$

olduğundan (3.8) denkleminde göre,

$$\begin{aligned} -\bar{\eta}_1(s) &= (-a_1 \sin Z(s, u) \sin Y(s, u) - b_1 \cos Z(s, u) \sin Y(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + (a_1 \cos Z(s, u) - b_1 \sin Z(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (a_1 \sin Z(s, u) \cos Y(s, u) + b_1 \cos Z(s, u) \cos Y(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} up(s) \bar{v}(s) + (\bar{\beta}(s) - uq(s)) \bar{\eta}_2(s) &= (-a_2 \sin Z(s, u) \sin Y(s, u) - b_2 \cos Z(s, u) \sin Y(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + (a_2 \cos Z(s, u) - b_2 \sin Z(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (a_2 \sin Z(s, u) \cos Y(s, u) + b_2 \cos Z(s, u) \cos Y(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

şeklinde iki denklem bulunur. Bu denklemler katsayıların eşitliğine göre çözüldüğünde,

$$c_1 = -\cos Z(s, u),$$

$$d_1 = \sin Z(s, u),$$

$$c_2 = \sin Z(s, u) \left((\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos Y(s, u) - up(s) \sin Y(s, u) \right),$$

$$d_2 = \cos Z(s, u) \left((\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos Y(s, u) - up(s) \sin Y(s, u) \right)$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (3.9) denkleminde yüzeyin eğriliklerinden $J_{\varphi_{\bar{\delta}}}$,

$$J_{\varphi_{\bar{\delta}}} = (\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos Y(s, u) - up(s) \sin Y(s, u)$$

olur.

$$\begin{aligned} \left((\varphi_{\bar{s}})_1 \right)_u (s, u) &= -\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{v}(s) + \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{\eta}_2(s), \\ \left((\varphi_{\bar{s}})_1 \right)_s (s, u) &= -\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) \bar{v}(s) + (p(s) \cos \Upsilon(s, u) - q(s) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

olduğundan (3.8) denklemine göre,

$$\begin{aligned} -\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{v}(s) + \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{\eta}_2(s) &= \\ &= (-e_1 \sin Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) - f_1 \cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + (e_1 \cos Z(s, u) - f_1 \sin Z(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (e_1 \sin Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u) + f_1 \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} -\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) \bar{v}(s) + (p(s) \cos \Upsilon(s, u) - q(s) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s) + \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) \bar{\eta}_2(s) &= \\ &= (-e_2 \sin Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) - f_2 \cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + (e_2 \cos Z(s, u) - f_2 \sin Z(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (e_2 \sin Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u) + f_2 \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

şeklinde iki denklem bulunur. Bu denklemler katsayıların eşitliğine göre çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} e_1 &= \Upsilon_u(s, u) \sin Z(s, u), \\ f_1 &= \Upsilon_u(s, u) \cos Z(s, u), \\ e_2 &= \sin \Psi(s, u) \Upsilon_s(s, u) + \cos Z(s, u) (p(s) \cos \Upsilon(s, u) - q(s) \sin \Upsilon(s, u)), \\ f_2 &= \cos \Psi(s, u) \Upsilon_s(s, u) - \sin Z(s, u) (p(s) \cos \Upsilon(s, u) - q(s) \sin \Upsilon(s, u)) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.9) denkleminde yüzeyin eğriliklerinden $K_{\varphi_{\bar{s}}}$ ve $H_{\varphi_{\bar{s}}}$

$$\begin{aligned} K_{\varphi_{\bar{s}}} &= \Upsilon_u(s, u) (p(s) \cos \Upsilon(s, u) - q(s) \sin \Upsilon(s, u)), \\ H_{\varphi_{\bar{s}}} &= -\frac{\Upsilon_s(s, u)}{2} \end{aligned}$$

olur.

Diğer yandan, yüzeyin integrallenebilme koşuluna göre,

$$\begin{aligned} F(s, u) &= (p(s) \cos \Upsilon(s, u) - q(s) \sin \Upsilon(s, u)) \\ &\quad + \Upsilon_u(s, u) ((\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u)) = 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 6.4.2.1. $M_1 : \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$ framed yüzeyinin

$\{(\varphi_{\bar{\delta}})_1(s, u), (\varphi_{\bar{\delta}})_2(s, u), (\varphi_{\bar{\delta}})_3(s, u)\}$ hareketli çatısı

$$\begin{aligned} (\varphi_{\bar{\delta}})_1(s, u) &= \cos \Upsilon(s, u) \bar{v}(s) + \sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s), \\ (\varphi_{\bar{\delta}})_2(s, u) &= \cos Z(s, u) \bar{\eta}_1(s) + \sin Z(s, u) (\cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s) - \sin \Upsilon(s, u) \bar{v}(s)), \\ (\varphi_{\bar{\delta}})_3(s, u) &= -\sin Z(s, u) \bar{\eta}_1(s) + \cos Z(s, u) (\cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s) - \sin \Upsilon(s, u) \bar{v}(s)) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir.

Teorem 6.4.2.2. $M_1 : \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$ framed yüzeyinin eğrilikleri

$$\begin{aligned} J_{\varphi_{\bar{\delta}}} &= (\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u), \\ K_{\varphi_{\bar{\delta}}} &= \Upsilon_u(s, u) (p(s) \cos \Upsilon(s, u) - q(s) \sin \Upsilon(s, u)), \\ H_{\varphi_{\bar{\delta}}} &= -\frac{\Upsilon_s(s, u)}{2} \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir.

Sonuç 6.4.2.3. $M_1 : \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$ ile verilen framed yüzeyi regüler olsun. O halde, birinci ve ikinci temel formlar ile temel değişmezler arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} E &= \left((\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u) \right)^2, \\ F &= \cos Z(s, u) \sin Z(s, u) \left(\left((\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u) \right)^2 - 1 \right), \\ G &= 1, \\ L &= -\Upsilon_s(s, u) \left((\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u) \right), \\ M &= -\Upsilon_u(s, u) \left((\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u) \right), \\ N &= 0 \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Framed yüzey teorisi için (3.11) denkleminde $c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2$ değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 6.4.2.4. $M_1 : \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$ ile verilen framed yüzeyi regüler olsun. O halde, yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği,

$$K = \frac{\Upsilon_u(s, u)(p(s)\cos \Upsilon(s, u) - q(s)\sin \Upsilon(s, u))}{(\bar{\beta}(s) - uq(s))\cos \Upsilon(s, u) - up(s)\sin \Upsilon(s, u)},$$

$$H = \frac{-\Upsilon_s(s, u)}{2((\bar{\beta}(s) - uq(s))\cos \Upsilon(s, u) - up(s)\sin \Upsilon(s, u))}$$

ile verilir.

İspat. Framed yüzey teorisi için (3.12) denkleminde $K_{\varphi_{\bar{\delta}}}$ ve $H_{\varphi_{\bar{\delta}}}$ değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 6.4.2.5. $M_1 : \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$ regüler framed yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul $\Upsilon_s(s, u) = 0$ olmasıdır.

Önerme 6.4.2.6. $M_1 : \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$ framed yüzeyi için $(s_1, 0) \in S_1$ singüler noktası dejenere olmayan bir singüler noktadır.

İspat. $M_1 : \varphi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-\bar{\eta}_1(s))$ framed yüzeyi için işaretli alan yoğunluk fonksiyonu,

$$\lambda(s, u) = \det\left(\left(\phi_{\bar{\delta}}\right)_s, \left(\phi_{\bar{\delta}}\right)_u, \left(\phi_{\bar{\delta}}\right)_1\right) = -up(s)\sin \Upsilon(s, u) + (\bar{\beta}(s) - uq(s))\cos \Upsilon(s, u)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}(s_1, 0) = -p(s_1)\sin \Upsilon(s_1, 0) - q(s_1)\cos \Upsilon(s_1, 0) \neq 0 \quad (6.9)$$

veya

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s}(s_1, 0) = \bar{\beta}'(s_1)\cos \Upsilon(s_1, 0) \neq 0$$

ise $(s_1, 0) \in S_1$ dejenere olmayan bir singüler noktadır. $\varphi_{\bar{\delta}}$ framed yüzeyinin (6.8) integrallenebilme koşulundan $F(s_1, 0) = p(s_1)\cos \Upsilon(s_1, 0) - q(s_1)\sin \Upsilon(s_1, 0) = 0$ Burada $\sin \Upsilon(s_1, 0) = 0$ ise $p(s_1) \neq 0$ ve $\cos \Upsilon(s_1, 0) \neq 0$ olduğundan çelişki elde edilir. O halde $\sin \Upsilon(s_1, 0) \neq 0$ olur. O halde, $p(s_1) \neq 0$ olduğundan integrallenebilme koşuluna göre,

$$\cos \Upsilon(s_1, 0) = \frac{q(s_1)\sin \Upsilon(s_1, 0)}{p(s_1)}$$

yazılabilir. Bu ifade (6.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\frac{(p^2(s_1)+q^2(s_1))}{p(s_1)}\sin\Upsilon(s_1,0)\neq 0$$

olur. O halde, $\frac{\partial\lambda}{\partial u}(s_1,0)\neq 0$ olur ve $(s_1,0)\in S_1$ dejenere olmayan bir singüler noktadır.

Teorem 6.4.2.7. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin normal yüzeyi $\varphi_{\bar{\delta}}$ olsun. Kabul edelim ki

$(\varphi_{\bar{\delta}},(\varphi_{\bar{\delta}})_1,(\varphi_{\bar{\delta}})_2):S\times U\rightarrow\mathbb{R}^3\times\Delta$ bir framed yüzey olsun.

1. $(s_1,0)\in S_1$ $\varphi_{\bar{\delta}}(s,u)$ yüzeyinin bir singüler noktası olsun. Eğer

$$\bar{\beta}'(s_1)\cos\Upsilon(s_1,0)\neq 0, \Upsilon_s(s_1,0)\neq 0$$

ise $\varphi_{\bar{\delta}}(s,u)$ yüzeyi $(s_1,0)$ noktasında bir cuspidal-edgedir.

2. $(s_1,0)\in S_1$ $\varphi_{\bar{\delta}}(s,u)$ yüzeyinin bir singüler noktası olsun. Eğer

$$\begin{aligned}\bar{\beta}'(s_1)\cos\Upsilon(s_1,0)&=0, \\ -\bar{\beta}''(s_1)\cos\Upsilon(s_1,0)+2\bar{\beta}'(s_1)\sin\Upsilon(s_1,0)\Upsilon_s(s_1,0)&\neq 0, \\ \Upsilon_s(s_1,0)&\neq 0\end{aligned}$$

ise $\varphi_{\bar{\delta}}(s,u)$ yüzeyi $(s_1,0)$ noktasında bir swallowtaildir.

3. $(s_1,0)\in S_1$ $\varphi_{\bar{\delta}}(s,u)$ yüzeyinin bir singüler noktası olsun. Eğer

$$\bar{\beta}'(s_1)\cos\Upsilon(s_1,0)\neq 0, \Upsilon_s(s_1,0)=0, \Upsilon_{ss}(s_1,0)\neq 0$$

ise $\varphi_{\bar{\delta}}(s,u)$ yüzeyi $(s_1,0)$ noktasında bir cuspidal cross-cap olur.

İspat. $M_1:\varphi_{\bar{\delta}}(s,u)=\bar{\delta}(s)+u(-\bar{\eta}_1(s))$ framed yüzeyi için

$$\begin{aligned}d\varphi_{\bar{\delta}}&=(\varphi_{\bar{\delta}})_s ds+(\varphi_{\bar{\delta}})_u du \\ &=(up(s)\bar{v}(s)+(\bar{\beta}(s)-uq(s))\bar{\eta}_2(s))ds+(-\bar{\eta}_1(s))du\end{aligned}$$

olduğundan ξ null vektör alanı $\frac{\partial}{\partial s}$ olarak seçilebilir. Diğer yandan, $(s_1, 0)$ noktası non-dejenere olduğundan ζ singüler eğrisi $\zeta = (s(u), u)$ formunda verilebilir. (3.13) denklemlerinden direkt hesaplamalar ile

$$\begin{aligned}\Omega &= \det \left((\varphi_{\bar{s}} \circ \zeta)', (\varphi_{\bar{s}})_1 \circ \zeta, d(\varphi_{\bar{s}})_1(\xi) \right) \\ &= Y_s(s, u) \\ &+ \left(p(s) \cos Y(s, u) - q(s) \sin Y(s, u) \right) \left((\bar{\beta}(s) - uq(s)) \cos Y(s, u) - up(s) \sin Y(s, u) \right) \frac{ds}{du}\end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde,

1. Teorem 3.4.6'dan $(s_1, 0) \in S_1$ için

$$\xi\lambda(s_1, 0) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_1, 0) = \bar{\beta}'(s_1) \cos Y(s_1, 0) \neq 0 \text{ ve } Y_s(s_1, 0) \neq 0$$

ise $\varphi_{\bar{s}}(s, u)$ yüzeyi $(s_1, 0)$ noktasında bir cuspidal-edgedir.

