

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yusuf İPEK

ESAS YARILATİSLERİN YARIGRUBU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA - 2022

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ESAS YARILATISLERİN YARIGRUBU

Yusuf İPEK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez .../.../2022 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

.....
Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
DANIŞMAN

.....
Prof. Dr. Melis MİNİSKER
ÜYE

.....
Doç. Dr. Leyla BUGAY
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Sadık DİNÇER
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ESAS YARILATISLERİN YARIGRUBU

Yusuf İPEK

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Yıl: 2022, Sayfa: 55
Jüri : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Melis MİNİSKER
: Doç. Dr. Leyla BUGAY

Bu tezde yarıgrupların yarılatilerinin ($S = (Y; S_\alpha)$), özel bir durumu olan ve yarıgrupların güçlü yarılatilerinin ($S = S[Y; S_\alpha; \varphi_{\alpha, \beta}]$) genelleştirilmesi olan yarıgrupların temel yarılatisi ($S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha, \beta})$) tanıtılmıştır. Ayrıca, yarıgrupların yarıgüçlü yarılatisi ($\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha, \beta})$) tanıtılmış ve zayıf sadeleştirme özelliğine sahip olan bir yarı güçlü yarılatisin güçlü yarılati olduğunun ispatı verilmiştir.

Bunlarla birlikte küme değerli fonksiyon kavramı incelenmiş, yarıgrupların düzgün yarı latisi ($S = \mathfrak{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha, \beta}, \Phi_{\alpha, \beta})$) ve yarıgrupların rafine yarılatisi ($S = [Y; S_\alpha, \rho_{\alpha, \beta}, \Phi_{\alpha, \beta}]$) tanıtılmıştır. Bu yarılatieler arasındaki ilişkiler incelenmiş ve aslında bunların hepsinin yarıgrupların güçlü yarılatilerinin uygun bir genellemesi olduğu gözlemlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarıgrup, yarılati, yarıgrupların güçlü yarılatisi

ABSTRACT

MSc. THESIS

FACTORISATIONS IN TRANSFORMATION SEMIGROUPS

Yusuf İPEK

**ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS**

Supervisor : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Year: 2022, Pages: 55
Jury : Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
: Prof. Dr. Melis MİNİSKER
: Assoc. Prof. Dr. Leyla BUGAY

In this thesis, the fundamental semilattice of semigroups ($S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha,\beta})$), which is the special case of semilattices of semigroups ($S = (Y; S_\alpha)$) and a generalization of strong semilattices of semigroups ($S = S[Y; S_\alpha; \varphi_{\alpha,\beta}]$) is introduced. In addition, a quasi-strong semilattice of semigroups is introduced and given a proof about a quasi-strong semilattice with number simplification has strong semilattice property.

Along with these, the concept of set-valued mapping from has been examined, regular semilattice of semigroups ($S = \mathfrak{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta})$) and refined semilattice of semigroups ($S = [Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta}]$) are introduced. It has been observed that these half lattices are integrated and a generalization of the full lattices of properly designed full classes.

Keywords: Semigroup, semilattice, strong semilattice of semigroups

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Yarıgruplar cebirin en önemli alanlarından biridir. Yarıgruplar ile ilgili çalışmalar, Suschkewitsch (1926) tarafından yapılan, sonlu yarıgrupun minimal idealinin yapısını belirleme çalışmalarına kadar dayanmaktadır. Bu sonuç daha sonraları başka çalışmacılar tarafından herhangi tam basit yarıgruplar için genelleştirilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Bir yarıgrup temel olarak, boş kümeden farklı bir S kümesi üzerindeki ikili işlemle birlikte birleşme özelliğinin sağlandığı kümedir. Birim elemana sahip olan yarıgruba ise monoid denir. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Eğer $a^2 = aa = a$ koşulu sağlanıyorsa a ya S nin bir idempotent elemanı denir. Tüm elemanları idempotent olan yarıgruba ise band, değişme özelliği sağlanmış olan bandlara ise yarılatıs denir. Daha sonra homomorfizm, bağıntılar, denklikler, sıralı kümeler, alt yarılatıs, üst yarılatıs ve tam latis kavramlarından söz edilmiştir.

S bir yarıgrup olmak üzere, $x \in S$ için $xyx = x$ olacak şekilde en az bir $y \in S$ varsa bu x elemanına S nin regüler elemanı denir. Her elemanı regüler olan bir S yarıgrupuna ise, regüler (düzgün) yarıgrup denir. Regüler yarıgrup örnekleri verilmiş olup “bir S yarıgrupunda $a \in S$ nin bir tersinin olması için gerek ve yeter koşulun $a \in S$ nin regüler olması” önermesinin ispatı verilmiştir. Daha sonra dikdörtgensel band kavramı şu şekilde tanımlanmıştır: S bir yarıgrup olsun. Her $a, b \in S$ için $aba = a$ eşitliği sağlanıyorsa, S yarıgrupuna dikdörtgensel band (rectangular band) denir. Örneğin; sol sıfır ve sağ sıfır yarıgruplar dikdörtgensel banddır.

S bir yarıgrup ve L , S nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Her $a \in S$ ve $b \in L$ için $ab \in L$ oluyorsa yani $SL \subseteq L$ ise L ye S nin sol ideali denir. Benzer şekilde, S bir yarıgrup ve R , S nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Her $a \in S$ ve $b \in R$ için $ba \in R$ oluyorsa, yani $RS \subseteq R$ ise R ye

S nin *sağ ideali* denir. Eğer S nin boştan farklı bir I alt kümesi hem sağ hem de sol ideal ise I ya S nin bir ideali (iki yanlı ideali) denir. Daha sonra basit yarıgrup tanımlanmış, basit yarıgrup ile dikdörtgensel band ilişkisi incelenmiştir.

Yarıgrupların birleşimi, yarıgrupların bandı ($S = \mathcal{B}[Y; S_\alpha]$), yarıgrupların yarılatileri ($S = \mathcal{S}[Y; S_\alpha]$) ve yarıgrupların güçlü yarılatileri (strong semilattice of semigroups $S = \mathcal{S}[Y; S_\alpha; \varphi_{\alpha,\beta}]$) tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde asıl tez konumuz olan esas yarıgrupların yarılatileri incelenmiştir. Burada öncelikle yarıgrupların temel yarılatisi (fundamental semilattice of semigroups $\mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha,\beta})$) tanımlanmış ve çeşitli genel sonuçlar verilmiştir. Örneğin, bir değişmeli yarıgrupun temel yarılatisi değişmelidir; ancak, değişmeli yarıgrupun yarılatisi değişmeli olmak zorunda değildir. Daha sonra yarıgrupların temel yarılatisinin özel bir durumu olan yarıgrupların yarı-güçlü yarılatisi (quasi-strong semilattice of semigroups $\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$) tanımlanmıştır. Ayrıca bir yarı-güçlü yarılatinin zayıf sadeleştirme özelliğine sahip olması durumunda güçlü yarılatisi olacağı gözlenmiş, bununla ilgili örnek verilmiştir.

A ve B boş olmayan kümeler olsun. 2^B , B 'nin tüm alt kümelerinin kümesi olmak üzere, $A \rightarrow 2^B$ olan bir fonksiyona A dan B ye bir küme değerli fonksiyon denir. ρ , B kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve ξ , A 'dan B 'ye bir küme değerli fonksiyon olsun. Eğer, her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $|a\xi \cap b\rho| = 1$ oluyorsa ξ ye A dan B ye ρ ile ilişkili küme değerli fonksiyon denir ve

$$\xi : A \xrightarrow{\rho} 2^B$$

ile gösterilir.

Yarıgrupların düzgün yarılatisi ($S = \mathcal{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta})$), $\rho_{\alpha,\beta}$ ve $\Phi_{\alpha,\beta}$ üzerindeki bir takım koşullar ile tanımlanmıştır. Yarıgrupların düzgün yarılatisi ile

yarıgrupların temel yarılatısı arasındaki ilişkiyle ilgili önermenin, Wang (2015) tarafından yapılan ispatı verilmiştir.

Yarıgrupların rafine yarılatılarını verecek şekilde ilgili koşullar belirtilmiş, yarıgrupların düzgün yarılatısı ile yarıgrupların rafine yarılatıları arasındaki ilişkiyi veren önerme verilmiştir.





TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans öğrenimim süresince bilgi ve tecrübesiyle çalışmalarımı yönlendiren ve akademik olarak kendimi geliőtirmeme katkı sağlayan danışmanım Sayın Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT'a, ders aşamasında bana yardımcı olan ve yol gösteren Prof. Dr. Gonca AYIK'a, tez aşamasında bana rehberlik ederek motivasyon kaynağı olan Doç. Dr. Leyla BUGAY'a ve çalışmalarımın her aşamasında bana daima destek olan, eşime ve çocuklarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ	I
ABSTRACT.....	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER	3
2.1. Yarıgruplar	3
2.2. Homomorfizmler.....	8
2.3. Bağlılıklar ve Denklikler.....	9
2.4. Green Denklik Bağlılıkları ve Basit Yarıgruplar	18
3. ESAS YARILATISLARIN YARIGRUBU	23
3.1. Yarıgrupların Temel Yarılatisi.....	23
3.2. Yarıgrupların Yarı-Güçlü Yarılatisi.....	28
3.3. Yarıgrupların Düzgün Yarılatisi	34
3.4. Yarıgrupların Rafine Yarılatisi	44
4. SONUÇ ve TARTIŞMA.....	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55



1. GİRİŞ

Yarıgruplardan oluşan yarılatıis kavramı ilk olarak 2001 yılında Zhang, Shum ve Zhang tarafından ortaya atılmıştır. Bu kavramlar aslında Howie tarafından 1995 de açıklandığı gibi iyi bilinen güçlü yarılatıislerin genelleştirilmiş bir halidir. Zhang, Shum ve Zhang, yeni kavramlarını uygulamış ve, bir bandın ancak ve ancak dikdörtgen bantlardan oluşan bir rafine yarılatıis ise düzgün olduğunu göstererek etkili bir sonuç ortaya koymuştur. Yarıgrupların rafine yarılatıisleri son zamanlarda tamamen düzenli bazı yarıgrupların ve bunların genellemelerinin çalışılmasında yaygın olarak benimsenmiştir.

Wang, Guo & Shum (2008) çalışmalarında güçlü yarılatıislerin genellemesi olan rafine yarılatıislerle ilgili daha kısa ve daha zarif bir ispat yapmışlardır.

S bir yarıgrup olmak üzere S nin $\alpha\varphi^{-1} = S_\alpha$ ($\alpha \in Y$) yarılatıis üzerinde bir φ homomorfizmi varsa bu yarıgruba S_α yarıgruplarının bir Y yarılatıis denir. Bunu $S = (Y; S_\alpha)$ şeklinde yazarız. Bu, S üzerinde bir ρ kongrüansı için S/ρ nun Y ye izomorfik olduğunu ve her ρ sınıfının bir S_α ya karşılık geldiğini söylemekle eşdeğerdir.

Bir yarıgrupun yarılatıis matematikçileri yoğun bir şekilde başka tür yarıgruplar oluşturmaya meyletmışlerdir. Clifford (1941), McLean (1954), Lallement (1967), Petrich (1974), Howie (1976), Clifford & Petrich (1977), Fountain (1982), Bogdanovic (1985), Petrich&Reilly (1999) gibi çalışmacılar ilgili çalışmaları yapmışlardır.

Y bir yarılatıis, S_α ikişer-ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. $S = (Y; S_\alpha)$ yarıgrupların yarılatıis olmak üzere herhangi bir $\alpha, \beta \in Y$ verildiğinde, S_α daki bir x elemanı ve S_β daki bir y elemanının bileşkesinin

$S_{\alpha\beta}$ da olduğunu biliyoruz. Fakat bildiklerimizin sınırı bu kadardır. Bazı özel durumlarda ise, örneğin, yarıgrupların güçlü yarılatisinde, yarıgrupların düzgün yarılatisinde ve yarıgrupların rafine yarılatisinde çok daha fazla bilgi elde edebiliriz.

Yamada & Kimura (1958), Petrich (1972), Howie (1976), Petrich (1987), Petrich & Reilly(1999), yaptıkları çalışmalarda normal kriptogruplar, normal ortogruplar ve bazı normal bandlarla ilişkili Clifford yarıgrupları gibi tam yarıgrupların bazı özel türlerinin yapılarını tanımlamak için güçlü bir yarıgrup yarılatisi kullanmışlardır.

Kong & Shum (2001), Wang, Zhang ve Xie (2004), Wang & Zhou (2013), Yu & Wang (2012), Zhang, Shum, Zhang (2001), yarıgrupların güçlü yarılatilerinin genellemesi olarak bazı düzgün bandlarla ilgili yarıgruplar oluşturmak için rafine bir yarıgrup yarılatisi ve düzenli bir yarıgrup yarılatisi tasarlamışlardır.

Bu tez çalışmasında, Wang (2015) tarafından verilen ve yarıgrupların temel yarılatisi adı verilen eşlemeler ve dönüşümler açısından yeni bir yarılatisten söz edeceğiz. Herhangi bir $\alpha, \beta \in Y$, $x \in S_\alpha$ ve $y \in S_\beta$ verildiğinde S yarıgruplarının S_α ($\alpha \in Y$) temel bir Y yarı latisi ise, yarıgrupların güçlü yarılatisine benzer şekilde xy , $S_{\alpha\beta}$ da iki belirli elemanın çarpımıdır. Bu, genel olarak tamamen düzenli yarıgruplar ve diğer bazı yarı grup türleri oluşturmak için kullanılabilir.

İkinci bölümde temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ise yarıgrupların temel yarı latisi kavramını tanımlanmış, özel bir durumu olarak, yarıgrupların güçlü yarılatisinin uygun bir genellemesi olan yarıgrupların yarı-güçlü yarılatisi incelenmiştir.

Üçüncü bölümde ayrıca, yarıgrupların düzgün yarılatileri, ve yarıgrupların rafine yarılatileri gibi çeşitli yarılati ayrışma modelleri arasındaki ilişkiler gözlemlenmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde tezde kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1.Yarıgruplar

Tanım 2.1.1. S boş kümeden farklı bir küme olsun. $\lambda : S \times S \rightarrow S$ ye tanımlı bir fonksiyon olmak üzere λ 'ya S üzerinde bir *ikili işlem* denir.

Tanım 2.1.2. S boş kümeden farklı bir küme olsun. S kümesi üzerinde bir λ ikili işlemi tanımlı ise (S, λ) ikilisine *grupoid* denir.

Tanım 2.1.3. (S, λ) bir grupoid olsun. Eğer λ ikili işlemi birleşme özelliğine sahip ise, yani,

$$((x, y)\lambda, z)\lambda = (x, (y, z)\lambda)\lambda$$

ise, (S, λ) ikilisine bir *yarıgrup* denir.

