$A_w(p,q)(G)$ UZAYI VE ONUN ÇARPANLAR UZAYI

SELİM NUMAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$A_w(p,q)(G)$ UZAYI VE ONUN ÇARPANLAR UZAYI

SELİM NUMAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. A. TURAN GÜRKANLI

SAMSUN - 1998

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 23 / 10 / 1998 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan	**: Prof. Dr. Öner ÇAKAR**
Üye	**: Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU**
Üye	**: Prof. Dr. Ahmet Turan GÜRKANLI**
Üye	**: Prof. Dr. Oktay MUHTAROV**
Üye	**: Doç. Dr. Abdullah ÇAVUŞ**

ONAY:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

17 / 12 / 1998

Prof. Dr. Ferhat ODABAŞ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

$A_w(p,q)(G)$ UZAYI VE ONUN ÇARPANLAR UZAYI

ÖZET

Bu tezin bulgular bölümünün birinci kısmında G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere bir $A_w(p,q)(G)$ uzayı tanımlanarak bu uzay bir norm ile donatıldı. Sonra bu norma ve girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu gösterildi. Daha sonrada bu uzayın diğer bölümlerde kullanılacak temel özellikleri ispatlandı.

Bulgular bölümünün ikinci kısmında $A_w(p,q)(G)$ uzayları arasındaki kapsama özellikleri ve bu uzayların yaklaşık birimleri incelendi.

Üçüncü kısımda ise $A_w(p,q)(G)$ Banach cebirinin idealleri ve regüler maksimal ideal uzayları araştırıldı.

Bulgular bölümünün son kısmında ise $M\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$, $M\left(A_w(p,q)(G)\right)$ $M\left(A_w(p,q)\,,\, L^1_w(G)\right)$ çarpanlar uzayları incelendi.

Anahtar Kelimeler: Fourier dönüşümü , girişim işlemi , karakter grubu.

$A_w(p,q)(G)$ SPACE AND ITS MULTIPLIERS SPACE

ABSTRACT

Let G be a locally compact Abelian group. In the first section of the findings chapters of this thesis an $A_w(p,q)(G)$ space has been introduced. Later, it has been shown that $A_w(p,q)(G)$ is a Banach algebra under convolution. Lastly some properties of the space which are used in the others chapters were proved.

In the second section of the findings chapter, inclusion properties and the approximate identities of these spaces were investigated.

In the third section of the findings chapter the ideals and regular maximal ideals of this space were discussed.

In the final part of the chapter multipliers spaces $M\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$, $M\left(A_w(p,q)(G)\right)$ and $M\left(A_w(p,q)(G), L^1_w(G)\right)$ were studied.

Keywords: Fourier Transform, convolution , character group.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana öneren ve çalışmalarım boyunca yol gösterip,yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer Hocam Sayın Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI' ya teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

Suppf : f fonkiyonunun desteği.

$*$: Girişim işlemi.

$\hat{f}$: f fonksiyonunun Fourier dönüşümü.

$\hat{x}$: x elemanının Gelfand dönüşümü

L_y : Sol öteleme.

R_y : Sağ öteleme.

X_e : X uzayının esas kısmı.

$C_c(G)$: G üzerinde tanımlı, kompakt destekli ve sürekli fonksiyonların uzayı.

$C_0(\Delta(A))$: $\Delta(A)$ üzerinde, sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların kümesi.

M (A,B) : A uzayından B uzayına giden çarpanlar uzayı.

$\hat{G}$: G lokal kompakt Abel grubunun karakter (dual) grubu.

1.GİRİŞ:

Bu tezin giriş kısmında çalışmalar boyunca kullanılacak tanım ve teoremlere, bulgular bölümünde ise yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

Bulgular bölümünün birinci kısmında $1 \leq p,q < \infty$ olmak üzere bir $A_w(p,q)(G)$ uzayı tanımlanıp bu uzay bir norm ile donatılarak bu norma göre Banach cebiri olduğu gösterildi. Yine [23] çalışmasından yararlanılarak bu uzayın ötelemeler altında invaryant olduğu ve ötelemelerin sürekli olduğu ispatlandı. Ayrıca $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L^1_w(G)$ Beurling cebirinde bir Banach ideali olduğu gösterildi.

Bulgular bölümünün ikinci kısmında ise Beurling ağırlık fonksiyonunun değişmesi durumunda $A_w(p,q)(G)$ uzayları arasındaki kapsama özellikleri incelendi. Yine bu kısımda $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ olmak üzere w , Beurling-Domar (kısaca BD.) koşulunu sağlıyorsa $A_w(p,q)(G)$ uzayının Fourier dönüşümüm kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan ve $L^1_w(G)$ uzayında sınırlı bir yaklaşık biriminin varlığı ispatlandı.

Bu tezin bulgular bölümünün üçüncü kısmında ise eğer w , (BD.) koşulunu sağlıyorsa $A_w(p,q)(G)$ uzayının bir $S_w(G)$ uzayı olduğu ve girişim işlemine göre soyut Segal cebiri olduğu ispatlandı. Yine [3] çalışması kullanılarak $A_w(p,q)(G)$ uzayının idealleri ve regüler maksimal idealleri araştırıldı.

Bulgular bölümünün son kısmında ise önce [18] çalışmasından yararlanılarak $Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$ çarpanlar uzayının $A_w(p,q)(G)$ uzayına izometrik izomorf olduğu ispatlandı. Sonra bir $M_w(p,q)(G)$ uzayı tanımlanarak bu uzay bir norm ile donatılıp bu norma göre Banach cebiri olduğu gösterildi. Ayrıca eğer w , (BD.) koşulunu sağlıyorsa $1 < p,q < \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ olmak üzere $M_w(p,q)(G)$ uzayı ile tanımı Bulgular Bölümünün 3.4. kısmında verilen $M_{A_w(p,q)}(G)$ uzaylarının birbirlerine homeomorf olduğu gösterildi. Sonra [25] çalışmasından yararlanılarak $M\left(A_w(p,q)(G)\right)$ çalışıldı. Bu kısmın sonunda ise $M\left(A_w(p,q)(G), L^1_w(G)\right)$ çarpanlar uzayı ile ilgili olarak

$$M\left(A_w(p,q)(G), L^1_w(G)\right) \cong M\left(A_w(p,q)\right) \cong M_w(G)$$

izometrik izomorfizminin varlığı ispatlandı.

Şimdi tezde kullanılan önemli tanım ve teoremler verilerek simgeler tanıtılacaktır.

1.1.TANIM: X topolojik uzayı üzerinde tanımlı ve karmaşık değerli bir f fonksiyonu verildiğinde

$$\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

kümesinin kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve suppf simgesi ile gösterilir ([21], s.39).

1.2.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu $(B, \|.\|_B)$ de G üzerinde tanımlı fonksiyonların bir Banach uzayı olsun. Her f∈B ve x,y∈G için $L_x f(y) = f(x-y)$ şeklinde tanımlanmış $L_x f$ fonksiyonu için $L_x f$ ∈B koşulunu sağlıyorsa B uzayına ötelemeler altında invaryanttır denir. Yine $\|L_x f\|_B = \|f\|_B$ koşulu sağlanıyorsa bu takdirde $(B, \|.\|_B)$ Banach uzayına ötelemeler altında kuvvetli invaryanttır denir [9].

Bu tezde bir G lokal kompakt Abel grubunun $\hat{G}$ (veya Γ) ile gösterilen karakter grubu (dual grup) sık sık kullanılacaktır. Şimdi bu tanımı verelim:

1.3.TANIM: γ ,bir G lokal kompakt Abel grubu üzerinde tanımlı,karmaşık değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her x∈G için $|\gamma(x)| = 1$ ve her x,y∈G için $\gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$ koşulları sağlanıyorsa bu takdirde γ ya G grubunun bir karakteri denir. G nin bütün sürekli karakterlerinin kümesini $\hat{G}$ (veya Γ) ile gösterelim. Bu $\hat{G}$ kümesi her x∈G ve her $\gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ için

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x)\,\gamma_2(x)$$

işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba G nin karakter grubu (veya dual grup) denir ([20], s.6).

1.4.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu olsun. Her x,y∈G için $|\gamma(x)| \neq 0$ ve $\gamma(x+y)=\gamma(x)\gamma(y)$ koşullarını sağlayan G üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sürekli her γ fonksiyonuna G nin genelleştirilmiş karakteri denir ([26], s.89).

Yine G nin her karakterinin genelleştirilmiş karakter olduğu açıktır.

1.5.TANIM: G bir lokal kompakt abel grubu, $\hat{G}$ onun karakter grubu ve $(B,\|.\|_B)$ de G üzerinde tanımlı fonksiyonların bir Banach uzayı olsun. Eğer her f∈B ve $\gamma \in \hat{G}$ için $M_\gamma f \in B$ oluyorsa $(B,\|.\|_B)$ uzayı karakter invaryant ve $\|M_\gamma f\|_B = \|f\|_B$ eşitliği de sağlanıyorsa bu takdirde $(B,\|.\|_B)$ uzayı kuvvetli karakter invaryanttır denir [9].

1.6.TANIM: G bir lokal kompakt Abel grubu olmak üzere G üzerinde negatif olmayan, sıfırdan farklı ve ötelemeler altında invaryant olan her dx regüler ölçümüne G üzerinde bir Haar ölçümü denir.

Her lokal kompakt Abel grubu üzerinde bir Haar ölçümünün varlığı biliniyor ([18], s.55).

Bu çalışmada tanımladığımız ve üzerinde çalıştığımız $A_w(p,q)(G)$ uzayı birimi olmayan ancak yaklaşık birimi olan girişim işlemine göre bir Banach cebiridir. Şimdi bu kavramları tanıtalım:

1.7.TANIM: $(A,\|.\|)$, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde normlu uzay olmak üzere eğer A bir cebirse ve her x,y∈A için

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa A cebirine normlu cebir denir. Yine A cebiri $\|.\|$ normuna göre Banach uzayı ise buna bir Banach cebiri denir ([17], s.4).

Eğer A cebiri birimli ise bu takdirde A ya birimli cebir denir. A cebiri birimli değilse onun yerine yaklaşık birimi olabilir. Şimdi yaklaşık birim tanımını vereceğiz.

1.8.TANIM: Bir A Banach cebiri ve bir $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset$ A ağı verilsin. Eğer her x∈A için

$$\lim_{\alpha}\|e_\alpha x - x\| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ağına A Banach cebirinin sol yaklaşık birimi denir. Yine her $x\in A$ için

$$\lim_{\alpha}\|xe_\alpha - x\| = 0$$

oluyorsa bu takdirde $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ağına A cebirinin sağ yaklaşık birimi denir. Eğer bu iki özellik birden sağlanıyorsa bu zaman $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ağına A nın bir yaklaşık birimi denir ([8], s.2).

Ayrıca her $\alpha\in I$ için $\|e_\alpha\|\leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa bu takdirde $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ağına sınırlı yaklaşık birim denir.

1.9.TANIM: $(A,\|.\|_A)$ bir Banach cebiri olsun. Eğer her $x\in A$ ve $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde

$$\|x-u_1(x)x\|_A<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $u_1(x)\in A$ varsa A sol yaklaşık birimsele sahiptir denir. Benzer şekilde sağ yaklaşık birimselde tanımlanır. Eğer sağ yaklaşık birimsel aynı zamanda sol yaklaşık birimsel ise bu takdirde A Banach cebiri yaklaşık birimsele sahiptir denir [3].

1.10.TANIM: Bir Banach cebirinde her sağ yaklaşık birimsel aynı zamanda sol yaklaşık birimsel ise bu takdirde A Banach cebiri P(r,1) özelliğini sağlıyor denir [3].

1.11.TEOREM(Banach Teoremi): E ve F birer Banach uzayı olsunlar. Eğer E Banach uzayından F Banach uzayına giden f fonksiyonu doğrusal,sürekli,birebir ve örtense bu f fonksiyonu E uzayından F uzayına bir homeomorfizmdir [4].

1.12.TANIM: G bir lokal kompakt Abel grubu olmak üzere G üzerinde tanımlı karmaşık değerli f ve g Borel ölçülebilir fonksiyonları verilsin.

$$\int_G |f(x-y)\, g(y)|\, dy < \infty$$

koşulunu sağlayan f ve g fonksiyonları için girişim işlemi $f * g$ simgesi ile gösterilir ve

$$(f * g)(x) = \int_G f(x-y)\, g(y)\, dy$$

biçiminde tanımlanır ([20], s.3).

Şimdi tez boyunca kullanacağımız ağırlık fonksiyonu (Beurling'in) ve ağırlıklı uzay tanımlarını verelim:

1.13.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere G üzerinde tanımlı,reel değerli bir w fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu w fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu (veya Beurling ağırlık fonksiyonu) denir ([18], s.13).

(i) Her $x \in G$ için $w(x) \geq 1$

(ii) Her $x,y \in G$ için $w(x+y) \leq w(x)\, w(y)$

(iii) w fonksiyonu ölçülebilir ve lokal sınırlıdır (yani G nin her kompakt alt kümesinde sınırlı).

Yine w, ağırlık fonksiyonu olmak üzere bir $\|\cdot\|_{1,w}$ fonksiyonunu

$$\|f\|_{1,w} = \int_G |f(x)|\, w(x)\, dx$$

biçiminde tanımlayalım. Bu takdirde $\|f\|_{1,w} < \infty$ olacak şekildeki f fonksiyonlarının denklik sınıfından oluşan küme $L^1_w(G)$ ile gösterilir. Bu küme $\|\cdot\|_{1,w}$ normuna ve girişim işlemine göre bir Banach cebiridir. Bu cebir Beurling cebiri olarak bilinir ([18], s.13).

Ayrıca w,ağırlık fonksiyonu olmak üzere her $x \in G$ için

$$\sum_{n \geq 1} n^{-2} \log(w(nx)) < \infty$$

koşulu sağlanırsa w ağırlık fonksiyonu Beurling-Domar (kısaca BD.) koşulunu sağlıyor denir.

1.14.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu üzerinde herhangi iki w_1, w_2 ağırlık fonksiyonları verilsin. $w_2 < w_1$ olmasının anlamı, her x∈G için $w_2(x) \leq c\ w_1(x)$ olacak şekilde bir c > 0 sayısının bulunmasıdır. Eğer $w_2 < w_1$ *ve* $w_1 < w_2$ ise w_1 ve w_2 ağırlık fonksiyonları denktir, denir ve bu $w_1 \approx w_2$ şeklinde gösterilir [9].

1.15.TANIM: G bir lokal kompakt Abel grubu ve $\hat{G}$ de onun dual grubu olsun. Herhangi bir $f \in L^1(G)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü $\hat{f}$ ile gösterilir ve $\gamma \in \hat{G}$ olmak üzere

$$\hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)\, \overline{\gamma(x)}\, dx$$

şeklinde tanımlanır ([20], s.8).

Eğer w ağırlık fonksiyonu (BD.) koşulunu sağlıyorsa bu takdirde $L^1_w(G)$ uzayının Fourier dönüşümü kompakt destekli elemanlarının kümesinin $L^1_w(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu biliniyor [7].