2. Teorem 3.4.6'dan $(s_1, 0) \in S_1$ için

$$\xi\lambda(s_1, 0) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_1, 0) = \bar{\beta}'(s_1) \cos Y(s_1, 0) = 0,$$

$$\xi\xi\lambda(s_1, 0) = \frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2}(s_1, 0) = \bar{\beta}''(s_1) \cos Y(s_1, 0) - 2\bar{\beta}'(s_1) \sin Y(s_1, 0) Y_s(s_1, 0) \neq 0$$

ve $Y_s(s_1, 0) \neq 0$ ise $\varphi_{\bar{s}}(s, u)$ yüzeyi $(s_1, 0)$ noktasında bir swallowtail olur.

3. Teorem 3.4.6'dan den $(s_1, 0) \in S_1$ için

$$\xi\lambda(s_1, 0) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_1, 0) = \bar{\beta}'(s_1) \cos Y(s_1, 0) \neq 0 \text{ ve } Y_s(s_1, 0) = 0, Y_{ss}(s_1, 0) \neq 0$$

ise $\varphi_{\bar{s}}(s, u)$ yüzeyi $(s_1, 0)$ noktasında bir cuspidal cross-cap olur.

6.4.3. Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin binormal yüzeyleri

Bu kısımda açılabilir bir regle yüzeyi olan Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin binormal yüzeyleri tanıtılacaktır. Bu yüzeyin tüm geometrik yapısı ve singülerite çeşitleri incelenecektir.

$(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğrisi $\{\bar{v}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ hareketli çatısı ve (p, q, α) framed eğrilikleri, $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed adjoint eğri ise $\{\bar{w}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}$ hareketli çatısı ve $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\alpha})$ framed eğrilikleri ile verilsin. γ framed eğrisinin binormal yüzeyi

$$\phi_\gamma(s, u) = \gamma(s) + u\bar{\eta}_2(s)$$

ile verilir. Bu yüzeyin tüm geometrik yapısı ve karakterizasyonları [47] çalışmasında verilmiştir. Biz dayanak eğrisi bir adjoint eğri ve doğrultmanı adjoint eğrinin genelleştirilmiş binormali olan M_2 yüzeyini inceleyeceğiz. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin binormal yüzeyini

$$M_2: \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{\mu}_2(s)$$

ile gösterelim. (6.6) denkleminde $\bar{\mu}_2(s) = \bar{v}(s)$ olduğundan M_2 yüzeyini

$$M_2: \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 6.4.3.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğri ve adjoint eğrisi $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ olsun. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_2 binormal yüzeyinin karakterizasyonları aşağıdaki gibi verilebilir:

1. M_2 yüzeyi açılabilir değildir.
2. M_2 yüzeyinin bir singüler nokta kümesi

$$S = \{(s, u) \mid \bar{\beta}(s) = 0, up(s) = 0\}$$

şeklindedir.

İspat. 1. M_2 yüzeyinin dağılma parametresi, $p(s) \neq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{\det\left(\bar{\delta}'(s), \bar{v}(s), \bar{v}'(s)\right)}{\left\|\bar{v}'(s)\right\|^2} &= \frac{\det\left(\bar{\beta}(s)\bar{\eta}_2(s), \bar{v}(s), p(s)\bar{\eta}_1(s)\right)}{p^2(s)} \\ &= \frac{\langle \bar{\beta}(s)\bar{\eta}_2(s), p(s)\bar{\eta}_2(s) \rangle}{p^2(s)} \\ &= \frac{\bar{\beta}(s)p(s)}{p^2(s)} = \frac{\bar{\beta}(s)}{p(s)} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Singüler noktaları karakterize eden $\bar{\beta}(s)$ fonksiyonu her noktada sıfır olmadığından M_2 yüzeyi açılabilir değildir.

2. $\phi_{\bar{s}}(s, u)$ yüzeyinin kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (\phi_{\bar{s}})_s &= \bar{\beta}(s)\bar{\eta}_2(s) + up(s)\bar{\eta}_1(s), \\ (\phi_{\bar{s}})_u &= \bar{v}(s) \end{aligned}$$

ve $(\phi_{\bar{s}})_s \wedge (\phi_{\bar{s}})_u = -\bar{\beta}(s)\bar{\eta}_1(s) - up(s)\bar{\eta}_2(s)$ bulunur. Eğer, (s_0, u_0) bir singüler nokta ise $\bar{\beta}(s_0) = 0$ ve $u_0 p(s_0) = 0$ olur. O halde, singüler nokta kümesi

$$S = \{(s, u) \mid \bar{\beta}(s) = 0, up(s) = 0\}$$

şeklinde yazılabilir.

M_2 yüzeyinin singülerite çeşitlerini inceleyebilmek amacı ile S kümesini S_3 ve S_4 olmak üzere iki ayrı kümeye ayıralım. Bu kümeler,

$$S_3 = \{(s, 0) \mid \bar{\beta}(s) = 0\}$$

ve

$$S_4 = \{(s, u) \mid \bar{\beta}(s) = 0, p(s) = 0, u \neq 0\}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde Frenet-tipi framed eğriler için $p(s) \neq 0$ olduğundan, S_4 singüler nokta kümesi M_2 yüzeyinin singüler nokta kümesi olamaz.

O halde, M_2 yüzeyinin tek singüler nokta kümesi S_3 dür. Şimdi M_2 yüzeyinin singülerite çeşitlerinin inceleyelim. Aşağıdaki teorem M_2 yüzeyinin bir cross-cap yüzeyi olması için gerekli şartları ifade eder:

Teorem 6.4.3.2. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğri ve adjoint eğrisi $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ olsun. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin binormal yüzeyi M_2 olsun. Eğer $(s_3, 0) \in S_3$ ve $\bar{\beta}'(s_3) \neq 0$ ise M_2 yüzeyi $(s_3, 0)$ noktasında bir cross-cap yüzeyidir.

İspat. İlk olarak M_2 yüzeyinin gerekli kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi_{\bar{\delta}}}{\partial s}(s, u) &= \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s) + up(s) \bar{\eta}_1(s), \\ \frac{\partial \phi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s, u) &= \bar{v}(s), \\ \frac{\partial^2 \phi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s, u) &= p(s) \bar{\eta}_1(s), \\ \frac{\partial^2 \phi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s, u) &= -up^2(s) \bar{v}(s) + (up'(s) - \bar{\beta}(s)q(s)) \bar{\eta}_1(s) + (\bar{\beta}'(s) - up(s)q(s)) \bar{\eta}_2(s)\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde,

$$\det \left(\frac{\partial \phi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s, u), \frac{\partial^2 \phi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s, u), \frac{\partial^2 \phi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s, u) \right) = p(s) (\bar{\beta}'(s) - up(s)q(s))$$

bulunur. Eğer, $(s_3, 0) \in S_3$ ise,

$$\det \left(\frac{\partial \phi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s_3, u_3), \frac{\partial^2 \phi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s_3, u_3), \frac{\partial^2 \phi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s_3, u_3) \right) = p(s_3) \bar{\beta}'(s_3)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $p(s) \neq 0$ olduğundan eğer $\bar{\beta}'(s_3) \neq 0$ ise M_2 yüzeyi $(s_3, 0)$ noktasında bir cross-cap yüzeyidir.

Önerme 6.4.3.3. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_2 binormal yüzeyi silindirik bir yüzey değildir.

İspat. Kabul edelim ki M_2 binormal yüzeyi silindirik olsun. O halde $\bar{v}'(s) = p(s) \bar{\eta}_1(s) = 0$ olur. Buradan, $p(s) = 0$ olur. Bu ise Frenet-tipi framed eğriler

için kabulümüz ile çelişir. O halde, $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_2 binormal yüzeyi silindirik bir yüzey değildir.

Teorem 6.4.3.4. M_2 binormal yüzeyinin striksiyon eğrisi $\bar{\delta}$ adjoint eğrisidir.

İspat. Striksiyon eğri tanımından

$$\begin{aligned}\sigma(s) &= \bar{\delta}(s) - \frac{\langle \bar{\delta}'(s), \bar{v}'(s) \rangle}{\langle \bar{v}'(s), \bar{v}'(s) \rangle} \bar{v}(s), \\ &= \bar{\delta} - \frac{\langle \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s), p(s) \bar{\eta}_1(s) \rangle}{p^2(s)}, \\ &= \bar{\delta}\end{aligned}$$

Dolayısıyla, M_2 binormal yüzeyinin striksiyon eğrisi $\bar{\delta}$ adjoint eğrisidir.

6.4.4. Framed yüzey olarak Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin binormal yüzeyleri

M_2 yüzeyi singüler noktalara sahip olduğundan bir framed yüzey olarak ele alabiliriz. İlk olarak framed yüzey teorisini kullanarak, framed yüzeyi oluşturup yüzeyin eğriliklerini verelim:

$\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin binormal yüzeyi $M_2: \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ olsun.

$\Upsilon, Z: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyellenebilir fonksiyonları için $\langle (\phi_{\bar{\delta}})_s(s, u), (\phi_{\bar{\delta}})_1(s, u) \rangle = 0$

ve $\langle (\phi_{\bar{\delta}})_u(s, u), (\phi_{\bar{\delta}})_1(s, u) \rangle = 0$ olacak şekilde,

$$(\phi_{\bar{\delta}})_1(s, u) = \cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_1(s) + \sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s)$$

olsun. Dolayısıyla, $\langle (\phi_{\bar{\delta}})_1(s, u), (\phi_{\bar{\delta}})_2(s, u) \rangle = 0$ olacak şekilde

$$(\phi_{\bar{\delta}})_2(s, u) = \cos Z(s, u) \bar{v}(s) + \sin Z(s, u) (\cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s) - \sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_1(s))$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla, $\Delta = \left\{ \left((\phi_{\bar{\delta}})_1, (\phi_{\bar{\delta}})_2 \right) \in S^2 \times S^2 \mid \langle (\phi_{\bar{\delta}})_1, (\phi_{\bar{\delta}})_2 \rangle = 0 \right\}$

iken $(\phi_{\bar{\delta}}, (\phi_{\bar{\delta}})_1, (\phi_{\bar{\delta}})_2): S \times U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir framed yüzeydir. Buradan,

$(\phi_{\bar{\delta}})_3 = (\phi_{\bar{\delta}})_1 \wedge (\phi_{\bar{\delta}})_2$ olacak şekilde,

$$(\phi_{\delta})_3(s, u) = \sin Z(s, u) \bar{v}(s) + \cos Z(s, u) (\sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_1(s) - \cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s))$$

ile hesaplanır. O halde, $\{(\phi_{\delta})_1(s, u), (\phi_{\delta})_2(s, u), (\phi_{\delta})_3(s, u)\}$ M_2 yüzeyi için bir hareketli çatıdır. Şimdi M_2 framed yüzeyinin temel değişmezlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (\phi_{\delta})_u(s, u) &= \bar{v}(s), \\ (\phi_{\delta})_s(s, u) &= up(s) \bar{\eta}_1(s) + \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

olduğundan (3.8) denklemine göre,

$$\begin{aligned} \bar{v}(s) &= (a_1 \cos Z(s, u) + b_1 \sin Z(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + (-a_1 \sin Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) + b_1 \cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (a_1 \sin Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u) - b_1 \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} up(s) \bar{\eta}_1(s) + \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s) &= (a_2 \cos Z(s, u) + b_2 \sin Z(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + (-a_2 \sin Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) + b_2 \cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (a_2 \sin Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u) - b_2 \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

şeklinde iki denklem bulunur. Bu denklemler katsayıların eşitliğine göre çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos Z(s, u), \\ d_1 &= \sin Z(s, u), \\ c_2 &= -\sin Z(s, u) (up(s) \sin \Upsilon(s, u) - \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u)), \\ d_2 &= \cos Z(s, u) (up(s) \sin \Upsilon(s, u) - \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u)) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (3.9) denkleminden yüzeyin eğriliklerinden $J_{\phi_{\delta}}$,

$$J_{\phi_{\delta}} = \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u)$$

olur.

