T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ SAYILAR KURAMI KAVRAMLARI İLE İLGİLİ YAPTIKLARI TANIMLARIN İNCELENMESİ

CEMRE TAŞDELEN CAN

İzmir

2022

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLİĞİ PROGRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ SAYILAR KURAMI KAVRAMLARI İLE İLGİLİ YAPTIKLARI TANIMLARIN İNCELENMESİ

CEMRE TAŞDELEN CAN

DANIŞMAN
PROF. DR. SERKAN NARLI

İzmir

2022

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum "İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar Kuramı Kavramları ile İlgili Yaptıkları Tanımların İncelenmesi "(Investigating the Pre-Service Primary School Mathematics Teachers' Definitions Regarding Number Theory Concepts)" adlı çalışmanın içerdiği fikri izinsiz başka bir yerden almadığımı; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında ve bölümlerinin yazımında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada kullanılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yaptığımı ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi, ayrıca bu çalışmanın Dokuz Eylül Üniversitesi tarafından kullanılan bilimsel intihal tespit programıyla tarandığını ve *intihal içermediğini* beyan ederim. Herhangi bir zamanda aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonuca razı olduğumu bildiririm.

26/09/2022

Cemre TAŞDELEN CAN

DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS/DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORİJİNALLİK RAPORU

Tarih: 13/10/2022

Tez Başlığı:

İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar Kuramı Kavramları İle İlgili Yaptıkları Tanımların İncelenmesi

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışmamın a) Kapak sayfası, b) Giriş, c) Ana bölümler ve d) Sonuç kısımlarından oluşan toplam 138 sayfalık kısmına ilişkin, 11/10/2022 tarihinde **tez danışmanım tarafından** Dokuz Eylül Üniversitesi Kütüphane ve Dokümantasyon Daire Başkanlığı'nın sağladığı İntihal Tespit Programından (**Turnitin**-Tez İntihal Analiz Programı) aşağıda belirtilen **filtreleme tiplerinden biri** (uygun olanı işaretleyiniz) uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin **benzerlik oranı % 20 dir.**

- http://www.kutuphane.deu.edu.tr/tr/turnitin-tez-intihal-analiz-programi/ adresindeki Tez İntihal Analiz Programı Kullanım Kılavuzunu okudum ⊠

Filtreleme Tipi 1(Maksimum %15) □	**Filtreleme Tipi 2(Maksimum %30)** ⊠
□Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, □ Kaynakça hariç, □ Alıntılar dâhil, □ Altı (6) kelimeden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç.	⊠ Kabul/Onay ve Bildirim sayfaları hariç, ⊠ Kaynakça dâhil, ⊠ Alıntılar dâhil.
EK 1- İntihal Tespit Programı Raporu İLK SAYFA Çıktısı. ⊠ **EK 2- İntihal Tespit Programı Raporu (Tümü) Cd İçinde.** ⊠	

Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Çalışması Orijinallik Raporu Uygulama Esasları'nı inceledim ve yukarıda belirtilen azami benzerlik oranlarına göre tez çalışmasının herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Gereğini saygılarımla arz ederim.

Adı Soyadı : Cemre TAŞDELEN CAN
Öğrenci No : 2019950107
Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı
Programı : İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı
Statüsü : Yüksek Lisans ⊠ Doktora □

ÖĞRENCİ **DANIŞMAN**

13/10/2022
Cemre Taşdelen CAN

13/10/2022
Prof. Dr. Serkan Narlı

Açıklamalar

1: Bu formu teslim etmeden önce sizden istenen bilgileri uygun kutucuğu (□) işaretleyerek doldurunuz.

Kullanıcı şifre vb. konusunda sorun yaşanması durumunda Üniversitemiz Merkez Kütüphanesinde bulunan Turnitin yetkilisine (Ali Taş Tel: veya) başvurunuz.

2: Yüksek Lisans/Doktora Tez Çalışması Orijinallik Raporu" formu tezin ciltlenmiş ve elektronik nüshalarının içerisinde ekler kısmında yer alır.

3: Tez savunmasında düzeltme alınması durumunda bu form güncellenerek yeniden hazırlanır.

4: **Turnitin**-Tez İntihal Analiz Programına yükleme yapılırken Dosya Başlığı (document title) olarak **tez başlığının tamamı**, Yazar Adı (author's first name) olarak **öğrencinin adı**, Yazar Soyadı (author's last name) olarak **öğrencinin soyadı** bilgisini yazınız.

TEŞEKKÜR

Bu araştırmada bana yol gösteren her aşamasında değerli bilgisini ve desteğini esirgemeyen başta danışman hocam Sayın Prof. Dr. Serkan NARLI olmak üzere Dokuz Eylül Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği anabilim dalındaki tüm hocalarıma teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım.

Yüksek Lisans öğrenimim süresince araştırmalarımda ve bilimsel etkinliklere katılımımda bana maddi olarak destek olan TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Dairesi Başkanlığı’na teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans eğitimim boyunca bana anlayış gösteren Mimar Sinan Ortaokulu’ndaki idarecilerime, uygulamalarım için yardımlarını esirgemeyen değerli öğretmen adayı arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

Hayatım boyunca her anımda her kararımda yanımda olan değerli aileme ve desteğini her zaman hissettiğim varlığıyla bana güç veren sevgili eşime saygı ve sevgilerimi sunarım.

Cemre TAŞDELEN CAN

2022

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

ÖZET

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMEN ADAYLARININ SAYILAR KURAMI KAVRAMLARI İLE İLGİLİ YAPTIKLARI TANIMLARIN İNCELENMESİ

Tanımları matematiği öğrenirken ve öğretirken sık sık kullandığımızı söyleyebiliriz. Tanımlama etkinlikleri ise kanıtlama ve problem çözme ile birlikte en temel matematiksel etkinliklerden bir tanesidir (Leikin ve Zazkis, 2010). İlköğretim matematik eğitiminin en temel kavramlarından olan sayı kümelerinin doğru algılanmasında, Sayılar Kuramı kapsamında bulunan tanımların öğretmen adayları tarafından ne düzeyde bilindiği ve ne kadar önem verildiğinin önemli olduğu düşünülebilir. Bu çalışmada İlköğretim Matematik Öğretmen adaylarının Sayılar Kuramı dersinde bulunan kavramlarla ilgili yaptıkları tanımların incelenmesi ve öğretmen adaylarının tanımlar ve tanımların eğitim sürecindeki rolü hakkındaki düşüncelerini ortaya çıkarmak amaçlanmaktadır.

Çalışma nitel bir araştırmadır. Çalışmada, İlköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar kuramı kavramlarını nasıl tanımladıkları detaylı olarak incelenecektir. Bu yüzden araştırma, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması niteliği taşımaktadır. Çalışmanın örneklemini bir Eğitim Fakültesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümündeki 50 son sınıf öğretmen adayı oluşturmaktadır. Öğretmen adaylarına Sayılar Kuramı Tanımları Formu (SKTF) uygulanmıştır. Uygulanan form sonrasında bazı öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır.

Zazkis ve Leikin (2008), öğretmenlerin yapmış oldukları tanım örneklerini analiz etmek için "erişilebilirlik, zenginlik, doğruluk ve genellik (somutluk)" olmak üzere dört kategori ortaya koymuştur. Çalışmada SKTF ile toplanan veriler Zazkis ve Leikin (2008) tarafından ortaya konan doğruluk ve zenginlik kriterleri açısından incelenmiştir. Tanımları doğruluk kriteri açısından incelerken genele bakıldığında yapılan tanımların büyük bir kısmının 'Uygun Olmayan Tanım' şeklinde değerlendirildiği görülmüştür. Tanımlama yaparken en çok karşılaşılan eksiklik tanımda kullanılan değişkenlerin ait oldukları sayı kümelerinin belirtilmemesi olarak tespit edilmiştir. Zenginlik kriteri açısından incelendiğinde ise yalnızca 5 kavram için zengin tanıma rastlanmıştır. Bu kavramlar "Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi), Rasyonel Sayı, İrrasyonel Sayı, Çift Tamsayı, Tek Tamsayı" kavramlarıdır. Diğer kavramlar için yapılan uygun tanımlar genellikle benzerlik göstermektedir.

Anahtar Kelimeler: Sayı Kuramı, Tanımlar, Matematik Eğitimi.

ABSTRACT

INVESTIGATING THE PRE-SERVICE PRIMARY SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS' DEFINITIONS REGARDING NUMBER THEORY CONCEPTS

We can say that we use definitions frequently when learning and teaching mathematics. Definition activities are one of the most basic mathematical activities, along with proving and problem solving (Leikin ve Zazkis, 2010). It can be thought that in the correct perception of number sets, which are one of the most basic concepts of primary mathematics education it is important to what extent the definitions within the scope of Number Theory are known and how much importance is given by the prospective teachers. In this study, it is aimed to examine the definitions made by the prospective primary mathematics teachers about the concepts in the Theory of Numbers course and to reveal the prospective teachers' thoughts about definitions and the role of definitions in the education process.

The study is a qualitative research. In this study, it will be examined in detail how prospective primary mathematics teachers define the concepts of number theory. Therefore, the research is a case study of qualitative research methods. The sample of the study consists of 50 senior prospective teachers in the Department of Primary Mathematics Teaching in a Faculty of Education. Number Theory Definitions Form (SKTF) was applied to prospective teachers. After the applied form, semi-structured interviews were conducted with some prospective teachers.

Zazkis and Leikin (2008) put forward four categories as “accessibility, richness, accuracy and generality (concreteness)” in order to analyze the definition examples made by teachers. In the study, the data collected with SKTF were examined in terms of accuracy and richness criteria set by Zazkis and Leikin (2008). While examining the definitions in terms of accuracy criteria, it was seen that most of the definitions made were evaluated as 'Inappropriate Definition'. The most common defect while making the definitions was determined as not specifying the set of numbers to which the variables used in the definitions belong. When examined in terms of the richness criteria, rich definitions were found for only 5 concepts. These concepts are "Basic Division (dividing the number a by b), Rational Number, İrrational Number, Even Integer and Odd Integer" concepts. Appropriate definitions for other concepts are generally similar.

Keywords: Number Theory, Definitions, Mathematics Education.

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde çalışmanın problem durumuna, amaç ve önemine, problem cümlesine ve alt problem cümlelerine, çalışmanın sınırlılıklarına ve varsayımlarına yer verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

Tanım yapmayı, bir nesneyi bir kavramı gerekli tüm özellikleriyle tanımlamayı gerçekten biliyor muyuz? Tanımlar bilimden felsefeye birçok farklı disiplinde kullanılır. Kavramın tanımı kavramın özünü yakalar, sentezler ve kavramın örnekleri ile örnek olmayanlarını birbirinden ayırır (Tırosh,1999). Tanımı tam olarak bilinmeyen bir kavramı açıklamak veya bu kavramla ilgili örnekler vermek bazı zorluklar yaratabilir.

Tanımlar bizi doğruya götüren kılavuz işlevi görmektedir. Felsefe Terimleri Sözlüğü (1975)'ne göre 'tanım' kavramı "Bir kavramın ya da bir nesnenin sınırlanması, belirlenmesi; kavramın ya da bir sözcüğün anlamının belirtilmesi.", Türk Dil Kurumu Güncel Türkçe Sözlüğe göre ise "Bir kavramın niteliklerini eksiksiz olarak belirtme veya açıklama, tarif." şeklinde tanımlanmıştır.

Birçok farklı disiplinde tanımlamaya yer verilmektedir. Diğer disiplinlerde olduğu gibi matematik öğretiminde ve matematiği öğrenmede de matematiksel tanımların önemi oldukça fazladır (Zazkis ve Leikin, 2008). Tanımlama (ispat ve problem çözme ile birlikte) en önemli matematik faaliyetlerindendir (Leikin ve Zazkis, 2010). Kavramın, kavrama örnek olan ve olmayan durumların net bir şekilde anlaşılmasında kavram tanımları başvurulacak temel kaynaklardır. Matematiksel düşünmenin temeli olan tanımların matematiksel fikirleri ifade etmedeki rolü de çok büyüktür (Çakıroğlu, 2013). Kavramı tanımlayabilmek için kavramı tam olarak içselleştirmek, kavramın sınırlarını ve olmazsa olmazlarını bilmek gerektiği düşünülebilir. Leikin ve Zazkis (2010) çalışmasında matematiksel tanım yapabilmeyi meta-matematiksel bir yapı olarak ifade etmiştir.

Matematiksel kavramların tanımları, tanımları oluşturan yapılar matematik öğretmenlerinin içerik bilgilerinin temel bileşenleridir (Zazkis ve Leikin, 2008). Öğretmenin konuyu anlatabilmesi için öncelikle konunun tüm inceliklerine derinlemesine hakim olması gerekir (Türnüklü, 2005). Matematiksel kavramları öznel tanımlar haricinde nesnel bir yapı olarak tanımlamaları, oluşturdukları öğretim şeklini, sınıfta öğrencilerine verdikleri cevapları ve açıklamaları, öğrencilerin problemlerini çözmede yol göstermelerini ve matematiksel tartışmaları nasıl yürüttüklerini etkilemektedir (Leikin ve Zazkis, 2010). Öğretimde tanımları etkin bir şekilde bilmek ve kullanmak, öğretmenlerin pedagojik olarak matematiği öğretme becerilerinin büyük bir kısmını oluşturmakta ve kendilerini daha yeterli hissetmelerini sağlamaktadır (Ball, Bass ve Hill, 2004). Öğretmenlerin öğretim esnasında kendilerini yeterli hissetmelerinin, anlatımın verimliliğini arttırabileceği düşünülebilir.

Tanımlar, matematiksel ifadelerin temel birimleridir (Leikin ve Zazkis, 2010). Schield'e (2004) göre anlaşılır bir tanım yapmanın iki önemli yönü vardır. Birincisi kavramı benzersiz şekilde oluşturmak için gereken en az sayıda özellik verilmelidir yani kavram için gerekli ve yeterli koşullar sağlanmalıdır. İkincisi ise öğrenciler kavramın belli bir kavram sınıfının üyesi olduğunu fark etmeli ve kavramla alakalı önemli bağlantılar ve yapısal bilgiler oluşturmalıdırlar. Öğrenciler kendi tanımlarını oluşturabilmeleri için kavramı anlamalıdırlar.

Tirosh'a (1999) göre matematik tümdengelimsel olmasından dolayı ağırlıklı olarak birincil (öncül) kavramlara, aksiyomlara ve tanımlara dayanır. Bu nedenle tanımlar, genellikle matematikte temel kavramların (örneğin doğal sayı, rasyonel sayı, tam sayı gibi) matematiksel olarak var olduğunu göstermek için kullanılır. Ayrıca yeni bir kavram, birincil kavramlar ve daha önce tanımlanmış kavramlardan yola çıkarak tanımlanır. Teoremler tanımlanmış kavramlardan yararlanarak oluşturulur ve yine tanımlanmış kavramlar kullanılarak ispatlanır (Vinner, 2002). Yani matematik öğretmenleri tanımları, teorem ve ispatları oluştururken bir iskelet gibi kullanabilir (Vinner, 1991).

Rasyonel sayı, tam sayı, asal sayı gibi kavramlar matematiğin temel kavramlarındandır. Bunun gibi kavramları içinde barındıran sayılar teorisinin ise matematiğin tüm konularının içine dahil olduğu düşünülebilir. Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM) 'e göre: "Sayı teorisi, ilginç, eğlenceli ve faydalı keşifler için birçok zengin fırsat sunuyor. Keşiflerin problem çözmede, diğer matematiksel kavramları anlamada ve geliştirmede, matematiğin güzelliğini göstermede ve sayının tarihsel gelişiminin insani yönlerini anlamada getirileri vardır." (s.91).

Sayıların çağdaş anlamda incelenmesi 17. Yüzyılda başlamıştır (Arif Kaya,1988: Sayılar Kuramına Giriş, önsöz alıntı). İncelenen araştırmalar ışığında, sayı kuramının, başta matematiksel ispat becerileri olmak üzere matematiksel akıl yürütme becerilerini de geliştirdiği yaygın olarak kabul edilmektedir (Campbell ve Zazkis, 2002). Sayılar kuramı kapsamında yer alan tanımlar, ortaokul, lise, lisans ve hatta lisansüstü eğitim seviyelerinde, konu derinliklerinin değişmesi koşuluyla yer almaktadır. Öğrenim hayatının her aşamasında bulunan bu kavramların hem öğrenciler hem de öğretmenler tarafından doğru bilinmesi ve doğru tanımlanabilmesi gerektiği düşünülebilir.

Literatür incelendiğinde tanımların değerlendirildiği birçok çalışma yapılmıştır (Edward ve Ward, 2008; Kubar, 2012; Leikin ve Zazkis, 2010; Öztoprakçı, 2014; Zazkis ve Leikin, 2008). Bu çalışmalar sonucunda tanımlar üzerinde daha çok durulması gerektiği ulaşılan ortak sonuçlardan bir tanesidir. Yapılan çalışmalar matematiğin farklı öğrenme alanlarından olmasına rağmen genellikle geometri alanında bulunan tanımlar incelenmiştir. Sayı kuramı kapsamında bulunan kavram tanımlarının incelendiği çalışmaların, matematiğin diğer alanlarında yapılan çalışmalara göre daha az olduğu ve bu tanımların incelendiği çalışmaları arttırmanın matematik eğitimi açısından literatüre olumlu bir katkı sağlayacağı düşünülebilir. Bu çalışmada sayı kuramı kavramlarına odaklanılacak ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bu kavramlar için yaptıkları tanımlar incelenecektir.

1.2. Amaç ve Önem

Matematikte tanımlar son derece önemli bir rol oynamaktadır (Tırosh, 1999). Kavram tanımları, bu tanımların içselleştirilmiş ve kullanılabilir olması matematik öğretme ve öğrenme sürecinde önemli bir yer tuttuğu söylenebilir. Matematiğin temel konularından olan Sayılar; günlük yaşamın her alanında kullanılırken okulda da problem çözme ve akıl yürütme, teoremleri ispatlama, genellemeleri test etme ve gerekçeler sağlama gibi bilişsel becerilere temel oluşturur (CBSM, 2001). Sayılar Kuramı kapsamında olan tanımların da doğru algılanması matematiğin anlaşılmasının, anlatılmasının ve kullanılmasının yolunu açmaktadır (Ercire ve Narlı, 2019). Bu çalışmanın amacı İlköğretim Matematik Öğretmen adaylarının Sayı Kuramı dersinde bulunan kavramlar ile ilgili yaptıkları tanımların incelenmesidir.

1.3. Problem Cümlesi / Alt Problem Cümleleri

Araştırmanın problemi ve alt problemler aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

Araştırma Problemi

Araştırma problemi "İlköğretim Matematik öğretmen adaylarının sayı kuramı dersi kapsamında bulunan kavramları tanımlamaları nasıldır?" şeklinde belirlenmiştir. Bu problem araştırılırken aşağıdaki alt problemlere de yanıt aranmaktadır.

Alt Problemler

1. Doğruluk kriteri açısından ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar kuramı kavramları ile ilgili yaptıkları tanımlar nasıldır?

2. Zenginlik kriteri açısından ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar kuramı kavramları ile ilgili yaptıkları tanımlar nasıldır?

1.4. Sınırlılıklar

Bu araştırma İzmir ili içinde yer alan bir üniversitede Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 50 son sınıf öğrencisiyle sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

Öğretmen adaylarının verilen kavramları tanımlarken tüm bildiklerini kullandıkları ve gerçek performanslarını ortaya koydukları varsayılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğretmen adaylarının içtenlikle ve doğru cevaplar verdikleri varsayılmıştır.

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE / KAVRAMSAL ÇERÇEVE / İLGİLİ ARAŞTIRMALAR

Sayıların özelliklerinin, kalıplarının, yapılarının ve biçimlerinin kavramsal olarak anlaşılması için emek vermek iki buçuk bin yıl önce Antik Yunan döneminden bu yana matematiğin ve matematiksel düşüncenin kalbini oluşturmaktadır (Campbell ve Zazkis, 2002). Sayılar kuramı kapsamında bulunan kavramlar matematik öğretim hayatımızın neredeyse her aşamasında bulunmaktadır. Hangi öğretim seviyelerinde hangi konuların yer aldığı Milli Eğitim Bakanlığı tarafından yayınlanan müfredat programlarına göre aşağıdaki tabloda gösterilmiştir (MEB, 2018).

Tablo 1

Milli eğitim bakanlığı tarafından yayınlanan müfredat programlarında sayılar kuramı kavramlarının bulunduğu öğretim seviyeleri

ÖĞRETİM SEVİYESİ	ÖĞRENME ALANI	ALT ÖĞRENME ALANI
İlkokul (1., 2., 3., 4. Sınıflar)	Sayılar ve İşlemler	• Doğal Sayılar • Doğal Sayılarla İşlemler (Toplama, Çıkarma, Çarpma, Bölme) • Kesirler • Kesirlerle İşlemler
5.Sınıf	Sayılar ve İşlemler	• Doğal Sayılar • Doğal Sayılarla İşlemler • Kesirler • Kesirlerle İşlemler • Ondalık Gösterim • Yüzdeler
6.Sınıf	Sayılar ve İşlemler	• Doğal Sayılarla İşlemler • Çarpanlar ve Katlar • Kümeler • Tam Sayılar • Kesirlerle İşlemler • Ondalık Gösterim • Oran
7.Sınıf	Sayılar ve İşlemler	• Tam Sayılarla İşlemler • Rasyonel Sayılar

		• Rasyonel Sayılarla İşlemler • Oran-Orantı • Yüzdeler
8.Sınıf	Sayılar ve İşlemler	• Çarpanlar ve Katlar • Üslü İfadeler • Kareköklü İfadeler
9.Sınıf	Sayılar ve Cebir	• Mantık • Kümeler • Denklem ve Eşitsizlik
10.Sınıf	Sayılar ve Cebir	• Fonksiyonlar • Polinomlar • İkinci Dereceden Denklemler
11.Sınıf	Sayılar ve Cebir	• Fonksiyonlarda Uygulamalar • Denklem ve Eşitsizlik Sistemleri
12.Sınıf	Sayılar ve Cebir	• Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar • Diziler

Sayılar kuramı tanımları ile zorunlu eğitim öğretim hayatı boyunca, her seviyede karşılaşılmıştır. Sayılarla ilgili çeşitli işlemleri, işlevleri, ilişkileri ve uygulamaları içeren bir dizi çalışma matematik müfredatının ana bölümünü oluşturmaktadır (Campbell ve Zazkis, 2002). Doğal sayılar, tam sayılar, rasyonel sayılar, asal sayılar, aralarında asal sayılar, en büyük ortak bölen, en küçük ortak kat gibi kavramlar lisans eğitimine başlayana kadar öğrenilen sayı kuramı kavramlarından sadece birkaçıdır. Kuadratik rezidü, kongruant olma gibi kavramlar ise lise olimpiyat matematiğinde de sorulabilmektedir.

Sayı kuramı, genellikle aritmetik, cebir ve geometride olduğu gibi kendi başına bir çalışma alanı olarak belirlenmez yani aslında tüm konularla iç içedir (Campbell ve Zazkis, 2002). Dolayısıyla sayı kuramı, diğer matematik alanları için bir binanın temeli gibi görülürse temel sağlam olduğunda diğer alanlarında o sağlamlıkla ilerleyeceği düşünülebilir. Matematik eğitimindeki önemine rağmen Campbell ve Zazkis (2002) çalışmalarında belirttiği üzere sayı kuramına gereken önem verilmemektedir. Literatür incelendiğinde bu alandaki çalışmalar çok sınırlı olduğu ifade edilebilir (Sert, 2008; Şenay, 2014; Şener ve Özdemir, 2014; Zazkis, 1998; Zazkis ve Campbell, 1996; Zazkis ve Liljedah, 2004).

Sayı kuramında bulunan kavram tanımlarının incelendiği çalışmaların, matematiğin diğer alanlarında yapılan çalışmalara göre daha az olduğu ve bu alandaki tanımların incelendiği çalışmaları arttırmanın, matematik eğitimi açısından literatüre olumlu bir katkı sağlayacağı düşünülebilir. Sayılar ile ilgili yapılan matematik eğitimdeki çalışmalara bakıldığında sayıların matematik eğitimdeki önemine değinildiği görülebilir. Zazkis ve Liljedahl (2004) çalışmasında sınıf öğretmen adaylarıyla asal sayılar kavramını nasıl ele aldıklarını araştırmıştır. Çalışma sonucunda öğretmen adaylarının asal sayıların genellikle ne olduğu bilgisine sahip olduğunu göstermişlerdir.

Zazkis ve Campbell (1996) Temel Sayı Teorisi konusu altında öğretmen adaylarının içerik bilgisini inceleyen bir çalışma yapmıştır. Çalışmada odaklanılan kavramlar çarpma, bölme, bölünebilirlik, bölünebilirlik kuralları, asal sayılar, birleşik sayılar ve çarpanlara ayırmadır. Elde edilen verileri yorumlarken yapılandırmacı bir çerçeve olan Dubinsky'nin APO çerçevesini kullanmışlardır. Araştırma bulguları incelendiğinde matematikte anlamlı bir şekilde devam edebilmek için, aritmetiğin temel kavramlarının öğrenilmesine vurgu yapılmıştır.

Tanımlar bir kavramı tanıtırken, onu diğer kavramlardan ayırt ederken; ispat yaparken ya da mantıksal iddiaları ortaya atarken kullanılır (Silfverberg, 2003). Kavram tanımlarının incelenmesine ilişkin geçmişten günümüze birçok araştırma yapılmıştır. Yapılan araştırmalarda tanımları incelemek için farklı kuramsal çerçeveler oluşturulmuş farklı tanım olma kriterleri belirlenmiştir. Bu teorik yaklaşımlardan birkaçına aşağıda yer verilmektedir.

2.1. Çeşitli Teorik Yaklaşımlar

Matematik eğitiminde kavram tanımları, kavram tanımlarının öğretmenler ve öğrenciler tarafından ne düzeyde bilindiği ve bilindiği düşünülen tanımların kişiler arası aktarımının yeterince sağlanıp sağlanmadığı araştırmalara konu olmuştur. Tanımların incelenmesi konusunda bazı yönelimler dikkat çekmektedir. Araştırmacılardan bazıları kavram tanımlarının zihnimizde çağrışan görüntüleriyle olan ilişkisi üzerinden tanımları incelerken bazı araştırmacılar "İyi bir tanım nasıl olmalıdır, tanım hangi şartları sağladığında uygun bir tanımdır?" gibi sorulara yanıt aramaktadır. Bu yönelimler ve farklı bakış açıları ışığında oluşturulan teorik çatılar birçok farklı araştırmacı tarafından kullanılarak tanım incelemeleri yapılmıştır.

2.1.1. Kavram tanımı-Kavram imajı

Literatür incelendiğinde araştırmalarda çok sık kullanılan teorik yaklaşımlardan biri kavram tanımı ve kavram imajı merkezli yaklaşımdır. Vinner (1981) kavram oluşumunda iki ana öğeden bahsetmiştir; kavram tanımı ve kavram imajı. Vinner'a (1981) göre günlük yaşamın aksine teknik bağlamlarda, teknik terimlerin tanımlarına ihtiyaç vardır. Bir kavram adı duyulduğunda hafızamızda o kavrama ait bazı görüntüler, görsel temsiller, izlenimler veya deneyimler canlanır. Vinner (1981) bunları "kavram imajı" olarak adlandırmıştır. Kavram imajı biraz daha kişiye özeldir. Herkesin deneyimleri, o kavramla ilgili kişiye çağrıştırılanlar birbirinden farklıdır.

Oluşturulan modelde kavram tanımı ve kavram imajı arasında çift yönlü bir ilişki vardır. Öğretmenler tarafından tanım verildiği anda öğrencide bir kavram imajı oluşacağı umulmaktadır ancak öğrencilerin o kavrama ait daha önceden oluşan bir kavram imajlarının olup olmadığına genelde dikkat edilmemektedir. Tanım verildikten sonra bu çift yönlü etkileşim her zaman istendiği gibi çalışmayabilir. Öğrenciye verilen kavram tanımı, öğrencinin zihninde bulunan kavram imajı ile çatıştığında üç olası durum meydana geldiği çalışmada belirtilmiştir.

Bu çatışma sonrasında oluşan birinci durumda, öğrenci kavram imajını yeniden düzenleyecek ve yeni kavram imajı, kavram tanımında belirtilen yönleriyle yeniden yapılandırılacak, ikinci durumda kavram imajı değişmeyecek ve kavram tanımı bir süreliğine öğrenilecek aradan belli bir zaman geçtikten sonra kavram tanımı silinecek ve eski kavram imajıyla devam edilecek, üçüncü durumda ise öğrenci kavram imajını değiştirmeyecek ve kavram tanımını benimsemeyecektir (Vinner, 1981) Öğretim sırasında istenilen durum birinci durumdur. Öğrenciden kavramla ilgili bilişsel bir görev istendiğinde yalnızca kavram imajının değil, kavram tanımı ve kavram imajının düşünülmesi beklenmektedir. Dolayısıyla öğrenciye kavram tanımı verilirken öğrencinin zihninde var olan kavram imajının göz önünde bulundurulması gerektiği düşünülebilir.

Kavram tanımı- kavram imajı teorik yaklaşımı, tanımlar üzerinde çalışan birçok araştırmacının çalışmalarında kullanılmıştır (Bingolbali ve Monaghan,2008; Edwards ve Ward, 2004; Giraldo, 2006; Nardi, 2006; Przenioslo, 2004). Edwards ve Ward'ın (2004). Çalışmalarında Cebire Giriş dersinde tanımların kullanımında öğrenci anlayışları üzerinde bir araştırma yapmıştır. Yapılan tanımlar Tall ve Vinner'ın (1991) kavram tanımı kavram imajı ışığında incelenmiş, öğrenci tanımlarıyla ilgili sürpriz sonuçlara ulaşılmıştır. Sürprizlerin ortak fikri öğrencilerin matematik öğretmenleri gibi tanımlar yapamadığı yönündedir.

Bingolbali ve Monaghan (2008) çalışmalarında makine mühendisliği bölümü öğrencileri ve matematik bölümü öğrencilerinin türev kavramına ilişkin kavram imajları üzerinde durmuşlardır. Kavram imajlarının eğitim gördükleri bölüme göre değişiklik gösterdiğini, kavram imajının kişiye özel olmasının yanı sıra aynı zamanda hangi bağlamda ele alındığının da kavram imajlarını çeşitlendirdiğini belirtmişlerdir. Przenioslo (2004) ise öğrencilerin limit kavramına ilişkin kavram imajlarını araştırmıştır. Araştırmanın en önemli sonuçlarından biri öğrencilerin matematiksel kavramlara ait alt yapılarının ortaokul yıllarında oluştuğu, üniversitede ise daha önceden oluşturulmuş yapılara yeni kavramlar eklendiğidir.

2.1.2. Tanım olma kriterleri

Bir başka teorik yaklaşım ise Dormolen ve Zaslavsky (2003) tarafından ortaya konulmuştur. Araştırmacılar tanım olma kriterleri belirlemiş ve açıklamıştır. Bu kriterler "Hiyerarşi kriteri, var oluş kriteri, eşdeğerlik kriteri, aksiyomlaşma kriteri, minimallik kriteri, şıklık kriteri ve dejenerasyon kriteri" şeklinde belirlenmiştir.

Hiyerarşi kriterinde, varlığının genelden özele doğru sıralanan bir dizi kavram arasından seçildiğini ve kavram tanımlarının genelden özele doğru verilmesi gerektiğini belirtir. Örneğin fonksiyon kavramı tanımlandıktan sonra doğrusal fonksiyon, birebir fonksiyon kavramlarının tanımlanması şeklinde düşünülebilir.

Var oluş kriteri ise kabul edilen sistemde kavrama ait en az bir örnek bulunması gerektiğinin vurgusu yapılmaktadır.

Eş değerlik kriterinde bir kavramın birden fazla tanımı olabilir ancak bu farklı tanımlar arasından bir tanım seçildiğinde kalan tanımlar, doğruluğu ispatlanması gereken teoremler halinde düşünülür.

Aksiyomlaşma kriteri ise hiyerarşi kriterinde belirtildiği gibi genel kavramlardan yararlanarak daha özel kavramlar tanımlanabilir ancak bazı kavramlar bu şekilde tanımlanamaz. Tanımlanması güç olan bazı kavramlar için aksiyom ve postulatlar gereklidir.

Minimallik kriteri gereken en az özellikle kavramı tanımlamayı belirten kriterdir. Örneğin dikdörtgen kavramı tanımlanırken "4 dik açısı olan dörtgendir" tanımı minimal bir tanım olarak görülmemektedir. "4 dik açı" yerine "3 dik açı" denildiğinde de dörtgenin iç açıları toplamı 360° olduğundan, dördüncü açı zaten dik açı olacaktır. Minimallik kriteri için Dormolen ve Zaslavsky (2003) de çalışmalarında minimal olmayan tanımların pedagojik olarak öğrenciler tarafından daha anlaşılabilir olabileceğini belirtmişlerdir. Şıklık kriterinde ise eşdeğer tanımlar arasından bazı tanımlar diğerlerinden daha şık görünebilir. Daha az kelime, daha az sembol kullanılarak oluşturulmuş tanımlar daha tercih edilir olmaktadır.

Dejenerasyon kriteri, tanımların, aklımızdaki sezgisel fikirlerle uyuşmadığı örnekleri de kabul ettiği durumları ifade etmektedir.

Zaslavsky ve Shir (2005) ise 12. Sınıf öğrencilerinin dört kavram (kare, ikizkenar üçgen, artan bir fonksiyon ve bir fonksiyonun yerel maksimum noktası) tanımı üzerindeki bilgilerine odaklanmışlardır. Öğrenci tanımlarını, tanımın yapısal doğasına ve Dormolen ve Zaslavsky (2003)' nin çalışmalarında tanım olma kriterleri olarak açıkladıkları "minimal olma ve hiyerarşi" kriterlerine ve göre incelemişlerdir. Ulaştıkları sonuçlarda ise öğrencilere çalışma öncesinde tanım olma özelliklerinden açık bir şekilde bahsedilmemiş olmasına rağmen öğrencilerin kendiliğinden bu özelliklere değinmiş olmaları ilgi çekici bulunmuştur.

Farklı bakış açılarından da tanımlar incelenmiştir. Tırosh (1999) ise tanımları incelediği çalışmasında "sonlu ve sonsuz küme" kavramları üzerinde durmuştur. Öğrencilere sonlu ve sonsuz kümelerle ilgili çeşitli örnekler verildikten sonra öğrencilerden örnekleri sınıflandırmaları istenmiştir. Çalışma sonucunda ise öğrencilerin küme örneklerini sınıflandırırken sezgisel yöntemleri kullanarak karar verdikleri görülmüştür. Yapılan hataların çoğunun kavramın tanımını düşünerek sınıflandırmak yerine sezgisel yöntemlerle sınıflandırmaktan kaynaklandığı düşünülmektedir. Tırosh öğrencilerin matematiksel tanımların öneminin farkındalığını arttırmak gerektiği önerisinde bulunmuştur.

Öztoprakçı (2014) ise çalışmasında matematik öğretmen adaylarının dörtgen tanımlarını ve bu tanımlara bağlı dörtgen hiyerarşilerini değerlendirme ve oluşturmadaki düşünce süreçlerinin gelişimini incelemiştir. Çalışmasını dinamik geometri programı destekli etkinlikler aracılığıyla sürdürmüştür. Dinamik geometri destekli etkinliklerin tanımlarla ilgili bilişsel becerileri üst seviyeye ulaştırmada etkili olduğunu göstermiştir.

2.2. Araştırmanın Teorik Çerçevesi

Bir diğer teorik yaklaşım ise Zazkis ve Leikin tarafından oluşturulmuştur. Zazkis ve Leikin araştırmalarında öğrencilerle ve öğretmen adaylarıyla çalışmıştır.2007'de yapılan çalışmada öğrencilerden ve öğretmenlerden görüşmeler yoluyla örnekler istemişlerdir. Örnekler yoluyla oluşturulmaya başlayan teorik çerçeveye bir bakış açısı geliştirmişlerdir. 2008' de yaptıkları çalışmada "Karenin tanımı" üzerinde durmuşlardır. Kare çok tanıdık bir terim olmasına rağmen öğretmen adaylarının tanım oluşturma becerisi önemli ölçüde farklılık göstermiştir. 2010' da yapılan çalışmada ise geometri, cebir ve analiz alanında öğretmen adaylarından farklı tanımlamalar istemişlerdir ve "Hangi alanda tanımlamalar daha başarılıdır?" sorusuna cevap aramışlardır. Sonuçlar değerlendirildiğinde geometri alanında yapılan tanımların analiz ve cebire göre daha iyi durumda olduğu görülmüştür. Öğretmen adaylarının yaptıkları tanımları, oluşturmaya başladıkları teorik çerçeve doğrultusunda "erişilebilirlik, doğruluk, zenginlik ve genellik" kriterlerine göre incelemişlerdir.

