

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU FLETT POTANSİYELLERİNİN
DALGACIK TIPLI DÖNÜŞÜM KULLANILARAK TERSLERİNİN İFADE
EDİLMESİ

Nazife TAŞKIN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

OCAK 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU FLETT POTANSİYELLERİNİN
DALGACIK TIPLI DÖNÜŞÜM KULLANILARAK TERSLERİNİN İFADE
EDİLMESİ

Nazife TAŞKIN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

OCAK 2023

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU FLETT POTANSİYELLERİNİN
DALGACIK TIPLI DÖNÜŞÜM KULLANILARAK TERSLERİNİN İFADE
EDİLMESİ

Nazife TAŞKIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS

Bu tez 20/01/2023 tarihinde jüri tarafından Oybirliği ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN (Danışman)

Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ÖZET

GENELLEŞMİŞ KAYMANIN DOĞURDUĞU FLETT POTANSİYELLERİNİN DALGACIK TIPLI DÖNÜŞÜM KULLANILARAK TERSLERİNİN İFADE EDİLMESİ

Nazife TAŞKIN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

OCAK 2023; 34 sayfa

Bu tezde, dalgacık tipli bir dönüşüm kullanılarak genelleşmiş kayma operatörü tarafından üretilen Flett potansiyelleri için ters belirleme formülleri elde ettik.

Genelleşmiş kayma operatörü, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k + 1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=N+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \left(\nu_k > -\frac{1}{2}, k = 1, \dots, N \right)$$

ile ilgilidir.

ANAHTAR KELİMELER: Flett potansiyelleri, Dalgacık tipli dönüşüm, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, Ters belirleme formülleri.

JÜRİ: Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Doç. Dr. Melih ERYİĞİT

Dr. Öğr. Üyesi Zafer ŞANLI

ABSTRACT

EXPRESSING THE INVERSE OF FLETT POTENTIALS GENERATED BY THE GENERALIZED TRANSLATION BY USING A WAVELET LIKE TRANSFORM

Nazife TAŞKIN

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Prof.Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

January 2023; 34 pages

In the thesis, we obtain the inversion formulas for the Flett potentials generated by the generalized translation operator by using a wavelet like transform.

The generalized translation operator is related to the Laplace-Bessel differential operator

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k + 1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=N+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \left(\nu_k > -\frac{1}{2}, k = 1, \dots, N \right)$$

KEYWORDS: Flett potentials, Wavelet like transform, Laplace-Bessel differential operator, Inversion formulas.

COMMITTEE: Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI DOĞAN

Assoc. Prof. Dr. Melih ERYİĞİT

Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamızda

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k + 1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=N+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad \left(\nu_k > -\frac{1}{2}, k = 1, \dots, N \right)$$

Laplace-Bessel diferansiyel operatörünü göz önüne alınmıştır. Bu diferansiyel operatör ilk N değişkenine Bessel diferansiyel operatörünün ve $(n - N)$ değişkene Laplace diferansiyel operatörünün uygulandığı bir hibrit operatördür.

Amacımız Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu genelleşmiş kayma ile tanımlanan Flett potansiyellerinin uygun bir dalgacık tipli dönüşüm kullanarak terslerini belirlemektir.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
3. MATERYAL VE METOT	7
3.1. Fourier-Bessel Analizinden Gerekli Tanım ve Kavramlar	7
3.2. Genelleşmiş Poisson İntegrali	10
3.3. Yardımcı Önteoremler	18
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	20
4.1. Flett Potansiyelleri ve Bazı Özellikleri	20
4.2. Flett Potansiyeli İçin Ters Bulma Formülü	25
5. SONUÇLAR	30
6. KAYNAKLAR	32
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans olarak sunduğum “Genelleşmiş kaymanın doğurduğu Flett Potansiyellerinin Dalgacık tipli dönüşüm kullanılarak terslerinin ifade edilmesi” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

20/01/2023

Nazife TAŞKIN

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

\mathbb{R}^n : n – boyutlu Reel sayılar kümesi

$\mathbb{R}_{N,+}^n$: ilk N -değişkeni pozitif olan n -boyutlu Öklid uzayı

$|E|_\nu$: E kümesinin ağırlıklı Lebesgue ölçümü

$E(x, r)$: $\mathbb{R}_{N,+}^n$ uzayında x -merkezli, $r > 0$ yarıçaplı yuvar

Δ_B : Laplace-Bessel diferansiyel operatörü

Kısaltmalar:

$L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$: $L_{p,\nu}$

1. GİRİŞ

Fourier veya Fourier-Bessel harmonik analizinin önemli teknik araçlarından birisi de potansiyellerdir. Potansiyellere örnek olarak Riesz, Bessel, parabolik, Flett potansiyellerini verebiliriz. Geçmişten günümüze araştırmacılar için potansiyel operatörünün tersini belirleme ilginç problemler arasındadır.

Stein (1961,1971) , Lizorkin (1970) , Wheoden (1968) , Samko (1984) , Rubin (1986, 1996) , Aliev ve Bayrakci (1998) ve birçok matematikçi potansiyellerin terslerini belirlemede hipersingüler integral tekniğini kullanmıştır. Bunun yanında Rubin (1999) tarafından tanımlanan Rubin ve Aliev (2009, 2001, 2005, 2008) tarafından geliştirilen sürekli dalgacık tipli dönüşümler vasıtasıyla Fourier veya Fourier-Bessel analizinde Riesz, Bessel, Parabolik ve Flett potansiyelleri için ters belirleme formülleri bulunmuştur.

Fourier-Bessel harmonik analizinin önemli teknik araçlarından biri olan Bessel veya Laplace-Bessel diferansiyel operatörleri ile ilgili çalışmalar Delsarte (1938) ile başlamıştır. Daha sonra Levitan (1951), Kipriyanov (1967), Lyakhov (1983), Trimeche (1997), Gadyiev ve Aliev (1988), Guliev (2003), Bayrakci (1998) ve birçok matematikçi çalışmalarında bu diferansiyel operatörleri kullanmıştır.

Flett (1971) tarafından tanımlanan klasik Flett potansiyellerinin (Laplace operatörünün doğurduğu) dalgacık tipli dönüşüm ve hipersingüler integral tekniği ile terslerinin belirlenmesi Aliev, Sezer ve Eryiğit (2006), Sezer (2009) tarafından yapılmıştır. Bununla birlikte Bessel diferansiyel operatörünü tek değişkene uygulayarak elde edilen Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen Flett potansiyellerinin uygun dalgacık tipli dönüşüm ile terslerinin bulunması Aliev ve Yücel (2018) tarafından yapılmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı ilk N -değişkene Bessel ve $(n - N)$ değişkene Laplace diferansiyel operatörünü uygulayarak elde ettiğimiz Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B ile ilişkilendirilen Flett potansiyellerinin uygun bir dalgacık tipli dönüşüm kullanılarak tersleri belirlemektir. Dolayısıyla bu çalışmada yeni bir diferansiyel operatör kullanılarak Flett potansiyelleri tanımlanıp, özellikleri incelenmiştir. Ayrıca terslerinin belirlenmesinde kullanılan dalgacık dönüşüm için genelleşmiş Poisson İntegrali elde edilip

bazı özelliklerine yer verilmiştir. Çalışmamızın bu konuda çalışan bilim insanlarına örnek olmasını amaçlamaktayız.

Tez, Kaynak taraması, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma ve Sonuç bölümlerinden oluşmaktadır. Kaynak taraması bölümünde bizim için gerekli olan analizin temel tanım ve kavramları verilmiştir. Materyal ve Metot bölümünde ilk olarak Fourier-Bessel analizinden gerekli kavramlar ve sonra genelleşmiş Poisson İntegrali elde edilip, özellikleri incelenmiştir. Bulgular kısmında ise Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Flett potansiyellerinin tersi uygun bir dalgacık tipli dönüşüm kullanılarak elde edilmiştir.

Çalışmamız boyunca kıymetli zamanını ve değerli bilgilerini benden esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Simten Bayrakçı Doğan'a ve benden desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

2. KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan reel analizin ve Fourier harmonik analizinin temel tanım ve kavramlarını ifade edeceğiz. Temel kavramlar için Folland (1984), Grafakos (2009) ve Stein-Weiss (1971) kaynaklarına bakılabilir.

\mathbb{R}^n , n-boyutlu Öklid uzayı olsun. \mathbb{R}^n üzerinde ölçülebilir fonksiyonların klasik Lebesgue uzayı $L_p(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$L_p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty \right\}$$

ile tanımlanır. Burada $dx = dx_1 \cdots dx_n$ dir. Ayrıca $p = \infty$ için $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ uzayı

$$L_\infty(\mathbb{R}^n) = \{f : \|f\|_\infty < \infty\}$$

ve

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \inf \{ \lambda > 0 : |\{x : |f(x)| > \lambda\}| = 0 \}$$

dir.

$C(\mathbb{R}^n)$ ile \mathbb{R}^n 'de sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayını gösterelim. İyi bilindiği gibi $f \in C(\mathbb{R}^n)$ için $C(\mathbb{R}^n)$ uzayında norm $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$ ile tanımlanır. $C_0(\mathbb{R}^n)$ ise $C(\mathbb{R}^n)$ uzayının bir alt uzayıdır ve

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in C(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right\}$$

ile tanımlanır. Burada $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ Öklid normudur.

