

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİKLİ-ZAMAN DURUM-UZAY MODELLERİ
İNDİRGEMELİ TAHMİN VE YAKINSAMA PROBLEMLERİ

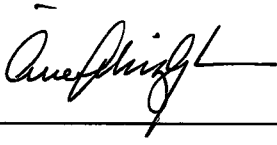
76610

Levent ÖZBEK

DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

76610

Bu tez 28/08/1998 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Oybirliği / Oyçokluğu ile kabul edilmiştir.

		
Doç.Dr. Fazıl A. ALİEV	Prof.Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU	Prof.Dr. Fikri ÖZTÜRK
(Danışman)		

**KESİKLİ-ZAMAN
DURUM-UZAY MODELLERİ
İNDİRGEMELİ TAHMİN
VE YAKINSAMA PROBLEMLERİ**

Levent ÖZBEK

**DOKTORA TEZİ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI
1998**

ÖZET**Doktora Tezi****KESİKLİ-ZAMAN DURUM-UZAY MODELLERİ
İNDİRGEMELİ TAHMİN VE YAKINSAMA PROBLEMLERİ****Levent ÖZBEK****Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı****Danışman : Doç. Dr. Fazıl A. ALİEV****1998, Sayfa : 88****Jüri : Doç. Dr. Fazıl A. ALİEV****Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLİOĞLU****Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK**

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü kesikli-zaman durum-uzay modellerine ve Kalman Filtresinin değişik ölçütlere göre elde edilişine ayrılmıştır.

İkinci bölümünde Kalman Filtresi için Merkezi Limit Teoreminde yakınsama hızları verilmiştir.

Üçüncü bölümde, modelin hatalı kurulması durumunda Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama problemleri ve bu problemlerin giderilmesine yönelik yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Son bölümde, otomatik kontrol kavramları hakkında bilgi verilmiş ve geri-beslemeli kendini uyarlayabilen en küçük varyanslı kontrol yöntemi ile bilgisayar destekli sıcaklık kontrolü yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER : Durum-Uzay modeli, Kalman Filtresi, Ardışık tahmin, Uyarlı Kalman Filtresi, Otomatik Kontrol.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

**DISCRETE-TIME STATE-SPACE MODELS
RECURSIVE ESTIMATION AND CONVERGENCE PROBLEMS**

Levent ÖZBEK

**Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics**

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fazil A. ALİEV

1998, Page : 88

Jury : Assoc. Prof. Dr. Fazil A. ALİEV

Prof. Dr. Ömer L. GEBİZLIOĞLU

Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK

The first part of this work consisting four parts is devoted to discrete-time state-space models that asserts the Kalman Filter according to several criteria.

In the second part, the convergence rates in the Central Limit Theorem for the Kalman Filter is given.

In the third part, the divergence problem occurring in the Kalman Filter when the model is misspecified and some information related to work to solve such a problem are given.

In the last part, some information about automatic control concept is given and computer supported heat control application is presented for which the method of feed-back adaptive minimum variance control has been utilized.

KEY WORDS : State-space models, Kalman Filter, Recursive estimation, Adaptive Kalman Filter, Automatic Control.

TEŞEKKÜR

Bu konuyu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen her zaman desteğini gördüğüm geri-beslemeli olarak çalışmalarımı kontrol eden tez danışmanım, sayın hocam Doç. Dr. Fazıl A. Aliev'e en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Ayrıca eski tez danışmanım, sayın hocam Prof. Dr. Fikri Öztürk'e de bu konu ile ilgilenmemi ve bu konulara merak duymamı sağladığı için teşekkür ederim.

Deneysel çalışmalarım sırasında, deney düzeneğinin elektronik kısmının hazırlanmasında büyük emeği geçen arkadaşım Araş. Gör. Oktay Üreten'e de teşekkür ederim.

Bu çalışma sırasında, manevi desteğini eksik etmeyen eşim Nuran Taş Özbek'e de gönülden teşekkür ederim.

Dünyaya gelmeme neden olan, annem Müzehher Özbek ve babam Sıtkı Özbek'e de candan teşekkür ederim.

Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü Laboratuvarlarının, çalışmalarımın gerçekleştirildiği ortamlar olarak bütün imkanlarıyla sunulması dolayısıyla bölümüme de minnetlerimi sunarım.

Bu çalışma, Ankara Üniversitesi Araştırma Fonu Müdürlüğü tarafından 98-25-00-10 nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

Levent Özbek

Ankara, Ağustos 1998

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
GİRİŞ	1
1. KESİKLİ-ZAMAN DURUM-UZAY MODELLERİ	6
1.1. Lineer Kesikli-Zaman Durum-Uzay Modeli.....	6
1.2. Bir Doğru Üzerindeki Bir Cismin Hareketinin İncelenmesi.....	10
1.3. Milli Gelir ile İlgili Durum-Uzay Modeli.....	12
1.4. ARMAX Modelleri için Durum-Uzay Modeli Gösterimi.....	13
1.5. Sonsal Dağılımın En Büyüklenmesi Ölçütüne Göre Kalman Filtresinin Elde Edilmesi.....	15
1.6. En Küçük Hata Kareleri Ortalaması Ölçütüne Göre Kalman Filtresinin Elde Edilmesi.....	20
1.7. Basit İstatistik Teknikleri ile Kalman Filtresinin Elde Edilmesi.....	24
2. KALMAN FİLTRESİ İÇİN ASİMTOTİK DAĞILIM TEORİSİ	28
2.1. Gözlemlenebilme, Kontrol Edilebilme ve Kalman Filtresinin Kararlılığı.....	28
2.2. Kalman Filtresi için Merkezi Limit Teoremi.....	30
2.3. Kalman Filtresi için Merkezi Limit Teoreminde Yakınsama Hızlarının değerlendirilmesi.....	32
2.4. c Sabitinin Belirlenmesi.....	35
2.5. Model Geçerliliği için Hipotez Testi.....	38
2.6. Model Geçerliliğinin Test Edilmesi ile İlgili Simulasyon Çalışması.....	40
3. KENDİNİ UYARLAYAN (UYARLI) KALMAN FİLTRESİ	42
3.1. Uyarlı Kalman Filtresi ile İlgili Yapılan Çalışmalar.....	42
3.2. Unutma Faktörü ile Kalman Filtresinin Uyarlanması.....	44
3.3. Kovaryans Matrisinin Ağırlıklandırılması ile Kalman Filtresinin Uyarlanması.....	48
3.4. Gürültü Kovaryanslarının Belirlenmesi ile Kalman Filtresinin Uyarlanması.....	50
3.5. Lineer Durum-Uzay Modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi.....	53
3.6. Hareketli Bir Cisim için Kalman Filtresinin Diğer Uyarlı Filtreler ile Karşılaştırılması.....	56
4. SİSTEM BELİRLEME VE OTOMATİK KONTROL	61
4.1. Sistem Belirleme.....	64
4.1.1. Ağırlıklandırılmış ardışık en küçük kareler yöntemi.....	65
4.1.2. Unutma faktörünün seçimi.....	68
4.1.3. Kalman filtresi ile parametre vektörünün tahmin edilmesi.....	68
4.2. Geri Beslemeli Kontrol.....	70
4.3. Simulasyon Çalışması.....	70
4.4. Bilgisayar Destekli Sıcaklık Kontrolü.....	77
SONUÇ VE TARTIŞMA	80
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	88

GİRİŞ

Kesikli-zaman stokastik durum-uzay modelleri, 1960'lı yıllarda uydu, güdümlü mermi, uzay araçları ve hareket yeteneği olan hedeflerin konumunu izleme ve kontrol etme gibi uygulamalar için geliştirilmiştir. Durum-uzay modelleri, fiziksel ve ekonomik sistemlerin modellenmesinde pek çok uygulama alanına sahiptir.

Durum-uzay modeli, sistemin durumunu gösteren ancak gözlenemeyen, $\{x_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik süreci ile ilgili bir durum eşitliği ve gözlenebilen, $\{y_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik süreci ile ilgili bir ölçüm (gözlem) eşitliğinden oluşan

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + B_k u_k + G_k w_k$$

$$y_k = H_k x_k + v_k$$

şeklinde bir modeldir. Burada; $x_k \in \mathbb{R}^n$ sistem durum vektörünü, $y_k \in \mathbb{R}^m$ sistem gözlem vektörünü, $u_k \in \mathbb{R}^r$ sistem kontrol vektörünü, Φ_k $n \times n$ boyutlu sistem geçiş matrisini, H_k $m \times n$ boyutlu gözlem matrisini göstermektedir. B_k ve G_k boyutları uygun şekilde seçilmiş matrislerdir. w_k ve v_k sıfır ortalamalı beyaz gürültü süreçlerini (hata terimi) göstermektedir (Papoulis 1964, Jazwinski 1970, Anderson and Moore 1979, Chui and Chen 1991, Janacek, 1993).

Durum-uzay modelinde esas problem, gözlenemeyen x_k durum vektörünü $y_1, \dots, y_{k-1}, y_k$ gözlemlerini kullanarak tahmin etmedir. Bu problem filtreleme olarak bilinir (Jazwinski 1970). İndirgemeli (ardışık) tahmin; sadece k anındaki y_k gözlemine ve $k-1$ anındaki $\hat{x}_{k-1}$ tahminine bağlı olarak k anındaki x_k durumunun en iyi, $\hat{x}_k$ değerini tahmin etme problemidir ve Kalman (1960) tarafından dik izdüşüm yöntemiyle çözülmüştür. Literatürde bu çözüm yöntemi Kalman Filtresi olarak bilinir. Bu tahmin değişik optimizasyon ölçütlerine göre elde edilebilir.

Durum-uzay modelinde yer alan hata terimlerinde ve başlangıç durumunda herhangi bir dağılım varsayımı yapılmadan sadece beklenen değerlerinin ve kovaryans matrislerinin bilindiği varsayımı yapılarak, durum vektörünün tahmininin dik izdüşüm yöntemi (lineer en küçük varyanslı tahmin) ile bulunması; Jazwinski (1970), Davis and Winter (1985)'de detaylı olarak ele alınmıştır. Davis and Winter (1985), durum-uzay modeli ile ilgili, Kontrol edilebilme, Gözlemlenebilme, Kararlılık,... gibi birçok özellik ve bunlarla ilgili pek çok teorem vermiştir.

Bir sistemi incelemedeki nihai amaç sistemi kontrol altında tutmaktır. Bu nedenle durum-uzay modeli ile modellenen bir sistemin istenilen biçimde kontrol edilebilmesi gözlenemeyen durum vektörünün tahminine bağlıdır. Filtreleme ve kontrol arasında dualite özelliği vardır (Kalman 1960, Kalman and Bucy 1961). İster durum vektörünü tahmin için, isterse de sistemi kontrol etmek için, filtreleme işlemi bir sistemi incelemede önemli bir yer tutar. Bu amaçla filtreleme problemi üzerinde bugüne kadar birçok çalışma yapılmış ve yapılmaya devam edilmektedir.

Gerçek bir sistemin lineer bir modeli oluşturulurken amaca uygun olarak bazı basitleştirmelerin yapılması sonucu, sistemin temel özelliklerinin incelenmesinde hatalarla karşılaşılabilir. Bu durum; Kalman Filtresinde oluşacak bazı ıraksama problemlerinin araştırılmasını ve bundan kaynaklanan sorunların giderilmesini, yani Kalman Filtresinde bazı güçlendirmelerin yapılmasını gerekli kılar.

Fagin (1964), Fitzgerald (1971), Kalman Filtresinin ıraksaması durumunu incelemiş, Masreliez and Martin (1977), Tsai and Kurz (1983), Kovacevic et al. (1992), dayanıklı (robust) Kalman Filtresinin elde edilmesi için çalışmalar yapmışlardır.

Deyst (1973), Kalman filtresinin kararlılık özelliğini sağlaması için gerekli koşulları incelemiştir. Duncan and Horn (1972), Kalman Filtresini regresyon analizi bakış açısından ele almışlardır.

Mehra (1972), Modelde yer alan hata terimlerinin kovaryanslarının bilinmemesi durumunda, bu matrislerin tahmin edilmesi durumunu incelemiş ve kendini ayarlayan (adaptif) Kalman Filtresi için çalışma yapmıştır.

Otter and Tempelaar (1980), ARMA modellerinin parametrelerinin Kalman Filtresi ile tahmin edilmesi durumunu incelemişlerdir. Smith and West (1983), Serum Creatinine serisi için durum-uzay modeli oluşturmuş ve Kalman Filtresini uygulamışlardır. Leibundgut et al. (1983), demografik modeller için durum-uzay modellerini ve Kalman filtresini kullanmışlardır. Schuler and Suzher (1985), kimyasal reaktörlerin durum-uzay modeli kullanılarak kontrol edilmesi üzerine çalışma yapmışlardır. Chow (1975), ekonomi ile ilgili süreçlerin durum-uzay modellenmesini ele almıştır. Yine çeşitli fiziksel ve kimyasal süreçlerin durum-uzay modellemesi McClamroch (1980) tarafından ele alınmıştır. Meinhold and Singpurwalla (1983), durum-uzay modellerinin istatistiksel kalite kontrolünde uygulanabileceğini önermiş ve Kalman Filtresinin Bayesci yöntemle elde edilişi ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Shumway et al. (1981), Kalman Filtresinde başlangıç durum ve kovaryansı için hipotez testi geliştirmişlerdir. Diderrich (1985), Kalman Filtresinin Goldberger-Theil tahmin edicisi olarak elde edilişini göstermiştir.

Ljung and Gunnarsson (1990), sistem belirlemede ortaya çıkan problemleri ve bu problemlerin giderilebilmesi ile ilgili filtrelemede yapılacak uyarlamaları ele almışlardır.

Beltran (1995), AR (Auto regressive) modellerindeki parametrelerin Kalman Filtresi ile tahmin edilmesi ve bu parametrelerin zamanla değişmesi durumunda Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama probleminin giderilmesi için bir hipotez testi geliştirmiş ve filtrede güçlendirme yapmıştır.

Grillenzoni (1994), biri tıp alanında, biri endüstri alanında diğeri de ekonomi alanında olmak üzere, değişik alanlarla ilgili verilerin durum-uzay modeli ile modellenebileceğine örnek vermiş ve buradaki bazı problemlere değinmiştir.

Stoffer and Wall (1991), modelde yer alan matrislerin bilinmemesi durumunu ele almış ve bootstrap yöntemi ile bu matrislerin belirlenmesi ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Ansley and Kohn (1983) ve Kohn and Ansley (1983), eksik ve birleştirilmiş gözlemler durumunda, Lee (1995), eksik gözlemler durumunda, Ergün ve İnal (1995), aykırı değerlerin varlığında, Cipra (1997) ve Cipra and Romera (1997), eksik gözlemler ve aykırı gözlem değerlerinin varlığında Kalman Filtresini incelemişlerdir.

Meinhold and Singpurwalla (1989), durum-uzay modelinde yer alan hata terimlerinin t-dağılımına sahip olması durumunda, Sorenson and Alspach (1971), Gutman and Pena (1985), Chow (1994), modelde yer alan hata terimlerinin karma normal dağılıma sahip olması durumunda Kalman Filtresini ele almışlardır.

Hashemipour et al. (1988), Rao and Whyte (1991), çok sensörlü sistemler için paralel Kalman Filtresini incelemişlerdir.

Özbek (1993), Kesikli-zaman durum-uzay modellerinde indirgemeli (ardışık) tahmin yöntemini incelemiş, Özbek ve Öztürk (1993), gayrisafi milli hasıla değerinin Kalman Filtresi ile tahmini ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Xia et al. (1994), Durum-uzay modelinin hatalı oluşturulması durumunda, Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama durumunu ele almış ve filtrelemede bazı güçlendirmelerin yapılmasını sağlayacak unutma faktörünün hesaplanması için çeşitli

algoritmalar önermişlerdir. Özbek vd. (1996), Kalman Filtresinde modelin hatalı kurulmasından kaynaklanan ıraksama problemi ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Weston and Norton (1997) ve Hajiyeve (1997), durum vektöründeki ani değişimleri ortaya çıkarabilecek ve tahmin edecek bir hipotez testi geliştirmişlerdir.

Durum-uzay modelinde yer alan matrislerin bilinmeyen parametre içermesi durumunda bu parametrelerin tahmin edilmesi ile ilgili çalışmalar; Harvey (1990), Fahrmeir and Tutz (1994) tarafından ele alınmıştır.

Spall and Wall (1984), durum-uzay modelinde yer alan hata terimlerinin keyfi dağılıma sahip olması durumunda Kalman Filtresinin asimtotik dağılımını incelemiş ve bazı koşullar altında normal dağılıma sahip olduğunu göstermişlerdir.

Spall (1985), modeldeki hata terimlerinin normal dağılıma sahip olmaması durumunda, model geçerliliğini test etmek için bir yöntem önermiştir.

Aliev ve Özbek (1996), Kalman Filtresi için merkezi limit teoreminde yakınsama hızlarının değerlendirilmesi ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Özbek (1996), dinamik modellerde ardışık tahmin problemini, geri-beslemeli kontrol problemini ve bu alanda karşılaşılan problemleri incelemiş, bu tür yöntemlerle iktisadi süreçlerin kontrol edilebileceğini önermiştir.

Özbek (1997), durum-uzay modelinin hatalı oluşturulması durumunda, Kalman Filtresinde meydana gelen ıraksama durumunu ele almış ve filtrede bazı güçlendirmeler yapacak bir algoritma önermiştir.

Özbek and Aliev (1998), Xia et al. (1994)'ın önerdikleri unutma faktörü ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Aliev and Özbek (1997), modelde yer alan hata terimlerinin keyfi dağılıma sahip olması durumunda, Kalman Filtresi için merkezi limit teoreminde yakınsama hızlarının değerlendirilmesi ve model geçerliliğinin test edilmesi ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Bu çalışmanın 1.bölümünde, durum-uzay modellerinin tanıtımı yapılmış, durum-uzay modeli ile ilgili bazı özellikler verilmiş, çeşitli süreçlerle ilgili durum-uzay modeli örnekleri gösterilmiştir. Bu örneklerin ardından, indirgemeli (ardışık) bir tahmin yöntemi olan Kalman Filtresinin çeşitli ölçütlere göre elde edilişi açıklanmıştır.

Çalışmanın 2.bölümünde Kalman Filtresi için merkezi limit teoremi açıklandıktan sonra, merkezi limit teoreminde yakınsama hızları verilmiştir. Bu yakınsama hızları yardımıyla model geçerliliğini test etmek amacıyla test yöntemi geliştirilmiş ve bu yöntemin işleyişini görmek amacıyla simülasyon çalışması yapılmıştır.

Çalışmanın 3.bölümde, durum-uzay modelinin hatalı kurulması durumunda veya modelde yer alan beyaz gürültü süreçlerinin kovaryanslarının bilinmediği durumlarda ya da modelde yer alan sistem ve gözlem matrislerinde belirsizlik olması durumunda, Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama problemi göz önüne alınmış ve bu sorunların giderilmesine yönelik yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiş ve bazı algoritmaları karşılaştırmak amacıyla simülasyon çalışması yapılmıştır.

Çalışmanın 4.bölümünde, genel otomatik kontrol kavramları hakkında bilgi verilmiş ve bu alanda karşılaşılan problemlere değinildikten sonra sistem belirleme ile ilgili açıklama yapılmıştır. Daha sonra, sistem belirlemede kullanılan ardışık parametre tahmin yöntemleri, bu yöntemlerin kullanılması sırasında ortaya çıkan sorunlar, bu sorunların giderilmesine yönelik çalışmalar hakkında bilgi verilmiş ve bazı algoritmaları karşılaştırmak amacıyla simülasyon çalışması yapılmıştır. Daha sonra da, geri-beslemeli kendini uyarlayabilen en küçük varyanslı denetim yöntemi açıklanmış ve gerçek bir sistem üzerinde bilgisayar destekli kontrolün işleyişini görmek amacıyla deneysel bir çalışma yapılmıştır.

BÖLÜM I

KESİKLİ-ZAMAN STOKASTİK DURUM-UZAY MODELLERİ

Bu bölümün ilk kısmında; lineer kesikli-zaman stokastik durum-uzay modelinin tanıtımı ve bazı özellikleri, ikinci kısmında; sabit ivmeli bir cismin hareketi için değişik tipte durum-uzay modeli gösterimleri, üçüncü kısmında; ekonomi ile ilgili durum-uzay modeline örnek, dördüncü kısmında; zaman serileri analizinde oldukça çok kullanılan ARMAX modellerinin durum-uzay modeli gösterimleri verilmiştir. Bu örneklerin ardından, durum-uzay modelinde yer alan hata terimlerinin (beyaz gürültü süreci) normal dağılıma sahip olması varsayımı altında, durum vektörünün tahmin edilmesi problemi, bunun ardından normal dağılım varsayımı olmadan, durum vektörünün tahmin edilmesi problemi ele alınmış ve indirgemeli (ardışık) bir tahmin olan Kalman Filtresinin değişik optimizasyon ölçütlerine göre elde edilişi verilmiştir.

1.1. Lineer Kesikli-Zaman Durum-Uzay Modeli

Lineer kesikli-zaman stokastik durum-uzay modelleri, 1960'lı yıllarda uydu, güdümlü mermi, uzay araçları ve hareket yeteneği olan hedeflerin konumunu izleme ve kontrol etme gibi uygulamalar için geliştirilmiştir. Durum-uzay modelleri, fiziksel ve iktisadi süreçlerin modellenmesinde pek çok uygulama alanına sahiptir.

Durum-uzay modeli, sistemin durumunu gösteren ancak gözlenemeyen, $\{x_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik süreci ile ilgili bir durum eşitliği ve gözlenebilen, $\{y_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik süreci ile ilgili bir ölçüm (gözlem) eşitliğinden oluşan,

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + B_k u_k + G_k w_k \quad (1.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (1.2)$$

şeklinde bir modeldir. Burada;

$x_k \in \mathcal{R}^n$: sistem durum vektörünü

$y_k \in \mathcal{R}^m$: sistem gözlem vektörünü

$u_k \in \mathcal{R}^r$: sistem kontrol vektörünü

göstermektedir. Φ_k $n \times n$ boyutlu sistem geçiş matrisini, H_k $m \times n$ boyutlu gözlem matrisini göstermektedir. B_k ve G_k boyutları uygun şekilde seçilmiş matrislerdir. $w_k \in \mathcal{R}^n$ ve $v_k \in \mathcal{R}^m$ sıfır ortalamalı beyaz gürültü süreçlerini (hata terimi) göstermektedir. Beyaz gürültü süreçlerinin her k, j değerleri için

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

olmak üzere aşağıdaki varsayımları sağladığı kabul edilmiştir.

$$E[v_k] = 0 \quad (1.3)$$

$$E[w_k] = 0 \quad (1.4)$$

$$E[v_k v_j'] = R_k \delta_{kj} \quad (1.5)$$

$$E[w_k w_j'] = Q_k \delta_{kj} \quad (1.6)$$

$$E[v_k w_j'] = 0 \quad (1.7)$$

$$E[x_0] = \bar{x}_0 \quad (1.8)$$

$$E[(x_0 - \bar{x}_0)(x_0 - \bar{x}_0)'] = P_0 \quad (1.9)$$

$$E[x_0 w_k'] = 0 \quad (1.10)$$

$$E[x_0 v_k'] = 0 \quad (1.11)$$

Ayrıca, tüm $k = 0, 1, 2, \dots$ anlarında Φ_k , H_k , B_k , G_k , Q_k ve R_k matrislerinin bilindiği varsayılmıştır (Bryson and Ho 1969, Jazwinski 1970, Anderson and Moore 1979, Kumar and Varaiya 1986, Chui and Chen 1991).

Durum-uzay modeli ile ilgili bazı özellikleri görmek amacıyla, kontrol girdisi olmadan (1.1) durum eşitliği ile verilen $\{x_k\}$ stokastik süreci, x_0 başlangıç durumuna bağlı olarak,

$$x_1 = \Phi_0 x_0 + G_0 w_0$$

$$x_2 = \Phi_1 x_1 + G_1 w_1 = \Phi_1 \Phi_0 x_0 + \Phi_1 G_0 w_0 + G_1 w_1$$

:

$$x_k = \Phi_{k,0} x_0 + \sum_{l=0}^{k-1} \Phi_{k,l+1} G_l w_l \quad (1.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\Phi_{k,k} = I$$

olmak üzere

$$\Phi_{k,l} = \Phi_{k-1} \Phi_{k-2} \dots \Phi_l \quad (k > l)$$

dır. (1.12) eşitliğinden görülebileceği gibi x_k rasgele vektörü $x_0, w_0, w_1, \dots, w_{k-1}$ rasgele vektörlerinin doğrusal bir kombinasyonudur. Başlangıç durumu ve hata terimleri normal dağılıma sahip olduğunda, herhangi bir k değeri için x_k rasgele vektörü de normal dağılıma sahiptir. Yani $\{x_k\}$ stokastik süreci normal dağılıma sahip bir süreçtir. Ayrıca $k_1 < k_2 < \dots < k_m < k$ olmak üzere (1.1) durum eşitliği,

$$x_k = \Phi_{k,k_m} x_{k_m} + \sum_{l=k_m}^{k-1} \Phi_{k,l+1} G_l w_l$$

olarak yazılabildiğinden, x_k rasgele vektörünün, $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}$ rasgele vektörleri ile koşullu dağılımı, x_k rasgele vektörünün x_{k_m} rasgele vektörü ile koşullu dağılımına eşit olacaktır. x_k rasgele vektörünün koşullu dağılımı (olasılık yoğunluk fonksiyonu)

$$f(x_k | x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}) = f(x_k | x_{k_m}) \quad (1.13)$$

olarak yazılabildiğinden, $\{x_k\}$ stokastik süreci Markov sürecidir. Ayrıca (1.13) eşitliğinden

$$f(x_{k+1} | x_k, x_{k-1}, \dots, x_0) = f(x_{k+1} | x_k)$$

yazılabilir. (1.1) eşitliğinde yer alan hata terimleri ve başlangıç durumu normal dağılıma sahip ise modele Gauss-Markov Süreci de denmektedir (Singh and Titli 1978, Anderson and Moore 1979).

Herhangi bir k değeri için x_k rasgele vektörünün beklenen değeri,

$$\bar{x}_k = E[x_k] = \Phi_{k,0} \bar{x}_0$$

olmak üzere

$$\bar{x}_{k+1} = E[x_{k+1}] = \Phi_k E[x_k] = \Phi_k \bar{x}_k \quad (1.14)$$

olarak ve x_k rasgele vektörünün kovaryans matrisi

$$\Sigma_k = E[(x_k - \bar{x}_k)(x_k - \bar{x}_k)']$$

olmak üzere

$$\Sigma_k = \Phi_{k-1} \Sigma_{k-1} \Phi_{k-1}' + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}' \quad (1.15)$$

olarak bulunur. Modelde yer alan hata terimleri ve başlangıç durumu normal dağılıma sahip olduğunda x_k 'nın dağılımı da

$$x_k \sim N(\bar{x}_k, \Sigma_k)$$

şeklinde normal dağılıma sahip olacağından, dağılımın beklenen değeri ve kovaryans matrisi herhangi bir k değeri için (1.14) ve (1.15) eşitliklerinden ardışık olarak hesaplanabilir.

Durum-uzay modelinde yer alan matrisler sabit, yani zamana bağlı değillerse model zamandan bağımsız durum-uzay modeli olarak adlandırılır. Bu şekildeki durum-uzay modeli

$$x_k = \Phi x_k + Bu_k + Gw_k$$

$$y_k = Hx_k + v_k$$

biçiminde olmak üzere; $x_0, w_0, w_1, \dots, v_0, v_1, \dots$ bağımsız rasgele vektörler ve $E[x_0] = \bar{x}_0$,

$$E[w_k] = 0, E[v_k] = 0, Cov[x_0] = \Sigma_0, Cov[w_k] = Q, Cov[v_k] = R$$

olsun. Bu durumda, x_k 'nın beklenen değeri ve kovaryans matrisi

$$\bar{x}_k = \Phi^k \bar{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^{k-1-j} Bu_j$$

$$\Sigma_k = \Phi \Sigma_{k-1} \Phi' + GQG' \quad (1.16)$$

olarak bulunur. (1.16) ile verilen kovaryans matrisinin $k \rightarrow \infty$ için davranışını incelemek için, $Cov[x_0] = \Sigma_0$ başlangıç değerine bağlı olarak (1.16) eşitliği ardışık olarak yazılırsa,

$$\Sigma_k = \Phi^k \Sigma_0 (\Phi^k)' + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j GQG' (\Phi^j)' \quad (1.17)$$

elde edilir. Kovaryans matrisi Σ_k 'nın yakınsak olması için (1.17) eşitliğinin sağ tarafındaki serinin toplanabilir olması gerekir. Bu serinin toplanabilir olması için de Φ^j matrisinin sıfır matrisine yakınsaması gerekir. Eğer Φ matrisinin tüm özdeğerleri mutlak değerce birden küçük ise toplam mevcuttur. Modelde yer alan Φ matrisinin tüm özdeğerleri mutlak değerce birden küçük ise kovaryans matrisi sonlu bir değer alacağından süreç durağan olur. Eğer Φ matrisinin tüm özdeğerleri birden küçükse matrise kararlıdır denir (Singh and Titli 1978, Anderson and Moore 1979, Kumar and Varaiya 1986).