Leikin ve Zazkis (2010) çalışmalarında tanımlarda olması beklenen özelliklerden bahsetmişlerdir:

1. Tanım kavramın gerekli ve yeterli koşullarını içermelidir.
2. Kavramın herhangi bir örneği, tanım gerekli koşulları içerdiğinden, tanımın tüm gerekliliklerine (yalnızca çoğuna değil) uygun olmalıdır.
3. Tanımın tüm gerekliliklerine uyan her matematiksel nesne, kavramın bir örneğidir çünkü tanım, kavramın yeterli koşullarını içerir.
4. Kavramla ilgili her doğru ifade, mantıksal olarak tanımdan çıkar.
5. Tanımlar nettir, bulanık değildir. Bu, herhangi bir nesnenin kavramın bir örneği olduğu veya olmadığı anlamına gelir.
6. Tanımlar minimal olma eğilimindedir; kavramı belirlemek için yeterli olan az miktarda yapısal bilgi ve özellik sağlarlar.
7. Genellikle kavrama dair salt tanımın ötesinde bilgi mevcuttur. Örneğin tanım verildikten sonra tanım ifadelerine eşdeğer tanımlar, teoremlerdir.
8. Aynı kavramın çok farklı gibi görünen tanımları olabilir ve aynı kavramı tanımladıklarını kanıtlamak zor olabilir. Örneğin Öklid geometrisi, analitik geometri ve cebirde verilen bir konik kesit.
9. Matematik metinleri, tanımlarda özel ifadeler kullanır.

Zazkis ve Leikin tanımları dört kritere göre incelemiştir. Bunlar "erişilebilirlik, zenginlik, doğruluk ve genellik(somutluk)" şeklindedir. Bu kriterler aşağıdaki tabloda verilmiştir (Ercire, Narlı,2019, sf.245-246).

Tablo 2

Öğretmen tanımlarının analizi teorik çatısına ait kriterler

Kriterler	Temel Sorular	Analiz Edilecek Veri
Erişilebilirlik	Tanımdan kavrama kolaylıkla ulaşılabiliyor mu yoksa uğraşmak mı gerekiyor?	Sözlü
Zenginlik	Tanımlar hep aynı türden mi? Bir türde herhangi bir sıklık var mı? Rutin veya rutin olmayan türde bir tanım mı?	Sözlü ve Yazılı
Doğruluk	Matematiksel olarak doğru mu? (Verilen şartlar gerekli veya yeterli mi?) Tanım şık mı, minimal mi?	Sözlü ve Yazılı
Genellik/Somutluk	Yapılan tanım kavrama göre çok mu genel yoksa çok mu spesifik?	Sözlü

2.2.1.Erişilebilirlik

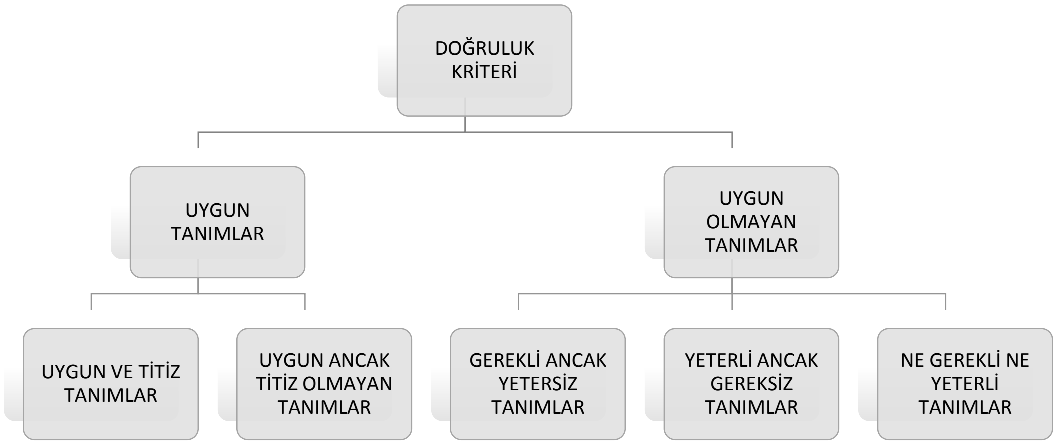
"Yapılan tanım, kavrama kolaylıkla ulaşılmasını sağlıyor mu?" sorusuna cevap aranan kriterdir. Erişilebilirlik kriteri sözlü verilerin analizinde değerlendirilir.

2.2.2.Zenginlik

Yapılan tanımların birbirinden farklılık gösterip göstermediğine bakılır. Kavram sık rastlanan tanımlardan farklı bir şekilde ifade edilmişse zengin tanım olarak değerlendirilebilmektedir. Leikin ve Zazkis (2010) çalışmalarında eşdeğer tanımlar oluşturma yeteneğinin, zihinsel esnekliğin bir göstergesi olduğunu ve örnek alanların zenginliğinin katılımcıların zihinsel esnekliklerini analiz etmede faydalı olabileceğini belirtmişlerdir. Zenginlik kriteri sözlü ve yazılı verilerin analizinde değerlendirilmektedir.

2.2.3.Doğruluk

Yapılan tanımları doğruluk kriteri bakımından incelerken matematiksel ifadenin mantıksal yapısına ve minimallik düzeyine bakılır. Mantıksal yapı olarak belirtilen kısım tanımda gerekli ve yeterli şartların verilip verilmediğidir. Bu ölçütlere göre doğruluk kriteri 2 ana kategoriye ayrılmıştır: "Uygun tanımlar" ve "Uygun olmayan tanımlar". Uygun tanımlarda kendi içerisinde "uygun ve titiz tanımlar" ve "uygun ancak titiz olmayan tanımlar" olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmaktadır. Uygun olmayan tanımlar ise "gerekli ancak yetersiz", "yeterli ancak gereksiz" ve "ne gerekli ne yeterli" olacak şekilde üç alt kategoriye ayrılmaktadır. Doğruluk kriteri sözlü ve yazılı verilerin analizinde değerlendirilmektedir.



Şekil 1. Doğruluk kriteri ve alt kategorileri

2.2.3.1. Uygun Tanımlar

Uygun ve Titiz Tanımlar

Tanımlar gerekli ve yeterli koşulları sağlayacak şekilde oluşturuluyorsa ve aynı zamanda minimalliği önemli derecede bozmuyorlarsa bu kategoride yer almaktadır. Minimalliği önemli derecede bozmayan tanımlar Zazkis ve Leikin (2008)'in çalışmalarında belirttiği gibi çoğu matematiksel kaynakta bulunan tanımlardır. Örneğin "Dört tane dik açısı olan bir eşkenar dörtgen" tanımında açı sayısını belirtirken dört tane dik açı yerine bir tane dik açısı olan ifadesi kullanıldığında yine bir kare tanımlamış olacaktır.

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Uygun ancak titiz olmayan tanımlar gerekli ve yeterli şartları içeren ancak minimalliği önemli derecede bozan veya yanlış matematiksel terminoloji içeren veya dikkat eksikliği nedeniyle bazı kısıtlamaları atlayan tanımlardır. Örneğin bir kareyi "Eşit uzunlukta dört kenarı olan ve ardışık kenarlar arasında 90°'ye eşit açılara sahip, iç açılarının toplamı 360° olan bir şekil" şeklinde tanımlamak minimalliği önemli derecede bozmaktadır.

2.2.3.2. Uygun Olmayan Tanımlar

Kavram tanımı yapılırken gerekli veya yeterli şartların eksik kaldığı örnekler bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt başlığa ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Tanımlar

Tanımda, gerekli şartların bir kısmının verildiği ancak verilen bu şartların o kavram tanımı için yeterli olmadığı durumdur. Bu kategoriye alınan tanımlarda çoğunlukla, kavramdan ziyade daha geniş bir örneğine yer verildiği ya da kavrama ait özelliklerin sıralandığı görülmektedir. Zazkis ve Leikin (2008)'in çalışmalarında "Kare" tanımı istenmiştir. Örneğin "Kenarları eşit olan dörtgene kare denir." tanımında karenin kenarları eşittir ancak bu tanım kare için yetersiz bir tanım olmaktadır. Bu tanıma göre eşkenar dörtgenlerde birer karedir. Gerekli ancak yetersiz olarak kabul edilen çoğu tanımda kare yerine bir paralelkenar, bir dikdörtgen veya bir eşkenar dörtgen gibi daha genel bir dörtgen tanımlandığı görülmüştür

Yeterli Ancak Gereksiz Tanımlar

Tanımda verilen şartların yeterli olduğu ancak gereksiz koşullar, gereksiz kısıtlamalar içeren veya yalnızca belirli durumlarda mevcut olan belirli özellikleri içeren tanımlardır. Örneğin Zazkis ve Leikin (2008)'in çalışmalarında "Dört açısı 90° olan ve tüm kenarları 2 cm olan dörtgendir" tanımı gereksiz bir kısıtlama içerdiğinden ve karenin spesifik bir örneğini tanımladığından yeterli ancak gereksiz kabul edilen bir tanımdır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Tanımlar

Yapılan tanımlar da gereksiz koşullar belirtilip aynı anda daha genel ifadeler kullanılıyorsa, verilen koşullar ne gerekli koşul ne de yeterli bir kısıtlama sağlamıyorsa veya kavrama ait hiçbir örnek verilemiyorsa ne gerekli ne yeterli kategorisine alınmalıdır. Örneğin Zazkis ve Leikin (2008)'in çalışmalarında bazı öğrenciler tarafından kare; "İki paralel dikey doğruya dik iki paralel yatay doğru" şeklinde tanımlanmıştır. Bu tanımda paralel doğruların dikey ve yatay olmaları gerekli bir özellik değildir. Diğer taraftan bu tanım kare kavramı için yeterli de değildir. Bir dikdörtgen de tanımlanabilir.

2.2.4. Genellik/Somutluk

Yapılan tanımların genel mi yoksa özel mi olduğunun incelendiği kriterdir. Genel olma durumu biraz değişken bakış açısı kazandırmaktadır. Bazı durumlarda nesnelerin bulundukları sınıfları belli eden genel örnekler matematiksel bir anlayışın göstergesi olarak görülürken, bazı durumlarda genel örnekler tanımda eksiklikler olduğunu hissettirmektedir. Zazkis ve Leikin (2008) genellik kriterini bir jenaratöre benzetmiştir. Genellik/Somutluk kriteri sözlü verilerin analizinde değerlendirilmektedir.

Bu çalışmada matematiğin birçok kavramına temel teşkil edecek sayılar kuramının kavramlarına odaklanılacak ve ilköğretim matematik öğretmen adaylarının bu konuda yaptıkları tanımlar "**doğruluk ve zenginlik**" kriterlerine göre incelenecektir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeline, çalışma grubuna, veri toplama sürecine ve araçlarına, verilerin analizine, araştırmanın geçerliğine, güvenirliğine ve araştırmacının rolüne yer verilmiştir.

3.1. Araştırmanın Modeli / Deseni

Bu çalışma nitel bir araştırmadır. Nitel araştırma, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir (Yıldırım, Şimşek, 2018, 41). Bir başka ifadeyle, daha önce bilinen veya fark edilmemiş problemlerin algılanmasına ve probleme ilişkin doğal olguların gerçekçi bir şekilde ele alınmasına yönelik öznel-yorumlayıcı bir sürecin ifade edildiği araştırma türüne nitel araştırma denir (Seale, 1999). Bir konunun veya bir problemin keşfedilmesi amacıyla nitel araştırma yapılmaktadır (Creswell,2013).

Bu çalışma nitel araştırma türlerinden durum çalışması (case study) niteliği taşımaktadır. Nitel durum çalışmasının en temel özelliği bir ya da birkaç durumun derinlemesine araştırılmasıdır. Yani bir duruma ilişkin etkenler (ortam, bireyler, olaylar, süreçler, vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri üzerine odaklanılır (Yıldırım, Şimşek, 2018, 73). Durum çalışması sınırlı bir sistemin işleyiş biçimi hakkında düzenli olarak veri toplamak ve bu yolla bu sistemin işleyiş biçimini derinlemesine keşfetmektir (Chmiliar, 2010). Davey (1991) ise durum çalışmasının esas amacını bir durum veya olayın derinlemesine ve boylamsal olarak incelenmesi şeklinde açıklamıştır. Bu araştırmada ise öğretmen adaylarının sayı kuramı kavramlarına ait yaptıkları tanımlar Zazkis ve Leikin tarafından ortaya konan erişilebilirlik, zenginlik, doğruluk ve genellik (somutluk) kriterlerinden "zenginlik ve doğruluk" kriterlerine göre derinlemesine incelenecektir.

3.2. Çalışma Grubu

Bu çalışmanın çalışma grubunu, bir Eğitim Fakültesinin İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 50 son sınıf öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemlerinden amaçlı rastgele örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir.

(Yazar, Keskin, 2020) Amaçlı rastgele örneklem sistematik ve rastgele seçilen durum örneklerinin araştırmanın amacı doğrultusunda amaçlı bir şekilde tasnif edilmesidir (Marshall, Rossman, 2014). Araştırmacı öncelikle rasgele yöntemleri kullanarak evrenden bir örneklem grubu belirlemekte ve daha sonra bu grup içinden araştırmaya en çok katkı yapacağını düşündüğü küçük bir alt grubu seçmektedir (Tashakkori, Teddlie, 2010). Bu çalışmada sayılar kuramı kavramlarına ait tanımlar, final sınavında 70 öğretmen adayına sorulmuş daha sonra daha zengin veri toplanması amacıyla tanımların çoğuna cevap vermiş 50 öğretmen adayının verileri değerlendirilmiştir. Ayrıca 50 öğretmen adayı arasından seçilen 3 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır.

3.3. Veri Toplama Süreci ve Araçları

Nitel araştırmada gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemleri kullanılmaktadır. (Seale, 1999) İlköğretim matematik öğretmenliği 4. sınıfın 1. döneminde yer alan Elementer Sayı Kuramı dersinde “bölme, kongruans olma, primitif kök, rasyonel sayı vb.” tanımlarının tümü verilmektedir. Bu konuda elementer sayı kuramı kitapları (Cangül, 2015; Kaya, 1988) incelenerek, ayrıca matematik eğitimi ana bilim dalının belirlediği ders içerikler de göz önünde bulundurularak 22 kavrama ait tanımın değerlendirilmesine karar verilmiştir. Bu aşamada 2 alan uzmanından da görüş alınmıştır. Bu kavramlara ait “Sayılar Kuramı Tanımları Formu (SKTF)” EK-1 de verilmektedir. Dönem boyunca elementer sayı kuramı dersinde öğretmen adaylarına bu kavramlar sunulmuş, akabinde final sınavında bu kavramların tanımları öğretmen adaylarından istenmiştir. SKTF ile yazılı olarak toplanan bu veriler incelendikten sonra 3 öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler SKTF bağlamında yürütülmüştür. Yarı yapılandırılmış görüşme diyalog geliştirmeye izin vererek, görüşme yapılan kişinin önemli gördüğü noktaların belirlendiği, yapılandırılmış görüşmeye göre daha esnek olan ve yapılandırılmamış görüşmeye göre ise önemli sayılan noktalara odaklanmayı kolaylaştıran bir görüşme türüdür. (Sözer, Aydın, 2020)

3.4. Verilerin Analizi

Yıldırım ve Şimşek (2018)’ in belirttiği gibi veri analizi nitel araştırmanın kalbidir. Öğretmen adaylarından yazılı olarak alınan sayı kuramı kapsamındaki kavram tanımlarının bulunduğu verilere betimsel analiz yapılmıştır. Betimsel analiz, çeşitli veri toplama teknikleri ile elde edilmiş verilerin daha önceden belirlenmiş temalara göre özetlenmesi ve yorumlanmasını içeren bir nitel veri analiz türüdür (Yıldırım, Şimşek, 2003). Bu çalışmada da öğretmen adaylarının sayı kuramı kapsamında bulunan 22 kavrama ait yaptıkları tanımlar, Zazkis ve Leikin tarafından ortaya konan erişilebilirlik, zenginlik, doğruluk ve genellik (somutluk) kriterlerinden "zenginlik ve doğruluk" kriterleri açısından incelenmiştir. SKTF den yazılı olarak elde edilen veriler bu kriterlere göre iki matematik eğitimcisi tarafından ayrı ayrı kodlanmış ve uyum yüzdesi %83 olarak bulunmuştur. Farklı kodlamaların bulunduğu yerlerde görüş birliğine varılmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmeler ise katılımcıların izni ile ses ve görüntü kaydına alınmıştır ve daha sonra veriler transkript edilmiştir. Görüşme verileri görüşme yapılan öğretmen adaylarının onayına sunulmuştur. Araştırmada elde edilen verilerin ve bunlara ilişkin araştırmacının ulaştığı sonuçların ve yorumların veri kaynakları (katılımcılar) ile teyit edilmesinde yarar vardır (Yıldırım ve Şimşek,2013, s302). Katılımcı onayından sonra veriler iki matematik eğitimcisi tarafından analiz edilmiştir.

3.5. Araştırmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Geçerlik ve güvenirlik araştırmaların temel unsuru olarak bilinirken aynı zamanda bu iki özelliğe titizlikle dikkat etmek, araştırmanın nitelikli olup olmadığını da belirlemektedir (Batdı, Oral, 2020). Nitel araştırmalarda güvenirlik için araştırmacının yorumlarının tutarlılığı, düzenliliği ve tekrarlanabilirliği ile doğru bilgi toplama ve kaydetme yeteneğine bakılmaktadır (Selltiz, Wrightsman ve Cook,1976,543). Bir başka ifadeyle araştırma yönteminin belirli aralıklarla değerlendirilmesinde tutarlı olarak aynı sonuçları vermesi şeklinde ifade edilebilir. Ancak nitel araştırmalarda ortam, veriler yani araştırmanın bileşenleri başka bir araştırmada da birebir aynı oluşturulamayacağı için sonuçların birebir aynı olması beklenmez (Batdı, Oral,2020).

Nitel araştırmalarda geçerliğin ve güvenirliğin sağlanması için birtakım kriterler belirlenmiştir. Bunlar inandırıcılık, aktarılabilirlik, tutarlılık, teyit edilebilirlik kriterleridir (Lincolin ve Guba, 1985). Bu kriterlerin sağlanması için araştırmacının, araştırmanın niteliğine uygun davranması, yani verilerin doğasına uygun yöntem, teknik ve taktikleri işe koşması, bunları gereği gibi kullanması, gerçekleri yaşaması, katılımcıların verilerini olabildiğince olduğu gibi sunması gereklidir (Sönmez, Alacapınar,2019,170).

İnandırıcılık, çalışma bileşenlerinin yani ortamdaki katılımcıların, yaşanan olayların ve ortamın kendisi ile ilgili yorumların gerçeği yansıtıp yansıtmadığıyla ilgilidir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu araştırmada inandırıcılığı arttırmak için elde edilen verilerin büyük bir kısmı bulgular bölümünde öğretmen adaylarının tanımlar ölçeğine doğrudan yazdığı şekliyle okuyucuya sunulmuştur. Yarı yapılandırılmış görüşmelerde ses ve görüntü kayıtları alınmış ve katılımcıların cümleleri katılımcılar tarafından teyit edildikten sonra doğrudan çalışmaya eklenmiştir.

Aktarılabilirlik ise araştırmadan elde edilen sonuçların başka çalışmalara veya benzer durumlara genellenebilirliği ile ilgilidir. Bu çalışmanın aktarılabilirliğini arttırmak için çalışmada ayrıntılı bir şekilde içerik analizi uygulanmış ve çalışma grubu amaçlı örnekleme yöntemlerinden amaçlı rastgele örnekleme yöntemi ile belirlenmiştir. Çalışmada verilerin doğrudan sunuluş biçimleri ile, araştırmacıların hangi durumlarda hangi sonuçları genelleyebileceklerinin açık ve net olması amaçlanmaktadır.

Tutarlık, çalışmada katılımcılardan toplanan verilerin tümünün benzer şekilde toplanmasına ve elde edilen sonuçların verilere uygun olup olmamasına bakılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışma, öğretmen adaylarından istenen kavram tanımları bir sınav esnasında alındığı için öğretmen adaylarının cevapları verirken ki ortam, stres düzeyi, hazırbulunuşluk durumları gibi faktörler açısından yüksek benzerliğe sahiptir. Yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında sorulan sorularda benzer sorulardır. Elde edilen veriler birden çok kez incelenmiş, tekrar tekrar kontrol edilmiş ve sonuçların tutarlı olduğu görülmüştür.

Teyit edilebilirlik, araştırmacının çalışma tamamlanana kadar olay ve durumlar karşısında tarafsız olduğuna ve verileri yorumlarken öznel yönelimlerden uzak kaldığına okuyucuyu inandırmasıdır (Yıldırım, Şimşek, 2016). Bu çalışmada elde edilen veriler iki ayrı matematik eğitimcisi tarafından ayrı ayrı kontrol edilerek kodlanmış ve elde edilen verilerin güvenirlik yüzdesi %83 olarak hesaplanmıştır.

Çalışmada geçerliğe yönelik önlemlerden üçgenleme kullanılmıştır. Üçgenleme, iki veya daha fazla bilinen noktadan bilinmeyen noktayı bulmayı içermektedir. Yani ne kadar çok bilinen nokta kullanılırsa, bilinmeyen yerin belirlenme olasılığı o kadar fazla olmaktadır (Batdı, Oral, 2020,135). Üçgenlemenin 4 ayrı kullanım alanı vardır. Bunlar; yöntem üçgenlemesi, veri kaynağı üçgenlemesi, araştırmacı üçgenlemesi, teori üçgenlemesi şeklindedir.

Çalışmada veri kaynağı üçgenlemesi ve araştırmacı üçgenlemesi yoluyla geçerlik ve güvenirlik arttırılmıştır. Verilere SKTF ve yarı yapılandırılmış görüşmeler yoluyla ulaşılmıştır. SKTF, öğretmen adaylarından 4. Sınıf güz dönemi final sınavında sınav sorusu şeklinde istenmiştir. Bu sebeple elde edilen veriler öğretmen adaylarının en iyi performansları verilerek toplanmıştır.

Yarı yapılandırılmış görüşmeler, görüşme esnasında katılımcıya bilgi verilerek ses ve görüntü kaydına alınmıştır. Ses ve görüntü kayıtları görüşmeler sonrasında iki matematik eğitimci tarafından ayrı ayrı detaylı olarak incelenerek veriler yazılı hale getirilmiştir. İki ayrı matematik eğitimcisi tarafından incelenen verilerde uyum görülmüştür. Veriler yazılı hale getirildikten sonra katılımcıların onayına sunulmuştur. Yanlış anlaşılan ifadeler olduğunda katılımcının aslında ne demek istediği tekrar görüşülmüş ve düzenlenmiştir.

3.6. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırma doğası gereği özneldir ve araştırmacı, araştırma konusu ile ilgili vakit geçiren, alanda olan biteni yaşayan, katılımcılarla birebir ilişki kuran ve verileri kodlayan, kategorilere ayıran, bağlamdan arındıran ve yeniden bağlamsallaştırma ile ilgili tüm uygulamaları yapan kişi olması bakımından araştırmacının rolü büyük önem taşımaktadır (Tekindal, Arsu, 2020, ufkun ötesi bilim dergisi,177). Bu çalışmada araştırmacının rolü verileri titizlikle toplamak ve zarar görmesini önlemek, elde edilen verilerin analizini geçerlik ve güvenirlik koşullarına uyarak gerçekleştirmek ve literatüre katkı sağlayabilmektir.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu araştırmada 50 ilköğretim matematik öğretmen adayından Sayı Kuramı dersi kapsamında bulunan “Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi), Rasyonel Sayı, İrrasyonel Sayı, Çift Tamsayı, Tek Tamsayı, Asal Sayı, n. Fermat Sayısı, En Büyük Ortak Bölen (EBOB), Aralarında Asal Sayılar, (Lineer) Diophant Denklem, En Küçük Ortak Kat (EKOK), Kongruant Olma, Lineer Kongruans, Rezidü Gösterimi, Euler Fonksiyonu, Kuadratik Rezidü (2. Dereceden Kalan), Legendre Gösterimi, a Tamsayısının Modm’deki Mertebesi, Primitif (İlkel) Kök, İndeks, Cebirsel Sayı, Transandant Sayı” kavramlarının tanımları istenmiştir. Zazkis ve Leikin (2008) tarafından verilen doğruluk ve zenginlik kriterlerine göre incelenen bu tanımlara ait bulgular aşağıda sunulmaktadır.

Kavram tanımlarını incelerken kaynak tanım olarak alınan tanımlar;

- Kaya, A. (1988), Sayılar Kuramına Giriş

- Güney, Z., Özkoç, M. (2015), Soyut Matematik

- “Wolfram Alpha”, (2022)

kaynaklarından alınmıştır.

4.1. “Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi)” kavramına ait bulgular

Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi) literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- $a,b \in Z$ ve $b \neq 0$ olsun. Eğer $a=b.c$ olacak şekilde $\exists\, c \in Z$ varsa “b böler a” denir ve $b|a$ şeklinde gösterilir.

Bu tanım baz alınarak öğretmen adaylarının verdiği tanımlar aşağıda sunulmaktadır.

4.1.1. “Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi)” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 3’de verilmiştir.

Tablo 3

Öğretmen adaylarının Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi) kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

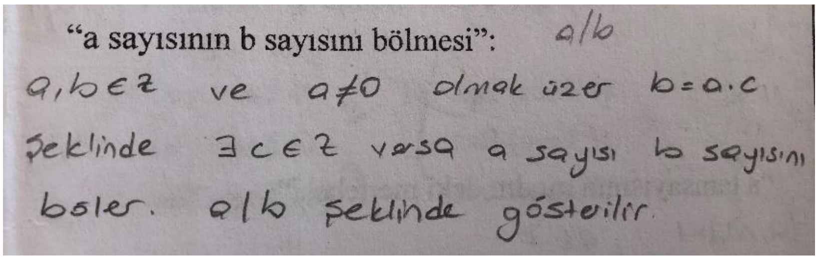
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	7	%14
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	6	%12
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	24	%48
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	1	%2
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	11	%22
CEVAPSIZ		1	%2

Uygun Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımlardan gerek ve yeter şartların tam olarak verildiği ve verilen bu bilgilerle ‘Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi)’ kavramını açıklayabilen tanımlar uygun tanımlar olarak değerlendirilmektedir. Tablodan görüldüğü üzere yapılan tanımların %26’lik kısmı “uygun” kategorisinde değerlendirilebilmektedir. 13 öğretmen adayının yapmış oldukları tanımlar, minimallik kriterine ve matematiksel dili kullanımına göre titiz ve titiz olmayan şeklinde iki kategoriye ayrılmıştır.

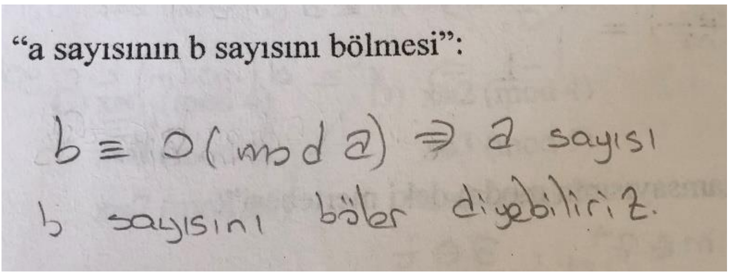
Uygun ve Titiz Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış oldukları uygun ve titiz tanımlar genellikle benzerlik göstermektedir. Bu kategoriye dahil edilen 7 tanımdan 6 tanesi neredeyse birebir aynı tanımlardır. Bunlar;



Şekil 2. Temel Bölme tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

Uygun ve titiz kategorisine dahil edilen bir diğer tanım ise diğerlerinden biraz daha farklı olarak alınabilecek bir tanımdır. Bu tanım ise aşağıda verilmiştir.



“a sayısının b sayısını bölmesi”:

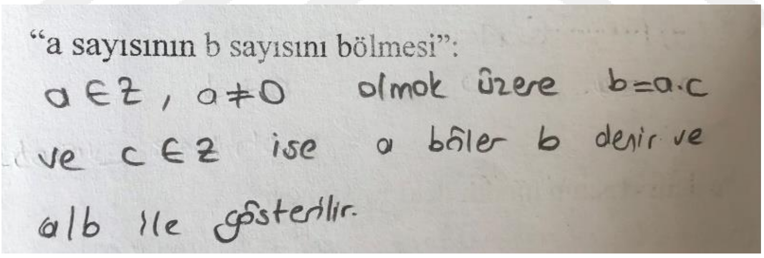
$b \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow a$ sayısı b sayısını böler diyebiliriz.

Şekil 3. Temel Bölme tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından dikkat eksikliği ya da matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım nedeniyle yanlış terminoloji içeren ya da genellikle bazı kısıtlamaları atlayan tanımlar bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoriye dahil edilen 6 tanım bulunmaktadır.

Yapılan 6 tanım notasyonda meydana gelen eksiklikten kaynaklı olarak bu kategoriye alınmıştır. Yapılan eksiklik “ ∃ (en az bir)” sembolünün kullanılmamasıdır. Bu tanımların bazı örnekleri aşağıda gösterilmektedir.



“a sayısının b sayısını bölmesi”:

$a \in Z$, $a \neq 0$ olmak üzere $b=a.c$ ve $c \in Z$ ise a böler b denir ve $a|b$ ile gösterilir.

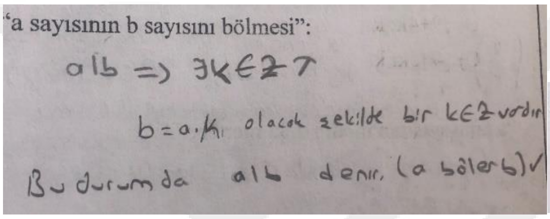
Şekil 4. Temel Bölme tanımına ait uygun ve titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

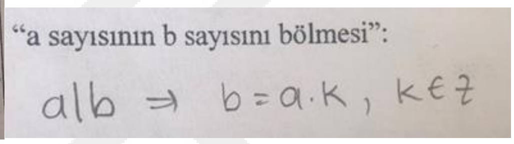
Uygun Olmayan Tanımlar

Bir kavramı ortaya çıkaracak gerekli veya yeterli şartların eksik veya fazla verilmesi ile yapılmış ya da kavramdan daha genel veya daha spesifik olan ya da kavramla ilgisiz olan yanlış özellikler içeren tanım örnekleri ‘uygun olmayan tanım’ şeklinde ifade edilmektedir. Öğretmen adaylarının Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi) kavramına ait yaptıkları tanımların %72’si bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Tanımı yapılacak olan kavramın o kavram olması için gerekli olan şartların bulunduğu ancak verilen şartların yetersiz olduğu tanımlar bu kısımda değerlendirilmektedir. Öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımların neredeyse yarısı bu kategoride yer almaktadır. Yetersiz olmasına sebep olan eksiklikler çoğu tanımda benzerlik göstermektedir. Bir grup öğretmen adayı a ve b sayılarının tam sayıların elemanı olmasını, bir grup öğretmen adayı a sayısının sıfırdan farklı bir tamsayı olmasını ve bir grup öğretmen adayı ise ikisini birden eksik bırakmıştır. Bu kategoriye örnek birkaç tanım aşağıda verilmiştir.

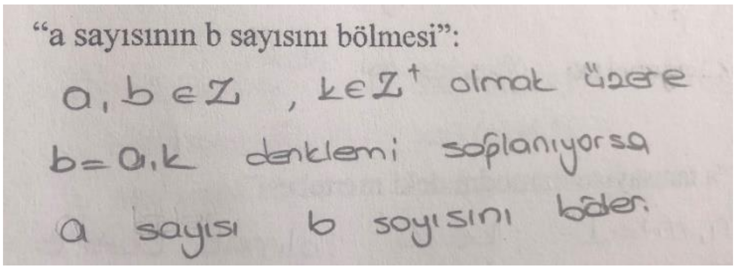

"a sayısının b sayısını bölmesi":
$a|b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni$
$b = a.k$, olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ vardır
Bu durumda $a|b$ denir. (a böler b)✓


"a sayısının b sayısını bölmesi":
$a|b \Rightarrow b = a.k,\ k \in \mathbb{Z}$

Şekil 5. Temel Bölme tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

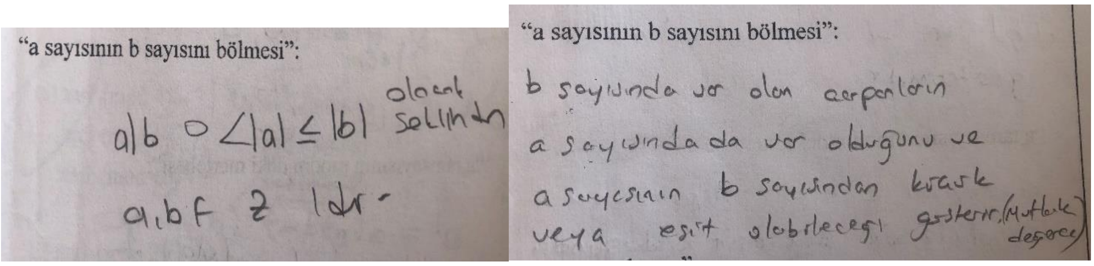
Kavramı tanımlarken gereksiz kısıtlamalar getiren, kavram yerine onun belli bir bölümünü oluşturan tanımlar bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoride ait yalnız 1 tanım bulunmaktadır. Bu tanımda k'nın pozitif tam sayılar kümesinin elemanı olduğunu belirterek gereksiz bir kısıtlamaya yol açmıştır. Tanım aşağıda verilmiştir.


"a sayısının b sayısını bölmesi":
$a, b \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere
$b = a.k$ denklemi sağlanıyorsa
a sayısı b sayısını böler.

Şekil 6. Temel Bölme tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Kavramı tanımlayabilmek için verilen özelliklerin kavramın oluşması için ne yeterli ne de gerekli olduğu durumdur. Öğretmen adaylarından alınan tanımlardan 11 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"a sayısının b sayısını bölmesi":
$a|b$ $0<|a|\le|b|$ olacak şeklinde
$a,b \in \mathbb{Z}$ 'dir.

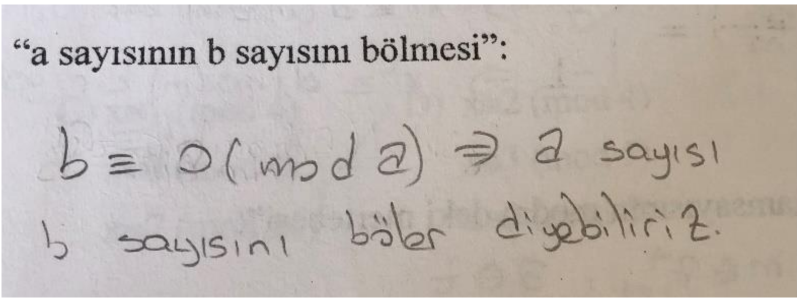
"a sayısının b sayısını bölmesi":
b sayısında var olan çarpanların
a sayısında da var olduğunu ve
a sayısının b sayısından küçük
veya eşit olabileceği gösterir. (Mutlak değerce)

Şekil 7. Temel Bölme tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.1.2. "Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi)" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Zenginlik kriteri açısından yapılan tanımlar incelenirken tür ve yapı bakımından farklılık gösterip göstermediği, belirli bir bağlamdan mı yoksa çeşitli bağlamlardan mı alındıkları incelenmektedir. Geleneksel-öğretimsel örnek alanını genişleten tanımlar zengin olarak kabul edilmektedir (Leikin ve Zazkis, 2008).

Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi) kavramı için zengin olarak değerlendirilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. Bu tanım aşağıda verilmiştir.


"a sayısının b sayısını bölmesi":
$b \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow$ a sayısı
b sayısını böler diyebiliriz.

Şekil 8. Temel Bölme tanımına ait zengin kategorisinde öğretmen adayı cevabı

4.2. “Rasyonel Sayı” kavramına ait bulgular

Rasyonel sayı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- İki tam sayının bölümü olarak yazılabilen gerçek sayılara denir.
- Q = $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0\}$ kümesinin elemanlarının her birine denir
- a ve b tamsayı, $b \neq 0$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklindeki sayılara denir.

Bazı kaynaklarda rasyonel sayıyı oluşturan a ve b tamsayıları için (a,b)=1 (aralarında asallık) ifadesi de geçmektedir. Bu tür tanımlar da doğru olarak kabul edilmiştir.

4.2.1. “Rasyonel Sayı” kavramının Doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 4’de verilmiştir.

Tablo 4

Öğretmen adaylarının Rasyonel Sayı kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	17	%34
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	2	%4
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	27	%54
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	3	%6
CEVAPSIZ		1	%2

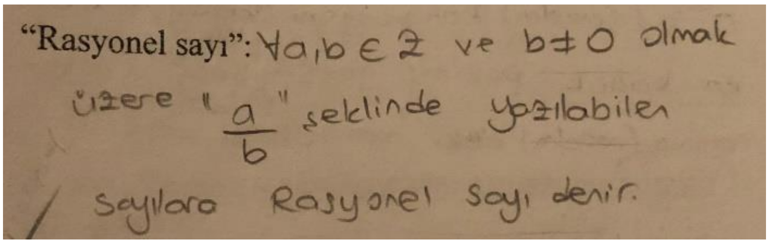
Öğretmen adaylarından bir kişi Rasyonel Sayı kavramına ait tanım yazmamıştır.