$C^\infty(\mathbb{R}^n)$, \mathbb{R}^n 'de her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı olmak üzere Schwartz test fonksiyonları uzayı $S(\mathbb{R}^n)$

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \text{ için } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) \right| < \infty \right\}$$

dir. Burada

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \text{ ve } \frac{\partial^\beta f}{\partial x^\beta}(x) = \frac{\partial^{\beta_1 + \cdots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} f(x_1, \cdots, x_n)$$

dir.

Ayrıca $L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile \mathbb{R}^n Öklid uzayının her δ - komşuluğunda Lebesgue integrallenebilen fonksiyonlar uzayını gösterelim.

\mathbb{R}^n Öklid uzayında x -merkezli $r > 0$ yarıçaplı yuvar

$$E(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < r\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca \mathbb{R}^n Öklid uzayında bir önerme sıfır ölçümlü küme dışında sağlanıyorsa, hemen hemen her yerde (*h.h.y*) sağlanıyor demektir. Örneğin \mathbb{R}^n de ölçülebilir f ve g fonksiyonları için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}| = 0$$

ise f ile g fonksiyonlarına hemen hemen her yerde eşit fonksiyonlar denir veya kısaca $f = g$, *h.h.y* ile yazılır. Burada $|\cdot|$, kümenin Lebesgue ölçümünü gösteriyor.

Bu kesimi reel analizden ve Fourier analizden iyi bilinen birkaç teorem ile bitirelim.

Teorem 2.1. (*Fubini Teoremi*)

(X, M, μ) ve (Y, N, ν) σ -sonlu ölçüm uzayları ve $\mu \times \nu$ ise $M \times N$ kümesinde μ ile ν ölçümlerinin çarpımı olsun. Eğer $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre Lebesgue integrallenebilir ise

$$\int_Y f(x, y) d\nu(y) < \infty, \text{ h.h. } x \in X \text{ ve } \int_X f(x, y) d\mu(x) < \infty, \text{ h.h. } y \in Y$$

ve

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2. (*Hölder Eşitsizliği*)

$f \in L_p(\mathbb{R}^n), g \in L_q(\mathbb{R}^n), 1 \leq p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) g(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

dir.

Teorem 2.3. (Minkowski İntegral Eşitsizliği)

(X, M, μ) ve (Y, N, ν) σ -sonlu ölçüm uzayları ve $f(x, y)$, $M \times N$ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere $p \geq 1$ için integraller için Minkowski eşitsizliği

$$\left(\int_X \left(\int_Y |f(x, y)| d_\nu(y) \right)^p d_\mu(x) \right)^{1/p} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x, y)|^p d_\mu(x) \right)^{1/p} d_\nu(y)$$

şeklindedir.

Teorem 2.4. (Hardy-Littlewood Maksimal teoremi)

$f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere \mathbb{R}^n de Hardy-Littlewood Maksimal operatörü

$$(Mf)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| dy$$

ile tanımlanır. Burada Ω_n, \mathbb{R}^n uzayının $E(0, 1)$ -birim yuvarının Lebesgue ölçümüdür.

$f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $1 \leq p < \infty$ için öyle $A = A(n, p)$ sabiti vardır ki

$$\|Mf\|_p \leq A \|f\|_p$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer bir ifade ile Mf operatörü $(L_p(\mathbb{R}^n), L_p(\mathbb{R}^n))$ -güçlü tiplidir. $p = 1$ için Mf operatörü $(L_1(\mathbb{R}^n), L_1(\mathbb{R}^n))$ -zayıf tiplidir ve her $\lambda > 0$ için

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > \lambda\}| \leq \frac{A \|f\|_1}{\lambda}$$

sağlanır.

Teorem 2.5. (X, M, μ) ölçüm uzayı ve $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ lineer operatörler ailesi de $L_p(X, M, \mu)$, $(1 \leq p < \infty)$ uzayında tanımlanmış olsun. Eğer $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonksiyonu $\mu \times \nu$ ölçümüne göre Lebesgue integrallenebilir ise $f \in L_p(X, M, \mu)$ olmak üzere

$$(T^*f)(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon f)(x)|$$

diyelim. Eğer T^* yarı-lineer operatörü $(L_p(X, M, \mu), L_q(X, M, \mu))$ -zayıf tipli; yani, her $\lambda > 0$ için

$$\mu \{y \in X : (T^*f)(y) > \lambda\} \leq \left(\frac{C \|f\|_p}{\lambda} \right)^q, \quad (1 \leq q < \infty)$$

ve X' in yoğun bir alt kümesinden alınmış her x için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon f)(x) = f(x)$$

ise

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon f)(x) = f(x), \text{ h.h. } x \in X$$

dir.



3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde ilk olarak Fourier-Bessel analizinden gerekli tanım ve kavramları vereceğiz. Ardından genelleşmiş Poisson integralini elde edip bazı gerekli özelliklerini kanıtlayacağız. Bu kısmın son konusu tezimizin esas teoremlerinde kullanılacak olan önteoremleri ifade etmek olacaktır.

3.1. Fourier-Bessel Analizinden Gerekli Tanım ve Kavramlar

\mathbb{R}^n Öklid uzayının alt kümesi olan n -boyutlu uzayı

$$\mathbb{R}_{N,+}^n = \{x = (x', x'') \in \mathbb{R}^n, x' = (x_1, \dots, x_N); x_1, \dots, x_N > 0, 1 \leq N \leq n\}$$

şeklinde tanımlayalım. $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ multi-indexi ise $\nu_1 > -1/2, \dots, \nu_N > -1/2$ şeklinde tanımlanmış sabit tutulmuş sayılardan oluşur ve $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_N$ dir.

$E \subset \mathbb{R}_{N,+}^n$ ölçülebilir kümesinin Lebesgue ölçümü $|E|_\nu = \int_E (x')^{2\nu+1} dx$ ile tanımlanır. Burada

$$(x')^{2\nu+1} dx = x_1^{2\nu_1+1} \dots x_N^{2\nu_N+1} dx_1 \dots dx_N$$

dir. Ayrıca $\mathbb{R}_{N,+}^n$ uzayında x -merkezli, $r > 0$ yarıçaplı yuvar

$$E(x, r) = \{y \in \mathbb{R}_{N,+}^n : |x - y| < r\}$$

ile tanımlanır. Ayrıca

$$|E(0, r)|_\nu = \frac{1}{r^{(n+2|\nu|+N)}} \omega(n, \nu, N) \text{ ve } \omega(n, \nu, N) = |E(0, 1)|_\nu$$

dir.

Bu tez çalışmasında bizim göz önüne aldığımız Laplace-Bessel differansiyel operatörü

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{2\nu_k + 1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=N+1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

Bu diferansiyel operatörde ilk N değişkene Bessel diferansiyel operatörü ve $n - N$ değişkene Laplace diferansiyel operatörü uygulanmaktadır.

Bir boyutlu halde Bessel diferansiyel operatörü

$$B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t} \frac{d}{dt}, \quad 0 < t < \infty, \nu > 0$$

ile tanımlanır. Ayrıca $\Phi = \Phi(x, y)$ olmak üzere

$$\begin{cases} B_x \Phi = B_y \Phi, & 0 < x, y < \infty \\ \Phi|_{x=0} = f(y), & \frac{\partial \Phi}{\partial x}|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

Sınır-değer probleminin çözümü

$$\Phi(x, y) \equiv S^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu)\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 - 2xy \cos \theta + y^2}\right) \sin^{2\nu-1} \theta d\theta$$

ile tanımlanan genelleşmiş kayma (Bessel kayması) operatörüdür. Bessel diferansiyel operatörü ile ilgili ilk çalışmalar Delsarte (1938) ve Levitan (1951)'nin çalışmaları ile başlamıştır ve bu diferansiyel operatör Fourier-Bessel harmonik analizinin temel çalışma araçlarından biri olmuştur.

Fourier-Bessel harmonik analizinde genelleşmiş girişim operatörü

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} f(y)(T^y g)(x)(y')^{2\nu+1} dy, \quad x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$$

ile tanımlanır ve burada genelleşmiş kayma operatörü

$$T^y f(x) = \prod_{k=1}^N \frac{\Gamma(\nu_k + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu_k + 1/2)} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi f((x^i, y^i)_\theta, x^i - y^i) d_\nu(\theta)$$

$$(x^i, y^i)_\theta = ((x_1, y_1)_{\theta_1}, \dots, (x_N, y_N)_{\theta_N});$$

$$(x_k, y_k)_{\theta_k} = (x_k^2 - 2x_k y_k \cos \theta_k + y_k^2)^{1/2},$$

$k = 1, 2, \dots, N$ ve $d_\nu(\theta) = \prod_{k=1}^N \sin^{2\nu_k} \theta_k d\theta_k$ dir.

Bu genelleşmiş kayma operatörü, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B ile ilişkilidir. İlk N -değişkene Bessel kayması ve $n - N$ değişkene klasik kayma uygulanarak elde edilmektedir.

Bu tezimizde çalışacağımız Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar uzayını $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ ile göstereceğiz. $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\|f\|_{p,\nu} = \left(\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} |f(x)|^p (x^i)^{2\nu+1} dx \right)^{1/p} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty$$

olmasıdır. $\mathbb{R}_{N,+}^n$ Öklid uzayında tanımlı Schwartz test fonksiyonları uzayının $\mathbb{R}_{N,+}^n$ uzayına kısıtlanmışını da $S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ ile göstereceğiz. $S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayının Schwartz fonksiyonları x_1, x_2, \dots, x_N değişkenlerine göre çift fonksiyonlarda oluşur. $S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayının supremum normuna göre kapanışını $C_0(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ ile göstereceğiz ve $L_{\infty,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n) = C_0(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ dir.