Teorem 1.1. Eğer Φ kararlı ise,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Sigma_k = \Sigma_\infty$$

olacak şekilde negatif olmayan bir Σ_∞ matrisi vardır ve Σ_∞ matrisi

$$\Sigma_{\infty} = \Phi \Sigma_{\infty} \Phi' + GQG' \quad (1.18)$$

Lyapunov eşitliğinin tek çözümüdür (Kumar and Varaiya 1986).

Durum eşitliğinde yer alan Φ matrisi kararlı ve $Cov[x_0] = \Sigma_{\infty}$ ise $\{x_k\}$ stokastik sürecinin durağan olduğu, yani $\Sigma_k = \Sigma_{\infty}$ ve

$$Cov[x_{k+m}, x_k] = \Sigma_{k+m,k} = \Phi^m \Sigma_{\infty}, \quad m > 0$$

kovaryans fonksiyonunun zamandan bağımsız olduğu görülür.

1.2. Bir Doğru Üzerindeki Bir Cismin Hareketinin İncelenmesi

Durum-uzay modellerinin en çok kullanıldığı alanlardan birisi hareketli hedeflerin konumlarının izlenmesidir. Bu alt kısımda, ilk önce sabit ivmeli (düzgün doğrusal hareket hali) bir cismin konumu ile ilgili, daha sonra sabit hızlı bir cismin konumu ile ilgili, daha sonra da ivmesi beyaz gürültü süreci olarak kabul edilen bir cismin konumu ile ilgili durum-uzay modeli oluşturulmasına örnek verilmiştir.

Bir doğru boyunca sabit ivmeli hareket eden bir cisim için,

$x_1(t)$; cismin herhangi bir t anındaki konumu

$x_2(t) = \dot{x}_1(t)$; cismin herhangi bir t anındaki hızı

$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = \ddot{x}_1(t)$; cismin herhangi bir t anındaki ivmesi

olmak üzere Newton Kanunları gereğince,

$$\dot{x}_3(t) = 0$$

olduğundan, 3 boyutlu durum vektörü

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)]'$$

olarak alınırsa, bu sistem için sürekli-zaman durum eşitliği,

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

diferensiyel denklemi ile verilir. Bu diferensiyel denklemin çözümü,

$$x(t) = \Phi(t, \tau)x(\tau), \quad \tau < t$$

dır. Burada,

$$\frac{d\Phi(t, \tau)}{dt} = A(t)\Phi(t, \tau)$$

olmak üzere sistem geçiş matrisi,

$$\Phi(t, \tau) = e^{\int_{\tau}^t A(s)ds} = e^{A(t-\tau)}$$

olarak bulunur.

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}$$

olduğu göz önünde bulundurulursa, durum vektörü için durum eşitliği,

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & t - \tau & \frac{(t-\tau)^2}{2} \\ 0 & 1 & t - \tau \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(\tau)$$

olarak elde edilir. Modeli kesikli hale getirmek amacıyla $k = 0, 1, 2, \dots$ olmak üzere $t = k + 1$ ve $\tau = k$ olarak alınır

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \\ x_{3,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k \quad (1.19)$$

kesikli-zaman durum eşitliği elde edilir. Sadece cismin konumunun ölçüldüğü düşünülürse ve bu ölçümün hatalı olduğu göz önüne alınır, gözlem eşitliği

$$y_k = [1 \ 0 \ 0] x_k + v_k \quad (1.20)$$

olarak yazılabilir. Böylece sabit ivmeli cismin hareketi için kesikli-zaman durum-uzay modeli (1.19) ve (1.20) eşitlikleri ile gösterilir. Gözlem eşitliğindeki v_k hata terimi, sıfır ortalamalı ve $E[(v_k)^2] = r$ varyanslı beyaz gürültü süreci olarak ele alınabilir.

Hareketli cismin hızı sabit olarak kabul edildiğinde, 2 boyutlu durum vektörü olarak cismin konumu ve hızı alınır benzer işlemlerle sabit hızlı cismin hareketi için kesikli-zaman durum-uzay modeli

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k \quad (1.21)$$

$$y_k = [1 \ 0] x_k + v_k \quad (1.22)$$

ile verilir. (1.22) eşitliğindeki v_k hata terimi sıfır ortalamalı ve $E[(v_k)^2] = r$ varyanslı beyaz gürültü sürecidir.

Hareketli bir cismin ivmesi genellikle bilinmediğinden, ivmenin beyaz gürültü süreci olarak kabul edilmesi halinde, Bar-Shalom and Li (1993) tarafından 2 boyutlu durum vektörü olarak, cismin konumu ve hızı alınmış ve cismin hareketi ile ilgili durum-uzay modeli

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T^2 \\ T \end{bmatrix} w_k \quad (1.23)$$

$$y_k = [1 \quad 0] x_k + v_k \quad (1.24)$$

olarak verilmiştir. Burada T örnekleme aralığını göstermektedir. Modelde yer alan w_k , v_k terimleri sıfır ortalamalı ve $E[(v_k)^2] = r$, $E[(w_k)^2] = q$ varyanslı beyaz gürültü süreçlerini göstermektedir.

1.3 Milli Gelir ile İlgili Durum-Uzay Modeli

Bu kısımda, ekonomi ile ilgili milli gelirin incelenmesi amacıyla durum-uzay modeli kurulmasına örnek verilmiştir. Bu amaçla,

y_k : k .yıldaki milli gelir

c_k : k .yıldaki tüketici harcamaları

p_k : k .yıldaki yatırımlar

u_k : k .yıldaki hükümet harcamaları

olmak üzere, tüketici harcamalarının önceki yılın milli geliri ile orantılı, yatırımların ise önceki yıldaki tüketici harcamalarının bir öncekine göre artışı ile orantılı olduğu varsayımı altında,

$$c_k = \alpha y_{k-1}$$

$$p_k = \beta(c_k - c_{k-1})$$

$$y_k = c_k + p_k + u_k$$

bağıntıları yazılabilir. Buradan,

$$y_{k+2} - \alpha(1 + \beta)y_{k+1} + \alpha\beta y_k = u_{k+2} \quad (1.25)$$

fark denklemi oluşturulur. (1.25) eşitliğinden durum-uzay modelini yazmak amacıyla,

$$x_{1,k} = y_k - u_k$$

$$x_{2,k} = x_{1,k+1} - \alpha(1+\beta)y_k$$

değişken değiştirme sonucu

$$x_{1,k+1} = x_{2,k} + \alpha(1+\beta)x_{1,k} + \alpha(1+\beta)u_k$$

$$x_{2,k+1} = x_{1,k+2} - \alpha(1+\beta)y_{k+1} = -\alpha\beta y_k = -\alpha\beta x_{1,k} - \alpha\beta u_k$$

olduğundan, (1.25) fark denklemi için

$$\begin{bmatrix} x_{1,k+1} \\ x_{2,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(1+\beta) & 1 \\ -\alpha\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(1+\beta) \\ -\alpha\beta \end{bmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,k} \\ x_{2,k} \end{bmatrix} + u_k$$

biçiminde durum-uzay modeli elde edilir (Oral 1982).

1.4 ARMAX Modelleri için Durum-Uzay Modeli Gösterimi

ARMAX modelleri, özellikle sinyal işlemede ve sistem kontrolünde oldukça sık kullanılan bir modelleme biçimidir. Benzer amaçla, diğer fiziksel ve ekonomik süreçlerin kontrol edilmesi amacıyla da uygulamada çok kullanılır. Bu kısımda, ARMAX modellerinin tanıtımı ve durum-uzay modeli gösterimi verilmiştir.

Genel olarak, herhangi bir k anında bir sistemin girdisi (kontrol değeri) u_k , çıktısı (gözlem, ölçüm) y_k ve e_k beyaz gürültü sürecini göstermek üzere n . mertebeden ARMAX (Auto-regressive moving-average model with exogeneous inputs) modeli literatürde iki farklı şekilde verilir. Bunlardan ilki,

$$y_k = -\sum_{i=1}^n a_i \cdot y_{k-i} + \sum_{i=1}^n b_i \cdot u_{k-i} + \sum_{i=0}^n c_i \cdot e_{k-i} \quad (1.26)$$

eşitliği ile verilen modeldir. Burada, $i = 1, 2, \dots, n$ için a_i , b_i , c_i modelin parametrelerini göstermektedir. (1.26) eşitliğinin durum-uzay modeli gösterimi,

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -a_n \\ 1 & \ddots \\ & \ddots \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} c_n - a_n c_0 \\ \vdots \\ c_1 - a_1 c_0 \end{bmatrix} e_k$$

$$y_k = [0 \quad \dots \quad 1]x_k + e_k$$

ile verilir (Davis and Winter 1985). İkinci tipteki (n, m, l) mertebeden ARMAX modeli

$$y_k = -\sum_{i=1}^n a_i \cdot y_{k-i} + \sum_{i=0}^m b_i \cdot u_{k-i} + \sum_{i=0}^l c_i \cdot e_{k-i} \quad (1.27)$$

eşitliği ile verilir. Burada, $0 \leq m, l \leq n$ özelliği sağlanmalıdır. (1.27) eşitliğinin durum-uzay modeli gösterimi,

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 \\ \vdots \\ b_m - a_m b_0 \\ a_{m+1} b_0 \\ \vdots \\ a_n b_0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} c_1 - a_1 c_0 \\ \vdots \\ c_l - a_l c_0 \\ -a_{l+1} \\ \vdots \\ a_n c_0 \end{bmatrix} e_k$$

$$y_k = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]x_k + b_0 u_k + c_0 e_k$$

biçimindedir (Chui and Chen 1991). Görülebileceği gibi (1.26) ile (1.27) arasındaki fark girdi (kontrol) değerinin sisteme k anında etki edip etmemesi ile ilgilidir. Ekonomi ile ilgili verilen (1.25) fark denklemi, (1.27) eşitliği ile verilen ARMAX modelinin özel bir halidir. Bu özel durumda; $n = 2$, $m = 1$ ve $l = 0$ değerini almıştır.

Durum-uzay modelinde esas problem, gözlenemeyen x_k durumunu, $y_1, y_2, \dots, y_k$ gözlemlerini kullanarak tahmin etmedir. Bu problem filtreleme olarak bilinir (Jazwinski 1970) ve Kalman (1960) tarafından dik üzdüşüm yöntemiyle çözülmüştür.

İndirgemeli (ardışık) tahmin; sadece k anındaki y_k gözlemine ve $k-1$ anındaki $\hat{x}_{k-1}$ tahminine bağlı olarak k anındaki x_k durumunun en iyi $\hat{x}_k$ değerini tahmin etme problemidir. Bu tahmin değişik, optimizasyon ölçütlerine göre elde edilebilir. Bundan sonraki kısımlarda ardışık bir tahmin yöntemi olan Kalman Filtresinin farklı optimizasyon ölçütlerine göre elde edilişi verilmiştir.

1.5. Sonsal Dağılımın En Büyüklenmesi Ölçütüne Göre Kalman Filtresi'nin Elde Edilmesi

Bu kısımda durum-uzay modelinde yer alan beyaz gürültü süreçlerinin ve x_0 başlangıç durumunun normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında, sonsal dağılımın en büyüklenmesi ölçütüne göre Kalman Filtresinin elde edilişi açıklanmıştır. Sonsal dağılımın belirlenmesinde ve ardışık tahminin bulunmasında aşağıdaki teorem ve lemmadan yararlanılacaktır.

Teorem 1.2. $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ vektörü $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ ortalama ve $\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$ kovaryans matrisiyle normal dağılıma sahip, yani

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N \left[\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \right]$$

olsun. $X_2 \sim N[\mu_2, \Sigma_{22}]$ olmak üzere $X_2 = x_2$ verildiğinde X_1 'in koşullu dağılımı

$$(X_1 | X_2 = x_2) \sim N[\mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2), \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}]$$

biçimindedir (Morrison 1976).

Lemma 1.1. P, R, H matrisleri sırasıyla $n \times n, m \times m, m \times n$ boyutlu matrisler ve $P > 0, R > 0$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır (Jazwinski 1970).

$$[P^{-1} + H'R^{-1}H]^{-1} = P - PH'[HPH' + R]^{-1}HP$$

$$[P^{-1} + H'R^{-1}H]^{-1}H'R^{-1} = PH'[HPH' + R]^{-1}$$

Lemma 1.1. matris tersi lemması olarak da bilinir (Ljung 1987, Chui and Chen 1991, Bar-Shalom and Li 1993).

Ele alınan durum-uzay modeli,

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + G_k w_k \quad (1.28)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (1.29)$$

olmak üzere, hata terimlerinin

$$w_k \sim N(0, Q_k)$$

$$v_k \sim N(0, R_k)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$$

şeklinde normal dağılıma sahip olduğu, hata terimlerinin ve başlangıç durumunun (1.3)-(1.11) varsayımlarını sağlandığı kabul edilsin.

En iyi filtreleme problemi, $Y_k = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ gözlemleri verildiğinde, x_k durumunun en iyi tahminini belirleme problemidir. Yapılan varsayımlar altında, $x_k|Y_k$ rasgele vektörünün dağılımı Teorem 1.2. gereğince normal dağılıma sahiptir ve sonsal dağılımın en büyüklenmesi ölçütüne göre elde edilen tahmin, koşullu beklenen değer tahminine denktir. $Y_k = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ gözlemleri verildiğinde x_k durumunun tahmini,

$$\hat{x}_{k|k} = E[x_k | y_0, y_1, \dots, y_k] = E[x_k | Y_k]$$

ile, hatanın kovaryans matrisi,

$$P_{k|k} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})' | Y_k]$$

ile, $Y_{k-1} = \{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$ gözlemleri verildiğinde x_k durumunun tahmini,

$$\hat{x}_{k|k-1} = E[x_k | y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] = E[x_k | Y_{k-1}]$$

ile, hatanın kovaryans matrisi,

$$P_{k|k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})' | Y_{k-1}]$$

ile gösterilsin. Bu değerlerin belirlenmesi aşağıdaki adımların uygulanmasıyla elde edilir.

Adım-1. $k-1$ anında x_{k-1} durumunun, $\hat{x}_{k-1|k-1}$ tahmininin bilindiği kabul edilsin ve $\hat{x}_{k|k-1}$ belirlenmeye çalışılsın. (1.28) eşitliği

$$x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + G_{k-1} w_{k-1}$$

olarak ele alınır, w_{k-1} rasgele vektörünün $v_k, w_{k-2}, \dots, w_0$ rasgele vektörlerinden, x_0 başlangıç durumunun $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ vektörlerinden bağımsız olduğu göz önünde tutulursa

$$E[w_{k-1} | Y_{k-1}] = 0$$

olacağından

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k|k-1} &= E[x_k | Y_{k-1}] = \Phi_{k-1} E[x_{k-1} | Y_{k-1}] + G_{k-1} E[w_{k-1} | Y_{k-1}] \\ &= \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Hata vektörü $x_k - \hat{x}_{k|k-1}$; $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ gözlemlerinden bağımsız olduğundan, bir adım sonraki öngörü için hatanın kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} P_{k|k-1} &= E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})' | Y_{k-1}] \\ &= E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})'] \end{aligned}$$

dır. Bir adım öngörü hatası,

$$x_k - \hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k-1}(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1|k-1}) + G_{k-1}w_{k-1}$$

olarak yazılabileceğinden, x_{k-1} vektörü, $w_0, w_1, \dots, w_{k-2}$ vektörlerinin bir fonksiyonu ve

$$E[x_{k-1}|w'_{k-1}] = 0,$$

$$E[\hat{x}_{k-1|k-1}w'_{k-1}|Y_{k-1}] = 0$$

oldüğundan, hatanın kovaryans matrisi,

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k-1}P_{k-1|k-1}\Phi'_{k-1} + G_{k-1}Q_{k-1}G'_{k-1}$$

olarak bulunur.

Adım-2. $Y_k = \{y_0, y_1, \dots, y_k\}$ gözlemleri verildiğinde, x_k durumunun tahmininin belirlenmesi için $f(x_k|Y_k)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonunun belirlenmesi gerekir. Bu koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$\begin{aligned} f(x_k|Y_k) &= f(x_k|Y_{k-1}, y_k) \\ &= \frac{f(x_k, Y_{k-1}, y_k)}{f(Y_{k-1}, y_k)} \\ &= f(y_k|x_k, Y_{k-1}) \cdot \frac{f(x_k|Y_{k-1})}{f(y_k|Y_{k-1})} \end{aligned} \tag{1.30}$$

olarak yazılabilir. Gözlem eşitliği (1.29) ve $x(k)$ vektörünün $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ gözlemlerinden bağımsız olduğu göz önüne alınırsa (v_k ; x_0 ve $w_0, w_1, \dots, w_k$ vektörlerinden bağımsız)

$$f(y_k|x_k, Y_{k-1}) = f(y_k|x_k)$$

elde edilir. Bu durumda (1.30) eşitliği,

$$f(x_k|Y_k) = \frac{f(y_k|x_k)f(x_k|Y_{k-1})}{f(y_k|Y_{k-1})}$$

olarak yazılabilir. Hata terimleri ile ilgili varsayımlardan

$$E[v_k | x_k] = 0$$

$$E[y_k | x_k] = H_k x_k$$

$$E[(y_k - H_k x_k)(y_k - H_k x_k)'] = E[v_k v_k'] = R_k$$

olacağından gözlem vektörünün, durum vektörüne göre koşullu dağılımı

$$f(y_k | x_k) = K \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(y_k - H_k x_k)' R_k^{-1} (y_k - H_k x_k)\right]$$

şeklinde normal dağılımdır. Başlangıç durumunun normal dağılıma sahip olmasından

$f(x_k | Y_{k-1})$ önsel dağılımı da

$$f(x_k | Y_{k-1}) = K' \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}(x_k - \hat{x}_{k|k-1})' P_{k|k-1}^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k-1})\right]$$

biçiminde normal dağılım olduğundan, $f(x_k | Y_k)$ sonsal dağılımı Teorem 1.2. kullanılırsa

$$f(x_k | Y_k) = K'' \cdot \exp\left[-\frac{1}{2}((y_k - H_k x_k)' R_k^{-1} (y_k - H_k x_k) + (x_k - \hat{x}_{k|k-1})' P_{k|k-1}^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}))\right] \quad (1.31)$$

biçiminde normal dağılım olarak bulunur. Burada; K, K', K'' normalleştirme sabitleridir.

(1.31) sonsal dağılımının logaritması alındıktan sonra, x_k vektörüne göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse

$$H_k' R_k^{-1} [y_k - H_k x_k] - P_{k|k-1}^{-1} [x_k - \hat{x}_{k|k-1}] = 0$$

elde edilir. Bu ifade, $x(k)$ vektörüne göre çözülüp, $x(k)$ yerine $\hat{x}(k)$ alınırsa

$$\left[H_k' R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} \hat{x}_{k|k} = H_k' R_k^{-1} y_k + P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} \quad (1.32)$$

ve bu eşitliğin sağ tarafına $H_k' R_k^{-1} H_k \hat{x}_{k|k-1}$ eklenip çıkarılırsa (1.32) eşitliği

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \left[H_k' R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} H_k' R_k^{-1} [y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}]$$

olarak yazılır. (1.32) eşitliği

$$\hat{x}_{k|k} = \left[H_k' R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} \left[H_k' R_k^{-1} y_k + P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} \right]$$

olarak göz önüne alınır ve (1.29) gözlem eşitliği kullanılırsa

$$x_k - \hat{x}_{k|k} = x_k - \left[H_k' R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} \left[H_k' R_k^{-1} H_k x_k + H_k' R_k^{-1} v_k + P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} \right] \quad (1.33)$$

elde edilir. (1.33) ifadesinin sağ tarafına $P_{k|k-1}^{-1}x_k$ eklenip çıkarılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (1.33) eşitliği

$$x_k - \hat{x}_{k|k} = \left[H_k' R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} \left[H_k' R_k^{-1} v_k - P_{k|k-1}^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) \right] \quad (1.34)$$

olarak yazılır ve (1.34) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} P_{k|k} &= E \left[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})' \right] \\ &= \left[H_k' R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (1.35)$$

olarak bulunur. (1.35) eşitliğine matris tersi lemması uygulanırsa,

$$\left[H_k' R_k^{-1} H_k + P_{k|k-1}^{-1} \right]^{-1} = P_{k|k-1} - P_{k|k-1} H_k' \left[H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k \right]^{-1} H_k P_{k|k-1}$$

elde edilir.

$$K_k = P_{k|k-1} H_k' \left[H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k \right]^{-1}$$

olarak alınır

$$P_{k|k} = [I - K_k H_k] P_{k|k-1}$$

ve matris tersi lemmasından

$$\left[H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k \right]^{-1} H_k' R_k^{-1} = P_{k|k-1} H_k' \left[H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k \right]^{-1}$$

olduğundan

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \left[y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \right]$$

olarak bulunur. Özetlenecek olursa Kalman Filtresi,

$$P_{0|-1} = P_0$$

$$\hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0$$

başlangıç değerlerine bağlı olarak aşağıdaki algoritma ile verilir;

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} \quad (1.36)$$

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \left[y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \right] \quad (1.37)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k' \left[H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k \right]^{-1} \quad (1.38)$$

$$P_{k|k} = [I - K_k H_k] P_{k|k-1} \quad (1.39)$$

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1|k-1} \Phi_{k-1}' + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}' \quad (1.40)$$

Eşitlik (1.38) ile verilen matris, Kalman Kazanç Matrisi olarak da bilinir. Bu yöntem Singh and Titli (1978), Bryson and Ho (1969)'dan derlenmiştir.

1.6. En Küçük Hata Kareleri Ortalaması Ölçütüne Göre Kalman Filtresinin Elde Edilmesi

Bu kısımda, durum-uzay modelinde yer alan hata terimlerinin ve x_0 başlangıç durumunun normal dağılıma sahip olduğu varsayımı altında, en küçük hata kareleri ortalaması ölçütüne göre Kalman Filtresinin elde edilişi verilmiştir.

Durum-uzay modeli,

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + G_k w_k \quad (1.41)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (1.42)$$

olmak üzere hata terimlerinin

$$w_k \sim N(0, Q_k)$$

$$v_k \sim N(0, R_k)$$

$$x_0 \sim N(\bar{x}_0, P_0)$$

şeklinde normal dağılıma sahip olduğu, hata terimlerinin ve başlangıç durumunun (1.3)-(1.11) varsayımlarını sağladığı kabul edilsin.

$Y_{k-1} = \{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}$ gözlemleri verildiğinde, x_k durumunun, $\hat{x}_{k|k-1}$ tahmininin iyiliği, hatanın

$$\Sigma_{k|k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})' | Y_{k-1}]$$

kovaryans matrisi ile ölçülsün. Bu durumda, $\hat{x}_{k|k-1}$ tahminine karşılık gelen hatanın koşullu kovaryansı için

$$\begin{aligned} \text{trace} \Sigma_{k|k-1} &= E[\text{trace}(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})' | Y_{k-1}] \\ &= E[\|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|^2 | Y_{k-1}] \end{aligned}$$

olacağından, koşullu beklenen değer tahmini, hatanın bu kovaryans matrisini en küçük yapar. Yani hata kareleri ortalaması

$$E[\|x_k - \hat{x}_{k|k-1}\|^2 | Y_{k-1}] \quad (1.43)$$

ölçütünü en küçük yapan tahmin

$$\hat{x}_{k|k-1} = E[x_k | y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] = E[x_k | Y_{k-1}]$$

olarak bulunur (Anderson and Moore 1979). (1.43) ölçütüne göre elde edilen tahmin en küçük varyanslı tahmin olarak da bilinir. Durum-uzay modelindeki hata terimleri ve başlangıç durumu normal dağılıma sahip olduğundan ve normal dağılımın modu ile beklenen değeri eşit olduğundan, hata kareleri ortalaması ölçütüne (koşullu beklenen değer) göre elde edilen tahmin ile sonsal dağılımın en büyüklenmesi ölçütüne göre elde edilen tahmin birbirine denktir. Hata kareleri ortalaması kriterine göre (koşullu beklenen değer tahmini)

$$\hat{x}_{k|k-1} = E[x_k | y_0, y_1, \dots, y_{k-1}] = E[x_k | Y_{k-1}]$$

$$\hat{x}_{k|k} = E[x_k | y_0, y_1, \dots, y_k] = E[x_k | Y_k]$$

$$\Sigma_{k|k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k-1})(x_k - \hat{x}_{k|k-1})' | Y_{k-1}]$$

$$\Sigma_{k|k} = E[(x_k - \hat{x}_{k|k})(x_k - \hat{x}_{k|k})' | Y_k]$$

değerlerinin belirlenmesi aşağıdaki adımların uygulanması ile elde edilir.

Adım-1. Durum-uzay modelinde yer alan hata terimleri ve başlangıç durumu normal dağılıma sahip olduğundan $k = 0$ için, $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ rasgele vektörü, beklenen değeri

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_0 \\ H_0 \bar{x}_0 \end{bmatrix}$$

ve kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix} P_0 & P_0 H_0' \\ H_0 P_0 & H_0 P_0 H_0' + R_0 \end{bmatrix}$$

ile normal dağılıma sahiptir. Bu durumda x_0 'ın y_0 ile koşullu dağılımı da normaldir.

Beklenen değeri

$$\hat{x}_{0|0} = \bar{x}_0 + P_0 H_0' [H_0 P_0 H_0' + R_0]^{-1} [y_0 - H_0 \bar{x}_0]$$

ve kovaryans matrisi

$$\Sigma_{0|0} = P_0 - P_0 H_0' [H_0 P_0 H_0' + R_0]^{-1} H_0 P_0$$

dır.

Adım-2. Benzer düşünce ile $k = 0$ için, y_0 gözlemi verildiğinde, x_1 'in y_0 ile koşullu dağılımı da normal dağılıma sahiptir. Beklenen değeri

$$\hat{x}_{1|0} = \Phi_0 \hat{x}_{0|0}$$

ve kovaryans matrisi

$$\Sigma_{1|0} = \Phi_0 \Sigma_{0|0} \Phi_0' + G_0 Q_0 G_0'$$

dır.

Adım-3. Yine benzer düşünce ile $k = 1$ için, y_1 'in y_0 ile koşullu dağılımı da normal dağılıma sahiptir. Beklenen değeri

$$\hat{y}_{1|0} = H_1 \hat{x}_{1|0}$$

ve kovaryans matrisi

$$H_1 \Sigma_{1|0} H_1' + R_1$$

dir. Ayrıca

$$E[(x_1 - \hat{x}_{1|0})(y_1 - \hat{y}_{1|0})' | y_0] = \Sigma_{1|0} H_1$$

olduğundan, normal dağılıma sahip $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ rasgele vektörünün, y_0 ile koşullu dağılımının

beklenen değeri

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1|0} \\ H_1 \hat{x}_{1|0} \end{bmatrix}$$

ve kovaryans matrisi

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{1|0} & \Sigma_{1|0} H_1' \\ H_1 \Sigma_{1|0} & H_1 \Sigma_{1|0} H_1' + R_1 \end{bmatrix}$$

dır.

Adım-4. Yukardaki adımlardaki benzer düşünce ile, $k = 1$ için, y_0 ve y_1 gözlemleri verildiğinde, x_1 'in y_0 ve y_1 ile koşullu dağılımı da normal dağılıma sahiptir. Beklenen değeri

$$\hat{x}_{1|1} = \hat{x}_{1|0} + \Sigma_{1|0} H_1' \left[H_1 \Sigma_{1|0} H_1' + R_1 \right]^{-1} \left[y_1 - H_1 \hat{x}_{1|0} \right]$$

ve kovaryans matrisi

$$\Sigma_{1|1} = \Sigma_{1|0} - \Sigma_{1|0} H_1' \left[H_1 \Sigma_{1|0} H_1' + R_1 \right]^{-1} H_1 \Sigma_{1|0}$$

dır.

Adım-5. $k = 1$ için adım-2 tekrar uygulanırsa

$$\hat{x}_{2|1} = \Phi_1 \hat{x}_{1|1}$$

ve

$$\Sigma_{2|1} = \Phi_1 \Sigma_{1|1} \Phi_1' + G_1 Q_1 G_1'$$

elde edilir.