Uygun Tanımlar

Tablodan görüldüğü üzere yapılan tanımların %38’lik kısmı “uygun” kategorisinde değerlendirilebilmektedir. 19 öğretmen adayının yapmış oldukları tanımlar, minimallik kriterine ve matematiksel dili kullanımına göre değerlendirildiğinde bu kategoride yer alan 17 tanımında uygun ve titiz alt kategorisinde yer aldığı gözlenmiştir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

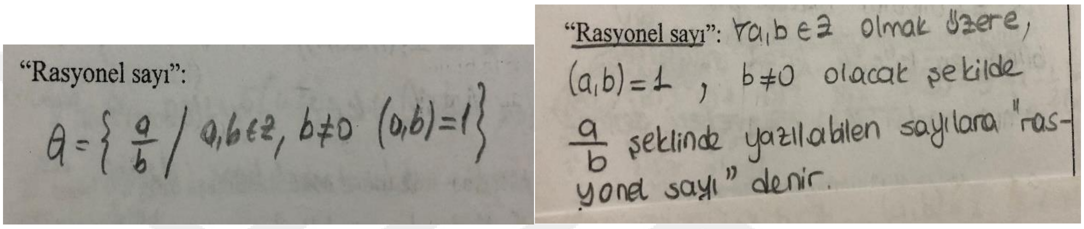
Öğretmen adaylarının yapmış oldukları uygun ve titiz tanımlar genellikle benzerlik göstermektedir. Bu kategoriye dahil edilen tanımların bir kısmı birebir aynı tanımlardır. O tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir:



“Rasyonel sayı”: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere "$\frac{a}{b}$" şeklinde yazılabilen sayılara Rasyonel sayı denir.

Şekil 9. Rasyonel Sayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

Uygun ve titiz tanımlarından 6 tanesinde aralarında asallık kriteri de kullanılmıştır.



“Rasyonel sayı”: $Q = \{ \frac{a}{b} / a,b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \ (a,b)=1 \}$

“Rasyonel sayı”: $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, $(a,b)=1$, $b \neq 0$ olacak şekilde $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara "rasyonel sayı" denir.

Şekil 10. Rasyonel Sayı tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında katılımcılardan biri bu konuyla ilgili aşağıdaki açıklamayı yapmıştır.

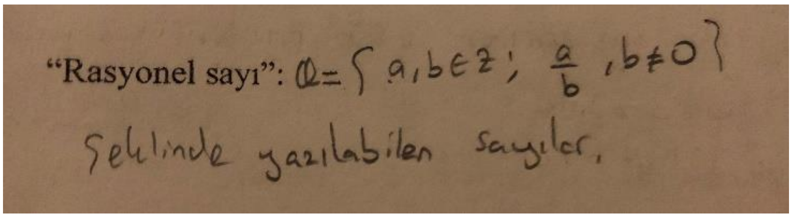
A: “Sayının rasyonel sayı olabilmesi için seçilen a ve b tam sayılarının aralarında asal olmaları gerektiğini belirttin. Bu durumu yorumlayabilir misin?”

K1: “Aralarında asal olması rasyonel sayıyı kesirden ayıran bir özellikti. Devlet kitaplarında bunu belirtmiyor ama olması gereken buydu sanki.”

K1 katılımcısı kesir ve rasyonel sayı arasındaki farklardan yola çıkarak rasyonel sayı tanımını netleştirmeyi hedeflemiştir ancak görüşme sonunda net bir cevap vermemiştir.

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Rasyonel Sayı kavramı incelendiğinde bu kategoriye dahil edilebilecek notasyona çok dikkat edilmediği için 2 tanım dahil edilmiştir.



"Rasyonel sayı": $Q = \{a, b \in Z;\ \frac{a}{b}, b \neq 0\}$ şeklinde yazılabilen sayılar.

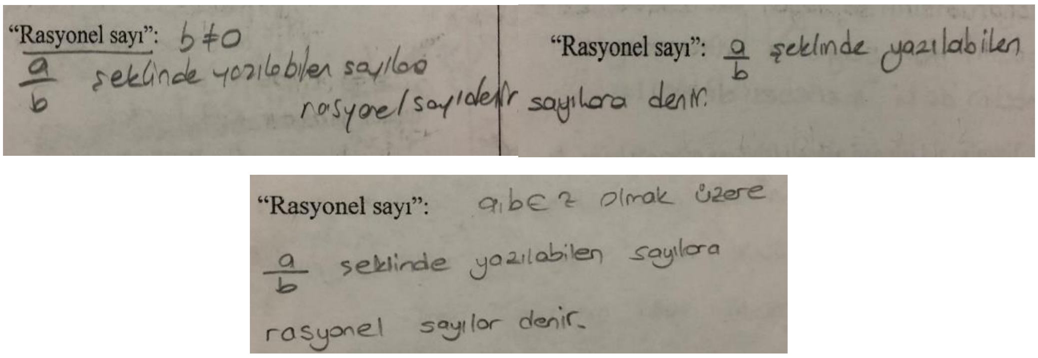
Şekil 11. Rasyonel Sayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Rasyonel Sayı kavramına ait yaptıkların tanımların %60'ı bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımların neredeyse yarısı bu kategoride yer almaktadır. Yetersiz olmasına sebep olan eksiklikler çoğu tanımda benzerlik göstermektedir. Öğretmen adaylarının bir kısmı a ve b sayılarının tam sayıların elemanı olmasını, bir kısmı paydada bulunan sayının sıfırdan farklı bir tamsayı olmasını ve bir kısmı ise ikisini birden eksik bırakmıştır. Bu kategoriye örnek birkaç tanım aşağıda verilmiştir.



"Rasyonel sayı": $b \neq 0$ $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılar rasyonel sayılardır

"Rasyonel sayı": $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara denir.

"Rasyonel sayı": $a, b \in Z$ olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılara rasyonel sayılar denir.

Şekil 12. Rasyonel Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Öğretmen adayları arasından belirlenen katılımcılar ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerden birkaç kesit aşağıda verilmiştir.

A: "Yaptığın rasyonel sayı tanımında a ve b elemanlarının tanım kümesini belirtmediğini görüyorum. Bu durumu nasıl yorumlarsın?"

K1: “a ve b’nin tanım kümesini belirtmemişim ama belirtmeliydim. Yoksa a’yı $\sqrt{3}$ olarak da seçebilirdim.”

Bir başka katılımcı ise bu konuda aşağıdaki yorumlarda bulunmuştur.

A: “Yaptığın rasyonel sayı tanımında a ve b elemanlarının tanım kümesini belirtmediğini görüyorum. Bu durumu nasıl yorumlarsın?”

K3: “Öğretim yapacağımız kademede genelde tam sayılar kullanıldığı için, özellikle 7 ve 8. sınıflarda o yüzden karşımdaki de tam sayılarda çalışıyormuş gibi hissettiğimden söylememiş olabilirim.”

A: “Belirtmediğinde aslında tam sayılardan bahsediyorsun yani?”

K3: “Evet”

A: “Sayı kümesi tanımlarda belirtilmeli midir? Sence bu gerekli bir durum mu?”

K3: “Yani şimdi… Bu hangi ortamda olduğuna bağlı. Ortaokuldaysam çalıştığım küme belli hemen hemen. Ama şu an bulunduğum yerde hangi tanım kümesinde çalıştığımı söylemem gerekiyor, bulunduğum yere göre değişiyor.”

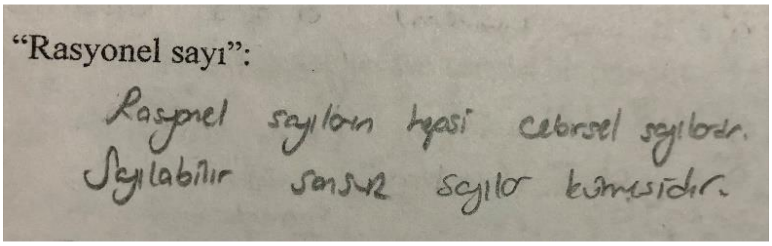
Yapılan görüşmelerde öğretmen adaylarının sayı kümesinin tanımlarda belirtilmesinin gerekliliği konusunda fikir ayrılıkları yaşadıkları görülmüştür.

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Bu kategoride tanım bulunmamaktadır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

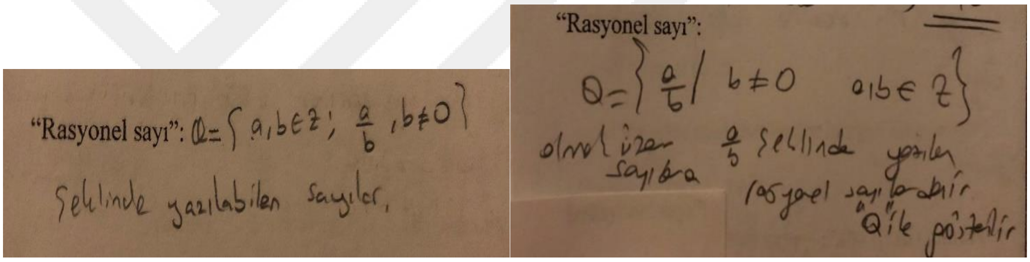
Kavramı tanımlayabilmek için verilen özelliklerin kavramın oluşması için ne yeterli ne de gerekli olduğu durumdur. Öğretmen adaylarından almış olduğumuz tanımlardan 3 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlar aşağıda verilmiştir.



Şekil 13. Rasyonel Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevabı

4.2.2. "Rasyonel Sayı" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Rasyonel Sayı kavramı için zengin olarak değerlendirilebilecek 2 tanıma rastlanmıştır. Bu tanımlar aşağıda verilmiştir.



Şekil 14. Rasyonel Sayı tanımına ait zengin kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Bu iki tanım haricindeki tanımlarda öğretmen adayları, küme notasyonunu hiç kullanmamıştır. Bu yüzden bu iki tanım zengin kategorinde değerlendirilmiştir.

4.3. "İrrasyonel Sayı" kavramına ait bulgular

İrrasyonel sayı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- Rasyonel sayılar kümesine dahil olmayan gerçek sayılardır.
- Devirli ondalık açılımları olmayan gerçek sayılardır.
- a ve b tamsayı ve b sıfırdan farklı olmak üzere $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılamayan sayılara denir.

4.3.1. *“İrrasyonel Sayı” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi*

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 5’de verilmiştir.

Tablo 5

Öğretmen adaylarının İrrasyonel Sayı kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	3	%6
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	2	%4
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	36	%72
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	8	%16
CEVAPSIZ		1	%2

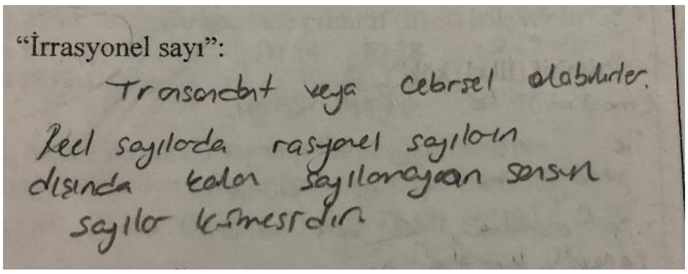
Öğretmen adaylarından bir kişi İrrasyonel Sayı kavramına ait tanım yazmamıştır.

Uygun Tanımlar

Öğretmen adaylarının “İrrasyonel Sayı” kavramına ait yaptıkları tanımların %10’luk kısmı “uygun” kategorisinde değerlendirilebilmektedir. 5 öğretmen adayının yapmış oldukları tanımlar, minimallik kriterine ve matematiksel dili kullanımına göre değerlendirildiğinde bu kategoride yer alan 3 tanım uygun ve titiz kategorisinde, 2 tanım ise uygun ancak titiz olmayan kategorisinde yer aldığı gözlenmiştir.

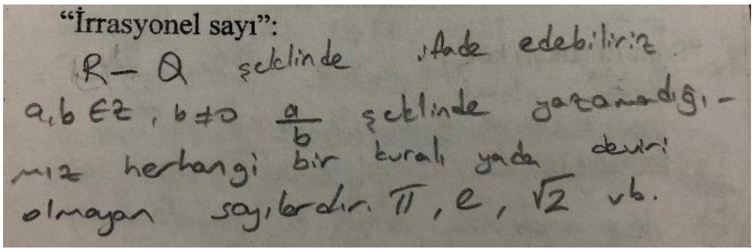
Uygun ve Titiz Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış oldukları uygun ve titiz tanımların 3 tanesi de birbirinden farklı tanımlardır. Bu kategoriye dahil ettiğimiz tanımlardan bir tanesi uzman tanım kabul edilebilecek bir tanımdır. Bu tanım aşağıda verilmiştir:



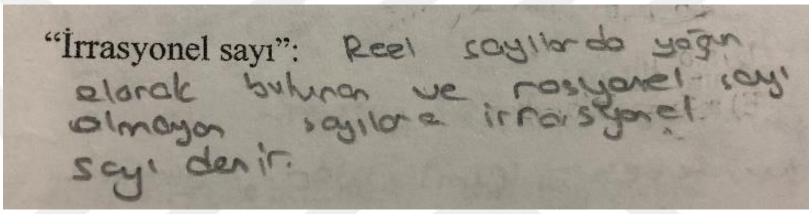
Şekil 15. İrrasyonel Sayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

Diğer bir uygun ve titiz kategorisindeki tanım ise aşağıdaki gibidir:


"İrrasyonel sayı": $R-Q$ şeklinde ifade edebiliriz. $a,b \in Z$, $b \neq 0$ $\frac{a}{b}$ şeklinde yazamadığımız herhangi bir kurallı yada devirli olmayan sayılardır. π, e, $\sqrt{2}$ vb.

Şekil 16. İrrasyonel Sayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

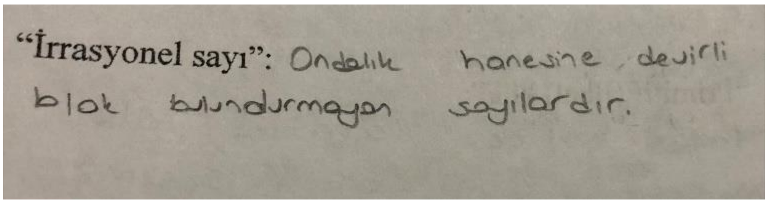
Üçüncü tanım ise şekil 17'de verilmiştir.


"İrrasyonel sayı": Reel sayılarda yoğun olarak bulunan ve rasyonel sayı olmayan sayılara irrasyonel sayı denir.

Şekil 17. İrrasyonel Sayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 3

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

İrrasyonel sayı kavramı için bu kategoriye dahil olan 2 tanım vardır. Bu iki tanım benzerlik göstermektedir. Tanımların bu kategoride olmasının sebebi matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım olarak düşünülebilir. Bu tanımlara örnek aşağıda verilmiştir.


"İrrasyonel sayı": Ondalık hanesine devirli blok bulundurmayan sayılardır.

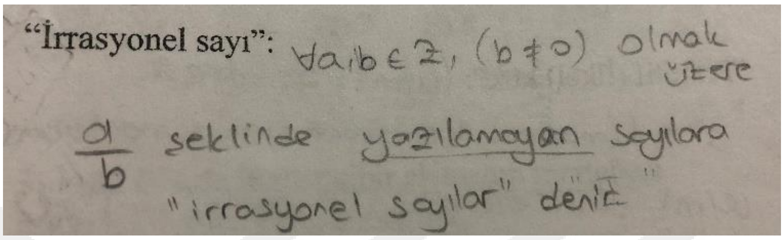
Şekil 18. İrrasyonel Sayı tanımına ait uygun ve titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının İrrasyonel Sayı kavramına ait yaptıkların tanımların %88'i bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

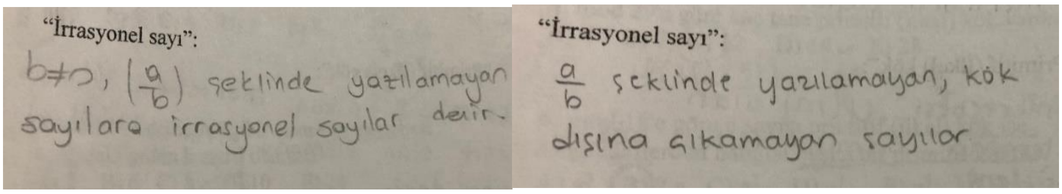
Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Kavrama ait yapılan tanımların çoğu bu kategoride yer almaktadır. Yetersiz olmasına sebep olan eksiklikler çoğu tanımda benzerlik göstermektedir. Bazı öğretmen adayları aşağıdaki tanımda görüldüğü üzere gerçek sayı vurgusu yapmamıştır.



Şekil 19. İrrasyonel Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

Şekil 19'da yer alan tanıma göre (3+5i) sayısı da irrasyonel sayı olarak kabul edilebilir. Bu tanımdan farklı olarak çoğu tanımda ise a ve b elemanlarının tanımlı oldukları sayı kümesinden hiç bahsedilmemiştir. Bu tarz tanımlara örnekler aşağıda verilmiştir.



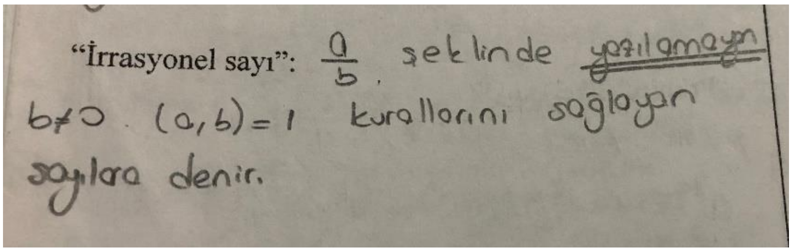
Şekil 20. İrrasyonel Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları 2

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

İrrasyonel Sayı kavramı için bu kategoride tanım yer almamaktadır.

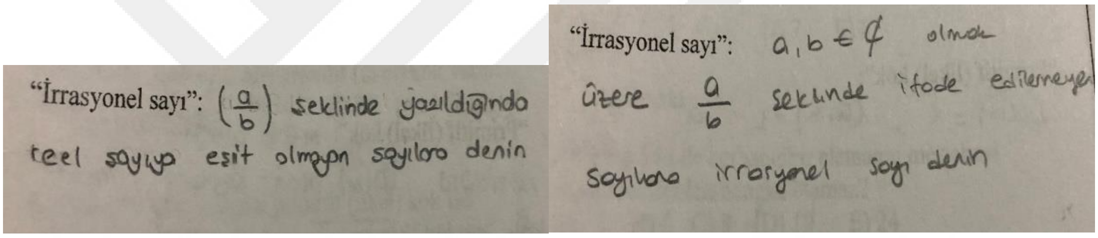
Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarından almış olduğumuz tanımlardan 8 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Yapılan tanımlardan 3 tanesi benzer tanımlar olup a ve b sayılarının aralarında asal olma şartını eklemişlerdir. Kalan 5 tanım ise birbirinden farklı tanımlardır. Bu kategoriye dahil edilen tanımlar aşağıda verilmiştir.



Şekil 21. İrrasyonel Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

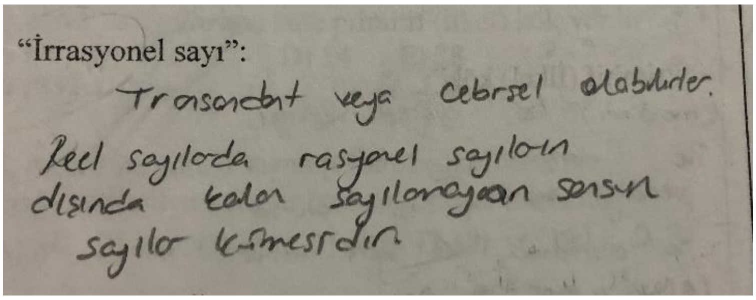
Şekil 21'de yapılan tanım bu kategoride yer alan diğer iki tanımla birebir aynıdır. Aralarında asal olma şartı irrasyonel sayı tanımı için gereksiz bir kısıtlama oluşturmaktadır. Kategoriye dahil olan birkaç farklı tanım örneğine aşağıda yer verilmiştir.



Şekil 22. İrrasyonel Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları 2

4.3.2. "İrrasyonel Sayı" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

İrrasyonel Sayı kavramı için zengin olarak değerlendirilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. Bu tanım aşağıda verilmiştir.



Şekil 23. İrrasyonel Sayı tanımına ait zengin kategorisinde öğretmen adayı cevabı

4.4. “Çift Tamsayı” kavramına ait bulgular

Çift tamsayı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- n ∈ Z olmak koşuluyla 2n ifadesi ile belirtilen tam sayılara çift tamsayı denir.
  Ç={…, -2n, …, -4, -2, 0, 2, 4, …, 2n,…} kümesinin elemanlarının her biri çift sayıdır.
- 2 ile kalansız bölünebilen (2’nin tam katı olan) tamsayılardır.

4.4.1. “Çift Tamsayı” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 6’da verilmiştir.

Tablo 6

Öğretmen adaylarının Çift Tamsayı kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

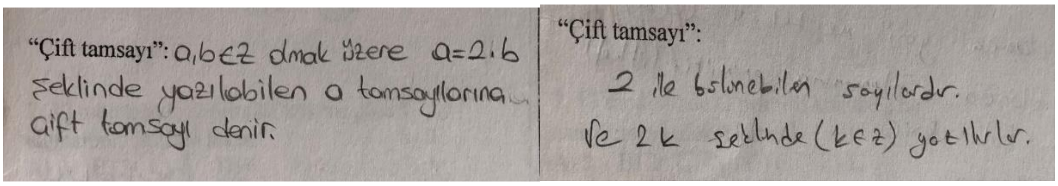
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	27	%54
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	10	%20
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	10	%20
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	3	%6
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	0	%0

Uygun Tanımlar

Çift Tamsayı kavramı için yapılan tanımların %74’lük kısmı “uygun” kategorisinde değerlendirilebilmektedir. 37 öğretmen adayının yapmış oldukları tanımlar, minimallik kriterine ve matematiksel dili kullanımına göre değerlendirildiğinde bu kategoride yer alan 27 tanım uygun ve titiz kategorisinde, 10 tanım ise uygun ancak titiz olmayan kategorisinde yer aldığı gözlenmiştir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

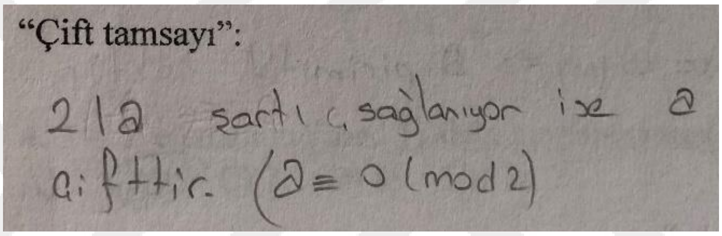
Öğretmen adaylarının yapmış oldukları uygun ve titiz tanımların büyük bir kısmının benzer olduğu görülmüştür. Bu benzer tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"Çift tamsayı": $a,b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a=2.b$ şeklinde yazılabilen a tamsayılarına çift tamsayı denir.

"Çift tamsayı": 2 ile bölünebilen sayılardır. ve 2k şeklinde ($k \in \mathbb{Z}$) gösterilirler.

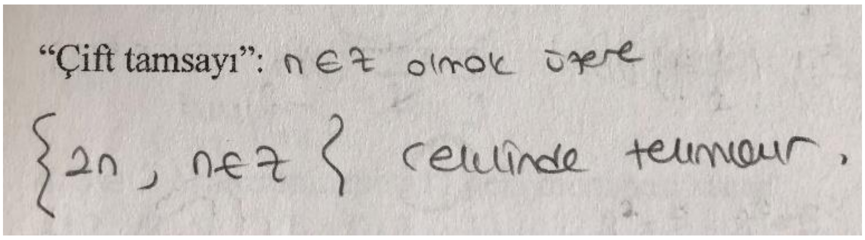
Şekil 24. Çift Tamsayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Verilen tanımlardan 23 tanesi yukarıda verilen tanımlarla neredeyse birebir aynı yapıdadır. Uygun ve titiz kategorisine dahil ettiğimiz kalan 4 tanım ise biraz daha farklı ifade edilmiş tanımlardır. 50 öğretmen adayından yalnızca 1 öğretmen adayının kullandığı modüler aritmetiği içeren tanım, uzman tanım olarak alınabilecek bir tanım örneğidir.


"Çift tamsayı":
$2|a$ şartı sağlanıyor ise a çifttir. ($a \equiv 0 \pmod 2$)

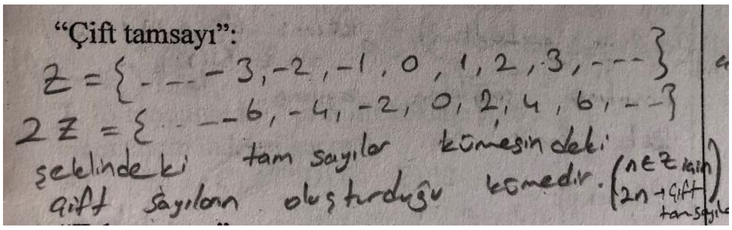
Şekil 25. Çift Tamsayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Katılımcılardan yalnızca 1 kişi bu tarzda bir tanımlama yapmıştır. Uzman tanım olarak kabul edilebilecek tanım şekil 25'te verilmiştir.


"Çift tamsayı": $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$\{2n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlanır.

Şekil 26. Çift Tamsayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 3

Şekil 26'da verilen tanımın neredeyse birebir aynısı bir tanım daha bulunmaktadır. Bu tanımlarda matematiksel dildeki kullanım yapılan tanımların genelinden farklıdır. Bunlardan daha farklı biçimde ifade edilen bir diğer tanım ise aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 27. Çift Tamsayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 4

Yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında katılımcılardan öncelikle çift tamsayı kavramını tanımlamaları ve daha sonrasında kendi yaptıkları tanımları değerlendirmeleri istenmiştir.

A: "Çift tamsayı kavramını nasıl tanımlarsın?"

K1: "İçinde 2 çarpanını bulunduran tam sayılar çift tamsayıdır."

Sonrasında yazılı olarak yaptığı tanım gösterilmiştir.

A: "Söylediğin tanım ve yaptığın tanım birbirinden farklı bu konuda ne düşünüyorsun?"

K1: "Yazdığım tanım ezbere bir tanım olmuş, yakın zamanda ezberlemişim ve buraya yazmışım ama bence bu bir anda söylenebilecek pratik ve kullanışlı bir tanım değil."

A: "Çift tamsayı kavramını nasıl tanımlarsın?"

K2: "2'ye bölünebilen tam sayılar çift tamsayıdır."

Sonrasında yazılı olarak yaptığı tanım gösterilmiştir.

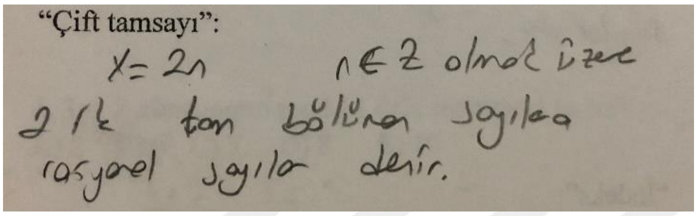
A: "Yaptığın tanımı nasıl yorumluyorsun?"

K2: "Bu çok karışık görünen bir tanım. Bunu bir öğrenci anlayamaz, hatta bir öğretmen için bile zorlayıcı bir tanım."

Burada katılımcılar SKTF'de yaptıkları tanımları görüşme esnasında yaptıkları tanımlardan daha ezbere ve daha anlaşılırlığı düşük buldular. Matematiksel dil kullanımı arttıkça tanımın anlaşılırlığının düştüğünü hissettikleri düşünülebilir.

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

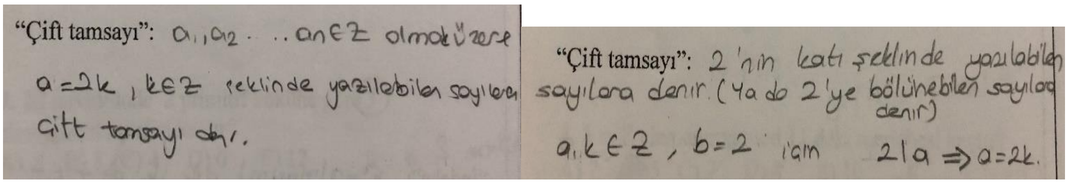
Çift Tamsayı kavramı için bu kategoriye dahil olan 10 tanım vardır. Tanımlar bu kategoriye alınmasına sebep olan nedenlere göre gruplandırıldığında bir tanım dikkat eksikliğinden dolayı bu kategoride yer almaktadır.


"Çift tamsayı": $x=2n$ $n\in Z$ olmak üzere
$2/k$ tam bölünen sayılara
rasyonel sayılar denir.

Şekil 28. Çift Tamsayı tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

Şekil 28'deki tanım öğretmen adayı tanımı sonlandırırken yaptığı hata sebebiyle uygun ancak titiz olmayan kategorisine alınmıştır.

Matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım sebebiyle bu kategoriye dahil edilen birkaç tanım örneği aşağıda verilmiştir.


"Çift tamsayı": $a_1, a_2 \ldots a_n \in Z$ olmak üzere
$a=2k$, $k\in Z$ şeklinde yazılabilen sayılara
çift tamsayı denir.

"Çift tamsayı": 2'nin katı şeklinde yazılabilen
sayılara denir. (Ya da 2'ye bölünebilen sayılara denir)
$a,k\in Z$, $b=2$ için $2|a \Rightarrow a=2k$.

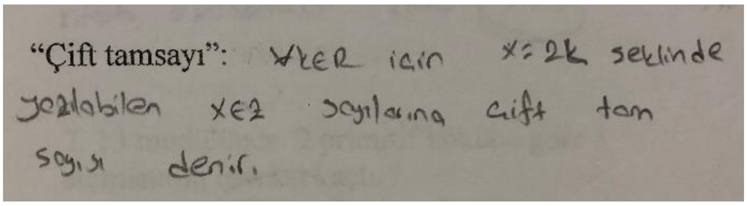
Şekil 29. Çift Tamsayı tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevapları 2

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Çift Tamsayı kavramına ait yaptıkların tanımların %26'sı bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

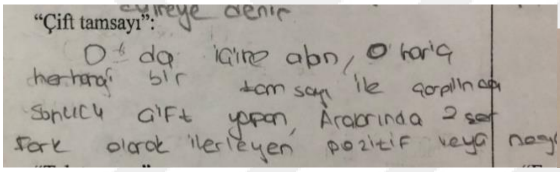
Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

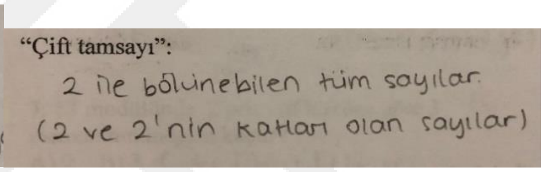
Bu kavrama ait tanımlardan 10 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlardan 2 tanesi k sayısını gerçek sayılar kümesinden seçmiştir. k sayısına 1/2 değerini verdiğimizde 2k=1 sonucuna ulaşıyoruz ki bu değer bir çift tamsayı olmamaktadır. Bu iki tanımı gerekli ancak yetersiz kategorisine almak pek uygun değildir. Çünkü bu tanımlar gerekli şartları bulundurup bu şartların yetersiz olduğu bir durum değildir. Kuramsal çerçeve kapsamında konulabilecek en uygun kategoriye koymakla beraber bu kategorilere ek farklı bir kategori ihtiyacı da hissedilmektedir. Bu iki tanıma bir örnek Şekil 30'da verilmiştir.


"Çift tamsayı": $\forall k \in \mathbb{Z}$ için $x=2k$ şeklinde yazılabilen $x \in \mathbb{Z}$ sayılarına çift tam sayı denir.

Şekil 30. Çift Tamsayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

Bu kategorideki diğer 8 tanımda yapılan eksiklik ise sayı kümesinin belirtilmemesinden kaynaklanmaktadır. Bu tarz tanımlara ait örneklere aşağıda yer verilmiştir.

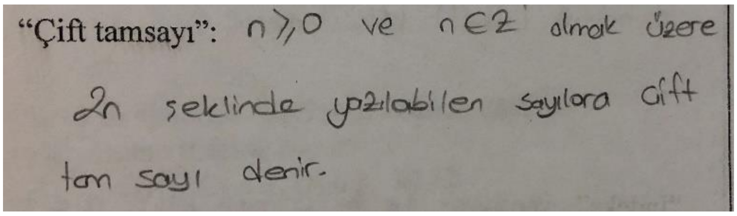

"Çift tamsayı": 0'da içine alın, 0 hariç herhangi bir tam sayı ile çarpılınca sonucu çift yapan, Aralarında 2 sayı fark olarak ilerleyen pozitif veya negatif


"Çift tamsayı": 2 ile bölünebilen tüm sayılar (2 ve 2'nin katları olan sayılar)

Şekil 31. Çift Tamsayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları 2

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Çift Tamsayı kavramı için bu kategoride 3 tanım yer almaktadır. Bu tanımların 'gereksiz' olmasına sebep olan sadece pozitif çift tamsayıları tanımlamalarıdır.


"Çift tamsayı": $n \geq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $2n$ şeklinde yazılabilen sayılara çift tam sayı denir.

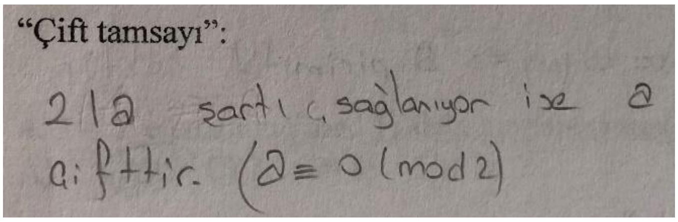
Şekil 32. Çift Tamsayı tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarından almış olduğumuz tanımlardan bu kategoriye dahil edebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.4.2. “Çift Tamsayı” kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Çift Tamsayı kavramı için zengin olarak değerlendirilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. Tanım yapılan tanımların çoğundan farklı bir şekilde ifade edilmiştir.



Şekil 33. Çift Tamsayı tanımına ait zengin kategorisinde öğretmen adayı cevabı

4.5. “Tek Tamsayı” kavramına ait bulgular

Tek tamsayı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- $n \in Z$ olmak koşuluyla 2n+1 ifadesi ile belirtilen tam sayılara tek tamsayı denir.
  T ={…, -(2n+1), …, -4, -2, 0, 2, 4, …, (2n+1),…} kümesinin elemanlarının her biri tek sayıdır.
- 2 ile kalansız bölünemeyen (2’nin tam katı olmayan) tamsayılardır.

4.5.1. “Tek Tamsayı” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 7’de verilmiştir.

Tablo 7

Öğretmen adaylarının Tek Tamsayı kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

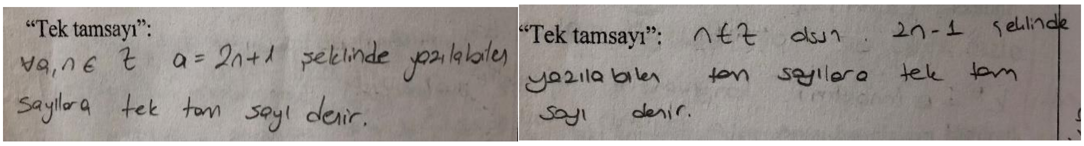
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	26	%52
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	5	%10
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	12	%24
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	3	%6
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	2	%4
CEVAPSIZ		2	%4

Uygun Tanımlar

Tek Tamsayı kavramı için yapılan tanımların %62’lık kısmı “uygun” kategorisinde değerlendirilebilmektedir. 31 öğretmen adayının yapmış oldukları tanımlar, minimallik kriterine ve matematiksel dili kullanımına göre değerlendirildiğinde bu kategoride yer alan 26 tanım uygun ve titiz kategorisinde, 5 tanım ise uygun ancak titiz olmayan kategorisinde yer aldığı gözlenmiştir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

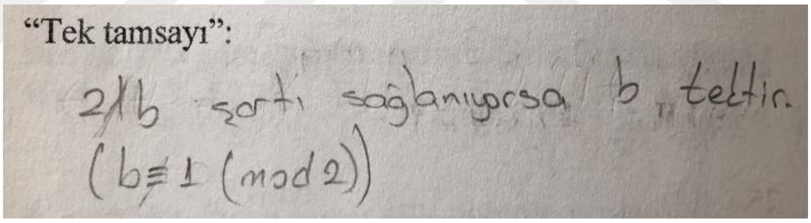
Öğretmen adaylarının yapmış oldukları uygun ve titiz tanımların büyük bir kısmının benzer olduğu görülmüştür. Bu benzer tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"Tek tamsayı": $\forall a, n \in \mathbb{Z}$ $a = 2n+1$ şeklinde yazılabilen sayılara tek tam sayı denir.

"Tek tamsayı": $n \in \mathbb{Z}$ olsun. $2n-1$ şeklinde yazılabilen tam sayılara tek tam sayı denir.