Löfström ve Peetre (1969) dan iyi bilinir ki

$$\|T^y f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}, \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (3.2)$$

ve

$$\|T^y f - f\|_{p,\nu} \rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow 0$$

dir.

Bu çalışmamız için Δ_B diferansiyel operatörü ile ilişkilendirilen Fourier-Bessel dönüşümü ve onun tersi

$$(F_\nu f)(x) = \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} f(y) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y')^{2\nu+1} dy, \quad x \in \mathbb{R}_{N,+}^n,$$

$$(F_\nu^{-1} f)(x) = c(n, \nu, N) (F_\nu f)(x', -x'')$$

ile tanımlanır. Burada

$$c(n, \nu, N) = \left[(2\pi)^{n-N} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^N \Gamma^2(\nu_k + 1) \right]^{-1}, \quad |\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_N$$

dir. Ayrıca burada

$$j_p(t) = 2^p \Gamma(p+1) t^{-p} J_p(t), \quad p > -1/2, \quad 0 < t < \infty, \quad j_p(0) = 1$$

dir ve $J_p(t)$, Bessel'in birinci tip fonksiyonudur. Bundan başka

$$\langle x'', y'' \rangle = x_{N+1} y_{N+1} + \dots + x_n y_n, \quad (y')^{2\nu+1} dy = y_1^{(2\nu_1+1)} \dots y_N^{(2\nu_N+1)} dy_1 \dots dy_n$$

dir.

İyi bilinir ki (Levitan (1951), Trimeche (1997))

$$F_\nu(f \otimes g) = F_\nu(f) F_\nu(g)$$

dir. Ayrıca aşağıdaki Young eşitsizliği de sağlanır:

$$\|f \otimes g\|_{r,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu} \|g\|_{q,\nu}, \quad 1 \leq p, q, r \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}. \quad (3.3)$$

3.2. Genelleşmiş Poisson İntegrali

Genelleşmiş Poisson İntegrali, genelleşmiş kayma tarafından üretilen girişim tipli bir integral operatördür. Bu integral operatörün çekirdeği $e^{-t|y|}$, $y \in \mathbb{R}_{N,+}^n$, $t > 0$ fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümüdür. Dolayısıyla, öncelikle $e^{-|y|}$, $y \in \mathbb{R}_{N,+}^n$ fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümünü hesaplamak ile çalışmamıza başlayalım. Bunun için

$$e^{-\beta} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} e^{-\beta^2/4z} dz$$

formülünü kullanacağız (Stein ve Weiss (1971),p.6).

Böylece Fubini teoremi göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} (F_{\nu} e^{-|y|})(x) &= \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} e^{-|y|} e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y')^{2\nu+1} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} e^{-|y|^2/4z} dz \right] e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y')^{2\nu+1} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} e^{-|y|^2/4z} e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) dz (y')^{2\nu+1} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \left[\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} e^{-(y_1^2 + \dots + y_n^2)/4z} e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y')^{2\nu+1} dy \right] dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \prod_{k=1}^N \left(\int_0^{\infty} e^{-y_k^2/4z} j_{\nu_k}(x_k y_k) y_k^{2\nu_k+1} dy_k \right) \prod_{k=N+1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_k^2/4z} e^{-ix_k y_k} dy_k \right) dz \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Bu son ifade de öncelikle

$$\int_0^{\infty} e^{-y_k^2/4z} j_{\nu_k}(x_k y_k) y_k^{2\nu_k+1} dy_k$$

integralini hesaplayalım. Bunun için $j_p(t) = 2^p \Gamma(p+1) \frac{J_p(t)}{t^p}$, $p > \frac{-1}{2}$ eşitliğini kullanalım. Dolayısıyla

$$j_{\nu_k}(x_k y_k) = 2^{\nu_k} \Gamma(\nu_k + 1) \frac{J_{\nu_k}(x_k y_k)}{(x_k y_k)^{\nu_k}}$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} e^{-y_k^2/4z} j_{\nu_k}(x_k y_k) y_k^{2\nu_k+1} dy_k &= 2^{\nu_k} \Gamma(\nu_k + 1) \int_0^{\infty} e^{-y_k^2/4z} J_{\nu_k}(x_k y_k) x_k^{-\nu_k} y_k^{-\nu_k} y_k^{2\nu_k+1} dy_k \\
&= 2^{\nu_k} \Gamma(\nu_k + 1) x_k^{-\nu_k} \int_0^{\infty} e^{-y_k^2/4z} J_{\nu_k}(x_k y_k) y_k^{\nu_k+1} dy_k \\
&= 2^{\nu_k} \Gamma(\nu_k + 1) x_k^{-\nu_k} x_k^{\nu_k} (2z)^{\nu_k+1} e^{-x_k^2 z} \\
&= 2^{2\nu_k+1} \Gamma(\nu_k + 1) z^{\nu_k+1} e^{-x_k^2 z}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada aşağıdaki Gradshteyn-Ryzhik (1994)'in 706. sayfasındaki formül

$$\int_0^{\infty} y^{\nu+1} e^{-\alpha y^2} J_{\nu}(\beta y) dy = \frac{\beta^{\nu}}{(2\alpha)^{\nu+1}} e^{-\beta^2/4\alpha}, \quad (\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} \nu > -1)$$

kullanılmıştır. Ayrıca

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y_k^2/4z} e^{-ix_k y_k} dy_k = 2\sqrt{\pi z} e^{-x_k^2 z}$$

dir. Böylece bulduklarımızı (3.4) ifadesinde yerine yazarak

$$\begin{aligned}
(F_{\nu} e^{-|y|})(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} \prod_{k=1}^N (2^{2\nu_k+1} \Gamma(\nu_k + 1) z^{\nu_k+1} e^{-x_k^2 z}) \prod_{k=N+1}^n (2\sqrt{\pi z} e^{-x_k^2 z}) dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2|\nu|+N} 2^{n-N} (\sqrt{\pi})^{n-N} \prod_{k=1}^N \Gamma(\nu_k + 1) \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} z^{|\nu|+N} (\sqrt{z})^{n-N} e^{-|x|^2 z} dz \\
&= 2^{2|\nu|+n} \pi^{\frac{n-N-1}{2}} \prod_{k=1}^N \Gamma(\nu_k + 1) \int_0^{\infty} e^{-(1+|x|^2)z} z^{|\nu|+\frac{N+n-1}{2}} dz \\
&= \dots t = (1 + |x|^2)z, \quad dt = (1 + |x|^2)dz \dots \\
&= 2^{2|\nu|+n} \pi^{\frac{n-N-1}{2}} \prod_{k=1}^N \Gamma(\nu_k + 1) \int_0^{\infty} e^{-t} (1 + |x|^2)^{-|\nu|-\frac{N+n-1}{2}} t^{|\nu|+\frac{N+n-1}{2}} (1 + |x|^2)^{-1} dt \\
&= 2^{2|\nu|+n} \pi^{\frac{n-N-1}{2}} \prod_{k=1}^N \Gamma(\nu_k + 1) (1 + |x|^2)^{-(|\nu|+\frac{N+n+1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{|\nu|+\frac{N+n-1}{2}} dt \\
&= 2^{2|\nu|+n} \pi^{\frac{n-N-1}{2}} \prod_{k=1}^N \Gamma(\nu_k + 1) (1 + |x|^2)^{-(|\nu|+\frac{N+n+1}{2})} \Gamma(|\nu| + \frac{N+n+1}{2})
\end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca

$$c(n, \nu, N) = \left[(2\pi)^{n-N} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^N \Gamma^2(\nu_k + 1) \right]^{-1}$$

$$(\sqrt{c(n, \nu, N)})^{-1} = (2\pi)^{\frac{n-N}{2}} 2^{|\nu|} \prod_{k=1}^N \Gamma(\nu_k + 1)$$

dir. Buradan

$$(F_\nu e^{-|y|})(x) = (\sqrt{c(n, \nu, N)})^{-1} 2^{|\nu| + \frac{n+N}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(|\nu| + \frac{N+n+1}{2})}{(1 + |x|^2)^{|\nu| + \frac{N+n+1}{2}}}$$

olur.

Bundan başka

$$\begin{aligned} F_\nu(f(\lambda y))(x) &= \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} f(\lambda y) e^{-i\langle x^{\parallel}, y^{\parallel} \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y^{\parallel})^{2\nu+1} dy \\ &= \dots z = \lambda y, dz = \lambda^n dy \dots \\ &= \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} f(z) e^{-i\langle x^{\parallel}, \frac{z^{\parallel}}{\lambda} \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}\left(x_k \frac{z_k}{\lambda}\right) \lambda^{-2|\nu|-N} (z^{\parallel})^{2\nu+1} \lambda^{-n} dz \\ &= \lambda^{-2|\nu|-N-n} (F_\nu f(y))\left(\frac{x}{\lambda}\right), \lambda > 0 \end{aligned}$$

dir.