Herhangi bir k anında adım-2 ile adım-4 arasındaki işlemler genelleştirilirse

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \Sigma_{k|k-1} H_k' \left[H_k \Sigma_{k|k-1} H_k' + R_k \right]^{-1} \left[y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \right] \quad (1.44)$$

$$\hat{x}_{k+1|k} = \Phi_k \hat{x}_{k|k} \quad (1.45)$$

$$\Sigma_{k|k} = \Sigma_{k|k-1} - \Sigma_{k|k-1} H_k' \left[H_k \Sigma_{k|k-1} H_k' + R_k \right]^{-1} H_k \Sigma_{k|k-1} \quad (1.46)$$

$$\Sigma_{k+1|k} = \Phi_k \Sigma_{k|k} \Phi_k' + G_k Q_k G_k' \quad (1.47)$$

olarak bulunur. Burada,

$$K_k = \Sigma_{k|k-1} H_k' \left[H_k \Sigma_{k|k-1} H_k' + R_k \right]^{-1} \quad (1.48)$$

olarak alınır

$$\Sigma_{k|k} = [I - K_k H_k] \Sigma_{k|k-1} \quad (1.49)$$

ve

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \left[y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \right] \quad (1.50)$$

elde edilir. Algoritmanın başlangıç değerleri olarak

$$\Sigma_{0|-1} = P_0$$

$$\hat{x}_{0|-1} = \bar{x}_0$$

alınır. Bu yöntem; Anderson and Moore (1979) ve Kumar and Varaiya (1986)'dan derlenmiştir. Görüldüğü gibi en küçük varyanslı tahmin ile sonsal dağılımın en büyüklenmesinden elde edilen tahmin aynıdır.

1.7. Basit İstatistik Teknikleri ile Kalman Filtresinin Elde Edilmesi

Bu kısımda, birkaç basit istatistik tekniğinin kullanılmasıyla Kalman Filtresinin elde edilişi açıklanmıştır. Bu yöntemin açıklanması amacıyla, ilk önce tek değişkenli durum daha sonra da çok değişkenli durum ele alınmıştır.

1.7.1. Tek değişkenli durum

x_1 ve x_2 , x rasgele değişkeni hakkında σ_1^2 ve σ_2^2 varyansı ile iki bağımsız tahmin olsun. Bu tahminlerin "en iyi" $\hat{x}$ tahminini verecek biçimde ağırlıklı ortalama formunda birleştirilebileceği düşünülebilir. Burada, "en iyi" sözcüğü en küçük varyanslı tahmin anlamındadır. x_1 ve x_2 'nin ağırlıklı ortalamalarının genel formu,

$$\bar{x} = (1-w)x_1 + wx_2 \quad (1.51)$$

dır. Ağırlıklı ortalama $\bar{x}$ nin beklenen değeri,

$$E[\bar{x}] = (1-w)E[x_1] + wE[x_2]$$

varyansı

$$\sigma^2 = E[(\bar{x} - E(\bar{x}))^2] = (1-w)^2 \sigma_1^2 + w^2 \sigma_2^2$$

dır. Ağırlıklı ortalamanın varyansı σ^2 'yi en küçük yapacak w ağırlık katsayısını belirlemek amacıyla w 'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial w} = -2(1-w)\sigma_1^2 + 2w\sigma_2^2 = 0$$

ve çözümden elde edilen değer de $\hat{w}$ ile gösterilirse

$$\hat{w} = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (1.52)$$

olarak bulunur. (1.52), (1.51) eşitliğinde yazılırsa bu durumda (1.51) eşitliği,

$$\hat{x} = \frac{\sigma_2^2 x_1 + \sigma_1^2 x_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (1.53)$$

olur. Bu durumda, $\hat{x}$ 'nin varyansı,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad (1.54)$$

olarak bulunur. (1.54) eşitlinden görüldüğü gibi ağırlıklı ortalamadan elde edilen tahminin varyansı, x_1 ve x_2 tahminlerinin varyansından daha küçüktür. Eğer x_2 değeri, x_1 tahminini yenilemek için bir gözlem olarak düşünülürse (1.53) ve (1.54) eşitlikleri

$$\hat{x} = x_1 - \hat{w}(x_1 - x_2) = x_1 + \hat{w}(x_2 - x_1) \quad (1.55)$$

ve

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma_1^2 (1 - \hat{w}) \quad (1.56)$$

olarak yazılabilir.

1.7.2. Çok değişkenli durum

x_1 ve x_2 , $n \times 1$ boyutlu x rasgele vektörü hakkında bağımsız iki tahmin olsun. x_1 ve x_2 'nin ağırlıklı ortalamalarının genel formu, W , $n \times n$ boyutlu keyfi ağırlık matrisi olmak üzere

$$\bar{x} = (I - W)x_1 + Wx_2$$

ile ya da

$$\bar{x} = x_1 - W(x_1 - x_2) \quad (1.57)$$

ile verilir. x 'in en iyi tahmini $\hat{x}$ ile gösterilsin, yani W matrisi öyle seçilsin ki $\bar{x}$ ağırlıklı ortalamasının kovaryans matrisi en küçük olsun. Birçok durumda iki tahminin boyutları eşit değildir. Bunlardan birisi x 'in elemanlarının bir fonksiyonu olabilir. Genelde H $m \times n$ boyutlu bir matris, x ile çarpıldıktan sonra y vektörünü verir. Öyleyse genel problem, x 'in en iyi tahmini $\hat{x}$, x 'in bir tahmininden (x_1 ve kovaryansı P^*) ve bir y gözleminden elde edilir. (1.57) eşitliğinde $W = KH$ alınırsa, K keyfi bir matris olmak üzere

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_1 - KH(x_1 - x_2) \\ &= x_1 - K(Hx_1 - Hx_2) \\ &= x_1 - K(Hx_1 - y) \\ &= (I - KH)x_1 + Ky \end{aligned} \quad (1.58)$$

elde edilir. x_1 'in kovaryans matrisi P^* ve y 'nin kovaryans matrisi V olmak üzere $\bar{x}$ 'nin kovaryans matrisi (1.58) eşitliğinden

$$\bar{P} = (I - KH)P^*(I - KH)' + KVK' \quad (1.59)$$

olarak bulunur. Şimdi problem $\bar{P}$ en küçük olacak şekilde K matrisinin belirlenmesidir. (1.59) eşitliği

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P^* + (KH)P^*(KH)' - (KH)P^* - P^*(KH)' + KVK' \\ &= P^* + K(HP^*H' + V)K' - K(HP^*) - (HP^*)'K' \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Eğer

$$SS' = HP^*H' + V$$

ve

$$SA' = HP^*$$

ise

$$\begin{aligned} (KS - A)(KS - A)' &= K(SS')K' - KSA' - AS'K' + AA' \\ &= K(SS')K' - K(SA') - (SA')'K' + AA' \\ &= K(HP^*H' + V)K' - K(HP^*) - (HP^*)'K' + AA' \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P^* + (KS - A)(KS - A)' - AA' \\ &= P^* + (KS - A)(KS - A)' - P^*H'(HP^*H' + V)^{-1}HP^* \end{aligned} \quad (1.60)$$

elde edilir. (1.60) eşitliği ancak $(KS - A) = 0$ olduğunda en küçük olur. Bu durumda,

$$K = P^*H'(HP^*H' + V)^{-1} \quad (1.61)$$

olarak bulunur. (1.61) eşitliği, (1.60) eşitliğinde yazılırsa

$$P = \bar{P} = P^* - KHP^* = (I - KH)P^* \quad (1.62)$$

elde edilir. (1.62) eşitliği x 'in en iyi tahmininin

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x_1 - K(Hx_1 - y) \\ &= x_1 + K(y - Hx_1) \end{aligned} \quad (1.63)$$

kovaryans matrisidir.

Yukarıda açıklanan yöntemin (1.3)-(1.11) varsayımları altında

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + G_k w_k \quad (1.64)$$

$$y_{k+1} = H_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1} \quad (1.65)$$

durum-uzay modeline uygulanışı aşağıda verilmiştir.

k anında x_k durumunun önsel bir tahmini $\hat{x}_k$ olmak üzere, bu tahminin hatası ε_k ve hatanın kovaryans matrisi P_k ise

$$\hat{x}_k = x_k + \varepsilon_k$$

olarak yazılabilir. (1.64) durum eşitliğindeki w_k rasgele vektörü sıfır ortalamalı olduğundan ve yapılan varsayımlardan bir adım sonraki öngörü

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= E[x_{k+1}] = E[\Phi_k x_k + G_k w_k] = \Phi_k \hat{x}_k \\ \hat{x}_{k+1|k} &= \Phi_k \hat{x}_k\end{aligned}\tag{1.66}$$

olarak bulunur. Bu eşitlik

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1|k} &= \Phi_k \hat{x}_k \\ &= \Phi_k x_k + \Phi_k \varepsilon_k \\ &= x_{k+1} - G_k w_k + \Phi_k \varepsilon_k\end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden ve ε_k ile w_k bağımsız olduğundan bir adım sonrası için yapılan öngörü hatasının kovaryans matrisi

$$P_{k+1|k} = \Phi_k P_k \Phi_k' + G_k Q_k G_k' \tag{1.67}$$

olarak yazılabilir. $k+1$ anında y_{k+1} gözlemi mevcut olduğundan x_{k+1} durumunun en iyi tahminini elde etmek amacıyla (1.61), (1.62) ve (1.63) eşitliklerinde P^* yerine $P_{k+1|k}$, x_1 yerine $\hat{x}_{k+1|k}$ ve y yerine y_{k+1} alınıp diğer matrislerde $k+1$ indisi kullanılarak bu eşitlikler yazılırsa

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_{k+1|k} + K_{k+1} [y_{k+1} - H_{k+1} \hat{x}_{k+1|k}] \tag{1.68}$$

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}' [H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}' + R_{k+1}]^{-1} \tag{1.69}$$

$$P_{k+1} = [I - K_{k+1} H_{k+1}] P_{k+1|k} \tag{1.70}$$

eşitlikleri elde edilir. Görüldüğü gibi bu yöntemle elde edilen (1.66)-(1.70) eşitlikleri Kalman Filtresini vermektedir. Bu yöntem, Sorenson and Stubbered (1970)'den derlenmiştir.

BÖLÜM II

KALMAN FİLTRESİ İÇİN ASİMTOTİK DAĞILIM TEORİSİ

Kesikli-zaman lineer durum-uzay modelinde yer alan rasgele terimler keyfi dağılıma sahip olduğunda Kalman Filtresi durum tahmin edicisi için, Spall and Wall (1984) tarafından bazı koşullar altında Merkezi Limit Teoremi verilmiştir.

Bu bölümün ilk kısmında, durum-uzay modeli ile ilgili kontrol edilebilme, gözlemlenebilme, Kalman Filtresinin kararlılığı ile ilgili bazı özellikler ve bölümün ikinci kısmında, Kalman Filtresi durum tahmin edicisi için elde edilen Merkezi Limit Teoremi ispatsız olarak verilmiştir.

Spall and Wall (1984), Spall (1985) tarafından belirtildiği gibi Kalman Filtresi için verilen Merkezi Limit Teoreminde yakınsama hızlarının araştırılması gerekmektedir. Bu yakınsama hızları, kurulan modelin geçerliliğinin test edilmesi problemi için parametrik olmayan hipotez testlerinin geliştirilmesinin altyapısını oluşturur.

Kalman Filtresi için Merkezi Limit Teoremi açıklandıktan sonra, bu bölümün 3. ve 4. kısmında Merkezi Limit Teoreminde yakınsama hızları verilmiştir. Bu yakınsama hızları yardımıyla model geçerliliğini test etmek amacıyla bölümün 5. kısmında test yöntemi geliştirilmiş ve bu yöntemin işleyişini görmek amacıyla 6. kısımda simülasyon çalışması yapılmıştır.

2.1 Gözlemlenebilme, Kontrol Edilebilme ve Kalman Filtresinin Kararlılığı

Bu kısımdaki kesikli-zaman durum-uzay modeli $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + G_k w_k \quad (2.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.2)$$

olarak ele alınsın. Burada; $x_k \in R^p$ gözlenemeyen durum vektörü, $z_k \in R^m$ sistem çıkışı (gözlem, ölçüm vektörü) Φ_k , H_k , G_k boyutları uygun şekilde seçilmiş matrisler, w_k sistem dinamiğindeki rasgele etki vektörü, v_k ölçüm hata vektörüdür. Ayrıca (1.3)-(1.11) varsayımları kabul edilsin. Bu durumda Kalman Filtresi,

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}' \quad (2.3)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (2.4)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k' (H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k)^{-1} \quad (2.5)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1} \quad (2.6)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (2.7)$$

eşitlikleri ile verilir. Ayrıca Gelb (1974) tarafından,

$$K_k = P_k H_k' R_k^{-1} \quad (2.8)$$

eşitliğinin sağlandığı da gösterilmiştir. Eşitlik (2.1)-(2.2) ile verilen durum-uzay modelinde

$$\Phi(k, j) = \prod_{i=j+1}^k \Phi_{i-1}, \quad k > j \quad (2.9)$$

$$\Psi(k, j) = \prod_{i=j+1}^k [\Phi_{i-1} - P_i H_i' R_i^{-1} H_i \Phi_{i-1}] , \quad k > j \quad (2.10)$$

$$\Psi(k, k) = \Phi(k, k) = I$$

$$\Phi(j, k) = \Phi^{-1}(k, j)$$

olmak üzere, (2.7) eşitliği

$$\hat{x}_k = \Psi(k, k-1) \hat{x}_{k-1} + P_k H_k' R_k^{-1} y_k = \Psi(k, k-1) \hat{x}_{k-1} + K_k y_k \quad (2.11)$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer $\forall k \geq N$ için,

$$\alpha_1 I \geq \sum_{i=k-N}^{k-1} \Phi(k, i+1) G_i Q_i G_i' \Phi'(k, i+1) \geq \alpha_2 I \quad (2.12)$$

olacak şekilde, $1 \leq N < \infty$ tamsayısı ve $0 < \alpha_2 \leq \alpha_1 < \infty$ sabitleri varsa, (2.1)-(2.2) eşitlikleri ile verilen durum-uzay modeli, kontrol edilebilme özelliğini sağlıyor denir.

Eğer $\forall k \geq N$ için,

$$\beta_1 I \leq \sum_{i=k-N}^k \Phi'(i, k) H_i' R_i^{-1} H_i \Phi(i, k) \leq \beta_2 I \quad (2.13)$$

olacak şekilde $1 \leq N < \infty$ tamsayısı ve $0 < \beta_1 \leq \beta_2 < \infty$ sabitleri varsa, (2.1)-(2.2) eşitlikleri ile verilen durum-uzay modeli, gözlemlenebilme özelliğini sağlıyor denir (Jazwinski 1970).

Lemma 2.1. Eğer (2.1)-(2.2) eşitlikleri ile verilen durum-uzay modeli, kontrol edilebilme ve gözlemlenebilme özelliklerini sağlıyorsa, bu durumda (2.4) eşitliğinde verilen kovaryans matrisi, $\forall k$ için

$$P_k \leq \left(\frac{1}{\beta_1} + N \frac{\beta_2^2 \alpha_1}{\beta_1^2} \right) I$$

özellikliğini sağlar (Deyst 1973).

Lemma 2.2. Eğer (2.1)-(2.2) eşitlikleri ile verilen durum-uzay modeli, kontrol edilebilme ve gözlemlenebilme özelliklerini sağlıyorsa ve $P_0 \geq 0$ ise, bu durumda (2.4) eşitliği ile verilen kovaryans matrisi $\forall k \geq N$ için $P_k > 0$ özelliğini sağlar (Jazwinski 1970).

Teorem 2.1. Eğer (2.1)-(2.2) eşitlikleri ile verilen durum-uzay modeli, kontrol edilebilme ve gözlemlenebilme özelliklerini sağlıyorsa ve $P_0 \geq 0$ ise bu durumda Kalman Filtresi asimtotik olarak kararlıdır ve (2.10) eşitliği ile verilen $\Psi(n, i)$ matrisi için

$$\|\Psi(n, i)\| \leq d_1 \exp(-d_2(n-i))$$

olacak şekilde $d_1, d_2 > 0$ sabitleri vardır (Jazwinski 1970).

Teorem 2.2. Eşitlik (2.1)-(2.2) ile verilen durum-uzay modeli kontrol edilebilme ve gözlemlenebilme özelliklerini sağlasın. Kabul edilsin ki P_k^1, P_k^2 matrisleri, (2.3) eşitliğinin $P_0^1, P_0^2 \geq 0$ olmak üzere P_0^1, P_0^2 başlangıç değerlerinden elde edilen iki çözüm olsun, bu durumda

$$\delta P_k = P_k^1 - P_k^2$$

olmak üzere

$$\|\delta P_k\| \leq d_3^2 \exp(-d_4 k) \|P_0^1 - P_0^2\| \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty)$$

olacak şekilde $d_3, d_4 > 0$ sabitleri vardır (Jazwinski 1970).

2.2 Kalman Filtresi için Merkezi Limit Teoremi

Ele alınan kesikli-zaman durum-uzay modeli $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_k = \Phi_{k-1} x_{k-1} + w_{k-1} \quad (2.14)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (2.15)$$

biçiminde olsun. Burada; $x_k \in R^p$ durum vektörü, $y_k \in R^m$ gözlem vektörü Φ_{k-1} , H_k boyutları uygun şekilde seçilmiş bilinen matrisler, w_{k-1} sistem dinamiğindeki rasgele etki vektörü, v_k ölçüm hata vektörüdür. Başlangıç durumu x_0 da rasgele vektördür. $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$V.1. E[w_{k-1}] = 0, E[v_k] = 0$$

$$V.2. E[(x_0 - Ex_0)(x_0 - Ex_0)'] = P_0 \leq \beta I$$

$$E[w_{k-1} w_{k-1}'] = Q_{k-1} \leq \beta I$$

$$\eta I \leq E[v_k v_k'] = R_k \leq \beta I$$

$$0 < \eta \leq \beta < \infty$$

V.3. $\{w_{k-1}\}$ ve $\{v_k\}$ rasgele vektörlerinin herbiri bağımsız rasgele değişkenler dizisi, w_{j-1} ve v_k , $j \neq k$ olduğunda bağımsız ve $E[w_{k-1} v_k'] = 0$,

V.4. x_0 vektörü, w_{k-1} ve v_k vektöründen bağımsız olduğu varsayımları yapılsın. Bu model için Kalman Filtresi,

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + Q_{k-1}$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k' (H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k)^{-1} = P_k H_k' R_k^{-1}$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1})$$

ile verilir. Burada $\hat{x}_0 = E[x_0]$ dır.

Eşitlik (2.9)-(2.10)-(2.11) gösterimleri altında,

$$\hat{x}_n - E[\hat{x}_n] = \sum_{k=0}^n Y_{nk} \quad (2.16)$$

olarak tanımlansın. Burada,

$$Y_{n0} = \sum_{i=1}^n \Psi(n, i) P_i H_i' R_i^{-1} H_i \Phi(i, 0) (x_0 - E[x_0])$$

ve $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$Y_{nk} = \sum_{i=k}^n \Psi(n,i) P_i H_i' R_i^{-1} H_i \Phi(i,k) w_{k-1} + \Psi(n,k) P_k H_k' R_k^{-1} v_k \quad (2.17)$$

dır. V.3 ve V.4 varsayımları altında (2.17) eşitliği ile verilen $\{Y_{nk}\}_{k=0}^n$ dizisi bağımsız rasgele değişkenler dizisidir.

Tahmin edicinin kovaryans matrisi $B_n^2 = \text{Cov}(\hat{x}_n)$ ile gösterilirse,

$$\begin{aligned} B_n^2 &= \text{Cov}(x_n) - P_n \\ &= \Phi(n,0) P_0 \Phi'(n,0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(n,i+1) Q_i \Phi'(n,i+1) - P_n \end{aligned} \quad (2.18)$$

olarak bulunur. Hesaplama kolaylığı olması amacıyla bu kovaryans matrisi $B_0^2 = 0$ başlangıç değerine bağlı olarak,

$$B_n^2 = \Phi_{n-1} B_{n-1}^2 \Phi_{n-1}' + K_n H_n P_{n|n-1} \quad (2.19)$$

eşitliği ile ardışık olarak hesaplanabilir (Spall and Wall 1984, Spall 1985).

Teorem 2.3. Ele alınan (2.14)-(2.15) durum-uzay modeli, V.1-V.4 varsayımlarını, kontrol edilebilirlik ve gözlemlenebilirlik koşullarını sağlasın ve

$$s_n = \frac{\hat{x}_n - E[\hat{x}_n]}{B_n}$$

olsun. Eğer, $l \rightarrow \infty$ için $\Phi^{-1}(l,0)$ mevcutsa ve her n ve herhangi bir $0 < \rho_0 < \infty$ için

$$\Phi(n,0) \cdot \Phi'(n,0) \leq \rho_0 \cdot I$$

ise bu durumda

$$s_n \xrightarrow{D} N(0, I)$$

dır (Spall and Wall 1984, Spall 1985). Burada, $\xrightarrow{D}$ gösterimi dağılımda yakınsama anlamındadır.

2.3. Kalman Filtresi için Merkezi Limit Teoreminde Yakınsama Hızlarının Değerlendirilmesi

Bu kısımda, Kalman Filtresi için Merkezi Limit Teoreminde yakınsama hızlarının değerlendirilmesi ile ilgili, Aliev ve Özbek (1996), Aliev and Özbek (1998) tarafından elde edilen sonuç Teorem 2.4. ile verilmiştir.

Teorem 2.4. Teorem 2.3. ile verilen Merkezi Limit Teoreminin koşullarının sağlandığı kabul edilsin ve $p = 1$ olsun. Ele alınan durum-uzay modelinde, $0 < \delta \leq 1$ sabiti için,

$$E\left[|w_{k-1}|^{2+\delta}\right] < \beta$$

$$E\left[|v_k|^{2+\delta}\right] < \beta$$

$$E\left[|x_0 - E[x_0]|^{2+\delta}\right] < \beta$$

varsayımlarının sağlandığı kabul edilsin. Bu durumda, $\forall x \in R$ ve $\forall n$ için,

$$\Delta_n \equiv \sup_x |P(s_n < x) - \phi(x)| < \frac{c}{n^{\delta/2}}$$

dır. Burada; c model parametreleri, β ve δ sabitlerinin bir fonksiyonu ve

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

dır.

Not. $\delta = 1$ olduğunda, Δ_n ' in $n \rightarrow \infty$ için sifıra yakınsama hızı olarak teoremden $\frac{c}{n^{1/2}}$ alınır ki, bu hız n sayısına göre en iyi hızdır.

İspat. Ele alınan (2.14)-(2.15) durum-uzay modeli kontrol edilebilme ve gözlemlenebilme özelliğini sağladığından, eşitlik (2.12) kullanılırsa $1 \leq M < \infty$ tamsayısı ve $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 < \infty$ sabitleri vardır, öyle ki $\forall k \geq M$ için,

$$\gamma_1 I \leq \sum_{i=k-M}^{k-1} \Phi(k, i+1) Q_i \Phi'(k, i+1) \equiv C(k, k-M) \leq \gamma_2 I \quad (2.20)$$

koşulu sağlanır. Eşitlik (2.13) kullanılırsa, model gözlemlenebilme özelliğini sağladığından, $1 \leq N < \infty$ tamsayısı ve $0 < \beta_1 \leq \beta_2 < \infty$ sabitleri vardır, öyleki $\forall k \geq N$ için

$$\beta_1 I \leq \sum_{i=k-N}^k \Phi(i, k) H_i' R_i^{-1} H_i \Phi'(i, k) \leq \beta_2 I \quad (2.21)$$

koşulu sağlanır. Ayrıca model kontrol edilebilme ve gözlemlenebilme özelliklerini sağladığından Teorem 2.1. gereğince

$$|\Psi(n, i)| \leq \rho_3 \exp(-\rho_4(n-i)) \quad (2.22)$$

olacak şekilde $\rho_3, \rho_4 > 0$ sabitleri vardır. Yine kontrol edilebilme ve gözlemlenebilme özelliklerinden Lemma 1 gereğince $\forall i$ için

$$0 \leq P_i \leq \left(\frac{1}{\beta_2} + \frac{M\beta_1^2\gamma_2}{\beta_2^2} \right) I \equiv S_1 \quad (2.23)$$

koşulu sağlar. (2.16)-(2.17) eşitliklerinden B_n^2

$$B_n^2 = \sum_{k=0}^n E|Y_{nk}|^2$$

şeklinde yazılabilir. Teoremin koşullarından $\{Y_{nk}\}_{k=0}^n$ dizisinin bağımsız rasgele değişkenler dizisi olduğu görülmektedir ve B_n için alttan sınır Spall and Wall (1984) tarafından verildiği gibi $B_n > c_1\sqrt{n}$ olarak yazılabilir. Burada c_1 model parametrelerine bağlı bir sabittir. Şimdi; $k = 0, 1, \dots, n$ için $E|Y_{nk}|^{2+\delta}$ terimlerini değerlendirmek amacıyla, $\forall k \geq 1$ için

$$|Y_{nk}| \leq \sup_{k \leq i \leq n} |P_i H_i' R_i^{-1} H_i \Phi(i, k)| \left| \sum_{i=k}^n |\Psi(n, i)| \cdot |w_{k-1}| + |\Psi(n, k)| \cdot |P_k H_k' R_k^{-1}| \cdot |v_k| \right|$$

olduğundan ve $|a+b|^{2+\delta} \leq c_2(a^{2+\delta} + b^{2+\delta})$, ($a > 0$, $b > 0$) olacak şekilde c_2 sabiti bulunabileceğinden, Spall and Wall (1984) tarafından belirtildiği gibi,

$$|P_i H_i' R_i^{-1} H_i \Phi(i, k)| \leq \rho_1 < \infty \quad (2.24)$$

$$|P_k H_k' R_k^{-1}| \leq \rho_2 < \infty \quad (2.25)$$

eşitsizlikleri ve

$$|\Psi(n, i)| \leq \rho_3 \exp(-\rho_4(n-i)) < \infty$$

eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$E|Y_{nk}|^{2+\delta} \leq c_2 \left(\rho_1^{2+\delta} \rho_3^{2+\delta} \left(\sum_{i=k}^n \exp(-\rho_4(n-i)) \right)^{2+\delta} E|w_{k-1}|^{2+\delta} + \rho_2^{2+\delta} \rho_3^{2+\delta} E|v_k|^{2+\delta} \right) < c_3$$

ve

$$E|Y_{n0}|^{2+\delta} \leq \rho_1^{2+\delta} \rho_3^{2+\delta} \left(\sum_{i=1}^n \exp(-\rho_4(n-i)) \right)^{2+\delta} E|x_0 - Ex_0|^{2+\delta} < c_4$$

elde edilir.

Bilindiği gibi; eğer $X_1, X_2, \dots, X_n$ bağımsız rasgele değişkenler, $EX_j = 0$ ve

herhangi bir $\delta < 1$ için $E|X_j|^{2+\delta} < \infty$ ($j = 1, 2, \dots, n$) ise

$$\sup_x |F_n(x) - \phi(x)| \leq \frac{A \sum_{j=1}^n E|X_j|^{2+\delta}}{D_n^{2+\delta}}$$

özelliği sağlanır (Petrov 1975). Burada;

$$D_n^2 = \sum_{j=1}^n E|X_j|^2$$

$$F_n(x) = P(D_n^{-1} \sum_{j=1}^n X_j < x)$$

ve A mutlak sabittir.

Eşitlik (2.17) ile verilen $\{Y_{nk}\}_{k=0}^n$ dizisi, Petrov (1975) tarafından verilen bu teoremin koşullarını sağladığından yukardaki değerlendirmeler kullanılarak

$$\begin{aligned} \sup_x |P(s_n < x) - \phi(x)| &\leq \frac{A_\delta \sum_{k=0}^n E|Y_{nk}|^{2+\delta}}{B_n^{2+\delta}} \\ &\leq \frac{A_\delta (nc_3 + c_4)}{(c_1 \sqrt{n})^{2+\delta}} < \frac{cn}{n^{1+\delta/2}} = \frac{c}{n^{\delta/2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki c sabiti, $n > n_0$ için,

$$\frac{A_\delta ((\delta_1 \gamma_1 + zS_1)M + \delta_1 \gamma_1) S_0 ((\delta_1 \gamma_1 + zS_1)M)^{\delta/2}}{(\delta_1 \gamma_1 S_1 (z-1))^{1+\delta/2}} \quad (2.26)$$

şeklinde alınabilir. Burada; $z > 1$ için

$$n_0 = M \left(1 + \frac{zS_1}{\delta_1 \gamma_1} \right)$$

ve

$$S_0 = 2^{1+\delta} \beta \left(\rho_1 \rho_3 \left(\frac{e^{\rho_4}}{e^{\rho_4} - 1} \right)^{2+\delta} + (\rho_2 \rho_3)^{2+\delta} \right)$$

ve S_1 değeri (2.23) eşitliği ile verilmiştir. Ayrıca Chow and Teicher (1988) tarafından belirtildiği gibi $A_1 = 7.5$ olarak alınabilir. Değişik δ değerleri için A_δ sayısı, Petrov (1975) tarafından verilen Teorem 3'ün ispatından hesaplanabilir.