1.16.TANIM: X bir lokal kompakt Hausdorff uzay olsun. A(X) , X üzerinde tanımlı,karmaşık değerli ve sürekli fonksiyonların noktasal çarpma işlemine göre bir cebiri olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa A(X) cebirine bir standard cebir denir ([18], s.18).

(i) f∈A(X) bir a∈X noktasında f(a) ≠ 0 olan bir fonksiyon ise bu takdirde a nın bir komşuluğundaki her x noktası için $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ olacak şekilde bir g ∈A(X) vardır.

(ii) Herhangi E⊂X kapalı alt kümesi ve a∈X-E için f (E) = 0 ve f(a) ≠ 0 olacak şekilde bir f ∈ A(X) vardır.

Bu tezde üzerinde çalışılan diğer bir uzay ise Lorentz uzayıdır. Şimdi bu uzayın tanımını ve onun gerekli bazı özelliklerini verelim:

1.17.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu ve μ de onun üzerinde bir Haar ölçümü olsun. Yine f ,G üzerinde tanımlı ,ölçülebilir ve karmaşık değerli bir fonksiyon olmak üzere her y > 0 için

$$\lambda_f\,(y)=\mu\,\{x\in G|\ |f(x)|>y\}$$

biçiminde tanımlanan λ_f fonksiyonuna dağılım (distrubition) fonksiyonu denir. Her t > 0 olmak üzere

$$f^*(t)=\sup\ \{\ y>0|\ \lambda_f(y)>t\ \}$$

şeklinde tanımlanan f^* fonksiyonuna f fonksiyonunun rearrangementi denir. Yine her t > 0 için

$$f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t f^*(x)\,dx$$

biçiminde tanımlanan f^{**} fonksiyonuna ise f fonksiyonunun ortalama fonksiyonu denir [13].

1.18.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu μ de onun üzerinde bir Haar ölçümü olsun. f , G üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere bir $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ fonksiyonunu

$$\|f\|^*_{(p,q)}=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}\left[f^*(t)\right]^q d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} & ,0<p,q<\infty\\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}}f^*(t) & ,0<p\le\infty,\quad q=\infty\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu takdirde $\|f\|^{*}_{(p,q)} < \infty$ olacak şekildeki f fonksiyonlarının denklik sınıfının meydana getirdiği küme L(p,q) ile gösterilir ve Lorentz uzayı olarak adlandırılır [13].

Ayrıca bu L(p,q) uzayının $L^{p}(G)^{*}$ uzayları ile de ilişkisi vardır.Eğer p = q olarak alınırsa,

$$\|f\|^{*}_{(p,p)} = \left(\int_{G} |f(x)|^{p} \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{p}$$

olup $L(p,p)(G) = L^{p}(G)$ elde edilir [13]. Bu ise bilinen $L^{p}(G)$ Lebesgue uzayıdır. L(p,q)(G) uzayında

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\dfrac{q}{p} \displaystyle\int_{0}^{\infty} t^{\frac{q}{p}-1} \left[f^{**}(t)\right]^{q} \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{q}} & ,0 < p,q < \infty \\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & ,0 < p \leq \infty, q = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\|_{(p,q)}$ fonksiyonunun bir norm olduğu ve bu norma göre L(p,q)(G) uzayının bir Banach uzayı olduğu biliniyor [13]. Yine $\|\cdot\|^{*}_{(p,q)}$ ve $\|\cdot\|_{(p,q)}$ fonksiyonları arasında ise $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ olmak üzere,

$$\|f\|^{*}_{(p,q)} \leq \|f\|_{(p,q)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|^{*}_{(p,q)}$$

eşitsizliği vardır [13],[5].

1.19.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu, S(G) kümeside $L^{1}(G)$ uzayının aşağıdaki koşullarını sağlayan bir alt cebiri olsun. Bu takdirde S(G) uzayına Segal cebiri denir ([18], s.126).

(i) S(G) , $L^1(G)$ uzayında heryerde yoğun ve ötelemeler altında invaryanttır. Yani herhangi f $\in$ S(G) ve a $\in$ G için $L_a f \in S(G)$ olur.

(ii) S(G) uzayı $\|.\|_s$ normuna ve girişim işlemine göre Banach cebiridir.

(iii) Herhangi f $\in$S(G) ve a $\in$G için $\|L_a f\|_s = \|f\|_s$ eşitliği vardır.

(iv) Herhangi f $\in$S(G) ve $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her y $\in$U için

$$\|L_y f - f\|_s < \varepsilon$$

olacak şekilde birimin bir U komşuluğu vardır.

Şimdi de tanımlamış olduğumuz $A_w(p,q)(G)$ uzayının ideallerini ve çarpanlar uzayını incelerken kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri verelim:

1.20.TANIM: A bir cebir I da A nın bir alt vektör uzayı olsun. Her x$\in$A için xI $\subset$ I (Ix $\subset$ I) oluyorsa I ya A nın bir sol (sağ) ideali denir. Eğer I hem sol hemde sağ ideal ise buna iki taraflı ideal denir. Yine I $\subset$ A ideali I $\neq$ A koşulunu sağlıyorsa I ya A nın bir has ideali denir. I , A nın bir has ideali olsun. I $\subset$ J olacak şekilde A nın bir J sol (sağ veya iki taraflı) ideali olduğunda I = J veya J =A oluyorsa bu takdirde I ya A nın maksimal ideali denir. Yine her x $\in$ A için xu-x $\in$ I (ux-x $\in$ I) olacak şekilde bir u $\in$ A varsa bu takdirde I idealine Anın bir regüler maksimal ideal uzayı denir ([17], s.4 ve s.7).

A değişmeli bir Banach cebiri olsun. $\Delta(A)$ ile A daki M regüler maksimal ideallerinin kümesini gösterelim. Bu takdirde $\Delta(A)$ ya A nın regüler maksimal ideal uzayı denir ([17], s.69).

1.21.TANIM: $(B,\|.\|_B)$ bir normlu uzay ve $(A,\|.\|_A)$ bir Banach cebiri olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(B,\|.\|_B)$ normlu uzayına $(A,\|.\|_A)$ Banach cebirine göre soyut Segal cebiri denir [3].

(i) B, A nın heryerde yoğun ideali ve $\|.\|_B$ normuna göre bir Banach cebiridir.

(ii) Her f $\in$B için $\|f\|_A \leq M \|f\|_B$ olacak şekilde bir M > 0 sayısı vardır.

(iii) Her f , g $\in$B için $\|fg\|_B \leq c \|f\|_A \|g\|_B$ olacak şekilde bir c > 0 sayısı vardır.

1.22.TEOREM: B , A Banach cebirine göre P(r,1) özelliğini sağlayan bir soyut Segal cebiri olsun.Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) Eğer J , A da kapalı bir ideal ise bu takdirde $J \cap B$ de B de kapalı bir idealdir.

(ii) Eğer I , B de kapalı bir ideal ise bu takdirde $\bar{I}$ kümeside (Buradaki kapanış A uzayındaki topolojiye göredir) A da kapalı olup $I = \bar{I} \cap B$ eşitliği vardır [3].

1.23.TANIM: A değişmeli bir Banach cebiri ve $\Delta(A)$ da onun regüler maksimal ideal uzayını göstersin. Her $x \in A$ elemanı $\Delta(A)$ üzerinde tanımlı

$$\hat{x}(h) = h(x) \quad , \quad (h \in \Delta(A))$$

eşitliği ile verilen bir $\hat{x}$ fonksiyonu tanımlar. Böylece $\hat{x}$ fonksiyonu $\Delta(A)$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $\hat{x}$ fonksiyonu $\Delta(A)$ üzerinde tanımlı,sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların uzayı $C_0(\Delta(\mathrm{A}))$ ya aittir. Bunun sonucu eğer

$$\hat{A} = \{ \hat{x} \mid x \in A \}$$

denirse $\hat{A} \subset C_0(\Delta(A))$ olur. Yine $x \to \hat{x}$ dönüşümü A dan $\hat{A}$ uzayına bir homomorfizmdir. Bu $\hat{x}$ fonksiyonuna x in Gelfand dönüşümü denir ([20], s.263).

1.24.TEOREM(GELFAND TEOREMİ) : A değişmeli bir Banach cebiri olsun. Bu takdirde her $x \in A$ için

$$\lim_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|\hat{x}\|_\infty$$

eşitliği vardır. Burada $\|\hat{x}\|_\infty$ normu $\tau \in \Delta(A)$ olmak üzere

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup_{\tau \in \Delta(A)} |\hat{x}(\tau)|$$

biçiminde tanımlıdır ([17], s.81).

1.25.TANIM: A değişmeli bir Banach cebiri olsun. Eğer A üzerindeki Gelfand dönüşümü birebir ise bu takdirde A cebirine yarı-basit (semisimple) denir ([17], s.81).

Yine biliniyor ki bu değişmeli A Banach cebirinin yarı-basit olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in A$ için $\|\hat{x}\|_\infty = 0$ olduğunda $x = 0$ olmasıdır ([17], s.82).

Şimdi ifade edeceğimiz teorem $A_w(p,q)(G)$ uzayının maksimal ideal uzayını bulmak için bize gerekli olacaktır:

1.26.TEOREM: B , A değişmeli Banach cebiri üzerinde bir soyut Segal cebiri olsun. Bu zaman aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) B nin regüler maksimal ideal uzayı A nın regüler maksimal ideal uzayına homeomorftur.

(ii) B nin yarı-basit (semisimple) olması için gerekli ve yeterli koşul A nın yarı-basit olmasıdır [3].

1.27.TANIM: $(B,\|.\|_B)$ bir Banach uzayı ve $(A,\|.\|_A)$ bir Banach cebiri olmak üzere AxB kümesinden B içine tanımlanan $\otimes$ işlemi aşağıdaki özellikleri sağlarsa B uzayına A üzerinde Banach modülü veya bir Banach A-modülüdür denir ([26], s.21).

i) Her $f,g \in A$ ve her $h,k \in B$ için

$$(f+g)\otimes h = (f \otimes h) + (g \otimes h)$$

$$f \otimes (h+k) = (f \otimes h) + (f \otimes k).$$

ii) Her $f,g \in A$ ve her $h,k \in B$ için

$$(f * g)\otimes h = f \otimes (g \otimes h).$$

(Burada $*$ işlemi A daki çarpma işlemidir.)

iii) Her $f \in A$, $h \in B$ ve $a \in \mathbb{C}$ için

$$a\,(f \otimes h) = (af)\otimes h = f \otimes (ah).$$

iv) Her $f \in A$ ve her $h \in B$ için

$$\|f \otimes h\|_B \le \|f\|_A \, \|h\|_B$$

olur.

Yukarıda tanımlanan ilk üç koşul B nin A cebiri üzerinde bir cebirsel modül olduğunu gösterir.

1.28.TANIM: A bir Banach cebiri B de bir Banach uzayı olmak üzere B bir Banach A-modül olsun.Eğer B, A içine sürekli olarak gömülüyorsa B ye A da bir Banach ideali denir.

1.29.TANIM: V bir Banach A-modül olsun. Bu zaman

$$\{ av \mid a \in A, v \in V \}$$

kümesinin gerdiği uzayın kapanışına V Banach modülünün esas(essential) kısmı denir ve V_e ile gösterilir. Eğer $V = V_e$ oluyorsa bu takdirde V uzayına esas Banach A-modül denir $[19]$.

1.30.TEOREM: A bir Banach cebiri,V bir sol Banach A-modül ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ise A cebirinde sınırlı bir sol yaklaşık birim olsun. Bu takdirde

$$V_e = \overline{AV} = \{ v \in V \mid \lim_{\alpha} U_\alpha v = v \}$$

olur. Böylece $V_e = V$ olması için gerekli ve yeterli koşul her v $\in$V için $\lim_{\alpha} U_\alpha v = v$ olmasıdır ($[8]$. s.92).

Cigler $[6]$ tarafından $S_w = S_w(G)$ uzayı şöyle tanımlandı.

1.31.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere $S_w = S_w(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt cebiri olsun.

(i) S_w , $L^1_w(G)$ uzayında heryerde yoğundur.

(ii) S_w uzayı $\|.\|_{S_w}$ normuna göre bir Banach cebiri olup ötelemeler altında invaryanttır.

(iii) Herhangi $f \in S_w$ ve y $\in$G için

$$\|L_y f\|_{S_w} \leq w(y)\,\|f\|_{S_w}$$

eşitsizliği sağlanır.

(iv) Herhangi $f \in S_w$ ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her y $\in$U için

$$\|L_y f - f\|_{S_w} < \varepsilon$$

olacak şekilde birimin bir U komşuluğu vardır.

(iv) Herhangi $f \in S_w$ için $\|f\|_{1,w} \leq \|f\|_{S_w}$ eşitsizliği vardır.

1.32.TANIM: G bir lokal kompakt Abel grubu olmak üzere M(G) ile G üzerindeki sınırlı Borel ölçümlerinin Banach uzayını göstereceğiz.

Şimdi bir $M_w(G)$ uzayı

$$M_w(G)=\left\{ \mu \in M(G) \mid \int_G w\, d|\mu| < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlansın. Yine herhangi $\mu \in M_w(G)$ için

$$\|\mu\| = \sup\left\{ \frac{\|\mu * f\|_{S_w}}{\|f\|_{1,w}} \,\middle|\, f \in L^1_w(G), f \neq 0 \right\}$$

olmak üzere bir $M_{S_w}(G)$ uzayı da

$$M_{S_w}(G) = \{ \mu \in M_w(G) \mid \|\mu\| \leq c(\mu) \}$$

biçiminde tanımlanır [11].

Yukarıda verilen tanımlar $L^1_w(G)$ uzayından $A_w(p,q)(G)$ uzayına giden çarpanlar uzayı araştırılırken kullanılacaktır.

Yine bu tez boyunca en çok kullanılan kavramlardan birisi de modül homomorfizmlerinin uzayı (veya çarpanlar uzayı) kavramıdır. Şimdi bu tanımı ve bununla ilgili bazı teoremleri verelim:

1.33.TANIM: S bir küme, V ve W da birer sol S-modül olsunlar. Bu takdirde V den W ye giden sürekli ve doğrusal T fonksiyonu verildiğinde her s $\in$S ve v $\in$V için

$$T(vs) = sT(v)$$

özelliği sağlanıyorsa T fonksiyonuna sürekli bir sol S-modül homomorfizmi denir [19]. Benzer şekilde sağ S-modül homomorfizmi de tanımlanır.

1.34.TANIM: V ve W birer sol S-modül olsunlar. Bu takdirde V uzayından W uzayına giden bütün sürekli modül homomorfizmlerinin uzayına çarpanlar (multipliers) uzayı denir ve $Hom_S(V,W)$ veya M(V,W) simgeleri ile gösterilir [19].

1.35.TEOREM: Aşağıdaki özellikler denktir;

(i) $T \in M\left(L^1_w(G), S_w(G)\right)$

(ii) Her $f \in L^1_w(G)$ için $Tf = \mu * f$ olacak şekilde bir tek $\mu \in M_{S_w}(G)$ vardır [11].