Bu tez çalışması boyunca dönüşüm sembollerin sağına yazılacaktır. Ancak gösterimin kolaylığı açısından, λ yerine çarpma işlemi alınırsa, birleşme özelliği

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$$

şekline dönüşmüş olur. Yarıgrupun çarpımsal olarak yazıldığı ve çarpma işleminin doğal olarak anlaşıldığı durumlarda (S, \cdot) yerine kısaca S yazacağız.

Tanım 2.1.4. Bir S yarı grubunda her $x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

oluyorsa S ye *değişmeli yarıgrup* denir. (Değişmeli yerine *abelyen* terimi de kullanılabilir).

Tanım 2.1.5. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Her $x \in S$ için,

$$ex = x$$

ise e ye S nin bir *sol birim elemanı*, her $x \in S$ için,

$$xe = x$$

ise e ye S nin bir *sağ birim elemanı* denir.

Eğer $e \in S$ hem sağ hem de sol birim eleman ise e ye S nin *birim elemanı* denir. Bir yarıgrupta sağ veya sol birim eleman bir taneden fazla olabilir.

Önerme 2.1.6. Bir S yarıgrupunun en fazla 1 tane birim elemanı vardır.

İspat: İspat için Howie (1995)'e bakınız. \square

Tanım 2.1.7. Bir S yarıgrubu birim elemana sahip ise S yarıgrupuna *monoid* denir.

Tanım 2.1.8. Eğer S yarıgrubu birim elemana sahip değil ise, bir monoid oluşturmak için ekstra bir birim eleman kolayca eklenebilir.

Her $s \in S$ için,

$$s1 = 1s = s \text{ ve } 11 = 1$$

olarak tanımlayalım. Gerekli kontrollerden sonra $S \cup \{1\}$ yarıgrupunun bir monoid olduğu görülecektir. Şimdi, S^1 kümesini,

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahip ise} \\ S \cup \{1\}, & S \text{ birim elemana sahip değil ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. S^1 in birim elemanı 1 olan bir monoid olduğu açıktır. S^1 monoidine, S ye gerekirse birim eleman eklenerek elde edilen monoid denir.

Tanım 2.1.9. S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubu en az iki elemana sahip olmak üzere, her $x \in S$ için,

$$0x = 0$$

koşulunu sağlayan bir 0 elemanı varsa, 0 elemanına bir *sol sıfır eleman*, her $x \in S$ için,

$$x0 = 0$$

koşulunu sağlayan bir 0 elemanı varsa, 0 elemanına bir *sağ sıfır eleman* denir. Burada $0 \in S$ hem sol hem de sağ sıfır eleman ise $0 \in S$ ye *sıfır eleman* veya sadece *sıfır*, S kümesine de *sıfırlı yarıgrup* denir. Burada en az iki elemanlı S yarıgrubu denilme nedeni, bir tek elemandan oluşan $\{e\}$ trivial yarıgrubunun sıfır olarak alınmamasıdır. Bir yarıgrupun birden fazla sağ sıfır ve/veya sol sıfır elemanı olabilir.

Önerme 2.1.10. Bir S yarıgrubunun en fazla 1 tane sıfır elemanı vardır.

İspat: İspat için Howie (1995)'e bakınız. \square

Tanım 2.1.11. Eğer S yarıgrubu sıfır elemana sahip değil ise, bir sıfırlı yarıgrup oluşturmak için ekstra bir sıfır eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için,

$$s0 = 0s = 0 \text{ ve } 00 = 0$$

olarak tanımlayalım. Gerekli kontrollerden sonra $S \cup \{0\}$ yarıgrubunun bir sıfırlı yarıgrup olduğu görülecektir. O halde, S^0 kümesini,

$$S^0 = \begin{cases} S, & S \text{ sıfır elemana sahip ise} \\ S \cup \{0\}, & S \text{ sıfır elemana sahip değil ise} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. S^0 in 0 elemanı "0" olan bir yarıgrup olduğu görülür. S^0 yarıgrubuna, S ye gerekirse *sıfır eleman eklenerek elde edilen sıfırlı yarıgrup* denir.

Tanım 2.1.12. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, X üzerinde, her $x, y \in X$ için

$$xy = x$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba, *sol sıfır yarıgrup* (*left zero semigroup*) denir. Sol sıfır yarıgrup L_X ile gösterilir.

Her $a, b \in L_X$ için, $ba = b$ olup L_X in her elemanı sağ birim eleman olur.

Tanım 2.1.13. X boş kümeden farklı bir küme olmak üzere, X üzerinde, her $x, y \in X$ için,

$$xy = y$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba, *sağ sıfır yarıgrup* (*right zero semigroup*) denir. Sağ sıfır yarıgrup R_X ile gösterilir.

Her $a, b \in R_X$ için, $ab = b$ olup R_X in her elemanı sol birim eleman olur.

Tanım 2.1.14. X boş kümeden farklı bir küme ve $z \in X$ olmak üzere, X üzerinde, her $x, y \in X$ için,

$$xy = z$$

şeklinde tanımlanan ikili işlem ile X bir yarıgruptur. Bu yarıgruba, *sıfır yarıgrup* (*zero semigroup*) denir. Sıfır yarıgrup Z_X ile gösterilir.

Tanım 2.1.15. S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer,

$$e^2 = ee = e$$

ise e ye S nin bir *idempotent* elemanı denir. S yarıgrupunun tüm idempotent elemanlarının kümesi ise $E(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.16. Bir S yarıgrupunun tüm elemanlar idempotent ($\forall s \in S$ için $s^2 = s$) ise, yani,

$$E(S)=S$$

ise S yarıgrubuna bir *band* denir.

Tanım 2.1.17. Bir S yarıgrubu hem değişmeli, hem de band ise S yarıgrubuna bir *yarılatis* denir.

Tanım 2.1.18. S bir yarıgrup ve T , S nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. T çarpma işlemine göre kapalı ise, yani her $x, y \in T$ için $xy \in T$ oluyorsa, T ye S nin bir *altyarıgrubu* denir. T , S nin altyarıgrubu ise $T \leq S$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.19. $S^2 \subseteq S$ olup $S \leq S$ dir. Yani her yarıgrup kendisinin alt yarıgrubudur. S de bir sıfır eleman var ise $\{0\} \leq S$ olur. Ayrıca S bir monoid ise $\{1\} \leq S$ dir. Yani $\{0\}$ ve $\{1\}$ S nin altyarıgruplarıdır. Bu altyarıgruplara *aşık ar altyarıgruplar* denir. Aşık ar altyarıgrupların dışındakilere ise *öz altyarıgruplar* denir.

Örnek 2.1.20. $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere, bir X_n kümesi üzerindeki çarpma işlemini, her $x, y \in X_n$ için $xy = \min(x, y)$ olarak tanımlayalım. $S = (X_n, \min(x, y))$ bir değişmeli yarıgruptur. S yarıgrubunun birim elemanı n ve sıfır elemanı 1 elemanıdır. S yarıgrubunun her elemanı idempotenttir. Ayrıca S yarıgrubu yarılatis olup bu yarılatis $C_n = (X_n, \min(x, y))$ ile gösterilir ve C_n zincir olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.21. I ve J boş kümeden farklı iki küme ve $T = I \times J$ olsun. T üzerindeki işlemi, her $(i, j), (k, l) \in T$ için

$$(i, j)(k, l) = (i, l)$$

olarak tanımlayalım. T bu işlem ile bir yarıgruptur. Ayrıca, her $(i, j) \in T$ için

$$(i, j)^2 = (i, j)(i, j) = (i, j)$$

olup T nin her elemanı idempotent olur. Yani T bir band olur. Fakat T bir yarılatiis değildir.

2.2. Homomorfizmler

Tanım 2.2.1. S ve T iki yarıgrup ve φ de S den T ye bir fonksiyon (dönüşüm) olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$(xy)\varphi = (x)\varphi(y)\varphi$$

ise φ ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.2.2. S ve T iki yarıgrup ve φ de S den T ye bir homomorfizm olsun.

- i. Eğer φ birebir ise φ ye bir *monomorfizm* denir.
- ii. Eğer φ örten ise φ ye bir *epimorfizm* denir.
- iii. Eğer φ birebir ve örten ise φ ye bir *izomorfizm* denir.
- iv. Eğer φ , S den S ye bir homomorfizm ise φ ye bir *endomorfizm* denir.
- v. Eğer φ , S den S ye birebir ve örten bir homomorfizm ise φ ye bir *otomorfizm* denir.
- vi. Eğer S den T ye bir izomorfizm var ise, S ile T ye izomorfik yarıgruplar denir. S ile T izomorfik yarıgruplar ise $S \cong T$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.3. S ve T iki monoid (birim elemanlı yarıgrup) ve φ de S den T ye bir homomorfizm olsun. Eğer S monoidinin birim elemanının φ altındaki görüntüsü T nin birim elemanı ise yani,

$$(1_S)\varphi = 1_T$$

ise, φ ye bir *monoid homomorfizmi* denir.

Tanım 2.2.4. S ve T iki monoid ve φ de S den T ye bir homomorfizm olsun. O zaman

$$\text{Ker}(\varphi) = \{(x, y) \in S \times S : (x)\varphi = (y)\varphi\}$$

olarak tanımlanan kümeye φ nin çekirdek kümesi (kernel set) denir.

Tanım 2.2.5. S ve T iki monoid ve φ de S den T ye bir homomorfizm olsun. O zaman,

$$\text{Im}(\varphi) = \{(x)\varphi : x \in S\}$$

olarak tanımlanan kümeye, φ nin görüntü kümesi (image set) denir.

Tanım 2.2.6. S ve T iki yarıgrup ve $S \times T = \{(s, t) : s \in S \text{ ve } t \in T\}$ olsun. Her $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in S \times T$ için

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1 s_2, t_1 t_2)$$

olarak tanımlanan ikili işlem ile $S \times T$ bir yarıgruptur. $S \times T$ yarıgrubuna S ve T yarıgruplarının direkt çarpımı denir.

2.3. Bağlılar ve Denklikler

Tanım 2.3.1. X ve Y boş kümeden farklı birer küme olsun. $X \times Y$ nin her alt kümesine X den Y ye bir *bağıntı* denir. $X \times X$ in her altkümesine ise X üzerinde bir *bağıntı* denir. X üzerindeki tüm bağıntılarının kümesi B_X ile gösterilir. Yani,

$$B_X = \{\rho : \rho \subseteq X \times X\}$$

dir. X boş kümeden farklı bir küme ve ρ da X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer $(x, y) \in \rho$ ise $x\rho y$ şeklinde de gösterilebilir.

Tanım 2.3.2. \emptyset , X üzerinde bir bağıntı olup bu bağıntıya *boş bağıntı* denir. $X \times X$, X üzerinde bir bağıntı olup bu bağıntıya *evrensel bağıntı* denir.

$$\Delta_X = 1_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

ifadesi X üzerinde bir bağıntı olup bu bağıntıya *birim bağıntı* denir.

Tanım 2.3.3. X üzerindeki her $\alpha, \beta \in B_X$ için,

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

olarak tanımlanan bağıntıya α ile β nin *bileşkesi* denir. Her $\alpha, \beta, \gamma \in B_X$ için

$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$ olacağı açıktır. Ayrıca, her $\alpha \in B_X$ için

$\emptyset \circ \alpha = \emptyset = \alpha \circ \emptyset$ ve her $\alpha \in B_X$ için $1_X \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ 1_X$ olup (B_X, \circ) birim

elemanı 1_X olan bir monoiddir. Ayrıca \emptyset bu monoidin sıfır elemanıdır.

Tanım 2.3.4. ρ , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun.

$$\text{Dom}(\rho) = \{x \in X : \exists y \in X \text{ için } (x, y) \in \rho\}$$

kümesine ρ bağıntısının *tanım kümesi* denir. Ayrıca

$$\text{Im}(\rho) = \{y \in X : \exists x \in X \text{ için } (x, y) \in \rho\}$$

kümesine ρ bağıntısının *görüntü kümesi* denir.

Tanım 2.3.5. X boş kümeden farklı bir küme ve $\rho \in B_X$ olsun.

- i. Her $x \in X$ için, $(x, x) \in \rho$ ise ρ *yansıyan* bağıntıdır.
- ii. $(x, y) \in \rho$ iken $(y, x) \in \rho$ oluyorsa ρ *simetrik* bağıntıdır.
- iii. $(x, y) \in \rho$ ve $(y, x) \in \rho$ iken $x = y$ oluyorsa ρ *ters simetrik* bağıntıdır.
- iv. $(x, y) \in \rho$ ve $(y, z) \in \rho$ iken $(x, z) \in \rho$ oluyorsa ρ *geçişmeli* bağıntıdır.

(i), (ii) ve (iv) ile birlikte ρ bağıntısına bir *denklik bağıntısı* denir. (i), (iii) ve (iv) ile birlikte ρ bağıntısı bir *(kısmi) sıralama bağıntısı* olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.6. S bir yarıgrup ve ρ , S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer, her $a \in S$ ve her $(s,t), (s',t') \in \rho$ için

- i. $(as, at) \in \rho$ ise ρ bağıntısına *sol uyumlu*;
- ii. $(sa, ta) \in \rho$ ise ρ bağıntısına *sağ uyumlu*;
- iii. $(ss', tt') \in \rho$ ise ρ bağıntısına *uyumlu*;

bağıntı denir. Ayrıca, sol uyumlu bir denklik bağıntısına *sol kongrüans*, sağ uyumlu bir denklik bağıntısına *sağ kongrüans* ve uyumlu bir denklik bağıntısına *kongrüans* denir.

Önerme 2.3.7. S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin hem sol hem de sağ kongrüans olmasıdır.

İspat: Howie (1995), Proposition 1.5.1'e bakınız. \square

S bir yarıgrup ve R , S üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere tanımdan kolayca görülüyor ki R nin bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul R nin $S \times S$ nin bir altyarı grubu olmasıdır.

Tanım 2.3.8. $S \times S$ nin altyarı grubu olan Δ_S , $S \times S$ üzerinde bir kongrüanstır. Bu kongrüansa S nin *aşikâr kongrüansı* denir. Ayrıca, $S \times S$ nin altyarı grubu olan $S \times S$, S üzerinde bir kongrüanstır. Bu kongrüansa S nin *evrensel kongrüansı* denir.

Tanım 2.3.9. X bir küme ve ρ X kümesi üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı olsun. Herhangi bir $x \in X$ için tanımlanan

$$x/\rho = x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine x in *denklik sınıfı* denir. Her $x \in X$ için, tanımlanan $x\rho$ kümeleri X kümesinin parçalanış kümeleridir. Başka bir ifadeyle $x\rho$ kümelerinin birleşimi X kümesini verecektir. Ayrıca X kümesinin tüm denklik sınıflarının kümesi

$$X/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

şeklinde gösterilir. X/ρ kümesine, X kümesinin ρ ile elde edilen *bölüm kümesi* denir.