Böylece

$$\begin{aligned} F_\nu(e^{-t|y|})(x) &= t^{-2|\nu|-N-n} (F_\nu e^{-|y|})\left(\frac{x}{t}\right), t > 0 \\ &= t^{-2|\nu|-N-n} \left(\sqrt{c(n, \nu, N)}\right)^{-1} 2^{|\nu| + \frac{n+N}{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(|\nu| + \frac{N+n+1}{2})}{(1 + \frac{|x|^2}{t^2})^{|\nu| + \frac{N+n+1}{2}}} \\ &= \left(\sqrt{c(n, \nu, N)}\right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{|\nu| + \frac{n+N+1}{2}} \Gamma(|\nu| + \frac{n+N+1}{2}) \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{|\nu| + \frac{N+n+1}{2}}} \end{aligned}$$

olur. Buradan genelleşmiş Poisson çekirdeği

$$P_\nu(|x|; t) = \sqrt{c(n, \nu, N)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{|\nu| + \frac{n+N+1}{2}} \Gamma(|\nu| + \frac{n+N+1}{2}) \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{|\nu| + \frac{N+n+1}{2}}} \quad (3.5)$$

ile tanımlanır.

Aşağıda genelleşmiş Poisson çekirdeğinin temel özelliklerini ifade edip, ispatlayacağız.

Teorem 3.6. 1)

$$F_\nu(P_\nu(\cdot; t))(x) = e^{-t|x|}, \quad t > 0; \quad (3.6)$$

2)

$$\|P_\nu(\cdot; t)\|_{1,\nu} = 1, \quad t > 0; \quad (3.7)$$

3)

$$P_\nu(|x|; t) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_{N,+}^n, \quad t > 0;$$

4)

$$P_\nu(|x|; t+s) = P_\nu(|x|; t) \otimes P_\nu(|x|; s) \equiv \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) T^y (P_\nu(|x|; s)) (y')^{2\nu+1} dy;$$

5)

$$P_\nu(|x|; t) = t^{-(2|\nu|+N+n)} P_\nu(t^{-1}|x|; 1), \quad t > 0. \quad (3.8)$$

İspat 1) (3.6) ifadesini kanıtlamak için eşitliğin her iki yanından ters Fourier-Bessel dönüşümü almak yeterlidir. Şöyle ki

$$F_\nu^{-1}(e^{-t|\cdot|})(x) = c(n, \nu, N) F_\nu(e^{-t|\cdot|})(x', -x'')$$

$$\begin{aligned} &= c(n, \nu, N) \left(\sqrt{c(n, \nu, N)} \right)^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{|\nu| + \frac{n+N+1}{2}} \Gamma(|\nu| + \frac{n+N+1}{2}) \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{|\nu| + \frac{N+n+1}{2}}} \\ &= P_\nu(|x|; t) \end{aligned}$$

2) (3.6) ifadesinden

$$\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y')^{2\nu+1} dy = e^{-t|x|}, \quad t > 0$$

eşitliğini yazarız. Bu eşitliğin iki yanında $x = 0$ yazarak ve $j_p(0) = 1$ eşitliğini kullanarak

$$\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) (y')^{2\nu+1} dy = 1$$

eşitliği elde edilir.

3) Genelleşmiş Poisson çekirdeğinin tanımından $\forall x \in \mathbb{R}_{N,+}^n, t > 0$ için istenilen açıktır.

4) Bu son ifade genelleşmiş Poisson çekirdeğinin yarı-grup özelliğidir ve eşitliğin, her iki yanından Fourier - Bessel dönüşümü elde edilir.

5) Genelleşmiş Poisson çekirdeğinin (3.5) tanımını aşağıdaki gibi yazalım. Böylece

$$\begin{aligned} P_\nu(\lambda |x|; \lambda t) &= \sqrt{c(n, \nu, N)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{|\nu| + \frac{n+N+1}{2}} \Gamma(|\nu| + \frac{n+N+1}{2}) \frac{\lambda t}{(\lambda^2 t^2 + \lambda^2 |x|^2)^{|\nu| + \frac{n+N+1}{2}}} \\ &= \lambda^{-2|\nu| - N - n} P_\nu(|x|; t) \end{aligned}$$

olur. Bu son ifadede $\lambda = \frac{1}{t}$ alınır

$$P_\nu(|x|; t) = t^{-(2|\nu| + N + n)} P_\nu(t^{-1} |x|; 1), \quad t > 0$$

elde edilir. □

Şimdi genelleşmiş kaymanın doğurduğu girişim tipli integral operatörü olan genelleşmiş Poisson integralini tanımlayabiliriz. f fonksiyonunun genelleşmiş Poisson integrali $V_t f, t > 0$ ile gösterilir ve

$$(V_t f)(x) = (f \otimes P_\nu(\cdot; t))(x) = \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) T^y f(x) (y')^{2\nu+1} dy \quad (3.9)$$

ile tanımlanır. Genelleşmiş Poisson integralinin $V_t V_k f = V_{t+k} f, (t, k > 0)$ yarı-grup özelliği Fourier-Bessel dönüşümü kullanılarak görülür:

$$\begin{aligned} F_\nu(V_{t+k} f)(x) &= e^{-(t+k)|x|} (F_\nu f)(x) \\ &= e^{-t|x|} (e^{-k|x|} (F_\nu f)(x)) \\ &= e^{-t|x|} F_\nu(V_k f)(x) \\ &= F_\nu(V_t V_k f)(x). \end{aligned}$$

Aşağıdaki teorem ile genelleşmiş Poisson integralinin bazı temel özelliklerini ifade edeceğiz.

Teorem 3.7. *Genelleşmiş Poisson integrali $V_t f, t > 0$ (3.9) ifadesinde tanımlandığı gibi olsun. Bu durumda $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n), 1 \leq p \leq \infty$ için*

1)

$$\|V_t f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}, \quad t > 0 \quad (3.10)$$

2)

$$\sup_{t>0} |(V_t f)(x)| \leq (M_\nu f)(x), t > 0, x \in \mathbb{R}_{N,+}^n \quad (3.11)$$

dir. Burada $M_\nu f$, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür ve

$$(M_\nu f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+2|\nu|+N}\omega(n, \nu, N)} \int_{E(0,r)} T^y f(x)(y')^{2\nu+1} dy \quad (3.12)$$

ile tanımlanır. Burada belirtmek gerekir ki bu operatör $1 < p \leq \infty$ için güçlü- $(L_{p,\nu}, L_{p,\nu})$ ve zayıf- $(L_{1,\nu}, L_{1,\nu})$ etki göstermektedir; (Guliev 2003).

3)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_{N,+}^n} |(V_t f)(x)| \leq ct^{-(2|\nu|+n+N)/p} \|f\|_{p,\nu}, (1 \leq p < \infty). \quad (3.13)$$

4)

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (V_t f)(x) = f(x) \quad (3.14)$$

dir. Burada limit $L_{p,\nu}$ normunda ve h.h. $x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$ için noktasaldır. Ayrıca $f \in L_{\infty,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n) \equiv C_0(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ için yakınsama düzgündür.

İspat 1) $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ için Minkowski integral eşitsizliğini, (3.2) ve (3.7) ifadelerini kullanılarak

$$\begin{aligned} \|V_t f\|_{p,\nu} &= \left\| \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) T^y f(x)(y')^{2\nu+1} dy \right\|_{p,\nu} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} \left| \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) T^y f(x)(y')^{2\nu+1} dy \right|^p (x')^{2\nu+1} dx \right)^{1/p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} \left(\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} (P_\nu(|y|; t))^p |T^y f(x)|^p (x')^{2\nu+1} dx \right)^{1/p} (y')^{2\nu+1} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) \|T^y f\|_{p,\nu} (y')^{2\nu+1} dy \\ &= \|T^y f\|_{p,\nu} \|P_\nu(\cdot; t)\|_{1,\nu} \\ &\leq \|f\|_{p,\nu} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu genelleşmiş Poisson integralinin $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayından $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayına sınırlı olması demektir.

2) (3.11) eşitsizliğini kanıtlamak için öncelikle aşağıdaki eşitsizliği gösterelim.

$\varphi \in L_{1,\nu}$, radyal ($\varphi(x) = \varphi(|x|)$) ve $\psi(r) = \varphi(|x|)$, $r > 0$ negatif olmayan ve $[0, \infty)$ da azalan fonksiyon olmak üzere $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ için

$$\sup_{r>0} |(f \otimes \varphi_r)(x)| \leq \|\varphi\|_{1,\nu} (M_\nu f)(x) \quad (3.15)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\varphi_r(x) = r^{-n-2|\nu|-N} \varphi(\frac{x}{r})$, $r > 0$ dir. Bu eşitsizliği ilk olarak basamak fonksiyonları için görelim.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\omega(n,\nu,N)} & , \quad x \in E(0,1) \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}_{N,+}^n \setminus E(0,1) \end{cases}$$

olsun. Açık ki $\|\varphi\|_{1,\nu} = 1$ dir. Buradan

$$\sup_{r>0} |(f \otimes \varphi_r)(x)| = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+2|\nu|+N} \omega(n,\nu,N)} \int_{E(0,r)} T^y f(x) (y')^{2\nu+1} dy = (M_\nu f)(x)$$

olur. Burada $M_\nu f$, (3.12) de tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal operatördür. Şimdi φ basamak fonksiyonlarının lineer bileşimi olmak üzere

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^m c_k \chi_{E(0,t_k)}(x); \quad c_k \geq 0$$

şeklinde alınırsa

$$\begin{aligned} |(f \otimes \varphi_r)(x)| &= \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{r^{n+2|\nu|+N}} \int_{E(0,rt_k)} T^y f(x) (y')^{2\nu+1} dy \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{c_k \omega(n,\nu,N) t_k^{n+2|\nu|+N}}{(rt_k)^{n+2|\nu|+N}} \int_{E(0,rt_k)} T^y f(x) (y')^{2\nu+1} dy \\ &\leq (M_\nu f)(x) \sum_{k=1}^m c_k \omega(n,\nu,N) t_k^{n+2|\nu|+N} \\ &= (M_\nu f)(x) \sum_{k=1}^m c_k \left(\int_{E(0,t_k)} (y')^{2\nu+1} dy \right) \\ &= (M_\nu f)(x) \sum_{k=1}^m c_k \left(\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} \chi_{E(0,t_k)}(y) (y')^{2\nu+1} dy \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (M_\nu f)(x) \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} \left(\sum_{k=1}^m c_k \chi(y)_{E(0,t_k)} \right) (y')^{2\nu+1} dy \\
&= \|\varphi\|_{1,\nu} (M_\nu f)(x)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\sup_{r>0} |(f \otimes \varphi_r)(x)| \leq \|\varphi\|_{1,\nu} (M_\nu f)(x)$$

bulunur. Basamak fonksiyonları $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayında yoğun olduğundan ispat herhangi $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ için yaklaşım yöntemi ile tamamlanır. Şimdi (3.15) eşitsizliğinde φ fonksiyonu olarak genelleşmiş Poisson çekirdeğini alırsak (3.11) eşitsizliğini elde ederiz.