$$\begin{aligned} ((\phi_{\delta})_1)_u(s, u) &= -\sin \Theta(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{\eta}_1(s) + \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{\eta}_2(s), \\ ((\phi_{\delta})_1)_s(s, u) &= -p(s) \cos \Upsilon(s, u) \bar{v}(s) + \sin \Upsilon(s, u) (-\Upsilon_s(s, u) - q(s)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + \cos \Upsilon(s, u) (\Upsilon_s(s, u) + q(s)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

olduğundan (3.8) denklemine göre,

$$\begin{aligned}
& -\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{\eta}_1(s) + \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{\eta}_2(s) = (e_1 \cos Z(s, u) + f_1 \sin Z(s, u)) \bar{v}(s) \\
& + (-e_1 \sin Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) + f_1 \cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\
& + (e_1 \sin Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u) - f_1 \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& -p(s) \cos \Upsilon(s, u) \bar{v}(s) + \sin \Upsilon(s, u) (-\Upsilon_s(s, u) - q(s)) \bar{\eta}_1(s) \\
& + \cos \Upsilon(s, u) (\Upsilon_s(s, u) + q(s)) \bar{\eta}_2(s) \\
& = (e_2 \cos Z(s, u) + f_2 \sin Z(s, u)) \bar{v}(s) \\
& + (-e_2 \sin Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) + f_2 \cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\
& + (e_2 \sin Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u) - f_2 \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s)
\end{aligned}$$

şeklinde iki denklem bulunur. Bu denklemler katsayıların eşitliğine göre çözüldüğünde,

$$\begin{aligned}
e_1 &= \Upsilon_u(s, u) \sin Z(s, u), \\
f_1 &= -\Upsilon_u(s, u) \cos Z(s, u), \\
e_2 &= \sin Z(s, u) (q(s) + \Upsilon_s(s, u)) - p(s) \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u), \\
f_2 &= -\cos Z(s, u) (q(s) + \Upsilon_s(s, u)) - p(s) \sin Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (3.9) denkleminden yüzeyin eğriliklerinden $K_{\phi_{\delta}}$ ve

$H_{\phi_{\delta}}$

$$\begin{aligned}
K_{\phi_{\delta}} &= \Upsilon_u(s, u) p(s) \cos \Upsilon(s, u), \\
H_{\phi_{\delta}} &= \frac{q(s) + \Upsilon_s(s, u)}{2}
\end{aligned}$$

olur. Diğer yandan, yüzeyin integrallenebilme koşuluna göre,

$$\begin{aligned}
F(s, u) &= \Upsilon_u(s, u) (up(s) \sin \Upsilon(s, u) - \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u)) \\
& - p(s) \cos \Upsilon(s, u) = 0
\end{aligned} \tag{6.11}$$

bulunur.

Yukarıda inşa edilen framed yüzey teorisinin sonuçları olarak aşağıdakileri verebiliriz:

Teorem 6.4.4.1. $M_2 : \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ framed yüzeyinin $\{(\phi_{\bar{\delta}})_1(s, u), (\phi_{\bar{\delta}})_2(s, u), (\phi_{\bar{\delta}})_3(s, u)\}$ hareketli çatısı

$$\begin{aligned}(\phi_{\bar{\delta}})_1(s, u) &= \cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_1(s) + \sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s), \\(\phi_{\bar{\delta}})_2(s, u) &= \cos Z(s, u) \bar{v}(s) + \sin Z(s, u) (\cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s) - \sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_1(s)), \\(\phi_{\bar{\delta}})_3(s, u) &= \sin Z(s, u) \bar{v}(s) + \cos Z(s, u) (\sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_1(s) - \cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s))\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir.

Teorem 6.4.4.2. $M_2 : \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ framed yüzeyinin eğrilikleri

$$\begin{aligned}J_{\phi_{\bar{\delta}}} &= \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u), \\K_{\phi_{\bar{\delta}}} &= \Upsilon_u(s, u) p(s) \cos \Upsilon(s, u), \\H_{\phi_{\bar{\delta}}} &= \frac{q(s) + \Upsilon_s(s, u)}{2}\end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir.

Sonuç 6.4.4.3. $M_2 : \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ ile verilen framed yüzeyi regüler olsun. O halde, birinci ve ikinci temel formlar ile temel değişmezler arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned}E &= (up(s) \sin \Upsilon(s, u) - \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u)), \\F &= \cos Z(s, u) \sin Z(s, u) \left(1 - (up(s) \sin \Upsilon(s, u) - \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u))^2\right), \\G &= 1, \\L &= (q(s) + \Upsilon_s(s, u)) (up(s) \sin \Upsilon(s, u) - \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u)), \\M &= \Upsilon_u(s, u) (up(s) \sin \Upsilon(s, u) - \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u)), \\N &= 0\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Framed yüzey teorisi için (3.11) denkleminde $c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2$ değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 6.4.4.4. $M_2 : \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ ile verilen framed yüzeyi regüler olsun. O halde, yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği,

$$K = \frac{\Upsilon_u(s, u) p(s) \cos \Upsilon(s, u)}{\bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u)},$$

$$H = \frac{q(s) + \Upsilon_s(s, u)}{2(\bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u))}$$

ile verilir.

İspat. Framed yüzey teorisi için (3.12) denkleminde $K_{\phi_{\bar{\delta}}}$ ve $H_{\phi_{\bar{\delta}}}$ değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 6.4.4.5. $M_2 : \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ regüler framed yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul $q(s) + \Upsilon_s(s, u) = 0$ olmasıdır.

Önerme 6.4.4.6. $M_2 : \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ framed yüzeyi için $(s_3, 0) \in S_3$ singüler noktası dejenere olmayan bir singüler noktadır.

İspat. $M_2 : \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ framed yüzeyi için işaretli alan yoğunluk fonksiyonu,

$$\lambda(s, u) = \det\left(\left(\phi_{\bar{\delta}}\right)_s, \left(\phi_{\bar{\delta}}\right)_u, \left(\phi_{\bar{\delta}}\right)_1\right) = -up(s) \sin \Upsilon(s, u) + \bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}(s_3, 0) = -p(s_3) \sin \Upsilon(s_3, 0) \neq 0$$

veya

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s}(s_3, 0) = \bar{\beta}'(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) \neq 0$$

ise $(s_3, 0) \in S_3$ dejenere olmayan bir singüler noktadır. $\phi_{\bar{\delta}}$ framed yüzeyinin (6.11) integrallenebilme koşulundan $F(s_3, 0) = p(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) = 0$ dır. $p(s_3) \neq 0$ olduğundan $\cos \Upsilon(s_3, 0) = 0$ dır. Dolayısıyla $\sin \Upsilon(s_3, 0) \neq 0$ dır. O halde, $\frac{\partial \lambda}{\partial u}(s_3, 0) \neq 0$ dır ve $(s_3, 0) \in S_3$ dejenere olmayan bir singüler noktadır.

Teorem 6.4.4.7. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin binormal yüzeyi $\phi_{\bar{\delta}}$ olsun. Kabul edelim ki $(\phi_{\bar{\delta}}, (\phi_{\bar{\delta}})_1, (\phi_{\bar{\delta}})_2): S \times U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir framed yüzey olsun.

1. $(s_3, 0) \in S_3$ $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyinin bir singüler noktası olsun. Eğer

$$\bar{\beta}'(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) \neq 0, q(s_3) + \Upsilon_s(s_3, 0) \neq 0$$

ise $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_3, 0)$ noktasında bir cuspidal-edgedir.

2. $(s_3, 0) \in S_3$ $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyinin bir singüler noktası olsun. Eğer

$$\begin{aligned} \bar{\beta}'(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) &= 0, \\ \bar{\beta}''(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) - 2\bar{\beta}'(s_3) \sin \Upsilon(s_3, 0) \Upsilon_s(s_3, 0) &\neq 0 \\ q(s_3) + \Upsilon_s(s_3, u_3) &\neq 0 \end{aligned}$$

ise $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_3, 0)$ noktasında bir swallowtaildir.

3. $(s_3, 0) \in S_3$ $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyinin bir singüler noktası olsun. Eğer

$$\bar{\beta}'(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) \neq 0, q(s_3) + \Upsilon_s(s_3, 0) = 0, \Upsilon_{su}(s_3, 0) \neq 0$$

ise $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_3, 0)$ noktasında bir cuspidal cross-cap olur.

İspat. $M_2: \phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u\bar{v}(s)$ framed yüzeyi için

$$\begin{aligned} d\phi_{\bar{\delta}} &= (\phi_{\bar{\delta}})_s ds + (\phi_{\bar{\delta}})_u du \\ &= (up(s)\bar{\eta}_1(s) + \bar{\beta}(s)\bar{\eta}_2(s))ds + (\bar{v}(s))du \end{aligned}$$

olduğundan ξ null vektör alanı $\frac{\partial}{\partial s}$ olarak seçilebilir. Diğer yandan, $(s_3, 0)$ noktası non-

dejenere olduğundan ζ singüler eğrisi $\zeta = (s(u), u)$ formunda verilebilir. (3.13)

denklemlerinden direkt hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} \Omega &= \det \left((\phi_{\bar{\delta}} \circ \zeta)', (\phi_{\bar{\delta}})_1 \circ \zeta, d(\phi_{\bar{\delta}})_1(\xi) \right) \\ &= -(q(s) + \Upsilon_s(s, u)) + (p(s) \cos \Upsilon(s, u)) (\bar{\beta}(s) \cos \Upsilon(s, u) - up(s) \sin \Upsilon(s, u)) \frac{ds}{du} \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde,

1. Teorem 3.4.6'dan $(s_3, 0) \in S_3$ için

$$\xi\lambda(s_3, 0) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_3, 0) = \bar{\beta}'(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) \neq 0 \text{ ve } q(s_3) + \Upsilon_s(s_3, 0) \neq 0$$

ise $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_3, 0)$ noktasında bir cuspidal-edgedir.

2. Teorem 3.4.6'dan $(s_3, 0) \in S_3$ için

$$\xi\lambda(s_3, 0) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_3, 0) = \bar{\beta}'(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) = 0,$$

$$\xi\xi\lambda(s_3, 0) = \frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2}(s_3, 0) = \bar{\beta}''(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) - 2\bar{\beta}'(s_3) \sin \Upsilon(s_3, 0) \Upsilon_s(s_3, 0) \neq 0$$

ve $q(s_3) + \Upsilon_s(s_3, 0) \neq 0$ ise $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_3, 0)$ noktasında bir swallowtail olur.

3. Teorem 3.4.6'dan $(s_3, 0) \in S_3$ için

$$\xi\lambda(s_3, 0) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_3, 0) = \bar{\beta}'(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) \neq 0 \text{ ve } q(s_3) + \Upsilon_s(s_3, 0) = 0, \Upsilon_{su}(s_3, 0) \neq 0$$

ise $\phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_3, 0)$ noktasında bir cuspidal cross cap olur.

Teorem 6.4.4.8. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin binormal yüzeyi M_2 olsun. Eğer M_2 yüzeyi bir framed yüzey ise, M_2 yüzeyinin $(s_3, 0)$ tipindeki singüler noktaları dejenere olmayan singüler noktalardır. Ama M_2 yüzeyi $(s_3, 0)$ singüler noktasında cuspidal-edge, swallowtail ya da cuspidal cross cap değildir.

İspat. (6.11) integrallenebilme koşuluna göre $(s_3, 0)$ singüler noktası için $p(s_3) \cos \Upsilon(s_3, 0) = 0$ dır. $p(s_3) \neq 0$ olduğundan $\cos \Upsilon(s_3, 0) = 0$ olur. O halde, $\xi\lambda(s_3, 0) = 0$ bulunur. Yani M_2 yüzeyi $(s_3, 0)$ singüler noktasında cuspidal-edge ve cuspidal cross cap olamaz. Diğer yandan $\cos \Upsilon(s_3, 0) = 0$ olduğundan,

$$F_s(s_3, 0) = p(s_3) \sin \Upsilon(s_3, 0) \Upsilon_s(s_3, 0) = 0$$

için $p(s_3) \neq 0$ olduğundan $\sin \Upsilon(s_3, 0) \Upsilon_s(s_3, 0) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $\xi \xi \lambda(s_3, 0) = 0$ bulunur. Yani M_2 yüzeyi $(s_3, 0)$ singüler noktasında swallowtail olamaz.

6.4.5. Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin genelleştirilmiş normal yüzeyleri

Bu kısımda hem Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerin normal yüzeylerinin hem de Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerin binormal yüzeylerinin bir genelleştirilmesi olan Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin genelleştirilmiş normal yüzeyleri tanıtılacaktır ve bazı geometrik incelemeler ve singülerite incelemeleri yapılacaktır.