Tanım 2.3.10. X ve Y boş olmayan iki küme ve $\varphi : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (x)\varphi = (y)\varphi\}$$

şeklinde tanımlanan küme X üzerinde bir denklik bağıntısı olup bu bağıntıya φ 'nin çekirdeği denir ve

$$\text{Ker}(\varphi) = \varphi \circ \varphi^{-1}$$

şeklinde gösterilir.

Geleneksel olarak, $(x, y) \in \rho$ yerine $x \leq y$ yazılır. Dolayısıyla

$$x < y \Leftrightarrow (x, y) \in \rho \text{ ve } x \neq y$$

yazılır.

Tanım 2.3.11. Y kısmi sıralı bir kümenin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Y nin a dan kesinlikle küçük bir elemanı yoksa, a elemanına *minimal eleman* denir.

Yani, her $y \in Y$ için, $y \leq a$ iken $y = a$ ise $a \in Y$ minimal elemandır. Ayrıca, $b \in Y$ ve her $y \in Y$ için $b \leq y$ ise b elemanına Y nin *minimum eleman* denir.

Bir minimum eleman aynı zamanda minimal elemandır. Ancak kısmi sıralı bir kümede minimal olup minimum olmayan elemanlar olabilir. Aşağıdaki temel gerçeklerin doğruluğu kolay bir şekilde görülebilir.

Önerme 2.3.12. Y kısmi sıralı bir X kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

- i. Y nin en fazla bir minimum elemanı vardır.
- ii. Y tam sıralı ise minimal ve minimum elemanları aynıdır.

X in boş olmayan her alt kümesinin bir minimal elemanı varsa “ (X, \leq) minimal koşulunu sağlıyor” denir. Asgari koşulu sağlayan tam sıralı bir X kümesine *iyi sıralı* küme denir.

Maksimal, maksimum ve maksimal koşulunun benzer şekilde tanımları yapılabilir.

Tanım 2.3.13. Y , (X, \leq) sıralı kümesinin boş olmayan bir altkümesi olsun. Her $y \in Y$ için $c \leq y$ olacak şekilde bir $c \in X$ varsa bu c elemanına Y nin bir *alt sınırı* denir. Y nin alt sınırlarının kümesi boş değilse ve maksimum d elemanına sahipse d elemanına Y nin *en büyük alt sınırı* denir. En büyük alt sınır varsa tektir ve

$$d = \wedge \{y : y \in Y\}$$

şeklinde gösterilir. Eğer $Y = \{a, b\}$ ise $d = a \wedge b$ yazılır.

Tanım 2.3.14. (X, \leq) sıralı bir küme olsun. Her $a, b \in X$ için $a \wedge b$ var ise, (X, \leq) sıralı kümesine *alt yarı latis* denir.

X in boş olmayan her Y alt kümesi, $\wedge\{y : y \in Y\}$ güçlü özelliğine sahipse (X, \leq) sıralı kümesine *tam alt yarı latis* denir.

(X, \leq) sıralı kümesinde her $a, b \in X$ için

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

dir.

Tanım 2.3.15. (X, \leq) sıralı bir küme olsun. Her $a, b \in X$ için $a \vee b$ var ise (X, \leq) sıralı kümesine *üst yarı latis* denir.

X in boş olmayan her Y alt kümesi, $\vee\{y : y \in Y\}$ güçlü özelliğine sahipse (X, \leq) sıralı kümesine *tam üst yarı latis* denir.

(X, \leq) sıralı kümesinde her $a, b \in X$ için

$$b \leq a \Leftrightarrow a \vee b = a$$

dir.

Tanım 2.3.16. (X, \leq) sıralı kümesi hem (tam) alt yarı latis hem de (tam) üst yarı latis ise (X, \leq) sıralı kümesine *(tam) latis* denir. Bu durumda latis yapısını $X = (X, \geq, \wedge, \vee)$ yazarak vurgulayabiliriz.

X in bir alt latisi ile, X in boş olmayan bir Y alt kümesini anlayacağız öyle ki,

$$a, b \in Y \Rightarrow a \wedge b, a \vee b \in Y$$

dir.

(E, \leq) bir alt yarı latis olsun. O zaman, $a, b, c \in E$ için $(a \wedge b) \wedge c$ ve $a \wedge (b \wedge c)$ nin $\{a, b, c\}$ nin en büyük alt sınırı olduğunu doğrulamak zor değildir.

Böylece

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

olup birleşme özelliği sağlanacaktır. Buradan (E, \wedge) bir yarıgruptur sonucuna ulaşılır.

Önerme 2.3.17. (E, \leq) bir alt yarı latis olsun. O zaman (E, \wedge) , her $a, b \in E$ için $ab = a \wedge b$ olarak tanımlanan işleme, tamamen idempotentlerden oluşan bir değişmeli yarıgruptur. Yani, her $a, b \in E$ için

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a$$

dir.

İspat : İspat için Howie (1995)'e bakınız. \square

Önerme 2.3.18. (E, \cdot) idempotentlerden oluşan bir değişmeli yarıgrup (değişmeli band) olsun. E üzerindeki \leq bağıntısı, her $a, b \in E$ için $a \leq b \Leftrightarrow ab = a$ olarak tanımlansın. (E, \leq) kısmi bir sıralı kümedir ve bir alt yarılatistir. Yani $a \wedge b = a \cdot b$ dir.

İspat: İspat için Howie (1995)'e bakınız. \square

Tanım 2.3.19. S bir yarıgrup olmak üzere, $x \in S$ için

$$xyx = x$$

olacak şekilde en az bir $y \in S$ varsa bu x elemanına S nin *regüler elemanı* denir.

Her elemanı regüler olan bir S yarıgrubuna ise *regüler (düzgün) yarıgrup* denir.

Örnek 2.3.20. G bir grup ise her $g \in G$ için

$$gg^{-1}g = g$$

olup G aynı zamanda bir regüler yarıgruptur.

Örnek 2.3.21. S bir yarıgrup ve $e \in S$ idempotent ise $e^2 = e$ olur. Dolayısıyla,

$$e^2 \cdot e = e \cdot e \Rightarrow e^3 = e^2 \Rightarrow e \cdot e \cdot e = e$$

olup e regüler elemandır. Sonuç olarak yarılisler regüler yarıgruptur.

Örnek 2.3.22. S bir sol sıfır yarıgrup olsun. Her $a \in S$ için

$$aba = a \quad (b \text{ ne olursa olsun})$$

olduğundan S regüler yarıgruptur.

Örnek 2.3.23. S bir sıfır yarıgrup olsun. Her $0 \neq a \in S$ için

$$aba = 0 \neq a \quad (b \text{ ne olursa olsun})$$

olduğundan S regüler yarıgrup değildir.

Tanım 2.3.24. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere

$$axa = a \text{ ve } xax = x$$

olacak şekilde bir $x \in S$ varsa x elemanına a nın bir *tersi* denir. a nın tüm terslerinin kümesi $V(a)$ ile gösterilir. Yani

$$V(a) = \{x \in S : axa = a, \quad xax = x\}$$

olur.

Eğer $e \in S$ bir idempotent eleman ise $eee = e$ olup $e \in V(a)$ dir.

Önerme 2.3.25. S bir yarıgrup olmak üzere $a \in S$ nin bir tersinin var olması için gerek ve yeter koşul $a \in S$ nin regüler olmasıdır.

İspat: \Rightarrow S bir yarıgrup olmak üzere $a \in S$ nin bir tersinin olduğunu varsayalım. a nın tersi $a^{-1} \in S$ olmak üzere $aa^{-1}a = a$ olacağından $a \in S$ regülerdir.

\Leftarrow S bir yarıgrup ve $a \in S$ regüler olsun. Bu durumda $aba = a$ olacak şekilde bir $b \in S$ vardır. Şimdi, $x = bab$ olarak alınırsa,

$$axa = a(bab)a = (aba)ba = aba = a$$

$$xax = (bab)a(bab) = b(aba)(bab) = ba(bab) = b(aba)b = bab = x$$

olduğundan, $x \in S$, $a \in S$ nin bir tersi olur.

Tanım 2.3.26. S bir yarıgrup olsun. Her $a \in S$ için, a elemanı S nin bir alt grubunda yer alıyorsa, S ye *tamamen düzgün yarıgrup* (*completely regular semigroup*) denir.

Tanım 2.3.27. S bir yarıgrup olsun. Her $a, b \in S$ için

$$aba = a$$

eşitliği sağlanıyorsa S yarı grubuna *dikdörtgensel band* (*rectangular band*) denir. Örneğin; sol sıfır ve sağ sıfır yarı grupları dikdörtgensel banttır.

Örnek 2.3.28. $S = \{a, b, c, d\}$ olsun. S üzerindeki ikili işlem, tablosu aşağıda verildiği gibi olsun. O zaman S bir yarı grup olur. Ayrıca S yarı grubundaki her eleman idempotent olup S bir dikdörtgensel band olur.

Δ	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	c	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

Teorem 2.3.29. S bir yarı grup olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- i. S bir dikdörtgensel banttır.
- ii. S nin her elemanı idempotenttir ve her $a, b, c \in S$ için $abc = ac$ dir.

- iii. $S \cong L \times R$ olacak şekilde bir L sol sıfır yarıgrup ve R sağ sıfır yarıgrup vardır.
- iv. A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere, $A \times B$ kümesi üzerinde $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1, b_2)$ işlemi tanımlansın. Tanımlanan bu işlem ile birlikte $A \times B$ bir yarıgruptur ve $S \cong A \times B$ dir.

İspat : İspat için Howie (1995)'e bakınız. \square

2.4. Green Denklik Bağlılıkları ve Basit Yarıgruplar

Tanım 2.4.1. S bir yarıgrup ve L , S nin boş kümeden farklı bir altkümesi olsun. Her $a \in S$ ve $b \in L$ için $ab \in L$ oluyorsa, yani $SL \subseteq L$ ise, L ye S nin *sol ideali* denir.

Benzer şekilde, S bir yarıgrup ve R , S nin boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Her $a \in S$ ve $b \in R$ için $ba \in R$ oluyorsa, yani $RS \subseteq R$ ise, R ye S nin *sağ ideali* denir.

Eğer S nin boştan farklı bir I alt kümesi hem sağ hem de sol ideal ise I ya S nin bir *ideali* (*iki yanlı ideali*) denir.

Dikkat edilecek olursa bir yarıgrupun iki yanlı her ideali bir altyarıgruptur. Fakat bir altyarıgrupun bir ideal olması gerekmez.

Tanım 2.4.2. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun.

$$S^1 a = Sa \cup \{a\} = \{xa : x \in S^1\}$$

$$a S^1 = aS \cup \{a\} = \{ay : y \in S^1\}$$

$$S^1 a S^1 = SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} = \{xay : x, y \in S^1\}$$

kümelerine sırasıyla, S yarıgrupunun a elemanını içeren en küçük sol, sağ ve iki taraflı idealleri denir.

Tanım 2.4.3. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

$$\mathcal{L} = \{(a, b) \in S \times S : S^1 a = S^1 b\}$$

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S : a S^1 = b S^1\}$$

$$\mathcal{J} = \{(a, b) \in S \times S : S^1 a S^1 = S^1 b S^1\}$$

şeklinde tanımlanan \mathcal{L} , \mathcal{R} , \mathcal{J} bağıntılarına sırasıyla *sol-Green (L-Green)*, *sağ-Green (R-Green)* ve *Green (J-Green)* denklik bağıntıları denir. \mathcal{L} , \mathcal{R} , \mathcal{J} Green bağıntılarının birer denklik bağıntısı olduğu açıktır.

Önerme 2.4.4. S bir yarıgrup ve $a, b \in S$ olsun.

- 1) $a \mathcal{L} b \Leftrightarrow xa = b$ ve $yb = a$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ vardır.
- 2) $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow au = b$ ve $bv = a$ olacak şekilde $u, v \in S^1$ vardır.
- 3) $a \mathcal{J} b \Leftrightarrow xau = b$ ve $ybv = a$ olacak şekilde $x, y, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: 1) \Rightarrow $a \mathcal{L} b$ olsun. Bu durumda $a, b \in \mathcal{L}$ dir. $a \in S^1 a$ olduğu açıktır. $a \in S^1 b$ olsun. O halde, $a = yb$ olacak şekilde $y \in S^1$ vardır.

$b \in S^1 b$ olduğu açıktır. $b \in S^1 a$ olsun. O halde, $b = xa$ olacak şekilde $x \in S^1$ vardır.

\Leftarrow $xa = b$ ve $yb = a$ olacak şekilde $x, y \in S^1$ olduğunu varsayalım.

$xa = b \Rightarrow S^1 a = S^1 yb \subseteq S^1 b$ ve $yb = a \Rightarrow S^1 b = S^1 xa \subseteq S^1 a$ olup $S^1 a = S^1 b$ dir. Buradan, $a, b \in \mathcal{L}$ yani $a \mathcal{L} b$ olduğu bulunmuş olur.

İspat 2) ve 3) de benzer şekilde yapılabilir. \square

Tanım 2.4.5. Herhangi bir S yarıgrubu kendisinden başka hiçbir (öz) iki yanlı ideale sahip değil ise bu yarıgruba *basit yarıgrup* denir.

Teorem 2.4.6. Bir S yarıgrubu dikdörtgensel band ise basit yarıgruptur.

İspat: S bir yarıgrup ve S dikdörtgensel band olsun. Her $a \in S$ için $SaS = S$ olduğu gösterilirse S basit yarıgrup olur.

$SaS \subseteq S$: S bir yarıgrup olduğundan her $a \in S$ için $SaS \subseteq S$ olduğu açıktır.

$SaS \supseteq S$: Her $a, b \in S$ için, S bir dikdörtgensel band olduğundan

$$b = b^2 = bb = bab \Rightarrow b \in SaS \Rightarrow S \subseteq SaS$$

elde edilir. O halde, $SaS = S$ olup, S basit yarıgruptur. \square

Teorem 2.4.7. Bir S yarıgrubu için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- i. S basit yarıgruptur.
- ii. Her $a \in S$ için, $SaS = S$ dir.
- iii. S nin herhangi iki a ve b elemanı için, $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ vardır.
- iv. S tek bir J -sınıfına sahiptir.

İspat (i) \Rightarrow (ii) Her $a \in S$ için SaS kümesinin S nin bir ideali olacağı açıktır. Ancak S basit yarıgrup olduğu için basit yarıgrup tanımı gereği $SaS = S$ dir.

(ii) \Rightarrow (iii) $SaS = S$ olduğundan ispat açıktır.

(iii) \Rightarrow (iv) $a, b \in S$ alalım. $sat = b$ olacak şekilde $s, t \in S$ ve $ubv = a$ olacak şekilde $u, v \in S$ vardır. Buradan aJb olduğu elde edilir. Böylece $S \times S \subseteq J$ olur. Ayrıca J bağıntısının tanımından $J \subseteq S \times S$ olacağı açıktır. O halde, S yarıgrubunun $J = S \times S$ şeklinde tek bir J -sınıfı vardır.