3) (3.13) eşitsizliği görmek için Hölder eşitsizliğinden faydalanacağız. Böylece (3.2) ve (3.8) ifadelerini göz önüne alınarak ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
|(V_t f)(x)| &= |(f \otimes P_\nu(\cdot; t))(x)| \leq \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} |T^y f(x)| P_\nu(|y|; t) (y')^{2\nu+1} dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} |T^y f(x)|^p (y')^{2\nu+1} dy \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} |P_\nu(|y|; t)|^q (y')^{2\nu+1} dy \right)^{1/q} \\
&= \|T^y f\|_{p,\nu} \left(\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} t^{-(2|\nu|+n+N)q} |P_\nu(t^{-1}|y|; 1)|^q (y')^{2\nu+1} dy \right)^{1/q} \\
&= \dots z = t^{-1}y, dz = t^{-n}dy, (y')^{2\nu+1} = t^{2|\nu|+N} (z')^{2\nu+1} \dots \\
&\leq \|f\|_{p,\nu} t^{-(2|\nu|+n+N)} t^{(2|\nu|+n+N)/q} \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} |P_\nu(|z|; 1)|^q (z')^{2\nu+1} dz \\
&= ct^{-(2|\nu|+n+N)/p} \|f\|_{p,\nu}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada c -sabit

$$c = \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} |P_\nu(|z|; 1)|^q (z')^{2\nu+1} dz$$

dir. Son olarak her iki yandan $x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$ ler üzerinden supremum alınarak (3.13) eşitsizliği elde edilir.

4) Önce $L_{p,\nu}$ -normunda yakınsamayı gösterelim. Bunun için Minkowski eşitsizliğini

ve (3.7) ifadesini göz önüne alarak

$$\begin{aligned} \|V_t f - f\|_{p,\nu} &= \left\| \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) (T^y f(x) - f(x)) (y')^{2\nu+1} dy \right\|_{p,\nu} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|y|; t) \|T^y f(\cdot) - f(\cdot)\|_{p,\nu} (y')^{2\nu+1} dy \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafına (3.8) ifadesi olan

$$P_\nu(|y|; t) = t^{-(2|\nu|+N+n)} P_\nu(t^{-1}|y|; 1), \quad t > 0$$

eşitliği uygulanırsa ve ardından $y = t|z|$; $dy = t^n dz$ değişken değişimi yapılarak

$$\begin{aligned} \|V_t f - f\|_{p,\nu} &\leq t^{-(2|\nu|+N+n)} \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(t^{-1}|y|; 1) \|T^y f(\cdot) - f(\cdot)\|_{p,\nu} (y')^{2\nu+1} dy \\ &= t^{-(2|\nu|+N+n)} t^{2|\nu|+N+n} \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} P_\nu(|z|; 1) \|T^{t|z|} f(\cdot) - f(\cdot)\|_{p,\nu} (z')^{2\nu+1} dz \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak Lebesgue'in baskın yakınsama teoremini ve Löffström-Peetre (1969)'nin

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T^t f(\cdot) - f(\cdot)\|_{p,\nu} = 0$$

eşitliği kullanılarak $\lim_{t \rightarrow 0} \|V_t f - f\|_{p,\nu} = 0$ bulunur. İspatın geri kalan kısmı, Aliev-Bayrakci (1998) makalesindeki Teorem 2.2'nin benzeridir. \square

Bu bölümde son olarak esas teoremin ispatında kullanacağımız önteoremleri ispatsız ifade edeceğiz.

3.3. Yardımcı Önteoremler

Önteorem 3.8. (Aliev ve Rubin (2001))

$\mu, [0, \infty)$ aralığında tanımlı sonlu Borel ölçümü ve $\lambda \geq 0$ olsun. Ayrıca μ -ölçümünün $(\lambda + 1)$. mertebeden kesirsel Rieamann-Liouville integrali

$$(I^{\lambda+1} \mu)(s) = \frac{1}{\Gamma(\lambda + 1)} \int_0^s (s - t)^\lambda d\mu(t)$$

olmak üzere

$$k_\lambda(s) = \frac{1}{s} (I^{\lambda+1}\mu)(s) \quad (3.16)$$

olsun. Bu durumda eğer

$$\int_0^\infty t^j d\mu(t) = 0, j = 0, 1, \dots, [\lambda] \quad (\lambda\text{'nın tam kısmı})$$

ve

$$\int_1^\infty t^\gamma d|\mu|(t) < \infty, \gamma > \lambda$$

ise

$$c(\mu, \lambda) \equiv \int_0^\infty k_\lambda(s) ds = \begin{cases} \Gamma(-\lambda) \int_0^\infty t^\lambda d|\mu|(t), & t \notin \mathbb{Z}_+ \\ \frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda!} \int_0^\infty t^\lambda \log t d|\mu|(t), & t \in \mathbb{Z}_+ \end{cases} \quad (3.17)$$

dir. Dahası $\tilde{\mu}(t) = \int_0^\infty e^{-tz} d|\mu|(z)$, μ -ölçümünün Laplace dönüşümü ise

$$c(\mu, \lambda) \equiv \int_0^\infty \frac{\tilde{\mu}(t)}{t^{\lambda+1}} dt \quad (3.18)$$

dir.

Önteorem 3.9. (Gradshteyn ve Ryzhik (1994))

$$\int_1^2 t^{-\alpha-1} (\eta - t)^{\alpha-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{\eta} (\eta - 1)^\alpha, \quad (\eta > 1, \alpha > 0). \quad (3.19)$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu tez çalışmasında amacımız öncelikle genelleşmiş kaymanın doğurduğu Flett potansiyelini tanımlamak ve ardından uygun dalgacık dönüşüm ile bu potansiyellerin terslerini veren formülleri ispatlamaktır.

4.1. Flett Potansiyelleri ve Bazı Özellikleri

Flett potansiyeli \mathcal{F}^α , ($\alpha > 0$)

$$\mathcal{F}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (V_t f)(x) \frac{dt}{t} \quad (4.20)$$

ile tanımlanır. Burada $V_t f, f$ fonksiyonunun (3.9) ile tanımlanan genelleşmiş Poisson integralidir.

Aşağıdaki teorem Flett potansiyelinin bazı özelliklerini verir.

Teorem 4.10. $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun. f fonksiyonunun Flett potansiyeli $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) (4.20) deki gibi tanımlansın.

Buradan

i) $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) için $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayında sınırlıdır. Yani,

$$\|\mathcal{F}^\alpha f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

dir.

ii) $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) operatörünün Fourier-Bessel çarpanı (multiplier)

$$M(x) = (1 + |x|)^{-\alpha}$$

dir. Şöyle ki $\forall f \in S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ için

$$F_\nu(\mathcal{F}^\alpha f)(x) = (1 + |x|)^{-\alpha} F_\nu(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}_{N,+}^n \quad (4.21)$$

dir.

iii) \mathcal{F}^α , ($\alpha > 0$) operatörü $S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ Schwartz uzayında bir otomorfizmdir. Yani,

$$\mathcal{F}^\alpha : S(\mathbb{R}_{N,+}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}_{N,+}^n).$$

iv) \mathcal{F}^α , ($\alpha > 0$) Flett potansiyeli aşağıdaki yarıgrup özelliğine sahiptir:

$$\mathcal{F}^{\alpha_1 + \alpha_2} f = \mathcal{F}^{\alpha_1}(\mathcal{F}^{\alpha_2} f), \quad f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n).$$

İspat i) Minkowski integral eşitsizliği ve (3.10) ifadesi göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}^\alpha f\|_{p,\nu} &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \|V_t f\|_{p,\nu} dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|f\|_{p,\nu} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \\ &= \|f\|_{p,\nu}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ dir.