1.36.TEOREM: A yaklaşık birime sahip bir Banach cebiri ve W uzayı sol A-modül olsun. A cebirini hem sol hem de sağ A-modül olarak düşünürsek $Hom_A(A, W)$ uzayıda sol A-modül olur. Bu takdirde her $w \in W_e$ elemanına a $\in$A için

$$T_w(a) = a\ w$$

biçiminde T_w operatörü karşılık getirilirse bu eşleme $[Hom_A(A,W)]_e$ ile W_e arsında izometrik modül izomorfizm olup

$$[Hom_A(A, W)]_e \cong W_e$$

yazılır [19].

1.37.TEOREM: $(V,\|.\|)$,Φ cismi üzerinde bir normlu uzay, V^* da V normlu uzayının duali olsun. Eğer $\{x_\alpha^*\}\subset V^*$ ağı $\sup\limits_\alpha \|x_\alpha^*\| \le M$ koşulunu sağlıyorsa bu takdirde $\{x_\alpha^*\}$ ağının

$$\{\ x^* \,|\, x^* \in V^*, \|x^*\| \le M\ \}$$

kümesinin bazı noktalarına yakınsayan bir $\{x_\beta^*\}$ alt ağı vardır ([16], s.258).

1.38.TEOREM: V, Φ üzerinde vektör uzayı olmak üzere $(V, \|.\|_1)$ ve $(V, \|.\|_2)$ normlu uzayları Banach uzayı olacak şekilde $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ normları verilsin. Eğer her $x \in V$ için $\|x\|_1 \le M\ \|x\|_2$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa bu zaman her $x \in V$ için $\|x\|_2 \le m\ \|x\|_1$ olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı vardır ([16], s.190).

1.39.TANIM: G lokal kompakt Abel grubu $\hat{G}$ de onun dual grubu olsun. $L^1(\hat{G})$ uzayının elemanlarının Fourier dönüşümlerinin vektör uzayını A(G) ile gösterelim. Her $f \in L^1(\hat{G})$ olmak üzere $\|\hat{f}\|_A = \|f\|_1$ biçiminde tanımlanan norma göre A(G) uzayı bir Banach uzayıdır. A(G) uzayının topolojik dual uzayı P(G) veya $A'(G)$ ile gösterilirse bu uzayın her elemanına yalancı ölçüm (pseudomeasure) denir ([15], s.97).

1.40.TEOREM: w,(BD.) koşulunu sağlasın. Eğer $S_w(G)$ esas normlu ideal ise herhangi $T \in M(S_w(G))$ verildiğinde her $f \in S_w(G)$ için $Tf = \sigma * f$ olacak şekilde bir tek $\sigma \in A'(G)$ vardır [25].

1.41.TEOREM: Eğer w, (BD.) koşulunu sağlıyorsa ve her $f \in S_w(G)$ için

$$\|L_y f\|_{S_w} \approx w(y)$$

ise bu takdirde

$$M\left(S_w(G), L_w^1(G)\right) \cong M\left(S_w(G)\right) \cong M(w)$$

olur [25].

2.LİTERATÜR ÖZETİ

G lokal kompakt Abel grubu ve $1 \leq p,q < \infty$ olmak üzere [5] ve [23] çalışmalarında bir $A(p,q)(G)$ uzayı tanımlanarak bunun özellikleri incelendi. Bulgular bölümünün birinci kısmında bu çalışmalardan yararlanılarak bir $A_w(p,q)(G)$ uzayı tanımlanıp bazı özellikleri çalışıldı.

Bulgular bölümünün ikinci kısmında w ağırlık fonksiyonunun değişmesi durumunda [10] çalışmasındaki metod kullanılarak $A_w(p,q)(G)$ uzayları arasındaki kapsama özellikleri incelendi. Yine [22] çalışmasından yararlanılarak da bu uzayın yaklaşık birimleri araştırıldı.

Burnham [3] çalışmasında soyut Segal cebirlerinin bazı koşullar altında ideal ve regüler maksimal ideal uzaylarını inceledi. Bulgular bölümünün üçüncü kısmında $A_w(p,q)(G)$ uzayının bir soyut Segal cebiri olduğu gösterilip [3] çalışmasından yararlanılarak bu uzayın ideal ve regüler maksimal ideal uzayları incelendi.

Rieffel [19] çalışmasında, A Banach cebiri , W da A üzerinde Banach modülü olmak üzere M (A,W) çarpanlar uzayını inceledi. Bulgular bölümünün son kısmında bundan yararlanılarak $M\left(L_w^1(G), A_w(p,q)(G)\right)$ çarpanlar uzayı incelendi. Yine bu kısımda [5] çalışmasından yararlanılarak bir $M_w(p,q)(G)$ uzayı tanımlanıp bu uzayın Bulgular Bölümünün 3.4.kısmında tanımlanan $M_{A_w(p,q)}(G)$ çarpanlar uzayına homeomorf olduğu gösterildi. Sonra [25] çalışmasından yararlanılarak $M\left(A_w(p,q)(G)\right)$ ve $M\left(A_w(p,q)(G), L_w^1(G)\right)$ çarpanlar uzayları çalışıldı.

3.MATERYAL VE METOD

Bulgular bölümünün ilk kısmında [5] çalışmasındaki metod kullanılarak $A_w(p,q)(G)$ uzayı tanımlandı. İkinci kısımda w ağırlık fonksiyonu olmak üzere [10] çalışmasındaki metodlar kullanılarak $A_w(p,q)(G)$ uzayları arasındaki kapsama özellikleri araştırıldı. Bulgular bölümünün üçüncü kısmında [3] çalışmasındaki metodlar kullanılarak $A_w(p,q)(G)$ uzayının idealleri ve regüler maksimal ideal uzayları bulundu. Son kısımda ise [19] çalışmasındaki metodlar kullanılarak $M\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$ ve [25] çalışmasındaki metodlar kullanılarak $M\left(A_w(p,q)(G)\right)$ ve $M\left(A_w(p,q)(G), L^1_w(G)\right)$ çarpanlar uzayı incelendi.

4.BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez boyunca G bir lokal kompakt Abel grubu Γ (veya $\hat{G}$) onun dual (karakter) grubu olarak alınacaktır. Yine μ ise G üzerindeki bir Haar ölçümünü gösterecektir.

4.1. $A_w(p,q)(G)$ UZAYI

4.1.1.TANIM: Bir $A_w(p,q)(G)$ kümesini $1 \le p,q < \infty$ olmak üzere

$$A_w(p,q)(G) = \{ f \in L^1_w(G) \,|\, \hat{f} \in L(p,q)(\Gamma) \}$$

şeklinde tanımlayalım.

4.1.2.ÖNERME: $A_w(p,q)(G)$ uzayı $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

İSPAT: Herhangi f,g $\in A_w(p,q)(G)$ alalım. Buradan f,g $\in L^1_w(G)$ ve $\hat{f}, \hat{g} \in L(p,q)(\Gamma)$ olur. $L^1_w(G)$, $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzayı olduğundan f+g $\in L^1_w(G)$ ve $L(p,q)(\Gamma)$ uzayı da $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzayı olduğundan [13], $\hat{f} + \hat{g} \in L(p,q)(\Gamma)$ olup $A_w(p,q)(G)$ kümesinin tanımından dolayı f + g $\in A_w(p,q)(G)$ olur. Yine herhangi f $\in A_w(p,q)(G)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için f$\in$ $L^1_w(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olup $L^1_w(G)$ vektör uzayı olduğundan $\lambda f \in L^1_w(G)$ ve $L(p,q)(\Gamma)$ vektör uzayı olduğundan $\lambda\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olup $\lambda f \in A_w(p,q)(G)$ bulunur. O halde $A_w(p,q)(G)$ kümesi toplama ve skalerle çarpma işlemine göre kapalı olup vektör uzayı özelliklerinin sağlandığını göstermek kolaydır.

Şimdi bu vektör uzayı üzerine f $\in A_w(p,q)(G)$ olmak üzere

$$\|f\|_{A_w} = \|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)}$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon iki normun toplamı olduğundan bir norm olup $\left(A_w(p,q)(G), \|\cdot\|_{A_w}\right)$ bir normlu uzay olur.

4.1.3.ÖNERME: $A_w(p,q)(G)$ uzayı $\|\cdot\|_{A_w}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İSPAT: $A_w(p,q)(G)$ normlu uzayında herhangi bir $(f_n)_{n\in N}$ Cauchy dizisi verilsin. Cauchy dizisi tanımı gereğince herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m,n \geq n_0$ için

$$\|f_n - f_m\|_{A_w} = \|f_n - f_m\|_{1,w} + \|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{(p,q)} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısı vardır. Buradan $\|f_n - f_m\|_{1,w} < \varepsilon$ ve $\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_{(p,q)} < \varepsilon$ bulunur. Bu ise $(f_n)_{n\in N}$ dizisinin $L^1_w(G)$ ve $(\hat{f}_n)$ dizisinin de $L(p,q)(\Gamma)$ uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $L^1_w(G)$ ve $L(p,q)(\Gamma)$ uzayları Banach uzayı olduklarından $(f_n)_{n\in N}$ dizisi $L^1_w(G)$ nin bir f$\in L^1_w(G)$ ve $L(p,q)(\Gamma)$ nın bir g$\in L(p,q)(\Gamma)$ elemanına yakınsar. Böylece verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için her $n \geq n_1$ olduğunda

$$\|f_n - f\|_{1,w} \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.1.1.)$$

olacak şekilde $n_1 \in N$ sayısı ve her $n \geq n_2$ olduğunda

$$\|\hat{f}_n - g\|_{(p,q)} \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.1.2.)$$

olacak şekilde bir $n_2 \in N$ sayısı vardır. Yine (4.1.1.) eşitsizliği kullanılırsa

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_{\infty} \leq \|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - f\|_{1,w} \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

olup

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.1.3.)$$

bulunur. Öte yandan q < ∞ olmak üzere her $f \in L(p,q)(\Gamma)$ için

$$\|f\|^{*}_{(p,\infty)} \leq \|f\|^{*}_{(p,q)} \qquad (4.1.4.)$$

eşitsizliği biliniyor [13]. Ayrıca her $f \in L(p,q)(\Gamma)$ için

$$\|f\|^{*}_{(p,q)} \leq \|f\|_{(p,q)} \qquad (4.1.5.)$$

eşitsizliği de biliniyor [5]. O halde (4.1.4.) ve (4.1.5.) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$\|f\|^{*}_{(p,\infty)} \leq \|f\|^{*}_{(p,q)} \leq \|f\|_{(p,q)} \qquad (4.1.6.)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece her $n \geq n_2$ için

$$\left\|\hat{f}_n - g\right\|^{*}_{(p,\infty)} \leq \left\|\hat{f}_n - g\right\|_{(p,q)} \leq \varepsilon$$

olduğundan $\left\|\hat{f}_n - g\right\|^{*}_{(p,\infty)} \leq \varepsilon$ bulunur. Yani,

$$\left\|\hat{f}_n - g\right\|^{*}_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(\hat{f}_n - g\right)^{*}(t) \leq \varepsilon$$

olur. Halbuki

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(\hat{f}_n - g\right)^{*}(t) = \sup_{y>0} y \left[\lambda_{\hat{f}_n - g}(y)\right]^{\frac{1}{p}}$$

olduğundan [13], $\sup\limits_{y>0} y\left[\lambda_{\hat{f}_n-g}(y)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$ olup buradan her y > 0 için $\lambda_{\hat{f}_n-g}(y) \leq \varepsilon$ yazılır. Böylece her y > 0 ve her $n \geq n_0$ için

$$\lambda_{\hat{f}_n-g}(y) = \mu\left(\left\{x \in \Gamma \mid \left|\hat{f}_n(x)-g(x)\right| > y\right\}\right) \leq \varepsilon$$

olur. Bu ise $(\hat{f}_n)$ dizisinin ölçüm içinde $g \in L(p,q)(\Gamma)$ elemanına yakınsaması demektir. O halde $(\hat{f}_n)$ dizisinin g fonksiyonuna hemen hemen heryerde (h.h.h.) yakınsayan bir $(\hat{f}_{n_k})$ alt dizisi vardır [12]. Dolayısıyla $(\hat{f}_{n_k})$ alt dizisinin g fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini A ile gösterirsek $\mu(A) = 0$ olur. O halde aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her x ∈G-A için her $n_k \geq m_1$ olduğunda

$$\left|\hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.1.7.)$$

olacak şekilde bir $m_1 \in N$ sayısı vardır.

Yine $(f_n)_{n\in N}$ dizisi $L^1_w(G)$ uzayında Cauchy dizisi olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ ve her $n, n_k \geq m_2$ olduğunda

$$\left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{1,w} \leq \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4.1.8.)$$

olacak şekilde bir $m_2 \in N$ sayısı vardır. Şimdi $m_0 = mak\,\{n_1, m_1, m_2\}$ diyelim ve n, n_k sayılarını $n, n_k \geq m_0$ olacak şekilde seçerek sabitleştirelim. O halde her x ∈G-A için

$$\left|\hat{f}(x) - g(x)\right| = \left|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x) + \hat{f}_n(x) - \hat{f}_{n_k}(x) + \hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right|$$

$$\leq \left|\hat{f}(x) - \hat{f}_n(x)\right| + \left|\hat{f}_n(x) - \hat{f}_{n_k}(x)\right| + \left|\hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right|$$

$$\leq \left\|\hat{f}_n - \hat{f}\right\|_{\infty} + \left\|\hat{f}_n - \hat{f}_{n_k}\right\|_{\infty} + \left|\hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right|$$

$$\leq \left\|f_n - f\right\|_{1,w} + \left\|f_n - f_{n_k}\right\|_{1,w} + \left|\hat{f}_{n_k}(x) - g(x)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

olup böylece h.h.h. $\hat{f}(x) = g(x)$ elde edilir. Yine $L(p,q)(\Gamma)$ uzayının elemanları denklik sınıfından oluştuğu için $\hat{f} = g$ olur. Buradan $k_0 = mak\,\{n_1, n_2\}$ dersek her $n \geq k_0$ olduğunda

$$\left\|f_n - f\right\|_{A_w} = \left\|f_n - f\right\|_{1,w} + \left\|\hat{f}_n - \hat{f}\right\|_{(p,q)} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

elde edilir. O halde $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

4.1.4.TEOREM: $A_w(p,q)(G)$ uzayı girişim işlemine göre bir Banach cebiridir.