(iv) \Rightarrow (i) I kümesi S yarıgrubunun bir ideali olsun. $a \in I$ ve $b \in S$ şeklindeki herhangi iki elemanı alalım. (iv) gereği aJb olur. Bu durumda $sat = b$

olacak şekilde $s, t \in S^1$ vardır. I bir ideal ve $a \in I$ olduğundan $sat = b \in I$ olur. O halde $S \subseteq I$ olup $S = I$ elde edilir. Sonuç olarak S basit yarıgrup olur. \square

Örnek 2.4.8. G bir grup olmak üzere, her $a, b \in G$ için $baa^{-1} = b$ olduğundan Teorem (iii) sağlanır. O halde, G basit yarıgruptur.

Tanım 2.4.9. S bir yarıgrup olsun. Eğer S , ayrık alt yarıgruplarının bir birleşiminden oluşuyor ise S ye *yarıgrupların birleşimi* denir.

Tanım 2.4.10. S bir yarıgrup, Y bir band ve $\alpha \in Y$ için S_α lar S nin ayrık alt yarıgrupları olsun. Eğer $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ ve her $\alpha, \beta \in Y$ için $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$ oluyorsa S ye *yarıgrupların bir bandı* denir ve $S = \mathcal{B}[Y; S_\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.11. S bir yarıgrup, Y bir band ve $S = \mathcal{B}[Y; S_\alpha]$ yarıgrupların bir bandı olsun. Eğer, S ayrıca yarılatıslı oluyorsa S ye *yarıgrupların bir yarılatıslı* denir ve $S = \mathcal{S}[Y; S_\alpha]$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.12. Y bir yarılatıslı ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Herhangi $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ ($\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha\beta = \beta$) için

$$\varphi_{\alpha, \beta} : S_\alpha \rightarrow S_\beta$$

tanımlanan homomorfizmin aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:

(1) $\alpha \in Y$ için, $\varphi_{\alpha, \alpha} : S_\alpha \rightarrow S_\alpha$ birim dönüşüm olacak.

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ ve $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ için $\varphi_{\alpha, \beta} \varphi_{\beta, \gamma} = \varphi_{\alpha, \gamma}$ olacak.

Bu durumda, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ olmak üzere

$$a \circ b = (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta})$$

ifadesi, $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerinde bir çarpma (işlem) tanımlar.

O zaman, (1) ve (2) koşulları altında, (S, \circ) bir yarıgruptur. Bu yarıgruba *yarıgrupların güçlü yarılatısı* (strong semilattice of semigroups) denir ve $S = S[Y; S_\alpha; \varphi_{\alpha,\beta}]$ ile gösterilir.

3. ESAS YARILATISLERİN YARIGRUBU

Bu bölümde Wang (2015) tarafından yapılan çalışmalar derlenmiştir.

3.1. Yarıgrupların Temel Yarılatisi

$\zeta(X)$ ile X kümesi üzerindeki tüm dönüşümlerin yarıgrubu gösterilmektedir.

Teorem 3.1.1. Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Herhangi $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ için,

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha, \beta} : S_\alpha &\rightarrow \zeta(S_\beta) \\ a &\rightarrow \phi_\beta^a \end{aligned}$$

yarıgrup homomorfizmleri olsun. Aşağıdaki koşulların karşılanmış olduğunu varsayalım.

- (1) $\alpha \in Y$ ve $a \in S_\alpha$ için, $\langle \phi_\alpha^a \rangle = a$;
- (2) $\alpha, \beta \in Y$, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ için, $\phi_{\alpha\beta}^a \phi_{\alpha\beta}^b$ sabit.

Bu durumda, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ olmak üzere,

$$a * b = \langle \phi_{\alpha\beta}^b \phi_{\alpha\beta}^a \rangle \langle \phi_{\alpha\beta}^a \phi_{\alpha\beta}^b \rangle$$

ifadesi, $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerinde bir çarpma (işlem) tanımlar. Ayrıca,

- (3) $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ ve $c \in S_\gamma$ için,

$$\langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^a \phi_{\alpha\beta\gamma}^{b*c} \rangle = \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^{c*a} \phi_{\alpha\beta\gamma}^b \rangle \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^{a*b} \phi_{\alpha\beta\gamma}^c \rangle$$

olsun. O zaman, (1), (2) ve (3) koşulları altında, $(S, *)$ bir yarıgruptur.

İspat: $S_{\alpha\beta} \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}^a} S_{\alpha\beta} \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}^b} S_{\alpha\beta}$ sabit ve $S_{\alpha\beta} \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}^b} S_{\alpha\beta} \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}^a} S_{\alpha\beta}$ sabit olduğundan Koşul (2), $*$ işleminin S üzerinde iyi tanımlanmış bir işlem olduğunu ifade eder. Ayrıca, Koşul (1) ise $\alpha \in Y$ için S_α 'daki işlem ile $*$ işleminin örtüştüğünü garanti eder. Şimdi $*$ işleminin birleşme özelliğine sahip olduğunu gösterelim.

$\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ ve $c \in S_\gamma$ olsun.

$$\begin{aligned}
(a * b) * c &= \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^c \phi_{\alpha\beta\gamma}^{a*b} \rangle \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^{a*b} \phi_{\alpha\beta\gamma}^c \rangle && \text{(İşlemin tanımı)} \\
&= \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^{b*c} \phi_{\alpha\beta\gamma}^a \rangle \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^{c*a} \phi_{\alpha\beta\gamma}^b \rangle \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^{a*b} \phi_{\alpha\beta\gamma}^c \rangle && \text{(Koşul (3)'den)} \\
&= \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^{b*c} \phi_{\alpha\beta\gamma}^a \rangle \langle \phi_{\alpha\beta\gamma}^a \phi_{\alpha\beta\gamma}^{b*c} \rangle && \text{(Koşul (3)'den)} \\
&= a * (b * c) \text{ (işlemin tanımı)}
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. \square

Teorem 3.1.1 de tanımlanan S yarıgrubu için, $\xi : S \rightarrow Y$ olmak üzere, $a \in S_\alpha$ için

$$a\xi = a$$

şeklinde tanımlanırsa ξ bir örten homomorfizm olur. Bu durumda, S yarıgrubu S_α yarıgruplarının bir yarılatisidir.

Tanım 3.1.2. Teorem 3.1.1 de tanımlanan yarıgruba, S_α yarıgruplarının temel Y yarılatisi denir ve $\mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha,\beta})$ ile gösterilir.

$S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha,\beta})$ yarıgrupların temel yarılatisi ve $a, b \in S$ olsun.

Bundan sonra belirsizlik olmayan durumlarda $a * b$ yerine ab yazacağız.

Sonuç 3.1.3. $S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha, \beta})$ yarigrupların temel yarilatısı, n bir pozitif tamsayı ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha, \beta})$ olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \in S_{\alpha_i}$,

$\alpha_i \in Y$ ve $\prod_{i=1}^n \alpha_i = \beta$ olmak üzere

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \langle \phi_\beta^{a_2 \cdots a_n} \phi_\beta^{a_1} \rangle \langle \phi_\beta^{a_3 \cdots a_n a_1} \phi_\beta^{a_2} \rangle \cdots \langle \phi_\beta^{a_1 \cdots a_{n-1}} \phi_\beta^{a_n} \rangle$$

dir.

İspat: İspatı n üzerinden tümevarım ile yapalım. $S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha, \beta})$ yarigrupların temel yarilatısı, n bir pozitif tamsayı ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha, \beta})$ olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \in S_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in Y$ ve $\prod_{i=1}^n \alpha_i = \beta$ olsun.

$n = 1$ için: $a_1 = \langle \phi_\beta^{a_1} \rangle$ olduğu açıktır. (Teorem 3.1.1 Koşul (1))

$n = 2$ için: $a_1 a_2 = \langle \phi_\beta^{a_2} \phi_\beta^{a_1} \rangle \langle \phi_\beta^{a_1} \phi_\beta^{a_2} \rangle$ olduğu açıktır. (Teorem 3.1.1 işlem)

$n = k - 1$ için: $a_1 a_2 \cdots a_{k-1} = \langle \phi_\beta^{a_2 \cdots a_{k-1}} \phi_\beta^{a_1} \rangle \langle \phi_\beta^{a_3 \cdots a_{k-1} a_1} \phi_\beta^{a_2} \rangle \cdots \langle \phi_\beta^{a_1 \cdots a_{k-2}} \phi_\beta^{a_{k-1}} \rangle$

doğru olduğunu kabul edelim.

$n = k$ için:

$a_1 a_2 \cdots a_{k-1} a_k = \langle \phi_\beta^{a_k} \phi_\beta^{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \rangle \langle \phi_\beta^{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \phi_\beta^{a_k} \rangle$ (Teorem 3.1.1 işlem)

$= \langle \phi_\beta^{a_2 \cdots a_{k-1} a_k} \phi_\beta^{a_1} \rangle \langle \phi_\beta^{a_k a_1} \phi_\beta^{a_2 \cdots a_{k-1}} \rangle \langle \phi_\beta^{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \phi_\beta^{a_k} \rangle$ (Teorem 3.1.1 Koşul (3))

$= \langle \phi_\beta^{a_2 \cdots a_{k-1} a_k} \phi_\beta^{a_1} \rangle \langle \phi_\beta^{a_3 \cdots a_k a_1} \phi_\beta^{a_2} \rangle \langle \phi_\beta^{a_k a_1 a_2} \phi_\beta^{a_3 \cdots a_{k-1}} \rangle \langle \phi_\beta^{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \phi_\beta^{a_k} \rangle$ (Teorem

3.1.1 Koşul (3))

$= \langle \phi_\beta^{a_2 \cdots a_{k-1} a_k} \phi_\beta^{a_1} \rangle \langle \phi_\beta^{a_3 \cdots a_k a_1} \phi_\beta^{a_2} \rangle \langle \phi_\beta^{a_4 \cdots a_1 a_2} \phi_\beta^{a_3} \rangle \langle \phi_\beta^{a_k a_1 a_2 a_3} \phi_\beta^{a_4 \cdots a_{k-2} a_{k-1}} \rangle \langle \phi_\beta^{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}} \phi_\beta^{a_k} \rangle$

(Teorem 3.1.1 Koşul (3)).

Benzer şekilde devam edilirse,

$$a_1 a_2 \cdots a_k = \langle \phi_\beta^{a_2 \cdots a_k} \phi_\beta^{a_1} \rangle \langle \phi_\beta^{a_3 \cdots a_k a_1} \phi_\beta^{a_2} \rangle \cdots \langle \phi_\beta^{a_1 \cdots a_{k-1}} \phi_\beta^{a_k} \rangle$$

olacaktır. O halde tümevarım ilkesi gereği,

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \langle \phi_\beta^{a_2 \cdots a_n} \phi_\beta^{a_1} \rangle \langle \phi_\beta^{a_3 \cdots a_n a_1} \phi_\beta^{a_2} \rangle \cdots \langle \phi_\beta^{a_1 \cdots a_{n-1}} \phi_\beta^{a_n} \rangle$$

olduğu kanıtlanmış olur.

Teorem 3.1.1 den yola çıkarak aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 3.1.4 Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olmak üzere $S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha, \beta})$ yarıgrupların temel yarılatisi olsun.

(1) Her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ için

$$ab = (b\phi_\beta^a)b \text{ ve } ba = b(b\phi_\beta^a);$$

(2) Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha\beta \geq \gamma$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ ve $c \in S_\gamma$ için

$$c\phi_\gamma^{ab} = ((bc)\phi_\gamma^a)((ca)\phi_\gamma^b)$$

dir.

İspat: Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olmak üzere, $S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha; \Phi_{\alpha, \beta})$ yarıgrupların temel yarılatisi olsun.

(1) Her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ için $\phi_\alpha^a : S_\alpha \rightarrow S_\alpha$ ve $\phi_{\alpha\beta}^a \phi_{\alpha\beta}^b$ sabit olacaktır. $\alpha \geq \beta$ olduğundan $\alpha\beta = \beta$ olur. Böylece $\phi_\beta^a \phi_\beta^b$ sabit olur. $\phi_\beta^b = b$ olacağından

$$ab = \langle \phi_\beta^b \phi_\beta^a \rangle \langle \phi_\beta^a \phi_\beta^b \rangle = \langle b\phi_\beta^a \rangle \langle \phi_\beta^a b \rangle = (b\phi_\beta^a)b$$

olur. Benzer şekilde $ba = b(b\phi_\beta^a)$ olduğu gösterilebilir.

(2) Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha\beta \geq \gamma$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ ve $c \in S_\gamma$ için $\phi_\alpha^a : S_\alpha \rightarrow S_\alpha$ ve $\phi_{\alpha\beta}^a \phi_{\alpha\beta}^b$ sabit olacaktır. $\alpha\beta \geq \gamma$ olduğundan, $\alpha\beta\gamma = \gamma$ olur.

Ayrıca, $\gamma \geq \beta\gamma \geq \alpha\beta\gamma = \gamma$ olduğundan $\beta\gamma = \gamma$ ve benzer şekilde $\alpha\gamma = \gamma$ olacaktır. $\phi_\gamma^c = c$ olacağından $\phi_\gamma^a \phi_\gamma^b \phi_\gamma^c = \phi_\gamma^a \phi_\gamma^b c$ olur. Buradan

$$c\phi_\gamma^{ab} = \phi_\gamma^c \phi_\gamma^{ab} = \langle \phi_\gamma^{bc} \phi_\gamma^a \rangle \langle \phi_\gamma^{ca} \phi_\gamma^b \rangle = ((bc)\phi_\gamma^a)((ca)\phi_\gamma^b)$$

olduğu elde edilir. \square

Önerme 3.1.5. Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olmak üzere $S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Phi_{\alpha,\beta})$ yarıgrupların temel yarılatisi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$ için

$$\phi_\beta^a \phi_\beta^a = \phi_\beta^a$$

ve $\text{Ker}\phi_\beta^a$ bir band kongrüansı ise, $\text{Ker}\phi_\beta^a$ bir dikdörtgensel band kongrüansıdır.

İspat: $\rho = \text{Ker}\phi_\beta^a$ nin S_β üzerinde bir dikdörtgensel band kongrüansı olmadığını varsayalım. O zaman, $(u, v) \notin \rho = \text{Ker}\phi_\beta^a$ ve $v\rho = (uv)\rho = (vu)\rho$ olacak şekilde $u, v \in S_\beta$ vardır. $a \in S_\alpha$ olmak üzere Sonuç 3.1.4 ve Teorem 3.1.1 Koşul (1) den biliyoruz ki

$$(u\phi_\beta^a)u = au = v\phi_\beta^{au} = (uv)\phi_\beta^a(va)\phi_\beta^u = (v\phi_\beta^a)u$$

olur. Ayrıca, $\phi_\beta^a \phi_\beta^a = \phi_\beta^a$ olup, $(u\phi_\beta^a, u), (v\phi_\beta^a, v) \in \rho = \text{Ker}\phi_\beta^a$ olacaktır.