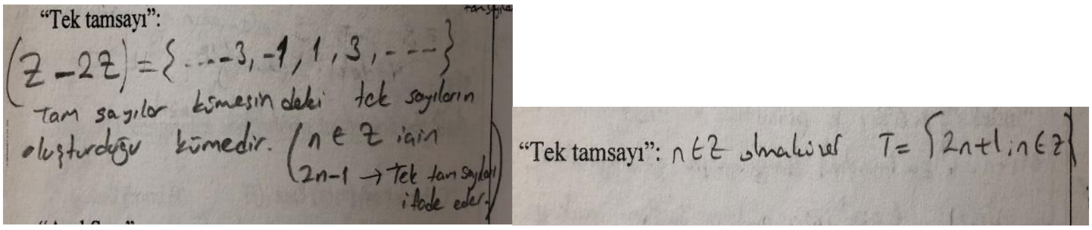
Şekil 34. Tek Tamsayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları 1

Bu kategoride bulunan 22 tanımın yukarıdaki tanımlarla benzer olduğu görülmüştür. Kalan 4 tanım ise diğer tanımlardan daha farklı şekilde ifade edilmiştir. Bu tanımlara örnekler aşağıda verilmiştir.


"Tek tamsayı":
$2 \nmid b$ şartı sağlanıyorsa b tektir.
$(b \equiv 1 \pmod 2)$

Şekil 35. Tek Tamsayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

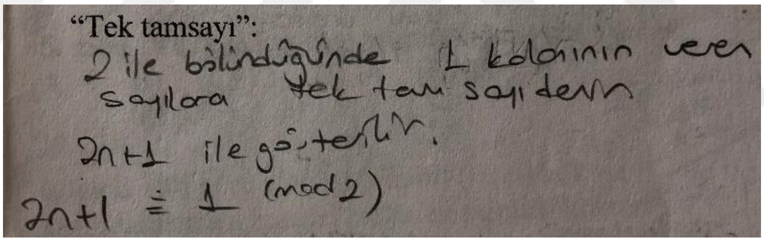
Şekil 35'te modüler aritmetikten yararlanarak tek tamsayı kavramı tanımlanmıştır. 50 katılımcıdan yalnızca bir tanesi bu şekilde bir tanımlama yapmıştır. Uygun ve titiz olarak kabul edilen farklı tanım örneklerinden birkaçına aşağıda yer verilmiştir. Bu öğretmen adaylarının matematiksel dili diğer katılımcılardan daha fazla kullandıkları söylenebilir.



Şekil 36. Tek Tamsayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları 3

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Tek Tamsayı kavramı için bu kategoriye dahil olan 5 tanım vardır. Bu tanım benzerdir. Öğretmen adayları tanımlama yaparken değişkenlerin sayı kümesini belirtmediği için gerekli ancak yetersiz kategorisine alınabilecek tanımlar varken başka bir öğretmen adayı ise tanımda modüler aritmetik kullanarak aslında tamsayılar kümesini kastettiğini düşündürmüştür. Aynı zamanda tanımlama yaparken notasyonun özensiz şekilde kullanılması da bu kategoride yer almasına sebep olmuştur.



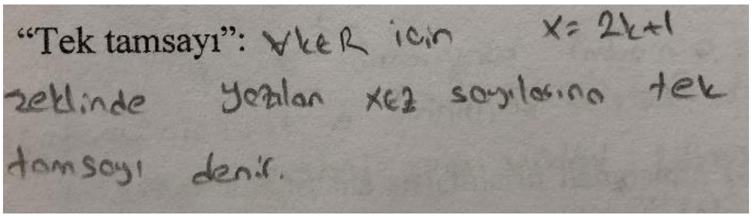
Şekil 37. Tek Tamsayı tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Tek Tamsayı kavramına ait yaptıkların tanımların %34'si bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

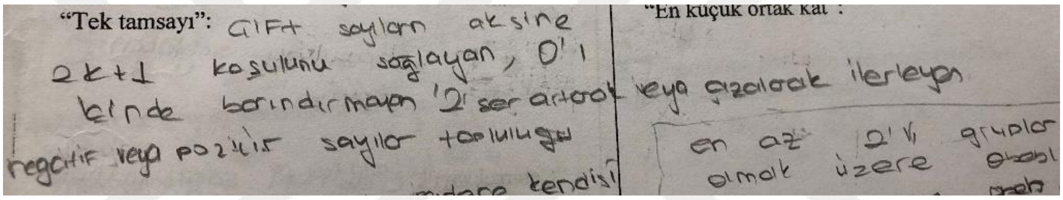
Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu 12 tanım bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlardan 2 tanesi k sayısını gerçek sayılar kümesinden seçmiştir. k sayısına 1/2 değerini verdiğimizde 2k+1=2 sonucuna ulaşıyoruz ki bu değer bir tek tamsayı olmamaktadır. Bu iki tanımı gerekli ancak yetersiz kategorisine almak pek uygun değildir. Çünkü bu tanımlar gerekli şartları bulundurup bu şartların yetersiz olduğu bir durum değildir. Kuramsal çerçeve kapsamında konulabilecek en uygun kategoriye koymakla beraber bu kategorilere ek farklı bir kategori ihtiyacı da hissedilmektedir. Bu iki tanıma örnek aşağıda verilmiştir.


"Tek tamsayı": ∀k∈R için x=2k+1 şeklinde yazılan x∈Z sayılarına tek tamsayı denir.

Şekil 38. Tek Tamsayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

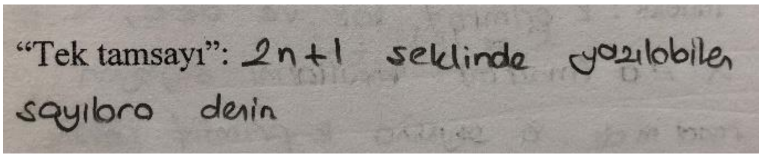
Şekil 39'da yer alan tanımda ise birçok gerekli özellik verilmesine rağmen tam olarak beklenen karşılanmamıştır.


"Tek tamsayı": Çift sayıların aksine 2k+1 koşulunu sağlayan, 0'ı içinde barındırmayan negatif veya pozitif sayılar topluluğu ... kendisi

"En küçük ortak kat": ... veya azalarak ilerleyen ... en az 2'li gruplar olmak üzere ...

Şekil 39. Tek Tamsayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

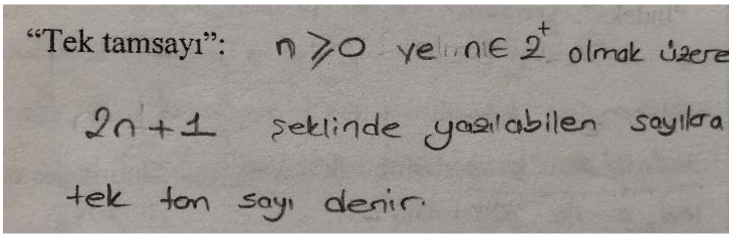
Kalan 9 tanımda ise yapılan eksiklik sayı kümesinin belirtilmemesinden kaynaklanmaktadır.


"Tek tamsayı": 2n+1 şeklinde yazılabilen sayılara denir.

Şekil 40. Tek Tamsayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 3

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

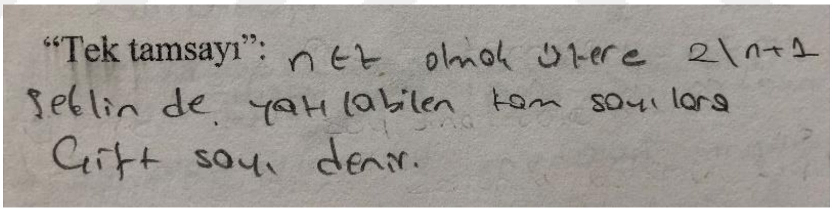
Tek Tamsayı kavramı için bu kategoride 3 tanım yer almaktadır. Bu tanımların 'gereksiz' olmasına sebep olan durum Çift Tamsayı tanımlarında da olduğu gibi sadece pozitif tek tamsayıları tanımlamalarıdır.


“Tek tamsayı”: $n \geq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $2n+1$ şeklinde yazılabilen sayılara tek tam sayı denir.

Şekil 41. Tek Tamsayı tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

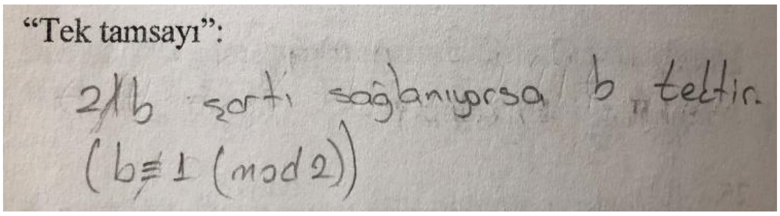
Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 1 tanesi bu kategoriye dahil edilebilecek bir tanımdır. Tek tamsayıları n+1 şeklinde ifade etmek yanlıştır. Öğretmen adayının tanımladığı kümenin elemanı n+1 ise bu çift tam sayılar kümesidir. Öğretmen adayının tanımladığı kümenin elemanı n ise bu nispeten doğru kabul edilebilir. Ayrıca tek tamsayı kavramını tanımlarken son anda tanımı “çift sayı denir” ifadesiyle bitirmiştir. Bu sebepler göz önüne alındığında ifade açık olmadığı için bu kategoriye alınması uygun görülmüştür.


“Tek tamsayı”: $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere 2\n+1 şeklinde yazılabilen tam sayılara Çift sayı denir.

Şekil 42. Tek Tamsayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevabı

4.5.2. “Tek Tamsayı” kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Tek Tamsayı kavramı için zengin olarak değerlendirilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. Bu tanım aşağıda verilmiştir.


“Tek tamsayı”: $2 \nmid b$ şartı sağlanıyorsa b, tektir. $(b \equiv 1 \pmod 2)$

Şekil 43. Tek Tamsayı tanımına ait zengin kategorisinde öğretmen adayı cevabı

4.6. “Asal Sayı” kavramına ait bulgular

Asal sayı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- p ϵ Z olsun. Eğer
    1. p>1
    2. p’nin 1 ve p’den başka pozitif böleni yoksa p asal sayıdır.
- Sadece iki pozitif tamsayı böleni olan doğal sayılardır.

4.6.1. “Asal Sayı” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 8’de verilmiştir.

Tablo 8

Öğretmen adaylarının Asal Sayı kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

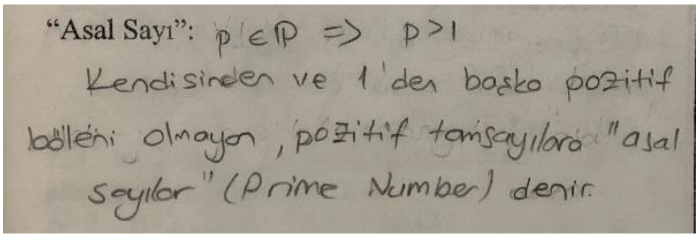
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	6	%12
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	4	%8
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	35	%70
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	5	%10

Uygun Tanımlar

Tablodan görüldüğü üzere yapılan tanımların %20’lik kısmı “uygun” kategorisinde değerlendirilebilmektedir. 10 öğretmen adayının yapmış oldukları tanımlar, minimallik kriterine ve matematiksel dili kullanımına göre değerlendirildiğinde bu kategoride yer alan 6 tanımın uygun ve titiz kategorisinde yer aldığı gözlenmiştir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

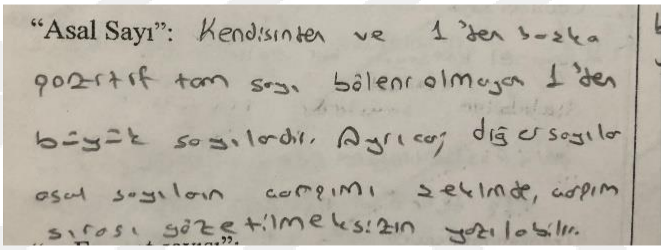
Öğretmen adaylarının yapmış oldukları uygun ve titiz tanımların benzer olduğu görülmüştür. Bu benzer tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"Asal Sayı": p ∈ P => p>1
Kendisinden ve 1'den başka pozitif böleni olmayan, pozitif tamsayılara "asal sayılar" (Prime Number) denir.

Şekil 44. Asal Sayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Asal Sayı kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 4 tanıma rastlanmıştır. Bu tanımlar asal sayıların dahil olduğu sayı kümesinin belirtilmemesinden dolayı titiz olmayan şeklinde değerlendirilmiştir. Bu 4 tanıma örnek aşağıda verilmiştir.


"Asal Sayı": Kendisinden ve 1'den başka pozitif tam sayı bölenı olmayan 1'den büyük sayılardır. Ayrıca diğer sayılar asal sayıların çarpımı şeklinde, çarpım sırası gözetilmeksizin yazılabilir.

Şekil 45. Asal Sayı tanımına ait uygun titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

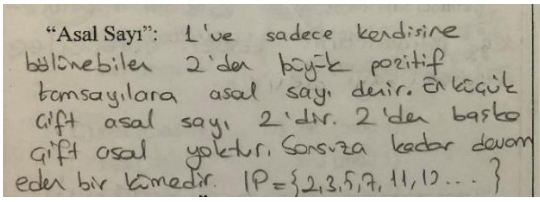
Uygun Olmayan Tanımlar

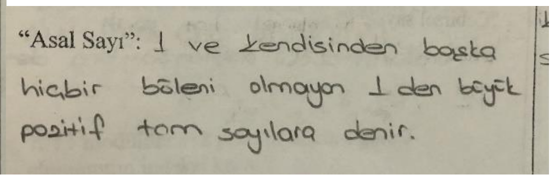
Öğretmen adaylarının Asal Sayı kavramına ait yaptıkların tanımların %80'i bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 35 tanım bu kategoride yer almaktadır. Asal Sayı kavramı için yapılan tanımlarda bu kategoride bir yığılma gözlenmektedir. Gerekli ancak yetersiz kategorisindeki tanımlar yetersizliklerine göre 3 kategoride incelenecektir.

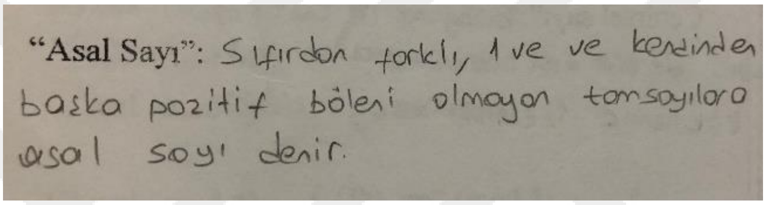
İlk olarak asal Sayı kavramını tanımlarken 'pozitif bölen' kavramını atlayan 6 öğretmen adayı bulunmaktadır. Bu tanımlara göre, asal sayı olarak kabul edilen 2,3,5, … gibi sayılarında asal sayı olamayacağı anlaşılmaktadır.


“Asal Sayı”: 1've sadece kendisine bölünebilen 2'den büyük pozitif tamsayılara asal sayı denir. En küçük çift asal sayı 2'dir. 2'den başka çift asal yoktur. Sonsuza kadar devam eden bir kümedir. IP={2,3,5,7,11,13...}


“Asal Sayı”: 1 ve kendisinden başka hiçbir böleni olmayan 1 den büyük pozitif tam sayılara denir.

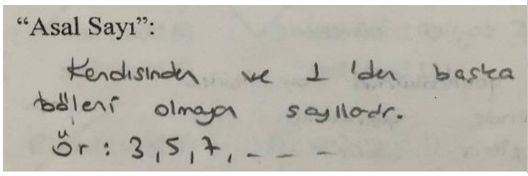
Şekil 46. Asal Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

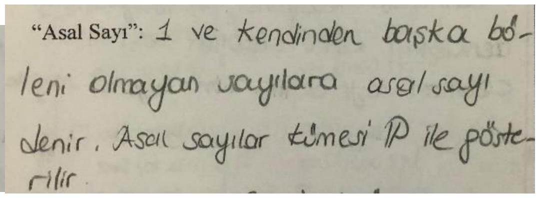
Bir öğretmen adayı ise asal sayıları tanımlarken asal sayıların 1’den büyük tamsayılar olduğunu belirtmemiştir. Bu durumda -2,-3, … gibi asal sayıların negatifleri de asal olarak kabul edilebilir. Bu tanım aşağıda yer almaktadır.


“Asal Sayı”: Sıfırdan farklı, 1 ve ve kendinden başka pozitif böleni olmayan tamsayılara asal sayı denir.

Şekil 47. Asal Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Kalan 28 tanım ise bu üç eksikliğin farklı kombinasyonlarıyla oluşmaktadır. Bu tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


“Asal Sayı”: Kendisinden ve 1'den başka böleni olmayan sayılardır. Ör: 3,5,7, ...


“Asal Sayı”: 1 ve kendinden başka bö-leni olmayan sayılara asal sayı denir. Asal sayılar kümesi IP ile göste-rilir.

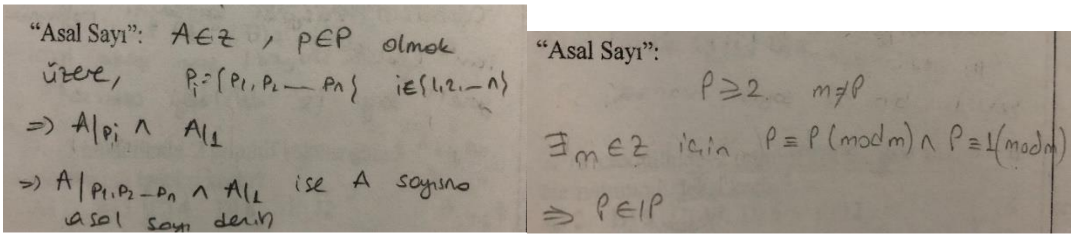
Şekil 48. Asal Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları 3

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Asal Sayı kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 5 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlardan 2 tanesi matematiksel ifade yanlışlığından dolayı bu kategoride yer almaktadır.



"Asal Sayı": $A\in\mathbb{Z}$, $p\in P$ olmak üzere, $P_i=\{p_1,p_2 \dots p_n\}$ $i\in\{1,2,\dots,n\}$

$\Rightarrow A|p_i \wedge A|1$

$\Rightarrow A|p_1,p_2 \dots p_n \wedge A|1$ ise A sayısına asal sayı denir

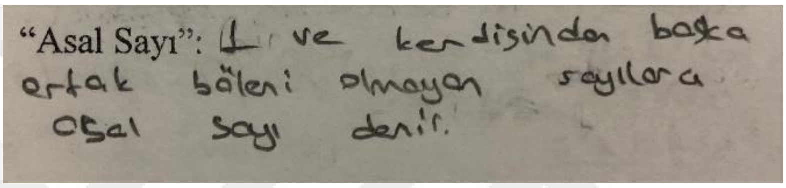
"Asal Sayı": $P\geq 2$ $m\neq P$

$\exists m\in\mathbb{Z}$ için $P\equiv P(\mathrm{mod}\, m)\wedge P\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$

$\Rightarrow P\in\mathbb{P}$

Şekil 49. Asal Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları 1

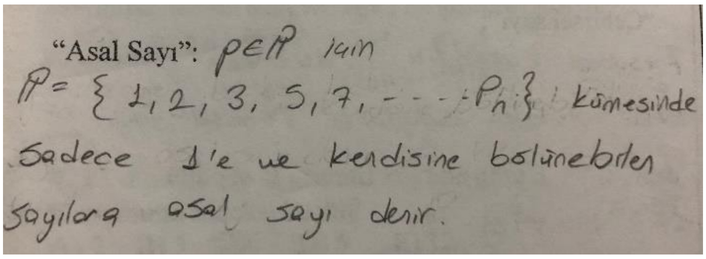
İki tane tanım ise ortak bölen kavramına yer vermiştir. Bu iki tanım birebir aynıdır. Tanımlara örnek şekil 50'de verilmiştir.



"Asal Sayı": 1 ve kendisinden başka ortak böleni olmayan sayılara asal sayı denir.

Şekil 50. Asal Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Diğer tanım ise 1 doğal sayısını da asal sayı olarak değerlendirdiğinden yanlış bir tanımdır.



"Asal Sayı": $p\in\mathbb{P}$ için

$\mathbb{P}=\{1,2,3,5,7,\dots,P_n\}$ kümesinde sadece 1'e ve kendisine bölünebilen sayılara asal sayı denir.

Şekil 51. Asal Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevabı 3

4.6.2. "Asal Sayı" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Asal sayı tanımlarını zenginlik kriterine göre incelendiğinde ise yapılan tanımların birbirinin neredeyse aynısı olduğu ve hatta yapılan eksikliklerin dahi benzer olduğu dikkat çekmektedir. Öğretmen adaylarından almış olduğumuz tanımlarda zengin bir tanıma rastlanmamıştır.

4.7. “n. Fermat Sayısı” kavramına ait bulgular

n. Fermat sayısı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- n=0, 1, 2,… için $F_n = 2^{2^n}+1$ sayısına n-yinci Fermat sayısı denir.
- n≥0 bir tamsayı olsun.
  $F_n = 2^{2^n}+1$ şeklinde yazılabilen sayılardır.

4.7.1. “n. Fermat Sayısı” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 9’da verilmiştir.

Tablo 9

Öğretmen adaylarının n. Fermat Sayısı kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	0	%0
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	0	%0
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	9	%18
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	1	%2
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	20	%40
CEVAPSIZ		20	%40

Uygun Tanımlar

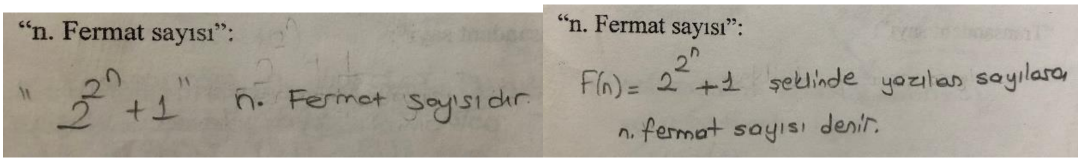
Öğretmen adaylarının yapmış oldukları tanımlardan gerek ve yeter şartların tam olarak verildiği ve verilen bu bilgilerle ‘n. Fermat Sayısı” kavramını açıklayabilen tanımlar uygun tanımlar olarak değerlendirilmektedir. n. Fermat Sayısı kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının n. Fermat Sayısı kavramına ait yaptıkların tanımların %60’ı bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 9 tanım bu kategoride yer almaktadır. Yapılan tanımların hepsi benzer sebepten dolayı bu kategoriye alınmıştır; tanımda geçen n değişkeninin ait olduğu tanım kümesinin belirtilmemesi. Bu tanımlara örnek birkaç tanım aşağıda verilmiştir.



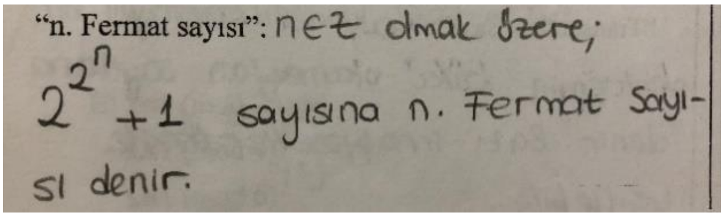
Şekil 52. n. Fermat Sayısı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Yukarıdaki tanımlar ve benzeri 9 tanım n elemanının tanım kümesi belirtilmediğinden bu kategoriye alınmıştır. Bu durumla ilgili yarı yapılandırılmış görüşmeler esasında katılımcılara fikirleri sorulmuştur.

A: “n elemanının tanım kümesini belirtmediğini görüyorum. Bu konuda ne düşünüyorsun?”

K1: “Evet belirtmemişim ama tamsayılardır diye düşünüyorum. Aslında buna karar verirken biraz tanımın içeriğine göre hangi sayı kümesi daha müsait geliyorsa odur gibi. Bu tanımda n bir kuvvet olduğu için hiç rasyonel sayıları düşünmedim.”

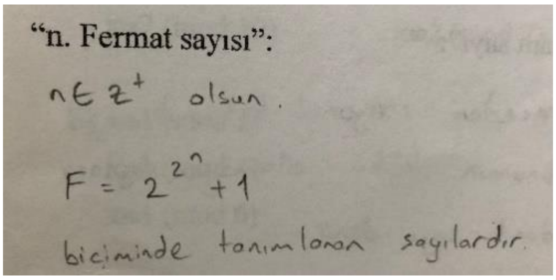
Bir başka örnekte ise n değişkenini tam sayıların elemanı olarak aldığından dolayı n=-2 için de bir fermat sayısı oluşturulabilmektedir. Bu tanım aşağıda verilmiştir.



Şekil 53. n. Fermat Sayısı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

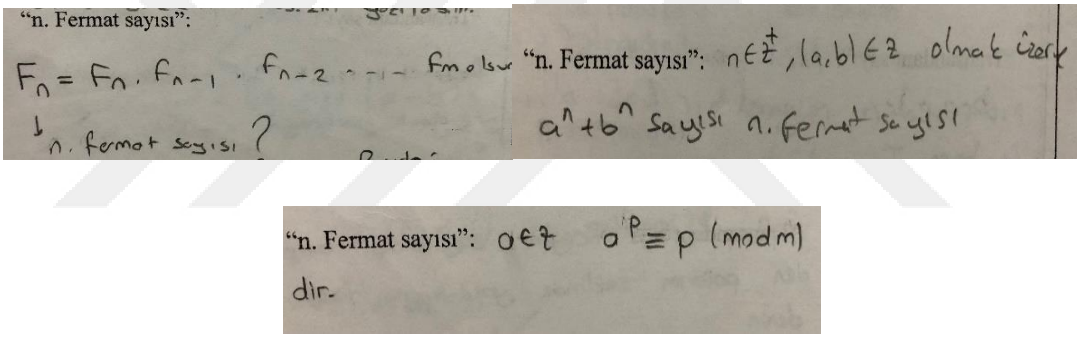
n. Fermat Sayısı kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. Bu tanım uygun tanım olmaya en yakın tanım olmasına rağmen n=0 için oluşturulan Fermat sayısını içermediğinden yani gereksiz bir kısıtlama oluşturduğundan bu kategoriye alınmıştır.



Şekil 54. n. Fermat Sayısı tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 20 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoriye dahil edilen tanımlar çoğunlukla başka bir kavramı açıklamışlardır. Bu kategoriye dahil edilen birkaç örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 55. n. Fermat Sayısı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.7.2. "n. Fermat Sayısı" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

n. Fermat Sayısı tanımlarını zenginlik kriterine göre incelendiğinde ise yapılan tanımların hiçbiri uygun olmadığından zengin olarak da değerlendirilememiştir.

4.8. "EBOB (En Büyük Ortak Bölen)" kavramına ait bulgular

EBOB kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, d, c ϵ Z ve d>0 olsun. Eğer

  1)$d|a_1 \wedge d|\ a_2 \wedge \ldots \wedge d|a_n$

  2)$c|a_1 \wedge c|\ a_2 \wedge \ldots \wedge c|a_n \Rightarrow c|d$

özellikleri sağlanıyor ise d ϵ Z^+pozitif tamsayısına bu n tane sayının EBOB'u denir.

- En az biri sıfırdan farklı iki veya daha fazla tamsayının EBOB'u, bu tamsayıların hepsini bölen en büyük pozitif tamsayıdır.

4.8.1. "EBOB" kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 10'da verilmiştir.

Tablo 10

Öğretmen adaylarının EBOB kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

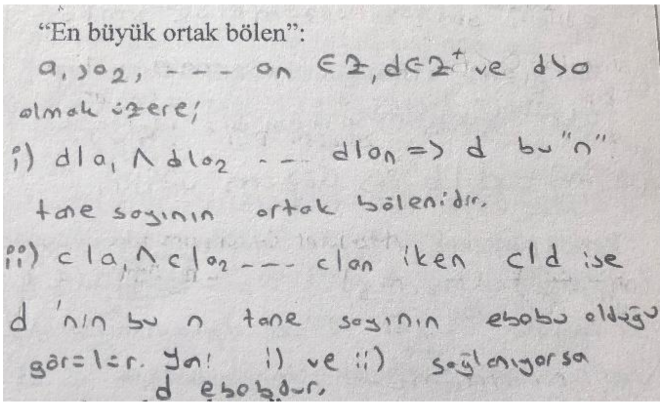
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	6	%12
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	3	%6
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	27	%54
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERSLİ	14	%28

Uygun Tanımlar

EBOB kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 9 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 6 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 3 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

Bu kategoriye dahil olan 6 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara örnek şekil 56'da verilmiştir.


"En büyük ortak bölen":

$a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^+$ ve $d>0$ olmak üzere;

i) $d|a_1 \wedge d|a_2 \ldots d|a_n \Rightarrow d$ bu "n" tane sayının ortak bölenidir.

ii) $c|a_1 \wedge c|a_2 \ldots c|a_n$ iken $c|d$ ise d'nin bu n tane sayının ebobu olduğu görülür. Yani i) ve ii) sağlanıyorsa d ebobdur.

Şekil 56. EBOB tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Yukarıdaki tanımla benzer tanım yapan bir öğretmen adayından yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında öncelikle en büyük ortak bölen kavramını tanımlaması ve daha sonrasında kendi yaptıkları tanımları değerlendirmesi istenmiştir.

A: "En büyük ortak bölen kavramını nasıl tanımlarsın?"

K1: "İki veya daha fazla sayının bölenleri bulunur ve bu bölenlerden ortak olanlar seçilir. Bu ortak bölenlerden en büyüğüne en büyük ortak bölen denir."

Katılımcıya kendi tanımı sunulduğunda ise:

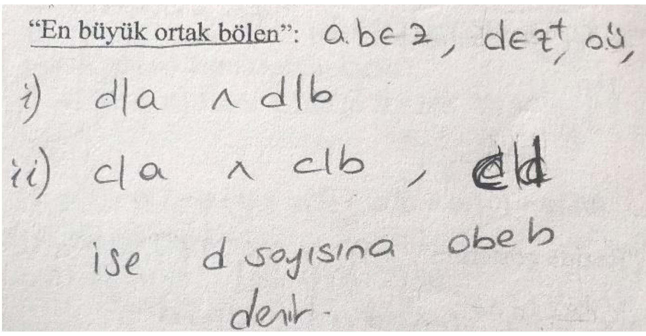
A: "Söylediğin tanım ve daha önce yazmış olduğun tanım birbirinden farklı bunu nasıl değerlendiriyorsun, tanımlarını yorumlar mısın?"

K1: "Yazdığım tanımı sadece matematiğe hakim olan birisi anlar, bu tarz tanımları sadece matematik bölümü okuyanlar yorumlayabilir. En büyük ortak bölen ortaokulda verilen bir kavram olduğu için yazdığım tanım biraz ağır geldi."

Yapılan tanımlamalarda matematiksel dil kullanımı arttıkça tanımı yorumlayacak kişilerin matematik eğitiminin de belli bir seviyede olması gerekmektedir. Bu kategoride yer alan tanımların çoğu aşağı yukarı şekil 56'da olduğu gibidir ve bu tanımları ortaokul seviyesindeki öğrencilerin anlayamayacağı düşünülebilir. Tanım yaparken hangi seviye için yapıldığı da dikkat edilmesi gereken noktalardan biridir.

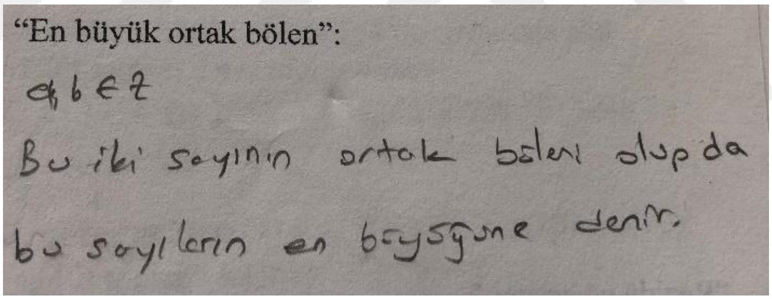
Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

EBOB kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 3 tanım vardır. Bu tanımlardan 2 tanesinin bu kategoriye dahil edilme sebebi, öğretmen adayının kavramı yalnız iki doğal sayı üzerinden açıklamış olmasıdır. Bu matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım olarak yorumlanabilir. Bu iki tanıma bir örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 57. EBOB tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Diğer tanımda ise öğretmen adayı kavramı açıklarken bir eksiklik veya bir yanlışlık yapmamıştır. Kavramı daha profesyonel tanımlamak yerine matematiksel dilden uzak bir tanım yaptığı için bu kategoride değerlendirilmiştir. Bu tanım aşağıda verilmiştir.



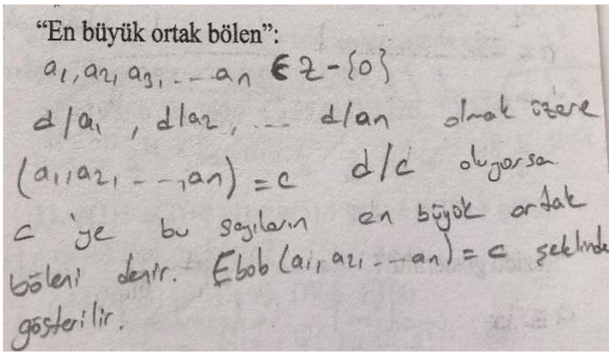
Şekil 58. EBOB tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının EBOB kavramına ait yaptıkların tanımların %82'si bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 27 tanım bu kategoride yer almaktadır. Yapılan tanımlar benzer sebeplerden dolayı bu kategoriye alınmıştır. Bazı tanımlarda EBOB kavramının pozitif tamsayı olması gerektiği vurgusu eksik bırakılmıştır bazı tanımlarda ise gerek şart eksikliklerinden dolayı bu kategoriye alınmıştır. Bu tanımlara örnek bir tanım aşağıda verilmiştir.


"En büyük ortak bölen": $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \in Z - \{0\}$
d/a_1 , d/a_2 , ... d/a_n olmak üzere
$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = c$ d/c oluyorsa
c 'ye bu sayıların en büyük ortak böleni denir. Ebob$(a_1, a_2, \ldots a_n) = c$ şeklinde gösterilir.

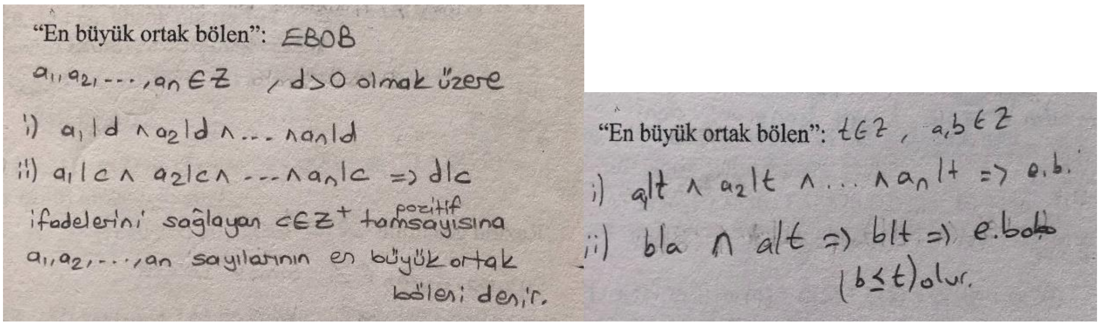
Şekil 59. EBOB tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

EBOB kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

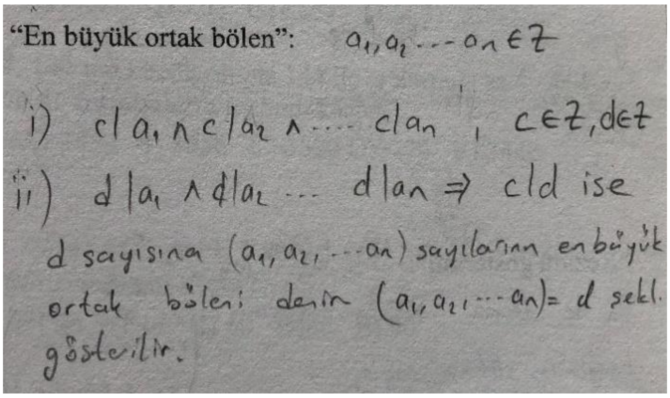
Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 14 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımların birkaç tanesinde EKOK kavramının tanımında yer alan ifadelere yer verilmiştir. Bu kategoriye dahil edilen tanımlara örnekler aşağıda verilmiştir.


"En büyük ortak bölen": EBOB
$a_1, a_2, \ldots, a_n \in Z$, $d > 0$ olmak üzere
i) $a_1 | d \wedge a_2 | d \wedge \ldots \wedge a_n | d$
ii) $a_1 | c \wedge a_2 | c \wedge \ldots \wedge a_n | c \Rightarrow d | c$
ifadelerini sağlayan $c \in Z^+$ pozitif tamsayısına $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının en büyük ortak böleni denir.

"En büyük ortak bölen": $t \in Z$, $a, b \in Z$
i) $a | t \wedge a_2 | t \wedge \ldots \wedge a_n | t \Rightarrow$ e.b.
ii) $b | a \wedge a | t \Rightarrow b | t \Rightarrow$ e.bob $(b \leq t)$ olur.

Şekil 60. EBOB tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları 1

Bu kategoriye dahil edilen birkaç tanım ise aşağıdaki gibi ifade edilmiştir. Verilen öncüllerin sıralamasında hata yapılmıştır. d elemanının en büyük ortak bölen olduğu anlatılıyorsa tanımlamaya ilk olarak d elemanının verilen sayıların ortak böleni olduğunun açıklanmasıyla başlanmalı, sonradan ikinci öncülde ise aynı sayıları bölen farklı bir tam sayı daha olduğu anda bu tam sayının d tam sayısını da bölmesi gerektiği vurgulanmalıdır.