ii) Önce Fubini teoremini kullanarak

$$\begin{aligned}F_\nu(\mathcal{F}^\alpha f)(x) &= \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} (\mathcal{F}^\alpha f)(y) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y')^{2\nu+1} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y')^{2\nu+1} \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} (V_t f)(y) dt \right) dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}_{N,+}^n} (V_t f)(y) e^{-i\langle x'', y'' \rangle} \prod_{k=1}^N j_{\nu_k}(x_k y_k) (y')^{2\nu+1} dy \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} F_\nu(V_t f)(x) dt\end{aligned}\quad (4.22)$$

elde edilir. Diğer yandan genelleşmiş Poisson integrali $V_t f, t > 0$ tanımından

$$\begin{aligned}F_\nu(V_t f)(x) &= F_\nu(f \otimes P_\nu(\cdot; t))(x) \\ &= e^{-t|x|} F_\nu(f)(x)\end{aligned}$$

dir. Böylece (4.22) den

$$\begin{aligned}F_\nu(\mathcal{F}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t(1+|x|)} F_\nu(f)(x) dt \\ &= \dots \tau = t(1+|x|), d\tau = (1+|x|) dt \dots \\ &= F_\nu(f)(x) \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} (1+|x|)^{1-\alpha} e^{-\tau} (1+|x|)^{-1} d\tau \right) \\ &= (1+|x|)^{-\alpha} F_\nu(f)(x)\end{aligned}$$

olur. Burada Gamma fonksiyonu $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau$ dir.

iii) Fourier-Bessel dönüşümü F_ν , $S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ Schwartz uzayında bir otomorfizm olduğundan herhangi $\varphi \in S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ için (4.21) formülüne göre

$$F_\nu(\mathcal{F}^\alpha \varphi)(\xi) = (1 + |\xi|)^{-\alpha} F_\nu(\varphi)(\xi), \quad x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$(\mathcal{F}^\alpha \varphi)(x) = F_\nu^{-1} [(1 + |\xi|)^{-\alpha} F_\nu(\varphi)(\xi)](x)$$

ve $\mathcal{F}^\alpha \varphi \in S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ dir.

iv) (4.21) ifadesi göz önüne alınarak herhangi $f \in S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ fonksiyonu için Fourier-Bessel çarpanı terimlerinde

$$\begin{aligned} F_\nu(\mathcal{F}^{\alpha_1+\alpha_2} f) &= (1 + |x|)^{-(\alpha_1+\alpha_2)} (F_\nu f) \\ &= (1 + |x|)^{-\alpha_1} F_\nu(\mathcal{F}^{\alpha_2} f) \\ &= F_\nu(\mathcal{F}^{\alpha_1} \mathcal{F}^{\alpha_2} f) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayında sağlanması Flett potansiyelinin $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayında sınırlılığının ve $S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ Schwartz uzayının $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayında yoğun olmasının bir sonucudur. \square

(4.21) eşitliği, Flett potansiyelinin $I + (-\Delta_B)^{1/2}$ operatörünün $-\alpha$. mertebeden negatif kesirsel kuvveti şeklinde yorumlanabileceğini gösterir. Şöyle ki

$$\mathcal{F}^\alpha f = (I + (-\Delta_B)^{1/2})^{-\alpha} f, \quad f \in S(\mathbb{R}_{N,+}^n).$$

Burada Δ_B , (3.1) ile tanımlanan Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ve I , birim operatördür.

Teorem 4.11. *Genelleşmiş Poisson integrali $V_t f$, ($t > 0$) ile Flett potansiyeli $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$) uzayında değişme özelliğine sahiptir.*

İspat $\forall f \in S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ için Fourier-Bessel dönüşümü dilinde

$$\begin{aligned} F_\nu(\mathcal{F}^\alpha (V_t f))(x) &= (1 + |x|)^{-\alpha} F_\nu(V_t f)(x) \\ &= (1 + |x|)^{-\alpha} e^{-t|x|} F_\nu(f)(x) \\ &= F_\nu(V_t(\mathcal{F}^\alpha f))(x) \end{aligned}$$

olur. Genel durum $S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ Schwartz uzayının $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayında yoğun olmasının bir sonucudur. \square

Şimdi bu aşamada genelleşmiş Poisson integrali tarafından doğurulan dalgacık tipli (wavelet like) dönüşümü tanımlayabiliriz.

Tanım 4.12. $\mu, [0, \infty)$ aralığında tanımlı dalgacık (wavelet) ölçümü olsun. Yani, $\mu, [0, \infty)$ aralığında tanımlı sonlu Borel ölçümü, $\mu\{[0, \infty)\} \equiv \int_0^\infty d\mu(t) = 0$ ve onun tam varyasyonu

$$\|\mu\| = \int_0^\infty d|\mu|(t) < \infty$$

olsun. Genelleşmiş Poisson integrali $V_t f$ ve μ Borel ölçümü tarafından doğurulan dalgacık tipli dönüşüm

$$(W_{\mu,\nu} f)(x, y) = \int_{[0,\infty)} e^{-ty} (V_{ty} f)(x) d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}_{N,+}^n, y > 0 \quad (4.23)$$

ile tanımlanır.

(3.14) ifadesini dikkate alarak $e^{-ty} (V_{ty} f)(x) |_{t=0} = f(x)$ olarak kabul edebiliriz. Böylece (4.23) den

$$(W_{\mu,\nu} f)(x, y) = \int_0^\infty e^{-ty} (V_{ty} f)(x) d\mu(t) + \mu\{0\} f(x) \quad (4.24)$$

olur.

Dalgacık tipli dönüşüm $W_{\mu,\nu} f, L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayında iyi tanımlıdır. Minkowski integral eşitsizliği ve (3.10) ifadesi kullanılarak

$$\|(W_{\mu,\nu} f)(\cdot, y)\|_{p,\nu} \leq \int_0^\infty e^{-ty} \|V_{ty} f\|_{p,\nu} d|\mu|(t) \leq \|\mu\| \|f\|_{p,\nu}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik aynı zamanda dalgacık tipli dönüşümün $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ uzayında sınırlılığı demektir.

Aşağıdaki teorem Flett potansiyeli $\mathcal{F}^\alpha, (\alpha > 0)$ 'nin dalgacık-tipli dönüşüm $W_{\mu,\nu}$ ile ifade edilebileceğini verir.

Teorem 4.13. $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ fonksiyonunun Flett potansiyeli $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) ve $W_{\mu,\nu}f$ de (4.24) ile tanımlanan dalgacık-tipli dönüşüm olsun. Eğer

$$\int_0^\infty t^{-\alpha} d|\mu|(t) < \infty \text{ ve } C_{\alpha,\mu} = \int_0^\infty t^{-\alpha} d\mu(t) \neq 0 \quad (4.25)$$

ise

$$(\mathcal{F}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)C_{\alpha,\mu}} \int_0^\infty y^\alpha (W_{\mu,\nu}f)(x, y) \frac{dy}{y}$$

dir.

İspat Öncelikle (4.25) koşulundan $\mu\{0\} = 0$ elde edilir. Dolayısıyla (4.24) ifadesine ve Fubini teoremine göre

$$\begin{aligned} \int_0^\infty y^\alpha (W_{\mu,\nu}f)(x, y) \frac{dy}{y} &= \int_0^\infty y^\alpha \left(\int_0^\infty e^{-ty} (V_{ty}f)(x) d\mu(t) \right) \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty y^\alpha e^{-ty} (V_{ty}f)(x) \frac{dy}{y} \right) d\mu(t) \\ &= \dots z = ty, \quad dz = t dy \dots \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty z^\alpha t^{-\alpha} e^{-z} (V_z f)(x) \frac{t dz}{z t} \right) d\mu(t) \\ &= \int_0^\infty t^{-\alpha} \left(\int_0^\infty z^\alpha t^{-\alpha} e^{-z} (V_z f)(x) \frac{dz}{z} \right) d\mu(t) \\ &= C_{\alpha,\mu}(\Gamma(\alpha))(\mathcal{F}^\alpha f)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için Fubini teoreminin uygulanabilirliğini göstermemiz gerekir. Bunun için aşağıdaki tekrar integralin mutlak yakınsaklığına bakmalıyız. Böylece

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^\infty t^{-\alpha} \left(\int_0^\infty z^\alpha e^{-z} (V_z f)(x) \frac{dz}{z} \right) d\mu(t) \right| \leq \\ &\leq \int_0^\infty t^{-\alpha} \left(\int_0^\infty z^\alpha e^{-z} |(V_z f)(x)| \frac{dz}{z} \right) d|\mu|(t) \\ &\leq \sup_{z>0} |(V_z f)(x)| \int_0^\infty t^{-\alpha} \left(\int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz \right) d|\mu|(t) \\ &\leq (M_\nu f)(x) \Gamma(\alpha) \int_0^\infty t^{-\alpha} d|\mu|(t) < \infty, \quad h.h.x \in \mathbb{R}_{N,+}^n \end{aligned}$$

dir. Burada $M_\nu f$, (3.12) ile tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyondur ve $h.h.x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$ için sonludur. \square

4.2. Flett Potansiyeli İçin Ters Bulma Formülü

Bu tez çalışmamızda esas amacımız, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü Δ_B vasıtasıyla genelleşmiş Poisson integralinin doğurduğu Flett potansiyelinin tersini uygun dalgacık-tipli dönüşüm ile belirlemek idi. Bu aşamada tezimizin esas teoremini ifade edip, ispatlayabiliriz. Teoremin ispatı Aliev ve Rubin (2005) 'nin geliştirdiği tekniğe dayanmaktadır.