$\rho = \text{ker}\phi_\beta^a$, S_β üzerinde bir band kongrüansı olduğundan $u\rho = (vu)\rho = v\rho$ çelişkisi elde edilir. O halde $\rho = \text{Ker}\phi_\beta^a$, S_β üzerinde bir dikdörtgensel band kongrüansıdır.

Aşağıdaki örnekte gösterildiği gibi, yarılatis olan her yarıgrup, bazı yarıgrupların bir temel yarılatisi olmayabilir.

Örnek 3.1.6. $Y = \{\alpha, \beta\}$ ($\alpha > \beta$) iki elemanlı bir yarılatis ve S de çarpma işlemi aşağıdaki çarpım tablosu ile verilen bir yarıgrup olsun.

	a	b	0
a	a	0	0
b	b	0	0
0	0	0	0

O halde, S yarıgrubu, $\{a\}$ ve $\{b, 0\}$ yarıgruplarının Y yarılatisidir. Ancak, $\{b, 0\}$ in iki elemanın çarpımı $ba = b$ olarak ifade edilemediğinden, S yarıgrubu $\{a\}$ ve $\{b, 0\}$ yarıgruplarının temel yarılatisi olamaz.

Teorem 3.1.1 den “değişmeli yarıgrupun temel yarılatisi değişmelidir” sonucuna ulaşırız. Ancak, Örnek 3.1.6 gösteriyor ki değişmeli yarıgrupların yarılatisleri değişmeli olmak zorundan değildir.

3.2 Yarıgrupların Yarı-Güçlü Yarılatisi

$\varphi_{\alpha, \beta} : S_{\alpha} \rightarrow S_{\beta}$ sabit homomorfizmler ve $\varphi_{\alpha, \beta} : S_{\alpha} \rightarrow \zeta(S_{\beta})$ sabit homomorfizmleri için

$$a\varphi_{\alpha, \beta} = \langle \phi_{\beta}^a \rangle$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde özel tipteki yarıgrupların temel yarılatislerini de içine alan yarıgrupların yarılatislerini tanımlayacağız.

Önerme 3.2.1. Y bir yarılatis ve $\{S_{\alpha} : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $a \in S_{\alpha}$ için $\varphi_{\alpha, \beta} : S_{\alpha} \rightarrow S_{\beta}$ aşağıdaki koşulları sağlıyor olsun.

(1) $\alpha \in Y$ için, $\varphi_{\alpha,\alpha}$ ifadesi φ_α üzerinde birim dönüşüm,

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha\beta \geq \gamma$ ve $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ için

$$\left((a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta}) \right) \varphi_{\alpha\beta,\gamma} = (a\varphi_{\alpha,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma})$$

olsun.

Bu durumda, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ olmak üzere

$$a *_1 b = (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta})$$

ifadesi, $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerinde bir çarpma (işlem) tanımlar.

O zaman, (1) ve (2) koşulları altında $(S, *_1)$ bir yarıgruptur.

İspat: Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi

olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$ için $\varphi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \rightarrow S_\beta$

(1) $\alpha \in Y$ için, $\phi_{\alpha,\alpha}$ ifadesi ϕ_α üzerinde birim dönüşüm,

(2) $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha\beta \geq \gamma$ ve $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ için,

$$\left((a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta}) \right) \varphi_{\alpha\beta,\gamma} = (a\varphi_{\alpha,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma})$$

koşulları sağlanıyor olsun. Buradan

$$\begin{aligned} (a *_1 b) *_1 c &= \left((a *_1 b) \varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} \right) (c\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}) \\ &= \left((a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta}) \right) (\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma})(c\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}) \quad (*_1 \text{ işlemi tanımı}) \\ &= (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta\gamma})(c\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}) \quad (\text{Önerme 3.2.1 Koşul 2}) \end{aligned}$$

dir. Öte yandan,

$$a *_1 (b *_1 c) = (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}) \left((b *_1 c) \varphi_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta})((b\varphi_{\beta,\alpha\beta})(c\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}))(\varphi_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}) \quad (*_1 \text{ işleminin tanımı}) \\
&= (a\varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta\gamma})(c\varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}) \quad (\text{Önerme 3.2.1 Koşul 2})
\end{aligned}$$

olup $(a *_1 b) *_1 c = a *_1 (b *_1 c)$ olacağından $(S, *_1)$ bir yarıgruptur. \square

Tanım 3.2.2 Önerme 3.1.7 de gösterilen yarıgruba S_α yarıgruplarının yarı-güçlü yarılatisi denir ve $\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$ ile gösterilir. Aşağıdaki sonuç Önerme 3.2.1 tarafından kolayca görülebilir.

Sonuç 3.2.3 Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olmak üzere $\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$, S_α yarıgruplarının yarı-güçlü yarılatisi olsun. Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ için $\varphi_{\alpha,\beta}$ bir homomorfizm ve

- i. $(a\varphi_{\alpha,\beta} \varphi_{\beta,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma}) = (a\varphi_{\alpha,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma})$
- ii. $(b\varphi_{\beta,\gamma})(a\varphi_{\alpha,\beta} \varphi_{\beta,\gamma}) = (b\varphi_{\beta,\gamma})(a\varphi_{\alpha,\gamma})$

dir.

İspat: Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olmak üzere $\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$, S_α yarıgruplarının yarı-güçlü yarılatisi olsun. Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ için $\varphi_{\alpha,\beta}$ nin bir homomorfizm olduğu Önerme 3.2.1 Koşul (2)'den kolayca gösterilebilir.

- i. $(a\varphi_{\alpha,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma}) = ((a\varphi_{\alpha,\beta})(b\varphi_{\beta,\beta}))\varphi_{\beta,\gamma} \quad (\text{Önerme 3.2.1 (2)})$
 $= (a\varphi_{\alpha,\beta} \varphi_{\beta,\gamma})(b\varphi_{\beta,\beta} \varphi_{\beta,\gamma}) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan})$

$$= (a\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma}) \quad (\text{Önerme 3.2.1 (1)})$$

olur.

$$\text{ii. } (b\varphi_{\beta,\gamma})(a\varphi_{\alpha,\gamma}) = ((b\varphi_{\beta,\beta})(a\varphi_{\alpha,\beta}))\varphi_{\beta,\gamma} \quad (\text{Önerme 3.2.1 (2)})$$

$$= (b\varphi_{\beta,\beta}\varphi_{\beta,\gamma})(a\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}) \quad (\varphi \text{ homomorfizm olduğundan})$$

$$= (b\varphi_{\beta,\gamma})(a\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma}) \quad (\text{Önerme 3.2.1 (1)})$$

olur.

Tanım 3.2.4. S bir yarıgrup olsun. Her $a, b \in S$ için $ac = bc$ ve $ca = cb$ iken $a = b$ olmasını sağlayan bir $c \in S$ varsa S ye zayıf sadeleştirilebilir yarıgrup denir. Sonuç 3.2.3 den eğer $\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$, S_α yarıgruplarının yarı-güçlü yarılatisi ise herhangi bir $\alpha \in Y$ için S_α nın zayıf sadeleştirilebilir olduğu durumda $\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$ ayrıca S_α nın güçlü bir Y yarılatisidir. Bunu görmek oldukça kolaydır.

Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olmak üzere $\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$, S_α yarıgruplarının yarı-güçlü yarılatisi olsun. Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ için $\varphi_{\alpha,\beta}$ bir homomorfizm olmak üzere

$$(a\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma}) = (a\varphi_{\alpha,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma})$$

olacaktır. S_α zayıf sadeleştirilebilir olduğundan Sonuç 3.2.3 den hareketle,

$$(a\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma}) = (a\varphi_{\alpha,\gamma})(b\varphi_{\beta,\gamma})$$

$$a\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} = a\varphi_{\alpha,\gamma}$$

$$\varphi_{\alpha,\beta} \varphi_{\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha,\gamma}$$

olacaktır. Bu ise $\mathcal{A}(Y; S_\alpha, \varphi_{\alpha,\beta})$ nin S_α yarıgruplarının güçlü yarılatisi olduğu sanucuna ulaştırır. Yani, yarı-güçlü yarılatıs, zayıf sadeleştirme özelliğine sahip ise güçlü yarılatıdır.

Gözlem: Genel olarak yarı-güçlü yarılatıs, yarıgrupların güçlü yarılatıslarının uygun bir genellemesidir. Aşağıdaki örnek bu duruma bir örnektir.

Örnek 3.2.5. $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ($\alpha > \beta > \gamma$) üç elemanlı bir yarılatıs, $S_\alpha = \{a, a^2\}$, $S_\beta = \{b, b^2\}$ iki izomorfik iki elemanlı monojenik yarıgrup, $a^2 = a^3$ ve $b^2 = b^3$ olsun. $S_\gamma = \{c, c^2, c^3, c^4, c^5\}$ beş elemanlı monojenik yarıgrup ve $c^4 = c^6$ olsun.

$$\varphi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \rightarrow S_\beta$$

$$a\varphi_{\alpha,\beta} = b \text{ ve } a^2\varphi_{\alpha,\beta} = b^2$$

$$\varphi_{\alpha,\gamma} : S_\alpha \rightarrow S_\gamma$$

$$a\varphi_{\alpha,\gamma} = c^2 \text{ ve } a^2\varphi_{\alpha,\gamma} = c^4$$

$$\varphi_{\beta,\gamma} : S_\beta \rightarrow S_\gamma$$

$$b\varphi_{\beta,\gamma} = c^4 \text{ ve } b^2\varphi_{\beta,\gamma} = c^4$$

olarak tanımlayalım. Her $\delta \in Y$ için $\varphi_{\delta,\delta}$ ifadesi, φ_δ üzerinde doğal dönüşüm olsun. O zaman, $S = S_\alpha \cup S_\beta \cup S_\gamma$ olmak üzere, Y, S nin bir yarı-güçlü yarılatısidir. S nin bu yarılatıs ayrıştırmasının en küçüğü olduğunu da söyleyebiliriz.

Varsayalım ki, S yarıgrubu $\delta, \eta \in Y$ ve $\delta \geq \eta$ iken $\xi_{\delta,\eta}$ homomorfizmleri ile belirli S_α, S_β ve S_γ nin güçlü yarı latisi olsun.

$$a *_1 c = (a\varphi_{\alpha,\gamma})(c\varphi_{\gamma,\gamma}) = (a\varphi_{\alpha,\gamma})c$$

olduğundan

$$ac = (a\varphi_{\alpha,\gamma})c = c^3 = (a\xi_{\alpha,\gamma})c$$

olacaktır. $S_\gamma = \{c, c^2, c^3, c^4, c^5\}$ da, c ile çarpıldığında c^3 ü veren yegane eleman c^2 olduğundan

$$a\xi_{\alpha,\gamma} = c^2$$

olur. Benzer şekilde,

$$bc = (b\varphi_{\beta,\gamma})c = c^5 = (b\xi_{\beta,\gamma})c$$

olacaktır. $S_\gamma = \{c, c^2, c^3, c^4, c^5\}$ da, c ile çarpıldığında c^5 i veren yegane eleman c^4 olduğundan

$$b\xi_{\beta,\gamma} = c^4$$

olur. Şimdi, $a\xi_{\alpha,\beta}$ nin alabileceği değerlere göre, $a\xi_{\alpha,\beta}\xi_{\beta,\gamma}$ nin durumunu inceleyelim.

$$a\xi_{\alpha,\beta} = b \text{ ise: } a\xi_{\alpha,\beta}\xi_{\beta,\gamma} = b\xi_{\beta,\gamma} = c^4$$

$$a\xi_{\alpha,\beta} = b^2 \text{ ise: } a\xi_{\alpha,\beta}\xi_{\beta,\gamma} = b^2\xi_{\beta,\gamma} = c^4$$

olur. Yani, $a\xi_{\alpha,\beta}$ ne olursa olsun, $a\xi_{\alpha,\beta}\xi_{\beta,\gamma} = c^4$ olacaktır. O halde,

$$c^2 = a\xi_{\alpha,\gamma} = a\xi_{\alpha,\beta}\xi_{\beta,\gamma} = c^4$$

çelişkisi elde edilir. Bu nedenle S yarigrubu, S_α , S_β ve S_γ nin güçlü bir yarılatisi olarak ifade edilemez.

3.3.Yarıgrupların Düzgün Yarılatisi

Bu bölümde, yarıgrupların temel yarılatisleri, yarıgrupların yarı-güçlü yarılatisleri, yarıgrupların rafine yarılatisleri ve yarıgrupların düzenli yarılatisleri arasındaki ilişkileri tartışacağız. Görülecektir ki bunların hepsi, yarıgrupların güçlü yarılatislerinin genellemesidir.

Tanım 3.3.1. A ve B boş olmayan kümeler olsun. 2^B , B nin tüm alt kümelerinin kümesi olmak üzere $A \rightarrow 2^B$ olan bir fonksiyona A dan B ye bir *küme değerli fonksiyon* denir.

Tanım 3.3.2. ρ , B kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve ξ , A dan B ye bir küme değerli fonksiyon olsun. Eğer, her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $|a\xi \cap b\rho| = 1$ oluyorsa ξ ye, A dan B ye ρ ile ilişkili küme değerli fonksiyon denir ve

$$\xi : A \xrightarrow{\rho} 2^B$$

ile gösterilir.

w_b , B üzerinde alışıldık denklik bağıntısı (her $b \in B$ için $bw_b = b$) ise

$$\xi : A \xrightarrow{w_b} 2^B$$

ifadesine *alışıldık küme değerli fonksiyon* diyeceğiz.

Gözlem: $\xi : A \xrightarrow{\rho} 2^B$, ρ ile ilişkili küme değerli fonksiyon ve $b \in B$ olsun. Bu durumda,

$$\xi^b : A \rightarrow b\rho$$

$$a\xi^b = a\xi \cap b\rho$$

fonksiyonu belirler.

Önerme 3.3.3. A ve B boş olmayan kümeler olsun. Her $a \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ için $\xi: A \rightarrow 2^B$, $|a\xi \cap b\rho| = 1$ koşulunu sağlayan ρ ile ilişkili A dan B ye küme değerli fonksiyon olmak üzere

$$(\forall b_1, b_2 \in B) b_1\rho b_2 \Leftrightarrow \xi^{b_1} = \xi^{b_2} \Leftrightarrow (\exists a \in A) a\xi^{b_1} = a\xi^{b_2} \quad (3.1)$$

dir.

İspat: A ve B boş olmayan kümeler ve her $a \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ için $\xi: A \rightarrow 2^B$, $|a\xi \cap b\rho| = 1$ koşulunu sağlayan, ρ ile ilişkili A dan B ye küme değerli fonksiyon olsun.

$\Rightarrow b_1\rho b_2$ olsun. Bu durumda, $b_1\rho = b_2\rho$ olur.