“En büyük ortak bölen”: $a_1, a_2 \dots a_n \in Z$

i) $c|a_1 \wedge c|a_2 \wedge \dots c|a_n$, $c \in Z, d \in Z$

ii) $d|a_1 \wedge d|a_2 \dots d|a_n \Rightarrow c|d$ ise

d sayısına $(a_1, a_2, \dots a_n)$ sayıların en büyük ortak böleni denir $(a_1, a_2, \dots a_n) = d$ şekl. gösterilir.

Şekil 61. EBOB tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

4.8.2. “EBOB” kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

EBOB kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.9. “EKOK (En Küçük Ortak Kat)” kavramına ait bulgular

EKOK kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- a_1, a_2, a_3,…, a_n, k, c ϵ Z ve k>0 olsun. Eğer

  1)$a_1|k \wedge a_2|k \wedge \dots \wedge a_n|k$

  2)$a_1|c \wedge a_2|c \wedge \dots \wedge a_n|c \Rightarrow k|c$

özellikleri sağlanıyor ise k ϵ Z^+pozitif tamsayısına bu n tane sayının EKOK’u denir.

- Sıfırdan farklı iki veya daha fazla tamsayının EKOK’u, bu tamsayıların hepsinin katı olan en küçük pozitif tamsayıdır.

4.9.1. “EKOK” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 11’de verilmiştir.

Tablo 11

Öğretmen adaylarının EKOK kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

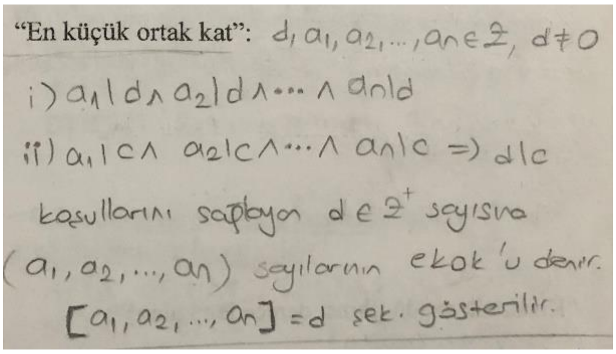
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	5	%10
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	3	%6
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	22	%44
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	1	%2
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	18	%36
CEVAPSIZ		1	%2

Uygun Tanımlar

EKOK kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 8 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 5 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 3 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

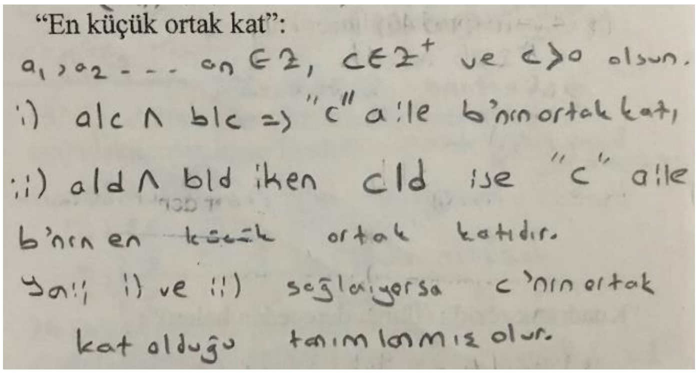
Bu kategoriye dahil olan 5 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara bir örnek şekil 62'de verilmiştir.



Şekil 62. EKOK tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

EKOK kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 3 tanım vardır. Bu tanımları bu kategoriye dahil etme sebebi tanımların yalnız iki doğal sayı üzerinden verilmiş olmasıdır. Bu matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım olarak yorumlanabilir.



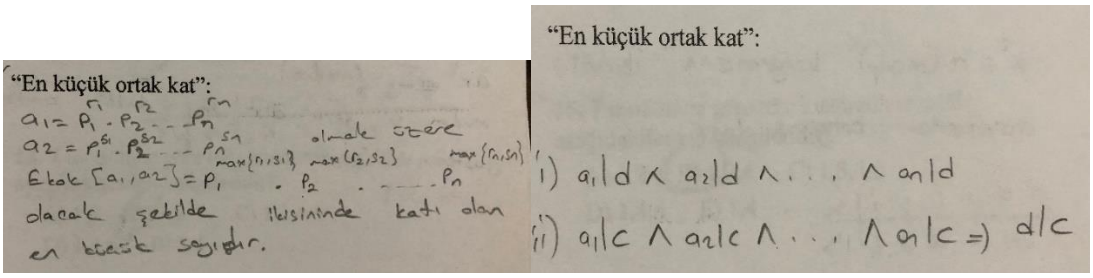
Şekil 63. EKOK tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının EKOK kavramına ait yaptıkların tanımların %82'si bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

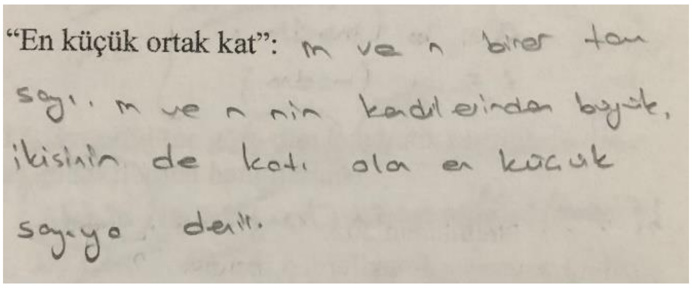
Öğretmen adayları tarafından yapılan 22 tanım bu kategoride yer almaktadır. Yapılan tanımlar benzer sebeplerden dolayı bu kategoriye alınmıştır. Tanımların bir kısmında EKOK kavramının pozitif tamsayı olması gerektiği vurgusu eksik bırakılmıştır. Çoğu tanım benzerdir farklı kabul edilebilecek bir tanım vardır ancak bu tanımda da bu kategoriye alınmasına sebep olan eksiklik diğerleriyle aynıdır. Tanımlarda kullanılan elemanların sayı kümelerine hiçbir şekilde değinilmemiştir. Bu tanımlara örnek birkaç tanım aşağıda verilmiştir.



Şekil 64. EKOK tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

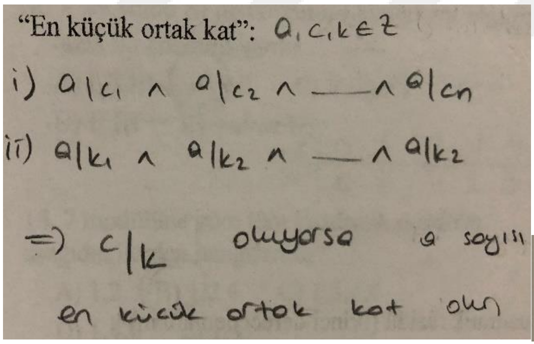
EKOK kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. 'Kendilerinden büyük' ifadesi tanımı gereksiz kısıtlamıştır.


"En küçük ortak kat": m ve n birer tam sayı. m ve n nin kendilerinden büyük, ikisinin de katı olan en küçük sayıya denir.

Şekil 65. EKOK tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

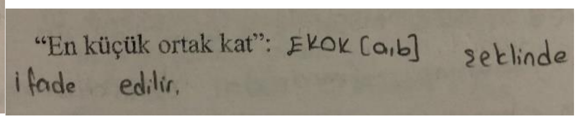
Bu kavram için yapılan tanımlardan 18 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımların birçoğunda EBOB kavramının tanımında yer alan ifadelere yer verilmiştir. Bazı tanımlarda ise direk kavram söylenmiştir. Bu kategoriye dahil edilen tanımlara örnekler aşağıda verilmiştir.


"En küçük ortak kat": $a, c, k \in \mathbb{Z}$

i) $a|c_1 \wedge a|c_2 \wedge — \wedge a|c_n$

ii) $a|k_1 \wedge a|k_2 \wedge — \wedge a|k_2$

$\Rightarrow c|k$ oluyorsa a sayısı en küçük ortak kat olur


"En küçük ortak kat": EKOK (a,b) şeklinde ifade edilir.

Şekil 66. EKOK tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.9.2. "EKOK" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

EKOK kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.10. "Aralarında Asal Sayılar" kavramına ait bulgular

Aralarında asal sayı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ ise, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tam sayılarına aralarında asal denir.
- En büyük ortak böleni 1 olan sayılara aralarında asal sayılar denir.

- a ve b birer tam sayı (sıfır hariç) olmak üzere, eğer a ve b nin 1'den başka pozitif ortak böleni yoksa (yani a ve b'nin EBOB'u 1 ise) a ve b sayıları aralarında asaldır.

4.10.1. "Aralarında Asal Sayılar" kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 12'de verilmiştir.

Tablo 12

Öğretmen adaylarının Aralarında Asal Sayılar kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	0	%0
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	33	%66
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	10	%20
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	4	%8
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	3	%6

Uygun Tanımlar

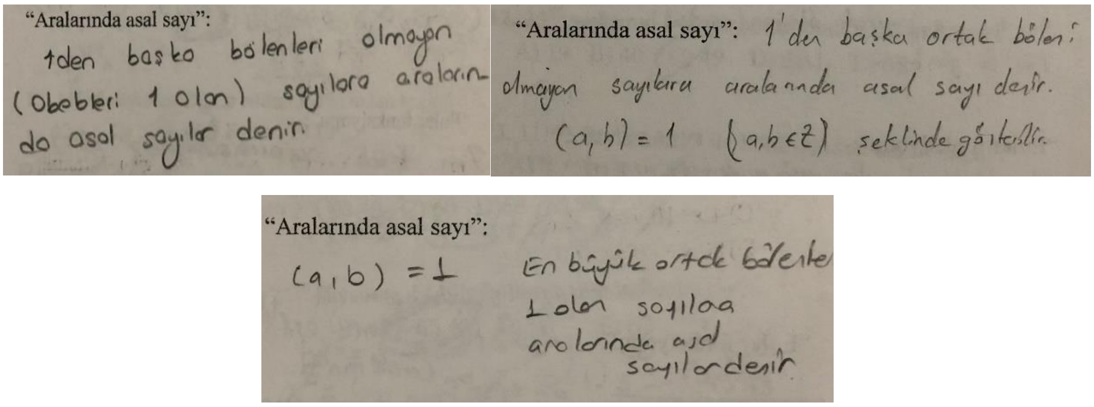
Aralarında Asal Sayılar kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 33 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan hepsi uygun ancak titiz olmayan şeklinde değerlendirilmiştir

Uygun ve Titiz Tanımlar

Bu kategoriye dahil edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Aralarında Asal Sayılar kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 33 tanım vardır. Bu tanımların uygun ancak titiz olmayan tanımlar kategorisine alınma sebebi tanımlarda aralarında asal sayıların en büyük ortak bölenlerinin 1 olduğunu vurgularken sayıların sayı kümesinin belirtilmemesidir. "(a, b) =1" ifadesi EBOB kavramından yararlanılarak yapıldığında ve EBOB tanımında sayıların, tam sayılar kümesinden seçildiği belirtildiği için aralarında asal sayılar kavramını açıklarken tekrar sayı kümesi belirtilmemesi göz ardı edilebilir görünmektedir. Bu durum matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım olarak yorumlanabilir. Bir diğer sebep ise tanımların neredeyse hepsinde "pozitif bölen" kavramına yer verilmemiştir. "1'den başka ortak böleni olmayan sayılardır" ifadesi hiçbir sayının aralarında asal olmaması anlamına gelmektedir ancak bunu belirttiği tanımlarda ebobları 1 olan sayılardır ifadesi de geçtiği için uygun ancak titiz olmayan şeklinde değerlendirilmiştir. Birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"Aralarında asal sayı": 1den başka bölenleri olmayan (Obebleri 1 olan) sayılara aralarında asal sayılar denir.

"Aralarında asal sayı": 1'den başka ortak böleni olmayan sayılara aralarında asal sayı denir. $(a,b) = 1$ $(a,b \in \mathbb{Z})$ şeklinde gösterilir.

"Aralarında asal sayı": $(a,b) = 1$ En büyük ortak bölenleri 1 olan sayılara aralarında asal sayılardenir

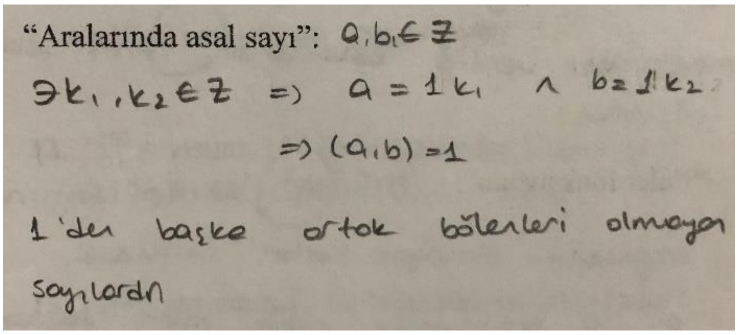
Şekil 67. Aralarında Asal Sayı tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevapları 1

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Aralarında Asal Sayılar kavramına ait yaptıkların tanımların %34'ü bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 10 tanım bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoride bulanan 1 tanım, diğerlerinden farklı olarak gereksiz ifadeler içermektedir. Matematiksel dili titiz kullanmadığı için notasyonu gereksiz kullandığı için bu kategoriye dahil edilmiştir. Bu tanım aşağıda verilmiştir.


"Aralarında asal sayı": $a,b \in \mathbb{Z}$

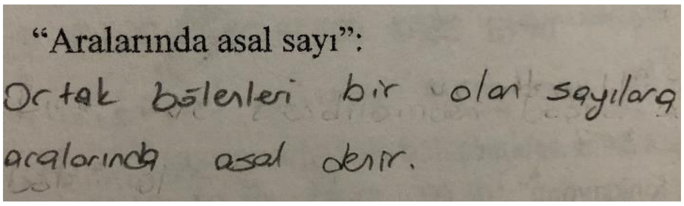
$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = 1k_1 \wedge b = 1k_2$

$\Rightarrow (a,b) = 1$

1'den başka ortak bölenleri olmayan sayılardır

Şekil 68. Aralarında Asal Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

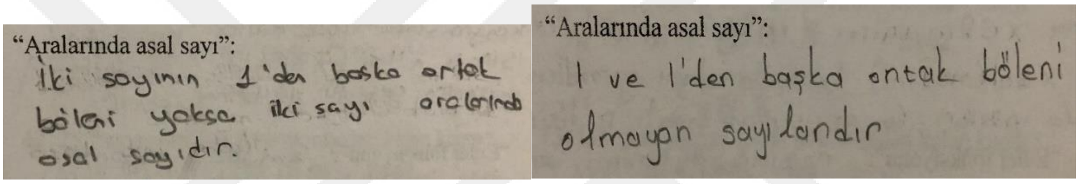
1 tanımda ise eksik ifade etmekten dolayı her tam sayı çifti aralarında asal olarak kabul edilebilmektedir. Bu tanım aşağıda verilmiştir.



"Aralarında asal sayı":
Ortak bölenleri bir olan sayılara aralarında asal denir.

Şekil 69. Aralarında Asal Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Kalan 9 tanımın bu kategoriye alınma sebebi benzerdir: Tanım yapılırken "1'den başka ortak böleni olmayan" vurgusu yapılmıştır. Aralarında asal sayıların 1'den başka ortak böleni -1 tam sayısıdır. Tanımlarda belirtilmesi gereken vurgu en büyük ortak bölenin 1 olması gerektiğidir. Bu tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.



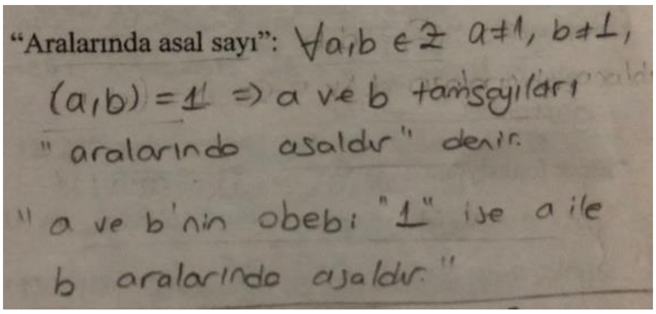
"Aralarında asal sayı":
İki sayının 1'den başka ortak böleni yoksa iki sayı aralarında asal sayıdır.

"Aralarında asal sayı":
1 ve 1'den başka ortak böleni olmayan sayılardır

Şekil 70. Aralarında Asal Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları 3

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Aralarında Asal Sayılar kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 4 tanıma rastlanmıştır. 1 tanım farklı gereksiz kısıtlamalar içerirken 3 tanımda yapılan kısıtlama sayı kümesinin yalnızca pozitif tam sayılar olarak alınmasıdır.

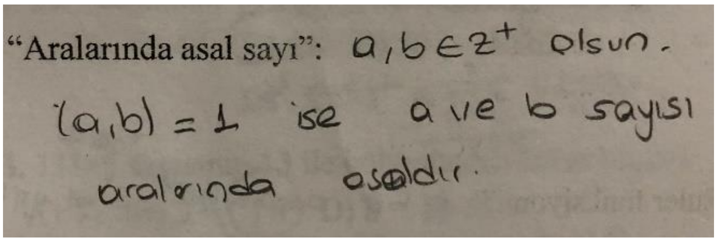


"Aralarında asal sayı": $\forall a,b \in \mathbb{Z}$ $a \neq 1$, $b \neq 1$,
$(a,b) = 1 \Rightarrow$ a ve b tamsayıları "aralarında asaldır" denir.
"a ve b'nin obebi "1" ise a ile b aralarında asaldır."

Şekil 71. Aralarında Asal Sayı tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

1 tamsayısı ile her tamsayı aralarında asal olarak kabul edilmektedir. Şekil 71'deki tanımda katılımcı 1 tamsayısını tanım kümesinden çıkarmıştır. Bu durum gereksiz bir

kısıtlama yaratmaktadır. Kalan 3 tanım ise aşağıda verilen tanımla benzer şekilde oluşturulmuştur.

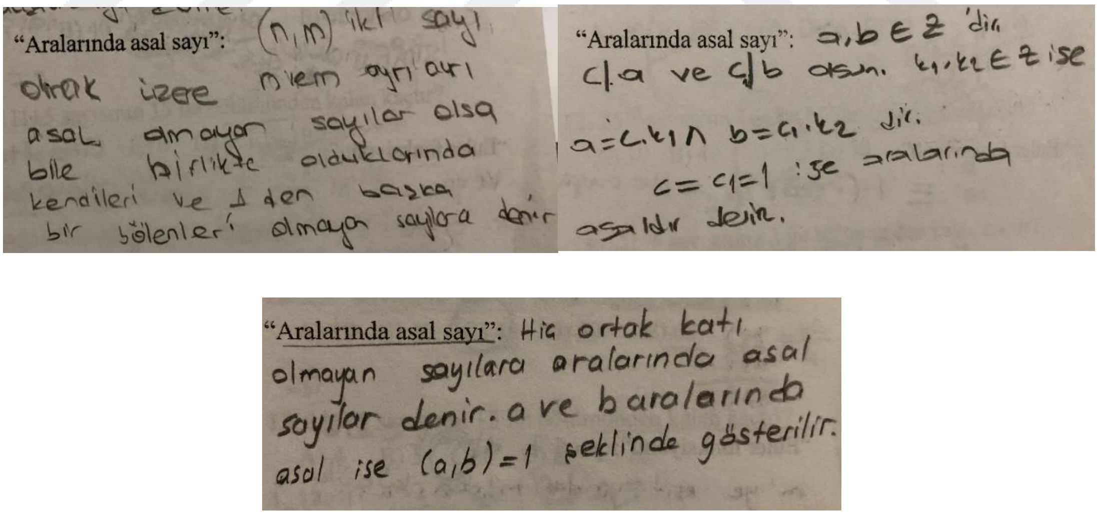


"Aralarında asal sayı": $a,b \in Z^+$ olsun.
$(a,b)=1$ ise a ve b sayısı
aralarında asaldır.

Şekil 72. Aralarında Asal Sayı tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 3 tanesi bu kategoride yer almaktadır. İfadelerin büyük kısmı hatalıdır. Ortak bölen kavramına yer verilmemiştir. Aralarında asal olarak kabul edilen herhangi iki sayının bu tanıma göre aralarında asal olması mümkün gözükmemektedir. Farklı bir örnekte ise 'hiç ortak katı olmayan sayılar' ifadesi yine kavramı örneksiz bırakmaktadır. Bu kategoride bulunan tanımlar aşağıda gösterilmiştir.



"Aralarında asal sayı": (n,m) iki sayı
olmak üzere n ve m ayrı ayrı
asal olmayan sayılar olsa
bile birlikte olduklarında
kendileri ve 1 den başka
bir bölenleri olmayan sayılara denir

"Aralarında asal sayı": $a,b \in Z$ 'dir.
$c|a$ ve $c|b$ olsun. $k_1,k_2 \in Z$ ise
$a=c.k_1 \wedge b=c_1.k_2$ dir.
$c=c_1=1$ ise aralarında
asaldır denir.

"Aralarında asal sayı": Hiç ortak katı
olmayan sayılara aralarında asal
sayılar denir. a ve b aralarında
asal ise $(a,b)=1$ şeklinde gösterilir.

Şekil 73. Aralarında Asal Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.10.2. "Aralarında Asal Sayılar" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Aralarında Asal Sayılar kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.11. “(Lineer) Diophant Denklem” kavramına ait bulgular

(Lineer) Diophant denklem kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- $a_1, a_2, \ldots, a_n$, c ϵ Z olmak üzere tam sayı çözümleri aranan,
  $a_1 . x_1 + a_2 . x_2 + \ldots + a_n . x_n = c$ şeklindeki denkleme denir.
- Değişkenleri ve katsayıları tam sayılar olan denklemlerdir.

4.11.1. “(Lineer) Diophant Denklem” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 13’de verilmiştir.

Tablo 13

Öğretmen adaylarının (Lineer) *Diophant Denklem kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı*

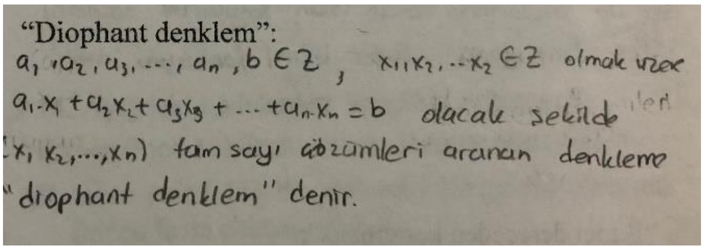
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	10	%20
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	4	%8
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	11	%22
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	2	%4
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	16	%32
CEVAPSIZ		7	%14

Uygun Tanımlar

(Lineer) Diophant Denklem kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 14 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 10 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 4 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

Bu kategoriye dahil olan 10 tanım birebir benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara bir örnek şekil 74’de verilmiştir.



"Diophant denklem":
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, $x_1, x_2, \ldots x_2 \in \mathbb{Z}$ olmak üzere
$a_1.x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_n.x_n = b$ olacak şekilde ileri
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tam sayı çözümleri aranan denkleme
"diophant denklem" denir.

Şekil 74. (Lineer) Diophant Denklem tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Yukarıdaki tanıma benzer tanım yapan öğretmen adayından, yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında yazdığı tanımı değerlendirmesi istenmiştir.

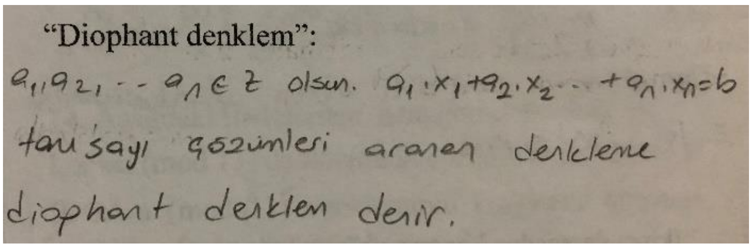
A: "Yazdığın (Lineer) Diophant Denklem kavramının tanımını değerlendirebilir misin?"

K1: "Şu an bu konuları bildiğim için evet anlaşılır geliyor ama aradan belli bir zaman geçtiğinde kendi tanımımdan hiçbir şey anlamayabilirim."

Bazı kavramların tanımlarını anlamlandırma durumunun konuya dair bilgiyle doğru orantılı olduğu düşünülebilir. Bu kavramların tanımlarını daha anlaşılır yapmak her zaman pek mümkün değildir. (Lineer) Diophant denklem kavramı da bu tarz kavramlardan biridir.

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

(Lineer) Diophant Denklem kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 4 tanım vardır. Bu tanımların uygun ancak titiz olmayan tanımlar kategorisine alınma sebeplerinden biri dikkatsizlikten olduğu düşünülmekle beraber denklemin eşit olduğu sabit sayının, sayı kümesinin belirtilmemesi bir diğeri ise iki terim kullanılarak oluşturulmuş denklemlerdir. Bu kategoride yer alan tanımlara bir örnek aşağıda verilmiştir.



"Diophant denklem":
$a_1, a_2, \ldots a_n \in z$ olsun. $a_1.x_1 + a_2.x_2 \ldots + a_n.x_n = b$
tam sayı çözümleri aranan denkleme
diophant denklem denir.

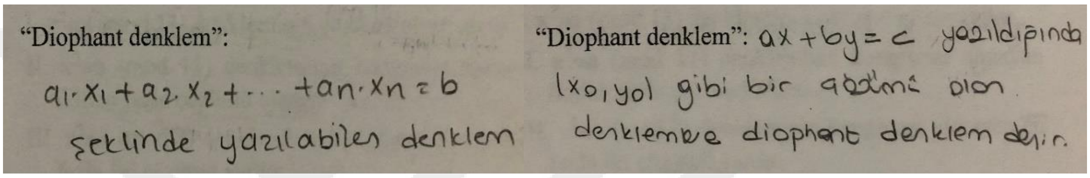
Şekil 75. (Lineer) Diophant Denklem tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının (Lineer) Diophant Denklem kavramına ait yaptıkların tanımların %58'i bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 11 tanım bu kategoride yer almaktadır. Tanımların bu kategoride olma sebepleri tanım verilirken kullanılan ifadelerin sayı kümelerinin belirtilmemiş olmasıdır. Bu tanımlara örnek birkaç tanım aşağıda verilmiştir.

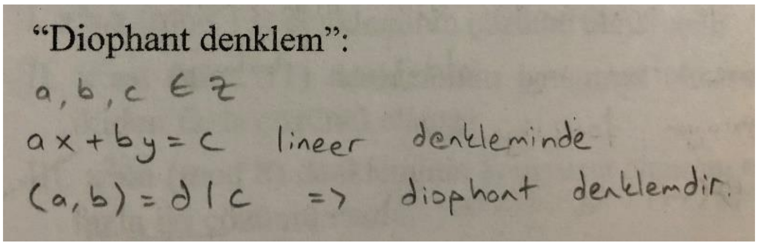

"Diophant denklem": $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \cdots + a_n \cdot x_n = b$ şeklinde yazılabilen denklem

"Diophant denklem": $ax + by = c$ yazıldığında (x_0, y_0) gibi bir çözümü olan denkleme de diophant denklem denir.

Şekil 76. (Lineer) Diophant Denklem tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

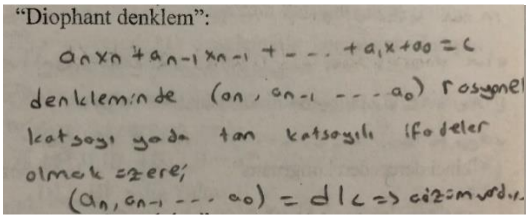
(Lineer) Diophant Denklem kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 2 tanıma rastlanmıştır. Bu iki tanım neredeyse aynıdır. "Denklemin katsayılarının EBOB'u denklemin eşit olduğu sabiti bölüyorsa bu denklemlere diophant denklem denir" anlamı çıkmasına sebep olacak şekilde yazılmıştır.

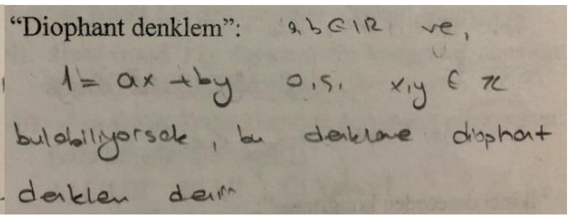

"Diophant denklem":
$a, b, c \in \mathbb{Z}$
$ax + by = c$ lineer denkleminde
$(a, b) = d \mid c \Rightarrow$ diophant denklemdir.

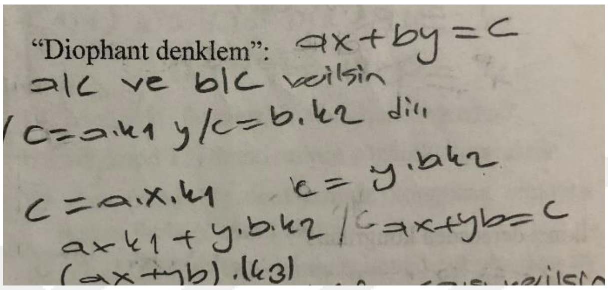
Şekil 77. (Lineer) Diophant Denklem tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 16 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Verilen tanımların büyük kısımları hatalıdır ve bununla beraber bu kategoriye alınan tanımların çoğunda gereksiz özellik belirtilirken belirtilen gerekli özellikler ise yetersiz kalmıştır. Bu kategoride yer alan birkaç tanım örneği aşağıda verilmiştir.


"Diophant denklem":
$a_nx_n + a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = c$
denkleminde $(a_n, a_{n-1}, \dots a_0)$ rasyonel katsayı yada tam katsayılı ifadeler olmak üzere;
$(a_n, a_{n-1}, \dots a_0) = d | c \Rightarrow$ çözüm vardır.


"Diophant denklem": $a, b \in \mathbb{R}$ ve, $1 = ax + by$ o.s. $x, y \in \mathbb{Z}$ bulabiliyorsak, bu denkleme diophant denklem denir


"Diophant denklem": $ax + by = c$
$a|c$ ve $b|c$ verilsin
$c = a.k_1$ y $c = b.k_2$ dir
$c = a.x.k_1$ $c = y.bk_2$
$ax k_1 + y.b.k_2$ / $c = ax + yb = c$
$(ax + yb).k_3$

Şekil 78. (Lineer) Diophant Denklem tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.11.2. "(Lineer) Diophant Denklem" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

(Lineer) Diophant Denklem kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.12. "Kongruant Olma" kavramına ait bulgular

Kongruant olma kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- m>0 sabit bir tam sayı ve a,bϵZ olsun.
  Eğer, m|a-b ise yani a-b=m.k olacak şekilde ∃kϵZ varsa, a elemanı b elemanına m mödülüne göre kongruenttir denir.

4.12.1. "Kongruant Olma" kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 14'de verilmiştir.

Tablo 14

Öğretmen adaylarının Kongruant Olma kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılım

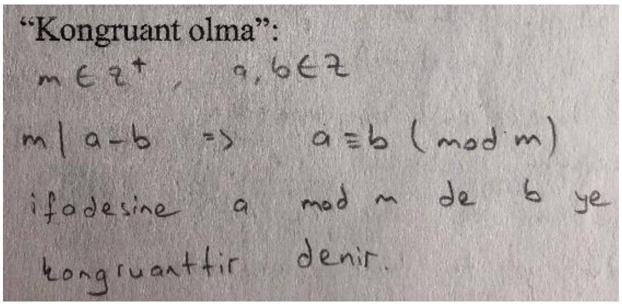
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	3	%6
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	11	%22
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	15	%30
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	5	%10
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	12	%24
CEVAPSIZ		4	%8

Uygun Tanımlar

Kongruant Olma kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 14 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 3 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 11 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

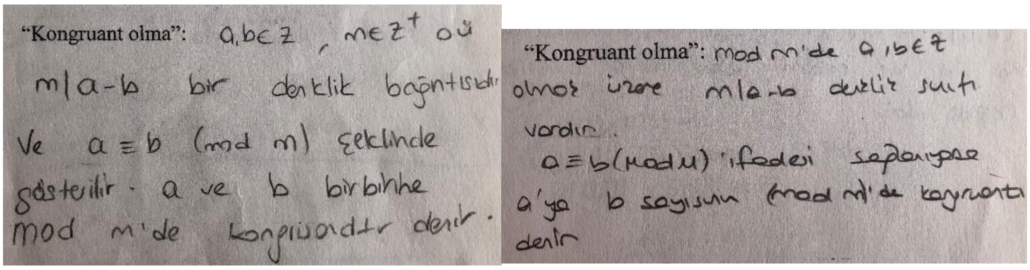
Bu kategoriye dahil olan 3 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara bir örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 79. Kongruant Olma tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Kongruant Olma kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 11 tanım vardır. Bu tanımların uygun ancak titiz olmayan tanımlar kategorisine alınma sebeplerinden biri "m|a-b denklik bağıntısıdır" ifadesi matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım olarak alınabilir. Bir diğer sebep ise "m$\in Z^+$" ifadesine yer verilmemiş olmasıdır. Modüler aritmetik kapsamında m ifadesinin pozitif tam sayı olduğu aşikardır. Öğretmen adaylarının tanımlarında bu ifadeye yer verip vermemesi keyfi kabul edilebilir. Bu çalışmada bu kavram için “mϵZ^{+}“ ifadesine yer verilmeyen durumlar uygun ancak titiz olmayan kategorisinde değerlendirilmektedir. Bu durumlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


“Kongruant olma”: a,b∈Z , m∈Z⁺ ö ü
m|a-b bir denklik bağıntısıdır
ve a ≡ b (mod m) şeklinde
gösterilir. a ve b birbirine
mod m'de kongrüanttır denir.

“Kongruant olma”: mod m'de a,b∈Z
olmak üzere m|a-b denklik şartı
vardır.
a ≡ b(mod m) ifadesi sağlanıyorsa
a'ya b sayısının (mod m)'de kongrüanttı
denir

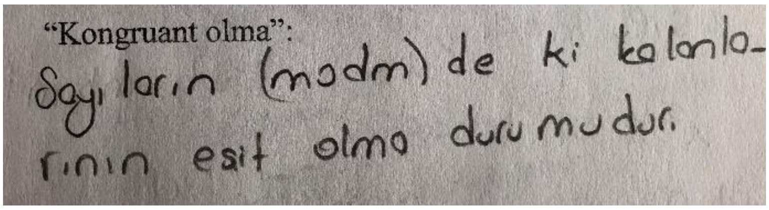
Şekil 80. Kongruant Olma tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Uygun Olmayan Tanımlar

Kongruant Olma kavramına ait yapılan tanımların %64’ü bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

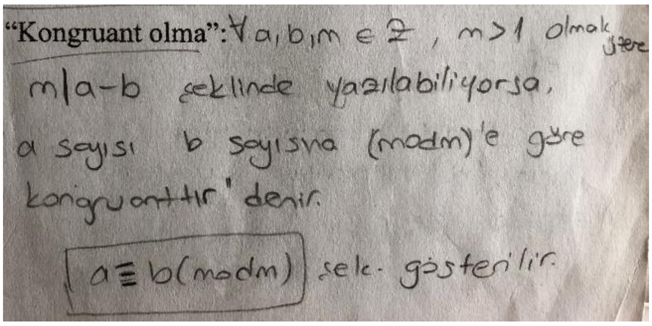
Öğretmen adayları tarafından yapılan 15 tanım bu kategoride yer almaktadır. Tanımların çoğunun bu kategoride olma sebebi tanım verilirken kullanılan ifadelerin sayı kümelerinin belirtilmemiş olmasıdır. Bir başka eksiklik ise “m|a-b” ifadesinin kullanılmamasıdır. Bu tanımlara örnek bir tanım aşağıda verilmiştir.


“Kongruant olma”:
Sayıların (modm) de ki kalanla-
rının esit olma durumudur.

Şekil 81. Kongruant Olma tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

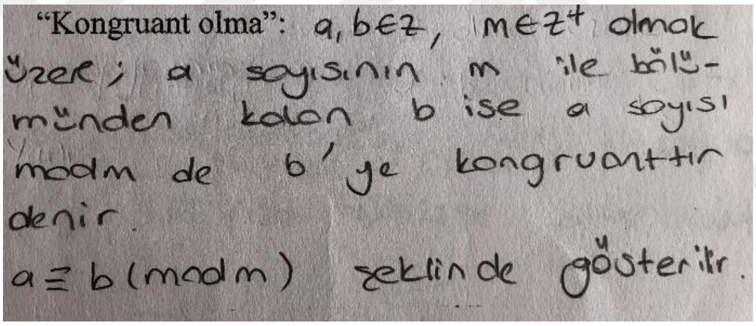
Kongruant Olma kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 5 tanıma rastlanmıştır. Yapılan 4 tanım da birebir aynı tanımlardır. Gereksiz kısıtlama yaratan durum ise “m>1” ifadesidir. Bu tanımlara bir örnek aşağıda verilmiştir.



"Kongruant olma": $\forall a, b, m \in \mathbb{Z}$, $m>1$ olmak üzere
$m|a-b$ şeklinde yazılabiliyorsa,
a sayısı b sayısına (mod m)'e göre
kongruanttır' denir.
$\boxed{a \equiv b (\text{mod } m)}$ şek. gösterilir.