İSPAT: $A_w(p,q)(G)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu 4.1.4.Önermede gösterilmişti. Şimdi herhangi f,g $\in A_w(p,q)(G)$ alalım. Buradan f,g $\in L^1_w(G)$ ve $\hat{f}, \hat{g} \in L(p,q)(\Gamma)$ yazılır. $L^1_w(G)$ girişim işlemine göre Banach cebiri olduğundan [18],

$$\left\|f * g\right\|_{1,w} \leq \left\|f\right\|_{1,w} \left\|g\right\|_{1,w} \qquad (4.1.9.)$$

eşitsizliği yazılır. Eğer $A = \left\|\hat{f}\right\|_{\infty}$ dersek,

$$\lambda_{\hat{f}\hat{g}}(y) = \mu\left(\left\{x \in \Gamma \;\middle|\; \left|\hat{f}(x)\,\hat{g}(x)\right| > y\right\}\right)$$

$$\leq \mu\left(\left\{x \in \Gamma \;\middle|\; \left|\left(\sup \hat{f}(x)\right)\hat{g}(x)\right| > y\right\}\right)$$

$$= \mu\left(\left\{x \in \Gamma \mid \left|(A\,\hat{g})(x)\right| > y\right\}\right) = \lambda_{A\hat{g}}(y)$$

olur. Bunun sonucu,

$$\left(\hat{f}\,\hat{g}\right)^{*}(t) = \sup\left\{y > 0 \mid \lambda_{\hat{f}\hat{g}}(y) > t\right.$$

$$\leq \sup\left\{y > 0 \mid \lambda_{A\hat{g}}(y) > t\right\} = (A\,\hat{g})^{*}(t) = A(\hat{g})^{*}(t)$$

ve buradan da

$$\left(\hat{f}\,\hat{g}\right)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_{o}^{t}\left(\hat{f}\,\hat{g}\right)^{*}(t)\,dx \leq \frac{1}{t}\int_{0}^{t} A(\hat{g})^{*}(t)\,dx$$

$$= A\,\frac{1}{t}\int_{0}^{t}(\hat{g})^{*}(x)dx = A(\hat{g})^{**}(t)$$

bulunur. Böylece,

$$\left\|\hat{f}\,\hat{g}\right\|_{(p,q)} = \left(\frac{q}{p}\int_{0}^{\infty} t^{\frac{q}{p}-1}\left[\left(\hat{f}\,\hat{g}\right)^{**}(t)\right]^{q} dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq A\left(\frac{q}{p}\int_{0}^{\infty} t^{\frac{q}{p}-1}\left[(\hat{g})^{**}(t)\right]^{q}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= A\,\|\hat{g}\|_{(p,q)} = \sup_{x\in\Gamma}\left|\hat{f}(x)\right|\,\|\hat{g}\|_{(p,q)}$$

$$= \left\|\hat{f}\right\|_{\infty}\|\hat{g}\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{1,w}\,\|\hat{g}\|_{(p,q)} \qquad (4.1.10.)$$

elde edilir. Eğer (4.1.9.) ve (4.1.10.) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa

$$\|f*g\|_{A_w} = \|f*g\|_{1,w} + \|\hat{fg}\|_{(p,q)}$$

$$\leq \|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w} + \|f\|_{1,w}\|\hat{g}\|_{(p,q)}$$

$$= \|f\|_{1w}\left(\|g\|_{1,w} + \|\hat{g}\|_{(p,q)}\right)$$

$$\leq \left(\|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)}\right)\left(\|g\|_{1,w} + \|\hat{g}\|_{(p,q)}\right)$$

$$= \|f\|_{A_w}\,\|g\|_{A_w} \tag{4.1.11.}$$

çıkar. Banach cebiri olması için gerekli diğer koşulların ispatı kolaydır. O halde $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir Banach cebiridir.

4.1.5.ÖNERME: a) $A_w(p,q)(G)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır.

b) G lokal kompakt Abel grubundan $A_w(p,q)(G)$ uzayına giden $x \to L_x f$ fonksiyonu süreklidir.

İSPAT: a) Herhangi $f \in A_w(p,q)(G)$ ve $x \in G$ alalım. $f \in A_w(p,q)(G)$ olduğundan $f \in L^1_w(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olur. Yine,

$$\|L_x f\|_{1,w} = \int_G |L_x f(y) w(y)|\, dy$$

olup eğer $u = y - x$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\|L_x f\|_{1,w} = \int_G |f(y-x) w(y)|\, dy = \int_G |f(u) w(u+x)|\, du$$

$$\leq \int_G |f(u)| w(u) w(x) dx \leq w(x) \int_G |f(u) w(u)| du$$

$$= w(x) \; \|f\|_{1,w}$$

bulunur. Öte yandan başta aldığımız x elemanını sabitleştirdiğimiz için $w(x) < \infty$ ve

$$\|L_x f\|_{1,w} \leq w(x) \, \|f\|_{1,w} < \infty \qquad (4.1.12.)$$

olup $L_x f \in \; L^1_w(G)$ bulunur. Yine $L_x f \in L(p,q)(\Gamma)$ ve

$$\|\widehat{L_x f}\|_{(p,q)} = \|\hat{f}\|_{(p,q)} \qquad (4.1.13.)$$

olduğu $[5]$ gösterildi. Böylece (4.1.12.) ve (4.1.13.) ifadelerinden dolayı

$$\|L_x f\|_{A_w} = \|L_x f\|_{1,w} + \|\widehat{L_x f}\|_{(p,q)}$$

$$\leq w(x) \; \|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)} < \infty$$

olduğundan $L_x f \in A_w(p,q)(G)$ olup $A_w(p,q)(G)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır.

b) G lokal kompakt Abel grubu Γ da onun karakter grubu olsun. Bir A(p,q)(G) vektör uzayı

$$A(p,q)(G) = \; \{ f \in L^1(G) \,|\, \hat{f} \in L(p,q)(\Gamma) \; \} \quad \text{ve}$$

$$\|f\|_{A(p,q)} = \|f\|_1 + \|\hat{f}\|_{(p,q)}$$

olmak üzere A(p,q)(G) nin bir Segal cebiri olduğu biliniyor [24].Bu nedenle G grubundan A(p,q)(G) uzayına giden $x \to L_x f$ fonksiyonu süreklidir. O halde $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her x ∈ U için

$$\|L_x f - f\|_{A(p,q)} = \|l_x f - f\|_1 + \|\widehat{L_x f} - \hat{f}\|_{(p,q)} < \varepsilon$$

olacak şekilde G grubunun biriminin bir U komşuluğu vardır. Dolayısıyla aynı $\varepsilon > 0$ ve U komşuluğu için her x ∈ U olduğunda

$$\|\widehat{L_x f} - \hat{f}\|_{(p,q)} < \varepsilon \tag{4.1.14.}$$

yazılır. Böylece G grubundan $L(p,q)(\Gamma)$ uzayına giden $x \to L_x f = M_{-x}\hat{f}$ fonksiyonu süreklidir.

Şimdi herhangi f $\in A_w(p,q)(G)$ alalım. O halde f $\in L^1_w(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olur. G grubundan $L^1_w(G)$ uzayına giden $x \to L_x f$ fonksiyonunun sürekliliği [10], çalışmasından biliniyor. Bu nedenle herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her x $\in U_1$ için

$$\|L_x f - f\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1.15.}$$

olacak şekilde birimin bir U_1 komşuluğu vardır. Yine G grubundan $L(p,q)(\Gamma)$ uzayına giden $x \to L_x f = M_{-x}\hat{f}$ sürekli olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her x $\in U_2$ için

$$\|\widehat{L_x f} - \hat{f}\|_{(p,q)} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1.16.}$$

olacak şekilde birimin bir U_2 komşuluğu vardır. Eğer $U_3 = U_1 \cap U_2$ denir ve (4.1.15.) ile (4.1.16.) eşitsizlikleri kullanılırsa aynı $\varepsilon > 0$ ve her $x \in U_3$ için

$$\|L_x f - f\|_{A_w} = \|L_x f - f\|_{1,w} + \left\|\widehat{L_x f} - \hat{f}\right\|_{(p,q)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

4.1.6.ÖNERME: $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayında bir Banach idealidir.

İSPAT: Herhangi $f \in A_w(p,q)(G)$ ve $g \in L^1_w(G)$ alalım. $f \in A_w(p,q)(G)$ ise $f \in L^1_w(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olur. Dolayısıyla $f,g \in L^1_w(G)$ ve $L^1_w(G)$ girişim işlemine göre Banach cebiri olduğundan,

$$\|f * g\|_{1,w} \le \|f\|_{1,w} \|g\|_{1,w} \tag{4.1.17.}$$

eşitsizliğinin varlığı biliniyor. Yine 4.1.4.Teoremden dolayı

$$\left\|\hat{f}\,\hat{g}\right\|_{(p,q)} \le \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)} \|g\|_{1,w} \tag{4.1.18.}$$

eşitsizliği de biliniyor. Böylece (4.1.17.) ve (4.1.18.) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{A_w} &= \|f * g\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\,\hat{g}\right\|_{(p,q)} \\
&\le \|f\|_{1,w} \|g\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)} \|g\|_{1,w} \\
&= \left(\|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{(p,q)} \right) \|g\|_{1,w} \\
&= \|f\|_{A_w} \|g\|_{1,w}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu ise istenendir.

4.1.7.ÖNERME: Her $f \in A_w(p,q)(G)$ için $f \neq 0$ olmak üzere

$$c(f)\, w(x) \le \|L_x f\|_{A_w} \le w(x) \|f\|_{A_w}$$

olacak şekilde c(f) > 0 sayısı ve

$$c\, w(x) \le \|L_x\|_{A_w} \le w(x)$$

olacak şekilde bir c > 0 sayısı vardır.

İSPAT: 4.1.5.Önermeden dolayı

$$\|L_x f\|_{A_w} = \|L_x f\|_{1,w} + \|\widehat{L_x f}\|_{(p,q)}$$

$$\le w(x)\, \|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)}$$

$$\le w(x)\, \|f\|_{1,w} + w(x) \|\hat{f}\|_{(p,q)}$$

$$= w(x) \|f\|_{A_w} \qquad (4.1.19.)$$

bulunur. Öte yandan $c(f)\, w(x) \le \|L_x f\|_{p,w}$ olacak şekilde bir c(f) >0 sayısının varlığı gösterildi [10]. Bu p = 1 için de doğru olduğundan $c(f)\, w(x) \le \|L_x f\|_{1,w}$ olacak şekilde bir c(f) > 0 sayısı bulunur. Buradan

$$c(f)\, w(x) \le c(f)\, w(x) + \|\hat{f}\|_{(p,q)}$$

$$\le \|L_x f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)}$$

$$= \|L_x f\|_{1,w} + \|\widehat{L_x f}\|_{(p,q)} = \|L_x f\|_{A_w}$$

yani

$$c(f)\, w(x) \le \|L_x f\|_{A_w} \tag{4.1.20.}$$

elde edilir. Eğer (4.1.19.) ve (4.1.20.) eşitsizlikleri birleştirilirse

$$c(f)\, w(x) \le \|L_x f\|_{A_w} \le w(x)\, \|f\|_{A_w} \tag{4.1.21.}$$

çıkar. Ayrıca (4.1.21.) eşitsizliğinin sağ yanı kullanılırsa,

$$\|L_x\|_{A_w} = \sup_{\|f\|_{A_w}=1} \frac{\|L_x f\|_{A_w}}{\|f\|_{A_w}} \le w(x) \tag{4.1.22.}$$

elde edilir. Eğer $c = \sup \left\{ c(f) \mid \|f\|_{A_w} = 1 \right.$ denir ve (4.1.21.) eşitsizliği de kullanılırsa,

$$c\, w(x) \le \|L_x f\|_{A_w} \le \sup_{f \ne 0} \frac{\|L_x f\|_{A_w}}{\|f\|_{A_w}} = \|L_x\|_{A_w} \tag{4.1.23.}$$

olup (4.1.22.) ve (4.1.23.) eşitsizliklerinden dolayı

$$c\; w(x) \le \|L_x\|_{A_w} \le w(x)$$

elde edilir.

4.2.KAPSAMA ÖZELLİKLERİ VE YAKLAŞIK BİRİMLER

4.2.1.ÖNERME: $\|\cdot\|_{w_1}$ ile $A_{w_1}(p,q)(G)$ üzerindeki , $\|\cdot\|_{w_2}$ ile de $A_{w_2}(p,q)(G)$ üzerindeki normu gösterelim. Eğer $A_{w_1}(p,q)(G) \subset A_{w_2}(p,q)(G)$ ise bu takdirde her $f \in A_{w_1}(p,q)(G)$ için $\|f\|_{w_2} \le c\ \|f\|_{w_1}$ olacak şekilde bir c > 0 sayısı vardır.

İSPAT: $A_{w_1}(p,q)(G)$ uzayı üzerinde

$$|||\cdot||| = \|\cdot\|_{w_1} + \|\cdot\|_{w_2}$$

fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyonun norm olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi $A_{w_1}(p,q)(G)$ uzayının bu $|||\cdot|||$ normuna göre bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $(f_n)_{n\in N}$ dizisi $|||\cdot|||$ normuna göre $A_{w_1}(p,q)(G)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m,n \ge n_0$ için $|||f_n - f_m||| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısı vardır. Buradan

$$|||f_n - f_m||| = \|f_n - f_m\|_{w_1} + \|f_n - f_m\|_{w_2} < \varepsilon$$

olup $\|f_n - f_m\|_{w_1} < \varepsilon$ ve $\|f_n - f_m\|_{w_2} < \varepsilon$ elde edilir. Böylece $(f_n)_{n\in N}$ dizisi $\|\cdot\|_{w_1}$ normuna göre $A_{w_1}(p,q)(G)$ ve $\|\cdot\|_{w_2}$ normuna göre de $A_{w_2}(p,q)(G)$ uzayında birer Cauchy dizisi olurlar. Öte yandan $A_{w_1}(p,q)(G)$ ve $A_{w_2}(p,q)(G)$ uzayları Banach uzayı olduklarından $(f_n)_{n\in N}$ dizisi $A_{w_1}(p,q)(G)$ uzayında bir $f \in A_{w_1}(p,q)(G)$ fonksiyonuna ve $A_{w_2}(p,q)(G)$ uzayında da bir $g \in A_{w_2}(p,q)(G)$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece yukarıda verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \ge n_1$ olduğunda

$$\|f_n - f\|_{w_1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in N$ sayısı vardır. Eğer $\|.\|_{1,w_1} \leq \|.\|_{w_1}$ eşitsizliği kullanılırsa aynı $n_1 \in N$ sayısı için her $n \geq n_1$ olduğunda

$$\|f_n - f\|_{1,w_1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Yine aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_2$ olduğunda

$$\|f_n - g\|_{w_2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in N$ sayısı vardır. Buradan da $\|.\|_{1,w_2} \leq \|.\|_{w_2}$ eşitsizliği kullanılırsa aynı $n_2 \in N$ sayısı ve her $n \geq n_2$ için

$$\|f_n - g\|_{1,w_2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. Eğer $n_0 = mak\{n_1, n_2\}$ dersek ve bir $n \geq n_0$ sayısını sabitleştirirsek her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|f - g\|_{1,w_1} = \|f - f_n + f_n - g\|_{1,w_1} \leq \|f - f_n\|_{1,w_1} + \|f_n - g\|_{1,w_1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olup buradan hemen hemen heryerde f = g elde edilir. Eğer $A_{w_1}(p,q)(G)$ uzayının elemanlarının denklik sınıfi olduğu düşünülürse f = g olur. Dolayısıyla her $n \geq n_0$ için

$$\|f_n - f\| = \|f_n - f\|_{w_1} + \|f_n - f\|_{w_2}$$

$$=\|f_n - f\|_{w_1} + \|f_n - g\|_{w_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. O halde $(f_n)_{n\in N}$ dizisi $|||.|||$ normuna göre f $\in A_{w_1}(p,q)(G)$ fonksiyonuna yakınsadığından $A_{w_1}(p,q)(G)$ uzayı Banach uzayı olur. Şimdi $(A_{w_1}(p,q)(G),|||.|||)$ uzayından $(A_{w_1}(p,q)(G),\|.\|_{w_1}$ uzayına giden I(f) = f birim fonksiyonunu alalım. I birim fonksiyonunun birebir,örten ve doğrusal olduğu açıktır. Ayrıca $\|I(f)\|_{w_1} = \|f\|_{w_1} \le |||f|||$ olduğundan I fonksiyonu süreklidir. O halde $(A_{w_1}(p,q)(G),|||.|||)$ ve $(A_{w_1}(p,q)(G),\|.\|_{w_1})$ birer Banach uzayı ve I birim fonksiyonu birebir, örten ve sürekli bir dönüşüm olduğundan Banach teoreminden [4], dolayı I fonksiyonu bir homeomorfizmdir. Böylece $(A_{w_1}(p,q)(G),|||.|||)$ uzayı ile $(A_{w_1}(p,q)(G),\|.\|_{w_1})$ uzaylarının topolojileri aynı olup normları denktir. Bunun sonucu olarak her f $\in A_{w_1}(p,q)(G)$ için $|||f||| \le c\|f\|_{w_1}$ olacak şekilde bir c > 0 sayısı vardır. Böylece $|||.|||$ normunun tanımından her f $\in A_{w_1}(p,q)(G)$ için $\|f\|_{w_2} \le |||f|||$ olup buradan

$$\|f\|_{w_2} \le |||f||| \le c\,\|f\|_{w_1}$$

bulunur.