$(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğrisi $\{\bar{v}, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2\}$ hareketli çatısı ve (p, q, α) framed eğrilikleri, $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed adjoint eğri ise $\{\bar{w}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2\}$ hareketli çatısı ve $(\bar{p}, \bar{q}, \bar{\alpha})$ framed eğrilikleri ile verilsin. γ framed eğrisinin genelleştirilmiş normal yüzeyi $a_1(s)$ ve $a_2(s)$, $a_1^2(s) + a_2^2(s) = 1$ denklemini sağlayan diferansiyellenebilir fonksiyonlar iken

$$\Phi_\gamma(s, u) = \gamma(s) + u(a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{\eta}_2(s))$$

ile verilir. Biz dayanak eğrisi bir adjoint eğri ve doğrultmanı adjoint eğrinin genelleştirilmiş normal vektörlerin lineer bileşimi olan M_3 yüzeyini inceleyeceğiz. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin genelleştirilmiş normal yüzeyini

$$a_n(s) = a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{\eta}_2(s)$$

iken

$$M_3: \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + ua_n(s)$$

ile gösterelim. (6.6) denkleminde $\bar{\mu}_1(s) = -\bar{\eta}_1(s)$ ve $\bar{\mu}_2(s) = \bar{v}(s)$ olduğundan M_3 yüzeyini

$$a_n(s) = -a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s)$$

ile

$$M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + ua_n(s)$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 6.4.5.1. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğri ve adjoint eğrisi $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2) : I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ olsun. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyinin karakterizasyonları aşağıdaki gibi verilebilir:

1. M_3 yüzeyi açılabilir değildir.

2. M_3 yüzeyinin bir singüler nokta kümesi

$$S = \left\{ (s, u) \mid \bar{\beta}(s) - ua_1(s)q(s) = 0, u(-p(s) + a_2(s)a_1'(s) - a_1(s)a_2'(s)) = 0 \right\}$$

şeklindedir.

İspat. 1. M_3 yüzeyinin dağılma parametresi,

$$\begin{aligned} & \frac{\det \left(\bar{\delta}', -a_1 \bar{\eta}_1 + a_2 \bar{v}, (a_1 p + a_2') \bar{v} + (a_2 p - a_1') \bar{\eta}_1 - a_1 q \bar{\eta}_2 \right)}{\left\| (a_1 p + a_2') \bar{v} + (a_2 p - a_1') \bar{\eta}_1 - a_1 q \bar{\eta}_2 \right\|^2} \\ &= \frac{\left\langle \bar{\beta} \bar{\eta}_2, a_1^2 \bar{v} + a_1 a_2 q \bar{\eta}_1 + (p - a_2 a_1' + a_1 a_2') \bar{\eta}_2 \right\rangle}{(a_1 p + a_2')^2 + (a_2 p - a_1')^2 + (a_1 q)^2} \\ &= \frac{\bar{\beta} (p - a_2 a_1' + a_1 a_2')}{(a_1 p + a_2')^2 + (a_2 p - a_1')^2 + (a_1 q)^2} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Dolayısıyla M_3 yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul $\bar{\beta} (p - a_2 a_1' + a_1 a_2') = 0$ olmasıdır. Singüler noktaları karakterize eden $\bar{\beta}(s)$ her noktada sıfır olamaz. O halde, kabul edelim ki $p - a_2 a_1' + a_1 a_2' = 0$ olsun. Bu denklem her s değeri için sağlandığından $a_1 = \text{sabit}$ ve $a_2 = \text{sabit}$ değerleri için de sağlanır ve $p = 0$ bulunur. Bu ise Frenet-tipi framed eğriler için kabulümüz ile çelişir. O halde $p - a_2 a_1' + a_1 a_2' = 0$ eşitliği her s değeri için sağlanmaz. Dolayısıyla M_3 yüzeyi açılabilir değildir.

2. $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyinin kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}(\Phi_{\bar{\delta}})_s &= (\bar{\beta} - u a_1 q) \bar{\eta}_2 + u \left((a_1 p + a_2') \bar{v} + (a_2 p - a_1') \bar{\eta}_1 \right), \\ (\Phi_{\bar{\delta}})_u &= -a_1 \bar{\eta}_1 + a_2 \bar{v}\end{aligned}$$

ve $(\Phi_{\bar{\delta}})_s \wedge (\Phi_{\bar{\delta}})_u = (\bar{\beta} - u a_1 q) (a_1 \bar{v} + a_2 \bar{\eta}_1) + u (-p + a_2 a_1' - a_1 a_2') \bar{\eta}_2$ bulunur. Eğer, (s_0, u_0) bir singüler nokta ise a_1 ve a_2 fonksiyonları aynı anda sıfır olamayacağından

$$\bar{\beta}(s_0) - u_0 a_1(s_0) q(s_0) = 0$$

ve

$$u_0 \left(-p(s_0) + a_2(s_0) a_1'(s_0) - a_1(s_0) a_2'(s_0) \right) = 0$$

olur. O halde, singüler nokta kümesi

$$S = \left\{ (s, u) \mid \bar{\beta}(s) - u a_1(s) q(s) = 0, u \left(-p(s) + a_2(s) a_1'(s) - a_1(s) a_2'(s) \right) = 0 \right\}$$

şeklinde yazılabilir.

M_3 yüzeyinin singülerite çeşitlerini inceleyebilmek amacı ile S kümesini S_5 ve S_6 olmak üzere iki ayrı kümeye ayıralım. Bu kümeler,

$$S_5 = \left\{ (s, 0) \mid \bar{\beta}(s) = 0 \right\}$$

ve

$$S_6 = \left\{ (s, u) \mid -p(s) + a_2(s) a_1'(s) - a_1(s) a_2'(s) = 0, \bar{\beta}(s) - u a_1(s) q(s) = 0, u \neq 0 \right\}$$

şeklinde yazılabilir. S_5 kümesinin singüler noktaları M_3 yüzeyinin dayanak eğrisi olan adjoint eğrisine aittir. S_6 kümesi için ise a_1 ve a_2 fonksiyonları sabit iken singüler noktada $p(s) = 0$ dır. Bu ise kabulümüz ile çelişir. O halde, S_6 singüler nokta kümesi sabit olmayan a_1 ve a_2 fonksiyonları için ve $a_2(s) a_1'(s) - a_1(s) a_2'(s) \neq 0$ için geçerlidir. Basitlik açısından $x(s)$ ve $y(s, u)$ fonksiyonlarını

$$\begin{aligned}x(s) &= -p(s) + a_2(s)a_1'(s) - a_1(s)a_2'(s), \\y(s, u) &= \bar{\beta}(s) - ua_1(s)q(s)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Şimdi M_3 yüzeyinin singülerite çeşitlerini inceleyelim. Aşağıdaki teorem M_3 yüzeyinin bir cross-cap yüzeyi olması için gerekli şartları ifade eder:

Teorem 6.4.5.2. $(\gamma, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ Frenet-tipi framed eğri ve adjoint eğrisi $(\bar{\delta}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2): I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta_2$ olsun. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin genelleştirilmiş normal yüzeyi M_3 olsun.

1. Eğer $(s_5, 0) \in S_5$ ve $\bar{\beta}'(s_5)x(s_5) \neq 0$ ise M_3 yüzeyi $(s_5, 0)$ noktasında bir cross-cap yüzeyidir.
2. Eğer $(s_6, u_6) \in S_6$ ve $\bar{\beta}(s_6)x'(s_6) \neq 0$ ise M_3 yüzeyi (s_6, u_6) noktasında bir cross-cap yüzeyidir.

İspat. İlk olarak M_3 yüzeyinin gerekli kısmi türevlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial s}(s, u) &= (\bar{\beta} - ua_1q)\bar{\eta}_2 + u\left((a_1p + a_2')\bar{v} + (a_2p - a_1')\bar{\eta}_1\right), \\ \frac{\partial \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s, u) &= -a_1\bar{\eta}_1 + a_2\bar{v}, \\ \frac{\partial^2 \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s, u) &= (a_1p + a_2')\bar{v} + (a_2p - a_1')\bar{\eta}_1 - a_1q\bar{\eta}_2, \\ \frac{\partial^2 \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s, u) &= u\left(a_2'' + 2pa_1' + a_1p' - a_2p^2\right)\bar{v} \\ &\quad + \left(-\bar{\beta}q + u\left(-a_1'' + 2pa_2' + a_2p' + a_1p^2 + a_1q^2\right)\right)\bar{\eta}_1 \\ &\quad + \left(\bar{\beta}' + u\left(-2a_1'q - a_1q' + a_2pq\right)\right)\bar{\eta}_2\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. O halde,

$$\begin{aligned}\det\left(\frac{\partial \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s, u), \frac{\partial^2 \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s, u), \frac{\partial^2 \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s, u)\right) &= \left(p + a_1a_2' - a_1'a_2\right)\left(\bar{\beta}' + 2ua_1'q + upqa_2 - uq'a_1\right) \\ &\quad + uqa_1\left(p' + a_1a_2'' - a_1''a_2\right) - a_1a_2q^2\left(\bar{\beta} - ua_1q\right)\end{aligned}$$

bulunur.

1. Eğer, $(s_5, 0) \in S_5$ ise,

$$\det \left(\frac{\partial \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s_5, 0), \frac{\partial^2 \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s_5, 0), \frac{\partial^2 \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s_5, 0) \right) = (p + a_1 a_2' - a_1' a_2) \bar{\beta}' = x(s_5) \bar{\beta}'(s_5)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\bar{\beta}'(s_5) x(s_5) \neq 0$ ise M_3 yüzeyi $(s_5, 0)$ noktasında bir cross-cap yüzeyidir.

2. Eğer, $(s_6, u_6) \in S_6$ ise,

$$\det \left(\frac{\partial \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial u}(s_6, u_6), \frac{\partial^2 \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial u \partial s}(s_6, u_6), \frac{\partial^2 \Phi_{\bar{\delta}}}{\partial s^2}(s_6, u_6) \right) = u q a_1 (p' + a_1 a_2'' - a_1'' a_2) = \bar{\beta}(s_6) x'(s_6)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\bar{\beta}(s_6) x'(s_6) \neq 0$ ise M_3 yüzeyi (s_6, u_6) noktasında bir cross-cap yüzeyidir.

Önerme 6.4.5.3. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyi silindirik bir yüzey değildir.

İspat. Kabul edelim ki M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyi silindirik olsun. O halde

$$a_n' = (a_1 p + a_2') \bar{v} + (a_2 p - a_1') \bar{\eta}_1 - a_1 q \bar{\eta}_2 = 0 \text{ olur. Buradan,}$$

$$\begin{aligned} a_1 p + a_2' &= 0, \\ a_2 p - a_1' &= 0, \\ a_1 q &= 0 \end{aligned} \tag{6.12}$$

olur. (6.12) denkleminin son eşitliğinden Frenet-tipi framed eğrinin adjoint eğrisi için $q \neq 0$ olduğundan $a_1 = 0$ bulunur. Dolayısıyla ilk iki eşitlikten $p = 0$ olur. Bu ise Frenet-tipi framed eğriler için kabulümüz ile çelişir. O halde, $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyi silindirik bir yüzey değildir.

Teorem 6.4.5.4. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyinin striksiyon eğrisinin $\bar{\delta}$ adjoint eğrisi olması için gerek ve yeter koşul ya M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyinin bir binormal yüzey olması ya da $\bar{\beta} = 0$ olmasıdır.

İspat. Striksiyon eğri tanımından

$$\begin{aligned}
 \sigma(s) &= \bar{\delta}(s) - \frac{\langle \bar{\delta}'(s), a_n'(s) \rangle}{\langle a_n'(s), a_n'(s) \rangle} a_n(s), \\
 &= \bar{\delta} - \frac{\langle \bar{\beta} \bar{\eta}_2, (a_1 p + a_2') \bar{v} + (a_2 p - a_1') \bar{\eta}_1 - a_1 q \bar{\eta}_2 \rangle}{(a_1 p + a_2')^2 + (a_2 p - a_1')^2 + (a_1 q)^2}, \\
 &= \bar{\delta} - \frac{-\bar{\beta} a_1 q}{(a_1 p + a_2')^2 + (a_2 p - a_1')^2 + (a_1 q)^2}
 \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $q \neq 0$ olduğundan $a_1 = 0$ veya $\bar{\beta} = 0$ dır. Eğer $a_1 = 0$ ise $a_n = \mp \bar{v} = \mp \bar{\mu}_2$ olur. Buradan istenilen gösterilmiş olur.

Teorem 6.4.5.5. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyi S_6 singüler nokta kümesine sahip olsun. $a_1(s), a_2(s) \neq 0$ için M_3 yüzeyinin singüler noktalarının merkezi olan Γ eğrisi

$$\Gamma(s) = \bar{\delta}(s) + \frac{\bar{\beta}(s) a_n(s)}{q(s) a_2(s) \int \frac{p(s)}{a_2^2(s)}}$$

formunda verilir.