Şekil 82. Kongruant Olma tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Kalan 1 tanımda ise "m=1" için oluşabilecek durumlar dışarda kalmıştır. Bununla birlikte (Mod 1) durumu pek kullanılmamaktadır. Aslında bu sebepten dolayı bu tanım uygun bir tanım olmaya çok yakındır ancak yine de (Mod 1) durumunu dışarda bıraktığı için bu kategoriye dahil edilmiştir. Bu tanım aşağıda verilmiştir.

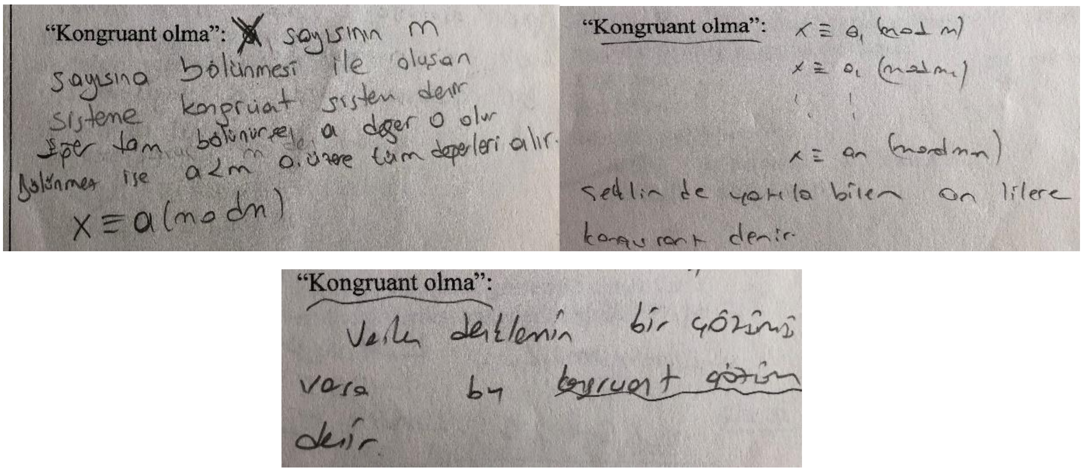


"Kongruant olma": $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak
üzere; a sayısının m ile bölü-
münden kalan b ise a sayısı
mod m de b'ye kongruanttır
denir.
$a \equiv b (\text{mod } m)$ şeklinde gösterilir.

Şekil 83. Kongruant Olma tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Kongruant Olma kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 12 tanıma rastlanmıştır. Verilen tanımların büyük kısımları hatalıdır ve bununla beraber bu kategoriye alınan tanımların çoğunda gereksiz özellik belirtilirken belirtilen gerekli özellikler ise yetersiz kalmıştır. Bu kategoride yer alan birkaç tanım örneği aşağıda verilmiştir.



Şekil 84. Kongruant Olma tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.12.2. "Kongruant Olma" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Kongruant Olma kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.13. "Lineer Kongruans" kavramına ait bulgular

Lineer kongruans kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- a, b ϵ Z olmak üzere , a.x=b (mod m) ifadesine lineer kongruans denir.

4.13.1. "Lineer Kongruans" kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 15'de verilmiştir.

Tablo 15

Öğretmen adaylarının Lineer Kongruans kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

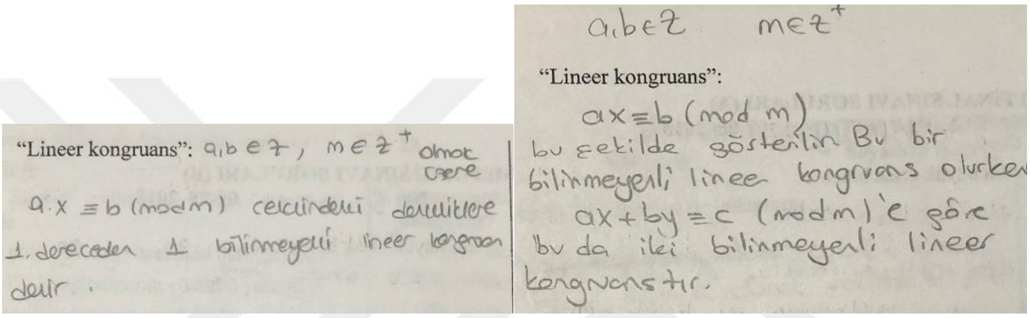
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	8	%16
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	14	%28
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	0	%0
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	10	%20
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	11	%22
CEVAPSIZ		7	%14

Uygun Tanımlar

Lineer Kongruans kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 22 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 8 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 14 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

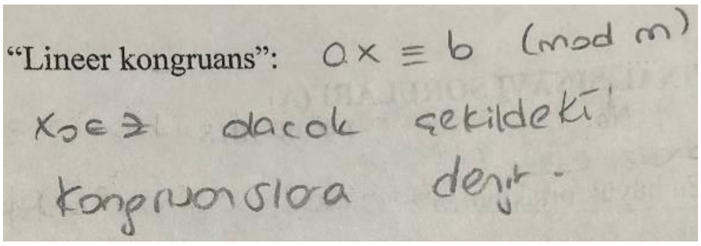
Bu kategoriye dahil olan 8 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 85. Lineer Kongruans tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Lineer Kongruans kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 14 tanım vardır. Tanımların bu kategoriye alınma sebeplerinden biri "2 bilinmeyenli lineer kongruans" tanımı yapmış olmaları, diğeri ise a,b elemanlarının tam sayıların elemanı olduğunun belirtilmemiş olmasıdır. Bu tanımlara bir örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 86. Lineer Kongruans tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

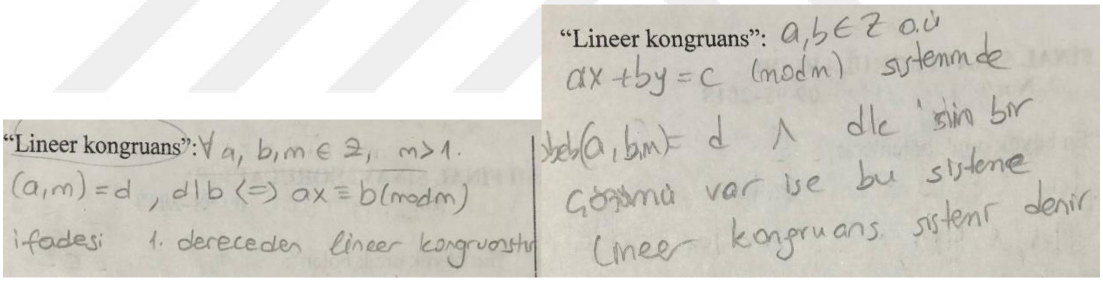
Öğretmen adaylarının Lineer Kongruans kavramına ait yaptıkların tanımların %42’si bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan tanımlardan bu kategoriye dahil edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Lineer Kongruans kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 10 tanıma rastlanmıştır. Tanımların bu kategoriye alınmış olmaları çoğunlukla, öğretmen adaylarının lineer kongruansın çözümü olması şartını, lineer kongruans olma şartı olarak almış olmalarıdır. Diğer bir sebep ise m>1 ifadesidir. Bu ifade yazıldığında m=1 için yazılabilecek olan lineer kongruanslar, lineer kongruans olarak kabul edilemediğinden kavramın örnek uzayında kısıtlama oluşturmaktadır. Bu tanımlara örnekler aşağıda verilmiştir.

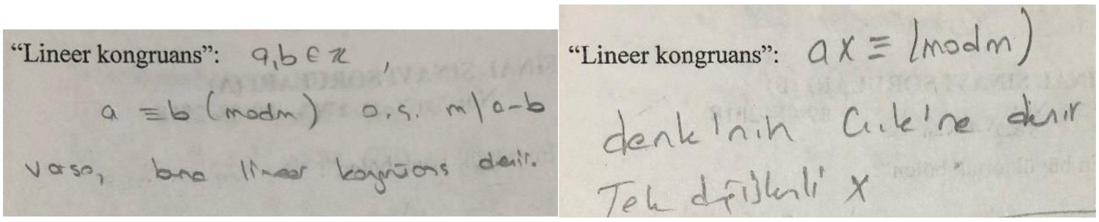

“Lineer kongruans”: $\forall a, b, m \in \mathbb{Z},\ m>1$. $(a,m)=d$, $d|b \Leftrightarrow ax \equiv b (mod\, m)$ ifadesi 1. dereceden lineer kongruanstır

“Lineer kongruans”: $a,b \in \mathbb{Z}$ o.ü $ax+by=c \ (mod\, m)$ sisteminde ebob$(a,b,m)=d \wedge d|c$ ’sinin bir çözümü var ise bu sisteme lineer kongruans sistemi denir

Şekil 87. Lineer Kongruans tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 11 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Verilen tanımların büyük kısımları hatalıdır ve bununla beraber bu kategoriye alınan tanımların çoğunda gereksiz özellik belirtilirken belirtilen gerekli özellikler ise yetersiz kalmıştır. Bu kategoride yer alan tanım örneklerinden farklı olanlar aşağıda verilmiştir.



Şekil 88. Lineer Kongruans tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.13.2. “Lineer Kongruans” kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Lineer Kongruans kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.14. “Rezidü Gösterimi” kavramına ait bulgular

Rezidü gösterimi kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- m = $m_1.m_2 \ldots . m_n$ ve i≠j için $(m_i, m_j) = 1$ olsun.
  Bu durumda ∀i ϵ 1,2,…,n iken x≡a_i (mod m_i) kongruansları yardımıyla yazılan $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sıralı n’lisine $\overline{x} \epsilon Z_m$ elemanının rezidü gösterimi (kalan gösterimi) denir.
- m = $m_1.m_2 \ldots . m_n$ ve i≠j için $(m_i, m_j) = 1$ olsun
  Z_m içindeki denkgele bir $\overline{x}$ sınıfının rezidü gösterimi diye,
  x≡a_i (mod m_i) olmak üzere, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sıralı n’lisine denir.

4.14.1. “Rezidü Gösterimi” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 16’da verilmiştir.

Tablo 16

Öğretmen adaylarının Rezidü Gösterimi kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılım

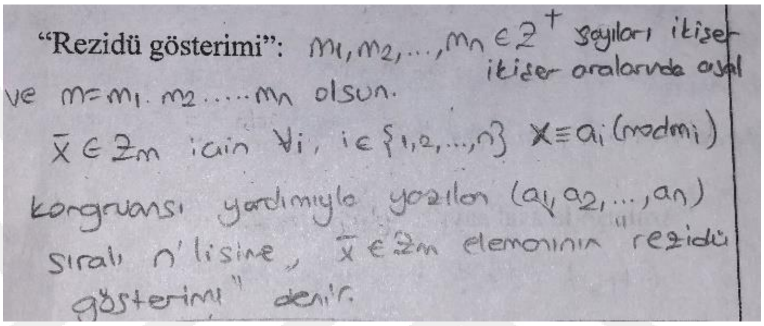
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	15	%30
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	3	%6
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	16	%32
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	1	%2
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	15	%30

Uygun Tanımlar

Rezidü Gösterimi kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 18 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 15 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 3 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

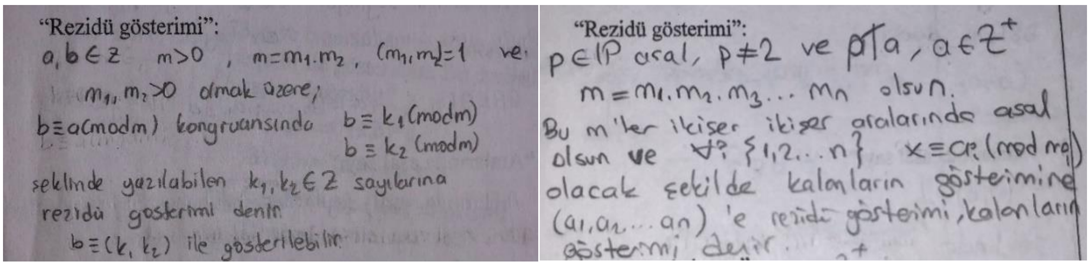
Bu kategoriye dahil olan 15 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara bir örnek şekil 89'da verilmiştir.


"Rezidü gösterimi": $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}^+$ sayıları ikişer ikişer aralarında asal ve $m = m_1 . m_2 . \dots . m_n$ olsun.
$\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ için $\forall i$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ $x \equiv a_i (mod\, m_i)$ kongruansı yardımıyla yazılan $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ sıralı n'lisine, $\bar{x} \in \mathbb{Z}_m$ elemanının "rezidü gösterimi" denir.

Şekil 89. Rezidü Gösterimi tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Rezidü Gösterimi kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 5 tanım vardır. Tanımlardan 2 tanesinde kavramı iki değişken ile göstermiştir. Diğer bir tanımda ise p asal sayısının tanım kümesini açıklamış ancak kavramı tanımlarken hiç kullanmamıştır. Diğer tanımlarda ise küçük dikkat hataları gözlemlenmiştir. Bu tanımlara örnekler aşağıda verilmiştir.


"Rezidü gösterimi":
$a, b \in \mathbb{Z}$ $m>0$, $m = m_1 . m_2$, $(m_1, m_2) = 1$ ve $m_1, m_2 > 0$ olmak üzere;
$b \equiv a (mod\, m)$ kongruansında $b \equiv k_1 (mod\, m)$
$b \equiv k_2 (mod\, m)$
şeklinde yazılabilen $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sayılarına rezidü gösterimi denir.
$b \equiv (k_1, k_2)$ ile gösterilebilir.

"Rezidü gösterimi":
$p \in \mathbb{P}$ asal, $p \neq 2$ ve $p \nmid a$, $a \in \mathbb{Z}^+$
$m = m_1 . m_2 . m_3 \dots m_n$ olsun.
Bu m'ler ikişer ikişer aralarında asal olsun ve $\forall i$ $\{1,2 \dots n\}$ $x \equiv a_i (mod\, m_i)$ olacak şekilde kalanların gösterimine $(a_1, a_2 \dots a_n)$'e rezidü gösterimi, kalanların gösterimi denir.

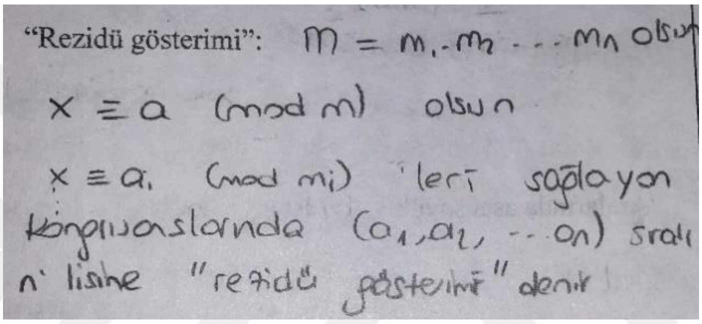
Şekil 90. Rezidü Gösterimi tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Rezidü Gösterimi kavramına ait yaptıkların tanımların %64’ü bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

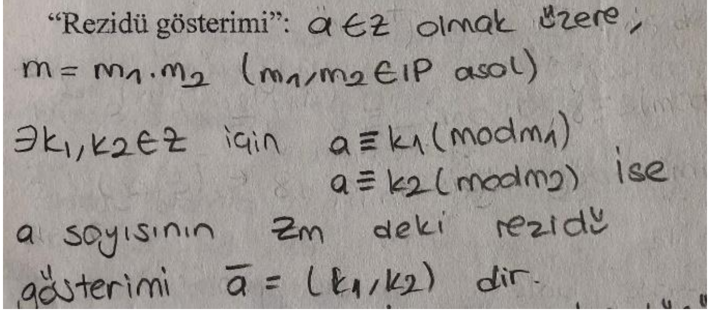
Öğretmen adayları tarafından yapılan 16 tanım bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoride yer alan 16 tanımdan 9 tanesinde eksiklik aynıdır: “$(m_i, m_j) = 1$” ifadesi. Kalan 9 tanımda farklı farklı eksiklikler varken bazılarında ek olarak yine aralarında asal olma şartına yer verilmemiştir. Kategoride bulunan tanımlara bir örnek aşağıda verilmiştir.


“Rezidü gösterimi”: $m = m_1 \cdot m_2 \cdots m_n$ olsun
$x \equiv a \pmod{m}$ olsun
$x \equiv a_i \pmod{m_i}$ 'leri sağlayan kongruanslarında $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ sıralı n' lisine "rezidü gösterimi" denir

Şekil 91. Rezidü Gösterimi tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

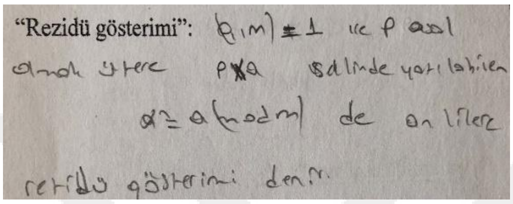
Rezidü Gösterimi kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. Bu tanımda kısıtlayıcı özellik m_1 ve m_2 kavramlarına asal olma zorunluluğunun getirilmiş olmasıdır. m_1 ve m_2 asal olmalı değil, m_1, m_2,… değerleri ikişer ikişer aralarında asal olmalıdır.

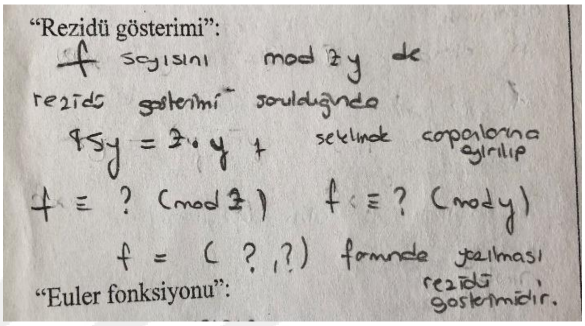

“Rezidü gösterimi”: $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,
$m = m_1 . m_2$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{P}$ asal)
$\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ için $a \equiv k_1 (\mathrm{mod}\, m_1)$
$a \equiv k_2 (\mathrm{mod}\, m_2)$ ise
a sayısının $\mathbb{Z}_m$ deki rezidü
gösterimi $\bar{a} = (k_1, k_2)$ dir.

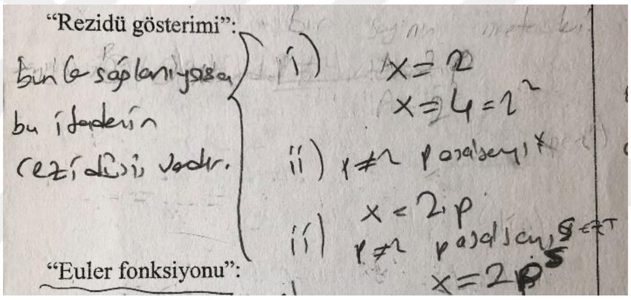
Şekil 92. Rezidü Gösterimi tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 15 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Verilen tanımların büyük kısımları hatalıdır ve bununla beraber bu kategoriye alınan tanımların çoğunda gereksiz özellik belirtilirken belirtilen gerekli özellikler ise yetersiz kalmıştır. Bu kategoride yer alan tanımlardan farklı birkaç örnek aşağıda verilmiştir.







Şekil 93. Rezidü Gösterimi tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.14.2. "Rezidü Gösterimi" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Rezidü Gösterimi kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.15. "Euler Fonksiyonu" kavramına ait bulgular

Euler fonksiyonu kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- m ≥ 1 olmak üzere, m'ye eşit yada m'den küçük olup, m ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısını veren fonksiyona Euler Fonksiyonu denir. Ø(m) ile gösterilir.
- m ≥ 1 için, Z_m içindeki tersinir öğelerin sayısı Ø(m) ile gösterilir ve m→Ø(m) bağıntısına, yada kısaca Ø(m) ye, Euler Ø- Fonksiyonu denir.

4.15.1. "Euler Fonksiyonu" kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 17'de verilmiştir.

Tablo 17

Öğretmen adaylarının Euler Fonksiyonu kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

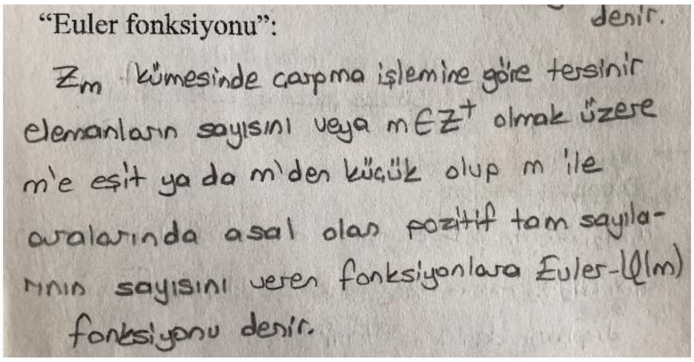
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	7	%14
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	2	%4
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	28	%56
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	12	%24
CEVAPSIZ		1	%2

Uygun Tanımlar

Euler Fonksiyonu kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 9 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 7 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 2 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

Bu kategoriye dahil olan 7 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara bir örnek şekil 94'te verilmiştir.


"Euler fonksiyonu": denir.
Z_m kümesinde çarpma işlemine göre tersinir elemanların sayısını veya $m \in Z^+$ olmak üzere m'e eşit ya da m'den küçük olup m ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısını veren fonksiyonlara Euler-$\varphi(m)$ fonksiyonu denir.

Şekil 94. Euler Fonksiyonu tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Yukarıdaki tanımlara benzer tanım yapan öğretmen adayından, yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında yazdığı tanımı değerlendirmesi istenmiştir.

A: “Yazdığın Euler Fonksiyonu kavramının tanımını değerlendirebilir misin?”

K1: “Diğer kavramlara göre daha net çünkü bence karmaşıklığın sebebi çok fazla matematiksel sembolün kullanılması gibi… Ya da benim için böyle olabilir.”

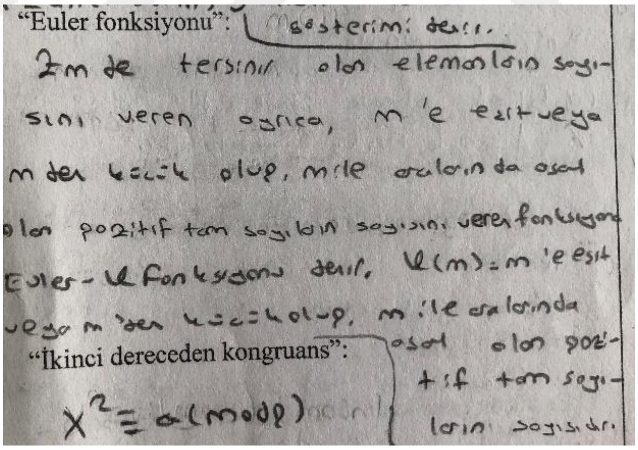
A: “Yani tanımlarda daha çok matematiksel sembol kullanmak karmaşıklığı arttırıyor mu?”

K1: “Bence öyle. Sembollerle yazdığımı daha çok anlatmaya çalışıyorum tanım yaparken, direk yazmak yani mesela ‘a tamsayıdır’ demek daha net daha anlaşılır.”

Tanımlama yaparken kullanılan matematiksel ifadeler tanımı yapan kişiye özeldir. Tanımda matematiksel dili fazla kullandığında anlaşılırlığını düşürdüğünü düşünenlerin olduğu gibi estetik olarak daha güzel göründüğünü düşünenler de vardır.

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Euler Fonksiyonu kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 2 tanım vardır. Tanımların titiz olmayan olarak değerlendirilmesinin sebebi m’in tanım kümesinin belirtilmemiş olmasıdır. Diğer bütün gerekli koşullar uygun olduğundan, bu iki tanım uygun ancak titiz olmayan kategorisine alınmıştır. Bu tanımlara bir örnek aşağıda verilmiştir.



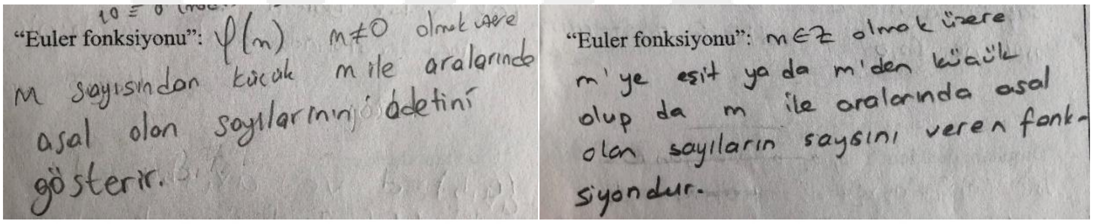
Şekil 95. Euler Fonksiyonu tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Euler Fonksiyonu kavramına ait yaptıkların tanımların %80'i bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 28 tanım bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoride yer alan tanımların neredeyse hepsinde "m'e eşit veya m'den küçük, m ile aralarında asal olan **pozitif** tam sayılar" vurgusunda pozitiflik belirtilmemiştir. Pozitif kavramı vurgulanmadığında negatif tam sayıların sayısının da kavrama dahil olduğu düşünülebilir. Bazı tanımlarda başka eksiklikler de mevcuttur. Tanımlar bu sebeple gerekli ancak yetersiz olarak değerlendirilmiştir. Gerekli ancak yetersiz tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.



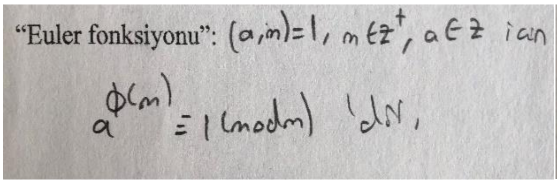
Şekil 96. Euler Fonksiyonu tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

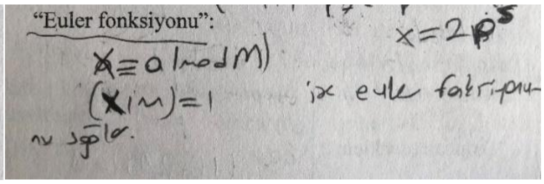
Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

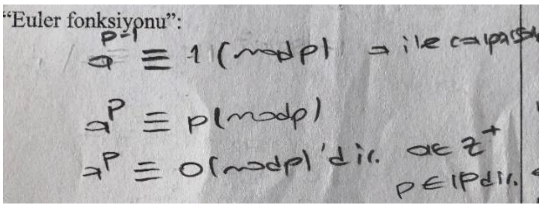
Euler Fonksiyonu kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 12 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Verilen tanımların büyük kısımları hatalıdır ve bununla beraber bu kategoriye alınan tanımların çoğunda gereksiz özellik belirtilirken belirtilen gerekli özellikler ise yetersiz kalmıştır. Bu kategoride yer alan tanım örneklerinden farklı olanlar aşağıda verilmiştir.


"Euler fonksiyonu": $(a,m)=1$, $m\in Z^+$, $a\in Z$ için
$a^{\phi(m)} \equiv 1 (\mod m)$ 'dir,


"Euler fonksiyonu":
$x=2p^s$
$x\equiv a (\mod m)$
$(x,m)=1$ ise euler fonksiyonu şöyle.


"Euler fonksiyonu":
$a^{p-1} \equiv 1 (\mod p)$ ile çalış
$a^p \equiv p (\mod p)$
$a^p \equiv 0 (\mod p)$'dir. $a\in Z^+$
$p\in IP$dir.

Şekil 97. Euler Fonksiyonu tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.15.2. "Euler Fonksiyonu" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Euler Fonksiyonu kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.16. "Kuadratik Rezidü (İkinci Dereceden Kalan)" kavramına ait bulgular

Kuadratik rezidü (ikinci dereceden kalan) kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- p, a$\in$Z, p ∤ (bölmez) a ve p asal tek tam sayı olsun
  $x^2 \equiv$a (mod p)
  kongruansının bir çözümü varsa, a'ya p modülüne göre ikinci dereceden kalan (ya da kuadratik rezidü) denir.

4.16.1. "Kuadratik Rezidü (İkinci Dereceden Kalan)" kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 18'de verilmiştir.

Tablo 18

Öğretmen adaylarının Kuadratik Rezidü (İkinci Dereceden Kalan) kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

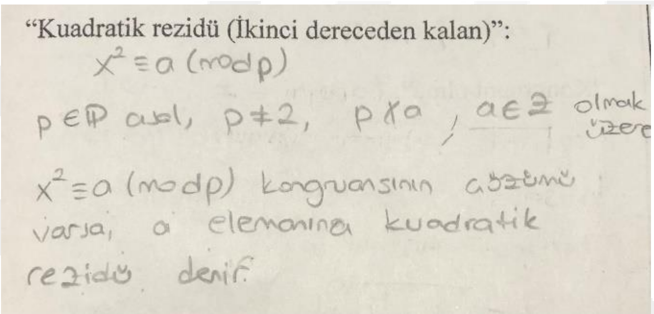
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	21	%42
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	1	%2
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	15	%30
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	13	%26

Uygun Tanımlar

Kuadratik Rezidü (İkinci Dereceden Kalan) kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 22 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 21 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 1 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

Bu kategoriye dahil olan 21 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara örnek tanım aşağıda verilmiştir.


"Kuadratik rezidü (İkinci dereceden kalan)":

$x^2 \equiv a \pmod{p}$

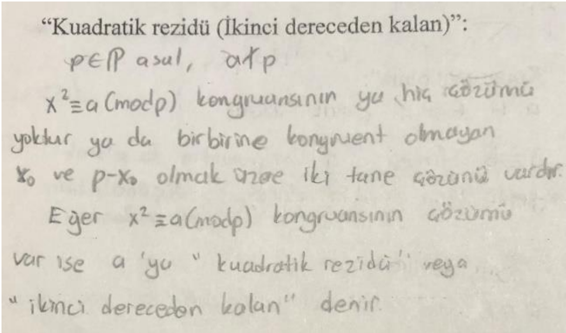
$p \in \mathbb{P}$ asal, $p \neq 2$, $p \nmid a$, $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere

$x^2 \equiv a \pmod{p}$ kongruansının çözümü varsa, a elemanına kuadratik rezidü denir.

Şekil 98. Kuadratik Rezidü tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Kuadratik Rezidü kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 1 tanım vardır. Tanımda p'nin tek asal sayı olması gerektiği belirtilmemiştir onun dışında bütün gerekli şartlar yazılmıştır. Bunun dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünülebilir. a tam sayısının da tanım kümesi belirtilmemiştir ancak kongruant olma ifadesi kullanıldığından a'nın tam sayı olması gerektiği anlaşılabilir.


"Kuadratik rezidü (İkinci dereceden kalan)":

$p \in \mathbb{P}$ asal, $a \nmid p$

$x^2 \equiv a \pmod{p}$ kongruansının ya hiç çözümü yoktur ya da birbirine kongruent olmayan x_0 ve $p-x_0$ olmak üzere iki tane çözümü vardır.

Eğer $x^2 \equiv a \pmod{p}$ kongruansının çözümü var ise a'ya "kuadratik rezidü" veya "ikinci dereceden kalan" denir.

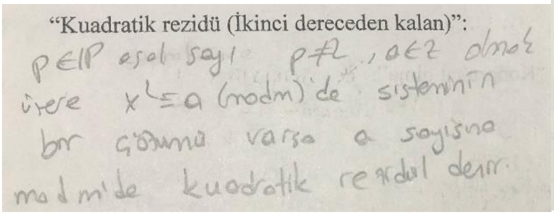
Şekil 99. Kuadratik Rezidü tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

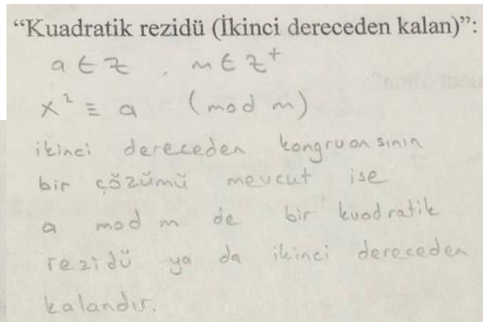
Öğretmen adaylarının Kuadratik Rezidü kavramına ait yaptıkların tanımların %56'sı bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 15 tanım bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoride yer alan tanımların neredeyse hepsinde kavramı tanımlarken kullanılan elemanların tanım kümeleri belirtilmemiştir. Eksikler hep benzerdir: p ∤ (bölmez) a veya p asal tek tam sayı özelliklerinin belirtilmemesi. Bazı tanımlarda p elemanının tanım kümesini belirtilmiş ancak p elemanı, kavramı tanımlarken kullanılmamıştır. Bu tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"Kuadratik rezidü (İkinci dereceden kalan)":

$p \in \mathbb{P}$ asal sayı $p \neq 2$, $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $x^2 \equiv a$ (modm)'de sisteminin bir çözümü varsa a sayısına mod m'de kuadratik rezidü denir.


"Kuadratik rezidü (İkinci dereceden kalan)":

$a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^+$

$x^2 \equiv a$ (mod m)

ikinci dereceden kongruansının bir çözümü mevcut ise a mod m de bir kuadratik rezidü ya da ikinci dereceden kalandır.

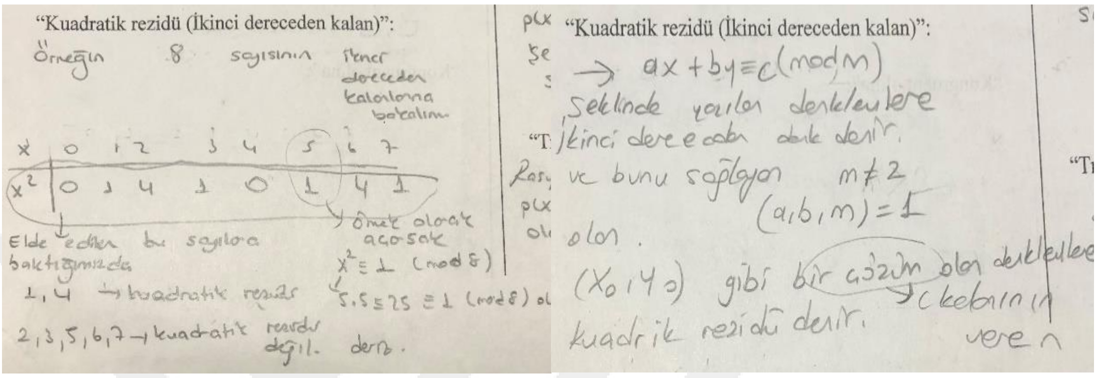
Şekil 100. Kuadratik Rezidü tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Kuadratik Rezidü kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 13 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Verilen tanımların büyük kısımları hatalıdır ve bununla beraber bu kategoriye alınan tanımların çoğunda gereksiz özellik belirtilirken belirtilen gerekli özellikler ise yetersiz kalmıştır. Bu kategoride yer alan tanım örneklerinden farklı olanlar aşağıda verilmiştir.



Şekil 101. Kuadratik Rezidü tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.16.2. "Kuadratik Rezidü" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Kuadratik Rezidü kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.17. "Legendre Gösterimi" kavramına ait bulgular

Legendre Gösterimi kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- "x^2≡a (mod p)'nin bir çözümü var" yada "x^2≡a (mod p)'nin bir çözümü yok" deyimlerini kısaltmak için kullanılan $(\frac{a}{p})$ Legendre gösterimi, p asal tek tam sayı ve p ∤ (bölmez) a olmak üzere;

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} 1, & \text{a sayısı p modülüne göre kuadratik rezidü ise} \\ -1, & \text{a sayısı p modülüne göre kuadratik rezidü değilse,} \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve "a bölü p'nin Legendre Gösterimi" diye okunur.

4.17.1. "Legendre Gösterimi" kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 19'da verilmiştir.

Tablo 19

Öğretmen adaylarının Legendre Gösterimi kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

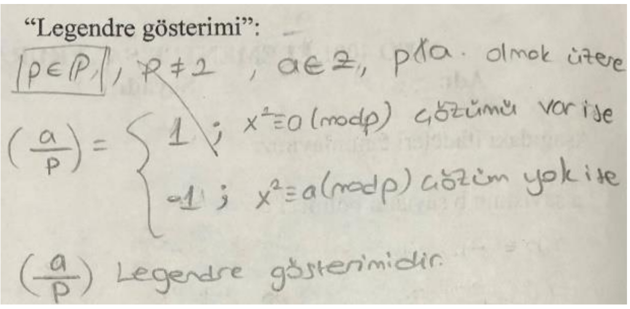
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	11	%22
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	28	%56
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	4	%8
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	1	%2
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	4	%8
CEVAPSIZ		2	%4

Uygun Tanımlar

Legendre Gösterimi kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 39 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 11 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 28 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

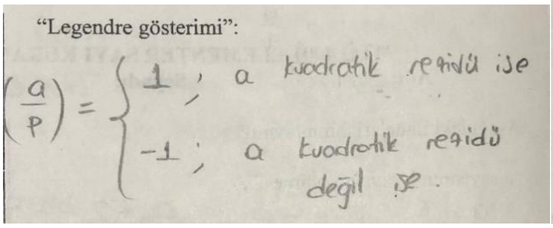
Bu kategoriye dahil olan 11 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara örnek şekil 102'de verilmiştir.