2.4. c Sabitinin Belirlenmesi

Bu kısımda, Teorem 2.4. için (2.26) eşitliği ile verilen c sabitinin nasıl belirlendiği açıklanmıştır. Teorem 2.4.'ün varsayımlarından

$$\Phi(n, 0) \Phi'(n, 0) \leq \rho_0 I$$

olacak şekilde $\rho_0 > 0$ sayısı vardır. Teorem 2.3.'deki varsayımlar ve (2.20)-(2.25) eşitlikleri sağlanmaktadır. Ayrıca

$$|a+b|^{2+\delta} \leq 2^{1+\delta}(a^{2+\delta} + b^{2+\delta}), \quad (0 < \delta \leq 1, \quad a, b > 0)$$

özelliklerinden $n, k \geq 1$ için

$$\begin{aligned} |Y_{nk}| &\leq \rho_1 \sum_{i=k}^n \rho_3 \exp(-\rho_4(n-i)) |w_{k-1}| + \rho_2 \rho_3 |v_k| \\ &\leq \rho_1 \rho_3 \left(\frac{e^{\rho_4}}{e^{\rho_4} - 1} \right) |w_{k-1}| + \rho_2 \rho_3 |v_k| \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} |Y_{nk}|^{2+\delta} &\leq 2^{1+\delta} \left(\left(\rho_1 \rho_3 \left(\frac{e^{\rho_4}}{e^{\rho_4} - 1} \right) |w_{k-1}| \right)^{2+\delta} + (\rho_2 \rho_3 |v_k|)^{2+\delta} \right) \\ E|Y_{nk}|^{2+\delta} &\leq 2^{1+\delta} \beta \left(\left(\rho_1 \rho_3 \left(\frac{e^{\rho_4}}{e^{\rho_4} - 1} \right) \right)^{2+\delta} + (\rho_2 \rho_3)^{2+\delta} \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.4.'ün koşullarından $E\left[|x_0 - E[x_0]|^{2+\delta}\right] < \beta$ olduğundan yukardaki

eşitlik $E|Y_{n0}|^{2+\delta}$ için de geçerlidir. Eşitlik (2.18) den

$$B_n^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(n, i+1) Q_i \Phi'(n, i+1) - P_n = C(n, 0) - P_n$$

ve

$$-P_n \geq S_1$$

olduğundan

$$B_n^2 \geq C(n, 0) - S_1$$

elde edilir. Spall and Wall (1984) tarafından verilen (3.9) eşitliği kullanılırsa

$$C(n, 0) \geq \left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor \delta_1 \gamma_1$$

ve

$$B_n^2 \geq \left(\frac{n}{M} - 1 \right) \delta_1 \gamma_1 - S_1 = (n - M) \frac{\delta_1 \gamma_1}{M} - S_1$$

bulunur. Burada, $\left\lfloor \frac{n}{M} \right\rfloor$ ile $\frac{n}{M}$ sayısından küçük, en büyük tamsayı gösterilmektedir ve

$$\delta_1 = \inf_{l, m} \Phi(m, l) \Phi'(m, l)$$

dır. $z > 1$ için

$$(n-M)\frac{\delta_1\gamma_1}{M} > zS_1$$

ya da

$$n > M\left(1 + \frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1}\right) \equiv n_0$$

olduğundan

$$M < \frac{n}{1 + \frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1}}$$

bulunur. Eğer $n - M = d$ ile gösterilirse,

$$M = n - d < \frac{n}{1 + \frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1}}$$

ve

$$d > n\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1}}\right) = n\frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1 + zS_1}$$

bulunur. Böylece,

$$n - M > n\frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1 + zS_1}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$B_n^2 \geq n\frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1 + zS_1}\frac{\delta_1\gamma_1}{M}\left(1 - \frac{1}{z}\right) = n\frac{\delta_1\gamma_1 S_1(z-1)}{(\delta_1\gamma_1 + zS_1)M}$$

ve

$$B_n \geq \sqrt{n}\left(\frac{\delta_1\gamma_1 S_1(z-1)}{(\delta_1\gamma_1 + zS_1)M}\right)^{1/2}$$

bulunur. Ayrıca,

$$1 < \frac{n}{M\left(1 + \frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1}\right)}$$

olduğundan

$$n+1 < n(1 + \frac{1}{M(1 + \frac{zS_1}{\delta_1\gamma_1})}) = n(1 + \frac{\delta_1\gamma_1}{M(\delta_1\gamma_1 + zS_1)})$$

elde edilir. Sonuc olarak,

$$\begin{aligned} \sup_x |P(s_n < x) - \phi(x)| &\leq \frac{A_\delta \sum_{k=0}^n E|Y_{nk}|^{2+\delta}}{B_n^{2+\delta}} \\ &\leq \frac{A_\delta(n+1)S_0}{B_n^{2+\delta}} \\ &\leq \frac{A_\delta n(1 + \frac{\delta_1\gamma_1}{M(\delta_1\gamma_1 + zS_1)})S_0}{n^{1+\delta/2} (\frac{\delta_1\gamma_1 + S_1(z-1)}{(\delta_1\gamma_1 + zS_1)M})^{1+\delta/2}} = \frac{c}{n^{\delta/2}} \end{aligned}$$

bulunur.

2.5. Model Geçerliliği için Hipotez Testi

Bu kısımda, Teorem 2.4.'ün model geçerliliğinin test edilmesinde nasıl kullanılacağı açıklanmıştır. Burada, yanıtlanmaya çalışılan asıl soru, modelin sistemi doğru temsil edip etmediğinin test edilmesidir.

Bilindiği gibi başlangıç x_0 durumu, w_{k-1} ve v_k rasgele değişkenleri normal dağılıma sahipse s_n ' in dağılımı standart normal dağılımdır. Yani tüm n ' ler için $P(s_n < x) = \phi(x)$ ' dir. Eğer bu durumda α anlam düzeyinde model geçerlilik testi kurulmak istenirse, $\phi(x_\alpha) = 1 - \alpha$ olacak şekilde x_α seçilir ve $P(s_n < x) = 1 - \alpha$ alınır. Buradan da s_n için α anlam düzeyinde güven aralığı $(-\infty, x_\alpha)$ olarak bulunur. Böylece model geçerliliği durumunda, $1 - \alpha$ olasılığı ile $s_n \in (-\infty, x_\alpha)$ olur. Yani, $s_n < x_\alpha$ ise modelin doğruluğuna aksi durumda modelin yanlış olduğuna karar verilirse bu testin hata oranı α olur.

Başlangıç x_0 durumu, w_{k-1} veya v_k rasgele değişkenlerinden herhangi birisi normal dağılıma sahip olmadığında $P(s_n < x)$ ' in $\phi(x)$ ' e eşit olduğu genelde söylenemez. Sadece $n \rightarrow \infty$ için, $P(s_n < x)$ ' in limitinin $\phi(x)$ olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, s_n için yukardaki gibi bir test yapılırsa testin hata oranı α değerinden büyük olabilir. Hata artışı, genelde normal olmayan s_n rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu yerine $\phi(x)$ 'in kullanılmasından kaynaklanır.

Model geçerliliğini α anlam düzeyinde test etmek için Teorem 2.4. kullanılabilir. Teorem 2.4.'ün kullanılmasının zorunluluğu n ' in hangi değerinden sonra s_n için güven aralığının geçerli olduğunun bilinmesinden kaynaklanmaktadır. Modelin geçerliliği hipotezi altında her n ve her x için Teorem 2.4.'den

$$\phi(x) - \frac{c}{n^{\delta/2}} < P(s_n < x) < \phi(x) + \frac{c}{n^{\delta/2}} \quad (2.27)$$

yazılabilir. Burada örnek için, tek taraflı model geçerlilik testinin nasıl kurulduğu gösterilmiştir. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ olacak şekilde herhangi iki pozitif α_1, α_2 sayıları alınır. (2.27) eşitliğinden

$$P(s_n < x) > \phi(x) - \frac{c}{n^{\delta/2}}$$

olduğundan, eğer $\phi(x_{\alpha_2}) = 1 - \alpha_2$ olacak şekilde x_{α_2} noktası seçilirse ve $\frac{c}{n^{\delta/2}} < \alpha_1$ olacak şekilde n ' lere bakılırsa, yani

$$n > \left(\frac{c}{\alpha_1} \right)^{2/\delta}$$

alınırsa

$$P(s_n < x_{\alpha_2}) > \phi(x_{\alpha_2}) - \frac{c}{n^{\delta/2}} = 1 - \alpha_2 - \frac{c}{n^{\delta/2}} = 1 - \alpha_2 - \alpha_1 = 1 - \alpha$$

olduğundan, $(-\infty, x_{\alpha_2})$ aralığı s_n için α anlam düzeyli kabul bölgesi olur. Yani bu durumda, $s_n \in (-\infty, x_{\alpha_2})$ olması olasılığı $1 - \alpha$ 'dan büyüktür. Oysa bu n 'ler için $s_n \in (-\infty, x_{\alpha_2})$ ise model geçerliliği hipotezi kabul edilecek aksi durumda red edilecektir.

Model geçerliliğini test etmek için aşağıdaki adımlar uygulanır.

Adım 1. Filtreyi uygulamak için durum-uzay modelindeki parametreler belirlenir. Bu adım, H_0 hipotezine karşılık gelir. Ayrıca testin anlam düzeyi α da belirlenir.

Adım 2. Modeldeki bu değerler için Teorem 2.4.'de verilen c sabitinin değeri hesaplanır.

Adım 3. $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ olmak üzere $\frac{c}{n^{\delta/2}} < \alpha_1$ olacak biçimdeki en küçük n sayısı belirlenir ve bu sayı n_0 olarak alınır. α_2 değerine bağlı olarak, $\phi(x_{\alpha_2}) = 1 - \alpha_2$ olacak şekilde $\mathfrak{R} \equiv [x_{\alpha_2}, \infty) \subset R$ red bölgesi belirlenir.

Adım 4. $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ gözlemleri kullanılarak $n \geq n_0$ için s_n değerleri hesaplanır.

Adım 5. Eğer $s_n \in \mathfrak{R}$ ise H_0 hipotezi red edilir. Bu durumda,

$$P(s_n \in \mathfrak{R} | H_0 \text{ doğru}) \leq \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

dır. Çünkü,

$$P(s_n \in \mathfrak{R} | H_0 \text{ doğru}) \equiv P(s_n \geq x_{\alpha_2} | H_0 \text{ doğru}) < 1 - \phi(x_{\alpha_2}) + \frac{c}{n^{\delta/2}} < \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

dır.

Benzer yolla iki taraflı red bölgesi $\mathfrak{R} = (x', x'')$ de oluşturulabilir. Bu durumda, n_0 sayısı, $\frac{c}{n_0^{\delta/2}} < \frac{\alpha_1}{2}$ koşulu sağlanacak şekilde belirlenir.

2.6. Model Geçerliliğinin Test Edilmesi ile İlgili Simulasyon Çalışması

Bu kısımda, Teorem 2.4.'ün bir uygulaması olan model geçerliliğinin test edilmesi işlemi ile ilgili simulasyon çalışması yapılmıştır. Simulasyon çalışması için, sistem eşitlikleri (gerçek sistem)

$$x_k = 0.999x_{k-1} + w_{k-1} \quad (2.28)$$

$$y_k = x_k + v_k \quad (2.29)$$

olarak ve yanlış filtre modeli

$$x_k = 0.66x_{k-1} + w_{k-1} \quad (2.30)$$

$$y_k = x_k + v_k$$

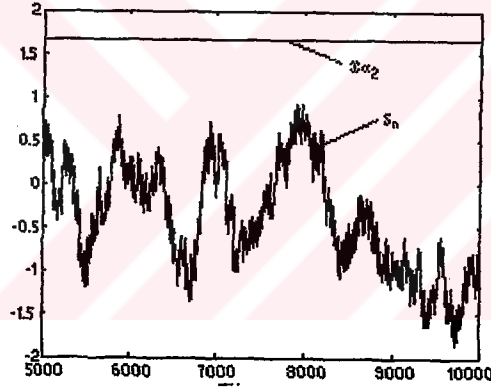
olarak göz önüne alınmıştır. Burada, $x_0 \sim U(-6, 6)$ olmak üzere $k = 1, 2, \dots, 10000$ için $w_k \sim U(-6, 6)$ ve $v_k \sim U(-6, 6)$ olarak alınmıştır. Hipotez testi için bazı parametreler belirlenmiş ve bazıları da hesaplanarak aşağıdaki şekilde bulunmuştur.

$$x_0 = 1, P_0 = 1, \alpha = 0.1, \alpha_1 = 0.05, \alpha_2 = 0.05, x_{\alpha_2} = 1.68, \delta = 1, \delta_1 = 1, A_1 = 7.5, \\ z = 200, N = 350, M = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = Q_k = R_k = 12, \beta = 15, \beta_1 = 0.083, \beta_2 = 25.08, \\ \rho_1 = \rho_2 = 0.0033, \rho_3 = 1, \rho_4 = 0.5$$

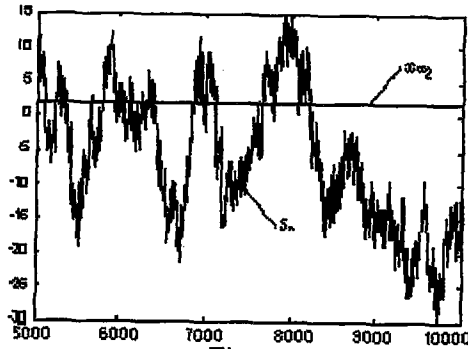
Bu değerlere göre Teorem 2.4.'deki c sabitinin ve n_0 sayısının değeri,

$$c = 3.7747, n_0 = 5700$$

olarak hesaplanmıştır. Şekil 2.1 ve Şekil 2.2 ile $n > 5000$ değerlerinde doğru ve yanlış model için s_n 'in değerleri gösterilmiştir. s_n 'in, $x_{\alpha_2} = 1.68$ 'den büyük olan değerlerinin sayısı ($n > 5700$ için) doğru model için 0 ve yanlış model için 1067 olarak bulunmuştur. Bu durum, (28) eşitliği ile modellenen filtrenin kabul edilebilir, (2.30) eşitliği ile modellenen filtrenin kabul edilemez olduğunu göstermektedir. Yani (2.28)-(2.29) eşitlikleri ile verilen sistem, (2.29)-(2.30) eşitlikleri ile modellenirse hatalı model kurulduğu söylenebilir.



Şekil 2.1. Doğru model için s_n değerleri.



Şekil 2.2. Yanlış model için s_n değerleri.

BÖLÜM III

KENDİNİ UYARLAYAN (UYARLI) KALMAN FİLTRESİ

Gerçek bir sistemin bir modeli oluşturulurken amaca uygun olarak yaklaşık değerlerin alınması, bazı basitleştirmelerin yapılması, eksik bilginin olması sonucu, sistemin temel karakteristiklerinin incelenmesinde daima hatalarla karşılaşılır. Kalman Filtresinde yakınsama probleminin araştırılmasındaki temel amaç da buradan kaynaklanmaktadır. Çeşitli nedenlerden dolayı Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama probleminin giderilebilmesi için filtreleme işleminde bazı değişikliklerin ve güçlendirmelerin yapılması gerekmiştir.

Bu bölümde, durum-uzay modelinin hatalı kurulması durumunda, modelde yer alan beyaz gürültü süreçlerinin kovaryanslarının bilinmediği durumlarda ya da modelde yer alan sistem ve gözlem matrislerinde belirsizlik olması durumunda, Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama problemi göz önüne alınmış ve bu sorunların giderilmesine yönelik yapılan çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

3.1. Uyarlı Kalman Filtresi ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Filtreleme problemi formüle edilirken sistem, gürültü süreçlerinin kovaryans matrislerinin ve modelde yer alan sistem, gözlem matrislerinin tam olarak bilindiği yani bu süreçlerin istatistiksel özelliklerine tam olarak sahip olduğu varsayımı yapılmıştır. Kalman Filtresinin iyi bir şekilde işleyebilmesi, durum-uzay modelinde yer alan matrislerin ve gürültü süreçlerinin kovaryanslarının tam olarak bilinmesine bağlıdır. Bununla birlikte pek çok gerçek uygulamada bu özellikler tam olarak bilinmez. Yani modelle gerçek arasında her zaman bir farklılık oluşur. Kalman Filtresinin işletilmesinde yanlış önsel istatistiklerin kullanılması, sistem ve gözlem matrislerindeki belirsizlik, büyük tahmin hatalarına ya da hatanın ıraksamasına neden olabilir. Uyarlı filtrenin amacı bunu önlemek ya da bu hataları sınırlamaktır. Filtrenin uyarlı hale getirilmesi işlemi, gerçek veriye göre filtrede değişiklik yapılarak ya da gerçek veriye göre uyum sağlanarak gerçekleştirilir.

Kalman Filtresinin, gelen veriye uyum sağlayabilecek şekilde değiştirilmesini sağlayacak pek çok yöntem geliştirilmekle beraber tüm özellikleri dikkate alan yani her şeye uyumlu bir algoritma mevcut bulunmamaktadır. Kalman Filtresinde yapılan çalışmalar; kovaryansların bilinmemesi ve tahmin edilmesi, aykırı ve eksik gözlemlerin varlığı ve filtrenin bu duruma uyum sağlaması, sistem ve gözlem matrislerinin belirsizliği ve bunların tahmin edilmesi olarak sınıflandırılabilir.

Fagin (1964), Fitzgerald (1971), Kalman Filtresinin ıraksaması durumunu ilk olarak ele alan ve bunun önemini belirten araştırmacılarıdır. Masreliez and Martin (1977), Tsai and Kurz (1983), Kovacevic et al. (1992), dayanıklı (robust) Kalman Filtresinin elde edilmesi için çalışmalar yapmışlardır. Mehra (1972), modelde yer alan hata terimlerinin kovaryanslarının bilinmemesi durumunda, bu matrislerin tahmin edilmesi durumunu incelemiş ve kendini ayarlayan (adaptif) Kalman Filtresi için çalışma yapmıştır. Moghaddamjoo and Kirlin (1993), modeldeki kovaryans matrislerinin bilinmemesi durumunu ele alarak bu matrislerin güçlü tahminlerini elde etmek amacıyla çalışma yapmışlardır. Wojcik (1993), en iyi kazanç matrisinin belirlenmesi ile ilgili çalışma yapmıştır. Beltran (1995), AR (auto regressive) modellerindeki parametrelerin Kalman Filtresi ile tahmin edilmesi ve bu parametrelerin zamanla değişmesi durumunda, Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama probleminin giderilmesi için bir hipotez testi geliştirmiş ve filtrede değişiklik yapmıştır. Isaksson (1988), ARX modelinde yer alan parametreleri tahmin etmek amacıyla durum-uzay modelini ele almış ve filtrede, modeldeki hata terimlerinin kovaryans matrislerini tahmin edecek bir algoritma geliştirmiştir. Stoffer and Wall (1991), modelde yer alan matrislerin bilinmemesi durumunu ele almış ve bootstrap yöntemi ile bu matrislerin belirlenmesi ile ilgili bir çalışma yapmıştır. Ansley and Kohn (1983), Kohn and Ansley (1983), eksik ve birleştirilmiş gözlemler durumunda, Lee (1995), eksik gözlemler durumunda, Ergün ve İnal (1995), aykırı değerlerin varlığında, Cibra (1997), eksik gözlemler ve aykırı gözlem değerlerinin varlığında Kalman Filtresini incelemişlerdir. Meinhold and Singpurwalla (1989), durum-uzay modelinde yer alan hata terimlerinin t-dağılımına sahip olması durumunda, Sorenson and Alspach (1971), Gutman and Pena (1985), Wu and Chen (1993), Chow (1994), modelde yer alan hata terimlerinin karma normal dağılıma sahip olması durumunda Kalman Filtresini ele almışlardır. Xia et al. (1994) Durum-uzay modelinin hatalı oluşturulması durumunda, Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama durumunu ele almış ve filtrelemede bazı

güçlendirmelerin yapılmasını sağlayacak unutma faktörünün hesaplanması için çeşitli algoritmalar önermişlerdir. Weston and Norton (1997), Hajiyeve (1997), durum vektöründeki ani değişimleri ortaya çıkarabilecek hipotez testi geliştirmişlerdir. Durum-uzay modelinde yer alan matrislerin bilinmeyen parametre içermesi durumunda bu parametrelerin tahmin edilmesi ile ilgili çalışmalar; Harvey (1990), Fahrmeir and Tutz (1994) tarafından ele alınmıştır. Modelde bulunan matrislerdeki belirsizliklerin incelenmesi Yaz (1990), Chen and Pend (1993), Xie et al. (1994) tarafından ele alınmıştır. Özbek (1997), durum-uzay modelinin hatalı oluşturulması durumunda, Kalman Filtresinde meydana gelen ıraksama durumunu ele almış ve filtrede ayarlama yapacak bir algoritma önermiştir. Özbek and Aliev (1998), Xia et al. (1994)'in önerdikleri unutma faktörünün belirlenmesi ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

3.2 Unutma Faktörü ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Bu kısımdaki kesikli-zaman durum-uzay modeli $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$x_{k+1} = \Phi_k x_k + G_k w_k \quad (3.1)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (3.2)$$

olarak ele alınsın. Burada; $x_k \in R^n$ durum vektörü, $y_k \in R^m$ gözlem vektörü Φ_k , H_k , G_k bilinen matrisler, x_0 , w_k , v_k normal dağılımlı ilişkisiz beyaz gürültü süreçleridir. Ayrıca (1.3)-(1.11) varsayımları kabul edilsin. Bu durumda Kalman Filtresi,

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}' \quad (3.3)$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (3.4)$$

$$K_k = P_{k|k-1} H_k' (H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k)^{-1} \quad (3.5)$$

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1} \quad (3.6)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}) \quad (3.7)$$

eşitlikleri ile verilir. Kalman Filtresi, kurulan model sistem dinamiğini tam olarak temsil ediyorsa durumun en iyi tahminini verir. Eğer sistem dinamiği iyi temsil edilememişse yani filtre yanlış model üzerine kurulmuşsa filtre yanlış çalışacaktır. Bunu önlemek amacıyla Fagin (1964), yeni gözlemlerin eski gözlemlere göre daha çok bilgi içereceğini

ve bu nedenle de gözlemlerin üstel olarak ağırlaklandırabileceğini önermiştir. Xia et al. (1994), bu yöntemi durum-uzay modeline uygulamışlar ve hatanın kovaryans matrisinin

$$P_{k+1|k} = \lambda_{k+1} \Phi_k P_k \Phi_k' + G_k Q_k G_k' \quad (3.8)$$

biçiminde olması gerektiğini önermişlerdir. Burada, $\lambda_k \geq 1$ özelliğini sağlamalıdır aksi durumda $\lambda_k = 1$ alınacaktır. Bu şekilde kurulan Kalman Filtresinin performansının unutma faktörü λ_k 'nın seçimine bağlı olduğu ve filtre en iyi olacak şekilde bu unutma faktörünün hesaplanması gerektiği belirtilmiş, unutma faktörünün hesaplanması için değişik algoritmalar önermişlerdir.

Eşitlik (3.5) Kalman kazancı olarak adlandırılır. En iyi filtre kazancı kullanıldığında aşağıda tanımlanan artıklar vektörü, beyaz gürültü süreci özelliğini sağlar. Artıklar vektörü,

$$z_k = y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (3.9)$$

olarak tanımlandığında, z_k 'nın kovaryansı,

$$C_{0,k} = E[z_k z_k'] = H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k \quad (3.10)$$

olarak ve otokovaryansı $\forall j = 1, 2, 3, \dots$ için

$$C_{j,k} = E[z_{k+j} z_k'] = H_{k+j} \Phi_{k+j} (I - K_{k+j-1} H_{k+j-1}') \dots \Phi_{k+2} (I - K_{k+1} H_{k+1}') \Phi_{k+1} (P_{k|k-1} H_k' - K_k C_{0,k}) \quad (3.11)$$

olarak bulunur. (3.5) ve (3.10) eşitliği, (3.11) eşitliğinde kullanılırsa $C_{j,k}$ sifıra eşit olur bu ise beyaz gürültü sürecinin en iyi kazanç kullanıldığında ilişkisiz olduğunu garanti eder. Gerçek uygulamada ise modeldeki parametre ve gürültü kovaryanslarının hatalı olabilmesi nedeniyle artıklar kovaryansı (3.10) eşitliği ile verilen kovaryanstan farklılık gösterir. Bu nedenle $C_{j,k}$ sıfırdan farklı olabilir. (3.11) eşitliğinde unutma faktörünün sadece son terimde etkili olduğu görülür ve unutma faktörü bu son terim göz önüne alınarak belirlenebilir. Bu durumda $C_{j,k}$ sifıra eşit olur. Bu ise K_k kazancının en iyi olması durumunda,

$$P_{k|k-1} H_k' - K_k C_{0,k} = 0 \quad (3.12)$$

eşitliğinin sağlanması demektir. Yani kazanç en iyi ise (3.12) eşitliği sağlanır. Bu form kendini uyarlayabilen filtrenin temelini oluşturur. (3.12) eşitliğindeki $C_{0,k}$ kovaryansı ölçülmüş veriden ardışık olarak aşağıdaki biçimde hesaplanır.

$$C_{0,k} = D_{1,k} / D_{2,k} \quad (3.13)$$

$$D_{1,k} = D_{1,k-1} / \lambda_{k-1} + z_k z_k'$$

$$D_{2,k} = D_{2,k-1} / \lambda_{k-1} + 1$$

$$D_{1,0} = 0, D_{2,0} = 0$$

Xia et al. (1994), en iyi unutma faktörünün aşağıdaki algoritmalar kullanılarak hesaplanabileceğini önermişlerdir.

Algoritma 3.1.

Q_k, R_k, P_0 pozitif tanımlı ve H_k tam ranklı olmak üzere, unutma faktörü

$$\lambda_k = \max \left\{ 1, \frac{1}{n} \text{trace} [N_k M_k^{-1}] \right\} \quad (3.14)$$

ile hesaplanır. Burada,

$$M_k = H_k \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' H_k' \quad (3.15)$$

$$N_k = C_{0,k} - H_k G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}' H_k' - R_k \quad (3.16)$$

ile hesaplanır.

Algoritma 3.2.

Q_k, R_k, P_0 pozitif tanımlı ve H_k tam ranklı olmak üzere, unutma faktörü (3.15)-(3.16) eşitlikleri kullanılarak,

$$\lambda_k = \max \left\{ 1, \frac{\text{trace}(N_k)}{\text{trace}(M_k)} \right\} \quad (3.17)$$

ile hesaplanır.

Fagin (1964), üstel unutma faktörünü regresyon modeli için önermiş Xia et al. (1994) de aynı yöntemi durum-uzay modeline uygulamışlardır. Fagin (1964) tarafından önerilen yöntemi durum-uzay modeline uygulamak için aşağıdaki algoritma uygulanmalıdır. Kalman Filtresinin özelliklerinden bilindiği gibi filtre gürültü kovaryansları ağırlıklandırılırsa değişiklik sadece hatanın kovaryans matrisinde kendisini

gösterir. Bu durum Gustafsson (1992) tarafından da belirtilmiştir. Başlangıç durumu, sistem ve gözlem gürültü süreçlerinin kovaryans matrisleri λ ağırlık faktörü ile

$$\bar{P}_0 = \lambda P_0, \bar{Q}_k = \lambda Q_k, \bar{R}_k = \lambda R_k$$

biçiminde ağırlıklandırılırsa, Kalman Filtresi eşitliklerinde, $\hat{x}_{k|k-1}$ tahmini aynı kalmakla beraber değişiklik sadece hatanın kovaryans matrisinde kendisini gösterir. Bu durumda yeni gösterimle kovaryans matrisi

$$\bar{P}_{k+1|k} = \lambda P_{k+1|k}$$

şeklini alır. Yani ağırlıklandırılmış hatanın kovaryans matrisi,

$$P_{k+1|k} = \lambda_{k+1} [\Phi_k P_k \Phi_k' + G_k Q_k G_k'] \quad (3.18)$$

şekline gelir (Özbek and Aliev 1998). En iyi unutma faktörünün hesaplanmasında (3.8) eşitliği yerine (3.18) eşitliğinin alınması durumunda Xia et al. (1994) tarafından önerilen algoritmalarda farklılık olacaktır. Aşağıda bu durum dikkate alınarak unutma faktörünün hesaplanması verilmiştir.

Algoritma 3.3.