İspat. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyinin S_6 singüler nokta küme tanımından $x(s) = 0$ ve $y(s, u) = 0$ dır. Dolayısıyla,

$$-p(s) + a_2(s) a_1'(s) - a_1(s) a_2'(s) = 0 \quad (6.13)$$

yazılabilir. $a_1(s), a_2(s) \neq 0$ için (6.13) denklemi

$$\frac{p(s)}{a_2^2(s)} = \left(\frac{a_1(s)}{a_2(s)} \right)'$$

formunda yazılabilir. Her iki tarafın integrali alınırsa,

$$a_1(s) = a_2(s) \int \frac{p(s)}{a_2^2(s)} \quad (6.14)$$

denklemleri elde edilir. Ayrıca, $y(s, u) = 0$ olduğundan

$$a_1(s) = \frac{\bar{\beta}(s)}{uq(s)} \quad (6.15)$$

olur. (6.14) ve (6.15) denklemlerinden

$$u = \frac{\bar{\beta}(s)}{q(s)a_2(s) \int \frac{p(s)}{a_2^2(s)}} \quad (6.16)$$

bulunur. Dolayısıyla, (6.16) ifadesine göre singüler noktaların merkezi Γ eğrisi

$$\Gamma(s) = \bar{\delta}(s) + \frac{\bar{\beta}(s)a_2(s)}{q(s)a_2(s) \int \frac{p(s)}{a_2^2(s)}}$$

biçiminde verilir.

6.4.6. Framed yüzey olarak Frenet-tipi framed eğrilerin adjoint eğrilerinin genelleştirilmiş normal yüzeyleri

$\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin genelleştirilmiş normal yüzeyi

$$M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s)) \quad \text{olsun.} \quad \Upsilon, Z : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

diferansiyellenebilir fonksiyonları için $\langle (\Phi_{\bar{\delta}})_s(s, u), (\Phi_{\bar{\delta}})_1(s, u) \rangle = 0$ ve

$\langle (\Phi_{\bar{\delta}})_u(s, u), (\Phi_{\bar{\delta}})_1(s, u) \rangle = 0$ olacak şekilde,

$$(\Phi_{\bar{\delta}})_1(s, u) = \cos \Upsilon(s, u)\bar{\eta}_2(s) + \sin \Upsilon(s, u)(a_2(s)\bar{\eta}_1(s) + a_1(s)\bar{v}(s))$$

olsun. Dolayısıyla, $\langle (\Phi_{\bar{\delta}})_1(s, u), (\Phi_{\bar{\delta}})_2(s, u) \rangle = 0$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} (\Phi_{\bar{\delta}})_2(s, u) &= \cos Z(s, u)(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s)) \\ &\quad + \sin Z(s, u)(\cos \Upsilon(s, u)(a_2(s)\bar{\eta}_1(s) + a_1(s)\bar{v}(s)) - \sin \Upsilon(s, u)\bar{\eta}_2(s)) \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Dolayısıyla, $\Delta = \left\{ \left((\Phi_{\bar{\delta}})_1, (\Phi_{\bar{\delta}})_2 \right) \in S^2 \times S^2 \mid \left\langle (\Phi_{\bar{\delta}})_1, (\Phi_{\bar{\delta}})_2 \right\rangle = 0 \right\}$

iken $(\Phi_{\bar{\delta}}, (\Phi_{\bar{\delta}})_1, (\Phi_{\bar{\delta}})_2) : S \times U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir framed yüzeydir. Buradan,

$(\Phi_{\bar{\delta}})_3 = (\Phi_{\bar{\delta}})_1 \wedge (\Phi_{\bar{\delta}})_2$ olacak şekilde,

$$\begin{aligned} (\Phi_{\bar{\delta}})_3(s, u) &= -\cos Z(s, u) \sin Y(s, u) \bar{\eta}_2(s) \\ &\quad + (-a_2(s) \sin Z(s, u) + a_1(s) \cos Z(s, u) \cos Y(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + (a_1(s) \sin Z(s, u) + a_2(s) \cos Z(s, u) \cos Y(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \end{aligned}$$

ile hesaplanır. O halde, $\{(\Phi_{\bar{\delta}})_1(s, u), (\Phi_{\bar{\delta}})_2(s, u), (\Phi_{\bar{\delta}})_3(s, u)\}$ M_3 yüzeyi için bir hareketli çatıdır. Şimdi M_3 framed yüzeyinin temel değişmezlerini hesaplayalım:

$$\begin{aligned} (\Phi_{\bar{\delta}})_u(s, u) &= -a_1 \bar{\eta}_1 + a_2 \bar{v}, \\ (\Phi_{\bar{\delta}})_s(s, u) &= (\bar{\beta} - ua_1q) \bar{\eta}_2 + u \left((a_1p + a_2') \bar{v} + (a_2p - a_1') \bar{\eta}_1 \right) \end{aligned}$$

olduğundan (3.8) denklemine göre,

$$\begin{aligned} -a_1 \bar{\eta}_1 + a_2 \bar{v} &= ((c_1a_2 + d_1a_1 \cos Y(s, u)) \cos Z(s, u) + (c_1a_1 \cos Y(s, u) - d_1a_2) \sin Z(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + ((-c_1a_1 + d_1a_2 \cos Y(s, u)) \cos Z(s, u) + (c_1a_2 \cos Y(s, u) + d_1a_1) \sin Z(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (-c_1 \sin Z(s, u) \sin Y(s, u) - d_1 \cos Z(s, u) \sin Y(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &(\bar{\beta} - ua_1q) \bar{\eta}_2 + u \left((a_1p + a_2') \bar{v} + (a_2p - a_1') \bar{\eta}_1 \right) \\ &= ((c_2a_2 + d_2a_1 \cos Y(s, u)) \cos Z(s, u) + (c_2a_1 \cos Y(s, u) - d_2a_2) \sin Z(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + ((-c_2a_1 + d_2a_2 \cos Y(s, u)) \cos Z(s, u) + (c_2a_2 \cos Y(s, u) + d_2a_1) \sin Z(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (-c_2 \sin Z(s, u) \sin Y(s, u) - d_2 \cos Z(s, u) \sin Y(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

şeklinde iki denklem bulunur. Bu denklemler katsayıların eşitliğine göre çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} c_1 &= \cos Z(s, u), \\ d_1 &= -\sin Z(s, u), \\ c_2 &= -\sin Z(s, u) (u \cos Y(s, u) x(s) + \sin Y(s, u) y(s, u)), \\ d_2 &= -\cos Z(s, u) (u \cos Y(s, u) x(s) + \sin Y(s, u) y(s, u)) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (3.9) denkleminden yüzeyin eğriliklerinden $J_{\phi_{\bar{\delta}}}$,

$$J_{\phi_{\bar{\delta}}} = -(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u))$$

olur.

$$\begin{aligned} \left((\Phi_{\bar{\delta}})_1 \right)_u (s, u) &= -\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{\eta}_2(s) + \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) (a_2(s) \bar{\eta}_1(s) + a_1(s) \bar{v}(s)), \\ \left((\Phi_{\bar{\delta}})_1 \right)_s (s, u) &= \left(a_1 \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) - a_2 p(s) \sin \Upsilon(s, u) + a_1' \sin \Upsilon(s, u) \right) \bar{v}(s) \\ &\quad + \left(a_2 \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) + a_1 p(s) \sin \Upsilon(s, u) + a_2' \sin \Upsilon(s, u) - q(s) \cos \Upsilon(s, u) \right) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + \left(-\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) + a_2 q(s) \sin \Upsilon(s, u) \right) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

olduğundan (3.8) denkleminde göre,

$$\begin{aligned} &-\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) \bar{\eta}_2(s) + \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_u(s, u) (a_2(s) \bar{\eta}_1(s) + a_1(s) \bar{v}(s)) \\ &= \left((e_1 a_2 + f_1 a_1 \cos \Upsilon(s, u)) \cos Z(s, u) + (e_1 a_1 \cos \Upsilon(s, u) - f_1 a_2) \sin Z(s, u) \right) \bar{v}(s) \\ &\quad + \left((-e_1 a_1 + f_1 a_2 \cos \Upsilon(s, u)) \cos Z(s, u) + (e_1 a_2 \cos \Upsilon(s, u) + f_1 a_1) \sin Z(s, u) \right) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (-e_1 \sin Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) - f_1 \cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\left(a_1 \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) - a_2 p(s) \sin \Upsilon(s, u) + a_1' \sin \Upsilon(s, u) \right) \bar{v}(s) \\ &\quad + \left(a_2 \cos \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) + a_1 p(s) \sin \Upsilon(s, u) + a_2' \sin \Upsilon(s, u) - q(s) \cos \Upsilon(s, u) \right) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (-\sin \Upsilon(s, u) \Upsilon_s(s, u) + a_2 q(s) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \\ &= \left((e_2 a_2 + f_2 a_1 \cos \Upsilon(s, u)) \cos Z(s, u) + (e_2 a_1 \cos \Upsilon(s, u) - f_2 a_2) \sin Z(s, u) \right) \bar{v}(s) \\ &\quad + \left((-e_2 a_1 + f_2 a_2 \cos \Upsilon(s, u)) \cos Z(s, u) + (e_2 a_2 \cos \Upsilon(s, u) + f_2 a_1) \sin Z(s, u) \right) \bar{\eta}_1(s) \\ &\quad + (-e_2 \sin Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) - f_2 \cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_2(s) \end{aligned}$$

şeklinde iki denklem bulunur. Bu denklemler katsayıların eşitliğine göre çözüldüğünde,

$$\begin{aligned} e_1 &= \Upsilon_u(s, u) \sin Z(s, u), \\ f_1 &= \Upsilon_u(s, u) \cos Z(s, u), \\ e_2 &= \cos Z(s, u) (\sin \Upsilon(s, u) x(s) + \cos \Upsilon(s, u) a_1(s) q(s)) + \sin Z(s, u) (\Upsilon_s(s, u) - a_2(s) q(s)), \\ f_2 &= -\sin Z(s, u) (\sin \Upsilon(s, u) x(s) + \cos \Upsilon(s, u) a_1(s) q(s)) + \cos Z(s, u) (\Upsilon_s(s, u) - a_2(s) q(s)) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla, (3.9) denkleminde yüzeyin eğriliklerinden $K_{\Phi_{\bar{\delta}}}$ ve $H_{\Phi_{\bar{\delta}}}$

$$K_{\Phi_{\bar{\delta}}} = \Upsilon_u(s, u) \left(x(s) \sin \Upsilon(s, u) + a_1(s) q(s) \cos \Upsilon(s, u) \right),$$

$$H_{\Phi_{\bar{\delta}}} = \frac{\Upsilon_s(s, u) - a_2(s) q(s)}{2}$$

olur. Diğer yandan, yüzeyin integrallenebilme koşuluna göre,

$$F(s, u) = \Upsilon_u(s, u) \left(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u) \right) + \left(\sin \Upsilon(s, u) x(s) + \cos \Upsilon(s, u) a_1(s) q(s) \right) = 0 \quad (6.17)$$

bulunur.

Yukarıda inşa edilen framed yüzey teorisinin sonuçları olarak aşağıdakileri verebiliriz:

Teorem 6.4.6.1. $M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s))$ framed yüzeyinin $\{(\Phi_{\bar{\delta}})_1(s, u), (\Phi_{\bar{\delta}})_2(s, u), (\Phi_{\bar{\delta}})_3(s, u)\}$ hareketli çatısı

$$\begin{aligned} (\Phi_{\bar{\delta}})_1(s, u) &= \cos \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s) + \sin \Upsilon(s, u) (a_2(s) \bar{\eta}_1(s) + a_1(s) \bar{v}(s)), \\ (\Phi_{\bar{\delta}})_2(s, u) &= \cos Z(s, u) (-a_1(s) \bar{\eta}_1(s) + a_2(s) \bar{v}(s)) \\ &\quad + \sin Z(s, u) \left(\cos \Upsilon(s, u) (a_2(s) \bar{\eta}_1(s) + a_1(s) \bar{v}(s)) - \sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s) \right), \\ (\Phi_{\bar{\delta}})_3(s, u) &= -\cos Z(s, u) \sin \Upsilon(s, u) \bar{\eta}_2(s) \\ &\quad + (-a_2(s) \sin Z(s, u) + a_1(s) \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)) \bar{v}(s) \\ &\quad + (a_1(s) \sin Z(s, u) + a_2(s) \cos Z(s, u) \cos \Upsilon(s, u)) \bar{\eta}_1(s) \end{aligned}$$

eşitlikleri ile verilir.

Teorem 6.4.6.2. $M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s))$ framed yüzeyinin eğrilikleri

$$J_{\Phi_{\bar{\delta}}} = -(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u)),$$

$$K_{\Phi_{\bar{\delta}}} = \Upsilon_u(s, u) \left(x(s) \sin \Upsilon(s, u) + a_1(s) q(s) \cos \Upsilon(s, u) \right),$$

$$H_{\Phi_{\bar{\delta}}} = \frac{\Upsilon_s(s, u) - a_2(s) q(s)}{2}$$

eşitlikleri ile verilir.