4.2.2.ÖNERME: $A_{w_1}(p,q)(G) \subset A_{w_2}(p,q)(G)$ olması için gerekli ve yeterli koşul $w_2 \le w_1$ olmasıdır.

İSPAT: $A_{w_1}(p,q)(G) \subset A_{w_2}(p,q)(G)$ olduğunu kabul edelim. Her f $\in A_{w_1}(p,q)(G)$ için f $\in A_{w_2}(p,q)(G)$ olup 4.1.7. Önermeden dolayı her x $\in$ G için

$$c_1\, w_1(x) \le \|L_x f\|_{w_1} \le w_1(x)\,\|f\|_{w_1}$$

ve

$$c_2\, w_2(x) \le \|L_x f\|_{w_2} \le w_2(x)\,\|f\|_{w_2}$$

olacak şekilde $c_1 > 0$ ve $c_2 > 0$ sayıları vardır. Böylece 4.1.7. ve 4.2.1.Önerme kullanılırsa

$$c_2\, w_2(x) \leq \|L_x f\|_{w_2} \leq c\, \|L_x f\|_{w_1} \leq c\, w_1(x) \|f\|_{w_1}$$

olacak şekilde c > 0 sayısı bulunur. Buradan

$$w_2(x) \leq c\, c_2^{-1}\, w_1(x) \|f\|_{w_1}$$

olup $c_0 = c\, c_2^{-1} \|f\|_{w_2}$ denirse

$$w_2(x) \leq c_0\ w_1(x)$$

elde edilir. O halde $w_2 < w_1$ olur.

Şimdi $w_2 < w_1$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde her $x \in G$ için

$$w_2(x) \leq c_3\ w_1(x) \qquad (4.2.1.)$$

olacak şekilde bir $c_3 > 0$ sayısı vardır. Şimdi herhangi bir $f \in A_{w_1}(p,q)(G)$ alalım. Buradan $f \in L^1_{w_1}(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olur. Eğer (4.2.1.) eşitsizliği kullanılırsa

$$\|f\|_{1,w_2} = \int_G |f(x) w_2(x)|\, dx \leq \int_G |f(x) c_3\, w_1(x)|\, dx$$

$$= c_3 \int_G |f(x) w_1(x)|\, dx = c_3\, \|f\|_{1,w_1} < \infty$$

olduğundan $f \in L^1_{w_2}(G)$ bulunur. Böylece $f \in A_{w_2}(p,q)(G)$ elde edilir. O halde $A_{w_1}(p,q)(G) \subset A_{w_2}(p,q)(G)$ olur. Bu ise istenendir.

4.2.3.YARDIMCI TEOREM: $L^1_w(G)$ uzayının sınırlı ve Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan her $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ yaklaşık birimi $L^1(G)$ uzayının da bir yaklaşık birimidir.

İSPAT: $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ yaklaşık birimi $L^1_w(G)$ uzayında sınırlı olduğundan her $\alpha \in I$ için $\|e_\alpha\|_{1,w} \leq c$ olacak şekilde bir c > 0 sayısı vardır. Yine $C_c(G)$ uzayı $L^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğundan her $f \in L^1(G)$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$\|f-g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2(c+1)} \tag{4.2.2.}$$

olacak şekilde bir $g \in C_c(G)$ vardır. Yine $C_c(G) \subset L^1_w(G)$ kapsamasından $g \in L^1_w(G)$ olup $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$, $L^1_w(G)$ uzayında bir yaklaşık birim olduğundan aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $\alpha \geq \alpha_0$ için

$$\|g * e_\alpha - g\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.2.3.}$$

olacak şekilde bir $\alpha_0 \in I$ sayısı vardır. Yine $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_{1,w}$ eşitsizliği biliniyor. O halde $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ yaklaşık birimi $L^1_w(G)$ uzayında sınırlı olduğundan her $\alpha \in I$ için $\|e_\alpha\|_1 \leq \|e_\alpha\|_{1,w} \leq c$ yazılır. Böylece (4.2.2.) ve (4.2.3.) eşitsizlikleri kullanılırsa aynı $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $\alpha_0 \in I$ için her $\alpha \geq \alpha_0$ olduğunda

$$\begin{aligned}
\|f * e_\alpha - f\|_1 &= \|f * e_\alpha - g * e_\alpha + g * e_\alpha - g + g - f\|_1 \\
&\leq \|f * e_\alpha - g * e_\alpha\|_1 + \|g * e_\alpha - g\|_1 + \|g - f\|_1 \\
&= \|(f-g) * e_\alpha\|_1 + \|g * e_\alpha - g\|_1 + \|g - f\|_1
\end{aligned}$$

$$\leq \|f-g\|_1 \|e_\alpha\|_1 + \|g * e_\alpha - g\|_1 + \|g-f\|_1$$

$$\leq \|f-g\|_1 \|e_\alpha\|_{1,w} + \|g * e_\alpha - g\|_{1,w} + \|g-f\|_1$$

$$\leq \|f-g\|_1 \left(\|e_\alpha\|_{1,w} + 1\right) + \|g * e_\alpha - g\|_{1,w}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2\,(c+1)}\,(c+1) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu ise istenendir.

4.2.4.ÖNERME: Her $f \in L(p,q)(\Gamma)$ için $\|f * h_u - f\|_{(p,q)} \to 0$ olacak şekilde $L^1_w(G)$ uzayının $\|h_u\|_1 = 1$ olan kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan $(h_u)_{u\in I}$ yaklaşık birimi vardır.

İSPAT: K kümesi orijinin kompakt bir komşuluğu olsun. Bu takdirde w ağırlık fonksiyonu lokal sınırlı olduğundan her x ∈ K için $w(x) \leq A$ olacak şekilde bir A > 0 sayısı vardır. Yine orijinin K kümesinde kapsanan bütün komşuluklarının ailesini I ile gösterelim. K ∈ I olduğundan $I \neq \varnothing$ olur. I üzerindeki bir $'' \geq ''$ bağıntısını her U,V∈I için U ≥ V ⇔ U ⊂ V şeklinde tanımlayalım. Bu tanımlanan bağıntıya göre I kümesi yönlendirilmiş bir kümedir. Yine her U ∈ I için $\operatorname{supp} h_u \subset U$ olan ve

$$\int_G h_u(x)\, dx = 1$$

koşulunu sağlayan pozitif ve sürekli bir h_u fonksiyonu vardır. Şimdi $(h_u)_{u\in I}$ ağını alalım. Bu $(h_u)_{u\in I}$ ağının $L^1_w(G)$ için yaklaşık birim olduğu biliniyor [26]. Öte yandan her U ∈ I için $\operatorname{supp} h_u \subset K$ ve K kompakt olduğundan h_u fonksiyonları kompakt desteklidir.

Şimdi herhangi bir $f \in L(p,q)(\Gamma)$ alalım. Basit fonksiyonlar $L(p,q)(\Gamma)$ uzayında heryerde yoğun olduğundan verilen herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|f - g\|_{(p,q)} < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (4.2.4.)$$

olacak şekilde bir g basit fonksiyonu vardır. Böylece bu g basit fonksiyonu için

$$(g * h_u - g)(x) = \int_G g(x-y)\, h_u(y)\, dy - g(x)$$

$$= \int_G g_y(x) h_u(y) dy - \int_G g(x) h_u(y) dy$$

$$= \int_G (g_y - g)(x)\, h_u(y)\, dy \qquad (4.2.5.)$$

olur. Böylece,

$$\|g * h_u - g\|_{(p,q)} \leq \int_G \|g_y - g\|_{(p,q)}\, h_u(y)\, dy$$

$$= \int_K \|g_y - g\|_{(p,q)}\, h_u(y)\, dy \qquad (4.2.6.)$$

elde edilir. Öte yandan Lorentz uzayında ötelemeler sürekli olduğundan [5], her $g \in L(p,q)(\Gamma)$ için $y \to \|g_y - g\|_{(p,q)}$ fonksiyonu sürekli olup her $\varepsilon > 0$ için her y $\in U_0$ olduğunda

$$\|g_y - g\|_{(p,q)} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.2.7.)$$

olacak şekilde orjinin bir U_0 komşuluğu vardır. (4.2.7.) eşitsizliği (4.2.6.) eşitsizliğinde kullanılırsa her y $\in U_0$ için

$$\|g * h_{u_0} - g\|_{(p,q)} < \int_K \frac{\varepsilon}{2} h_{u_0}(y)\,dy$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \int_K h_{u_0}(y)\,dy = \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Yine U $\geq U_0$ için $U \subset U_0$ olacağından her y $\in$ U için

$$\|g * h_u - g\|_{(p,q)} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.2.8.)$$

olur. Böylece (4.2.4.) ve (4.2.8.) eşitsizlikleri ile L(p,q)(G) uzayının $L^1(G)$ üzerinde Banach modülü olması [2] ve her U $\in$ I için $\|h_u\|_1 = 1$ olduğu kullanılırsa her U $\geq U_0$ için

$$\|f * h_u - f\|_{(p,q)} = \|f * h_u - g * h_u + g * h_u - g + g - f\|_{(p,q)}$$

$$\leq \|f * h_u - g * h_u\|_{(p,q)} + \|g * h_u - g\|_{(p,q)} + \|g - f\|_{(p,q)}$$

$$= \|(f - g) * h_u\|_{(p,q)} + \|g * h_u - g\|_{(p,q)} + \|g - f\|_{(p,q)}$$

$$\leq \|f - g\|_{(p,q)} \|h_u\|_1 + \|g * h_u - g\|_{(p,q)} + \|g - f\|_{(p,q)}$$

$$= 2\, \|f - g\|_{(p,q)} + \|g * h_u - g\|_{(p,q)}$$

$$< \frac{2\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

4.2.5.ÖNERME: w ağırlık fonksiyonu Beurling-Domar (kısaca BD.) koşulunu sağlamak üzere $1 \leq p,q < \infty$ için $A_w(p,q)(G)$ uzayının Fourier dönüşümü kompakt destekli olan bir yaklaşık birimseli vardır.

İSPAT: $A_w(p,q)(G)$ uzayında ötelemelerin sürekliliği 3.1.5.Önermeden biliniyor. Bu nedenle herhangi bir $f \in A_w(p,q)(G)$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $y \in U$ için

$$\left\| L_y f - f \right\|_{A_w} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.2.9.}$$

olacak şekilde orjinin bir U komşuluğu vardır. Yine $L_w^1(G)$ uzayının Fourier dönüşümler altındaki görüntü uzayı $F_w^1(\hat{G})$ nin bir standard cebir olduğu biliniyor[18]. Bunun sonucu $\operatorname{supp} k \subset U$ ve

$$\int_G k(y)\, dy = 1$$

olacak şekilde bir $k \in C_c(G)$ vardır. Yine $y \to \left\| L_y f - f \right\|_{A_w}$ fonksiyonunun sürekliliğini göstermek kolaydır. Buradan

$$k * f - f = \int_G k(y) \left(L_y f - f \right) dy$$

olup yukarıda verilen $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $y \in U$ için

$$\left\| k * f - f \right\|_{A_w} \leq \int_G k(y) \left\| L_y f - f \right\|_{A_w} dy$$

$$= \int_U k(y) \left\| L_y f - f \right\|_{A_w} dy$$

$$< \int_U k(y) \frac{\varepsilon}{2}\, dy = \frac{\varepsilon}{2} \int_U k(y)\, dy = \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.2.10.}$$

elde edilir. Şimdi $F_{0,w}$ ile Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonların kümesini gösterelim. Buradan k $\in$ $L^1_w(G)$ olur. Öte yandan w ağırlık fonksiyonu (BD.) koşulunu sağladığından $F_{0,w}$ kümesi $L^1_w(G)$ uzayında heryerde yoğun olup aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\left\| k - h \right\|_{1,w} < \frac{\varepsilon}{2\left\| f \right\|_{A_w}} \tag{4.2.11.}$$

olacak şekilde bir h $\in$ $F_{0,w}$ vardır. Yine $C_c(\Gamma) \subset L(p,q)(\Gamma)$ kapsaması kullanılırsa [23], $\hat{h} \in L(p,q)(\Gamma)$ olup buradan h $\in$ $A_w(p,q)(G)$ elde edilir. O halde aynı $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L^1_w(G)$-modül olması ve (4.2.10.) ile (4.2.11.) eşitsizlikleri de kullanılırsa

$$\left\| h * f - f \right\|_{A_w} = \left\| h * f - k * f + k * f - f \right\|_{A_w}$$

$$\leq \left\| h * f - k * f \right\|_{A_w} + \left\| k * f - f \right\|_{A_w}$$

$$= \left\| (h - k) * f \right\|_{A_w} + \left\| k * f - f \right\|_{A_w}$$

$$\leq \left\| h - k \right\|_{1,w} \left\| f \right\|_{A_w} + \left\| k * f - f \right\|_{A_w}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\left\| f \right\|_{A_w}} \left\| f \right\|_{A_w} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

4.2.6.ÖNERME: w, (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde $1 < p < \infty$,$1 \leq q < \infty$ olmak üzere $A_w(p,q)(G)$ uzayının Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan ve $L^1_w(G)$ uzayında sınırlı bir $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ yaklaşık birimi vardır.