Eşitlik (3.5) ile verilen kazanç matrisi (3.12) eşitliğinde kullanılırsa,

$$P_{k|k-1} H_k' \left\{ I - [H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k]^{-1} C_{0,k} \right\} = 0 \quad (3.19)$$

olacağından ve yine Algoritma 3.1 deki varsayımlar geçerli olduğundan (3.19) eşitliği

$$[H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k]^{-1} C_{0,k} = I$$

ya da

$$H_k P_{k|k-1} H_k' = C_{0,k} - R_k \quad (3.20)$$

olarak yazılabilir. (3.18) eşitliği (3.20) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\lambda_k H_k [\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}'] H_k' = C_{0,k} - R_k \quad (3.21)$$

elde edilir.

$$M_k^* = H_k [\Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}'] H_k'$$

ve

$$N_k^* = C_{0,k} - R_k$$

ile gösterilirse (3.21) eşitliği,

$$\lambda_k M_k^* = N_k^* \quad (3.22)$$

ya da

$$\lambda_k I = N_k^* (M_k^*)^{-1}, \lambda_k \geq 1 \quad (3.23)$$

olarak yazılır. (3.23) eşitliğinin her iki yanının trace'i alınır,

$$\lambda_k = \max \left\{ 1, \frac{1}{n} \text{trace} [N_k^* (M_k^*)^{-1}] \right\} \quad (3.24)$$

olarak bulunur.

Algoritma 3.4.

Gözlem eşitliğindeki H_k matrisi tam ranklı olduğundan (3.22) eşitliğinin her iki yanının trace 'i alınır ve unutma faktörü yalnız bırakılırsa unutma faktörü,

$$\lambda_k = \max \left\{ 1, \text{trace} [N_k^*] / \text{trace} [(M_k^*)] \right\} \quad (3.25)$$

eşitliği ile hesaplanır.

3.3 Kovaryans Matrisinin Ağırlıklandırılması ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Bu alt bölümde, Kalman Filtresinin ıraksaması başka bir açıdan ele alınmış ve Kalman Filtresinde modelin hatalı kurulmasından kaynaklanan sorunun giderilmesi için Özbek (1997) tarafından önerilen algoritma açıklanmıştır.

Alt bölüm 3.2'de ele alınan durum-uzay modeli göz önüne alınsın. Kalman Filtresinin elde edilmesi için ardışık en küçük kareler yöntemi Brayson and Ho (1969) ve Jazwinski (1970) tarafından verilmiştir. Bu alt bölümde Kalman Filtresinin Goldberger-Theil tahmin edicisi olarak çıkarılışı verildikten sonra hatanın kovaryans matrisi ile ilgili ağırlıklandırma algoritması açıklanmıştır.

$k-1$ anında x_{k-1} durumunun önsel bir tahmini $\hat{x}_{k-1}$ ve kovaryansı P_{k-1} olmak üzere, durumun bir adım sonraki öngörüsü,

$$\hat{x}_{k|k-1} = \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}$$

ve kovaryansı,

$$P_{k|k-1} = \Phi_{k-1} P_{k-1} \Phi_{k-1}' + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}'$$

olarak bulunur. Yani, $\hat{x}_{k|k-1}$ tahminine x_k durumunun $P_{k|k-1}$ kovaryansı ile önsel bir tahmini olarak bakılabilir. k anında y_k gözlemi ve $\hat{x}_{k|k-1}$ önsel tahmini birlikte,

$$\hat{x}_{k|k-1} = x_k + e_k \quad (3.26)$$

$$y_k = H_k x_k + v_k \quad (3.27)$$

şeklinde düşünülebilir. Burada, $\{e_k\}$ sıfır ortalamalı $P_{k|k-1}$ kovaryans matrisli bağımsız rasgele vektörlerin bir dizisini göstermektedir. (3.26) ve (3.27) eşitliklerindeki bilgileri birleştirmenin bir yolu

$$J_k = (x_k - \hat{x}_{k|k-1})' P_{k|k-1}^{-1} (x_k - \hat{x}_{k|k-1}) + (y_k - H_k x_k)' R_k^{-1} (y_k - H_k x_k) \quad (3.28)$$

kazanç fonksiyonu en küçük olacak şekilde x_k durumuna göre çözmektir. Duncan and Horn (1972) kazanç fonksiyonunun x_k 'ya göre türevini alıp sıfıra eşitleyerek Kalman Filtresini elde etmişlerdir. Diğer bir yaklaşım ise (3.26)-(3.27) eşitliklerindeki matrislerin tek bir matris içinde yazılarak Gauss-Markov-Aitken teoreminin bu matrise uygulanması yöntemi Diderrich (1985) tarafından belirtilmiştir. Bu yöntemeye göre,

$$\begin{pmatrix} y_k \\ \hat{x}_{k|k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_k \\ I \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} v_k \\ e_k \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

eşitliğine Gauss-Markov-Aitken teoremi uygulanırsa, x_k durumunun en iyi yansız $\hat{x}_{k|k}$ tahmin edicisi

$$\hat{x}_{k|k} = P_k H_k R_k^{-1} y_k + P_k P_{k|k-1}^{-1} \hat{x}_{k|k-1} \quad (3.30)$$

ve kovaryansı

$$P_k^{-1} = P_{k|k-1}^{-1} + H_k' R_k^{-1} H_k \quad (3.31)$$

olarak bulunur. (3.30) eşitliğinden Kalman Filtresini elde edebilmek için (3.31) eşitliğine matris tersi lemması uygulanır ve

$$K_k = P_{k|k-1} H_k' (H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k)^{-1}$$

olarak alınırsa, (3.31) eşitliğinden (3.4) eşitliği ve (3.30) eşitliğinden de (3.7) eşitliği elde edilir. Eşitlik (3.28) ile verilen kazanç fonksiyonu, J_k 'nın önsel beklenen değeri

$$E[J_k] = \text{trace}[I_{n \times n} + I_{m \times m}] = n + m \quad (3.32)$$

olarak bulunur. Diğer bir deyişle, eğer (3.32) eşitliği sağlanmışsa kazanç en iyidir. Eğer filtre yanlış bir model üzerine kurulmuşsa tahmin ırsayabilir. Bu durum, tahmin işlemi

tamamlandıktan sonra $x_k = \hat{x}_k$ alınarak kontrol edilebilir. Kazanç fonksiyonunda x_k yerine $\hat{x}_k$ alınsın ve kazanç fonksiyonunun hesaplanan değeri de $\hat{J}_k$ ile gösterilsin. Eğer $\hat{J}_k$, $n+m$ önsel tahminine yakınsamıyorsa, J_k kazanç fonksiyonunun $n+m$ değerine yakınsamasını sağlayabilmek için kazanç fonksiyonundaki $P_{k|k-1}^{-1}$ ve R_k matrisleri $\lambda_k^* = \hat{J}_k / (n+m)$ değeri ile çarpılsın. Bu durumun anlamı, (3.4) eşitliğinin

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k|k-1}$$

aynı değerle çarpılması anlamına gelir. Ağırlıklandırılmış P_k matrisi P_k^* ile gösterilirse,

$$P_k^* = \lambda_k^* P_k \quad (3.33)$$

eşitliği elde edilir. Eğer $\hat{J}_k \leq E[J_k]$ koşulu sağlanıyorsa filtrenin uyum gösterdiği (iyi çalıştığı) aksi durumda ıraksadığı söylenebilir. Bu durumu dikkate almak için $\hat{J}_k \leq n+m$ olduğunda yani filtre iyi çalıştığında $\lambda_k^* = 1$ alınır. Görüldüğü gibi bu ağırlıklandırma yöntemine göre Kalman Filtresi eşitliklerinde sadece (3.4) eşitliğinde bir değişiklik olmakta diğer eşitlikler aynı kalmaktadır.

3.4. Gürültü Kovaryanslarının Belirlenmesi ile Kalman Filtresinin Uyarlanması

Modeldeki gürültü terimlerinin kovaryansları gerçek uygulamada genellikle bilinmez. Bu kovaryansların tahmin edilmesi ile ilgili yöntemler gürültü süreçlerinin normal dağılıma sahip olması durumunda; Bayesci, Ençok olabilirlik, İlişki ve Kovaryans Eşleştirme yöntemleri olarak sınıflandırılmıştır (Mehra 1972). Belirsizliğin temel kaynağı gürültü istatistiklerinin önsel olarak bilinmemesi olduğundan bunlar gözlemden elde edilen veri kullanılarak çevrim içi (on-line) tahmin edilebilir. Bu kısımda sadece Mehra (1972) tarafından verilen Kovaryans Eşleştirme yöntemi açıklanmıştır.

Kovaryans Eşleştirme yönteminin temel mantığı artıkların kovaryansının teorik kovaryansları ile tutarlı olacağıdır. Artıklar vektörü,

$$z_k = y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1}$$

olarak alındığında, z_k 'nın teorik kovaryansı,

$$S_k = E[z_k z_k'] = H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k$$

olarak bulunur. Eğer z_k 'nın gerçekleşen kovaryansı teorik kovaryanstan büyükse sistem gürültü kovaryansı Q_k artmalıdır. Bu durum etkisini $P_{k|k-1}$ matrisinde kendisini gösterir ve z_k 'nın gerçekleşen kovaryansının teorik kovaryansa yakınsamasını sağlar. z_k 'nın gerçekleşen kovaryansı onun örneklemde elde edilen

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m z_i z_i'$$

örneklem kovaryansı olarak alınabilir. Burada m istatistiksel yuvarlatma sayısı olmak üzere deneysel olarak seçilebilir. Bu durumda sistem gürültü kovaryansını belirlemek için

$$H_k P_{k|k-1} H_k' + R_k = E[z_k z_k'] \quad (3.34)$$

veya

$$H_k [\Phi_{k-1} P_{k-1|k-1} \Phi_{k-1}' + G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}'] H_k' + R_k = E[z_k z_k'],$$

veya

$$H_k G_{k-1} Q_{k-1} G_{k-1}' H_k' = E[z_k z_k'] - H_k \Phi_{k-1} P_{k-1|k-1} \Phi_{k-1}' H_k' - R_k \quad (3.35)$$

eşitliği kullanılabilir. (3.34) eşitliğinden görüldüğü gibi Q_{k-1} matrisinin tek çözümü, $H_k G_{k-1}$ matrisinin rankı durum vektörünün boyutundan küçükse mevcut değildir. Eğer sistem gürültü sürecinin kovaryansı biliniyorsa ve ölçüm gürültü sürecinin kovaryansı bilinmiyorsa bu yöntem oldukça iyidir. Bu durumda (3.34) eşitliğinden

$$\hat{R}_k = \hat{S}_k - H_k P_{k|k-1} H_k' \quad (3.36)$$

elde edilir. Burada,

$$\hat{S}_k = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (z_i - \bar{z}_i)(z_i - \bar{z}_i)' \quad (3.37)$$

ve

$$\bar{z}_i = \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i z_j \quad (3.38)$$

dır. Kalman Filtresinde çevrim-içi kullanabilmek amacıyla (3.37)-(3.38) eşitlikleri ardışık olarak hesaplanabilir.

Gürültü kovaryanslarını tahmin etmek amacıyla (3.1) eşitliğinde $G_k = I$ durumu için Myers and Tapley (1970) tarafından önerilen algoritma Moghaddamjoo and Kirlin

(1993) tarafından aşağıdaki şekilde özetlenmiştir. Filtreden elde edilen önceki tahminler kullanılarak,

$$\hat{u}_{k-1} = \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} f_{k-j}$$

hesaplanır ve bu yanlışlık terimi (3.7) eşitliğine,

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k|k-1} + \hat{u}_{k-1} + K_k (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} + \hat{u}_{k-1}) \quad (3.39)$$

şeklinde eklenir. Burada,

$$f_k = \hat{x}_k - \Phi_{k-1} \hat{x}_{k-1}$$

ile verilir. Ayrıca f_k , durum gürültü kovaryans matrisi Q_k 'yı tahmin etmek için

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{N_s - 1} \sum_{j=1}^{N_s} (f_{k-j+1} - \hat{u}_k)(f_{k-j+1} - \hat{u}_k)' - \frac{1}{N_s} \sum_{j=1}^{N_s} (\Phi_{k-j} P_{k-j} \Phi_{k-j}' - P_{k-j+1}) \quad (3.40)$$

eşitliği ve benzer biçimde, ölçüm gürültü sürecinin kovaryans matrisini tahmin etmek için de

$$\hat{R}_k = \frac{1}{N_z - 1} \sum_{j=1}^{N_z} (v_{k-j+1} - \hat{r}_k)(v_{k-j+1} - \hat{r}_k)' - \frac{N_z - 1}{N_z} H_{k-j+1} (\Phi_{k-j} P_{k-j} \Phi_{k-j}' + \hat{Q}_{k-j}) H_{k-j+1}' \quad (3.41)$$

eşitliği kullanılır. Burada,

$$v_k = y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} + \hat{u}_{k-1}$$

ve

$$\hat{r}_k = \frac{1}{N_z} \sum_{j=1}^{N_z} v_{k-j+1}$$

dır. Bu matrislerin güçlü tahminleri, Kirlin and Moghaddamjoo (1986) tarafından verilmiştir. Ayrıca gürültü kovaryanslarını tahmin etmek amacıyla, Shellenbarger (1967), Abramson (1968), Sage and Husa (1969) ve Belanger (1974) tarafından önerilen algoritmalar Isaksson (1988) tarafından derlenmiştir.

3.5. Lineer Olmayan Durum-Uzay Modeli ve İlerletilmiş Kalman Filtresi

Bu kısımda, lineer olmayan durum-uzay modeli tanıtımı yapıldıktan sonra, ilerletilmiş Kalman Filtresi ile ilgili ve durum-uzay modelinde yer alan sistem-gözlem matrislerinin bilinmemesi durumunda (sistem belirleme) ilerletilmiş Kalman Filtresi yardımı ile bu matrislerin nasıl tahmin edileceği konusunda açıklama yapılmıştır.

Lineer olmayan durum-uzay modeli,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{H}_k(\mathbf{x}_k)\xi_k \quad (3.42)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{g}_k(\mathbf{x}_k) + \eta_k \quad (3.43)$$

eşitlikleri ile verilir. Burada, $\mathbf{f}_k$ ve $\mathbf{g}_k$ boyutları uygun şekilde seçilmiş vektör değerli fonksiyonları, ξ_k ve η_k sırasıyla $\mathbf{Q}_k$ ve $\mathbf{R}_k$ kovaryans matrisli beyaz gürültü süreçlerini göstermektedir. Lineer olmayan (3.42) ve (3.43) eşitlikleri için 1.dereceden Taylor açılımı ile lineerleştirme yapılarak yaklaşımda bulunulmuş ve bu işlem İlerletilmiş Kalman Filtresi olarak adlandırılmıştır. İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritması,

$$\mathbf{P}_0 = \text{cov}(\mathbf{x}_0)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = E(\mathbf{x}_0)$$

başlangıç değerleri ve $k = 1, 2, \dots$ için

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}_{k-1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \right] \mathbf{P}_{k-1} \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{k-1}}{\partial \mathbf{x}_{k-1}}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \right]' + \mathbf{H}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{H}_{k-1}'(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (3.44)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} = \mathbf{f}_{k-1}(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \quad (3.45)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{x}_k}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right] \left[\left[\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{x}_k}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right] \mathbf{P}_{k|k-1} \left[\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{x}_k}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right]' + \mathbf{R}_k \right]^{-1} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{P}_k = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \left[\frac{\partial \mathbf{g}_k}{\partial \mathbf{x}_k}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}) \right] \right] \mathbf{P}_{k|k-1} \quad (3.47)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k [\mathbf{y}_k - \mathbf{g}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})] \quad (3.48)$$

eşitlikleri ile verilir (Chui and Chen 1991).

İlerletilmiş Kalman Filtresini uygulamak amacıyla, durum-uzay modelindeki matrisler, θ bilinmeyen parametre vektörünü göstermek üzere $\Phi_k(\theta)$, $\mathbf{G}_k(\theta)$, $\mathbf{H}_k(\theta)$

şeklinde θ 'nın bir fonksiyonu biçiminde yazılsın ve θ parametre vektörünün rasgele yürüyüş şeklinde modellendiği kabul edilsin. Bu durumda, model

$$x_{k+1} = \Phi_k(\theta_k)x_k + G_k(\theta_k)w_k \quad (3.49)$$

$$y_k = H_k(\theta_k)x_k + v_k \quad (3.50)$$

ve parametre vektörü,

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \zeta_k \quad (3.51)$$

şeklinde olacağından (3.49) ve (3.51) eşitlikleri yeni bir durum vektörü gibi düşünülüp birleştirilirse yeni oluşan durum-uzay modeli

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_k(\theta_k)x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_k(\theta_k)w_k \\ \zeta_k \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} H_k(\theta_k) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + v_k \quad (3.53)$$

şeklinde lineer olmayan bir modeldir ve bu modele İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulanabilir. (3.51) eşitliğinde, ζ_k beyaz gürültü sürecini göstermektedir ve kovaryans matrisinin $\text{cov}(\zeta_k) = S_k = S > 0$ olduğu kabul edilmiştir. $S = 0$ olması durumunda parametre vektörünün sabit olduğu varsayımı yapılmış olur ve (3.52)-(3.53) eşitlikleri ile verilen lineer olmayan durum-uzay modeline İlerletilmiş Kalman Filtresi uygulandığında parametre vektörü hakkında herhangi bir bilgi elde edilemez. Bu nedenle uygulamada $S > 0$ olarak alınır. İlerletilmiş Kalman Filtresi algoritması eşitlikleri, (3.52)-(3.53) eşitliklerine uygulanırsa

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{\theta}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(x_0) \\ E(\theta_0) \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} \text{cov}(x_0) & 0 \\ 0 & S_0 \end{bmatrix}$$

başlangıç değerlerine bağlı olarak $k = 1, 2, \dots$ için

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{\theta}_{k|k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1}(\hat{\theta}_{k-1})\hat{x}_{k-1} \\ \hat{\theta}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

$$P_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \Phi_{k-1}(\hat{\theta}_{k-1}) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\Phi_{k-1}(\hat{\theta}_{k-1}))\hat{x}_{k-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} P_{k-1} \begin{bmatrix} \Phi_{k-1}(\hat{\theta}_{k-1}) & \frac{\partial}{\partial \theta}(\Phi_{k-1}(\hat{\theta}_{k-1}))\hat{x}_{k-1} \\ 0 & I \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} G_{k-1}(\hat{\theta}_{k-1})Q_{k-1}G_{k-1}(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \\ 0 & S_{k-1} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

$$K_k = P_{k|k-1} \begin{bmatrix} H_k(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \end{bmatrix}' \left[\begin{bmatrix} H_k(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \end{bmatrix} P_{k|k-1} \begin{bmatrix} H_k(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \end{bmatrix}' + R_k \right]^{-1} \quad (3.56)$$

$$P_k = \left[I - K_k \begin{bmatrix} H_k(\hat{\theta}_{k-1}) & 0 \end{bmatrix} \right] P_{k|k-1} \quad (3.57)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{\theta}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k|k-1} \\ \hat{\theta}_{k|k-1} \end{bmatrix} + K_k \left[y_k - \begin{bmatrix} H_k(\hat{\theta}_{k-1})\hat{x}_{k|k-1} \end{bmatrix} \right] \quad (3.58)$$

eşitlikleri elde edilir.

İlerletilmiş Kalman Filtresine örnek olması amacıyla, bilinmeyen katsayı α olmak üzere ele alınan durum-uzay modeli,

$$x_{k+1} = \alpha x_k$$

$$y_k = x_k + v_k$$

şeklinde, $v_k \sim N(0, 0.01)$, $x_0 \sim N(1, 0.01)$, $\zeta_k \sim N(0, 0.01)$ ve

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k + \zeta_k$$

varsayımı yapılsın. Yani bilinmeyen katsayı bir rasgele değişken olarak göz önüne alınsın.

Bu durumda, lineer olmayan durum-uzay modeli,

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ \alpha_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_k x_k \\ \alpha_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_k \end{bmatrix}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ \alpha_k \end{bmatrix} + v_k$$

olmak üzere bu eşitliklere, (3.54)-(3.58) İlerletilmiş Kalman Filtresi eşitlikleri uygulanırsa,

$$P_{k|k-1} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k-1} & \hat{x}_{k-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P_{k-1} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{k-1} & 0 \\ \hat{x}_{k-1} & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.01 \end{bmatrix}$$

$$K_k = P_{k|k-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} P_{k|k-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.01 \right]^{-1}$$

$$P_k = \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - K_k \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right] P_{k|k-1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{a}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{k-1} \hat{x}_{k-1} \\ \hat{a}_{k-1} \end{bmatrix} + K_k [y_k - \hat{a}_{k-1} \hat{x}_{k-1}]$$

eşitlikleri elde edilir.

3.6. Hareketli Bir Cisim İçin Kalman Filtresinin Diğer Uyarlı Filtreler ile Karşılaştırılması

Bu kısımda, ivmesi beyaz gürültü süreci olarak kabul edilen hareketli bir cisim için simülasyon çalışması yapılmış ve Kalman Filtresinin bu modelde nasıl davrandığı gözlemlenmiştir. Bu cisim için (1.23)-(1.24) eşitlikleri ile verilen durum-uzay modelinde örnekleme periyodu $T = 1$ alındığında model,

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} w_k$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + v_k$$

şeklinde olacaktır. Simülasyon çalışmasında gürültü süreçleri için,

$$w_k \sim N(0, 1)$$

$$v_k \sim N(0, 1)$$

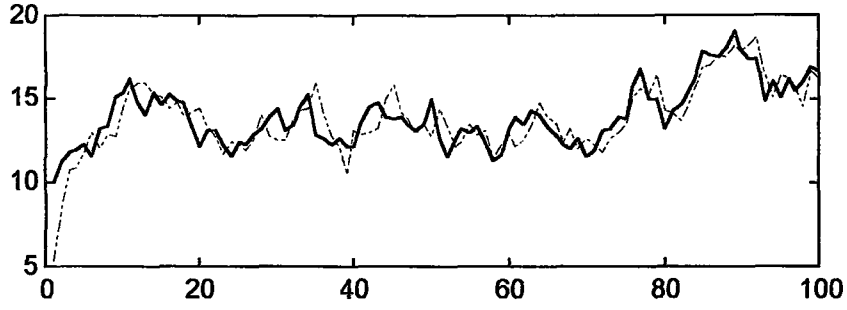
ve başlangıç durumu için,

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

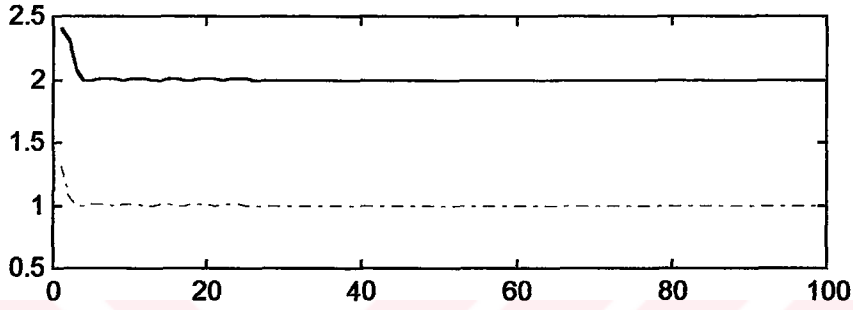
alınmıştır. Model doğru olduğunda, 2 boyutlu durum vektörünün hız bileşeni için hızın gerçek ve tahmin edilen simülasyon değerleri Şekil 3.1. ile, hız için hesaplanan hatanın varyansı da Şekil 3.2. ile verilmiştir. Yanlış model için sistem matrisi olarak,

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix}$$

alındığında hız için elde edilen simülasyon değerleri Şekil 3.3. ile ve Şekil 3.4. ile verilmiştir.

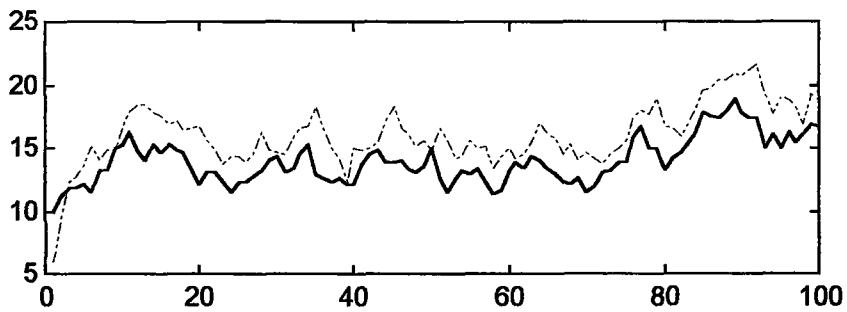


Şekil 3.1. Doğru model için hız ve tahmini. (—) Hız, (---) Hızın tahmini

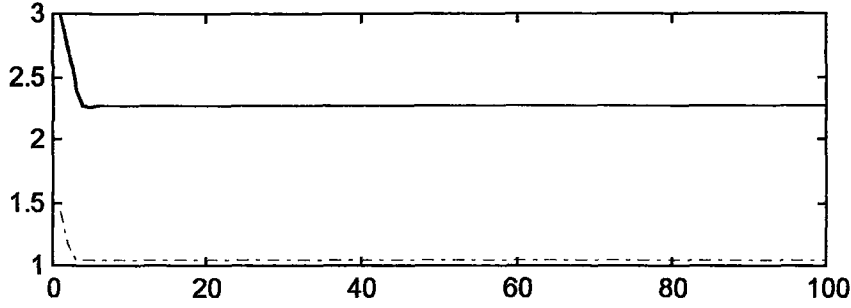


Şekil 3.2. Doğru modelde hız için hatanın varyansı. (—) $P_{k|k-1}$, (-.-.) $P_{k|k}$

Şekillerden de görülebileceği gibi, model doğru olduğunda durumun hız bileşeninin tahmini gerçek değere oldukça yakın çıkmakta, durum matrisindeki çok küçük bir hata olduğunda ise filtreden elde edilen tahminlerin ıraksadığı görülmektedir. Her iki durumda da hatanın varyansları bir kaç adımdan sonra belli bir değere yakınsamaktadır.



Şekil 3.3. Yanlış model için hız ve tahmini. (—) Hız, (---) Hızın tahmini



Şekil 3.4. Yanlış modelde hız için hatanın varyansı. (—) $P_{k|k-1}$, (-.-) $P_{k|k}$

Simulasyonda, filtrenin tutarlılığını test etmek amacıyla birçok test önerilmiştir. Burada, Bar-Shalom and Li (1993) tarafından verilen Normalleştirilmiş Hata Kareleri Normu ile simulasyonlar karşılaştırılmıştır. Hata vektörü,

$$\tilde{x}_k = x_k - \hat{x}_k \quad (3.59)$$

olarak alınırsa Normalleştirilmiş Hata Kareleri Normu (NHKN),

$$\varepsilon_k = \tilde{x}_k^T P_{k|k}^{-1} \tilde{x}_k \quad (3.60)$$

olarak tanımlanır. Modeldeki gürültü terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu varsayılırsa (3.60) eşitliği ile verilen ε_k , serbestlik derecesi n olan Ki-kare dağılımına sahiptir. Yani,

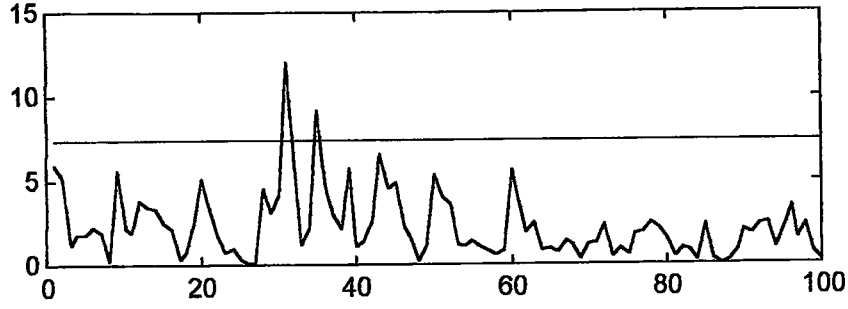
$$E[\varepsilon_k] = n$$

dir. Bunun anlamı, durum tahmin hatalarının filtreden hesaplanan kovaryanslarla tutarlı olmasıdır. Bu düşünce kullanılarak, ε_k için

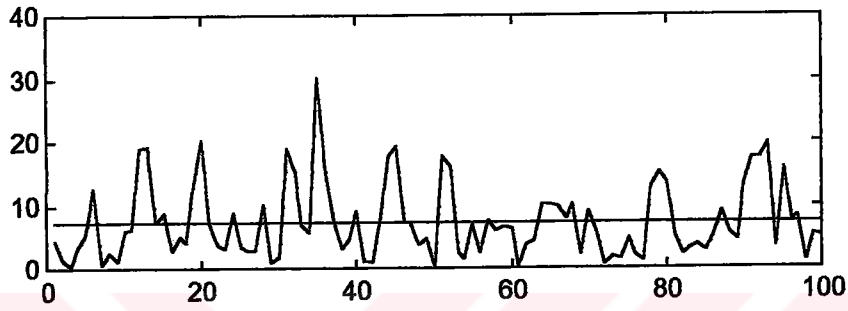
$$P\{\varepsilon_k \in [r_1, r_2] | H_0\} = 1 - \alpha$$

olacak şekilde $[r_1, r_2]$ güven aralığı elde edilir. Burada, H_0 hipotezi filtrenin tutarlı olması anlamındadır. Bu örnek için, $\alpha = 0.05$, $n = 2$ olarak alındığında %95 anlam düzeyinde iki taraflı güven aralığı $[0.05, 7.38]$ olarak bulunur. Filtrenin tutarlı olup olmadığı (3.60) eşitliğinden hesaplanan değerlerin yaklaşık %95'inin bu aralığa düşüp düşmemesiyle söylenir (Bar-Shalom and Li 1993).