Teorem 4.14. $\mathcal{F}^\alpha f$, $\alpha > 0$ Flett potansiyeli ve $W_{\mu,\nu} f$ ise (4.24) ile tanımlanan dalgacık tipli dönüşüm olsun. Ayrıca $[0, \infty)$ aralığında tanımlanan sonlu Borel ölçümü μ aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\int_1^\infty t^\gamma d|\mu|(t) < \infty, \text{ bazı } \gamma > \alpha$$

ve

$$\int_0^\infty t^j d\mu(t) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, [\alpha] \quad (\alpha\text{'nın tam deęeri}).$$

Bu durumda

$$\int_0^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^\alpha f)(x, y) \frac{dy}{y} = C(\mu, \alpha) f(x) \quad (4.26)$$

dir. Burada $C(\mu, \alpha)$ sabiti (3.17) ve (3.18) eşitlikleri ile tanımlıdır.

(4.26) ifadesi

$$\int_0^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^\alpha f)(x, y) \frac{dy}{y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^\alpha f)(x, y) \frac{dy}{y}$$

şeklindedir ve limit $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayının normunda, $h.h.x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$ için noktasal düşünülme-
mektedir. Ayrıca $f \in C_0(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ ise yakınsama tüm $\mathbb{R}_{N,+}^n$ uzayında düzgün yakınsamadır.

İspat $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ olsun. Teorem 4.3 'i kullanarak

$$\begin{aligned} (W_{\mu,\nu}\mathcal{F}^\alpha f)(x,y) &= \int_0^\infty e^{-ty}(V_{ty}\mathcal{F}^\alpha f)(x)d\mu(t) \\ &= \int_0^\infty e^{-ty}(\mathcal{F}^\alpha V_{ty}f)(x)d\mu(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-ty} \left(\int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} (V_z V_{ty}f)(x) dz \right) d\mu(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Genelleşmiş Poisson integralinin yarı-grup özelliğini dikkate alarak

$$\begin{aligned} (W_{\mu,\nu}\mathcal{F}^\alpha f)(x,y) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-ty} \left(\int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} (V_{z+ty}f)(x) dz \right) d\mu(t) \\ &= \dots s = z + ty, ds = dz \dots \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \int_0^\infty (s-ty)_+^{\alpha-1} e^{-s} (V_s f)(x) ds d\mu(t) \end{aligned}$$

olur. Burada

$$(s-ty)_+ = \begin{cases} s-ty; & s > ty \\ 0; & s \leq ty \end{cases}$$

dir. Bundan sonra bu son eşitsizliği ve Fubini teoremini uygulayarak verilen $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} &\int_\varepsilon^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu}\mathcal{F}^\alpha f)(x,y) \frac{dy}{y} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\varepsilon^\infty y^{-\alpha-1} \left[\int_0^\infty \int_0^\infty (s-ty)_+^{\alpha-1} e^{-s} (V_s f)(x) ds d\mu(t) \right] dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} (V_s f)(x) \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} \left(\int_\varepsilon^\infty y^{-\alpha-1} \left(\frac{s}{t} - y \right)_+^{\alpha-1} dy \right) d\mu(t) \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-s} (V_s f)(x) \left(\int_0^{s/\varepsilon} t^{\alpha-1} \left(\int_\varepsilon^{s/t} y^{-\alpha-1} \left(\frac{s}{t} - y \right)_+^{\alpha-1} dy \right) d\mu(t) \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} (V_{\varepsilon s} f)(x) \left(\int_0^s t^{\alpha-1} \left(\int_\varepsilon^{s/t} y^{-\alpha-1} \left(\frac{\varepsilon s}{t} - y \right)_+^{\alpha-1} dy \right) d\mu(t) \right) \varepsilon ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} (V_{\varepsilon s} f)(x) \left(\int_0^s t^{\alpha-1} \left(\int_1^{s/t} \varepsilon^{-\alpha-1} y^{-\alpha-1} \varepsilon^{\alpha-1} \left(\frac{s}{t} - y \right)^{\alpha-1} \varepsilon dy \right) d\mu(t) \right) \varepsilon ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} (V_{\varepsilon s} f)(x) \left(\int_0^s t^{\alpha-1} \left(\int_1^{s/t} y^{-\alpha-1} \left(\frac{s}{t} - y \right)^{\alpha-1} dy \right) d\mu(t) \right) ds
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son eşitlikte önce (3.19) ifadesini ve ardından (3.16) eşitliğini göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^\alpha f)(x, y) \frac{dy}{y} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} (V_{\varepsilon s} f)(x) \frac{1}{s} \left(\int_0^s (s-t)^\alpha d\mu(t) \right) ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} (V_{\varepsilon s} f)(x) k_\alpha(s) ds
\end{aligned} \tag{4.27}$$

dir. Burada $C(\mu, \alpha)$ sabiti (3.17) ve (3.18) olmak üzere (4.26) eşitliğini $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayında kanıtlayalım. Bunun için (4.27) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
&\int_\varepsilon^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^\alpha f)(x, y) \frac{dy}{y} - C(\mu, \alpha) f(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} (V_{\varepsilon s} f)(x) k_\alpha(s) ds - \int_0^\infty f(x) k_\alpha(s) ds \\
&= \int_0^\infty [e^{-\varepsilon s} (V_{\varepsilon s} f)(x) - f(x)] k_\alpha(s) ds \\
&= \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} ((V_{\varepsilon s} f)(x) - f(x)) k_\alpha(s) ds + f(x) \int_0^\infty (e^{-\varepsilon s} - 1) k_\alpha(s) ds
\end{aligned}$$

olur ve Minkowski integral eşitsizliği uygulayarak

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_\varepsilon^\infty y^{-\alpha-1} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^\alpha f)(\cdot, y) dy - C(\mu, \alpha) f \right\|_{p,\nu} \leq \\
&\leq \int_0^\infty e^{-\varepsilon s} \|V_{\varepsilon s} f - f\|_{p,\nu} |k_\alpha(s)| ds + \|f\|_{p,\nu} \int_0^\infty |1 - e^{-\varepsilon s}| |k_\alpha(s)| ds
\end{aligned} \tag{4.28}$$

elde ederiz. Bundan sonraki aşama için Lebesgue baskın yakınsama teoremini uygulayacağız.

$$0 < e^{-\varepsilon s} < 1, \quad |1 - e^{-\varepsilon s}| < 2, \quad \int_0^\infty |k_\alpha(s)| ds < \infty$$

ve $\|V_{\varepsilon s}f - f\|_{p,\nu} \leq 2 \|f\|_{p,\nu}$ olduğundan ve

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|V_{\varepsilon s}f - f\|_{p,\nu} = 0; \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - e^{-\varepsilon s}) = 0$$

eşitlikleri sağlandığından yukarıdaki (4.28) eşitsizliğinin sağ tarafı $\varepsilon \rightarrow 0$ iken sıfıra gider ve dolayısıyla

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \int_{\varepsilon}^{\infty} y^{-\alpha-1} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^{\alpha} f)(\cdot, y) dy - C(\mu, \alpha) f \right\|_{p,\nu} = 0$$

bulunur. Bu eşitlik şöyle de yazılabilir:

$$L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^{\alpha} f)(x, y) \frac{dy}{y} = C(\mu, \alpha) f(x).$$

$p = \infty$ durumunda, $L_{\infty,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n) \equiv C_0(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ kabul ettiğimizden $f \in C_0(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ için yakınsama düzgün yakınsamadır, benzer şekilde gösterilir ve norm olarak supremum normu kullanılır.

Şimdi de $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı olan

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} y^{-\alpha-1} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^{\alpha} f)(x, y) dy, \quad (x \in \mathbb{R}_{N,+}^n, f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n))$$

fonksiyonlar ailesinin $\varepsilon \rightarrow 0$ iken $C(\mu, \alpha) f(x)$ değerine noktasal yakınsaklığını inceleyelim. Bunun için Kaynak Taramasında ifade ettiğimiz Önteorem 2.5 'i uygulayacağız. Daha doğrusu Reel analizini iyi bilinen maksimal operatör tekniğini uygulayacağız. Önteorem 2.5 'i kullanabilmemiz için $\{T_{\varepsilon}\}_{\varepsilon > 0}$ lineer operatörler ailesini şöyle tanımlayalım:

$$(T_{\varepsilon} f)(x) = \int_{\varepsilon}^{\infty} y^{-\alpha-1} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^{\alpha} f)(x, y) dy, \quad (x \in \mathbb{R}_{N,+}^n, f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)).$$

Böylece (3.11) ve (4.27) ifadeleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} |(T_{\varepsilon} f)(x)| &= \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\varepsilon}^{\infty} y^{-\alpha-1} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^{\alpha} f)(x, y) dy \right| \\ &= \sup_{\varepsilon > 0} \left| \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-\varepsilon s} (V_{\varepsilon s} f)(x) k_{\alpha}(s) ds \right| \\ &\leq \sup_{y > 0} |(V_y f)(x)| \int_0^{\infty} |k_{\alpha}(s)| ds \\ &\leq C(M_{\nu} f)(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $M_\nu f$, genelleşmiş kaymanın doğurduğu (3.12) ile tanımlanan Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonudur. $M_\nu f$ operatörü $1 < p \leq \infty$ için $(L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n), L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n))$ güçlü tipli $(L_{1,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n), L_{1,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n))$ zayıf tipli olduğundan

$$T^* f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |(T_\varepsilon f)(x)|$$

olmak üzere T^* operatörü de $1 < p < \infty$ için $(L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n), L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n))$ güçlü tipli, $(L_{1,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n), L_{1,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n))$ zayıf tipli olur. Güçlü tipli operatör aynı zamanda zayıf tipli olduğundan böylece T^* operatörünün $1 \leq p < \infty$ için $(L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n), L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n))$ zayıf tipli olduğunu söyleyebiliriz.