İSPAT: w, (BD.) koşulunu sağladığından $L^1_w(G)$ uzayının sınırlı ve Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan bir $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ yaklaşık biriminin varlığı [9],biliniyor. Bu yaklaşık birimin sınırı c olsun. Böylece her $\alpha \in I$ için $\|e_\alpha\|_{1,w} \leq c$ olur. Yine her $\alpha \in I$ için $\hat{e}_\alpha$ kompakt destekli olup $C_c(\Gamma) \subset L(p,q)(\Gamma)$ kapsaması göz önüne alınırsa $(\hat{e}_\alpha)_{\alpha\in I} \subset L(p,q)(\Gamma)$ olup $(e_\alpha)_{\alpha\in I} \subset A_w(p,q)(G)$ bulunur. Şimdi herhangi bir f $\in$ $A_w(p,q)(G)$ alalım. Buradan f $\in$ $L^1_w(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$ olup $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$, $L^1_w(G)$ uzayında yaklaşık birim olduğundan herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $\alpha \geq \alpha_1$ için

$$\|f * e_\alpha - f\|_{1,w} < \varepsilon \tag{4.2.12.}$$

olacak şekilde bir $\alpha_1 \in I$ sayısı vardır. Yine aynı α_1 sayısı için her $\alpha \geq \alpha_1$ olduğunda

$$\left|\hat{f}(x)\hat{e}_\alpha(x) - \hat{f}(x)\right| \leq \left\|\hat{f}\,\hat{e}_\alpha - \hat{f}\right\|_\infty \leq \|f * e_\alpha - f\|_{1,w} < \varepsilon \tag{4.2.13.}$$

olup $\hat{f}\,\hat{e}_\alpha$ fonksiyonu $\hat{f}$ fonksiyonuna noktasal yakınsar. Böylece her $\alpha \geq \alpha_1$ için

$$\left\{x \in G \mid \left|\left(\hat{f}\,\hat{e}_\alpha - \hat{f}\right)(x)\right| > \varepsilon\right\} = \varnothing$$

olup

$$\lambda_{(\hat{f}\hat{e}_\alpha - \hat{f})}(\varepsilon) = \mu\left\{x \in G \mid \left|\left(\hat{f}\,\hat{e}_\alpha - \hat{f}\right)(x)\right| > \varepsilon\right\} = \mu(\phi) = 0 \tag{4.2.14.}$$

bulunur. Yine her s,t > 0 için

$$f^{*}(t)\leq s \Leftrightarrow \lambda_f(s)\leq t \qquad (4.2.15.)$$

ifadesi [21], biliniyor. Eğer (4.2.15.) ifadesi (4.2.14.) eşitliğinde kullanılırsa

$$\lambda_{(\hat{f}\,\hat{e}_\alpha-\hat{f})}(\varepsilon)<t \Leftrightarrow \left(\hat{f}\,\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right)^{*}(t)<\varepsilon$$

olup buradan her $\alpha \geq \alpha_1$ için $\left[\left(\hat{f}\,\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right)^{*}(t)\right]^{q}<\varepsilon^{q}$ bulunur. Böylece

$$\lim_{\alpha}\left[\left(\hat{f}\,\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right)^{*}(t)\right]^{q}=0$$

elde edilir. Yine,

$$\left|\hat{f}\,\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right|=\left|\hat{f}\,(\hat{e}_\alpha-1)\right|=\left|\hat{f}\right|\left|\hat{e}_\alpha-1\right|\leq(c+1)\left|\hat{f}\right|$$

olup [22] den dolayı

$$\left[\left(\hat{f}\,\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right)^{*}\right]^{q}\leq(c+1)^{q}\left[\left(\hat{f}\right)^{*}(t)\right]^{q}$$

bulunur. Eğer yeni ölçüm $d\mu=t^{\frac{q}{p}-1}dt$ olarak alınırsa $\hat{f}\in L(p,q)(\Gamma)$ olduğundan $\left[\left(\hat{f}\right)^{*}(t)\right]^{q}$ integrallenebilir olup Lebesgue teoremi kullanılırsa

$$\left\|\hat{f}\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right\|_{(p,q)}=\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}\left[\left(\hat{f}\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right)^*(t)\right]^q dt\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{q}{p}\int_0^\infty\left[\left(\hat{f}\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right)^*(t)\right]^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

olup eşitsizliğin sağ tarafı dolayısıyla sol tarafı sıfıra yaklaşır. Böylece verilen $\varepsilon>0$ sayısı için her $\alpha\geq\alpha_2$ olduğunda

$$\left\|\hat{f}\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right\|_{(p,q)}<\varepsilon \tag{4.2.16.}$$

olacak şekilde bir $\alpha_2\in I$ sayısı vardır. Eğer $\alpha_0=mak\{\alpha_1,\alpha_2\}$ denir ve (4.2.12.) ile (4.2.16.) eşitsizlikleri kullanılırsa aynı $\varepsilon>0$ için her $\alpha\geq\alpha_0$ olduğunda

$$\left\|f*e_\alpha-f\right\|_{A_w}=\left\|f*e_\alpha-f\right\|_{1,w}+\left\|\hat{f}\hat{e}_\alpha-\hat{f}\right\|_{(p,q)}<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

4.3. $A_w(p,q)(G)$ BANACH CEBİRİNİN İDEALLERİ

4.3.1.ÖNERME: w, (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir $S_w(G)$ uzayıdır.

İSPAT: Bir $F_{0,w}$ kümesini,

$$F_{0,w} = \left\{ f \in L_w^1(G) \middle| \hat{f} \in C_c(\Gamma) \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer $C_c(\Gamma) \subset L(p,q)(\Gamma)$ kapsaması kullanılırsa

$$F_{0,w} = \left\{ f \in L_w^1(G) \middle| \hat{f} \in C_c(\Gamma) \right\} \subset \left\{ f \in L_w^1(G) \middle| \hat{f} \in L(p,q)(\Gamma) \right\} = A_w(p,q)(G)$$

olup

$$F_{0,w} \subset A_w(p,q)(G) \subset L_w^1(G) \qquad (4.3.1.)$$

kapsaması elde edilir. Yine w, (BD.) koşulunu sağladığından $F_{0,w}$ kümesinin $L_w^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu biliniyor [7]. Dolayısıyla herhangi f $\in L_w^1(G)$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde

$$\|f - g\|_{1,w} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir g $\in F_{0,w}$ vardır. Böylece (4.3.1.) kapsamasından dolayı g $\in A_w(p,q)(G)$ olup $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L_w^1(G)$ uzayında heryerde yoğun olur.

Yine 4.1.4.Teoremden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu ve 4.1.5.Önermeden dolayı da ötelemeler altında invaryant olduğu biliniyor.

Şimdi herhangi bir f $\in A_w(p,q)(G)$ alalım. Buradan f $\in L_w^1(G)$ ve $\hat{f} \in L(p,q)(\Gamma)$

olur. Bu f $\in L^1_w(G)$ ve herhangi y $\in$ G için

$$\|L_y f\|_{1,w} \leq w(y)\,\|f\|_{1,w} \tag{4.3.2.}$$

olduğu ve [1], çalışmasından da

$$\|L_y f\|_{(p,q)} = \|M_{-y}\hat{f}\|_{(p,q)} = \|\hat{f}\|_{(p,q)} \tag{4.3.3.}$$

eşitliği biliniyor. Böylece (4.3.2.) , (4.3.3.) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\|L_y f\|_{A_w} &= \|L_y f\|_{1,w} + \|\widehat{L_y f}\|_{(p,q)} \\
&\leq w(y)\,\|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)} \\
&\leq w(y)\,\|f\|_{1,w} + w(y)\,\|\hat{f}\|_{(p,q)} \\
&= w(y)\left(\|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)}\right) \\
&= w(y)\,\|f\|_{A_w}
\end{aligned}$$

bulunur. Yine 4.1.5.Önermeden dolayı her f $\in A_w(p,q)(G)$ ve her y $\in$ G için G den $A_w(p,q)(G)$ uzayına giden $y \to L_y f$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca her f $\in A_w(p,q)(G)$ için

$$\|f\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{(p,q)} = \|f\|_{A_w}$$

olur. Öte yandan $A_w(p,q)(G)$ vektör uzayı ve girişim işlemine göre cebir olduğundan $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir $S_w(G)$ uzayıdır.

4.3.2.ÖNERME: w , (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde $\left(A_w(p,q)(G),\|\cdot\|_{A_w}\right)$ uzayı $\left(L^1_w(G),\|\cdot\|_{1,w}\right)$ uzayında girişim işlemine göre bir soyut Segal cebiridir.

İSPAT: $L^1_w(G)$ uzayının girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğu biliniyor [17].Yine 4.1.4.Teoremden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı girişim işlemine göre bir Banach cebiri olup dolayısıyla $L^1_w(G)$ uzayının bir alt cebiridir. Yine

(i) w, (BD.) koşulunu sağladığından $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L^1_w(G)$ uzayında heryerde yoğun olduğu 4.3.1.Önerme ve yine $L^1_w(G)$ uzayında bir ideal olduğu da 4.1.6. Önermede ispatlandı.

(ii) Her f $\in$ $A_w(p,q)(G)$ için $\|f\|_{1,w} \leq \|f\|_{A_w}$ eşitsizliğinin varlığı normların tanımından hemen görülür.

(iii) Herhangi f $\in A_w(p,q)(G)$ ve g $\in L^1_w(G)$ için

$$\|f * g\|_{A_w} \leq \|f\|_{A_w} \|g\|_{1,w}$$

eşitsizliği 4.1.6.Önermede gösterildi. Bu özelliklerden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayında bir soyut Segal cebiridir.

4.3.3.ÖNERME: w, (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde ,

(i) Eğer I, $\left(L^1_w(G),\|\cdot\|_{1,w}\right)$ uzayının sağ kapalı (sol kapalı) ideali ise bu takdirde $I \cap A_w(p,q)(G)$, $\left(A_w(p,q)(G),\|\cdot\|_{A_w}\right)$ uzayının sağ kapalı (sol kapalı) idealidir ve $I = \overline{I \cap A_w(p,q)(G)}$ olur. (Burada kapanış $L^1_w(G)$ uzayının $\|\cdot\|_{1,w}$ normuna göredir.)

(ii) Eğer J, $A_w(p,q)(G)$ uzayında kapalı ideal ise bu takdirde $\overline{J}$, $L^1_w(G)$ uzayında kapalıdır ve $I = \overline{I} \cap A_w(p,q)(G)$ olur.

İSPAT: w, (BD.) koşulunu sağladığından $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L^1_w(G)$ uzayında sınırlı ve Fourier dönüşümü kompakt destekli bir e(f) yaklaşık birimselinin varlığı 4.2.5. önermeden biliniyor. Dolayısıyla e(f) yaklaşık birimseli girişim işlemine göre değişmeli olup $A_w(p,q)(G)$ uzayında hem sağ hem de sol yaklaşık birimsel olduğundan bu önermenin ispatı [3] çalışmasından dolayı tamamlanır.

$L^1_w(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayının genelleştirilmiş karakterler olduğu biliniyor $[24]$.

4.3.4.ÖNERME: a) Eğer w, (BD.) koşulunu sağlıyorsa bu takdirde $A_w(p,q)(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayı ile $L^1_w(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayı aynı olup $\hat{G}$ dual grubudur.

b) $A_w(p,q)(G)$ uzayı yarı-basittir (semisimple).

İSPAT: a) $L^1_w(G)$ uzayının girişim işlemine göre bir değişmeli Banach cebiri olduğu biliniyor $[18]$. Yine w, (BD.) koşulunu sağladığından 4.3.2.Önermeden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ üzerinde bir soyut Segal cebiridir. Böylece $[3]$ den dolayı bu iki uzayın regüler maksimal ideal uzayı aynıdır. Öte yandan w, (BD.) koşulunu sağladığından $L^1_w(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayı $\hat{G}$ dual grubudur $[7]$. O halde $A_w(p,q)(G)$ uzayının regüler maksimal ideal uzayı da $\hat{G}$ dual grubu olur.

b) $A_w(p,q)(G)$ bir değişmeli Banach cebiri olduğundan $A_w(p,q)(G)$ uzayının yarı-basit olması için her f $\in A_w(p,q)(G)$ alındığında $\|\hat{f}\|_\infty = 0$ olduğunda f = 0 olduğunu göstermek yeterlidir $[17]$. Yine her f $\in A_w(p,q)(G)$ için

$$\lim_n \|f^n\|^{\frac{1}{n}} = \|\hat{f}\|_\infty \qquad (4.3.4.)$$

eşitliği de biliniyor $[17]$. Şimdi herhangi bir f $\in L^1_w(G)$ alalım. f^n ile f fonksiyonunun n defa kendisi ile girişimini gösterelim. Buradan $f^n \in L^1_w(G)$ olup $L^1_w(G) \subset L^1(G)$ kapsamasından $f^n \in L^1(G)$ ve

$$\|f^n\|_1 \leq \|f^n\|_{1,w}$$

eşitsizliğinden

$$\|f^n\|_1^{\frac{1}{n}} \leq \|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}}$$

yazılır. Her iki tarafın n $\rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_n \|f^n\|_1^{\frac{1}{n}} \leq \lim_n \|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}} \tag{4.3.5.}$$

bulunur. Gelfand teoremi gereğince

$$\|\hat{f}\|_\infty = \lim_n \|f^n\|_1^{\frac{1}{n}}$$

$$\|\hat{f}\|_\infty^{'} = \lim_n \|f^n\|_{1,w}^{\frac{1}{n}}$$

ile gösterelim. Böylece (4.3.5.) ifadesinden

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|\hat{f}\|_\infty^{'} \tag{4.3.6.}$$

elde edilir. Eğer (4.3.6.) eşitsizliği kullanılırsa $\|\hat{f}\|_\infty^{'} = 0$ olduğundan $\|\hat{f}\|_\infty = 0$ olur. Yine $L^1(G)$ uzayının yarı-basit olduğu ([17],sa.117) biliniyor. Buradan f = 0 elde edilir. Bu ise $L^1_w(G)$ uzayının yarı-basit olduğunu gösterir.

Yine $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ üzerinde girişim işlemine göre soyut Segal cebiri olduğundan [3] den dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı yarı-basittir.

4.4. $M\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$, $M\left(A_w(p,q)(G)\right)$ VE $M\left(A_w(p,q)(G), L^1_w(G)\right)$ ÇARPANLAR UZAYI

Şimdi bir M_{A_w} uzayını , $\mu \in M(w)$ ve

$$|||\mu||| = \sup\left\{ \frac{\|\mu * f\|_{A_w}}{\|f\|_{1,w}} \mid f \in L^1_w(G), f \neq 0, \hat{f} \in C_c(\Gamma) \right\} \qquad (4.4.1.)$$

olmak üzere

$$M_{A_w} = \{ \ \mu \in M(w) \mid |||\mu||| < \infty \ \}$$

biçiminde tanımlayalım. (4.4.1.) ifadesinde tanımlanan $|||.|||$ fonksiyonunun bir norm olduğu biliniyor [11].