Şekil 3.5. ve Şekil 3.6. ile NHKN değerleri, doğru ve yanlış model için verilmiştir. Şekil 3.6.' dan görülebileceği gibi hatalı filtre tutarlı değildir. Yani model sistemi doğru temsil etmemektedir.



Şekil 3.5. Doğru model için NHKN değerleri

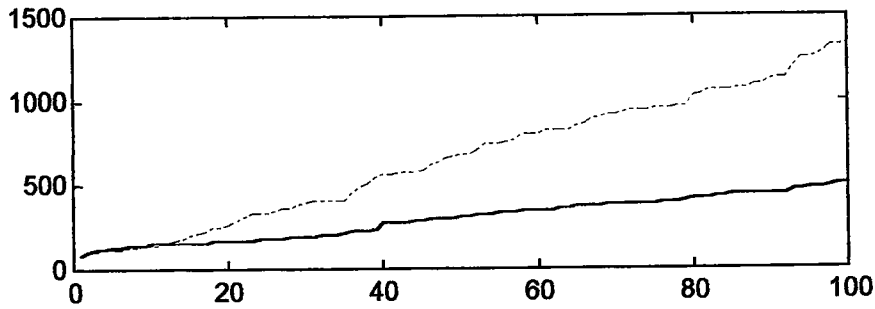


Şekil 3.6. Yanlış model için NHKN değerleri

Algoritmaların performansını karşılaştırmak için,

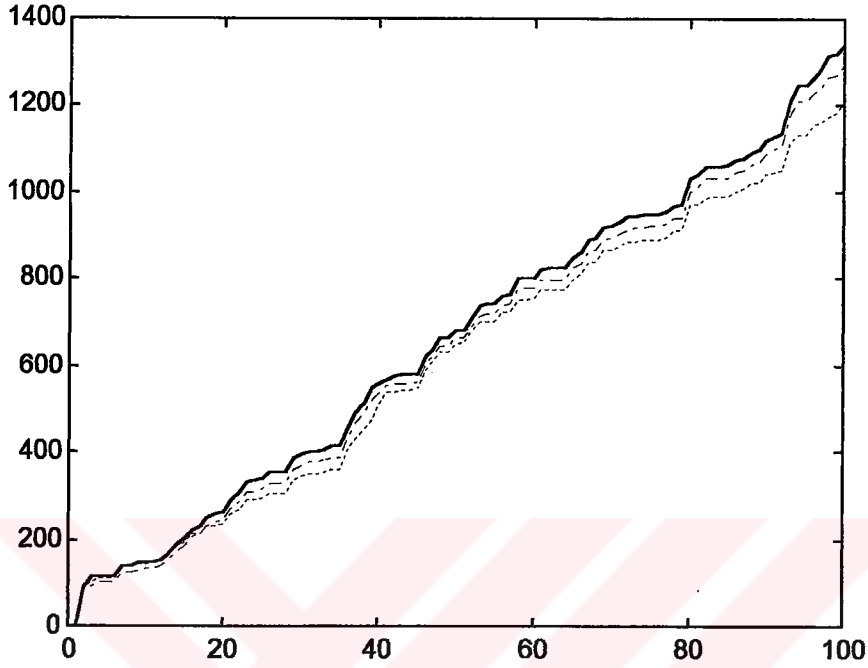
$$AT_n = \sum_{k=1}^n (y_k - H_k \hat{x}_{k|k-1})^2 \quad (3.61)$$

artıkların karelerinin toplamı ölçüsü de kullanılabilir. (3.61) eşitliği, doğru ve yanlış model için hesaplanmış ve Şekil 3.7. ile verilmiştir. Şekil 3.7.' den görülebileceği gibi yanlış modelin artıkların kareleri toplamı doğru modelin artıkların kareleri toplamından daha büyüktür.



Şekil 3.7. Doğru ve yanlış model için artıkların kareleri toplamı. (—) doğru model, (-.-.-) yanlış model

Normal Kalman Filtresini, artıkların kareleri toplamı ölçüsüne göre, Algoritma 3.1 ve alt bölüm 3.3.'de verilen yöntemle ile karşılaştırmak amacıyla, yanlış model için elde edilen artıkların kareleri toplamı Şekil 3.8. ile verilmiştir.



Şekil 3.8. Yanlış model için artıkların kareleri toplamı. (—) NKF,
(-- --) Xia et al.'ın algoritması, (-.-.-) Özbek'in algoritması

Şekilden 3.8.'den görülebileceği gibi, yanlış model için artıkların kareleri toplamı en küçük olan yöntem Özbek (1997) tarafından önerilen algoritmadır. Bununla beraber, Xia et al. (1994) tarafından önerilen algoritmada unutma faktörünün hesaplanması daha çok işlem gerektirmekte, Özbek (1997) tarafından önerilen algoritmada kullanılan ağırlık faktörünün hesabı ise daha az işlem gerektirmektedir.

BÖLÜM IV

SİSTEM BELİRLEME VE OTOMATİK KONTROL

Kontrol işlemleri ile günlük yaşamın hemen her anında karşılaşılır. Kontrol işlemlerinin bir çoğu otomatik biçimde, yani insan girişimi olmadan gerçekleştirilir. Kalorifer, termosifon, şofben, fırın sıcaklığı, depo seviye kontrolü, ekonomik gelişmeyi hızlandırmak için yatırım yapılması gibi uygulamalar kontrol işlemlerine örnek olarak sayılabilir. İnsan vücudunda daha karmaşık ve hassas kontrol işlemleri gerçekleşir. Vücut sıcaklığının ayarlanması, kandaki şeker konsantrasyonunun belli bir değerde tutulması gibi. Günümüzde akla gelebilecek hemen her alanda uygulama sahası bulan otomatik kontrol sistemleri, çağlar boyu bilinçli ya da bilinçsiz olarak kullanılmıştır. Yapılmış olan incelemelerden, teknik yönden gerçekleştirildiği bilinen, bilinçli olarak tasarlanmış en eski otomatik kontrol sistemi, Hellenizm devrinde (M.Ö. 3. yy) su-debi kontrol sistemidir. Cisim, su ve hava etkisiyle oluşturulan seviye kontrol sistemleri; Abbasiler (M.S. 813-850) devrinde Pnömatik aletler ilmi ya da Harika düzenler ilmi adını almıştır. Otomatik kontrol sistemlerinin endüstri uygulamaları 1700'lü senelerde buhar kazanları ile başlamış olup; matematiksel olarak incelenmesi ve sistemlerin kararlılık analizlerine ilişkin pek çok kavramı içeren teorik çalışmalar ise 1860'lı yıllarda başlamıştır.

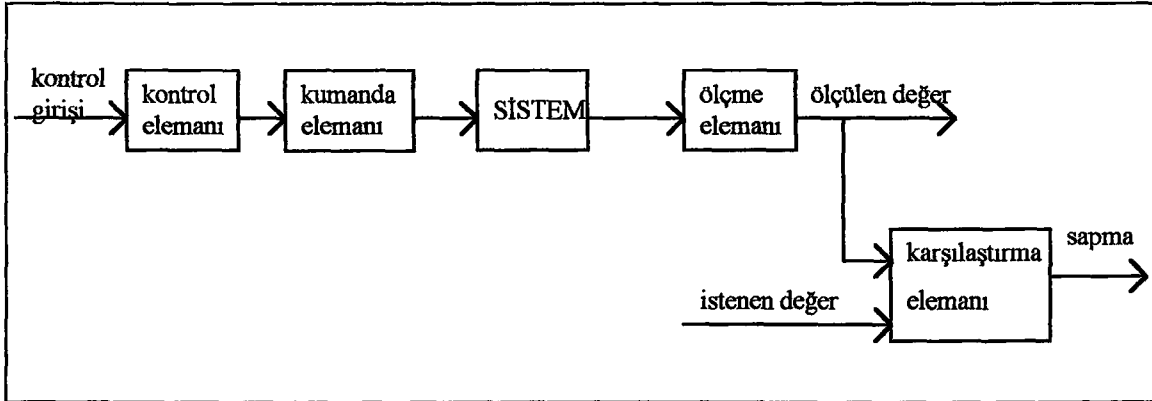
Bilimsel olarak ilk kontrol denemelerine, James Watt'ın buhar makinasında rastlanmaktadır. Watt, buhar yardımıyla ısı enerjisini mekanik enerjiye çevirmiştir. Watt'ın makinasında, buhardan elde edilen basınç yardımıyla tekerlek döndürülmektedir. Buharın bir takım özelliklerine göre tekerleğin dönme hızı değişmektedir. Watt, makinesinin buhar miktarı açısından aşırı yüklenmesinin sonucunda tekerleğin parçalanmasını önlemek için tekeri yavaşlatacak bir fren tertibatı ilave etmiş ve bu fren tertibatı, teknolojiye kullanılan ilk kontrol denemelerinden biri olmuştur.

Günümüzde en basit uygulama alanlarından en karmaşık endüstriyel tesis uygulamalarına kadar her yerde yaygın olarak kullanılan otomatik kontrol sistemleri; temelde tüm fiziksel kimyasal değişkenlerin insan gücüne bağlı olmaksızın denetlenmesi ve kontrol altında tutulması amacına hizmet eder. Endüstri ortamında gerçekleştirilmiş bir

otomatik kontrol sisteminden; sistemin güvenliği ve kararlılığını sağlaması, kolay anlaşılır, tamir edilebilir ve değiştirilebilir olması, sistemin performansını istenen düzeye çıkarması, yatırım ve işletme maliyeti açısından ucuz olması istenir. Sistem elemanlarının seçimi ve ayarı bu ilkeler doğrultusunda yapılır. Bu koşulların gerçekleştirilmesi için kontrol edilecek sistemin yapısının ve dinamik özelliklerinin çok iyi bilinmesi gerekir.

Otomatik kontrol, bir sistemde bir veya birden fazla değişkenin ölçülmesi ve ölçülen bu değişkenlerin istenilen değerlerde amaca uygun olarak sabit tutulmasını sağlamaktadır. Denetim (otomatik kontrol), bir sisteme uygun girdiler vererek onun istenilen davranışı göstermesini sağlamaktır. İnsanın motor sistemi, yani kendi hareketlerini denetleme sistemi bu açıdan ele alınabilir. Aynı şey bir robot için de geçerlidir.

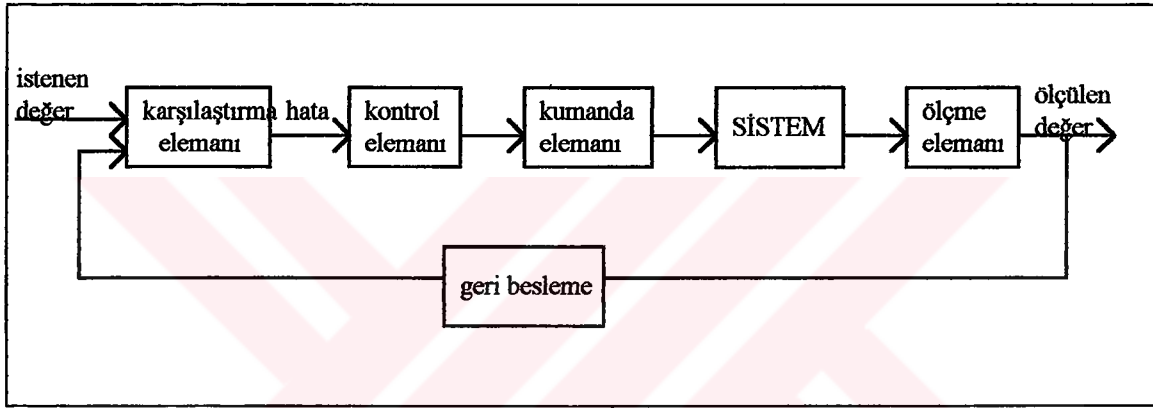
Sistemin gerektirdiği hassasiyette çalışacak, hatayı gereken oranda en aza indirecek çeşitli kontrol türleri mevcuttur. Denetleyici, sonucu kontrol etme gereğini görmüyorsa bu tür denetime açık çevrim denetimi adı verilir ve bu yöntem pek güvenilir değildir. Açık çevrim tanımlı kontrol döngüsünde; kontrol edilen değişken ile kontrolör arasında direk bir bağlantı yoktur. Açık çevrim tanımlı kontrol algoritması Şekil 4.1.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Açık kontrol çevrimi

İstenilen sonuca ulaşılmasını garanti etmek için, gerçekleşen davranışı istenilen davranış, yani referansla karşılaştırmak gerekir. İstenen davranışın ne derece

gerçekleştirdiğini belirlemek için sistemin çıktısı bir sezici (algılayıcı) aracılığıyla ölçülüp geri beslenir. Denetleyici sisteme vereceği komutu, referansla gerçekleşen davranış arasındaki farka, yani hataya bakarak belirler. Bu tür denetime kapalı çevrim denir. Kapalı çevrim denetimi, sistem hakkındaki bilginin hatalı olduğu durumlarda bile görevin başarıyla gerçekleştirilmesini sağlar. İnsanın denetim sistemi de bu sınıfa girer. Kapalı çevrim kontrol döngüsünde kontrol edilen değişkendeki değişimler kontrol cihazına direkt olarak aktarılır. Böylece; düzeltici hareket, kontrol edilen değişkenin kontrol cihazında tanımlı noktaya getirilmesine kadar devam eder. Kapalı çevrim tanımlı kontrol algoritması Şekil 4.2.'de gösterilmiştir.



Şekil 4.2. Kapalı kontrol çevrimi

Denetleyiciler, sisteme verilen komutu (sistem girdisini), hata bilgisinden ne şekilde yararlanarak elde ettiklerine göre sınıflandırılırlar. En basit yaklaşım açık-kapalı denetim adı verilen yöntemdir. Burada, denetleyici, hatanın yalnızca işaretiyle ilgilenmektedir. Bu tür denetim, sürekli açılıp kapanmalara neden olacağından sistemin çıktısı referans değerinin etrafında salınım yapar. Daha gelişmiş bir denetleyici olan orantılı denetleyici, hatanın yalnızca işaretine değil, büyüklüğüne de bakarak sisteme gerekli komutu verir. Hatanın büyüklüğü değil değişim hızı da hesaba katılırsa bu tür denetime orantılı+türev denetimi denir. Bazı durumlarda, sistemin belli girdilere nasıl yanıt verdiği konusunda yeterli bilgi yoksa yukardaki yöntemlerle sistemin referansa ulaşması sağlanamayabilir. Bu durumda kalıcı bir hata olur. Bunu engellemek için o ana kadar oluşmuş hataların tümü hesaba katılırsa bu yöntem orantılı+entegral, türevin de buna eklendiği yöntem orantılı+entegral+türev denetimi adı verilir.

Bu basit yöntemlerin dışında daha fazla yapay zeka içeren yöntemler de kullanılır. Sistemin verilen komutlara nasıl yanıt verdiğine bakılarak sistem modeli geliştirilebilir ya da denetim, çevre koşullarındaki değişimlere ayak uyduracak şekilde yapılabilir. Bu tür yöntemler adaptif (uyarlı) denetim sınıfına girer. Optimal denetim adı verilen yöntemler, bir yandan sistemi referansa ulaştırmaya çalışırken, bir yandan da tanımlanmış bir masraf fonksiyonunu en küçükler. İnsanın karmaşık sistemleri denetlemesini taklit eden, hatta bir sistemin elle denetiminde uzmanlaşmış kişilerin bilgisini bilgisayara aktarmaya yönelik bulanık denetim adı verilen yöntem ile yapay sinir ağları da başarılı denetleyiciler olarak kullanılmaktadır.

Geniş bir görüş açısından bakıldığında, kontrol sistemleri teorisi, Elektrik, Makina, İnşaat v.b. mühendislikleri kapsamına giren sistemlerin kontrolüne uygulanabildiği gibi, çevre sağlığı kontrolünde, toplumsal ve ekonomik olayların kontrolünde, canlıların davranışının incelenmesinde de kullanılabilir. İşte bu nedenle, kontrol teorisi, sadece bir mühendislik dalı ile sınırlı kalmaz (Özdaş vd. 1988, Sarıoğlu 1991, 1992; Albaz 1993, Değirmenci 1994, Albaz et al. 1997, Denizhan 1997).

Bu çalışmada, verilen girdiler karşısında sistemin tepkisine bakılarak sistemin modelinin geliştirilmesi ve oluşturulan bu model üzerinde sistemin kontrol edilmesi yöntemi ele alınmıştır.

4.1. Sistem Belirleme

Bu kısımda, bir sistemin ARX (autoregressive exogenous input) şeklinde modellenmesi durumunda, bu modeldeki parametrelerin tahmin edilmesi ile ilgili yöntemler ele alınmış ve buradaki problemler ile ilgili açıklama yapılmıştır.

Girdisi (kontrol değişkeni) $\{u(t)\}$, çıktısı $\{y(t)\}$ olan bir sistemin

$$y(t) + a_1 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n) = b_1 u(t-1) + \dots + b_m u(t-m) + v(t) \quad (4.1)$$

lineer fark denklemiyle modellendiği kabul edilsin. Burada, $\{v(t)\}$ beyaz gürültü sürecini ve $t = 1, 2, \dots, N$ zaman aralıklarını göstermektedir. (4.1) eşitliği q^{-1} gecikme operatörü; $q^{-1}y(t) = y(t-1)$ kullanılarak

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + v(t) \quad (4.2)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}$$

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_mq^{-m}$$

ve n, m modelin mertebeleri, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ modelin bilinmeyen parametreleridir. (4.1) veya (4.2) modeli girdi ve çıktı arasındaki dinamik ilişkiyi göstermekte ve literatürde ARX (autoregressive exogenous input) modeli olarak bilinmektedir. (4.1) veya (4.2) modeli

$$\theta^T = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$$

$$\phi^T(t) = (-y(t-1), \dots, -y(t-n), u(t-1), \dots, u(t-m))$$

olmak üzere

$$y(t) = \theta^T \phi(t) + v(t) \quad (4.3)$$

şeklinde yazılabilir. Bilinmeyen parametre vektörünün tahmin edilmesi ve sistemi en iyi temsil eden modelin mertebesinin belirlenmesi sistem belirlemede önemli problemlerden ikisidir. Bilinmeyen parametre vektörünün tahmin edilmesi ile ilgili birçok yöntem ve burada karşılaşılan problemler; Ljung and Söderström (1983), Goodwin and Sin (1985), Ljung (1987), Ljung and Gunnarsson (1990) tarafından detaylı olarak ele alınmıştır.

Özellikle sistem parametrelerinin zamanla değiştiği durumlarda tahmin ediciden elde edilen tahminlerin gerçek değerden uzaklaştığı görülmekte, bu nedenle de tahmin edicide bazı düzeltmelerin yapılması gerekmektedir. Model parametrelerinin tahmini için pek çok yöntem kullanılır. Burada sadece En Küçük Kareler (EKK) yöntemi ve Kalman Filtresi üzerinde durulmuştur.

4.1.1. Ağırlıklandırılmış Ardışık En Küçük Kareler Yöntemi (AAEKK)

Eşitlik (4.3) ile verilen modelde, parametreleri tahmin etmek amacıyla

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \beta(N, t) [y(t) - \theta^T \varphi(t)]^2 \quad t = 1, 2, \dots, N \quad (4.4)$$

maliyet fonksiyonu θ 'ya göre minimize edilirse θ 'nın EKK tahmin edicisi,

$$\hat{\theta}(N) = \left[\sum_{t=1}^N \beta(N, t) \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \beta(N, t) \varphi(t) y(t) \right] \quad (4.5)$$

olarak bulunur. Yeni verinin geçmişteki veriye göre daha çok bilgi içereceği varsayımı altında

$$\beta(t, k) = \lambda(t) \beta(t-1, k), \quad 1 \leq k \leq t-1 \quad (4.6)$$

olarak seçilebilir. Bu durumda (6) eşitliği yerine

$$\beta(t, k) = \prod_{j=k+1}^t \lambda(j), \quad \beta(k, k) = 1 \quad (4.7)$$

olarak alınabilir. Eğer her k için $\lambda(k) \leq 1$ ve $\lambda(k) = \lambda$ alınırsa (7) eşitliğinden

$$\beta(t, k) = \lambda^{t-k} \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.4) maliyet fonksiyonunda, (4.8) eşitliği kullanılırsa yeni verilerin maliyet fonksiyonunda etkilerinin daha güçlü eski verilerin etkisinin daha zayıf olacağı varsayımı yapılmış olur. Yani eski veriler unutuluyormuş gibi düşünülebilir. Bu nedenle λ 'ya unutma faktörü adı verilmiştir. (4.5) ile verilen tahmin edici ardışık bir tahmin edici değildir. Ardışık tahmin ediciyi elde etmek için,

$$R(t) = \sum_{k=1}^t \beta(t, k) \varphi(k) \varphi^T(k) \quad (4.9)$$

olarak alınırsa

$$R(t) = \lambda(t) R(t-1) + \varphi(t) \varphi^T(t) \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) eşitlikleri (4.5) eşitliğinde kullanılarak

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(t) &= R^{-1}(t) \left[\sum_{k=1}^{t-1} \beta(t, k) \varphi(k) y(k) + \varphi(t) y(t) \right] \\ &= R^{-1}(t) \left[\lambda(t) \sum_{k=1}^{t-1} \beta(t-1, k) \varphi(k) y(k) + \varphi(t) y(t) \right] \\ &= R^{-1}(t) \left[\lambda(t) R(t-1) \hat{\theta}(t-1) + \varphi(t) y(t) \right] \\ &= R^{-1}(t) \left\{ R(t) \hat{\theta}(t-1) + \varphi(t) [y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \right\} \\ &= \hat{\theta}(t-1) + R^{-1}(t) \varphi(t) [y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \end{aligned} \quad (4.11)$$

ve $P(t) = R^{-1}(t)$ alınıp, (4.10) eşitliğine matris tersi lemması uygulanırsa

$$\begin{aligned}
P(t) &= \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1) - \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1) \varphi(t) \left[\varphi^T(t) \frac{1}{\lambda(t)} P(t-1) \varphi(t) + 1 \right]^{-1} \varphi^T(t) P(t-1) \frac{1}{\lambda(t)} \\
&= \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1) \varphi(t) \varphi^T(t) P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} \right]
\end{aligned} \tag{4.12}$$

elde edilir (Ljung and Söderström 1983, Ljung 1987). Böylece AAEKK algoritması,

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + L(t) [y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t-1)] \tag{4.13}$$

$$L(t) = \frac{P(t-1) \varphi(t)}{\lambda(t) + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} = P(t) \varphi(t) \tag{4.14}$$

$$P(t) = \frac{1}{\lambda(t)} \left[P(t-1) - \frac{P(t-1) \varphi(t) \varphi^T(t) P(t-1)}{\lambda(t) + \varphi^T(t) P(t-1) \varphi(t)} \right] \tag{4.15}$$

olarak verilir.

(4.13)-(4.15) algoritması çoğunlukla sistem parametreleri zamanla değişen sistemler için kullanılır. Algortimadan görülebileceği gibi P matrisi küçüldüğü zaman algoritma kazancı azalmakta, dolayısıyla tahmin gerçek değerden uzaklaşabilmektedir. λ unutma faktörü, bu problemin etkisini ortadan kaldırmak için kullanılır. Zamanla değişen parametrelerin tahmin edilmesi problemi için birçok güçlendirilmiş AAEKK algoritması önerilmiştir.

(4.3) eşitliği ile verilen modelde bulunan parametrelerin zamanla değiştiği durumlarda, bu parametreleri tahmin etmek amacıyla EKK yönteminde çeşitli düzeltmeler yapılmıştır. Özellikle bu yöntemler, unutma faktörünün seçimi ve P matrisinin düzeltilmesi üzerinde yoğunlaşmıştır. Unutma faktörünün ardışık olarak hesaplanması ve P matrisinin düzeltilmesi için değişik bakış açıları kullanılmıştır. Fortescue et al. (1981), Ydstie and Sargent (1986), Chen and Norton (1987), Salgado et al. (1988), Kulhavy (1993), Kulhavy and Zarrop (1993), Kulhavy and Kraus (1996), Wand and Lagnari (1996) unutma faktörü ile ilgili, Sin and Goodwin (1982), Kreisselmeir (1990), Busto et al. (1990), Gunnarsson (1996), Gunnarsson (1997) kovaryans matrisin düzeltilmesi ile ilgili çalışma yapmışlardır. (3) eşitliği ile verilen modelde yer alan gürültü teriminin sınırlı bir dağılıma sahip olması durumunda da en küçük kareler yönteminde değişiklik yapacak birçok yöntem önerilmiştir. Bu durum

özellikle, Dasgupta and Huang (1987), Canudas and Carrillo (1990), Tan et al. (1997) çalışmalarında ele alınmıştır. Lozano (1983), algoritmanın asimtotik yakınsama analizini, Chu and Wu (1987), $\sup|v(t)| \leq \Delta$ durumu için unutma faktörünün seçimini ve yakınsama analizini, Guo (1995), $\lambda(t) = 1$ için algoritmanın geri-beslemeli kontrol ile birlikte yakınsama analizini incelemiştir. Hagglund (1983), Chen and Norton (1987), Beltran (1995), parametrelerdeki değişimi tespit edecek test geliştirmiş ve algoritmada değişiklik yapmıştır.

4.1.2. Unutma Faktörünün Seçimi

Genellikle unutma faktörü λ , 1'e yakın bir değer olarak seçilmekte ve $\lambda = 0.90$, $\lambda = 0.95$ veya $\lambda = 0.99$ olarak alınmaktadır (Goodwin and Sin 1984, Ljung and Söderström 1983, Kumar and Varaiya 1986). Ljung et al. (Ljung and Söderström 1985); $\alpha_0 = 0.99$ ve $\lambda(0) = 0.95$ olmak üzere

$$\lambda(t) = \alpha_0 \lambda(t-1) + (1 - \alpha_0) \quad (4.16)$$

olarak, Astrom (Ljung and Söderström 1985); $\varepsilon(t) = y(t) - \phi^T(t) \hat{\theta}(t-1)$ öngörü hatası, $\bar{\varepsilon}$; $\varepsilon(t)$ 'nin beklenen değeri ve $\alpha = 1/1000$ (oldukça küçük bir sabit) olmak üzere

$$\lambda(t) = 1 - \alpha \frac{\varepsilon(t)^2}{\bar{\varepsilon}^2} \quad (4.17)$$

olarak, Fortescue et al. (Fortescue 1981, Sanoff et al. 1983, Ydstie et al. 1986); Σ_0 küçük bir sabit (örneğin $\Sigma_0 = 0.05$) olmak üzere

$$\lambda(t) = 1 - \frac{[1 - \phi^T(t) L(t)] \varepsilon(t)^2}{\Sigma_0} \quad (4.18)$$

olarak seçilebileceğini önermişlerdir.

4.1.3. Kalman Filtresi ile Parametre Vektörünün Tahmin Edilmesi

Eşitlik (4.3) ile verilen modeldeki parametrelerin tahmin edilmesinde kullanılan yöntemlerden birisi de Kalman Filtresidir.

Bu amaçla parametre vektörü rasgele yürüyüş süreci olarak kabul edilirse, (4.3) eşitliği,

$$\theta(t+1) = \theta(t) + w(t) \quad (4.19)$$

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta(t) + e(t) \quad (4.20)$$

durum-uzay modeli biçiminde yazılabilir. Burada, durum vektörü parametre vektörüdür. $\{w(t)\}$, $\{e(t)\}$ beyaz gürültü süreçlerini göstermekte,

$$E[w(t)w^T(s)] = R_1(t)\delta_{ts}$$

$$E[e(t)e(s)] = R_2(t)\delta_{ts}$$

$$E[w(t)e(s)] = 0$$

$$E[\theta(0)] = \bar{\theta}(0)$$

$$E[(\theta_0 - \bar{\theta}_0)(\theta_0 - \bar{\theta}_0)^T] = P(0)$$

ve $\theta(0)$ 'ın $w(t)$ ve $v(t)$ 'den bağımsız olduğu varsayılmıştır. Sistem geçiş matrisi birim matristir.

(4.19)-(4.20) eşitliklerinde gözlenemeyen $\theta(t)$ durumunun, $y(t), y(t-1), \dots, y(1)$ gözlemlerini kullanarak tahmin edilmesi problemi Filtreleme olarak bilinir. $\hat{\theta}(t|t-1)$; $y(t-1), \dots, y(1)$ verildiğinde $\theta(t)$ 'nin en küçük varyanslı tahminini göstermek üzere bu durumda Kalman Filtresi,

$$\hat{\theta}(t|t-1) = \hat{\theta}(t-1|t-1) \quad (4.21)$$

$$\hat{\theta}(t|t) = \hat{\theta}(t|t-1) + K(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t|t-1)] \quad (4.22)$$

$$K(t) = P(t|t-1)\varphi(t)[\varphi^T(t)P(t|t-1)\varphi(t) + R_2(t)]^{-1} \quad (4.23)$$

$$P(t+1|t) = P(t) + R_1(t) \quad (4.24)$$

$$P(t) = [I - K(t)\varphi^T(t)]P(t|t-1) \quad (4.25)$$

eşitlikleri ile verilir.