Sonuç 6.4.6.3. $M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s))$ ile verilen framed yüzeyi regüler olsun. O halde, birinci ve ikinci temel formlar ile temel değişmezler arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} E &= \left(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u) \right)^2, \\ F &= \cos Z(s, u) \sin Z(s, u) \left(\left(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u) \right)^2 - 1 \right), \\ G &= 1, \\ L &= \left(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u) \right) \left(\Upsilon_s(s, u) - a_2(s)q(s) \right), \\ M &= \Upsilon_u(s, u) \left(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u) \right), \\ N &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İspat. Framed yüzey teorisi için (3.11) denkleminde $c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2, f_1, f_2$ değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 6.4.6.4. $M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s))$ ile verilen framed yüzeyi regüler olsun. O halde, yüzeyin Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği,

$$\begin{aligned} K &= \frac{\Upsilon_u(s, u) \left(x(s) \sin \Upsilon(s, u) + a_1(s)q(s) \cos \Upsilon(s, u) \right)}{-\left(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u) \right)}, \\ H &= \frac{\Upsilon_s(s, u) - a_2(s)q(s)}{-2 \left(u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u) \right)} \end{aligned}$$

ile verilir.

İspat. Framed yüzey teorisi için (3.12) denkleminde $K_{\Phi_{\bar{\delta}}}$ ve $H_{\Phi_{\bar{\delta}}}$ değerleri yerine yazılırsa istenilen elde edilir.

Sonuç 6.4.6.5. $M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s))$ regüler framed yüzeyinin minimal bir yüzey olması için gerek ve yeter koşul $\Upsilon_s(s, u) - a_2(s)q(s) = 0$ olmasıdır.

Önerme 6.4.6.6. $M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s))$ bir framed yüzey olsun. O halde,

1. $(s_5, 0) \in S_5$ singüler noktası için $x(s_5) \cos \Upsilon(s_5, 0) + a_1(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) q(s_5) \neq 0$ veya $-\bar{\beta}'(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) \neq 0$ ise $(s_5, 0) \in S_5$ dejenere olmayan bir singüler noktadır.

2. $(s_6, u_6) \in S_6$ singüler noktası için $a_1(s_6) \sin \Upsilon(s_6, u_6) q(s_6) \neq 0$ veya $-u_6 \cos \Upsilon(s_6, u_6) x'(s_6) - \sin \Upsilon(s_6, u_6) y'(s_6, u_6) \neq 0$ ise $(s_6, u_6) \in S_6$ dejenere olmayan bir singüler noktadır.

İspat. $M_3 : \Phi_{\bar{\delta}}(s, u) = \bar{\delta}(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s))$ framed yüzeyi için işaretli alan yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} \lambda(s, u) &= \det\left((\Phi_{\bar{\delta}})_s, (\Phi_{\bar{\delta}})_u, (\Phi_{\bar{\delta}})_1\right) \\ &= -u \cos \Upsilon(s, u) \left(p(s) + a_1(s)a_2'(s) - a_1'(s)a_2(s)\right) + \sin \Upsilon(s, u) (\bar{\beta}(s) - ua_1(s)q(s)) \\ &= u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Eğer,

1.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}(s_5, 0) = x(s_5) \cos \Upsilon(s_5, 0) + a_1(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) q(s_5) \neq 0$$

veya

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s}(s_5, 0) = \bar{\beta}'(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) \neq 0$$

ise $(s_5, 0) \in S_5$ dejenere olmayan bir singüler noktadır.

2.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u}(s_6, u_6) = a_1(s_6) \sin \Upsilon(s_6, u_6) q(s_6) \neq 0$$

veya

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s}(s_6, u_6) = u_6 \cos \Upsilon(s_6, u_6) x'(s_6) + \sin \Upsilon(s_6, u_6) y'(s_6, u_6) \neq 0$$

ise $(s_6, u_6) \in S_6$ dejenere olmayan bir singüler noktadır.

Teorem 6.4.6.7. $\bar{\delta}$ adjoint eğrisinin genelleştirilmiş normal yüzeyi $\Phi_{\bar{\delta}}$ olsun. Kabul edelim ki $(\Phi_{\bar{\delta}}, (\Phi_{\bar{\delta}})_1, (\Phi_{\bar{\delta}})_2): S \times U \rightarrow \mathbb{R}^3 \times \Delta$ bir framed yüzey olsun.

1. $(s_5, 0) \in S_5$ için

$$\bar{\beta}'(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) \neq 0 \text{ ve } \Upsilon_s(s_5, 0) - a_2(s_5)q(s_5) \neq 0$$

ise $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_5, 0)$ noktasında bir cuspidal-edgedir.

2. $(s_6, u_6) \in S_6$ için

$$u_6 \cos \Upsilon(s_6, u_6) x'(s_6) + \sin \Upsilon(s_6, u_6) y'(s_6, u_6) \neq 0 \text{ ve } \Upsilon_s(s_6, u_6) - a_2(s_6)q(s_6) \neq 0$$

ise $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi (s_6, u_6) noktasında bir cuspidal-edgedir.

3. $(s_5, 0) \in S_5$ için

$$\bar{\beta}'(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) = 0, \bar{\beta}''(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) + 2\bar{\beta}'(s_5) \cos \Upsilon(s_5, 0) \Upsilon_s(s_5, 0) \neq 0$$

ve $\Upsilon_s(s_5, 0) - a_2(s_5)q(s_5) \neq 0$ ise $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_5, 0)$ noktasında bir swallowtail olur.

4. $(s_6, u_6) \in S_6$ için

$$\begin{aligned} u_6 \cos \Upsilon(s_6, u_6) x'(s_6) + \sin \Upsilon(s_6, u_6) y'(s_6, u_6) &= 0, \\ u_6 (x''(s_6) \cos \Upsilon(s_6, u_6) + 2x'(s_6) \sin \Upsilon(s_6, u_6) \Upsilon_s(s_6, u_6)) \\ + (y''(s_6, u_6) \sin \Upsilon(s_6, u_6) + 2y'(s_6, u_6) \cos \Upsilon(s_6, u_6) \Upsilon_s(s_6, u_6)) &\neq 0 \end{aligned}$$

ve $\Upsilon_s(s_6, u_6) - a_2(s_6)q(s_6) \neq 0$ ise $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi (s_6, u_6) noktasında bir swallowtail olur.

5. $(s_5, 0) \in S_5$ için

$$\bar{\beta}'(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) \neq 0, \Upsilon_s(s_5, 0) - a_2(s_5)q(s_5) = 0, \Upsilon_{su}(s_5, 0) \neq 0$$

ise $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_5, 0)$ noktasında bir cuspidal-cross cap olur.

6. $(s_6, u_6) \in S_6$ için

$$u_6 \cos \Upsilon(s_6, u_6) x'(s_6) + \sin \Upsilon(s_6, u_6) y'(s_6, u_6) \neq 0, \Upsilon_s(s_6, u_6) - a_2(s_6) q(s_6) = 0$$

ve $\Upsilon_{su}(s_5, 0) \neq 0$ ise $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi (s_6, u_6) noktasında bir cuspidal-cross cap olur.

İspat. Kabul edelim ki $(s_3, 0)$ noktası dejenere olmayan bir nokta olsun.

$$\begin{aligned} d\Phi_{\bar{\delta}} &= (\Phi_{\bar{\delta}})_s ds + (\Phi_{\bar{\delta}})_u du \\ &= (\bar{\beta} - u a_1 q) \bar{\eta}_2 + u \left((a_1 p + a_2') \bar{v} + (a_2 p - a_1') \bar{\eta}_1 \right) ds + (-a_1 \bar{\eta}_1 + a_2 \bar{v}) du \end{aligned}$$

olduğundan ξ null vektör alanı $\frac{\partial}{\partial s}$ olarak seçilebilir. Diğer yandan, ζ singüler eğrisi

$\zeta = (s(u), u)$ formunda verilebilir. () denklemlerinden direkt hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} \Omega &= \det \left((\Phi_{\bar{\delta}} \circ \zeta)', (\Phi_{\bar{\delta}})_1 \circ \zeta, d(\Phi_{\bar{\delta}})_1(\xi) \right) \\ &= -(\Upsilon_s(s, u) - a_2(s) q(s)) \\ &\quad + (\sin \Upsilon(s, u) x(s) + \cos \Upsilon(s, u) a_1(s) q(s)) (u \cos \Upsilon(s, u) x(s) + \sin \Upsilon(s, u) y(s, u)) \frac{ds}{du} \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde,

1. Teorem 3.4.6'dan $(s_5, 0) \in S_5$ için

$$\xi \lambda(s_5, 0) = \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s_5, 0) = \bar{\beta}'(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) \neq 0 \text{ ve } \Upsilon_s(s_5, 0) - a_2(s_5) q(s_5) \neq 0$$

ise $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi $(s_5, 0)$ noktasında bir cuspidal-edgedir.

2. Teorem 3.4.6'dan $(s_6, u_6) \in S_6$ için

$$\xi \lambda(s_6, u_6) = \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s_6, u_6) = u_6 \cos \Upsilon(s_6, u_6) x'(s_6) + \sin \Upsilon(s_6, u_6) y'(s_6, u_6) \neq 0$$

ve $\Upsilon_s(s_6, u_6) - a_2(s_6) q(s_6) \neq 0$ ise $\Phi_{\bar{\delta}}(s, u)$ yüzeyi (s_6, u_6) noktasında bir cuspidal-edgedir.

3. Teorem 3.4.6'dan $(s_5, 0) \in S_5$ için

$$\xi \lambda(s_5, 0) = \frac{\partial \lambda}{\partial s}(s_5, 0) = \bar{\beta}'(s_5) \sin \Upsilon(s_5, 0) = 0,$$

$$\xi\xi\lambda(s_5,0)=\frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2}(s_5,0)=\overline{\beta}''(s_5)\sin\Upsilon(s_5,0)+2\overline{\beta}'(s_5)\cos\Upsilon(s_5,0)\Upsilon_s(s_5,0)\neq 0$$

ve $\Upsilon_s(s_5,0)-a_2(s_5)q(s_5)\neq 0$ ise $\Phi_{\overline{\delta}}(s,u)$ yüzeyi $(s_5,0)$ noktasında bir swallowtail olur.

4. Teorem 3.4.6'dan $(s_6,u_6)\in S_6$ için

$$\xi\lambda(s_6,u_6)=\frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_6,u_6)=u_6\cos\Upsilon(s_6,u_6)x'(s_6)+\sin\Upsilon(s_6,u_6)y'(s_6,u_6)=0,$$

$$\begin{aligned}\xi\xi\lambda(s_6,u_6)=\frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2}(s_6,u_6)=u_6(x''(s_6)\cos\Upsilon(s_6,u_6)+2x'(s_6)\sin\Upsilon(s_6,u_6)\Theta_s(s_6,u_6))\\ + (y''(s_6,u_6)\sin\Upsilon(s_6,u_6)+2y'(s_6,u_6)\cos\Upsilon(s_6,u_6)\Upsilon_s(s_6,u_6))\neq 0\end{aligned}$$

ve $\Upsilon_s(s_6,u_6)-a_2(s_6)q(s_6)\neq 0$ ise $\Phi_{\overline{\delta}}(s,u)$ yüzeyi (s_6,u_6) noktasında bir swallowtail olur.

5. Teorem 3.4.6'dan $(s_5,0)\in S_5$ için

$$\xi\lambda(s_5,0)=\frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_5,0)=\overline{\beta}'(s_5)\sin\Upsilon(s_5,0)\neq 0, \quad \Upsilon_s(s_5,0)-a_2(s_5)q(s_5)=0$$

ve $\Upsilon_{su}(s_5,0)\neq 0$ ise $\Phi_{\overline{\delta}}(s,u)$ yüzeyi $(s_5,0)$ noktasında bir cuspidal-cross cap olur.

6. Teorem 3.4.6'dan $(s_6,u_6)\in S_6$ için

$$\xi\lambda(s_6,u_6)=\frac{\partial\lambda}{\partial s}(s_6,u_6)=u_6\cos\Upsilon(s_6,u_6)x'(s_6)+\sin\Upsilon(s_6,u_6)y'(s_6,u_6)\neq 0$$

$$\Upsilon_s(s_6,u_6)-a_2(s_6)q(s_6)=0 \text{ ve } \Upsilon_{su}(s_5,0)\neq 0 \text{ ise } \Phi_{\overline{\delta}}(s,u) \text{ yüzeyi } (s_6,u_6)$$

noktasında bir cuspidal-cross cap olur.