$\xi^{b_1}: A \rightarrow b_1\rho$, $\xi^{b_2}: A \rightarrow b_2\rho$

$$a\xi^{b_1} = a\xi \cap b_1\rho = a\xi \cap b_2\rho$$

ve

$$|a\xi \cap b_1\rho| = |a\xi \cap b_2\rho| = 1$$

olduğundan

$$a\xi^{b_1} = a\xi \cap b_1\rho = a\xi \cap b_2\rho \Rightarrow \xi^{b_1} = \xi^{b_2}$$

olur.

$\Leftarrow \xi^{b_1} = \xi^{b_2}$ olsun. Her $a \in A$ için

$$a\xi \cap b_1\rho = a\xi \cap b_2\rho$$

olup $b_1\rho \cap b_2\rho \neq \emptyset$ olduğundan

$$a\xi \cap b_1\rho = a\xi \cap b_2\rho \Rightarrow b_1\rho = b_2\rho \Rightarrow b_1\rho b_2$$

olur. \square

Tanım 3.3.4. S ve T yarıgruplar, ρ , T kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ve $\xi : S \xrightarrow{\rho} 2^T$, ρ ile ilişkili küme değerli fonksiyon olsun. Eğer, her $t \in T$ için,

$$\xi^t : S \rightarrow t\rho \subset T$$

bir homomorfizm ise ξ ye, S den T ye ρ ile ilişkili homomorfizm denir.

Teorem 3.3.5. Y bir yarılatıs ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer-ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ olmak üzere, $\rho_{\alpha, \beta}$, S_β üzerinde bir band kongrüansı olmak üzere, $\Phi_{\alpha, \beta} : S_\alpha \xrightarrow{\rho_{\alpha, \beta}} 2^{S_\beta}$, $\rho_{\alpha, \beta}$ ile ilişkili S_α dan S_β ya küme değerli fonksiyon olsun. Eğer,

- (1) Her $\alpha \in Y$ için $\rho_{\alpha, \alpha} = \omega_{S_\alpha}$ ve $\Phi_{\alpha, \alpha}$, S_α üzerinde birim dönüşüm;
- (2) Her $\alpha, \beta \in Y$ ve $a \in S_\alpha$ için, $a\Phi_{\alpha, \alpha\beta} \subseteq x\rho_{\beta, \alpha\beta}$ olacak şekilde $x \in S_{\alpha\beta}$ vardır.

koşulları sağlanıyorsa, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ iken

$$a \circ b = (a\Phi_{\alpha, \alpha\beta}^x)(b\Phi_{\beta, \alpha\beta}^y)$$

ifadesi, $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerinde bir işlem tanımlar. Ayrıca,

- (3) Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ ve $c \in S_\gamma$ için,

$$(a \circ b)\Phi_{\alpha\beta, \alpha\beta\gamma}^x = (a\Phi_{\alpha, \alpha\beta\gamma}^y)(b\Phi_{\beta, \alpha\beta\gamma}^z)$$

olsun. O zaman, (1), (2) ve (3) koşulları altında, (S, \circ) bir yarıgruptur. Burada,

$$c\Phi_{\gamma, \alpha\beta\gamma} \subseteq x\rho_{\alpha\beta, \alpha\beta\gamma}, (b \circ c)\Phi_{\beta\gamma, \alpha\beta\gamma} \subseteq y\rho_{\alpha, \alpha\beta\gamma} \text{ ve } (c \circ a)\Phi_{\alpha\gamma, \alpha\beta\gamma} \subseteq z\rho_{\beta, \alpha\beta\gamma}$$

dir.

İspat: Her $a, b, c \in S$ ve $\alpha, \beta, \gamma \in Y$ için $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $c \in S_\gamma$ olmak üzere Koşul (2) den, $c\Phi_{\gamma, \alpha\beta\gamma} \subseteq x\rho_{\alpha\beta, \alpha\beta\gamma}$, $(a \circ b)\Phi_{\alpha\beta, \alpha\beta\gamma} \subseteq u\rho_{\alpha, \alpha\beta\gamma}$, $a\Phi_{\alpha, \alpha\beta\gamma} \subseteq v\rho_{\beta\gamma, \alpha\beta\gamma}$, $(b \circ c)\Phi_{\beta\gamma, \alpha\beta\gamma} \subseteq y\rho_{\alpha, \alpha\beta\gamma}$ ve $(c \circ a)\Phi_{\alpha\gamma, \alpha\beta\gamma} \subseteq z\rho_{\beta, \alpha\beta\gamma}$ olur. O halde, Koşul (3) den,

$$(a \circ b) \circ c = ((a \circ b)\Phi_{\alpha\beta, \alpha\beta\gamma}^x)(c\Phi_{\gamma, \alpha\beta\gamma}^u) \quad (\text{Teorem 3.3.5 İşlem})$$

$$= a\Phi_{\alpha, \alpha\beta}^y(b\Phi_{\beta, \alpha\beta\gamma}^z)(c\Phi_{\gamma, \alpha\beta\gamma}^u) \quad (\text{Teorem 3.3.5 Koşul (3)})$$

$$= (a\Phi_{\alpha, \alpha\beta\gamma}^y)((b \circ c)\Phi_{\beta\gamma, \alpha\beta\gamma}^v) \quad (\text{Teorem 3.3.5 Koşul (3)})$$

$$= a \circ (b \circ c) \quad (\text{İşlemin tanımı})$$

olur. \square

Tanım 3.3.6. Teorem 3.3.5 de ifade edilen yarigruba, S_α yarigruplarının düzgün Y yarilatisi denir ve $S = \mathfrak{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha, \beta}, \Phi_{\alpha, \beta})$ ile gösterilir.

Gözlem: $S = \mathfrak{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha, \beta}, \Phi_{\alpha, \beta})$ yarigrupların düzgün yarilatisi olsun.

(1) Teorem 3.3.5 Koşul (1) ve Koşul (2)'den her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$,

$a \in S_\alpha$ ve $x \in S_\beta$ için

$$a \circ x = (a\Phi_{\alpha, \beta}^x)x \text{ ve } x \circ a = x(a\Phi_{\alpha, \beta}^x)$$

(2) Teorem 3.3.5 Koşul (1) ve Koşul (3)'den her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha\beta \geq \gamma$,

$a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ ve $x \in S_\gamma$ için

$$(a \circ b)\Phi_{\alpha\beta, \gamma}^x = (a\Phi_{\alpha, \gamma}^{b \circ x})(b\Phi_{\beta, \gamma}^{x \circ a})$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.7. $S = \mathfrak{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta})$ yarıgrupların düzgün yarılatisi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ için

- (1) Her $x \in S_\beta$ için $\Phi_{\alpha,\beta}^x, S_\alpha$ dan S_β ya bir homomorfizmadır;
- (2) $\rho_{\alpha,\beta}, S_\beta$ üzerinde bir dikdörtgensel band kongrüansıdır.

İspat: (1) $a, b \in S_\alpha$ olsun. $\rho_{\alpha,\beta}$ bir band kongrüansı olduğundan Gözlem (1) den ve $\Phi_{\alpha,\beta}^x$ tanımından $b \circ x \in x\rho_{\alpha,\beta}$ ve $x \circ a \in x\rho_{\alpha,\beta}$ dir. O zaman Gözlem (2) den

$$(a \circ b)\Phi_{\alpha,\beta}^x = (a\Phi_{\alpha,\beta}^{b \circ x})(b\Phi_{\alpha,\beta}^{x \circ a}) = (a\Phi_{\alpha,\beta}^x)(b\Phi_{\alpha,\beta}^x)$$

olup $\Phi_{\alpha,\beta}^x, S_\alpha$ dan S_β ya bir homomorfizmadır.

(2) $\rho_{\alpha,\beta}$ nın, S_β üzerinde bir dikdörtgensel band kongrüansı olmadığını varsayalım. O zaman, $u, v \in S_\beta$ vardır öyle ki $(u, v) \notin \rho_{\alpha,\beta}$ ve $v\rho_{\alpha,\beta} = (uv)\rho_{\alpha,\beta} = (vu)\rho_{\alpha,\beta}$ dir. O zaman, $a \in S_\alpha$ için Gözlem (1) ve Gözlem (2) ayrıca Teorem 3.3.5 Koşul (1) ve Koşul (2) den

$$(a\Phi_{\alpha,\beta}^u)u = a \circ u = (a \circ u)\Phi_{\beta,\beta}^v = (a\Phi_{\alpha,\beta}^{uv})(u\Phi_{\beta,\beta}^{va}) = (a\Phi_{\alpha,\beta}^v)u$$

elde edilir. Ayrıca $\rho_{\alpha,\beta}, S_\beta$ üzerinde bir band kongrüansı olduğundan

$$u\rho_{\alpha,\beta} = (vu)\rho_{\alpha,\beta} = v\rho_{\alpha,\beta}$$

dir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $\rho_{\alpha,\beta}, S_\beta$ üzerinde bir dikdörtgensel band kongrüansıdır. \square

Önerme 3.3.8. $S = \mathfrak{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta})$ yarıgrupların düzgün yarılatisi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ için

- (1) $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq u\rho_{\beta,\alpha\beta}$ ve $b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq u\rho_{\alpha,\alpha\beta}$ olacak şekilde $u \in S_{\alpha\beta}$ vardır.

$$(2) a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq (a \circ b)\rho_{\beta,\alpha\beta} = (b \circ a)\rho_{\beta,\alpha\beta} \text{ ve}$$

$$b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq (a \circ b)\rho_{\alpha,\alpha\beta} = (b \circ a)\rho_{\beta,\alpha\beta}$$

dir.

İspat: (1) Teorem 3.3.5 Koşul (2) den, öyle $x, y \in S_{\alpha\beta}$ vardır ki $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq x\rho_{\beta,\alpha\beta}$ ve $b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq y\rho_{\alpha,\alpha\beta}$ dir. Böylece $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^y \in (x\rho_{\beta,\alpha\beta}) \cap (y\rho_{\alpha,\alpha\beta})$ ve $b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^x \in (x\rho_{\beta,\alpha\beta}) \cap (y\rho_{\alpha,\alpha\beta})$ olur. O halde, $u \in (x\rho_{\beta,\alpha\beta}) \cap (y\rho_{\alpha,\alpha\beta})$ olacak şekilde $u \in S_{\alpha\beta}$ vardır.

$$(2) a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq u\rho_{\beta,\alpha\beta} \text{ ve } b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq u\rho_{\alpha,\alpha\beta} \text{ olacak şekilde } u \in S_{\alpha\beta} \text{ olduğunu}$$

(1) den biliyoruz. Bu nedenle, $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u \in u\rho_{\alpha,\alpha\beta} \cap u\rho_{\beta,\alpha\beta}$ ve $b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^u \in u\rho_{\alpha,\alpha\beta} \cap u\rho_{\beta,\alpha\beta}$ olur. Ayrıca, $\rho_{\alpha,\alpha\beta}$ ve $\rho_{\beta,\alpha\beta}$, $S_{\alpha\beta}$ üzerinde bir band kongrüansı olduğundan ve Teorem 3.2.5. Koşul (2) vasıtasıyla

$$a \circ b = (a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u)(b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^u) \in u\rho_{\alpha,\alpha\beta} \cap u\rho_{\beta,\alpha\beta}$$

dir. Benzer şekilde,

$$b \circ a = (b\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u)(a\Phi_{\beta,\alpha\beta}^u) \in u\rho_{\alpha,\alpha\beta} \cap u\rho_{\beta,\alpha\beta}$$

bulunur. Böylece,

$$a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq (a \circ b)\rho_{\beta,\alpha\beta} = (b \circ a)\rho_{\beta,\alpha\beta}$$

ve

$$b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq (a \circ b)\rho_{\alpha,\alpha\beta} = (b \circ a)\rho_{\beta,\alpha\beta}$$

sonucuna ulaşılır. \square

Tanım 3.3.9. $\Phi_1 : A \xrightarrow{\rho_1} 2^B$ ve $\Phi_2 : B \xrightarrow{\rho_2} 2^C$ küme ilişkili dönüşümler olsun. Bu durumda

(A) $\rho_3 \subseteq \rho_2$;

(B) her $a \in A$ için, $a\Phi_1\Phi_2 = \bigcup_{x \in a\Phi_1} x\Phi_3$ olmak üzere, $a\Phi_1\Phi_2 \subseteq a\Phi_3$;

(C) her $b \in B$ ve $c \in C$ için, $(b\rho_1)\Phi_2^c \subseteq c'\rho_3$ olacak şekilde $c' \in C$ vardır;

koşullarını sağlayan $\Phi_3 : A \xrightarrow{\rho_3} 2^C$ ilişkili dönüşümüne Φ_1 ve Φ_2 ilişkili dönüşümlerinin bileşkesi denir.

Tanım 3.3.10. S_1 ve S_2 yarıgruplar, $\xi : S_1 \xrightarrow{\rho} S_2$ bir eşleme olsun. O zaman ξ nun bir homomorfizma olduğunu söyleriz. Eğer ρ , S_2 üzerinde bir kongrüans ise herhangi $s_1, s_2 \in S_1$ ve $t \in T$ için

$$(s_1s_2)\xi^t = (s_1\xi^t)(s_2\xi^t) \quad (3.2)$$

olur.

Önerme 3.3.11. T bir yarıgrup ve ρ , T üzerinde bir kongrüans olsun. O zaman, ρ , T üzerinde bir band kongrüansıdır ancak ve ancak bir S yarıgrubu için $S \xrightarrow{\rho} 2^T$ bir homomorfizması vardır.

İspat \Leftarrow S bir yarıgrup ve $\xi : S \xrightarrow{\rho} 2^T$ bir homomorfizma olsun. Herhangi bir $t \in T$ ve $s \in S$ için $|s\xi \cap t\rho| = 1$ dir.

$$\xi^t : S \rightarrow T$$

$$s \rightarrow s\xi \cap t\rho$$

olup T/ρ nun band olduğunu göstereceğiz. Yani, her $t \in T$ için $t^2 \rho t$ olduğunu göstereceğiz.

$t \in T$ ve $s \in S$ olsun. $s\xi^t = t'$ olmak üzere $s^2\xi^t = (t')^2 = t' \cdot t'$ olur.

Öte yandan,

$\xi^t : S \rightarrow t\rho$ homomorfizm olduğundan, $s^2\xi^t = (t')^2 \in t\rho$ olur. $t' \in t\rho$ ve $(t')^2 \in t\rho$ dir. Ayrıca, $(t')^2 \in t^2\rho$ olduğundan $t^2\rho t$ olur. Dolayısıyla, T/ρ bir banddır. O halde ρ , T üzerinde bir band kongrüansıdır.