Hagglund (1983), (4.3) modelindeki parametrelerin değişimini tespit eden bir test önermiş ve buna dayalı olarak Kalman Filtresinde düzeltme yapmıştır. Beltran (1995), (3) modelinin bir özel durumu için (sistem girdisinin olmaması durumu için) parametredeki değişimi tespit eden bir test önermiş ve filtrede düzeltme yapmıştır. Filtrenin çevrim-içi kullanıldığı göz önüne alınırsa, yapılan düzeltme işlemlerinin çok az hesaplama ile gerçekleştirilmesi önem kazanmaktadır.

4.2. Geri Beslemeli Kontrol

t anında geri-beslemeli u_t kontrolü $\{y(0), \dots, y(t), u(0), \dots, u(t-1)\}$ değerlerine bağlı olarak

$$J_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t [y(i) - y^*(i)]^2 \quad (4.26)$$

fonksiyonu en küçüklenerek oluşturulur ve

$$u_t = \frac{1}{\hat{b}_{1,t}} [\hat{a}_{1,t} y_t + \dots + \hat{a}_{n,t} y_{t-n+1} - \hat{b}_{2,t} u_{t-1} - \dots - \hat{b}_{m,t} u_{t-m+1} + y_{t+1}^*] \quad (4.27)$$

ile verilir. Bu yöntem geri-beslemeli kendini uyarlayabilen en küçük varyanslı denetim yöntemi olarak bilinir. Burada; $\{y_i^*\}$, i .andaki sistem çıktısının hedeflenen değerini (referans değeri) ve $\hat{a}_{1,t}, \dots, \hat{a}_{n,t}, \hat{b}_{1,t}, \dots, \hat{b}_{m,t}$ t .andaki tahminleri göstermektedir (Aström and Wittenmark 1973, Kumar and Varaiya 1986, Guo 1995).

4.3. Simulasyon Çalışması

Bu kısımda, (4.2) modeli ele alınmış ve parametrenin zamanla değiştiği durumda, AAEKK yönteminin işleyişini görmek amacıyla, unutma faktörünün değişik değerleri kullanılarak parametre tahmini için simulasyon çalışması yapılmıştır. Ayrıca yine bu model için, (4.21)-(4.25) eşitlikleri ile verilen Normal Kalman Filtresini (NKF), Bölüm 3.3.'de verilen düzeltilmiş Kalman Filtresi (DKF) ile karşılaştırmak amacıyla simulasyon çalışması yapılmıştır.

Simulasyon çalışması için ele alınan model,

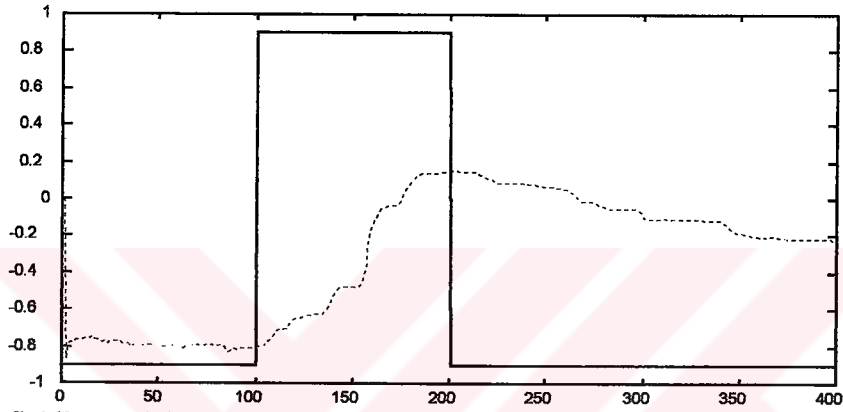
$$y(t) = \alpha_1(t)y(t-1) + v(t) \quad (4.28)$$

şeklinde olsun. Burada, $v(t) \sim N(0,1)$, $y(0) = 10$, $\hat{\theta}(0) = 0$, $P(0) = 1$ ve

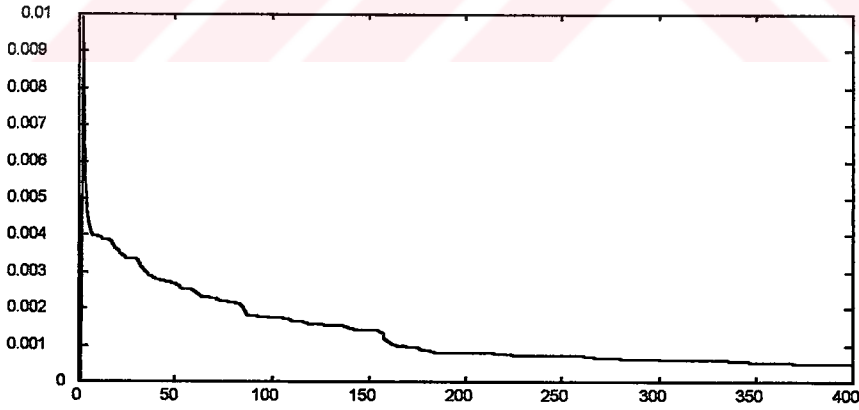
$$\alpha_1(t) = \begin{cases} -0.9, & 1 \leq t \leq 100 \\ 0.9, & 101 \leq t \leq 200 \\ -0.9, & 201 \leq t \leq 400 \end{cases}$$

olarak alınmıştır. (4.13)-(4.15) eşitlikleri ile verilen AAEEKK yönteminde $\lambda = 1$ alındığında algorithmadan elde edilen tahmin değerleri, P matrisi ve artıklar Şekil 4.3., Şekil 4.4. ve Şekil 4.5.'de verilmiştir.

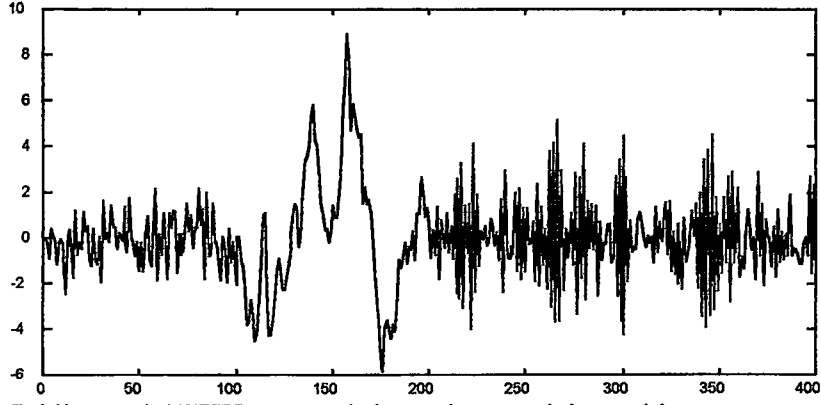
Şekil 4.3.'den görüldüğü gibi $\lambda = 1$ durumunda parametrenin tahmin değerleri gerçek değerlerden uzaklaşmaktadır. Yani algoritma bu değişimi izleyememektedir. Şekil 4.4.'den görülebileceği gibi P matrisi sıfıra gitmekte yani algorithmadan elde edilen kazanç azalmaktadır.



Şekil 4.3. AAEEKK yöntemi ile parametre tahmini $\lambda = 1$.

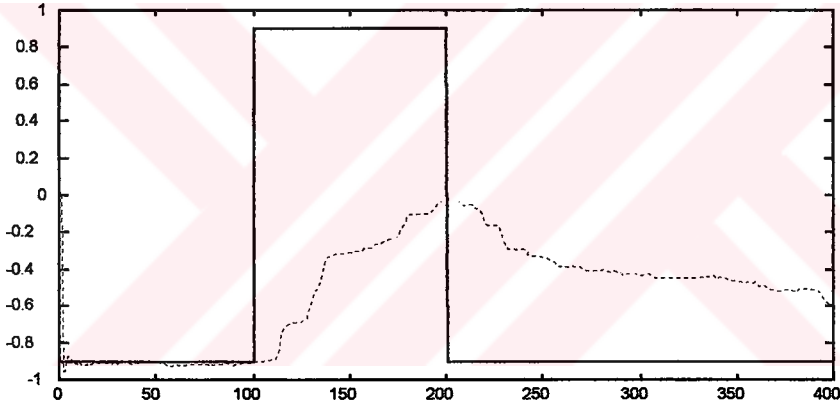


Şekil 4.4. AAEEKK yöntemi $\lambda = 1$ durumu için P matrisi.

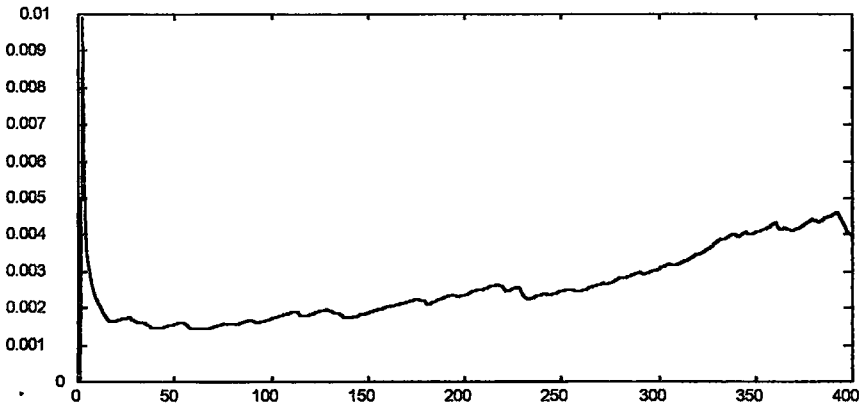


Şekil 4.5. AAEKK yöntemi $\lambda = 1$ durumu için artıklar.

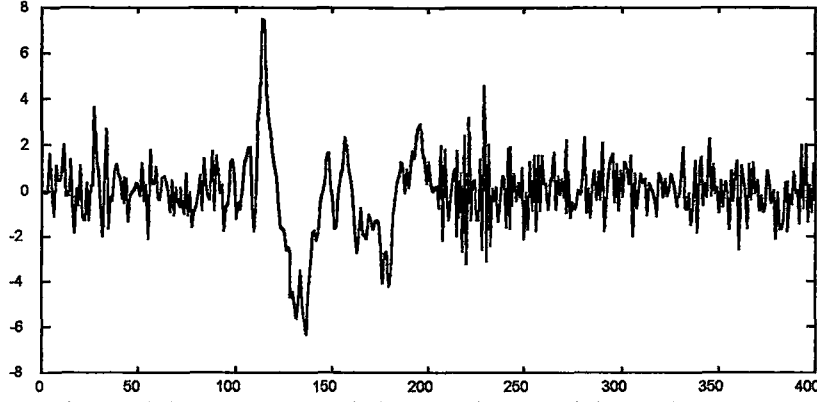
$\lambda = .99$ alındığında algorithmadan elde edilen tahmin değerleri, P matrisi ve artıklar Şekil 4.6., Şekil 4.7. ve Şekil 4.8.'de verilmiştir. Şekil 4.6. ile Şekil 4.3. karşılaştırılırsa tahminde küçük bir iyileşme olduğu görülmektedir. Yine Şekil 4.7. ile Şekil 4.4. karşılaştırılırsa P matrisinin sıfıra gitmediği fakat sıfıra çok yakın çıktığı görülür.



Şekil 4.6. AAEKK yöntemi ile parametre tahmini $\lambda = .99$.

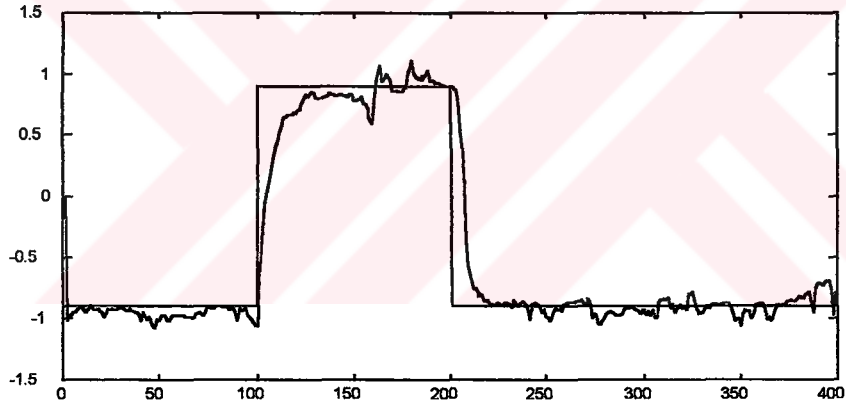


Şekil 4.7. AAEKK yöntemi $\lambda = .99$ durumu için P matrisi.

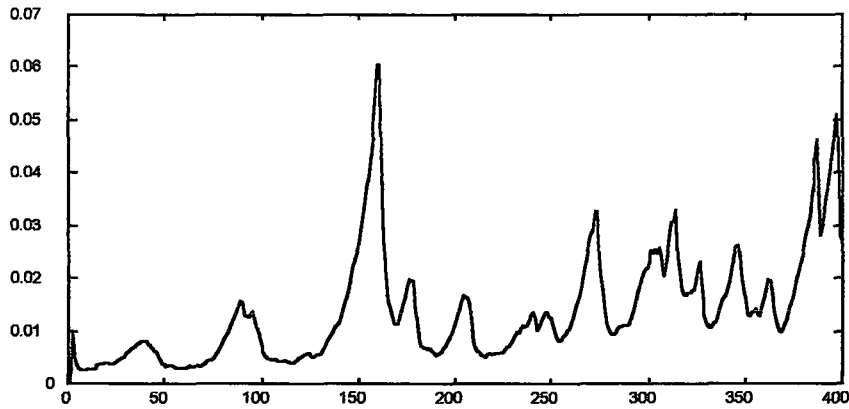


Şekil 4.8. AAEKK yöntemi $\lambda = 0.99$ durumu için artıklar.

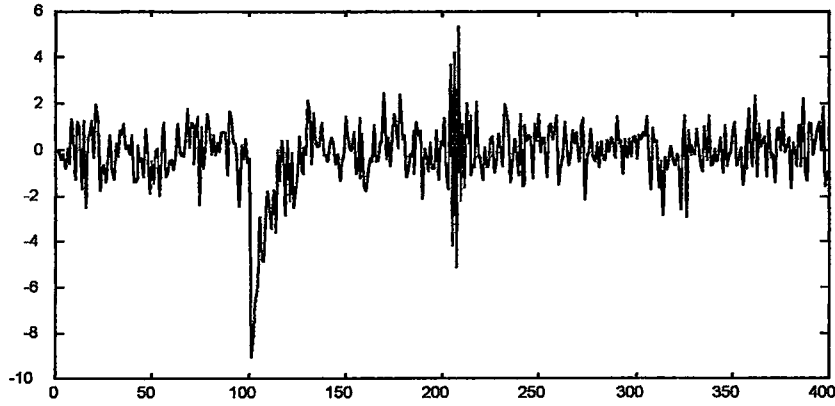
$\lambda = 0.9$ alındığında algorithmadan elde edilen tahmin değerleri, P matrisi ve artıklar Şekil 4.9., Şekil 4.10. ve Şekil 4.11. de verilmiştir. Şekil 4.9.'dan görülebileceği gibi parametre tahminleri oldukça iyileşmektedir. Şekil 4.10.'dan görülebileceği gibi P matrisi diğer durumlardan daha büyük çıkmıştır.



Şekil 4.9. AAEKK yöntemi ile parametre tahmini $\lambda = 0.9$

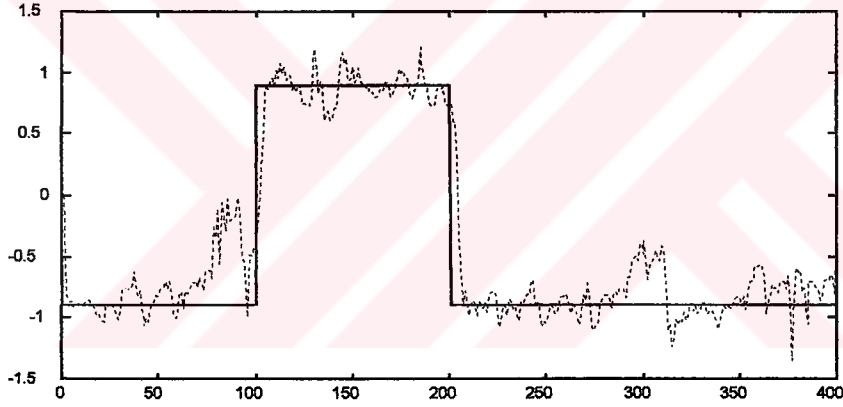


Şekil 4.10. AAEKK yöntemi $\lambda = 0.9$ durumu için P matrisi.

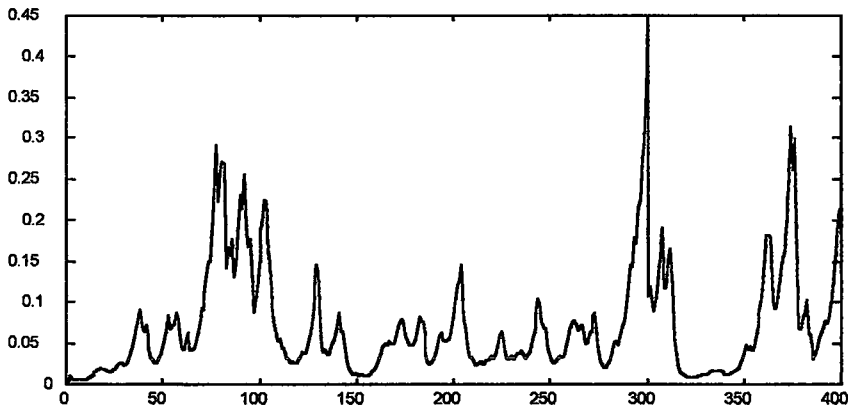


Şekil 4.11. AAEKK yöntemi $\lambda = 9$ durumu için artıklar.

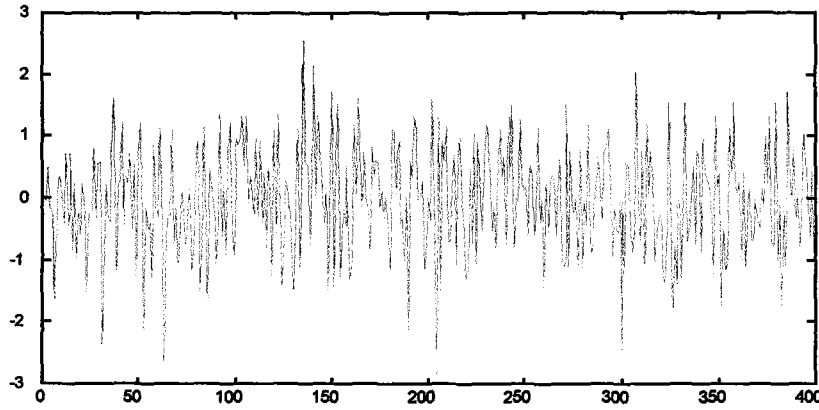
$\lambda = 8$ alındığında alitmadan elde edilen tahmin değeri, P matrisi ve artıklar Şekil 4.12., Şekil 4.13. ve Şekil 4.14.'de verilmiştir. Şekil 4.12.'den görülebileceği gibi algoritma değişimi izleyebilmekte fakat gerçek değer etrafında büyük salınımlar yapmaktadır. Şekil 4.13.'den görülebileceği gibi P matrisi oldukça büyümüşür.



Şekil 4.12. AAEKK yöntemi ile parametre tahmini $\lambda = 8$



Şekil 4.13. AAEKK yöntemi $\lambda = 8$ durumu için P matrisi.



Şekil 4.14. AAEKK yöntemi $\lambda = 0.8$ durumu için artıklar.

Bölüm 3.3.'de verilen DKF ve NKF arasındaki fark sadece (4.25) eşitliğindedir. (4.25) eşitliği yerine

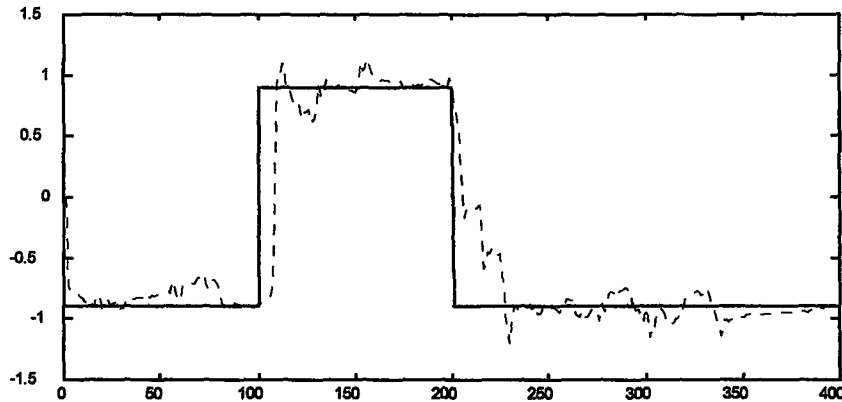
$$P^*(t) = \lambda^*(t)P(t) \quad (4.29)$$

eşitliği alınmıştır. Burada, n -durum, r -gözlem vektörünün boyutu olmak üzere

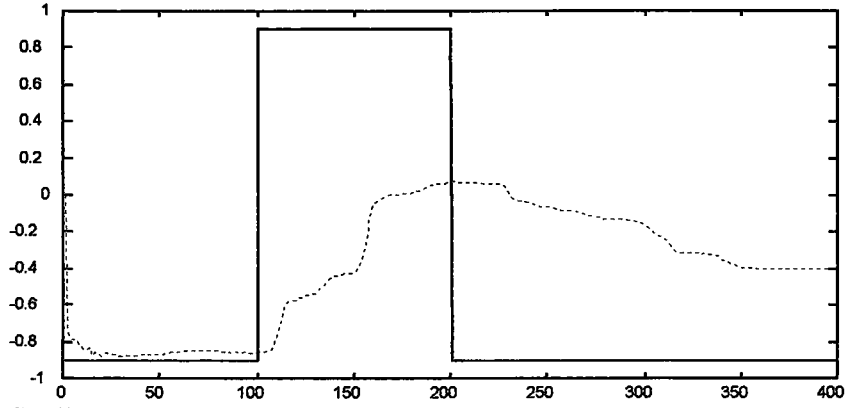
$$\lambda^*(t) = \left[\left[\hat{\theta}(t|t) - \hat{\theta}(t|t-1) \right]^T P^{-1}(t|t-1) \left[\hat{\theta}(t|t) - \hat{\theta}(t|t-1) \right] + \left[y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t|t) \right]^T R_2^{-1}(t) \left[y(t) - \varphi^T(t) \hat{\theta}(t|t) \right] \right] / (n+r) \quad (4.30)$$

dır. Eğer $\lambda^*(t) \leq 1$ ise $\lambda^*(t) = 1$ olarak alınacaktır.

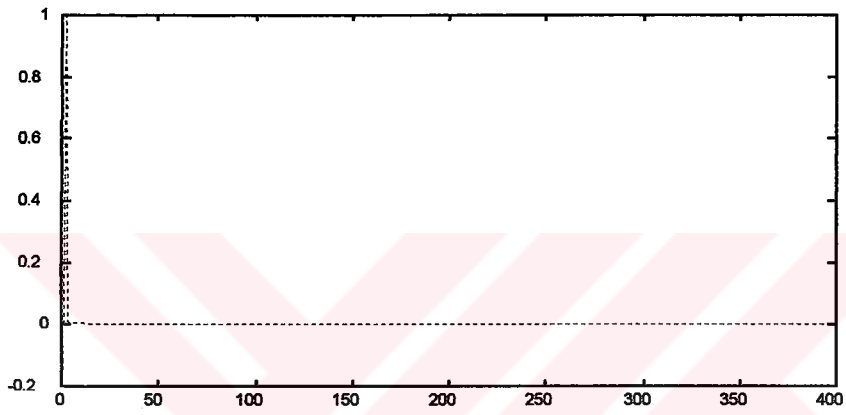
(4.27) eşitliği ile verilen model üzerinde NKF'ni DKF ile karşılaştırmak amacıyla elde edilen tahmin değerleri, P matrisi ve artıklar Şekil 4.15.-Şekil 4.20. ile verilmiştir. Şekil 4.15. ile Şekil 4.16. karşılaştırılırsa DKF'nin NKF'den daha iyi sonuç verdiği görülür. Şekil 4.17. ile Şekil 4.18. karşılaştırılırsa NKF'de P sıfıra gitmekte DKF'de sıfıra gitmemektedir. Şekil 4.19. ile Şekil 4.20 karşılaştırılırsa NKF'de artıkların DKF'deki artıklardan daha büyük çıktığı görülür.



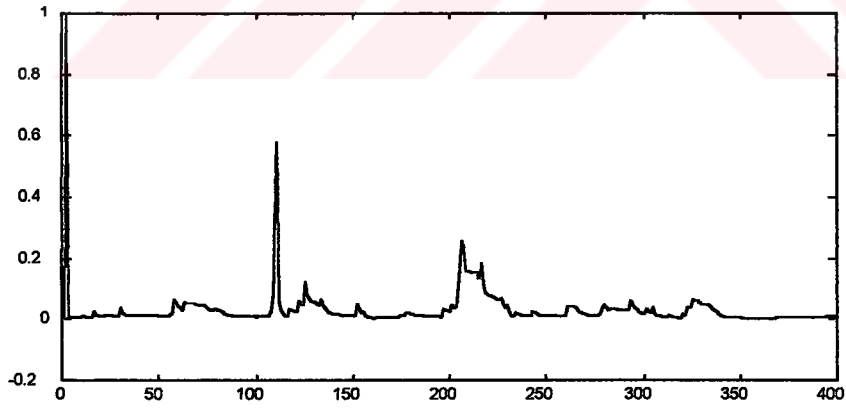
Şekil 4.15. DKF ile parametre tahmini.



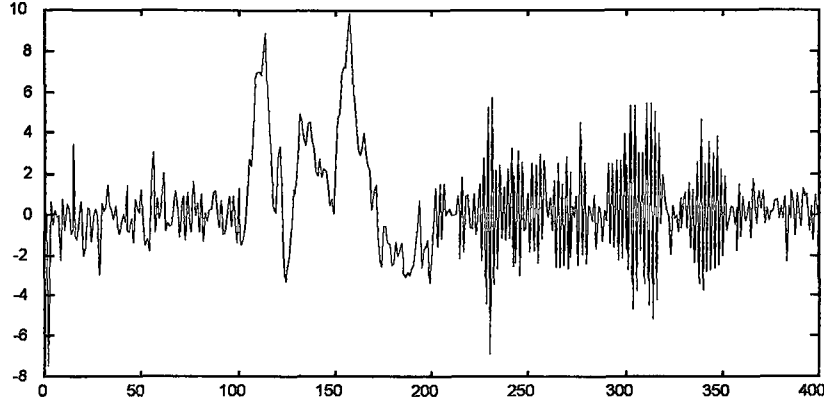
Şekil 4.16. NKF ile parametre tahmini



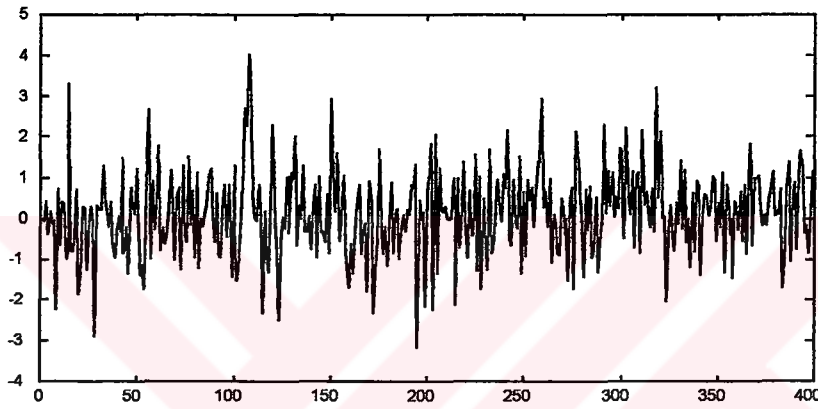
Şekil 4.17. NKF ile elde edilen P değerleri



Şekil 4.18. DKF ile elde edilen P değerleri



Şekil 4.19. NKF ile elde edilen artıklar.



Şekil 4.20. DKF ile elde edilen artıklar.