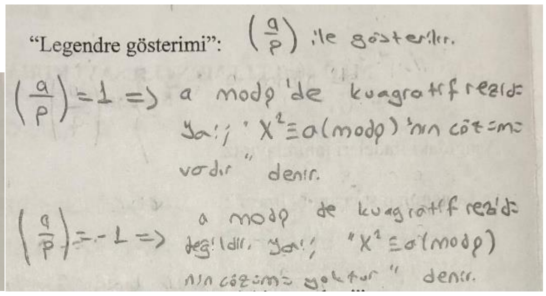


Şekil 102. Legendre Gösterimi tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Legendre Gösterimi kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 28 tanım vardır. Bu kategoride bulunan tanımların hepsi kullanılan elemanların tanım kümesinin belirtilmemesi sebebiyle titiz olmayan olarak değerlendirilmiştir. Tanımlardan da görüleceği üzere "kuadratik rezidü ise" ifadesi kullanıldığında, aslında kuadratik rezidü açısından değerlendirilebilme şartlarını sağladığı düşünüleceğinden, kullanılan elemanları tekrar tanımlamak gerekli şart olarak görülmeyebilir. Bu tanımlara örnekler aşağıda verilmiştir.





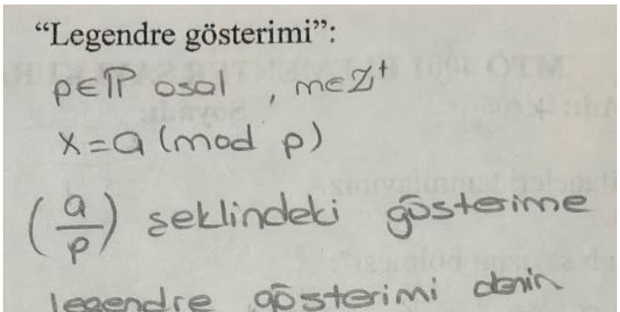
Şekil 103. Legendre Gösterimi tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Legendre Gösterimi kavramına ait yaptıkları tanımların %18'i bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

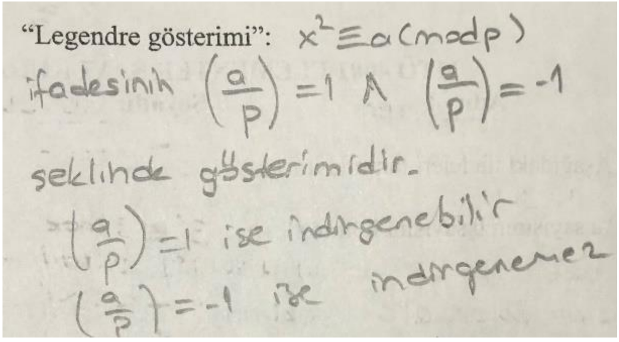
Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 4 tanım bu kategoride yer almaktadır. 3 tanımda $(\frac{a}{p})$ değerinin hangi koşulda hangi değeri alabileceği belirtilmemiştir.



Şekil 104. Legendre Gösterimi tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

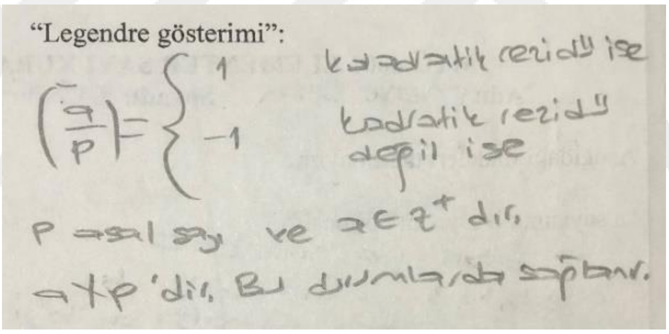
Diğer bir tanımda ise birinde "indirgenebilir" kavramı Legendre gösterimi için pek doğru olmayan bir ifadedir.


"Legendre gösterimi": $x^2 \equiv a \pmod p$
ifadesinin $\left(\frac{a}{p}\right)=1 \wedge \left(\frac{a}{p}\right)=-1$
şeklinde gösterimidir.
$\left(\frac{a}{p}\right)=1$ ise indirgenebilir
$\left(\frac{a}{p}\right)=-1$ ise indirgenemez

Şekil 105. Legendre Gösterimi tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

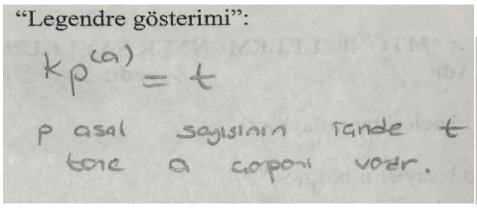
Legendre Gösterimi kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. aϵZ^+ ifadesi Legendre Gösterimi kavramını kısıtlamaktadır.

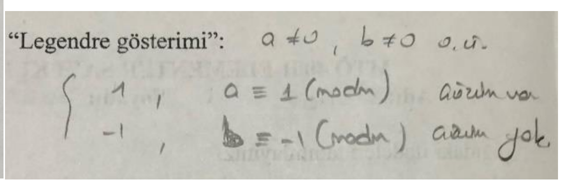

"Legendre gösterimi":
$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} 1 & \text{kuadratik rezidü ise} \\ -1 & \text{kodratik rezidü değil ise} \end{cases}$
p asal sayı ve $a \in Z^+$ dır,
$a \nmid p$ 'dir. Bu durumlarda sağlanır.

Şekil 106. Legendre Gösterimi tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 4 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Verilen tanımların büyük kısımları hatalıdır ve bununla beraber bu kategoriye alınan tanımların çoğunda gereksiz özellik belirtilirken belirtilen gerekli özellikler ise yetersiz kalmıştır. Bu kategoride yer alan tanımlar aşağıda verilmiştir.





Şekil 107. Legendre Gösterimi tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.17.2. “Legendre Gösterimi” kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Legendre Gösterimi kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.18. “a Tam Sayısının mod m’deki Mertebesi” kavramına ait bulgular

a tam sayısının mod m’deki mertebesi kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- a, m∈Z ve m>0, (m,a)=1 olsun.
  a^x≡1 (mod m) kongruansının en küçük pozitif tam sayı çözümüne a’nın m modülüne göre mertebesi denir.

4.18.1. “a Tam Sayısının mod m’deki Mertebesi” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 20’de verilmiştir.

Tablo 20

Öğretmen adaylarının a Tam Sayısının mod m’deki Mertebesi kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

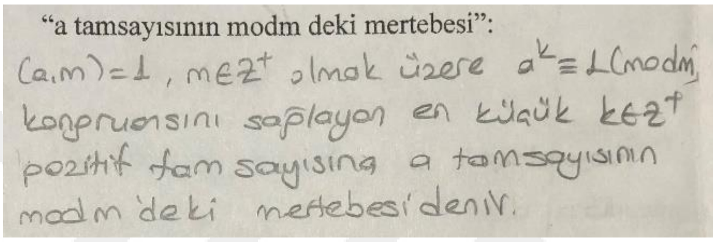
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	19	%38
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	5	%10
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	23	%46
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	3	%6

Uygun Tanımlar

a tam sayısının mod m’deki mertebesi kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 24 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 19 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 5 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

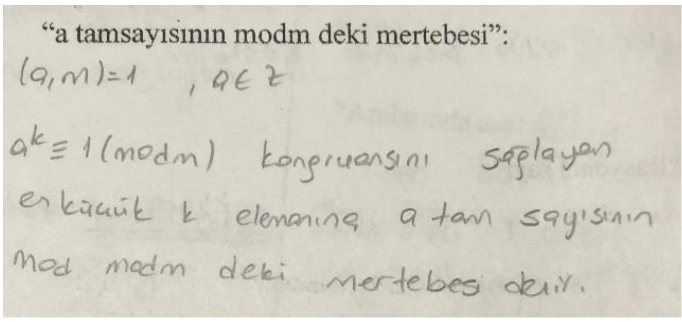
Bu kategoriye dahil olan 19 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara örnek şekil 108’te verilmiştir.


“a tamsayısının modm deki mertebesi”:
$(a,m)=1$, $m\in\mathbb{Z}^+$ olmak üzere $a^k \equiv 1 (mod\, m)$, kongruansını sağlayan en küçük $k\in\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayısına a tamsayısının modm'deki mertebesi denir.

Şekil 108. a Tam Sayısının mod m’deki Mertebesi tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

a tam sayısının mod m’deki mertebesi kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 5 tanım vardır. Tanımların hepsi neredeyse birebir aynıdır ve titiz olmayan tanım olarak değerlendirilme sebepleri k elemanının pozitif tam sayı olmasının ihmal edilmiş olmasıdır.


“a tamsayısının modm deki mertebesi”:
$(a,m)=1$, $a\in\mathbb{Z}$
$a^k \equiv 1 (modm)$ kongruansını sağlayan en küçük k elemanına a tam sayısının mod modm deki mertebesi denir.

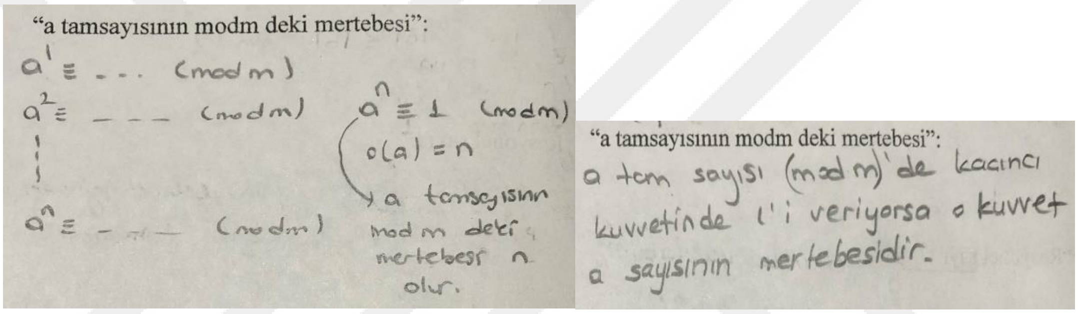
Şekil 109. a Tam Sayısının mod m’deki Mertebesi tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının a tam sayısının mod m'deki mertebesi kavramına ait yaptıkları tanımların %58'i bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 23 tanım bu kategoride yer almaktadır. Bu kategoride yer alan tanımların her birinde farklı farklı eksiklikler olmasına rağmen 23 tanımın hepsinde ortak olan eksiklik "(a, m) =1" ifadesidir. Bu tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"a tamsayısının modm deki mertebesi":

$a^1 \equiv \ldots (\mod m)$

$a^2 \equiv \_\_\_ (\mod m)$

$\vdots$

$a^n \equiv \_\_\_ (\mod m)$

$a^n \equiv 1 (\mod m)$

$o(a) = n$

a tamsayısının mod m deki mertebesi n olur.

"a tamsayısının modm deki mertebesi":

a tam sayısı (mod m)'de kaçıncı kuvvetinde 1'i veriyorsa o kuvvet a sayısının mertebesidir.

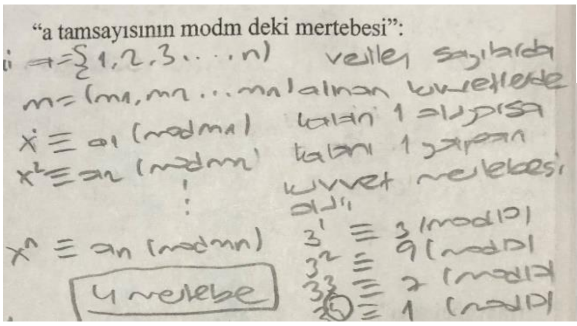
Şekil 110. a Tam Sayısının mod m'deki Mertebesi tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Bu kavram için yeterli ancak gereksiz kategorisinde değerlendirilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 3 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlar aşağıda verilmiştir.



“a tamsayısının modm deki mertebesi”:

a = {1, 2, 3, ..., n} verilen sayılarda m = (m1, m2 ... mn) alınan kuvvetlerde

$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$ kalanı 1 oluyorsa

$x^2 \equiv a_2 \pmod{m_2}$ kalanı 1 yapan kuvvet mertebesi olur

⋮

$x^n \equiv a_n \pmod{m_n}$

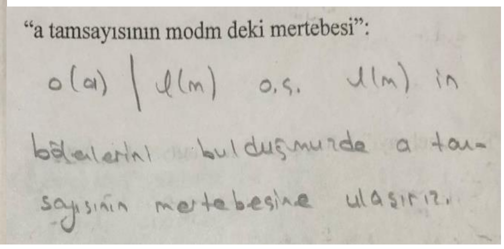
$3^1 \equiv 3 \pmod{10}$

$3^2 \equiv 9 \pmod{10}$

$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$

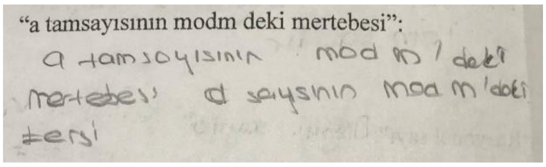
$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$

$\boxed{\text{4 mertebe}}$



“a tamsayısının modm deki mertebesi”:

o(a) | φ(m) o.s. φ(m) in bölenlerini bulduğumuzda a tam sayısının mertebesine ulaşırız.



“a tamsayısının modm deki mertebesi”:

a tamsayısının mod m'deki mertebesi a sayısının mod m'deki tersi

Şekil 111. a Tam Sayısının mod m’deki Mertebesi tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.18.2. “a Tam Sayısının Mod m’deki Mertebesi” kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

a tam sayısının mod m’deki mertebesi kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.19. “Primitif (İlkel) Kök” kavramına ait bulgular

Primitif (ilkel) kök kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- m pozitif tam sayı, a∈Z ve (m, a)=1 olsun.
  Eğer a sayısının m modülüne göre mertebesi Ø(m) ise a elemanına m modülünde bir primitif kök denir.
- Bir a tamsayısının m modülüne göre mertebesi Ø(m) ise, a’ya, m modülüne göre primitif kök, ya da m’nin primitif kökü denir.

4.19.1. “Primitif (İlkel) Kök” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 21’de verilmiştir.

Tablo 21

Öğretmen adaylarının Primitif (İlkel) Kök kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

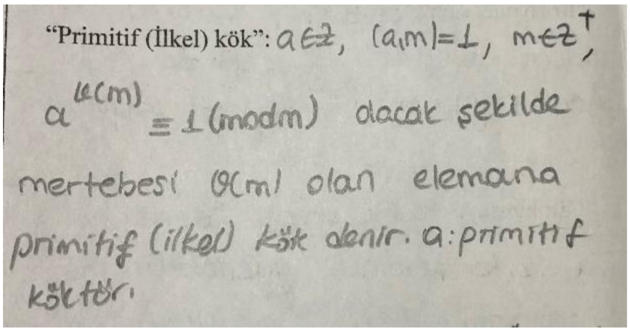
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	3	%6
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	23	%46
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	11	%22
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	2	%4
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	11	%22

Uygun Tanımlar

Primitif (İlkel) Kök kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 26 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 3 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 23 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

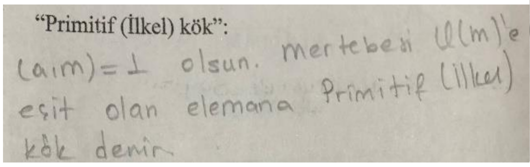
Bu kategoriye dahil olan 3 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.

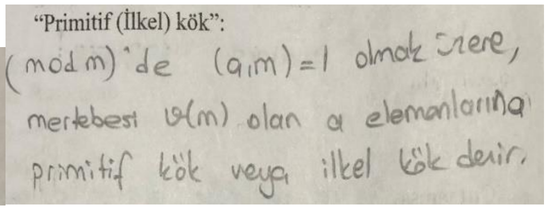

"Primitif (İlkel) kök": $a \in \mathbb{Z}$, $(a,m)=1$, $m \in \mathbb{Z}^+$, $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ olacak şekilde mertebesi $\varphi(m)$ olan elemana primitif (ilkel) kök denir. a: primitif köktür.

Şekil 112. Primitif (İlkel) Kök tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Primitif Kök kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 23 tanım vardır. Bu tanımların uygun ancak titiz olmayan tanımlar kategorisine alınma sebeplerinden biri tanım yaparken kullanılan ifadelerin sayı kümesinin belirtilmemesidir. a, b ve m sayıların tam sayı olduğunun belirtilmemesi kabul edilebilir bir durumdur. Modüler aritmetik kapsamında m ifadesinin pozitif tam sayı olduğu aşikardır. Kongruant olma durumu tanımlanırken ise a ve b sayılarının tam sayı oldukları belirtilmiştir. Bu sebeple sayı kümelerinin belirtilmediği durumlar uygun ancak titiz olmayan şeklinde değerlendirilmiştir.


"Primitif (İlkel) kök": $(a,m)=1$ olsun. mertebesi $\varphi(m)$'e eşit olan elemana Primitif (İlkel) kök denir.


"Primitif (İlkel) kök": (mod m)'de $(a,m)=1$ olmak üzere, mertebesi $\varphi(m)$ olan a elemanlarına primitif kök veya ilkel kök denir.

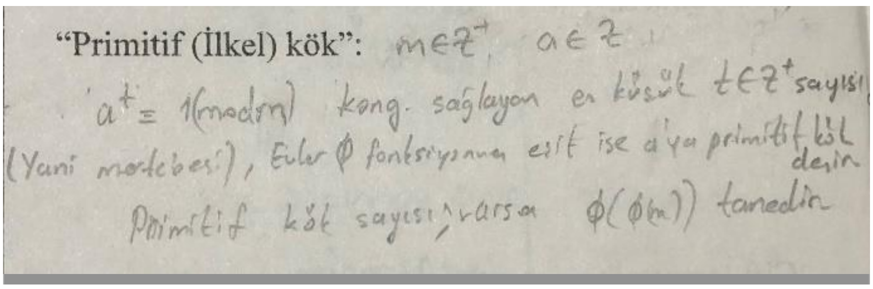
Şekil 113. Primitif (İlkel) Kök tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Primitif Kök kavramına ait yaptıkları tanımların %48'i bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

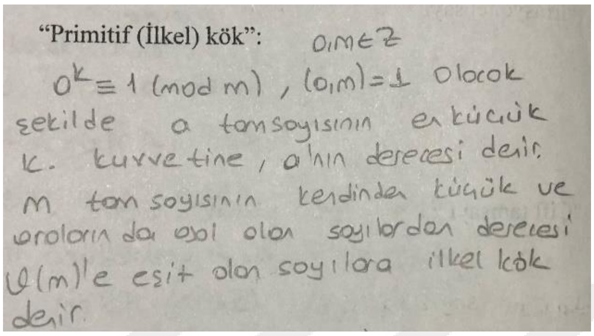
Öğretmen adayları tarafından yapılan 11 tanım bu kategoride yer almaktadır. Tanımların çoğu "(a, m)=1" ifadesinin eksikliğinden bu kategoriye dahil edilmiştir. Aslında a ile m aralarında asal olmadığında a∈Z tamsayısının hiçbir kuvveti mod m de 1'e kongruant olmaz. Bu açıdan bakıldığında (a,m)=1 koşulu verilmese de diğer bileşenler tam olduğunda tanım uygun sayılabilir. Bununla birlikte bu tür tanımlar bu çalışmada gerekli ama yetersiz kategorisinde değerlendirilmiştir Bu kategoriye dahil edilen tanımlara bir örnek aşağıda verilmiştir.


"Primitif (İlkel) kök": $m\in\mathbb{Z}^+$, $a\in\mathbb{Z}$
$a^t\equiv 1 \pmod m$ kong. sağlayan en küçük $t\in\mathbb{Z}^+$ sayısı (Yani mertebesi), Euler ϕ fonksiyonuna eşit ise a'ya primitif kök denir.
Primitif kök sayısı, varsa $\phi(\phi(m))$ tanedir.

Şekil 114. Primitif (İlkel) Kök tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

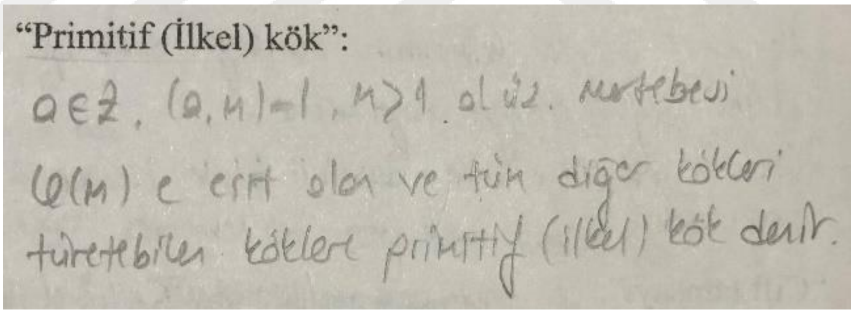
Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Primitif Kök kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 2 tanıma rastlanmıştır. Bir tanımda "m tam sayısının kendinden küçük" ifadesi yine bir kısıtlama içermektedir. Bu tanım aşağıda verilmiştir.


"Primitif (İlkel) kök": $a, m \in \mathbb{Z}$
$a^k \equiv 1 \pmod{m}$, $(a,m)=1$ olacak şekilde a tam sayısının en küçük k. kuvvetine, a'nın derecesi denir. m tam sayısının kendinden küçük ve aralarında asal olan sayılardan derecesi $\varphi(m)$'e eşit olan sayılara ilkel kök denir.

Şekil 115. Primitif (İlkel) Kök tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

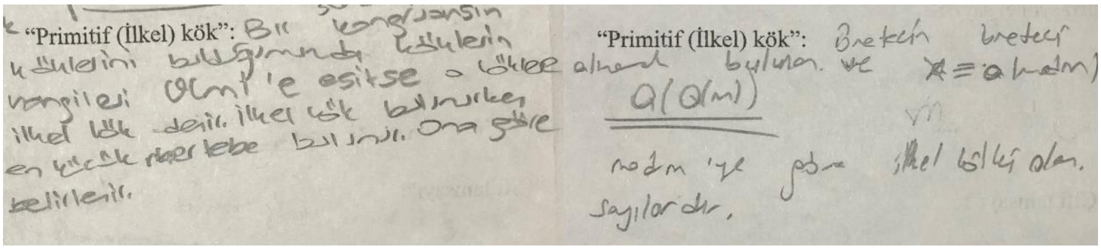
Diğer bir tanımda ise "m>1" ifadesi kısıtlama oluşturan bir durumdur.

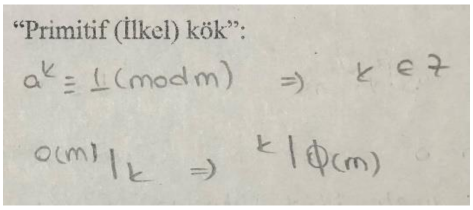

"Primitif (İlkel) kök":
$a \in \mathbb{Z}$, $(a,m)=1$, $m>1$ olsun. mertebesi $\varphi(m)$ e eşit olan ve tüm diğer kökleri türetebilen köklere primitif (ilkel) kök denir.

Şekil 116. Primitif (İlkel) Kök tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 3

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 11 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlardan bazıları aşağıda verilmiştir.





Şekil 117. Primitif (İlkel) Kök tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.19.2. “Primitif Kök” kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Primitif Kök kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.20. “İndeks” kavramına ait bulgular

İndeks kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- a∈Z, (m, a)=1 ve m modülüne göre bir primitif kök g olsun.

  $g^i \equiv a \pmod m$

  olacak şekilde tanımlanan en küçük pozitif i tam sayısına, a’nın g’ye göre indeksi denir ve $i = ind_g a$ yazılıp “i eşit indeks, g tabanına göre a” diye okunur.

4.20.1. “İndeks” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 22’de verilmiştir.

Tablo 22

Öğretmen adaylarının İndeks kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

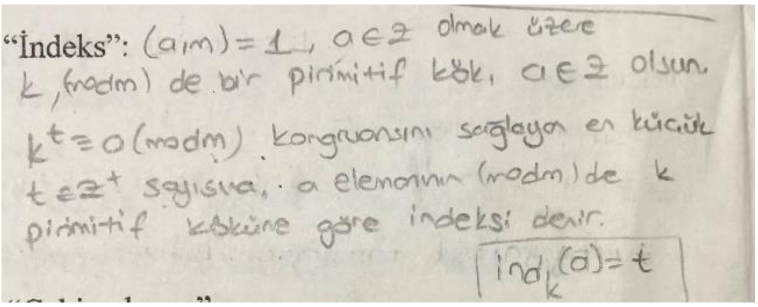
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	8	%16
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	7	%14
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	21	%42
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	11	%22
CEVAPSIZ		3	%6

Uygun Tanımlar

İndeks kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 15 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 8 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 7 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

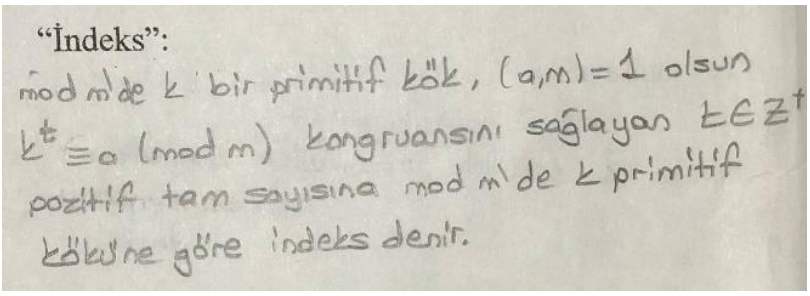
Bu kategoriye dahil olan 8 tanım benzerlik göstermektedir. Bu benzer tanımlara örnek aşağıda verilmiştir.


"İndeks": $(a,m)=1$, $a\in\mathbb{Z}$ olmak üzere k, (mod m) de bir pirimitif kök, $a\in\mathbb{Z}$ olsun. $k^t\equiv a \pmod{m}$ kongruansını sağlayan en küçük $t\in\mathbb{Z}^+$ sayısına, a elemanının (modm) de k pirimitif köküne göre indeksi denir. $\boxed{\mathrm{ind}_k(a)=t}$

Şekil 118. İndeks tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

İndeks kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 7 tanım vardır. Tanımların bu kategoriye alınma sebepleri ortaktır: a elemanının tanım kümesinin belirtilmemesi. Kongruant olma tanımında a elemanının tanım kümesi belirtildiğinden burada tekrar vurgulamaması kabul edilebilir bir durum ortaya çıkarmaktadır. Bu sebeple bu tanımlar uygun ancak titiz olmayan kategorisine dahil edilmiştir.


"İndeks": mod m'de k bir primitif kök, (a,m) = 1 olsun $k^t \equiv a \pmod{m}$ kongruansını sağlayan $t \in Z^+$ pozitif tam sayısına mod m'de k primitif köküne göre indeks denir.

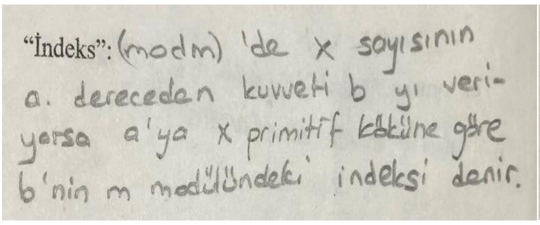
Şekil 119. İndeks tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

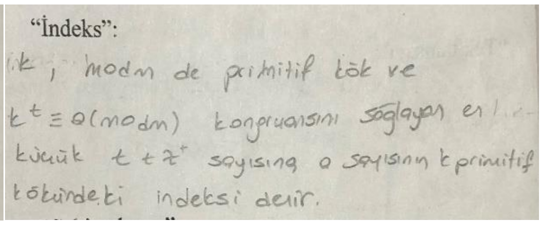
Uygun Olmayan Tanımlar

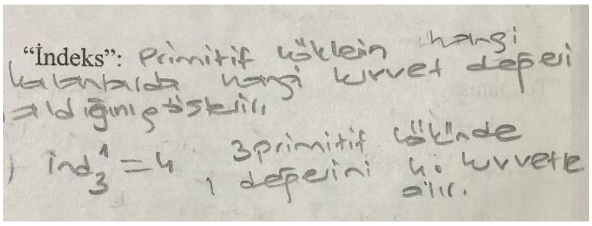
Öğretmen adaylarının İndeks kavramına ait yaptıkları tanımların %64'ü bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 21 tanım bu kategoride yer almaktadır. Yapılan eksiklikler benzerdir; "(a, m) =1" ifadesinin eksikliği veya indeksin pozitif tam sayı olması gerektiğinin belirtilmemesi veya primitif kök vurgusunun yapılmaması. Bazı tanımlarda ise eksiklikler biraz daha fazladır. Bu kategoriye dahil edilen tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"İndeks": (mod m) 'de x sayısının a. dereceden kuvveti b yi veriyorsa a'ya x primitif köküne göre b'nin m modülündeki indeksi denir.


"İndeks": k ; mod m de primitif kök ve $k^t \equiv a (\mathrm{mod}\, m)$ kongruansını sağlayan en küçük $t \in Z^+$ sayısına a sayısının k primitif kökündeki indeksi denir.


"İndeks": Primitif köklerin hangi kalanlarda hangi kuvvet değeri aldığını gösterir.
$ind_3^1 = 4$ 3 primitif kökünde 1 değerini 4. kuvvette alır.

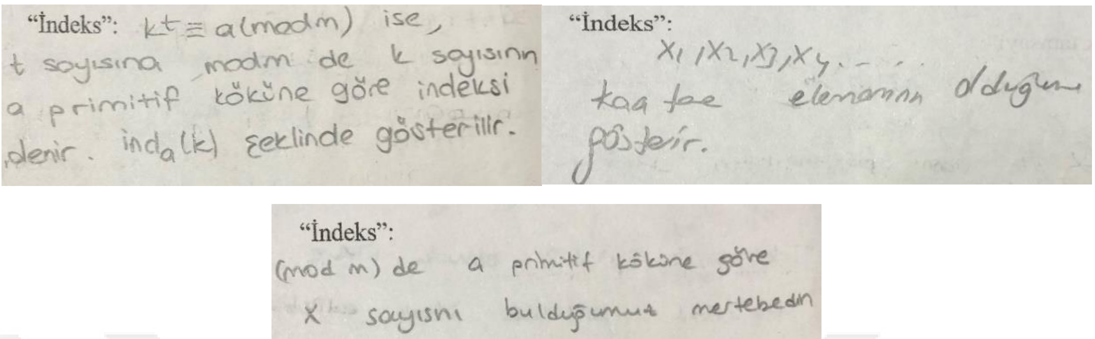
Şekil 120. İndeks tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevapları

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Bu kategoriye alınabilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 10 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlardan birbirinden farklı olan birkaç tanım aşağıda verilmiştir.



"İndeks": $k^t \equiv a (\mathrm{mod}\ m)$ ise, t sayısına mod m de k sayısının a primitif köküne göre indeksi denir. $ind_a(k)$ şeklinde gösterilir.

"İndeks": $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ kaç tane elemanın olduğunu gösterir.

"İndeks": (mod m) de a primitif köküne göre x sayısını bulduğumuz mertebedir

Şekil 121. İndeks tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.20.2. "İndeks" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

İndeks kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.21. "Cebirsel Sayı" kavramına ait bulgular

Cebirsel Sayı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- Katsayıları rasyonel sayı olan (veya tam sayı olan) n. dereceden herhangi bir polinomun kökü olarak ifade edilebilen sayılardır.

4.21.1. "Cebirsel Sayı" kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 23'de verilmiştir.

Tablo 23

Öğretmen adaylarının Cebirsel Sayı kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

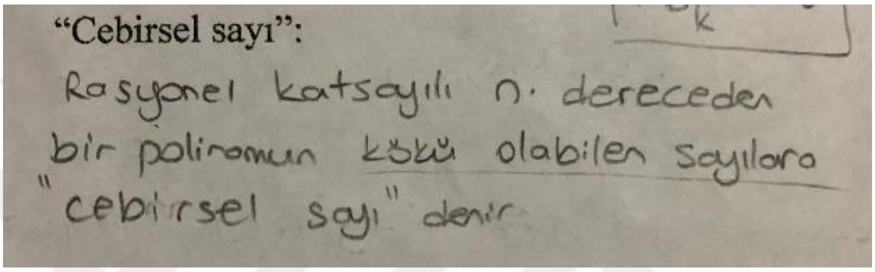
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	33	%66
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	1	%2
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	7	%14
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	1	%2
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	7	%14
CEVAPSIZ		1	%2

Uygun Tanımlar

Cebirsel Sayı kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 34 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 33 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 1 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

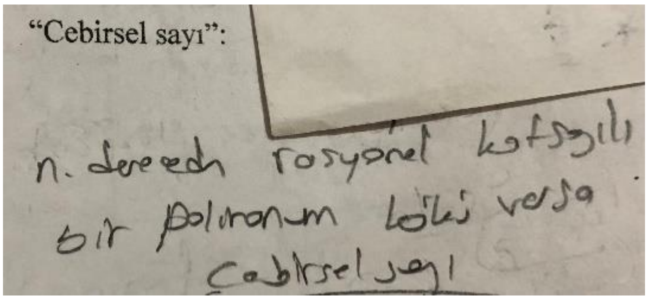
Bu kategoriye dahil olan 33 tanım neredeyse birebir aynıdır. Bu benzer tanımlara bir örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 122. Cebirsel Sayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Cebirsel Sayı kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 1 tanım vardır. Bu tanımın bu kategoriye alınmasının sebebi matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım olarak gösterilebilir. "n. dereceden rasyonel katsayılı bir polinomun kökü varsa bu köke cebirsel sayı denir." ifadesinin söylenmek istendiği düşünülebilir. Bu sebeple tanım bu kategoriye dahil edilmiştir.



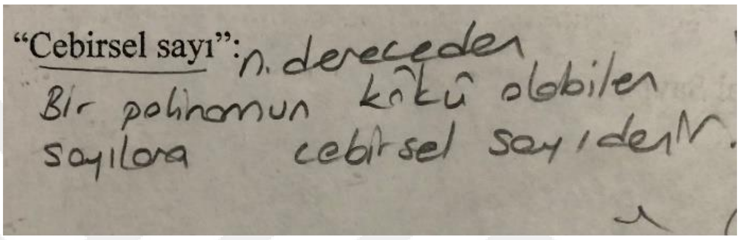
Şekil 123. Cebirsel Sayı tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Cebirsel Sayı kavramına ait yaptıkları tanımların %30’u bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

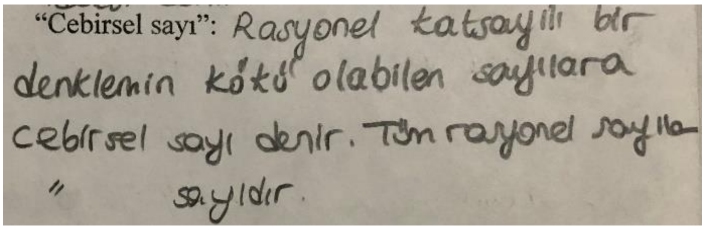
Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 7 tanım bu kategoride yer almaktadır. Tanımlardan 5 tanesi polinomu “rasyonel katsayılı” veya “tam sayı katsayılı” şeklinde belirtmediğinden bu kategoriye alınmıştır. Bu tanımlara örnek aşağıda verilmiştir.


“Cebirsel sayı”: n. dereceden
Bir polinomun kökü olabilen
sayılara cebirsel sayı denir.

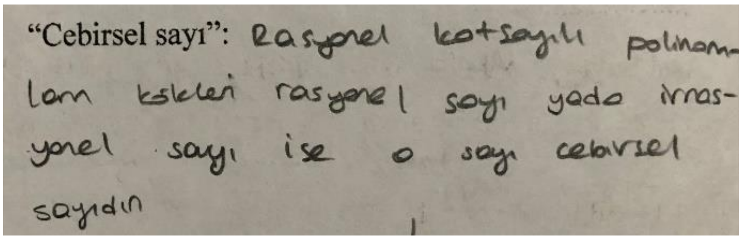
Şekil 124. Cebirsel Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

Bir tanımda ise polinomlardan daha geniş kapsamlı olan “denklem” kavramı kullanılarak tanım yapılmıştır.


“Cebirsel sayı”: Rasyonel katsayılı bir
denklemin kökü olabilen sayılara
cebirsel sayı denir. Tüm rasyonel sayıla
" sayıdır.

Şekil 125. Cebirsel Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

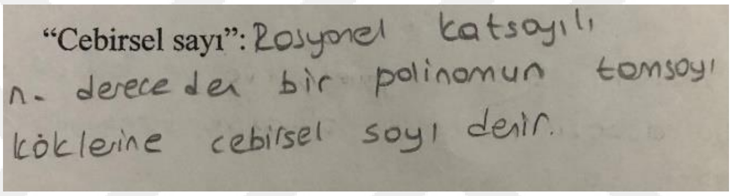
Diğer bir tanımda ise irrasyonel sayıların tamamının, cebirsel sayı olarak alınabileceği anlamı çıktığı için yapılması gereken kısıtlama atlanmıştır.


"Cebirsel sayı": Rasyonel katsayılı polinomların kökleri rasyonel sayı yada irrasyonel sayı ise o sayı cebirsel sayıdır

Şekil 126. Cebirsel Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 3

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

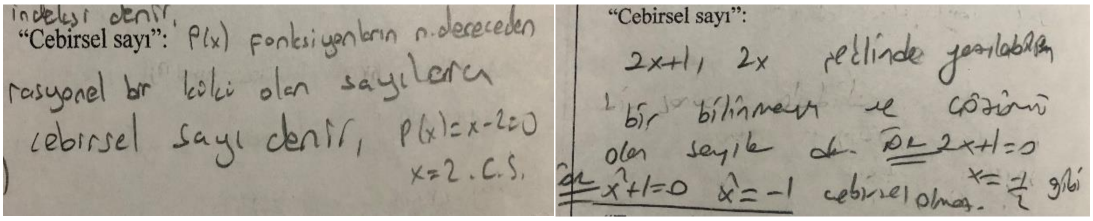
Cebirsel Sayılar kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 1 tanıma rastlanmıştır. Bu tanımda "tamsayı köklerine" ifadesi cebirsel sayıları gereksiz kısıtlamaktadır.