4.4.1.TEOREM: Bir $T : L^1_w(G) \to A_w(p,q)(G)$ fonksiyonu verilsin. Eğer w, (BD.) koşulunu sağlıyorsa bu takdirde aşağıdaki özellikler denktir.

(1) $T \in M\left(L^1_w(G),\ A_w(p,q)(G)\right)$;

(2) Herhangi bir $f \in L^1_w(G)$ için $Tf = \mu * f$ olacak şekilde bir tek $\mu \in M_{A_w}$ vardır.

Ayrıca $M\left(L^1_w(G),\ A_w(p,q)(G)\right)$ ve M_{A_w} uzayları homeomorfturlar.

İSPAT: w, (BD.) koşulunu sağladığından 4.3.1.Teoremden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir $S_w(G)$ uzayıdır. O halde [11] çalışmasından dolayı ispat tamamlanır.

4.4.2.ÖNERME: Eğer w, (BD.) koşulunu sağlıyorsa $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayı üzerinde esas modüldür. Yani,

$$\left(A_w(p,q)(G)\right)_e = A_w(p,q)(G)$$

olur.

İSPAT: 4.1.6.Önermeden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayı üzerinde Banach ideali dolayısıyla bir Banach modülüdür. Yine w, (BD.) koşulunu sağladığından $L^1_w(G)$ uzayının sınırlı ve Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan bir $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ yaklaşık biriminin varlığı [9] ve bunun aynı zamanda $A_w(p,q)(G)$ uzayının da bir yaklaşık birimi olduğu 4.2.6.Önermeden biliniyor.O halde herhangi f $\in A_w(p,q)(G)$ İçin

$$\lim_\alpha \|f * e_\alpha - f\|_{A_w} = 0$$

yazılır. Bu ise 1.30.Teoremden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L^1_w(G)$ uzayı üzerinde esas modül olduğunu gösterir. O halde

$$(A_w(p,q)(G))_e = A_w(p,q)(G)$$

yazılır.

4.4.3.ÖNERME: $Hom_{L^1_w(G)}(L^1_w(G), A_w(p,q)(G))$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayı üzerinde bir Banach modülüdür.

İSPAT: $Hom_{L^1_w(G)}(L^1_w(G), A_w(p,q)(G))$ uzayının operatör normuna göre Banach uzayı olduğu biliniyor [19]. Şimdi herhangi f $\in L^1_w(G)$ ve T $\in Hom_{L^1_w(G)}(L^1_w(G), A_w(p,q)(G))$ için $L^1_w(G) x Hom_{L^1_w(G)}(L^1_w(G), A_w(p,q)(G))$ uzayından $Hom_{L^1_w(G)}(L^1_w(G), A_w(p,q)(G))$ uzayına giden (f,T) $\to$ fT işlemini her g $\in L^1_w(G)$ için $fT(g) = T(f * g)$ şeklinde tanımlayalım. Böylece T $\in Hom_{L^1_w(G)}(L^1_w(G), A_w(p,q)(G))$ olduğundan sürekli, dolayısıyla sınırlıdır. Yine

$$\|fT(g)\|_{A_w} = \|T(f * g)\|_{A_w} \le \|T\| \|f * g\|_{1,w} < \infty$$

olup $f\,T(g) = T(f * g) \in A_w(p,q)(G)$ bulunur. O halde bu işlem iyi tanımlıdır. Öte yandan T nin çarpan olması kullanılırsa her h $\in L^1_w(G)$ için

$$f\,T(g * h) = T(f * (g * h)) = T(g * (f * h))$$

$$= g\,T(f * h) = g\,(fT)(h)$$

olup fT bir $L^1_w(G)$-modül homomorfizmidir. Şimdi fT dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim. T nin çarpan olması kullanılırsa her g $\in L^1_w(G)$ için

$$\|f\,T(g)\|_{A_w} = \|T(f * g)\|_{A_w} \le \|T\|\,\|f * g\|_{1,w} \le \|T\|\,\|f\|_{1,w}\,\|g\|_{1,w} \qquad (4.4.2)$$

olup eğer $K = \|T\|\,\|f\|_{1,w}$ denirse (4.4.2.) eşitsizliğinden

$$\|f\,T(g)\|_{A_w} \le K\,\|g\|_{1,w}$$

elde edilir. Bu ise fT dönüşümünün sürekli olduğunu gösterir. Böylece fT $\in Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$ bulunur. Ayrıca $Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$ uzayının $L^1_w(G)$ uzayı üzerinde cebirsel olarak modül olduğunun gösterilmesi kolaydır. Yine

$$\|fT\| = \sup\left\{ \frac{\|f\,T(g)\|_{A_w}}{\|g\|_{1,w}} \;\middle|\; g \ne 0 \right\}$$

$$= \sup\left\{ \frac{\|T(f * g)\|_{A_w}}{\|g\|_{1,w}} \;\middle|\; g \ne 0 \right\}$$

$$\leq \sup\left\{\frac{\|T\|\,\|f*g\|_{1,w}}{\|g\|_{1,w}} \mid g\neq 0\right\}$$

$$\leq \sup\left\{\frac{\|T\|\,\|f\|_{1,w}\,\|g\|_{1,w}}{\|g\|_{1,w}} \mid g\neq 0\right\}$$

$$= \|T\|\ \|f\|_{1,w}$$

olur. O halde $Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$ uzayı $L^1_w(G)$ üzerinde Banach modülü olur.

4.4.4.ÖNERME: Eğer w, (BD.) koşulunu sağlıyorsa bu takdirde $Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayı üzerinde bir esas modüldür. Yani,

$$[Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)]_e = Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G),\ A_w(p,q)(G)\right)$$

olur.

İSPAT: 4.4.3.Önermeden dolayı $Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayı üzerinde Banach modülüdür. Yine w, (BD.) koşulunu sağladığından $L^1_w(G)$ uzayının sınırlı ve Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan bir $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ yaklaşık biriminin varlığı biliniyor. Buradan herhangi bir $T \in Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G),\ A_w(p,q)(G)\right)$ ve $f \in L^1_w(G)$ için

$$\|e_\alpha T - T\| = \sup_{\|f\|_{1,w}=1}\left\{\|\,(e_\alpha T - T)(f)\,\|_{A_w}\right.$$

$$= \sup_{\|f\|_{1,w}=1}\left\{\|\,(e_\alpha T)(f) - T(f)\,\|_{A_w}\right.$$

$$= \sup_{\|f\|_{1,w}=1} \left\{ \| T(e_\alpha * f) - T(f) \|_{A_w} \right.$$

$$= \sup_{\|f\|_{1,w}=1} \left\{ \| T(e_\alpha * f - f) \|_{A_w} \right.$$

$$\leq \sup_{\|f\|_{1,w}=1} \left\{ \|T\| \, \|e_\alpha * f - f\|_{1,w} \right. \qquad (4.4.3.)$$

yazılır. Böylece,

$$\lim_{\alpha} \| e_\alpha * f - f \|_{1,w} = 0$$

olup bu eşitlik (4.4.3.) eşitsizliğinde kullanılırsa

$$\lim_{\alpha \in I} \| e_\alpha T - T \| = 0$$

bulunur. O halde 1.30.Teoremden dolayı $Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$ uzayı $L^1_w(G)$ uzayı üzerinde bir esas modül olup

$$[Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)]_e = Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$$

elde edilir.

4.4.5.ÖNERME: w ağırlık fonksiyonu (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde

$$Hom_{L^1_w(G)}\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right) \cong A_w(p,q)(G)$$

olur.

İSPAT: w ağırlık fonksiyonu (BD.) koşulunu sağladığından $A_w(p,q)(G)$ uzayının sınırlı ve Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan bir yaklaşık biriminin varlığı 4.2.6.Önermeden biliniyor. Yine 4.4.3.Önermeden dolayı

$Hom_{L_w^1(G)}\left(L_w^1(G), A_w(p,q)(G)\right)$ uzayı $L_w^1(G)$ uzayı üzerinde Banach modülüdür.O halde [19] çalışmasından dolayı

$$[Hom_{L_w^1(G)}\left(L_w^1(G), A_w(p,q)(G)\right)]_e \cong [A_w(p,q)(G)]_e \qquad (4.4.4.)$$

olur. Öte yandan 4.4.4.Önermeden

$$[Hom_{L_w^1(G)}\left(L_w^1(G), A_w(p,q)(G)\right)]_e = Hom_{L_w^1(G)}\left(L_w^1(G), A_w(p,q)(G)\right) \qquad (4.4.5.)$$

ve 4.4.2.Önermeden de

$$\left(A_w(p,q)(G)\right)_e = A_w(p,q)(G) \qquad (4.4.6.)$$

olduğu biliniyor. Böylece (4.4.5.) ve (4.4.6.) ifadeleri (4.4.4.) ifadesinde kullanılırsa,

$$Hom_{L_w^1(G)}\left(L_w^1(G), A_w(p,q)(G)\right) \cong A_w(p,q)(G)$$

bulunur Bu ise istenendir.

G, lokal kompakt Abel grubu olmak üzere bir $M_w(G)$ vektör uzayı,

$$M_w(G) = \{ \mu \in M(G) \mid \|\mu\|_w < \infty \}$$

ve

$$\|\mu\|_w = \int_G w \, d|\mu|$$

olmak üzere $M_w(G)$ uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu [22] biliniyor. Yine G nin karakter kümesi Γ olsun. Bir $M_w(p,q)(G)$ uzayını $1 \le p,q < \infty$ olmak üzere

$$M_w(p,q)(G) = \{\mu \in M_w(G) \mid \hat{\mu} \in L(p,q)(\Gamma)\}$$

ve üzerindeki bir $\|.\|_{M_w}$ fonksiyonunu da her $\mu \in M_w(p,q)(G)$ olmak üzere

$$\|\mu\|_{M_w} = \|\mu\|_w + \|\hat{\mu}\|_{(p,q)}$$

şeklinde tanımlayalım. $\|.\|_{M_w}$ ve $\|.\|_{(p,q)}$ fonksiyonları birer norm olup bunların toplamları olan $\|.\|_{M_w}$ fonksiyonu da bir norm olur.

4.4.6.ÖNERME: $1 \le p,q < \infty$ olmak üzere $M_w(p,q)(G)$ uzayı Banach uzayıdır.

İSPAT: $M_w(p,q)(G)$ uzayında herhangi bir $(\mu_n)_{n\in N}$ Cauchy dizisi verilsin. Cauchy dizisi tanımı gereğince herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m,n \ge n_0$ için

$$\|\mu_n - \mu_m\|_{M_w} = \|\mu_n - \mu_m\|_w + \|\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_m\|_{(p,q)} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in N$ sayısı vardır. Buradan her $m,n \ge n_0$ için $\|\mu_n - \mu_m\|_{M_w} < \in$ ve $\|\hat{\mu}_n - \hat{\mu}_m\|_{(p,q)} < \varepsilon$ bulunur. Bu ise $(\mu_n)_{n\in N}$ dizisinin $M_w(G)$ uzayında ve $(\hat{\mu}_n)_{n\in N}$ dizisinin de $L(p,q)(\Gamma)$ uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $M_w(G)$ uzayı tam olduğundan $(\mu_n)_{n\in N}$ dizisi bir $\mu \in M_w(G)$ elemanına ve $L(p,q)(\Gamma)$ uzayı tam olduğundan $(\hat{\mu}_n)_{n\in N}$ dizisi bir $h \in L(p,q)(\Gamma)$ elemanına yakınsar. Böylece verilen herhangi $\varepsilon > 0$ için her $n \ge n_1$ olduğunda

$$\|\mu_n - \mu\|_w < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.4.7.)$$

olacak şekilde bir $n_1 \in N$ sayısı ve aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için her $n \ge n_2$ olduğunda

$$\|\hat{\mu}_n - h\|_{(p,q)} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.4.8.)$$

olacak şekilde bir $n_2 \in N$ sayısı vardır. Yine $\gamma \in \Gamma$ için

$$|\hat{\mu}(\gamma)| = \left| \int_G \overline{\gamma(t)}\, d\mu(t) \right| \leq \int_G \left|\overline{\gamma(t)}\right| d|\mu|(t)$$

$$= \int_G d|\mu|(t) \leq \int_G w(t)\, d|\mu|(t)$$

olup bu eşitsizlik her $\gamma \in \Gamma$ için doğru olduğundan

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} |\hat{\mu}(\gamma)| = \|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|_{M(G)} \leq \|\mu\|_w$$

olur. dolayısıyla her $n \geq n_1$ için

$$\|\hat{\mu}_n - \hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu_n - \mu\|_{M(G)} \leq \|\mu_n - \mu\|_w < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.4.9.)$$

bulunur. Bunun anlamı ise $(\hat{\mu}_n)_{n\in N}$ dizisi $\hat{\mu}$ fonksiyonuna düzgün dolayısıyla noktasal yakınsar. Yine,

$$\|\hat{\mu}_n - h\|_{(p,q)} \to 0$$

olduğundan $[23]$ den dolayı $(\mu_n)_{n\in N}$ dizisinin h fonksiyonuna hhh. noktasal yakınsayan $(\hat{\mu}_{n_k})$ alt dizisinin varlığı biliniyor. Dolayısıyla aynı $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $n_k \geq n_3$ için

$$|\hat{\mu}_{n_k}(x) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.4.10.)$$

olacak şekilde bir $n_3 \in N$ sayısı vardır. Bu $n_k \geq n_3$ sayılarından birisini sabitleştirelim. Böylece $n_0 = mak\,\{n_1, n_3\}$ ve (4.4.7.) ile (4.4.10.) eşitsizlikleri birlikte kullanılırsa aynı $\varepsilon > 0$ için her $n \geq n_0$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
|\hat{\mu}(x) - h(x)| &= |\hat{\mu}(x) - \hat{\mu}_{n_k}(x) + \hat{\mu}_{n_k}(x) - h(x)| \\
&\leq |\hat{\mu}(x) - \hat{\mu}_{n_k}(x)| + |\hat{\mu}_{n_k}(x) - h(x)| \\
&\leq \|\hat{\mu} - \hat{\mu}_{n_k}\|_\infty + |\hat{\mu}_{n_k}(x) - h(x)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

olup hhh. $\hat{\mu}$ = h elde edilir. Şimdi $k_0 = mak\,\{n_1, n_2\}$ diyelim. Böylece (4.4.7.) ile (4.4.8.) eşitsizlikleri kullanılırsa her $n \geq k_0$ için

$$
\begin{aligned}
\|\mu_n - \mu\|_{M_w} &= \|\mu_n - \mu\|_w + \|\hat{\mu}_n - \hat{\mu}\|_{(p,q)} \\
&= \|\mu_n - \mu\|_w + \|\hat{\mu}_n - h\|_{(p,q)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

bulunur. Ayrıca $\mu \in M_w(p,q)(G)$ olur. O halde $M_w(p,q)(G)$ uzayı Banach uzayıdır.