Bundan başka $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ uzayının yoğun alt kümesi olan

$$C_0(\mathbb{R}_{N,+}^n) \cap L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$$

uzayında $\{T_\varepsilon f\}_{\varepsilon > 0}$ ailesi f fonksiyonuna düzgün (dolayısıyla noktasal) yakınsadığından Önteorem 2.5' e göre $\{T_\varepsilon f\}$ ailesi $\varepsilon \rightarrow 0$ iken f fonksiyonuna *h.h.y* yakınsak olacaktır. Yani, *h.h.* $x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$ için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} y^{-\alpha-1} (W_{\mu,\nu} \mathcal{F}^\alpha f)(x, y) dy = C(\mu, \alpha) f(x)$$

dir. □

5. SONUÇLAR

Teorem 5.15. $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ olsun. f fonksiyonunun Flett potansiyeli $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) (4.20) deki gibi tanımlansın.

Buradan

i) $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) için $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayında sınırlıdır. Yani,

$$\|\mathcal{F}^\alpha f\|_{p,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

dir.

ii) $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) operatörünün Fourier-Bessel çarpanı (multiplier)

$$M(x) = (1 + |x|)^{-\alpha}$$

dir. Şöyle ki $\forall f \in S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ için

$$F_\nu(\mathcal{F}^\alpha f)(x) = (1 + |x|)^{-\alpha} F_\nu(f)(x), \quad x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$$

dir.

iii) \mathcal{F}^α , ($\alpha > 0$) operatörü $S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ Schwartz uzayında bir otomorfizmdir. Yani,

$$\mathcal{F}^\alpha : S(\mathbb{R}_{N,+}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}_{N,+}^n)$$

iv) \mathcal{F}^α , ($\alpha > 0$) Flett potansiyeli aşağıdaki yarıgrup özelliğine sahiptir:

$$\mathcal{F}^{\alpha_1 + \alpha_2} f = \mathcal{F}^{\alpha_1}(\mathcal{F}^{\alpha_2} f), \quad f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$$

Teorem 5.16. Genelleşmiş Poisson integrali $V_t f$, ($t > 0$) ile Flett potansiyeli $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ ($1 \leq p \leq \infty$) uzayında değişme özelliğine sahiptir.

Tanım 5.17. μ , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı dalgacık (wavelet) ölçümü olsun. Yani, μ , $[0, \infty)$ aralığında tanımlı sonlu Borel ölçümü, $\mu\{[0, \infty)\} \equiv \int_0^\infty d\mu(t) = 0$ ve onun tam varyasyonu

$$\|\mu\| = \int_0^\infty d|\mu|(t) < \infty$$

olsun. Genelleşmiş Poisson integrali $V_t f$ ve μ dalgacık ölçümü tarafından doğrulan dalgacık tipli dönüşüm

$$(W_{\mu,\nu} f)(x, y) = \int_{[0,\infty)} e^{-ty} (V_{ty} f)(x) d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}_{N,+}^n, y > 0$$

ile tanımlanır.

Teorem 5.18. $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ fonksiyonunun Flett potansiyeli $\mathcal{F}^\alpha f$, ($\alpha > 0$) ve $W_{\mu,\nu}f$ de (4.24) ile tanımlanan dalgacık-tipli dönüşüm olsun. Eğer

$$\int_0^\infty t^{-\alpha} d|\mu|(t) < \infty \text{ ve } C_{\alpha,\mu} = \int_0^\infty t^{-\alpha} d\mu(t) \neq 0$$

ise

$$(\mathcal{F}^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)C_{\alpha,\mu}} \int_0^\infty y^\alpha (W_{\mu,\nu}f)(x, y) \frac{dy}{y}$$

dir.

Teorem 5.19. $\mathcal{F}^\alpha f$, $\alpha > 0$ Flett potansiyeli ve $W_{\mu,\nu}f$ ise (4.24) ile tanımlanan dalgacık tipli dönüşüm olsun. Ayrıca $[0, \infty)$ aralığında tanımlanan sonlu Borel ölçümü μ aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\int_1^\infty t^\gamma d|\mu|(t) < \infty, \text{ bazı } \gamma > \alpha$$

ve

$$\int_0^\infty t^j d\mu(t) = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, [\alpha] \quad (\alpha\text{'nın tam deęeri}).$$

Bu durumda

$$\int_0^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu}\mathcal{F}^\alpha f)(x, y) \frac{dy}{y} = C(\mu, \alpha)f(x)$$

dir. Burada $C(\mu, \alpha)$ sabiti (3.17) ve (3.18) eşitlikleri ile tanımlıdır.

(4.26) ifadesi

$$\int_0^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu}\mathcal{F}^\alpha f)(x, y) \frac{dy}{y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty y^{-\alpha} (W_{\mu,\nu}\mathcal{F}^\alpha f)(x, y) \frac{dy}{y}$$

şeklindedir ve limit $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ uzayının normunda, h.h. $x \in \mathbb{R}_{N,+}^n$ için noktasal düşünül-
mektedir. Ayrıca $f \in C_0(\mathbb{R}_{N,+}^n)$ ise yakınsama tüm $\mathbb{R}_{N,+}^n$ uzayında düzgün yakınsamadır.

6. KAYNAKLAR

- Aliev IA, Bayrakci S. On inversion of B-elliptic potentials by the method of Balakrishnan-Rubin. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 1998; 1(4): 365-384.
- Aliev IA. Bi-parametric potentials, relevant function spaces and wavelet-like transforms. *Integral Equations Operator Theory.* 2009; 65(2): 151-167.
- Aliev IA, Rubin B. Parabolic potentials and wavelet transforms with the generalized translation. *Studia Math.* 2001; 145: 1-16.
- Aliev IA, Rubin B., Sezer S., Bayrakci (Uyhan) S. Composite wavelet transforms: applications and perspectives. In: Olafsson G, et al., editors. *Radon transforms, geometry and wavelets.* Amer. Math. Soc.; providence (RI): 2008. p.1-27. (contemp. math.).
- Aliev IA, Sezer S, Eryigit M. An integral transform associated to the Poisson integral and inversion of Flett potentials. *J. Math. Anal. Appl.* 2006; 321(2): 691-704.
- Aliev IA, Rubin B. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; inversion formulas for potentials and Radon transforms. *J. Fourier Anal. Appl.* 2005; 11(3): 333-352.
- Aliev IA, Yücel S. Some generalizations of Bessel and Flett potentials associated to the Laplace-Bessel differential operator. *Integral Transforms and special Functions,* 2018; 29(3): 235-251.
- Delsarte J. Sur une extension de la formule de Taylor. *J. Math. Pure Appl.* 1938; 17: 213-231.
- Flett TM. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. *Proc. London Math. Soc.* 1971; 22(3): 385-451.
- Folland GB, *Real Analysis Modern Techniques and Their Applications.* John Wiley and Sons, NY, pp.350 1984.

- Gadjiev AD, Aliev IA. Riesz and Bessel potentials generated by a generalized translation and their inverse. In: Proc. IV All-Union Winter Conf., Theory of functions and approximation; Saratov (Russia): 1988.
- Gradshteyn I, Ryzhik I. Table of integrals, series and products. Sth. ed. London: Academic press; 1994.
- Levitan BM: Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. Uspekhi Math. Nauk. 1951; 6(2): 102-143.
- Lizorkin PI. The characterization of $L_p^r(\mathbb{R}^n)$ spaces in terms of hypersingular integrals, Math. Sb. 1970; 81: 79-91.
- Löfstörm. J. Peetre. J.(1969). Approximation theorems connected with generalized translation. Math. Sb. 1970; 81:79-91.
- Lyakhov LN. On classes of spherical functions and singular pseudodifferential operators. Dokl. Akad. Nauk. 1983; 272(4): 781-784.
- Rubin B. A method of characterization and inversion of Bessel and Riesz potentials. Izv Vyssh Uchebn Zaved MATH. 1986; 30(5): 78-89.
- Rubin B. Fractional integrals and potentials. Harlow: Longman; 1996. p.86 (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics).
- Rubin B. Fractional integrals and wavelet transforms associated with Baschk-e-Levy representations on the sphere. Israel J. Math. 1999; 114(1): 1-27.
- Samko SG. Hypersingular Integrals and Their Applications, Izdat. Rostov Univ., Rostov-on-Dan, 1984 (In Russian).
- Samko SG, Kilbas AA, Marichev OI. Fractional integrals and derivatives. Theory and Applications. Gordon and Breach, London. 1993.
- Sezer S. On Approximation properties of the Families of Flett and Generalized Flett potentials. Int. Journal of Math. Analysis, 2009 ;(3)39: 1905-1915.

Stein EM. The characterization of functions arising as potentials, I, Bull. AMer. Math. Soc. 1961; 67: 101-104.

Stein EM., Weiss G. Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces. Princeton (NJ): Princeton University Press; 1971.

Trimeche K. Generalized wavelets and hypergroups. New York: Gordon and Breach Sci.: 1997.

Wheeden RL. On hypersingular integrals and Lebesgue spaces of differentiable functions, Trans. Amer. Math. Soc. 1968; 134: 421-435.



ÖZGEÇMİŞ

Nazife Taşkın

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2020-2023	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ABD, Antalya
Lisans 2012-2018	Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği, Ankara