$\Rightarrow \rho$ nun T üzerinde bir band kongrüansı olduğunu varsayalım. Bu durumda her $t \in T$ için

$$t\rho = t^2\rho$$

ve her $t_1, t_2 \in T$ için,

$$t_1\rho t_1\rho \subseteq t_1 t_2\rho$$

olur. Dolayısıyla, \mathbb{N} doğal sayılar kümesi ve “+”, \mathbb{N} üzerinde alışıldık toplama işlemi olmak üzere $S = (\mathbb{N}, +)$ yarigrubunu düşünelim. Seçme aksiyomundan her $t \in T$ için $|\Delta \cap t\rho| = 1$ ve herhangi bir $x \in \Delta$ için, eğer $x\rho$ T 'nin tüm idempotentlerini içeriyorsa, x idempotent olacak şekilde Δ kümesi seçelim. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n\xi = \{x^n : x \in \Delta\}$$

olmak üzere

$$\xi : S \rightarrow 2^T$$

$$n \rightarrow n\xi$$

olarak tanımlarsak

$$\xi : S \xrightarrow{\rho} 2^T$$

olur. Δ nın seçiminden her $t \in T$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$n\xi \cap t\rho = \begin{cases} \{x\} = \Delta \cap t\rho & t\rho \text{ tüm idempotentleri içeriyorsa} \\ \{x^n\} & t\rho \text{ tüm idempotentleri içermiyorsa} \end{cases}$$

olur. Dolayısıyla, $\xi^x : S \rightarrow x\rho$ homomorfizmadır. \square

Önerme 3.3.12 Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer-ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olmak üzere $S = \mathfrak{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta})$ yarıgrupların düzgün yarılatisi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ ve $x \in S_\beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Psi_{\alpha,\beta} : S_\alpha &\rightarrow \zeta S_\beta \\ a &\rightarrow \Psi_\beta^a \\ x\Psi_\beta^a &= a\Phi_{\alpha,\beta}^x \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşlemesini tanımlayalım. Bu durumda $S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Psi_{\alpha,\beta})$, S_α ($\alpha \in Y$) yarıgruplarının temel yarılatisi olarak ifade edilebilir.

Ayrıca, her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$ ve $a, b \in S_\alpha$ için

$$\Psi_\beta^a \Psi_\beta^b = \Psi_\beta^b \quad (3.4)$$

dir.

Tersine, $S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Psi_{\alpha,\beta})$ yarıgrupların temel yarılatisi ve $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$ ve $a, b \in S_\alpha$ iken $\text{Ker}\Psi_\beta^b$ band kongrüansı ve $\Psi_\beta^a \Psi_\beta^b = \Psi_\beta^b$ olsun. Bu durumda, $\alpha \geq \beta$ iken bir $a_0 \in S_\alpha$ için $\rho_{\alpha,\beta} = \text{Ker}\Psi_\beta^b$ olarak alalım.

$$\Phi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \xrightarrow{\rho_{\alpha,\beta}} 2^{S_\beta}$$

$$a\Phi_{\alpha,\beta} = \text{Im } \Psi_{\beta}^a \quad (a \in S_{\alpha})$$

olarak tanımlanırsa o zaman $S = \mathfrak{R}(Y; S_{\alpha}, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta})$, S_{α} yarigruplarının düzgün yarilatisi olur.

İspat: Y bir yarilatıs ve $\{S_{\alpha} : \alpha \in Y\}$ ikişer-ikişer ayrık yarigrupların bir ailesi olmak üzere $S = \mathfrak{R}(Y; S_{\alpha}, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta})$ yarigrupların düzgün yarilatisi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ olmak üzere

$$\Psi_{\alpha,\beta} : S_{\alpha} \rightarrow \zeta(S_{\beta}), \quad a \rightarrow \Psi_{\beta}^a$$

$$\Psi_{\beta}^a : S_{\beta} \rightarrow S_{\beta}$$

$$x \rightarrow a\Phi_{\alpha\beta}^x$$

olsun. $a\Phi_{\alpha,\beta}^x = a\Phi_{\alpha,\beta} \cap x\rho_{\alpha,\beta}$ ve $|a\Phi_{\alpha,\beta} \cap x\rho_{\alpha,\beta}| = 1$ olduğundan $\Psi_{\alpha,\beta}$ iyi tanımlıdır.

$(x, y) \in \Psi_{\beta}^a$ ise, $\Phi_{\alpha,\beta}^x = \Phi_{\alpha,\beta}^y$ dir. Dolayısıyla Önerme 3.3.3 den $x\rho_{\alpha,\beta}y$ olur. O halde, Ψ_{β}^a ile Ψ_{β}^b , $\zeta(S_{\beta})$ de aynıdır.

Ψ_{β}^a nın tanımından $\Psi_{\beta}^a \Psi_{\beta}^a = \Psi_{\beta}^a$ olduğu açıktır ve dolayısıyla $\Psi_{\beta}^a \Psi_{\beta}^b = \Psi_{\beta}^b$ olduğu elde edilir.

$(\zeta(S_{\beta}))$ de $\Psi_{\beta}^a = \Psi_{\beta}^b$ dir. Buradan, $\Psi_{\beta}^a \Psi_{\beta}^b = \Psi_{\beta}^b \Psi_{\beta}^b = \Psi_{\beta}^b$ elde edilir).

Her $\alpha \in Y$ ve $\alpha, x \in S_{\alpha}$ olmak üzere (3.3) ve Teorem 3.3.5 Koşul (1) den $x\Psi_{\alpha}^a = a\Psi_{\alpha,\alpha}^x = a$ olup $\langle \Psi_{\alpha}^a \rangle = a$ olur.

Her $\alpha, \beta \in Y$, $a \in S_{\alpha}$ ve $b \in S_{\beta}$ için (3.3) ve Teorem 4.3.5 Koşul (2) den dolayı $\Psi_{\alpha\beta}^a \Psi_{\alpha\beta}^b$ sabit olur. Ayrıca

$$\langle \Psi_{\alpha\beta}^b \Psi_{\alpha\beta}^a \rangle \langle \Psi_{\alpha\beta}^a \Psi_{\alpha\beta}^b \rangle = (a\Psi_{\alpha,\alpha\beta}^x)(b\Psi_{\beta,\alpha\beta}^y)$$

dir. Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ ve $c \in S_\gamma$ için

$$\text{Im } \Psi_{\alpha\beta\gamma}^a = a\Phi_{\alpha,\alpha\beta\gamma} \subseteq x\rho_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} = x \text{Ker} \Psi_{\alpha\beta\gamma}^{bc},$$

$$\text{Im } \Psi_{\alpha\beta\gamma}^{ca} = (ca)\Phi_{\alpha\gamma,\alpha\beta\gamma} \subseteq x\rho_{\beta,\alpha\beta\gamma} = x \text{Ker} \Psi_{\alpha\beta\gamma}^b,$$

$$\text{Im } \Psi_{\alpha\beta\gamma}^{ab} = (ab)\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} \subseteq z\rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma} = z \text{Ker} \Psi_{\alpha\beta\gamma}^c$$

koşullarını sağlayan $z \in S_{\alpha,\beta}$ için (burada $\text{Im } \Psi_{\alpha\beta}^b = b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq x\rho_{\alpha,\alpha\beta}$ ve

$\text{Im } \Psi_{\alpha\beta}^a = a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq y\rho_{\beta,\alpha\beta}$ dir). Teorem 4.2.5 Koşul (3) den

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\alpha\beta\gamma}^a \Psi_{\alpha\beta\gamma}^{bc} \rangle &= (bc)\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^x = (b\Phi_{\beta,\alpha\beta\gamma}^y)(c\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^z) \\ &= \langle \Psi_{\alpha\beta\gamma}^{ca} \Psi_{\alpha\beta\gamma}^b \rangle \langle \Psi_{\alpha\beta\gamma}^{ab} \Psi_{\alpha\beta\gamma}^c \rangle \end{aligned}$$

olur.

Böylece $S = \mathcal{F}(Y; S_\alpha, \Psi_{\alpha,\beta})$, S_α ($\alpha \in Y$) yarıgruplarının temel yarılatisi olduğu ispatlanmış olur.

Tersine; $\alpha, \beta \in Y$ ve $a \geq \beta$ alalım. Her $a, b \in S_\alpha$ için

$$\Psi_\beta^a \Psi_\beta^b = \Psi_\beta^b \text{ ve } \Psi_\beta^b \Psi_\beta^a = \Psi_\beta^a$$

olduğundan $\text{Ker} \Psi_\beta^a = \text{Ker} \Psi_\beta^b$ olur. Yani, $\rho_{\alpha,\beta}$, $a_0 \in S_\alpha$ seçiminden bağımsızdır. Buradan $\Phi_{\alpha,\beta}$ nin iyi tanımlı olduğu görülür. Her $a \in S_\alpha$ için $\Psi_\beta^b \Psi_\beta^a = \Psi_\beta^a$ olduğundan $\rho_{\alpha,\beta}$ kongrüansı ile ilişkili bir dönüşüm olduğunu söyleriz. \square

3.4. Yarıgrupların Rafine Yarılatisi

Teorem 3.4.1 Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikili ayrık yarigrupların bir ailesi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ olmak üzere $\Phi_{\alpha, \beta} : S_\alpha \xrightarrow{\rho_{\alpha, \beta}} 2^{S_\beta}$, $\rho_{\alpha, \beta}$ üzerinden S_β dan S_β ya bir eşleme olsun. Varsayalım ki

- (1) Her $\alpha \in Y$ için, $\rho_{\alpha, \alpha} = \omega_{S_\alpha}$ ve $\Phi_{\alpha, \alpha}$, S_α üzerinde birim dönüşüm;
- (2) Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ ve $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $c \in S_\gamma$ olmak üzere

$$\rho_{\alpha, \gamma} \subseteq \rho_{\beta, \gamma} \quad (3.5)$$

$$a\Phi_{\alpha, \beta}\Phi_{\beta, \gamma} \subseteq a\Phi_{\alpha, \gamma} \quad (3.6)$$

ve $\exists c' \in S_\gamma$ için

$$(b\rho_{\alpha, \beta})\Phi_{\beta, \gamma}^c \subseteq c'\rho_{\alpha, \gamma}; \quad (3.7)$$

- (3) Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ ve $a \in S_\alpha$, $c \in S_\gamma$ olmak üzere, $\exists c' \in S_\gamma$ için

$$a\Phi_{\alpha, \gamma} \cap c\rho_{\alpha, \beta, \gamma} \subseteq c'\rho_{\beta, \gamma};$$

- (4) Her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$ ve $a \in S_\alpha$, $b, c, d \in S_\beta$ olmak üzere

$$cb\rho_{\alpha, \beta}db \Rightarrow (a\Phi_{\alpha, \beta}^c)b = (a\Phi_{\alpha, \beta}^d)b \quad (3.8)$$

$$bc\rho_{\alpha, \beta}bd \Rightarrow b(a\Phi_{\alpha, \beta}^c) = b(a\Phi_{\alpha, \beta}^d) \quad (3.9)$$

olsun. Bu durumda, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ ve $(x, y) \in S_{\alpha\beta}$ olmak üzere,
 $b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq x\rho_{\alpha,\alpha\beta}$, $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq y\rho_{\beta,\alpha\beta}$ koşulu ile

$$a * b = (a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^x)(b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^y) \quad (3.10)$$

ifadesi, $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerinde bir işlem tanımlar. Bu işlemle $(S, *)$ bir yarıgruptur.

İspat, Lemma 3.4.2 ve Lemma 3.4.3 den sonra verilecektir. \square

Lemma 3.4.2. Her $\alpha, \beta \in Y$, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ için $s, t \in S_{\alpha\beta}$ vardır öyle ki

$$a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq s\rho_{\beta,\alpha\beta} \text{ ve } b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq t\rho_{\alpha,\alpha\beta}$$

dir. Böylece Teorem 3.4.1 Koşul (4) deki işlem x ve y den bağımsızdır.

İspat: Teorem 4.4.1 (1) ile $\rho_{\alpha,\alpha}$, herhangi bir $\alpha \in Y$ için S_α yarıgrubu üzerindeki evrensel bağıntıdır. Dolayısıyla, Teorem 3.3.5 Koşul (3) ile, eğer, $\gamma = \alpha\beta$ ise, öyle bir $s, t \in S_{\alpha\beta}$ vardır ki, $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} = a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \cap S_{\alpha\beta} \subseteq s\rho_{\beta,\alpha\beta}$ ve $b\Phi_{\beta,\alpha\beta} = b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \cap S_{\alpha\beta} \subseteq t\rho_{\alpha,\alpha\beta}$ dir. Böylece ispat tamamlanır. \square

Lemma 3.4.3. $\alpha, \beta \in Y$, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ olsun. Öyle bir $z \in S_{\alpha\beta}$ vardır ki

$$a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq z\rho_{\beta,\alpha\beta} \text{ ve } b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq z\rho_{\alpha,\alpha\beta}$$

dir. Böylece Teorem 3.4.1 Koşul (4) deki işlemi

$$a * b = (a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^z)(b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^z)$$

şeklinde yazabiliriz.

İspat: Lemma 3.4.2 ile $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^t, b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^s \in t\rho_{\alpha,\alpha\beta} \cap s\rho_{\beta,\alpha\beta}$ olacak şekilde $s, t \in S_{\alpha\beta}$ olduğunu biliyoruz. Eğer $z \in t\rho_{\alpha,\alpha\beta} \cap s\rho_{\beta,\alpha\beta}$ seçilirse $a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq z\rho_{\beta,\alpha\beta}$ ve $b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq z\rho_{\alpha,\alpha\beta}$ olur. Böylece ispat tamamlanır. \square

Teorem 3.4.1 in İspatı: Lemma 4.4.2 den S üzerinde tanımlanan işlemin iyi tanımlı olduğunu kolayca görebiliriz. Her $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ ve $c \in S_\gamma$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ olduğu gösterilmelidir. Lemma 3.4.2 den $u \in S_{\alpha\beta}$ ve $v \in S_{\alpha\beta\gamma}$ için

$$b\Phi_{\beta,\alpha\beta} \subseteq u\rho_{\alpha,\alpha\beta}, \quad a\Phi_{\alpha,\alpha\beta} \subseteq u\rho_{\beta,\alpha\beta} \quad (3.11)$$

$$c\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma} \subseteq v\rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}, \quad ((a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u)(b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^u))\Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma} \subseteq v\rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma} \quad (3.12)$$

dir. Buradan

$$(a * b) * c = (a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u \Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^v)(b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^u \Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^v)(c\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^v)$$

olur.

Yine Lemma 3.4.2 den $x \in S_{\beta\gamma}$ ve $y \in S_{\alpha\beta\gamma}$ için

$$c\Phi_{\gamma,\beta\gamma} \subseteq x\rho_{\beta,\beta\gamma}, \quad b\Phi_{\beta,\beta\gamma} \subseteq x\rho_{\gamma,\beta\gamma} \quad (3.13)$$

$$a\Phi_{\alpha,\alpha\beta\gamma} \subseteq y\rho_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}, \quad ((b\Phi_{\beta,\beta\gamma}^x)(c\Phi_{\gamma,\beta\gamma}^x))\Phi_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma} \subseteq y\rho_{\alpha,\alpha\beta\gamma} \quad (3.14)$$

dir. Buradan

$$a * (b * c) = (a\Phi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}^y)(b\Phi_{\beta,\beta\gamma}^x \Phi_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}^y)(c\Phi_{\gamma,\beta\gamma}^x \Phi_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}^y)$$

olur.