Örnek 6.4.6.8. Frenet-tipi framed eğri olarak,

$$\gamma(s)=(\cos^3 s, \sin^3 s, \cos 2s)$$

astroid eğrisini düşünelim. O halde,

$$\gamma'(s)=(-3\cos^2 s \sin s, 3\sin^2 s \cos s, -2\sin 2s)=5\cos s \sin s\left(-\frac{3}{5}\cos s, \frac{3}{5}\sin s, -\frac{4}{5}\right)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\alpha(s) = 5 \cos s \sin s$$

ve birim regüler bir eğri

$$\bar{v}(s) = \left(-\frac{3}{5} \cos s, \frac{3}{5} \sin s, -\frac{4}{5} \right)$$

şeklindedir. O halde Frenet-tipi framed eğriler için türev formüllerinden,

$$\begin{aligned}\bar{\eta}_1(s) &= (\sin s, \cos s, 0), \\ \bar{\eta}_2(s) &= \left(\frac{4}{5} \cos s, -\frac{4}{5} \sin s, -\frac{3}{5} \right)\end{aligned}$$

olur. Framed eğrilikler ise,

$$p(s) = \frac{3}{5}, \quad q(s) = \frac{4}{5}$$

dir. Şimdi γ Frenet-tipi framed eğrisinin $\bar{\delta}_1$ ve $\bar{\delta}_2$ olacak şekilde iki farklı adjoint eğrisini düşünelim.:

$\bar{\beta}(s) = 1$ için regüler bir adjoint eğri,

$$\bar{\delta}_1(s) = \int_{s_0}^s \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s) = \left(\frac{4}{5} \sin s, \frac{4}{5} \cos s, -\frac{3s}{5} \right).$$

ve $\bar{\beta}(s) = s$ için singüler bir adjoint eğri,

$$\bar{\delta}_2(s) = \int_{s_0}^s \bar{\beta}(s) \bar{\eta}_2(s) = \left(\frac{4s}{5} \sin s + \frac{4}{5} \cos s, \frac{4s}{5} \cos s - \frac{4}{5} \sin s, -\frac{3s^2}{10} \right).$$

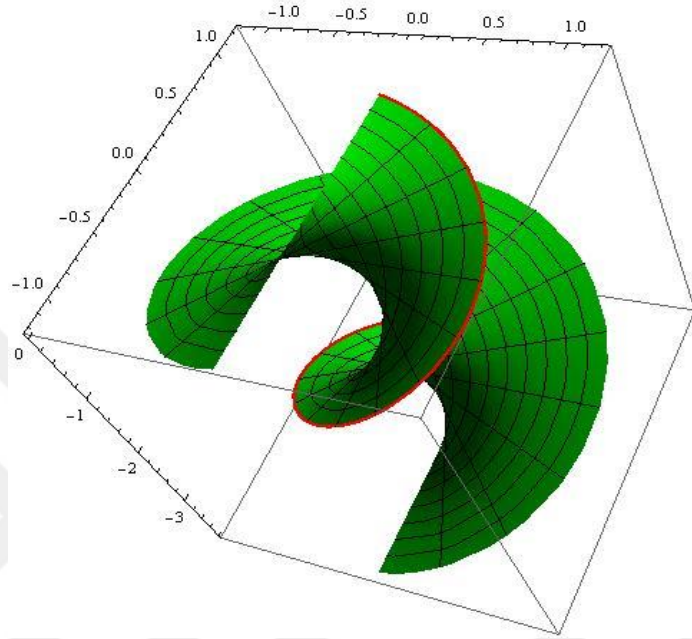
ile verilir. Adjoint eğrileri ilişkin normal, binormal ve genelleştirilmiş normal yüzeyler ise

$$\begin{aligned}M_{1...} \varphi_{\bar{\delta}_1}(s, u) &= \bar{\delta}_1(s) + u(-\bar{\eta}_1(s)), \\ \bar{M}_{1...} \varphi_{\bar{\delta}_2}(s, u) &= \bar{\delta}_2(s) + u(-\bar{\eta}_1(s)), \\ M_{2...} \phi_{\bar{\delta}_1}(s, u) &= \bar{\delta}_1(s) + u\bar{v}(s), \\ \bar{M}_{2...} \phi_{\bar{\delta}_2}(s, u) &= \bar{\delta}_2(s) + u\bar{v}(s), \\ M_{3...} \Phi_{\bar{\delta}_1}(s, u) &= \bar{\delta}_1(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s)), \\ \bar{M}_{3...} \Phi_{\bar{\delta}_2}(s, u) &= \bar{\delta}_2(s) + u(-a_1(s)\bar{\eta}_1(s) + a_2(s)\bar{v}(s))\end{aligned}$$

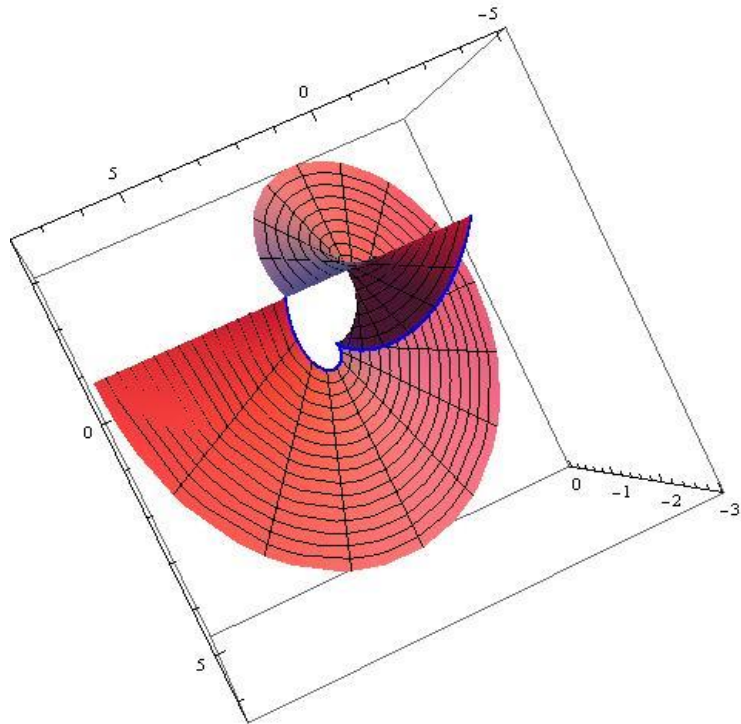
şeklindedir. M_3 ve $\overline{M}_3$ genelleştirilmiş normal yüzeyleri için

$$a_1(s) = \sin s \text{ ve } a_2(s) = \cos s$$

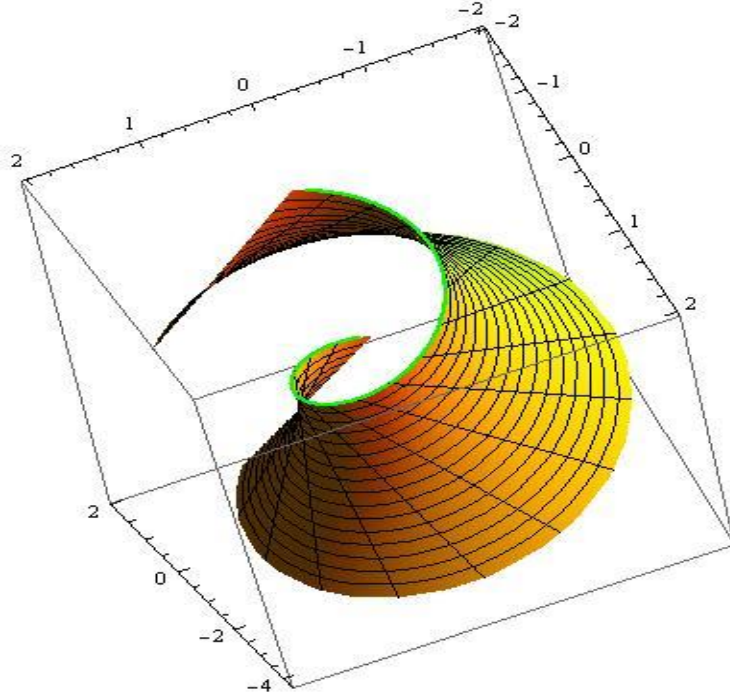
olsun.



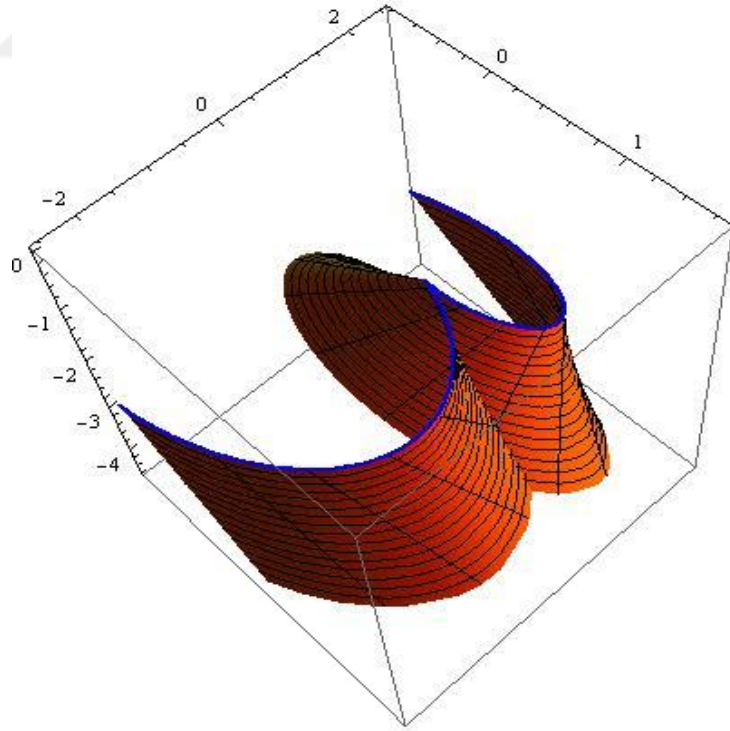
Şekil 6.6. $\overline{\delta}_1(s)$ regüler adjoint eğrisinin M_1 normal yüzeyi.



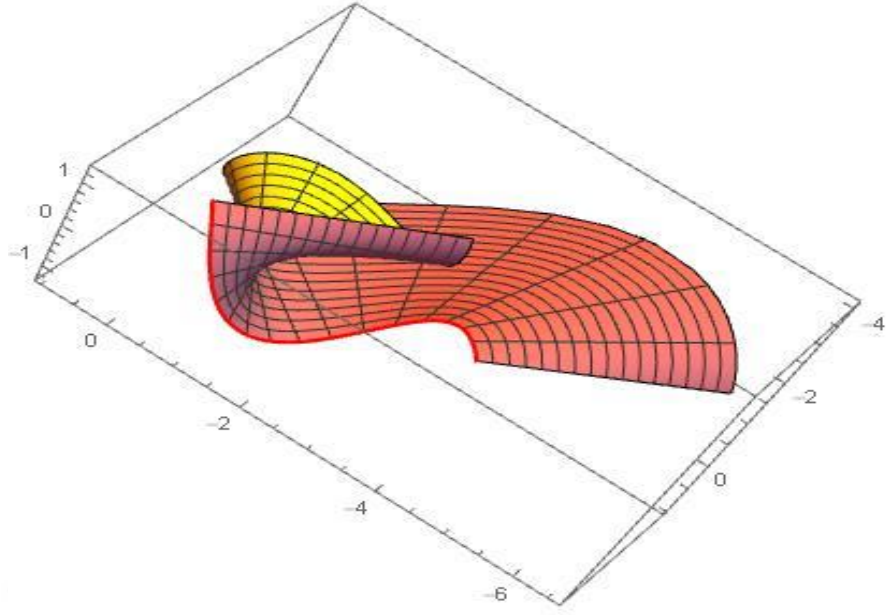
Şekil 6.7. $\bar{\delta}_2(s)$ singüler adjoint eğrisinin $\bar{M}_1$ normal yüzeyi.



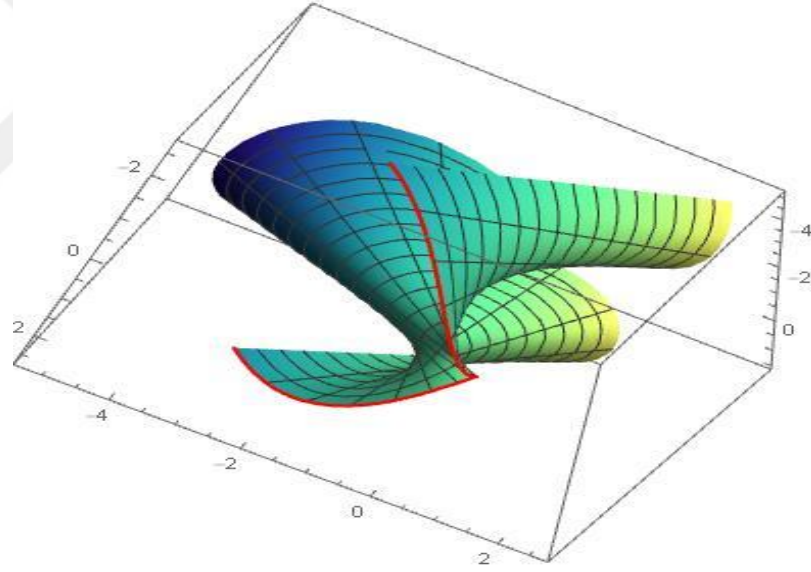
Şekil 6.8. $\bar{\delta}_1(s)$ regüler adjoint eğrisinin M_2 binormal yüzeyi.