4.4.7.ÖNERME: $1 \leq p,q < \infty$ olmak üzere $M_w(p,q)(G)$ uzayı girişim işlemine göre bir Banach cebiridir.

İSPAT: $M_w(p,q)(G)$ uzayının bir Banach uzayı olduğu (4.4.6.) Önermede gösterilmişti. Şimdi herhangi $\mu_1, \mu_2 \in M_w(p,q)(G)$ alalım. Buradan $\mu_1, \mu_2 \in M_w(G)$

ve $\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2 \in L(p,q)(\Gamma)$ yazılır. Yine $\|\hat{\mu}_1\|_\infty = K$ olsun. Yine f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $\lambda_f = \lambda_{|f|}$ olduğundan $|f|^* = f^*$ olur. Böylece

$$(\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2)^* = |\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2|^* \leq (K \hat{\mu}_2)^* = K(\hat{\mu}_2)^* \qquad (4.4.11.)$$

bulunur. Buradan

$$\|\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2\|_{(p,q)} = \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} \left[(\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2)^*(t) \right]^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq K \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} \left[(\hat{\mu}_2)^*(t) \right]^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= K \|\hat{\mu}_2\|_{(p,q)} = \|\hat{\mu}_1\|_\infty \|\hat{\mu}_2\|_{(p,q)} \qquad (4.4.12.)$$

elde edilir. Böylece $M_w(G)$ uzayının girişim işlemine göre Banach cebiri olduğu [22] ve (4.4.12.) eşitsizliği , ayrıca 4.4.6.Önermedeki $\|\hat{\mu}\|_\infty \leq \|\mu\|_{M(G)} \leq \|\mu\|_w$ eşitsizliği de kullanılırsa

$$\|\mu_1 * \mu_2\|_{M_w} = \|\mu_1 * \mu_2\|_w + \|\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2\|_{(p,q)}$$

$$\leq \|\mu_1\|_w \|\mu_2\|_w + \|\hat{\mu}_1 \hat{\mu}_2\|_{(p,q)}$$

$$\leq \|\mu_1\|_w \|\mu_2\|_w + \|\hat{\mu}_1\|_\infty \|\hat{\mu}_2\|_{(p,q)}$$

$$\leq \|\mu_1\|_w \|\mu_2\|_w + \|\mu_1\|_w \|\hat{\mu}_2\|_{(p,q)}$$

$$= \|\mu_1\|_w \left(\|\mu_2\|_w + \|\hat{\mu}_2\|_{(p,q)} \right)$$

$$\leq \left(\|\mu_1\|_w + \|\hat{\mu}_1\|_{(p,q)} \right) \|\mu_2\|_{M_w}$$

$$= \|\mu_1\|_{M_w} \|\mu_2\|_{M_w}$$

olup $M_w(p,q)(G)$ uzayı bir Banach cebiridir.

4.4.8.TEOREM: $1 < p,q < \infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ olmak üzere w , (BD.) koşulunu sağlıyorsa bu takdirde $M_w(p,q)(G) = M_{A_w(p,q)}(G)$ olup bu uzaylar birbirlerine homeomorfturlar.

İSPAT: Herhangi $\mu \in M_w(p,q)(G)$ ve $f \in L^1_w(G)$, $f \neq 0$ alalım. Eğer $M_w(p,q)(G) \subset M_w(G)$ kapsaması kullanılırsa $\mu \in M_w(G)$ yazılır. O halde 4.3.1.Teoremden dolayı $A_w(p,q)(G)$ bir $S_w(G)$ uzayı olup [11], çalışmasından dolayı $\mu * f \in A_w(p,q)(G)$ olup

$$\|\mu * f\|_{A_w} \leq \|f\|_{1,w} \|\mu\|_w \leq \|f\|_{1,w} \|\mu\|_{M_w} \qquad (4.4.13.)$$

eşitsizliği yazılır. Buradan

$$\frac{\|\mu * f\|_{A_w}}{\|f\|_{1,w}} \leq \|\mu\|_{M_w}$$

elde edilir. Bunun sonucu $|||\mu|||$ tanımı kullanılırsa ,

$$|||\mu||| \leq \|\mu\|_{M_w} < \infty$$

olur. Böylece $\mu \in M_{A_w(p,q)}(G)$ bulunur.

Tersine herhangi $\mu \in M_{A_w(p,q)}(G)$ alalım. w, (BD.) koşulunu sağladığından $A_w(p,q)(G)$ uzayının $L^1_w(G)$ uzayında sınırlı ve Fourier dönüşümü kompakt destekli fonksiyonlardan oluşan bir $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ yaklaşık biriminin varlığı 4.2.6.Önermeden biliniyor. $\|\mu\| < \infty$ olduğundan $\mu \in M_w(G)$ ve her $\alpha \in I$ için

$$\|\mu * e_\alpha\|_{A_w} = \|\mu * e_\alpha\|_{1,w} + \|\hat{\mu}\,\hat{e}_\alpha\|_{(p,q)} \le \|\mu\|_w \|e_\alpha\|_{1,w} + \|\hat{e}_\alpha\|_\infty \|\hat{\mu}\|_{(p,q)}$$

$$\le \|\mu\|_w \|e_\alpha\|_{1,w} + \|e_\alpha\|_{1,w} \|\hat{\mu}\|_{(p,q)} \le K(\mu)$$

olacak şekilde bir $K(\mu) > 0$ sayısı vardır. Böylece her $\alpha \in I$ için

$$\|\hat{\mu}\,\hat{e}_\alpha\|_{(p,q)} \le \|\mu * e_\alpha\|_{A_w} \le K(\mu)$$

olur. Yine $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ olduğundan $L(p,q)(\Gamma)$ uzayı yansımalı [13] olup Banach-Alaoğlu teoreminden [16] dolayı $(\hat{\mu}\,\hat{e}_\alpha)$ ağının g $\in L(p,q)(\Gamma)$ elemanına zayıf yakınsayan bir $(\hat{\mu}\,\hat{e}_\beta)$ alt ağı vardır. Yine $\hat{G}$ dual grubunun her kompakt alt kümesinde $(\hat{e}_\beta(t))_{\beta\in I}$ ağı 1 fonksiyonuna düzgün yakınsadığından [9], her $\beta > \beta_1$ olduğunda

$$\left|(\hat{\mu}\,\hat{e}_\beta)(t) - \hat{\mu}(t)\right| = |\hat{\mu}(t)|\,\left|\hat{e}_\beta(t) - 1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.4.14.)$$

olacak şekilde bir $\beta_1 \in I$ sayısı vardır. Ayrıca $(\hat{\mu}\,\hat{e}_\beta)$ ağı g $\in L(p,q)(\Gamma)$ elemanına zayıf yakınsadığından noktasal olarak yakınsar. Böylece her $\beta > \beta_2$ olduğunda

$$\left|(\hat{\mu}\,\hat{e}_\beta)(t) - g(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.4.15.)$$

olacak şekilde bir $\beta_2 \in I$ sayısı vardır. Şimdi $\beta_0 = mak\{\beta_1, \beta_2\}$ diyelim ve bir $\beta \ge \beta_0$ sayısını sabitleştirelim. Eğer (4.4.14.) ile (4.4.15.) eşitsizlikleri de kullanılırsa

$$\left|\hat{\mu}(t)-g(t)\right|=\left|\hat{\mu}(t)-(\hat{\mu}\,\hat{e}_\beta)(t)+(\hat{\mu}\,\hat{e}_\beta)(t)-g(t)\right|$$

$$\leq\left|\hat{\mu}(t)-(\hat{\mu}\,\hat{e}_\beta)(t)\right|+\left|(\hat{\mu}\,\hat{e}_\beta)(t)-g(t)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

olup $\hat{\mu}=g$ olur. Böylece $\hat{\mu}\in L(p,q)(\Gamma)$ elde edilir. Buradan $\mu\in M_w(p,q)(G)$ olup $M_w(p,q)(G)=M_{A_w(p,q)}(G)$ elde edilir.

Sonuç olarak $\left(M_{A_w(p,q)}(G),|||.|||\right)$ ve $\left(M_w(p,q)(G),\|.\|_{M_w}\right.$ uzayları Banach uzayı ve $|||\mu|||\leq\|\mu\|_{M_w}$ olur. Böylece [16] dan dolayı $|||.|||$ normu ile $\|.\|_{M_w}$ normu birbirine denktir. Bu ise istenendir.

4.4.9.TEOREM: w , (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde herhangi $T\in M(A_w(p,q)(G))$ verildiğinde her f $\in A_w(p,q)(G)$ için $Tf=\sigma * f$ olacak şekilde bir tek $\sigma\in A'(G)$ vardır.

İSPAT: w , (BD.) koşulunu sağladığından 4.3.1.Teoremden dolayı $A_w(p,q)(G)$ uzayı bir $S_w(G)$ uzayı, 4.1.6.Önermeden dolayı $L^1_w(G)$ üzerinde normlu ideal ve 4.4.2.Önermeden de esas modüldür. Böylece [25] çalışmasındaki 4.2.4.Teoremden dolayı ispat tamamlanır.

4.4.10.TEOREM: w , (BD.) koşulunu sağlasın. Bu takdirde

$$M\left(A_w(p,q)(G),L^1_w(G)\right)\cong M\left(A_w(p,q)(G)\right)\cong M_w(G)$$

olur.

İSPAT: Herhangi bir f $\in A_w(p,q)(G)$ için $\|L_y f\|_{A_w}\approx w(y)$ olduğu 4.1.7.Önermeden biliniyor. O halde [25] çalışmasındaki 4.2.5. ve 4.2.6.Teorem kullanılırsa ispat tamamlanır.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada tanımı verilen $A_w(p,q)(G)$ uzayı [5] ve [23] çalışmalarındaki A(p,q)(G) uzayının bir genelleştirilmesidir. Eğer w = 1 alınırsa [5] ve [23] çalışmalarındaki uzay elde edilir. Yine aynı şekilde bu tezdeki $M\left(L^1_w(G), A_w(p,q)(G)\right)$, $M\left(A_w(p,q)(G)\right)$ ve $M\left(A_w(p,q)(G), L^1_w(G)\right)$ çarpanlar uzaylarıda $M\left(L^1(G), A(p,q)(G)\right)$ $M\left(A(p,q)(G)\right)$ ve $M\left(A(p,q)(G), L^1(G)\right)$ çarpanlar uzayının bir genelleştirilmesidir.

Bu tezde yapılan çalışmalar tanımı [14] çalışmasında verilen ağırlıklı Lorentz uzayları için de yapılabilir.

6.KAYNAKLAR

[1]. **AVCI, H.,1998,** " Lorentz Uzaylarının Tensör Çarpımları ve Çarpanlar Uzayı Doktora Tezi, 19 Mayıs Üniversitesi (94).

[2]. **BLOZINSKI, A.P.,1972,** " On a Convolution Theorem for L(p,q) Spaces" , Trans. of the Amer. Math. Society, Vol. 164,(255-265).

[3]. **BURNHAM,J.T.,1972,** "Closed Ideals in Subalgebras of Banach Algebras" ,Proceedings of the Amer. Math. Society Vol. 32 ,(551-555).

[4].**CARTAN,H.,1967,** " Differential Calculus ", Hermann, Paris-France.

[5].**CHEN,Y.K.-LAI,H.C.,1975,** " Multipliers of the Lorentz Spaces " Hokkaido Math. J. Vol.4,(247-267).

[6].**CIGLER,J.,1969,** " Normed Ideals in $L^1(G)$ " ,Indag Math. 31,(272-282).

[7].**DOMAR,Y.,1956,** " Harmonic Analysis Based on Certain Commutative Banach Algebras ", Acta Math. 96,(1-66).

[8].**DORAN,R.S.-WICHMANN,J.,1979,** " Approximate Identities and Factorization in Banach Modules ", Lecture Notes in Mathematics,768, Springer Verlag (305).

[9].**FEICHTINGER,H.G.-GÜRKANLI.A.T.,1990,** "On a Family of Weighted Convolution Algebras", Internat J. Math. and Sci. Vol.13, No 3,(517-526).

[10].**FISCHER,R.H.-GÜRKANLI,A.T.-LIU,T.S.,1996,** "On a Family of Weighted Spaces", Math. Slovaca,46. No1,(71-82).

[11].**GÜRKANLI.A.T.,** "Multipliers of Some Banach Ideals" ,(Yayınlanması için gönderildi).

[12].**HALMOS,P.R.,1950,** "Measure Theory", Van Nostrand Company, INC.(304).

[13].**HUNT,R.A.,1966,** " On L(p,q) Spaces ", Extrait de L' Enseignement Mathematique, T. XII, Fasc.4 ,(249-277).

[14].**HUNT,R.A.-KURTZ,D.S.,1983,** " The Hardy-Littlewood Maximal Function on L(p,1) ", Indiana University Mathematical Journal, Vol.32, No.1,(155-158).

[15].**LARSEN,R.,1970,** " An Introduction to Theory of Multipliers ", Springer Verlag, New-York (284).

[16].**LARSEN,R.,1973,** " Functional Analysis ", Marcel Dekker INC. (497).

[17].**LARSEN,R.,1973,** " Banach Algebras an Introduction ", Marcel Dekker INC. New-York (345).

[18].**REITER,H.,1968,** " Classical Harmonic Analysis and Locally Compact Groups", Oxford at the Clarendon Press (200).

[19].**RIEFFEL,M.A.,1967,** " Induced Banach Representation of Banach Algebras and Locally Compact Groups ", Journal of Functional Analysis, 1,(443-491).

[20].**RUDIN,W.,1960,** " Fourier Analysis on Groups", Interscience Publishers, New-York (285).

[21].**RUDIN,W.,1966,** " Real and Complex Analysis", Mc. Graw Hill, New-York (452).

[22].**SAEKI,S.-THOME,E.L.,1994,** " Lorentz Spaces as L_1 Modules and Multipliers", Hokkaido Math.J. Vol.23,(55-92).

[23].**YAP,L.Y.H.,1969,** " Some Remarks on Convolution Operators and L(p,q) Spaces", Duke Math. J. Vol.36,(647-658).

[24].**YAP,L.Y.H., 1972,** " On Two Classes of Subalgebras of $L^1(G)$", Proceedings of the Japan Acad.,Vol.48, No.5 (314-319).

[25].**YAZICI,M., 1998,** " $S_w(G)$ *ve* $S_{1,w}(G)$ Uzayları ve Bazı Özellikleri", Doktora Tezi, 19 Mayıs Üniversitesi (89).

[26].**WANG,H.C.,1977,** " Homogenous Banach Algebras", Marcel Dekker INC. New-York and Basel (204).

7.ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında Giresun' un Bulancak ilçesinde doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Giresun'da yaptım. 1991-1992 öğretim yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. Aynı yıl Üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsü Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz Anabilim dalında Yüksek Lisans öğrenimime başladım. 1994 yılında da Yüksek Lisans öğrenimimi tamamlayıp aynı yıl Fen Bilimleri Enstitüsünün Doktora programına kayıt oldum. Halen bu öğrenimimi sürdürmekteyim.