"Cebirsel sayı": Rasyonel katsayılı n. dereceden bir polinomun tamsayı köklerine cebirsel sayı denir.

Şekil 127. Cebirsel Sayı tanımına ait yeterli ancak gereksiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 7 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


indeksi denir,
"Cebirsel sayı": P(x) fonksiyonların n. dereceden rasyonel bir kökü olan sayılara cebirsel sayı denir, P(x)=x-2=0 x=2 C.S.

"Cebirsel sayı": 2x+1, 2x şeklinde yazılabilen bir bilinmeyen ve çözümü olan sayılardır. Ör 2x+1=0 x=-1/2 gibi
x²+1=0 x²=-1 cebirsel olmaz.

Şekil 128. Cebirsel Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.21.2. "Cebirsel Sayılar" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Cebirsel Sayılar kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

4.22. “Transandant Sayı” kavramına ait bulgular

Transandant Sayı kavramı literatürde şöyle tanımlanmaktadır:

- Katsayıları rasyonel olan (veya tam sayı olan) bir polinomun kökü olarak ifade edilemeyen sayılardır.
- Cebirsel olmayan sayılardır.

4.22.1. “Transandant Sayı” kavramının doğruluk kriterine göre incelenmesi

Bu kavrama ait tanımlarının doğruluk kriterine göre dağılımı Tablo 24’de verilmiştir.

Tablo 24

Öğretmen adaylarının Transandant Sayı kavramına ait tanımlarının doğruluk kriterine göre oluşturulan kategorilere göre dağılımı

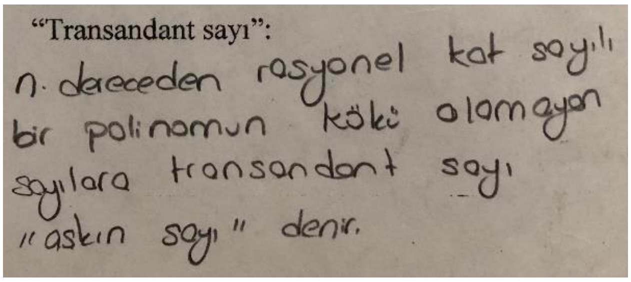
UYGUN	UYGUN VE TİTİZ	32	%64
	UYGUN ANCAK TİTİZ OLMAYAN	2	%4
UYGUN OLMAYAN	GEREKLİ ANCAK YETERSİZ	6	%12
	YETERLİ ANCAK GEREKSİZ	0	%0
	NE GEREKLİ NE YETERLİ	10	%20

Uygun Tanımlar

Transandant Sayı kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 34 tanım bulunmaktadır. Bu tanımlardan 32 tanesi Uygun ve Titiz tanım olarak kabul edilirken 2 tanım Uygun ancak Titiz Olmayan kategorisindedir.

Uygun ve Titiz Tanımlar

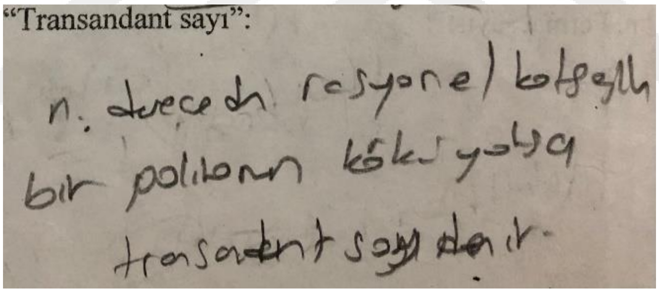
Bu kategoriye dahil olan 32 tanım neredeyse birebir aynı tanımlardır. Bu benzer tanımlara örnek aşağıda verilmiştir.


"Transandant sayı":
n. dereceden rasyonel kat sayılı bir polinomun kökü olamayan sayılara transandant sayı "aşkın sayı" denir.

Şekil 129. Transandant Sayı tanımına ait uygun ve titiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı

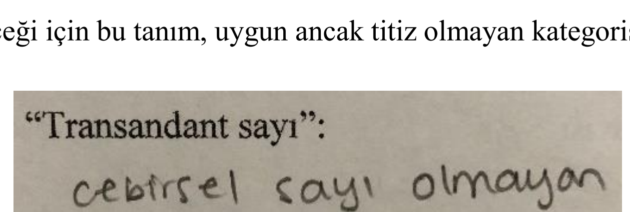
Uygun Ancak Titiz Olmayan Tanımlar

Transandant Sayı kavramı için bu kategoriye dahil edilebilecek 2 tanım vardır. Tanımlardan bir tanesinin bu kategoriye alınmasının sebebi matematiksel dildeki titiz olmayan kullanım olarak gösterilebilir. "n. dereceden rasyonel katsayılı bir polinomun kökü olamayan sayıya transandant sayı denir." ifadesinin söylenmek istendiği düşünülebilir. Bu sebeple tanım bu kategoriye dahil edilmiştir.


"Transandant sayı":
n. dereceden rasyonel katsayılı bir polinomun kökü yoksa transandant sayı denir.

Şekil 130. Transandant Sayı tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

Diğer bir tanım ise yanlış bir ifade içermemektedir. Kavramla ilgili daha açıklayıcı tanımlar yazılabileceği için bu tanım, uygun ancak titiz olmayan kategorisine alınmıştır.


"Transandant sayı":
cebirsel sayı olmayan sayılar.

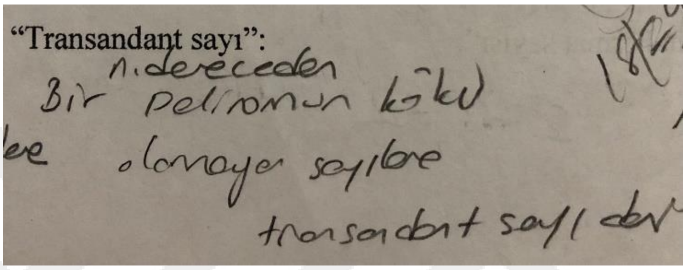
Şekil 131. Transandant Sayı tanımına ait uygun ancak titiz olmayan kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Uygun Olmayan Tanımlar

Öğretmen adaylarının Transandant Sayı kavramına ait yaptıkları tanımların %32'si bu kategoride yer almaktadır. Uygun olmayan tanımlar üç alt kategoriye ayrılmaktadır.

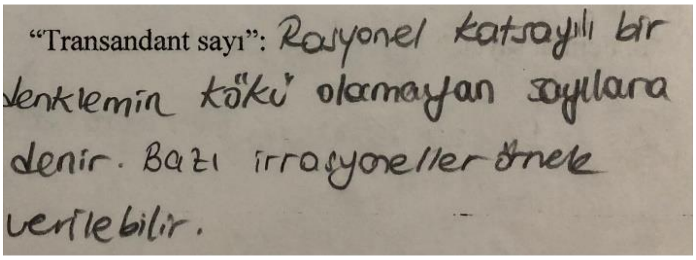
Gerekli Ancak Yetersiz Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adayları tarafından yapılan 7 tanım bu kategoride yer almaktadır. Tanımlardan 5 tanesi polinomu "rasyonel katsayılı" veya "tam sayı katsayılı" şeklinde belirtmediğinden bu kategoriye alınmıştır. Bu tanımlara örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 132. Transandant Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 1

1 tanımda ise polinomlardan daha geniş kapsamlı olan "denklem" kavramı kullanılarak tanım yapılmıştır.



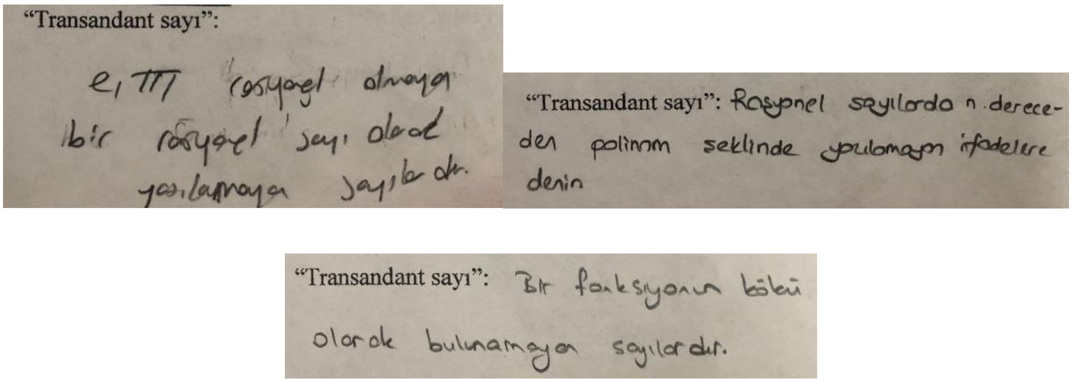
Şekil 133. Transandant Sayı tanımına ait gerekli ancak yetersiz kategorisinde öğretmen adayı cevabı 2

Yeterli Ancak Gereksiz Kategorisindeki Tanımlar

Bu kategoriye uygun bir tanıma rastlanmamıştır.

Ne Gerekli Ne Yeterli Kategorisindeki Tanımlar

Öğretmen adaylarının yapmış olduğu tanımlardan 10 tanesi bu kategoride yer almaktadır. Bu tanımlara birkaç örnek aşağıda verilmiştir.


"Transandant sayı": e, π rasyonel olmayan bir rasyonel sayı olarak yazılamayan sayılardır.

"Transandant sayı": Rasyonel sayılarda n. dereceden polinom şeklinde yazılamayan ifadelere denir.

"Transandant sayı": Bir fonksiyonun kökü olarak bulunamayan sayılardır.

Şekil 134. Transandant Sayı tanımına ait ne gerekli ne yeterli kategorisinde öğretmen adayı cevapları

4.22.2. "Transandant Sayı" kavramının zenginlik kriterine göre incelenmesi

Transandant Sayı kavramı tanımları zenginlik kriterine göre incelendiğinde zengin kabul edilebilecek bir tanıma rastlanmamıştır.

BÖLÜM V

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde bir önceki bölümde bulunan bulgulardan yola çıkılarak öğretmen adaylarının sayı kuramı kapsamında bulunan kavramları nasıl tanımladıkları tartışılacaktır. Daha sonrasında çalışma sonuçlarına ve önerilere yer verilecektir.

5.1. Tartışma

Bu bölüm araştırmanın alt problemlerine göre tartışılacaktır. Alt problemlere geçmeden önce öğretmen adaylarıyla yapılan yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında "İlköğretim Matematik öğretmen adaylarının tanımlar ve tanımların eğitim sürecindeki rolü hakkındaki algıları nelerdir?" gibi sorulara ait elde edilen veriler değerlendirilecektir.

Öğretmen adaylarına, matematik eğitiminde tanımların rolüne ilişkin düşüncelerini öğrenmek adına öncelikle "Sizce iyi bir tanım nasıl olmalıdır, iyi bir tanımın özellikleri nelerdir?" sorusu yöneltilmiştir. Öğretmen adayları iyi bir tanım için açık, net, anlaşılır, öğrenci seviyesine uygun, matematiksel dili içermeli ve olabildiğince somutlaştırılmış olmalı gibi açıklamalarda bulunmuşlardır. Bazı katılımcılar iyi bir tanım ifadesi için matematiksel dilin çok kullanılması gerektiğini belirtirken bazı katılımcılar matematiksel dilin fazla kullanılmasının, tanımın anlaşılırlığını düşürdüğünü belirtmiştir. İyi bir tanımın özelliklerini belirtirken ise kavramı tam anlamıyla açıklamalı, gerekli tüm şartları barındırmalı, ispat edilebilir olmalı, tartışmaya kapalı olmalı, tanımdan herkes aynı şeyi anlamalı ve daha önceden öğrenmiş oldukları kavramlar yardımıyla yeni kavram tanımlanmalı gibi cevaplar verilmiştir.

Daha sonra yarı yapılandırılmış görüşmeler esnasında "Tanımlar etkili bir öğretim aracı olarak kullanılabilir mi?" sorusu katılımcılara yöneltilmiştir. Bu soruya verilen yanıtlarda farklılıklar görülmüştür. Katılımcılardan biri "Kesinlikle kullanılabilir, matematikte birçok terimin tanımından hareketle ne demek istediği çok net anlaşılıyor. Konuyu anlatırken tanımı öne atarak anlatmayı tercih ederim." cevabını verirken başka bir katılımcı ise "Tanımları tek başına bir öğretim aracı olarak kullanamayız. İşleyen bir mekanizma içinde kullanılabilir ama tek başına bir öğretim aracı olarak kullanılamaz." cevabını vermiştir. Tanımların etkili öğretim araçlarından biri olduğu düşünülebilir ancak sistemin bir parçası olarak kullanıldığında daha etkili olacağının düşünülmesi de yanlış bir çıkarım olmaz. Zazkis ve Leikin (2008)'in çalışmalarında belirttiği üzere tanımların matematik öğreniminde ve öğretiminde önemi göz ardı edilemez. Özellikle matematik eğitiminde tanımlar, konunun kilit noktalarını oluşturmaktadır.

Araştırmanın alt problemlerinden ilki "Doğruluk kriteri açısından ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar kuramı kavramları ile ilgili yaptıkları tanımlar nasıldır?" şeklinde belirlenmiştir. Sayılar kuramı kapsamındaki kavramlardan 22 tanesi doğruluk kriterine göre incelenmiştir. Kavram tanımlarında şaşırtıcı sonuçlar ortaya çıkmıştır. Aşağıdaki tabloda kavramların doğruluk kriterine göre "Uygun Tanımlar" ve "Uygun Olmayan Tanımlar" kategorilerinin frekans yüzdesi verilmiştir.

Tablo 25

İncelenen kavramların doğruluk kriterine göre frekans yüzdeleri

Kavramlar	**Uygun Tanımlar**	**Uygun Olmayan Tanımlar**
a sayısının b sayısını bölmesi	%26	%72
Rasyonel sayı	%38	%60
İrrasyonel sayı	%10	%88
Çift tamsayı	%74	%26
Tek tamsayı	%62	%34
Asal sayı	%20	%80
n. Fermat sayısı	%0	%60
En büyük ortak bölen	%18	%82
En küçük ortak kat	%16	%82
Aralarında asal sayı	%66	%34
Diophant denklem	%28	%58
Kongruant olma	%28	%64
Lineer kongruans	%44	%42

Rezidü gösterimi	%36	%64
Euler fonksiyonu	%18	%80
Kuadratik rezidü (ikinci dereceden kalan)	%44	%56
Legendre gösterimi	%78	%18
a tamsayısının modm'deki mertebesi	%48	%52
Primitif (ilkel) kök	%52	%48
İndeks	%30	%64
Cebirsel sayı	%68	%30
Transandant sayı	%68	%32

Sayı kuramı kapsamında bulunan 22 kavram tanımından 8 tanesinde uygun tanımlar uygun olmayan tanımlardan daha fazladır. Bunlar "çift tamsayı, tek tamsayı, aralarında asal sayı, lineer kongruans, legendre gösterimi, primitif (ilkel) kök, cebirsel sayı, transandant sayı" kavramlarıdır. Geriye kalan 14 tanımda uygun olmayan tanımlar uygun tanımlardan daha fazladır. Çalışma grubunu, ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü 4. sınıf öğrencilerinin oluşturduğu göz önünde bulundurulduğunda matematiksel kavramların tanımlarının yeterince içselleştirilmediği ve tanımlara gereken dikkatin verilmediği düşünülebilir.

Bazı kavramlar yapısı gereği fazla yorumlanamadığından uygun tanım oranının daha yüksek olması tahmin edilebilir. Uygun tanım oranı yüksek olan kavramlardan Lineer Kongruans, Legendre Gösterimi ve Primitif (İlkel) Kök kavramlarının bu durumdan kaynaklandığı düşünülebilir. Bunlara nazaran daha informal olan kavramlar için (örneğin asal sayı, rasyonel sayı, irrasyonel sayı gibi) ön öğrenmelerin, eğitim yaşantılarının ve bilinçaltının etkisiyle uygun tanımlar yapma oranlarının düşeceği düşünülebilir.

Tanımlar incelendiğinde uygun tanımlar kategorisine dahil edilen tanımların neredeyse birebir aynı tanımlar olduğu görülmüştür. Çalışmada kullanılan ölçek öğretmen adaylarına Elementer Sayı Kuramı dersinin final sınavında uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının sınava çalışarak girdikleri göz önünde bulundurulduğunda yapılan uygun tanımların benzer tanımlar olması beklenen bir sonuçtur. Kavramların bir kısmı yapısı gereği eşdeğer tanımlar üretilmeye pek müsait değildir. Bu sebeple kavram biliniyorsa yazılabilecek tanım hemen hemen bellidir.

Birçok kavram için tanımların uygun olmayan tanımlar kategorisinde değerlendirilmesinin en önemli sebebi tanımı yaparken kullanılan değişkenlerin tanımlı oldukları sayı kümesinin belirtilmemesidir. Bu durum kavramlar için gerekli şartların eksik verilmesi olarak değerlendirilmiştir. Değişkenlerin tanımlı oldukları sayı kümesinin belirtilmemesi, kavram için hayati önem taşıyan bir kısıtlamayı atlamak olarak düşünülebilir. Örneğin kavrama ait çoğu tanımın bu sebepten dolayı uygun olmayan kategorisinde değerlendirildiği “rasyonel sayı” kavramı tanımlarında, öğretmen adayları “b$\neq 0$ iken $\frac{a}{b}$ şeklinde yazılabilen sayılardır.” şeklinde tanımlar yapmışlardır. Ancak bu tanıma göre $\frac{\sqrt{3}}{5}$ ifadesi de bir rasyonel sayı olarak değerlendirilebilir. İncelenen bir başka kavram olan “n. Fermat sayısı” için yapılan tanımlara bakıldığında birçok tanımda n elemanının hangi sayı kümesine ait olduğu belirtilmemiştir. n elemanı bu kavram için doğal sayılar kümesinde tanımlıdır ancak bu belirtilmediğinde n elemanı, negatif bir tam sayı veya bir rasyonel sayı olarak da düşünülebilir. Buna benzer daha birçok tanımda kullanılan değişkenlerin sayı kümesi belirtilmemiştir ve bu durum kavram için gerekli olan önemli bir kısıtlamayı atlamak demektir. Yani kavramı tanımlarken kullanılan değişkenlerin tanımlı oldukları sayı kümelerinin belirtilmemesi kavram tanımını uygun olmayan bir tanım yapmaktadır.

Değişkenlerin tanımlı oldukları sayı kümesinin belirtilmemesiyle ilgili fikirleri katılımcılara yarı yapılandırılmış görüşmeler sırasında sorulmuştur. Katılımcılardan bazıları belirtmenin kesinlikle gerekli olduğunu savunurken bazıları ise matematikle ilgileniliyorsa zaten tanım kümesini olması gerektiği gibi alır cevabını vermiştir. Bir kavrama ait tanım verilirken kavramın tüm gerekli özellikleri belirtilmelidir. Tanımda kullanılan değişkenlerin tanımlı oldukları sayı kümelerinin belirtilmesi de gerekli özelliklerin başında gelmektedir. Bu sebeple çalışmadaki tanımlardan birçoğunun uygun olmayan kategorisinde değerlendirilme sebebi de budur. Bir başka sebep ise tanımda kullanılmayacak değişkenlerin açıklanmasıdır.

Yapılan tanımların uygun olmayan tanımlar kategorisinde değerlendirme sebeplerinden biri de tanımda gereksiz kısıtlamalar oluşturulmuş olmasıdır. Kavramın örnek alanını daraltan durumlarda tam olarak kavramı karşılamadığı için uygun olmayan tanımlarda yeterli ancak gereksiz kategorisinde değerlendirilmektedir. Uygun olmayan tanımlar kategorisinde değerlendirilen tanımlardan yeterli ancak gereksiz kategorisine dahil edilen tanımlar diğer kategorilere göre daha azdır. Yani çoğunlukla tanımlar kavrama gereksiz özellik eklemekten ziyade eklenen özellikler yetersiz kaldığı için uygun olmayan tanım olarak değerlendirilmiştir.

Uygun olmayan tanımların bir diğer alt kategorisi ise ne gerekli ne yeterli tanımlar kategorisidir. Bu çalışmada ne gerekli ne yeterli tanım olarak değerlendirilen tanımlar, kavramla ilgisi olmayan özellikler bulunan veya kavram yerine başka bir kavramı açıklayan ifadelere yer verilen tanımlardır. Bunların haricinde bazı tanımlarda ise verilen özellikler kavram için ne gereklidir ne de yeterlidir. Eğer tanımda gereksiz özellik var iken gerekli olan özelliklerde eksik bırakılmışsa bu çalışma için ne gerekli ne yeterli tanım olarak değerlendirilmiştir. Yine bu alt kategori çalışmada incelenen çoğu kavram için daha az tanımın bulunduğu bir kategori olmuştur.

Araştırmada kullanılan teorik çerçeve büyük ölçüde yeterli bir çerçeve olmasıyla beraber bazı kavramlara ait tanımlar sınıflandırılırken tam olarak nereye ait olduğunu belirlemede bazı sorunlarla karşılaşılmıştır. Örneğin "Çift Tamsayı, Tek Tamsayı" kavramlarını ele alalım. Tanımların uygun olmayan tanımlar oldukları aşikardır ancak uygun olmayan tanımlar olarak değerlendirilmesine sebep olan durum tanımda yapılan bir eksiklik veya gereksiz bir kısıtlamadan ziyade tanımda bulunan hatalı ifadelerdir. Çift tamsayı, tek tamsayı kavramları için bu ifadeler gerekli ancak yetersiz alt kategorisinde gösterilmiştir.

Araştırmanın ikinci ve son alt problemi "Zenginlik kriteri açısından ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sayılar kuramı kavramları ile ilgili yaptıkları tanımlar nasıldır?" şeklindedir. Tanımları zenginlik kriteri açısından incelerken öncelikle tanımın uygun bir tanım olup olmadığı dikkate alınmıştır. Yapılan uygun tanımlar arasından diğer tanımlardan daha farklı daha özgün tanımlar zengin tanım olarak değerlendirilmiştir. Çalışmada bulunan 22 kavramdan yalnızca 5 kavram için zengin tanım kabul edilebilecek tanımlara rastlanmıştır. Bu kavramlar "Temel Bölme (a sayısının b sayısını bölmesi), Rasyonel Sayı, İrrasyonel Sayı, Çift Tamsayı, Tek Tamsayı" kavramlarıdır. Zengin tanım olarak kabul edilen 5 tanımda da modüler aritmetik kullanılarak kavram tanımlanmıştır. 50 katılımcıdan yalnızca bir katılımcı kavramları bu şekilde tanımlamıştır. Bu sebeple bu tanımlar zengin tanım olarak değerlendirilmiştir.

Kalan 19 kavram için zengin olarak değerlendirilen tanım bulunmamasının farklı sebepleri vardır. Bunlardan biri bazı kavramların yapısı gereği farklı tanımlamalara açık olmaması olarak düşünülebilir. Bazı kavramlar farklı şekillerde tanımlamaya pek müsait değildir. Kavramın tanımı bellidir ve eğer o tanımı yalnızca biliyorsan yazabilirsin, yani yorumlamaya çok müsait değildir. Bu tarz kavramlara örnek olarak "Diophant denklem, kongruans olma, lineer kongruans, indeks, primitif kök" gibi kavramlar verilebilir. Bir başka sebep ise SKTF'nin katılımcılara, Elementer Sayı Kuramı dersini aynı eğitimciden aynı zamanda aldıktan sonra uygulanması olarak düşünülebilir. Yapılan uygun tanımların benzerlik göstermesi bunun bir sonucu olabilir.

5.2. Sonuç ve Öneriler

Çalışmada çıkarılabilecek en genel sonuç öğretmen adaylarının kavram tanımlarına gereken önemi vermediğidir. SKTF öğretmen adaylarına dönem içinde Elementer Sayı Kuramı dersinin final sınavında uygulandığı için katılımcı tanımlarının büyük çoğunun uygun tanım şeklinde değerlendirileceği düşünülmüştür. Kavramların büyük bir kısmı katılımcıların matematik eğitim hayatının başlangıcından bu yana sık sık kullandıkları kavramlardır. Araştırma sonunda bu kavramların tanımlarının tam olarak bilinmediği görülmüştür. Kavramın tanımını bilmek kavrama ait olan özellikleri bilmek, kavramın örnek olan ve örnek olmayan durumlarını bilmektir.

Katılımcıların büyük çoğunluğunun önümüzdeki yıllarda matematik eğitimcisi olup gelecek nesillere matematik öğreteceği düşünüldüğünde, eğitim fakültelerinde matematik eğitimi verilirken tanımların daha fazla üzerinde durulması gerektiği ve temel kavramlara ait tanımların öğretildiği ve içselleştirildiği derslerin arttırılması önerilebilir.

Çalışmada tanımlar zenginliklerine göre incelendiğinde zengin tanım sayısının oldukça az olduğu yapılan uygun tanımların neredeyse birebir aynı olduğu görülmüştür. Zazkis ve Leikin'in (2008) de çalışmalarında belirttiği gibi öğretmen adaylarına zengin tanımlar üretmeleri için fırsat vermek aslında tanımlama yeteneklerini büyük ölçüde arttıracaktır. Ayrıca bir kavramı farklı açılardan doğru bir şekilde tanımlamak kavrama ait özelliklerin içselleştirilmesini arttırırken tanımlama yapan kişinin yaratıcılığını da arttıracaktır. Özellikle matematik eğitimi alan kişilerin lisans derslerinde matematiksel kavramlara ait zengin tanımlar oluşturmasının planlı olarak uygulanması önerilebilir.

Bu çalışmada sayılar kuramı kapsamında bulunan kavramların tanımları incelenmiştir. Leikin ve Zazkis'in (2010) çalışmalarında belirttiği üzere katılımcılardan alınan tanımların değerlendirilmesi matematiğin farklı içerik alanlarında farklılık gösterebilmektedir. Matematiğin farklı içerik alanlarında tanımların incelendiği bu tarz çalışmaların arttırılması önerilebilir. Tanımlar sadece matematik eğitimde değil diğer branşlarda da oldukça önemlidir. Tanımların incelendiği çalışmaların farklı branşlarda da arttırılmasının literatüre katkı sağlayacağı düşünülebilir.

KAYNAKÇA

Aktaş D. (2019). Öğretmen Ve Öğrencilerin Kesir Ve Rasyonel Sayı Kavram Tanımları, Yüksek Lisans Tezi, (Danışman: Doç. Dr. Selami Ercan)

Baş, F. , Çakmak, Z. , Işık, A. , Beydemir, M. (20150*).* The Differences Between the Lecturers' and the Students' Definitions That They Formed in the Course and the Reasons of These Differences, *Elementary Education Online*, *14*(4), 1276-1289

Bingolbali, E., Monaghan, J. (2008). Concept İmage Revisited. *Educational Studies in Mathematics*. 68(1), 19-35

Dane, A. (2008). İlköğretim Matematik 3.Sınıf Öğrencilerinin Tanım, Aksiyom Ve Teorem Kavramlarını A nlama Düzeyleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi, 16*(2), 495-506

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, University of Stellenbosch: Stellenbosch, 2, 248–255.

Doruk,M. , Kaplan,A. (2018). Pre-service Mathematics Teachers' Understanding of Fundamental Calculus Definitions, *İnönü University Journal of the Faculty of Education, 19*(3), 117-140

Dormolen,J.V. , Zaslavsky,O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity, *Journal of Mathematical Behavior,* 22, 91–106.

Edwards,B. , Ward,M.B. (2004). Surprises from Mathematics Education Research: Student (Mis)use of Mathematical Definitions, *The American Mathematical Monthly*, *111*(5), 411-424.

Edwards,B. , Ward,M.B.(2008). 17-The Role of Mathematical Definitions in Mathematics and in Undergraduate Mathematics Courses,

Part 2b. Using Definitions, Examples. and Technology, (223-232).

Ercire, Y. E. , Narlı, S. (2019). Matematik Öğretmen Adayları Doğal Sayıları Nasıl Tanımlıyor?, *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *8*(2), 240-271.

Fischbein, E. (1993). *The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics, 24(2), 139–162.* doi:10.1007/bf01273689

Fujita,T. , Doney,J. , Wegerif,R. (2019). Students' collaborative decision-making processes in defining and classifying quadrilaterals: a semiotic/ dialogic approach, *Educational Studies in Mathematics*,101, 341–356

Gökbulut,Y. , Ubuz,B. (2013). Prospective Primary Teachers' Knowledge on Prism: Generating Definitions and Examples*, Elementary Education Online*, *12*(2), 401-412

Gümüş H. (2019). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı Cebir Öğrenme Alanındaki Kavramlara Yönelik Tanımları, Yüksek Lisans Tezi, (Danışman: Prof. Sebahat Yetim Karaca)

Güney, Z., Özkoç, M. (2015). *Soyut Matematik,* İzmir,Birleşik Matbaacılık.

Horzum,T. (2018). Matematik Öğretmeni Adaylarının Dörtgenler Hakkındaki Anlamalarının Kavram Haritası Aracılığıyla İncelenmesi, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *9*(1), 1-30.

Kaya A. (1988). *Sayılar Kuramına Giriş*, İzmir, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Kubar A. (2012). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Tamsayı Tanımı Hakkındaki Ve İlköğretim Öğrencilerinin Tamsayı Tarifleri Hakkındaki Olası Kavram Yanılgısı Ve Hatalarına İlişkin Bilgisi, Yüksek Lisans Tezi, (Danışman: Doç. Dr. Erdinç Çakıroğlu)

Morgan,C. (2005). Word, Definitions and Concepts in Discourses of Mathematics, Teaching and Learning, *Language and Education*, *19*(2), 102-116,

Öztoprakçı S. (2014). İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Tanımları Ve Aralarındaki İlişkiler Aracılığıyla Dörtgenleri Kavrayışları, Doktora Tezi, (Danışman: Doç. Dr. Erdinç Çakıroglu)

Rolka, K., & Rösken, B. (2007). Integrating intuition: The role of concept image and concept definition for students' learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph 3, 181–204.

Silfverberg, H. (2003). How Finnish 6th and 8th graders understand the idea of mathematical defining? Retrieved March 5, 2009, from http://www.vxu.se/msi/picme10/F2ABSTRACTSH.pdf

Shield,M. (2004). Formal Definition in Mathematics, *Australian Mathematics Teacher, 60*(4), 25-28.

Shir, K., & Zaslavsky, O. (2001). What constitute a (good) definition? The case of a square. *Proceedings of* PME 24, 4, 161–168.

Silfverberg, H. (2003). How Finnish 6th and 8th graders understand the idea of mathematical defining? Retrieved March 5, 2009, from http://www.vxu.se/msi/picme10/F2ABSTRACTSH.pdf

Şenay Ş. (2014). Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar Teorisine Yönelik Soyutlamayı İndirgeme Eğilimlerinin Düşünme Stilleri Ve Matematik Öz Yeterlikleri İle İlişkisinin İncelenmesi, Doktora Tezi, (Danışman: Doç. Dr. Ahmet Şükrü Özdemir)

Şenay,Ş. , Özdemir,A.Ş. (2014). Matematik Öğretmen Adaylarının Lineer Kongrüanslara İlişkin Soyutlamayı İndirgeme Eğilimleri, *Eğitim ve İnsani Bilimler Dergisi: Teori ve Uygulama*, *5*(10), 59-72

Tall, D. (1988). Concept image and concept definition. *Senior Secondary Mathematics Education*, 37–41. Retrieved 9 March, 2009 from http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1988e-concept-imageicme.pdf

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.

Tırosh,D. (1999). Finite And İnfinite Sets: Definitions and İntuitions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(3), 341- 349.

Unlu, M. , Horzum, T. (2018). Mathematics teacher candidates' definitions of prism and pyramid*, International Journal of Research in Education and Science (IJRES)*, *4*(2), 670-685.

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior,* 22(1), 91–106.

Vinner, S. (1976).The naive conception of definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 7(4), 413–29.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293–305.

Vinner,S. (1991). The Role Of Defınıtıons In The Teachıng And Learnıng Of Mathematıcs, D. Tall içinde, *Advanced Mathematıcal Thınkıng*, (s. 65-79), New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer Academic Publishers.

Vinner, S. (2002). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. *In Advanced mathematical thinking,* 65-81

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356–366.

Winicki-Landman, G., & Leikin, R. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 3, 62–73.

Wolfram Alpha. (2022). Erişim Adresi: https://www.wolframalpha.com/

Yıldırım, A., Şimşek, H. (2011). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*, Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zaslavsky,O. , Shir,K. (2005). Students' Conceptions of a Mathematical Definition*, Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(4), 317-346

Zazkis,R. (1998). Odds And Ends Of Odds And Evens: An Inquıry Into Students' Understandıng Of Even And Odd Numbers, *Educational Studies in Mathematics*, 36, 73–89.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections, *Research in Collegiate Mathematics Education,* 4, 210-238.

Zazkis,R. , Campbell,S. (1996). Dıvısıbılıty And Multıplıcatıve Structure Of Natural Numbers: Preservıce Teachers' Understandıng, *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(5), 540-563.

Zazkis,R , Leikin,R (2007). Generatıng Examples: From Pedagogıcal Tool To A Research Tool, *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 15-21.

Zazkis,R , Leikin,R (2008). Exemplifying definitions: a case of a square*, Educational Studies in Mathematical* , 69, 131–148.

Zazkis,R. , Leikin,R. (2010). On the content-dependence of prospective teachers' knowledge: a case of exemplifying definitions, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* , *41*(4), 451-466.

Zazkis,R. , Liljedahl,P. (2004). Understanding Primes: The Role of Representation, *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 164-186.

EKLER

EK 1.

SAYILAR KURAMI TANIMLARI FORMU

Aşağıdaki ifadeleri tanımlayınız.

- “a sayısının b sayısını bölmesi”:
- “Rasyonel sayı”:
- “İrrasyonel sayı”:
- “Çift tamsayı”:
- “Tek tamsayı”:
- “Asal Sayı”:
- “n. Fermat sayısı”:
- “En büyük ortak bölen”:
- “Aralarında asal sayı”:
- “Diophant denklem”:
- “En küçük ortak kat”:

- “Kongruant olma”:
- “Lineer kongruans”:
- “Rezidü gösterimi”:
- “Euler fonksiyonu”:
- “İkinci dereceden kongruans”:
- “Kuadratik rezidü (İkinci dereceden kalan)”:
- “Legendre gösterimi”:

- “a tamsayısının modm deki mertebesi”:
- “Primitif (İlkel) kök”:
- “İndeks”:
- “Cebirsel sayı”:
- “Transandant sayı”:

ÖĞRENCİNİN AKADEMİK ÖZGEÇMİŞİ

Kişisel Bilgiler			
Adı ve Soyadı	Cemre TAŞDELEN CAN		
E-postası/Web Sayfası			
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce		
Uzmanlık Alanı	Matematik Eğitimi		
Öğrenim Bilgileri			
	Üniversite	Bölüm	Yıl
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2019
Tez Başlığı	İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar Kuramı Kavramları ile İlgili Yaptıkları Tanımların İncelenmesi		
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Serkan NARLI		
Akademik Eserler (Makale, kitap, kitap bölümü, bildiri, poster, sergi, konser vb. eserlerden kaynakça yazım kurallarına göre en fazla 10 eser yazılmalıdır.) Tezden üretilen yayınlar * ile işaretlenmelidir.			
Alanıyla İlgili Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler			
Alanıyla İlgili Aldığı Ödüller			

ETİK İZİN

T.C.
DOKUZ EYLÜL ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
HUKUK MÜŞAVİRLİĞİ

05 Şubat 2021

Sayı : 87347630/42104268/619
Konu : Etik Kurul İzni Hak.

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İlgi : 25.11.2020 tarih ve 67493393-302.08.01-E.111534 sayılı yazınız.

İlgide kayıtlı yazınıza istinaden Sosyal ve Beşeri Bilimler Araştırma ve Yayın Etik Kurulunun 17.12.2020 tarihli toplantısında alınan 11 sayılı karar ile Enstitünüz Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı İlköğretim Matematik Öğretmenliği Yüksek Lisans Programı öğrencisi Cemre TAŞDELEN'in "İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılar Kuramı Kavramları ile İlgili Yaptıkları Tanımların İncelenmesi" adlı tez çalışmasında uygulayacağı anketin etik açıdan uygun olduğuna karar verilmiştir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Prof. Dr. Nükhet HOTAR
Rektör

Bilgi verildi.

1

Cumhuriyet Bulvarı No:144 Alsancak/İZMİR/TÜRKİYE
Telefon:+90(232) 464 80 26 Fax:+90(232) 464 81 35
e-posta:hukuk.müsavirliği@deu.edu.tr Elektronik ağ:www.deu.edu.tr

İzmir