Şekil 6.9. $\bar{\delta}_2(s)$ singüler adjoint eğrisinin $\bar{M}_2$ binormal yüzeyi.



Şekil 6.10. $\bar{\delta}_1(s)$ regüler adjoint eğrisinin M_3 genelleştirilmiş normal yüzeyi.



Şekil 6.11. $\bar{\delta}_2(s)$ singüler adjoint eğrisinin $\bar{M}_3$ genelleştirilmiş normal yüzeyi.



KAYNAKLAR

- [1] Carmo, D. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs. New Jersey.
- [2] Gray, A., Abbena, E., ve Salamon, S. (2006). *Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica (3rd ed.)*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC. Boca Raton, FL.
- [3] Rovenski, V. (2000). *Geometry of curves and surfaces with Maple*, Birkhauser.
- [4] Bruce, J. W., ve Giblin, P. J. (1992). *Curves and singularities*. Cambridge Univ. Press.
- [5] Arnol'd, V.I, Varchenko, A.N., ve Gusein-Zade, S.M. (1986). *Singularities of Differentiable maps, volume 1*, Birkhäuser Boston, MA.
- [6] Arnol'd, V.I. (2013). *Singularities of caustics and wave fronts*, Springer Dordrecht.
- [7] Fukunaga, T., ve Takahashi, M. (2013). Existence and uniqueness for Legendre curves. *Journal of Geometry*, 104, 297–307. <https://doi.org/10.1007/s00022-013-0162-6>
- [8] Fukunaga, T., ve Takahashi, M. (2014). Evolutes of fronts in the Euclidean plane. *Journal of Singularities*, 10, 92-107. <https://doi.org/10.5427/jsing.2014.10f>
- [9] Fukunaga, T., ve Takahashi, M. (2015). Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane. *Demonstratio Mathematica*, 48, 147–166. <https://doi.org/10.1515/dema-2015-0015>
- [10] Li, Y., Pei, D., Takahashi, M., ve Yu, H. (2018). Envelopes of Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere. *Quarterly Journal of Mathematics*. 69, 631–653. <https://doi.org/10.1093/qmath/hax056>
- [11] Honda, S., ve Takahashi, M. (2016). Framed curves in the Euclidean space. *Advances in Geometry*, 16, 265-276. <https://doi.org/10.1515/advgeom-2015-0035>
- [12] Fukunaga, T., ve Takahashi, M. (2017). Existence conditions of framed curves for smooth curves. *Journal of Geometry*, 108, 763-774. <https://doi.org/10.1007/s00022-017-0371-5>
- [13] Honda, S. (2018). Rectifying developable surfaces of framed base curves and framed helices. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 78, 273-292. <https://doi.org/10.2969/aspm/07810273>
- [14] Wang, Y., Pei, D., ve Gao, R. (2019). Generic properties of framed rectifying curves. *Mathematics*, 7(1), 37. <https://doi.org/10.3390/math7010037>

- [15] Chen, B.Y. (2003). When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?. *The American Mathematical Monthly*, 110, 147–152. <https://doi.org/10.1080/00029890.2003.11919949>
- [16] Honda, S., ve Takahashi, M. (2020). Bertrand and Mannheim curves of framed curves in the 3-dimensional Euclidean space. *Turkish Journal of Mathematics*. 44, 883–899. <https://doi.org/10.3906/mat-1905-63>
- [17] Fukunaga, T. ve Takahashi, M. (2019). Framed surface in the Euclidean space. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*. 50, 37–65. <https://doi.org/10.1007/s00574-018-0090-z>
- [18] Martins, L., ve Saji, K. (2016). Geometric invariants of cuspidal edges. *Canadian Journal of Mathematics*. 68 (2), 445–462. <https://doi.org/10.4153/CJM-2015-011-5>
- [19] Saji, K. (2017). Normal form of swallowtail and its applications. *International Journal of Mathematics*. 29 (7), 1850046. <https://doi.org/10.1142/S0129167X18500465>
- [20] Izumiya, S., Saji, K., ve Takeuchi, N. (2017). Flat surfaces along cuspidal edges. *Journal of Singularities*, 16, 73–100. <https://doi.org/10.5427/jsing.2017.16c>
- [21] Chen, B.Y., ve Dillen, F. (2005). Rectifying curves as centrodes and extremal curves. *Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica*. 33 (2), 77–90.
- [22] İlarslan, K. (2005). Spacelike normal curves in Minkowski space. *Turkish Journal of Mathematics*. 29(1), 5. <https://journals.tubitak.gov.tr/math/vol29/iss1/5>
- [23] Deshmukh, S., Chen, B.Y., ve Alshamari, S. (2018). On rectifying curves in Euclidean 3-space, *Turkish Journal of Mathematics*., 42 (2), 609-620. <https://doi.org/10.3906/mat-1701-52>
- [24] Doğan Yazıcı, B., Özkaldı Karakuş, S., ve Tosun, M. (2020). Framed normal curves in Euclidean space. In TBLİSİ-MATHEMATICS (pp. 27-37). Sciendo. <https://doi.org/10.2478/9788395793882-003>
- [25] Doğan Yazıcı, B., Özkaldı Karakuş, S., ve Tosun, M. (2021). On the classification of framed rectifying curves in Euclidean space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. <https://doi.org/10.1002/mma.7561>
- [26] Deshmukh, S., Chen, B.Y., ve Turki, N.B. (2018). A differential equations for frenet curves in Euclidean 3-space and its applications. *Romanian Journal of Mathematics and Computer Science*. 8, 1-6.
- [27] Doğan Yazıcı, B., Özkaldı Karakuş, S., Tosun, M. (2022). Framed curves and their applications based on a new differential equation, *International Electronic Journal of Geometry*, 15(1), 47-56. <https://doi.org/10.36890/iejg.875477>
- [28] Choi, J., ve Kim, Y. (2012). Associated curves of a Frenet curve and their applications. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 9116-9124. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.02.064>

- [29] Nurkan, S.K., Güven, İ.A., ve Karacan, M.K. (2019). Characterizations of adjoint curves in Euclidean 3-space. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*. 89(1), 155-161. <https://doi.org/10.1007/s40010-017-0425-y>
- [30] Hacısalihoğlu, H. H. (2000). *Diferensiyel geometri (4. Baskı)*. Ertem Matbaa.
- [31] Özdemir, M. (2020). *Diferansiyel geometri*. Altın Nokta Yayınevi.
- [32] Yüce, S. (2021). *Öklid uzayında diferansiyel geometri (6. Baskı)*. Pegem Akademi Yayıncılık.
- [33] İlarıslan, K., ve Nešović, E. (2008). Some characterizations of osculating curves in the Euclidean spaces. *Demonstratio Mathematica*, 41(4), 931-940. <https://doi.org/10.1515/dema-2008-0421>.
- [34] Bishop, R. L. (1975). There is more than one way to frame a curve. *The American Mathematical Monthly*. 82, 246–251. <https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11993807>
- [35] Koenderink J. (1990). *Solid shape*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [36] Hacısalihoğlu, H.H. (1994), *Diferensiyel geometri (2. Cilt)*. Ankara.
- [37] Millman, R. S., ve Parker, G. D. (1977). *Elements of differential geometry (265 p)*. Englewood Cliffs, New Jersey.
- [38] Blaga, P.A. (2005), *Lectures on the differential geometry of curves and surfaces (237 p)*. Cluj-Napoca.
- [39] Izumiya, S., ve Takeuchi, N. (2003). Geometry of ruled surface. In *Applicable Mathematics in the Golden Age* (pp. 305-338). Narosa Publishing House.
- [40] Izumiya, S., Takeuchi, N. (2001). Singularities of ruled surfaces in $\mathbb{R}^3$. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 130 (1), 1–11. <https://doi.org/10.1017/S0305004100004643>
- [41] Kaya, O., ve Önder, M. (2021). Generalized Normal Ruled Surface of a Curve in the Euclidean 3-Space. *Acta Universitatis Sapientiae, Mathematica*. 13(1), 217-238. <https://doi.org/10.2478/ausm-2021-0013>
- [42] Rutter, J.W. (2000). *Geometry of curves*. Chapman and Hall/CRC.
- [43] Hananoi, S., Ito, N. ve Izumiya, S. (2015). Spherical Darboux images of curves on surfaces. *Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions to Algebra and Geometry*. 56, 575–585. <https://doi.org/10.1007/s13366-015-0240-z>
- [44] Izumiya, S., Saji, K., ve Takahashi, M. (2010), Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space. *Journal of the Mathematical Society of Japan*. 62(3), 789-849, <https://doi.org/10.2969/jmsj/06230789>.
- [45] Izumiya, S., ve Otani, S. (2015). Flat approximations of surfaces along curves. *Demonstratio Mathematica*, 218-241. <https://doi.org/10.1515/dema-2015-0018>

- [46] Takahashi, M. (2015). Legendre curves in the unit spherical bundle and evolutes. *Hokkaido University Preprint Series in Mathematics*. 1071, 1-19. <https://doi.org/10.14943/84215>
- [47] Huang, J., ve Pei, D. (2019). Singularities of non-developable surfaces in three-dimensional Euclidean space. *Mathematics*. 7, 1106. <https://doi.org/10.3390/math7111106>.
- [48] Bülbül, Z. (2022). *Çatılandırılmış bir eğri ile bağlantılı integral eğrileri* [Yüksek lisans tezi]. Yıldız Teknik Üniversitesi



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad :Bahar DOĞAN YAZICI

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2015, Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek lisans** : 2018, Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, (Anadolu Üniv. Ortak)
- **Doktora** : (Halen), Sakarya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik, Geometri

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

- 2018 yılından itibaren Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalında Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Doğan Yazıcı, B., Özkaldı Karakuş, S., ve Tosun, M. (2020). Framed normal curves in Euclidean space. In TBLİSİ-MATHEMATICS (pp. 27-37). Sciendo. <https://doi.org/10.2478/9788395793882-003>
- Doğan Yazıcı, B., Özkaldı Karakuş, S., ve Tosun, M. (2021). On the Classification of Framed Rectifying Curves in Euclidean Space. Mathematical Methods in the Applied Sciences. <https://doi.org/10.1002/mma.7561>
- Doğan Yazıcı, B., Özkaldı Karakuş, S., Tosun, M. (2022). Framed Curves and Their Applications Based on a New Differential Equation, International Electronic Journal of Geometry, 15(1), 47-56. <https://doi.org/10.36890/iejg.875477>

DİĞER ESERLER:

- Doğan Yazıcı, B, İşbilir, Z, Tosun, M. (2022). Spinor representation of framed Mannheim curves. *Turkish Journal of Mathematics*. 46(7), 2690-2700. <https://doi.org/10.55730/1300-0098.3295>
- Doğan Yazıcı, B, Tosun, M. (2022). Multicomponent hybrid numbers: On algebraic properties and matrix representations of hybrid-hyperbolic numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*. 28(1), 26-40. <https://doi.org/10.7546/nntdm.2022.28.1.26-40>
- Doğan Yazıcı, B, Okuyucu, O. Z, Tosun, M. (2022). Electromagnetic curves and Berry phase construction of a polarized light wave along an optical fiber which is a singular curve on S^2 . *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*. 264(45), 169329. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169329>
- Doğan Yazıcı, B, Özkaldı Karakuş, S, Tosun, M. (2022). On framed Tzitzeica curves in Euclidean space. *Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics*. 37(2), 307-319. <https://doi.org/10.22190/FUMI211025021D>
- Okuyucu, O. Z, Doğan Yazıcı, B. (2022). Generalized Bertrand and Mannheim curves in 3D Lie groups. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*. 5(3), 201-209. <https://doi.org/10.33401/fujma.1127839>
- Doğan Yazıcı, B, Okuyucu, O. Z, Tosun, M. (2022). Framed curves in three-dimensional Lie groups and a Berry phase model. *Journal of Geometry and Physics*. 182, 104682. <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2022.104682>
- Doğan Yazıcı, B, Özkaldı Karakuş, S. (2020). A study on spacelike rectifying curves in Minkowski 3-space. In *TBILISI-MATHEMATICS* (pp. 11-26). Sciendo. <https://doi.org/10.2478/9788395793882-002>
- Doğan Yazıcı, B, Özkaldı Karakuş, S, Tosun, M. (2021). Characterizations of framed curves in four-dimensional Euclidean space. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 4(4), 125-131. <https://doi.org/10.32323/ujma.1008148>