Kolaylık olsun diye

$$a_1 = a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u \Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^v, \quad b_1 = b\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u \Phi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}^v, \quad c_1 = c\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^v$$

$$a_2 = a\Phi_{\alpha,\alpha\beta\gamma}^y, \quad b_2 = b\Phi_{\beta,\beta\gamma}^x \Phi_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}^y, \quad c_2 = c\Phi_{\gamma,\beta\gamma}^x \Phi_{\beta\gamma,\alpha\beta\gamma}^y$$

şeklinde yazalım. Şimdi aşağıdaki adımlarla $a_1 b_1 c_1 = a_2 b_2 c_2$ olduğunu gösterelim.

1. Adım: Öncelikle $(a_1, b_1), (b_2, c_2) \in \rho_{\beta,\alpha\beta\gamma}$ olduğunu, yani

$$a_1 \rho_{\beta,\alpha\beta\gamma} = b_1 \rho_{\beta,\alpha\beta\gamma} \quad \text{ve} \quad b_2 \rho_{\beta,\alpha\beta\gamma} = c_2 \rho_{\beta,\alpha\beta\gamma} \quad \text{olduğunu gösterelim. (3.11) den}$$

$a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u \in \nu \rho_{\beta,\alpha\beta}$ olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla $(a\Phi_{\alpha,\alpha\beta}^u, b\Phi_{\beta,\alpha\beta}^u) \in \rho_{\beta,\alpha\beta}$ olur.

O halde, Tanım 3.3.9 (C) den $(a_1, b_1) \in \rho_{\beta,\alpha\beta\gamma}$ olur. Benzer şekilde,

$(b_2, c_2) \in \rho_{\beta,\alpha\beta\gamma}$ olduğu gösterilebilir.

2. Adım: Şimdi, $(b_1, b_2) \in \rho_{\alpha,\alpha\beta\gamma} \cap \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ olduğunu gösterelim. 1.Adım ve

Tanım 3.3.9 (A) dan $(b_2, c_2) \in \rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ olduğunu görebiliriz. Öte yandan, Tanım

3.3.9 (B) ve (3.12) ile $c_2 \in \nu \rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ olur. Böylece, $b_1 \in \nu \rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ olup

$b_1, b_2 \in \nu \rho_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ dir. O halde, Tanım 3.3.9 (B) ve Teorem 4.4.1 Koşul (3) den

$(b_1, b_2) \in \rho_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$ olur. Benzer şekilde, $(b_1, b_2) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ olduğu gösterilebilir.

3. Adım: Şimdi, $(a_1 b_1 c_1, a_1 b_1) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ ve $(a_2 b_2 c_2, b_2 c_2) \in \rho_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$

olduğunu gösterelim. (3.12) den $(a_1, b_1) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ olup $(c_1, a_1 b_1) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ dir. O

halde, Önerme 3.3.11 den $(a_1 b_1 c_1, a_1 b_1) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ olur. Benzer şekilde,

$(a_2 b_2 c_2, b_2 c_2) \in \rho_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$ olduğu gösterilebilir.

4. Adım: Şimdi, $(a_1 b_1 c_2, a_1 b_1) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ ve $(a_1 b_2 c_2, b_2 c_2) \in \rho_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$

olduğunu gösterelim. (3.13) den $b\Phi_{\beta,\beta\gamma}^x \in x\rho_{\gamma,\beta\gamma}$ olup, $(b\Phi_{\beta,\beta\gamma}^x, c\Phi_{\gamma,\beta\gamma}^x) \in \rho_{\gamma,\beta\gamma}$ dir. Öyleyse, Tanım 3.3.9 (C)'den $(b_2, c_2) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ olur. Böylece 2.Adımdan, $(b_1, c_2) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ olup $(a_1b_1b_1, a_1b_1c_2) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ olur. Önerme 3.2.1'i uygulayarak $(a_1b_1, a_1b_1c_2) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ elde ederiz. Benzer şekilde, $(a_1b_2c_2, b_2c_2) \in \rho_{\alpha,\alpha\beta\gamma}$ olduğu gösterilebilir.

5. Adım: Şimdi, $a_1b_2c_2 = a_1b_1c_2$ olduğunu gösterelim. Teorem 3.4 Koşul (4) den $a_1b\Phi_{\beta,\alpha\beta\gamma}^{b_2} = a_1b\Phi_{\beta,\alpha\beta\gamma}^{a_1b_2}$ olur. Yani, $a_1b_2 = a_1b\Phi_{\beta,\alpha\beta\gamma}^{a_1b_2}$ dir. Benzer şekilde, $b_1c_2 = b\Phi_{\beta,\alpha\beta\gamma}^{b_1c_2}c_2$ olduğu gösterilebilir. Ayrıca, 1.Adımdan, $(a_1b_2, b_1c_2) \in \rho_{\beta,\alpha\beta\gamma}$ olur. Böylece $b\Phi_{\beta,\alpha\beta\gamma}^{a_1b_2} = b\Phi_{\beta,\alpha\beta\gamma}^{b_1c_2}$ elde edilir. Dolayısıyla, $a_1b_2c_2 = a_1b_1c_2$ olduğu görülür.

6.Adım: Son olarak $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ olduğunu gösterelim. 3. Adım ve 4. Adımdan $(a_1b_1c_1, a_1b_1c_2) \in \rho_{\gamma,\alpha\beta\gamma}$ olur. Buradan $a_1b_1c\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{c_1} = a_1b_1c\Phi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}^{c_2}$, yani $a_1b_1c_1 = a_1b_1c_2$ elde edilir. Benzer şekilde, $a_2b_2c_2 = a_1b_2c_2$ olduğu gösterilebilir. Şimdi, 5. Adımdan, $a_1b_1c_1 = a_2b_2c_2$ olduğu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. \square

Tanım 3.4.4 Teorem 4.4.1 deki yarıgruba, $S_\alpha (\alpha \in Y)$ yarıgruplarının rafine Y yarılatisi denir ve $S = [Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta}]$ ile gösterilir.

Önerme 3.4.5 $S = \mathfrak{R}(Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta})$, $S_\alpha (\alpha \in Y)$ yarıgruplarının düzgün Y yarılatisi olsun. Herhangi $\alpha, \beta, \gamma \in Y$, $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, $a \in S_\alpha$ ve $b, c, d \in S_\beta$ için

$$\rho_{\alpha,\gamma} \subseteq \rho_{\beta,\gamma}$$

$$cb \rho_{\alpha,\beta} db \Rightarrow (a\Phi_{\alpha,\beta}^c)b = (a\Phi_{\alpha,\beta}^d)b$$

ve

$$bc \rho_{\alpha,\beta} bd \Rightarrow b(a\Phi_{\alpha,\beta}^c) = b(a\Phi_{\alpha,\beta}^d)$$

koşulları sağlanır. O zaman, S , $\rho_{\alpha,\beta}$ ve $\Phi_{\alpha,\beta}$ ile birlikte, $S_\alpha (\alpha \in Y)$ yarıgruplarının rafine Y yarılatisi olarak ifade edilebilir.

Tersine, $S = [Y; S_\alpha, \rho_{\alpha,\beta}, \Phi_{\alpha,\beta}]$, $S_\alpha (\alpha \in Y)$ yarıgruplarının rafine Y yarılatisi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ için $\rho_{\alpha,\beta}$ bir dikdörtgensel band kongrüansıdır. O zaman S , $\rho_{\alpha,\beta}$ ve $\Phi_{\alpha,\beta}$ ile birlikte, $S_\alpha (\alpha \in Y)$ yarıgruplarının düzgün Y yarılatisi olarak ifade edilebilir.

4.SONUÇ ve TARTIŞMA

Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Herhangi $\alpha, \beta \in Y$ ve $\alpha \geq \beta$ için, $\Phi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \rightarrow \zeta(S_\beta)$, $a \rightarrow \phi_\beta^a$ yarıgrup homomorfizmleri olsun. Belirli koşullar altında $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ olmak üzere

$$a * b = \langle \phi_{\alpha\beta}^b \phi_{\alpha\beta}^a \rangle \langle \phi_{\alpha\beta}^a \phi_{\alpha\beta}^b \rangle$$

işleminin, $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerinde bir yarıgrup belirlediğine dair ispat verilmiş ve bu yarıgrup, yarıgrupların temel yarı latisi olarak adlandırılmıştır. Yarıgrupların temel yarılatisi, band kongrüansı ilişkisi incelenmiş, çeşitli sonuçlara ulaşılmış ve bu sonuçlara ait kanıtlar verilmiştir. Bir değişmeli yarıgrupun temel yarılatisinin değişmeli olduğu ancak, verilen örnekten de anlaşılacağı üzere değişmeli yarıgrupların yarılatislerinin değişmeli olmak zorunda olmadığı gözlenmiştir.

Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$ için ϕ_β^a dönüşümü sabit olmak üzere $\varphi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \rightarrow S_\beta$ sabit homomorfizmler ve $\varphi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \rightarrow \zeta(S_\beta)$ sabit homomorfizmleri için $a\varphi_{\alpha,\beta} = \langle \phi_\beta^a \rangle$ şeklinde tanımlandığında bu şekilde özel tipteki yarıgrupların temel yarılatislerini de içine alan bir yarıgrupların yarılatisi inşaa edilmiştir. Y bir yarılatis ve $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ ikişer ikişer ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Her $\alpha, \beta \in Y$, $\alpha \geq \beta$, $a \in S_\alpha$ için $\varphi_{\alpha,\beta} : S_\alpha \rightarrow S_\beta$, belirli koşullar altında, $a \in S_\alpha$ ve $b \in S_\beta$ olmak üzere,

$$a *_1 b = (a\varphi_{\alpha,\beta})(b\varphi_{\beta,\alpha\beta})$$

işlemi ile $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$ üzerinde bir yarıgrup oluşturacaktır. Bu yarıgruba yarıgrupların yarı-güçlü yarılatisi ismi verilmiştir. Yarıgrupların yarı-güçlü

yarılatısının, aslında yarıgrupların güçlü yarılatılarının uygun bir genellemesi olduğuna dair örnek verilmiştir.

Küme değerli fonksiyon kavramı kullanılarak, yarıgrupların düzgün yarılatısı ve inşası yapılmıştır. Ayrıca yarıgrupların temel yarılatısı ve yarıgrupların düzgün yarılatısı arasındaki ilişki incelenmiş ve belirli koşullarda kurulan çift gerektirmeli önermenin ispatı verilmiştir. Benzer şekilde yarıgrupların rafine yarılatıları tanımlanmış, belirli koşullar altında yarıgrupların düzgün yarılatısı ile yarıgrupların rafine yarılatıları arasındaki ilişkiyi veren çift gerektirmeli önermenin ispatı verilmiştir.

İncelediğimiz araştırmalar yarıgrupların yarılatılarından yeni bir yarıgrup oluşturma teknikleri açısından önemli bilgiler vermiş ve yeni bir yarıgrup oluşturma yöntemleri için ilham kaynağı olmuştur.

KAYNAKLAR

- Bogdanovic, S. (1985). Semigroups with a system of subsemigroups. *Novisad*, 1-196.
- Clifford, A. H. (1941). Semigroups admitting relative inverses. *Annals of Mathematics*, 1037-1049.
- Clifford, A. H., & Petrich, M. (1977). Some classes of completely regular semigroups. *Journal of Algebra*, 46(2):462-480.
- Fountain, J. (1982). Abundant semigroups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):103-129.
- Howie, J. M. (1976). *An introduction to semigroup theory* (Vol. 7). Academic press.
- Howie, J. M. (1995). *Fundamentals of semigroup theory* (No. 12). Oxford University Press.
- Kong, X. Z., & Shum, K. P. (2001). On the structure of regular crypto semigroups. *Communications in Algebra*, 29(6):2461-2479.
- Lallement, G. (1967). Demi-groupes réguliers. *Annali di Matematica pura ed Applicata*, 77(1):47-129.
- McLean, D. (1954). Idempotent semigroups. *The American Mathematical Monthly*, 61(2):110-113.
- Petrich, M. (1972). Regular semigroups satisfying certain conditions on idempotents and ideals. *Transactions of the American Mathematical Society*, 170:245-267.
- Petrich, M. (1974). The structure of completely regular semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 189:211-236.
- Petrich, M. (1987). A structure theorem for completely regular semigroups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 99(4):617-622.
- Petrich, M., & Reilly, N. R. (1999). *Completely regular semigroups* (Vol. 27). John Wiley & Sons.

- Suschkewitsch, A. (1926). Über die Darstellung der eindeutig nicht umkehrbaren Gruppen mittelst der verallgemeinerten Substitutionen. *Mathematical Collection*, 33(4):371-374.
- Wang, Z., Zhang, R., & Xie, M. (2004). Regular orthocryptou semigroups. *Semigroup Forum*, 69(2):281-302.
- Wang, Z., Guo, Y., & Shum, K. P. (2008). On refined semilattices of semigroups. *Algebra Colloquium*, 15(2):331-336
- Wang, Z. P., & Zhou, Y. L. (2013). Regular semilattice of semigroups and its applications. *Semigroup Forum*, 87(2):393-406.
- Wang, Z. P. (2015). Fundamental semilattices of semigroups. *Acta Mathematica Hungarica*, 146(1):22-39.
- Yamada, M., & Kimura, N. (1958). Note on idempotent semigroups II. *Proceedings of the Japan Academy*, 34(2):110-112.
- Yu, H., & Wang, Z. (2012). The refined semilattice construction of locally orthodox regular cryptogroups. *Communications in Algebra*, 40(2):552-564.
- Zhang, L., Shum, K. P., & Zhang, R. H. (2001). Refined semilattices of semigroups. In *Algebra Colloquium*, 8(1):93-108.

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf İPEK, İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Adana'da tamamladıktan sonra lisans öğrenimine 1998 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde başladı ve 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Alan Öğretmenliği Matematik alanında tezsiz yüksek lisansını tamamladı. 2004 yılında Milli Eğitim Bakanlığına matematik öğretmeni olarak atanmış olup halen bu görevini Adana Bilim ve Sanat Merkezi'nde sürdürmektedir.

TÜBİTAK matematik olimpiyatları, TÜBİTAK 2204-A Lise Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması ve TÜBİTAK 2204-B Ortaokul Öğrencileri Araştırma Projeleri Yarışması ile ilgilenmekte ve öğrencilere danışmanlık yapmaktadır. Bu yarışmalarda matematik alanında danışmanlığı ile çeşitli bölge dereceleri ve Türkiye dereceleri mevcuttur.

Üstün yeteneklilerin eğitimi ile ilgili ulusal ve uluslararası kongrelerde sunulmuş bildirileri mevcuttur. 2021 yılında Bilim ve Sanat Merkezleri Lise Matematik Alanı Yardımcı Ders Materyali Hazırlama Komisyonunda görev almıştır. Milli Eğitim Bakanlığı, valilikler, kaymakamlıklar ve TÜBİTAK tarafından alınmış birçok ödülü bulunmaktadır.