AAEKK yönteminde, unutma faktörünün algoritma çalışmaya başlamadan seçilmesi gerekmektedir. Simulasyon çalışmasından da görüldüğü gibi unutma faktörünün değişik seçimleri algoritmanın farklı sonuçlar vermesine neden olmakta, hangi seçimin iyi olduğu önceden bilinmemektedir. DKF’de kovaryans matrisin ağırlıklandırılması, algoritmanın kendi kendisi tarafından ayarlanmaktadır, önceden herhangi bir seçime gerek yoktur. Ağırlıklandırma işlemi diğer yöntemlere göre daha az işlem gerektirdiğinden, bu model için DKF, diğer yöntemlere göre tercih edilebilir.

4.4. Bilgisayar Destekli Sıcaklık Kontrolü

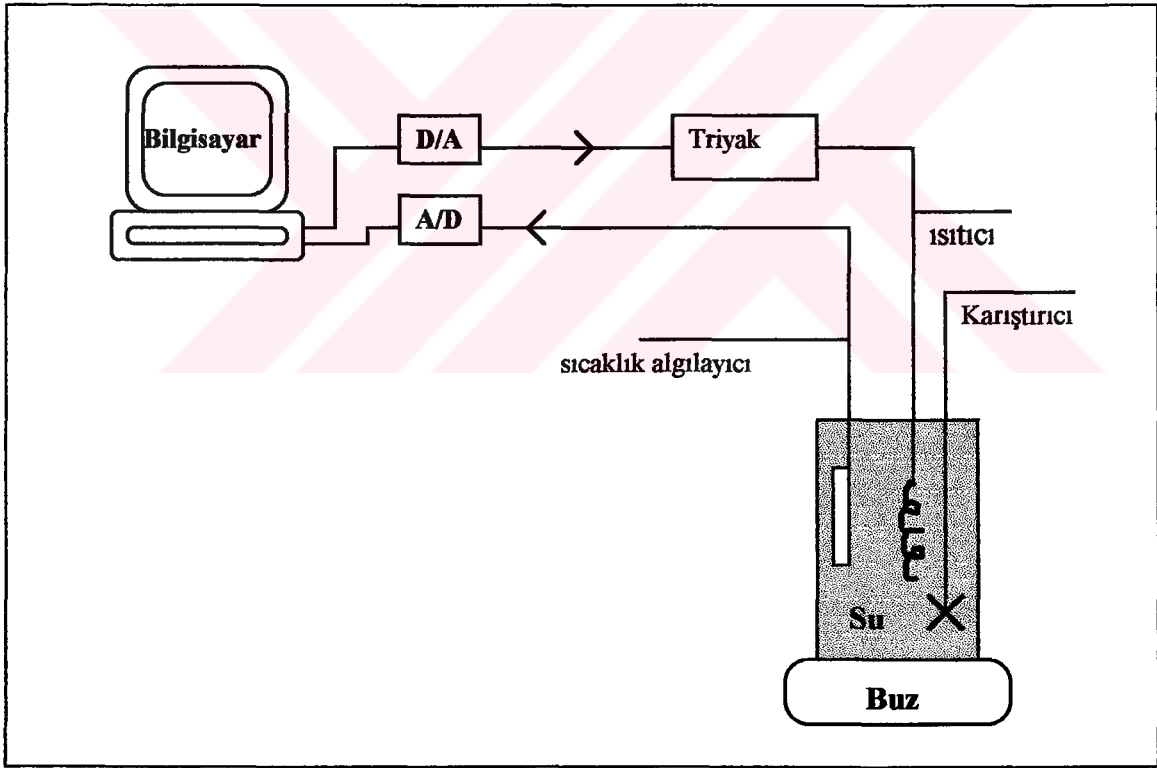
Plastik bir kovanın içerisinde başlangıçta 25 °C’de bulunan 8 litrelik su, buz dolu bir kabın içerisine oturturulmuştur. Amaç suyun sıcaklığını 37.43 °C’de tutmaktır. Bu amaçla deney düzeneğini oluşturan otomatik kontrol sisteminde bulunan parçalar şunlardır: Suyun sıcaklığını okumak ve bilgisayara sayısal olarak aktarmak için bir A/D

çevirici ve sıcaklık algılayıcı (LM 335 sıcaklık sensörü) bulunmaktadır. Suyun sıcaklığını arttırmak için 1500 Watt'lık bir ısıtıcı, ısıtıcıya istenilen sinyali göndermek amacıyla D/A çevirici ve bilgisayardan çıkan voltajı 0-220 Volt arasına çevirecek triyak modülü bulunmaktadır. Su dolu kabın içerisinde ısının yayılmasını sağlamak amacıyla da karıştırıcı mevcuttur.

Sistem en küçük varyanslı geri-beslemeli denetim kuralına göre çevrim-ichi (on-line) kontrol edilmiştir. Sistemin,

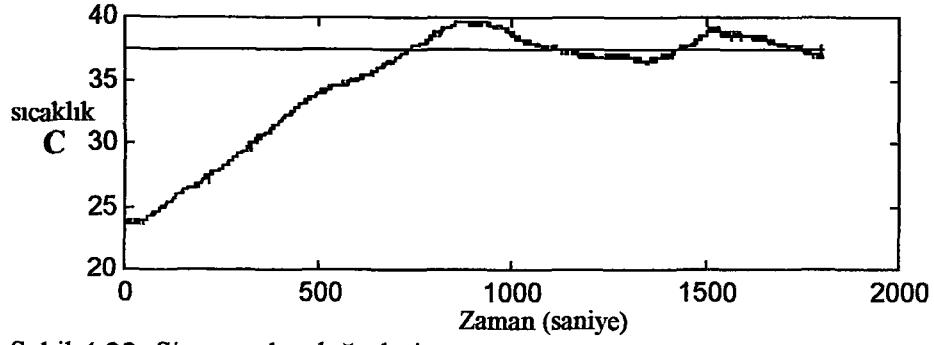
$$y(t) = a(t)y(t-1) + u(t-1) + v(t) \quad (4.31)$$

eşitliği ile modellendiği varsayımı altında, $a(t)$ parametresini tahmin etmek amacıyla (4.29) ve (4.30) eşitlikleri ile ayarlanan uyarlı Kalman filtresi kullanılmış ve kontrol sinyali de (4.27) eşitliği kullanılarak hesaplanmıştır. Örnekleme aralığı olarak 1 saniye alınmıştır. Deney sistemi Şekil 4.21.'de gösterilmiştir.

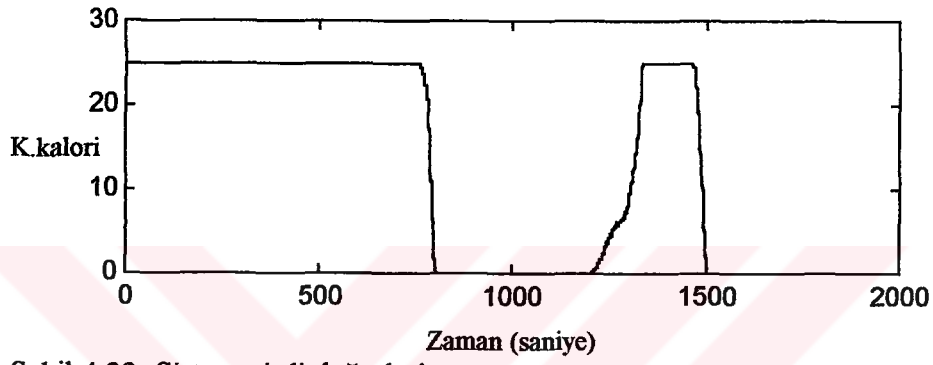


Şekil 4.21. Sıcaklık kontrolü deney sistemi.

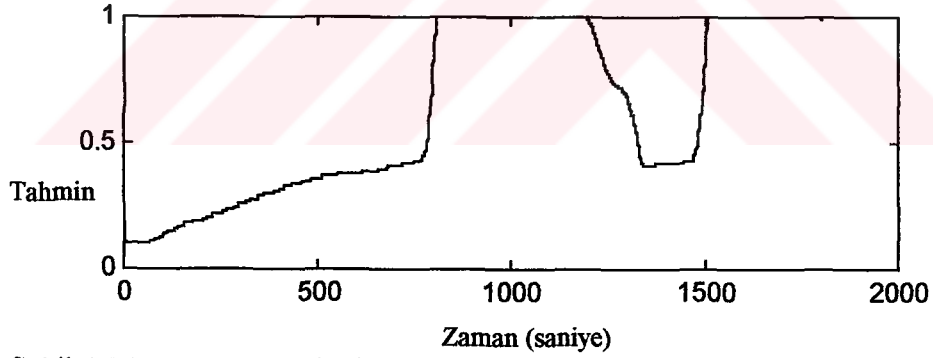
En küçük varyanslı geri-beslemeli kontrol kuralına göre elde edilen çıktı ve girdi değerleri Şekil 4.22. ve Şekil 4.23. ile verilmiştir. Şekil 4.24.'de parametre tahmini gösterilmiştir.



Şekil 4.22. Sistem çıktı değerleri.



Şekil 4.23. Sistem girdi değerleri.



Şekil 4.24. Parametre tahmini değerleri.

Şekil 4.22.'den görülebileceği gibi sistemin çıktısı referans değer etrafında az bir salınım yapmaktadır. Bu salınımı daha da azaltmak için çıktı ve girdi değerlerinin farklı gecikmelerini dikkate alan model kullanılarak kontrol yapılabilir. Burada basitlik olması amacıyla (4.31) eşitliği sistemin modeli olarak alınmıştır.

SONUÇ VE TARTIŞMA

Çalışmanın birinci bölümünden görülebileceği gibi, kesikli-zaman durum-uzay modelleri pek çok sürecin modellenmesinde kullanılabilmekte ve bu nedenle de çeşitli alanlarda uygulama olanağı bulmaktadır. Yine birinci bölümde, durum vektörünün tahmini için geliştirilen çeşitli yöntemler incelenmiş ve Kalman Filtresi değişik optimizasyon ölçütlerine göre elde edilmiştir.

İkinci bölümde, Kalman Filtresi için verilen Merkezi Limit Teoremi incelenmiş, Merkezi Limit Teoreminde yakınsama hızları verilmiş ve bu yakınsama hızları yardımıyla model geçerliliğini test etmek için bir yöntem geliştirilmiştir. Merkezi Limit Teoreminin üzerindeki bazı koşullar (kontrol edilebilme, gözlemlenebilme ve sistem matrisi üzerindeki bazı koşullar gibi) kaldırılarak Merkezi Limit Teoreminin verilmesi, üzerinde çalışılacak konulardan birisidir. Yine çok boyutlu durum için yakınsama hızları üzerinde de çalışılabilecek konulardandır. Normal Kalman Filtresi için verilen Merkezi Limit Teoremi ve yakınsama hızları ile ilgili bu özellikler İlerletilmiş Kalman Filtresi için de çalışılabilir.

Modelin hatalı oluşturulması durumunda, Kalman Filtresinde ortaya çıkan ıraksama probleminin giderilmesi için birçok yöntem geliştirilmiş olmakla beraber modeldeki tüm hatalı durumları dikkate alan bir algoritmanın bulunmadığı üçüncü bölümden görülmektedir. Kalman Filtresinin ıraksamasını ortadan kaldırabilecek yöntemlerin geliştirilmesi ve bunların yakınsama analizlerinin yapılması için de çalışılabilir.

Son bölümde, sistem belirleme ve otomatik kontrol ile ilgili açıklama yapılmıştır. Bu bölümden görülebileceği gibi, tahmin süreci ile kontrol süreci birbirine bağlıdır. Kontrol işleminin istenilen biçimde olması tahmin işleminin doğruluğuna bağlıdır. Bu nedenle bir sistemin kontrol edilmesi sürecinde tahmin işlemi büyük bir yer tutar. Geribeslemeli kontrol ile birlikte tahmin edicinin yakınsama analizinin incelenmesi de üzerinde çalışılacak konulardandır.

KAYNAKLAR

- Aliev, F. A. and Özbek, L. 1996.** Kalman Filtresi için Merkezi Limit Teoreminde Yakınsama Hızlarının Değerlendirilmesi. Araştırma Sempozyumu '96 Bildirileri, s., 182-185, Ankara.
- Aliev, F. A. and Özbek, L. 1997.** Evaluation of Convergence Rate in the Central Limit Theorem for the Kalman Filter. IEEE Trans. Auto.Control., Sunuldu.
- Alpbaz, M. 1993.** Proses Kontrol. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, No: 12.
- Alpbaz, M., Zeybek, Z., Özbek, L., Aliev, F. A. 1997.** A Fuzzy Model Based Control of Well Mixed Reactor with Cooling Jacket. Lecture Notes in Computer Science Theory and Applications. International Conference, 5th Fuzzy Days, Germany.
- Anderson, B. D. O. and Moore, J. B. 1979.** Optimal Filtering. Prentice Hall.
- Ansley, C. F. and Kohn, R. 1983.** Exact likelihood of vector autoregressive moving average process with missing or aggregated data. Biometrika, 70; 275-278.
- Aström, K. J. and Wittenmark, B. 1973.** On Self-tuning Regulators. Automatica, Vol.9; 185-199.
- Bar-Shalom, Y. and Li, X. 1993.** Estimation and Tracking Principles, Techniques and Software. Artech House.
- Beltran, N. D. R. 1995.** Autoregressive and adaptive estimation with an application to hurricane track prediction. Int.J.Control, Vol.26; 1791-1812.
- Busto, R., Wellstead, P. E., Zarrop, M. B. 1990.** Parameter transient tracking for recursive estimation. IEE Proceedings, Vol. 138; 68-74.
- Bryson, A. E. and Ho, Y. C. 1969.** Optimization, Estimation and Control. Ginn and Company.
- Canudas, C., Carrillo, J. 1990.** A Modified EW-RLS Algorithm for Systems with Bounded Disturbances. Automatica, Vol. 26; 599-606.
- Chen, G. 1993.** Approximate Kalman Filtering. World Scientific.
- Chen, M. J. and Norton, J. P. 1987.** Estimation technique for tracking rapid parameter changes. Int.J.Control, Vol. 45; 1387-1398.
- Chu, Y. T. and Wu, W. 1987.** Bounded-disturbance adaptive control with exponential and selective data weightings. Int.J.Control, Vol.45; 1399-1413.

- Chui, C. K. and Chen, G. 1991.** Kalman Filtering with Real-time Applications. Springer-Verlag.
- Chow, H. 1994.** Robust Estimation in Time Series: An Approximation to the Gaussian Kalman Filter. Commun. Statist. Theory Meth. Vol. 23; 3491-3505.
- Chow, G. C. 1975.** Analysis and Control of Dynamic Economic Systems. Hohn Wiley.
- Chow, Y. S. and Teicher, H. 1988.** Probability Theory. Springer-Verlag.
- Cipra, T. 1997.** Recursive Methods for Time Series. ISI '97. Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings Book 2, 455-456, İstanbul.
- Cipra, T. and Romera, R. 1997.** Kalman Filter with outliers and missing observations. TEST, 6; 379-395.
- Dasgupta, S. and Huang, Y. 1987.** Asymtotically Convergent Modified Recursive Least Squares with Data-Dependent Updating and Forgetting Factor for Systems with Bounded Noise. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 33; 383-392.
- Davis, M. H. A. and Vinter, R. B. (1985).** Stochastic Modelling and Control. Chapman and Hall.
- Denizhan, Y. 1997.** Bilgisayar ve Beyin, Bilgisayarın Giriş ve Çıkış Kanalları, Nar Yayınları, s. 39-51.
- Değirmenci, M. 1994.** Genel Otomatik Kontrol Kavramları ve Sistemleri. Termodinamik, s., 53-57.
- Deyst, J. J. 1973.** Corrections to "Conditions for Asymtotic Stability of the Discrete Minimum Variance Linear Estimator". IEEE Trans. Aut. Cont., 18(5); 562-563.
- Diderrich, G.T. 1985.** The Kalman Filter From the Perspective of Goldberger-Theil estimators. The American Statistician, Vol.39; 193-198.
- Duncan, D. B. and Horn, S.D. 1972.** Linear Dynamic Recursive Estimation from the Viewpoint of Regression Analysis. JASA, Vol.67; 815-821.
- Ergün, G. ve İnal, C. 1996.** Aykırı Değerlerin Varlığında Kalman Filtresinin İncelenmesi. Araştırma Sempozyumu '96 Bildirileri, s., 110-114, Ankara.
- Fagin, S. L. 1964.** Recursive Linear Regression Theory, Optimal Filter Theory and Error Analysis Optimal System. IEEE Int. Conv.Rec., 12; 216-240.
- Fahrmeir, L. and Tutz, G. 1994.** Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models. Springer-Verlag.

- Fitzgerald, R. J. 1971.** Divergence of the Kalman Filter. IEEE Trans. Auto.Control., Vol. AC-16; 736-747.
- Fortescue, T. R., Kershenbaum, L. S., Ydstie, B. E. 1981.** Implementation of Self-tuning Regulators with Variable Forgetting Factors. Automatica, Vol.17; 831-835.
- Gunnarsson, S. 1996.** On Covariance Modification and Regularization in Recursive Least Squares Identification. Department of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping, Sweden, Technical Report No: 1604.
- Gunnarsson, S. 1997.** Combining and Regularization in Recursive Least Squares Identification. Department of Electrical Engineering, Linköping University, Linköping, Sweden, Technical Report No: 1871.
- Gustafsson, F. 1992.** Estimation of Discrete Parameters in Linear Systems. Ph.D Thesis. Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden.
- Guttman, I. and Pena, D. 1985.** Comment on "Dynamic generalization linear models and Bayesian Forecasting". JASA, 74; 140-146.
- Guo, L. 1995.** Convergence and Logarithm Laws of Self-tuning Regulators. Automatica, Vol.31; 435-450.
- Goodwin, G. C. and Sin, K. S. 1985.** Adaptive Filtering Prediction and Control. Prentice Hall.
- Grillenzoni, C. 1994.** Optimal Recursive Estimation of Dynamic Models. JASA, Vol. 89; 777-787.
- Hagglund, T. 1983.** New estimation techniques for adaptive control. Ph.D. Thesis. Lund University, Lund, Sweden.
- Hajiyev, C. 1997.** Stopping Rules Formation and Faults Detection in Kalman Filter Application. Su ve İstatistik Sempozyumu Bildirileri, Ankara.
- Harvey, A. C., 1990.** Forecasting, structural time series models and the Kalman Filter. Academic Press.
- Hashemipour, H. R., Roy, S., Laub, A. J. 1988.** Decentralized Structures for Parallel Kalman Filtering. IEEE Trans. Auto.Control., Vol. 33.
- Isaksson, A. 1988.** On System Identification in one and two Dimensions with Signal Processing Applications. Ph.D Thesis, Dept.of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden.
- Jazwinski, A. H. 1970.** Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press.

- Janacek, G. and Swift, L. 1993.** Time series forecasting, simulation, applications. Ellis Horwood Limited.
- Kalman, R. E. 1960.** A new Approach to linear Filtering and Prediction Problems, Journal of Basic Engineering, Vol.82; 35-45.
- Kalman, R. E. and Bucy, R. S. 1961.** New Result in Linear Filtering and Prediction Theory. Journal of Basic Engineering, Vol. 83; 95-108.
- Kohn, R. and Ansley, C. F. 1983.** Fixed interval estimation in state space models when some of data are missing or aggregated. Biometrika, 70; 683-688.
- Kovacevic, B., Durovic, Z. Glavaski, S. 1992.** On Robust Kalman Filtering. Int. J. Control. Vol. 56; 547-562.
- Kreisselmeir, G. 1990.** Stabilized Least-Squares Type Adaptive Identifiers. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-35; 306-310.
- Kulhavy, R. 1995.** A Kullback-Leibler Distance Approach to System Identification. Proceedings of the IFAC Symposium on Adaptive Systems in Control and Signal Processing, Budapest, pp. 55-66.
- Kulhavy, R., and Kraus, F. J. 1996.** On Duality of Regularized Exponential and Linear Forgetting. Automatica, Vol. 32; 1403-1415.
- Kulhavy, R. and Zarrop, M. B. 1993.** On a general concept of forgetting. International Journal of Control. Vol. 58; 905-924.
- Kumar, P. R. and Varaiya, P. 1986.** Stochastic Systems: Estimation, and Adaptive Control. P. Hall.
- Kurz, L. and Tsai, C. 1983.** An Adaptive Robustizing Approach to Kalman Filter. Automatica, Vol.19; 279-288.
- Lee, C. P. 1995.** Forecasting with Incomplete Data. Commun. Statist. Theory Meth. Vol. 24; 1255-1269.
- Leibundgut, B. G., Rault, A., Gendreau, F. 1983.** Application of Kalman Filtering to Demographic Models. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC- 25; 427-434.
- Likar, A. and Dobnikar, A. 1994.** On-line Correction of the Gain in Kalman Filtering. Automatica, Vol. 30; 729-730.
- Ljung, L. and Söderström, T. 1983.** Theory and Practice of Recursive Identification. The MIT press.

- Ljung, L. 1987.** System Identification: Theory for the User. Prentice Hall.
- Ljung, L. and Gunnarsson, S. 1990.** Adaptation and Tracking in System Identification- A Survey. Automatica, Vol. 26; 7-21.
- Lozano, L. 1983.** Convergence Analysis of Recursive Identification Algorithms with Forgetting Factor. Automatica, Vol.19; 95-97.
- Masreliez, C. J. and Martin, R. D. 1977.** Robust Bayesian Estimation for the Linear Model and Robustifying the Kalman Filter. IEEE Trans. Auto.Control., Vol. AC-22; 361-371.
- McClamroch, N. H. 1980.** State Models of Dynamic Systems. Springer-Verlag.
- Mehra, R. K. 1972.** Approachs to Adaptive Filtering. IEEE Trans. Auto.Control., Vol. AC-17; 693-698.
- Meinhold, R. J. and Singpurwalla, N. D. 1983.** Understanding the Kalman Filter. The American Statistician, Vol. 84; 479-486.
- Meinhold, R. J. and Singpurwalla, N. D. 1989.** Robustification of the Kalman Filter. JASA, Vol. 37; 123-127.
- Moghaddamhoo, A. R. and Kirilin, R. L. 1993.** Robust Adaptive Kalman Filtering. In Approximate Kalman Filtering, ed. G.Chen, World Scientific Publisher, 65-85.
- Morrison, D. F. 1976.** Multivariate Statistical Methods. McGraw-Hill.
- Oral, Ö.H. 1982.** Linear Systems Analysis. Lecture Notes. ODTÜ.
- Otter, P. W. and Tempelar, D. T. 1980.** Kalman and Box-Jenkins Estimators in a simulation study. Analysing Time Series, 203-216.
- Özdaş, N., Dinibütün, T., Kuzucu, A. 1988.** Otomatik Kontrol, İ.T.Ü. Sayı. 1373.
- Özbek, L. 1993.** Kesikli-Zaman Durum-Uzay Modelleri ve İndirgemeli Tahmin. Yüksek lisans tezi (basılmamış). Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Özbek, L. 1996.** Dinamik Modellerde Ardışık Tahmin, Geri Beslemeli Kontrol ve Kamu Kesimi Madencilik Sektörü Üzerine Bir Uygulama. Araştırma Sempozyumu '96 Bildirileri, s., 192-197, Ankara.
- Özbek, L. 1997.** A Study on Adaptive Kalman Filter. ISI'97, Bulletin of the International Statistical Institute, Proceedings Book 2, 299-300, İstanbul.
- Özbek, L. and Aliev, F. A. 1998.** Comments on "Adaptive Fading Kalman Filter with an Application". Automatica, Vol.34, No:12, Basımda.

- Özbek, L. ve Öztürk, F. 1993.** Kalman Filtresi ve Gayri Safi Milli Hasıla Üzerine Bir Uygulama. I.Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu, Sempozyum Bildiriler Kitabı, s. 99-105, İzmir.
- Özbek, L., Öztürk, F., Aliev, F. A. 1996.** Kalman Filtresinde Kayıpları Önlemek için bir Yöntem. TOK'96, Otomatik Kontrol Ulusal Toplantısı, İstanbul. Boğaziçi Üniversitesi Yayın No:588, s.31-37, İstanbul.
- Petrov, V.V. 1975.** Sums of Independent Random Variables. Springer-Verlag.
- Papoulis, A. 1965.** Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw Hill Book Company.
- Salgado, M. E., Goodwin, G. C., Middleton, R. H. 1988.** Modified least squares algorithm incorporating exponential resetting and forgetting. International Journal of Control. Vol. 47; 477-491.
- Rao, B. S. and Durrant, H. F. 1991.** Fully decentralized algorithm for multisensor Kalman Filtering. IEE Proceeding-D, Vol. 138; 413-420.
- Sarioğlu, K. 1991.** Otomatik Kontrol (I), İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fak. Yayınları.
- Sarioğlu, K. 1992.** Otomatik Kontrol (II), İ.T.Ü. Elektrik-Elektronik Fak. Yayınları.
- Sanoff, S. P. and Wellstead, P. E. 1983.** Comments on "Implementation of Self-tuning Regulators with Variable Forgetting Factors". Automatica, Vol.19; 345-346.
- Schuler, H and Suzhen, Z. 1985.** Real-Time estimation of Chain Length distribution in Polymerization Reactor. Chemical Engineering Science. Vol. 40; 1981-1904.
- Simith, A. F. M. and West, M. 1983.** Monitoring Renal Transplants: An Application of Multiprocess Kalman Filter. Biometrics, 39; 867-878.
- Sin, K. S. and Goodwin, G. C. 1982.** Stochastic Adaptive Control Using a Modified Least Squares Algorithm. Automatica, Vol. 18; 315-321.
- Singh, M. G. and Titli, A. 1978.** Systems:Decomposition Optimization and Control. Pergamon Press.
- Shumway, R. H., Olsen, D. E., Levy, L. J. 1981.** Estimation and Tests of Hypotheses for the Initial Mean and Covariance in the Kalman Filter. Commun. Statist. Theor. Meth., Vol. 2(4); 501-524.
- Spall, J. C. and Wall, K. D. 1984.** Asymptotic Distribution Theory for the Kalman Filter State Estimator. Commun. Statist.Theor.Meth., Vol. 13(16); 1981-2003.

- Spall, J.C. 1985.** Validation of State-Space Models from a Single Realization of Non-Gaussian Measurements. *IEEE Trans. Auto.Control.*, Vol. AC-30; 1212-1214.
- Stoffer, D. S. and Wall, K. D. 1991.** Bootstrapping State-Space Models: Gaussian Maximum Likelihood Estimation and the Kalman Filter. *JASA*, Vol. 86; 1024-1033.
- Sorenson, H. W. and Alspach, D. L. 1971.** Recursive Bayesian Estimation Using Gaussian Sums. *Automatica*, Vol. 7; 465-479
- Sorenson, H. W. and Stubbered, A. R. 1970.** Theory and Application of Kalman Filtering, Linear Estimation Theory. University of California.
- Tan, G., Wen, C., Soh, Y. C. 1997.** Identification for Systems with Bounded Noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 42; 996-1001.
- Xia, Q., Rao, M., Ying, Y., Shen, X. 1994.** Adaptive Fading Kalman Filter with an Applications. *Automatica*, Vol.30, No: 8; 1333-1338.
- Xie, L., Soh, Y.C., Souza, C. 1994.** Robust Kalman Filtering for Uncertain Discrete-Time Systems.. *IEEE Trans. Auto.Control.*, Vol. AC-39; 1310-1314.
- Wang, L. and Langari, R. 1996.** A variable forgetting factor RLS algorithm with application to fuzzy time-varying system identification. *International Journal of Systems Science*, Vol. 27; 205-214.
- Weston, P. F. and Norton, J. P. 1997.** Detection and Estimation of Abrupt Changes in Input State. *Int. J. Control*, Vol. 67; 699-711.
- Wojcik, P.C. 1993.** On-line Estimation of Signal and Noise Parameters and the Adaptive Kalman Filtering. In *Approximate Kalman Filtering*, ed. G.Chen, World Scientific Publisher; 87-111.
- Wu, H. and Chen, G. 1993.** Suboptimal Kalman Filtering for Linear Systems with Non-Gaussian Noise. In *Approximate Kalman Filtering*, ed. G.Chen, World Scientific Publisher; 113-135.
- Yaz, E. 1990.** Robustness of Stochastic-Parameter Control and Estimation Schemes. *IEEE Trans. Auto.Control.*, Vol. AC-35; 637-640.
- Ydstie, B.E. and Sargent, R.W.H. 1986.** Convergence and Stability Properties of an Adaptive Regulator with Variable Forgetting Factor. *Automatica*, Vol.22; 749-751.

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Ceyhan’da doğdu. İlk, Orta ve Lise öğrenimini Ceyhan’da tamamladı. 1983 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 1987 yılında mezun oldu. 1987-1989 yılları arasında Emlak Bankası Otomasyon Müdürlüğü’nde bilgisayar programcısı olarak çalıştı. 1989-1991 yılları arasında GATA’da askerlik görevini yaptı. 1991-1992 yılları arasında tekrar bankadaki işini sürdürdü. 1993 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisansını tamamladı. 1992-1996 yılları arasında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü’nde Araştırma Görevlisi olarak çalıştı. 1996 yılından beri Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü’nde Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktadır.

