



BARELY TRANSITIVE GRUPLARIN GENELLEMELERİ

Oğuz ALKIŞ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

EKİM 2022

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Oğuz ALKIŞ

03/10/2022

BARELY TRANSITIVE GRUPLARIN GENELLEMELERİ
(Doktora Tezi)

Oğuz ALKIŞ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ekim 2022

ÖZET

Bu tezde barely transitive grupların bir genellemesi olan N -barely transitive gruplar ve N -barely transitive grupların daha güçlü bir formu olan NC -barely transitive gruplar tanımlanmıştır. N -barely transitive grupların ve NC -barely transitive grup olan N -barely transitive grupların alt sınıflarının temel özellikleri ve yapısı incelenmiştir. Ayrıca barely transitive grup olmayan mükemmel ve mükemmel olmayan NC -barely transitive grup örnekleri verilmiştir.

Bilim Kodu : 20401

Anahtar Kelimeler : Barely transitive grup, N -barely transitive grup, Minimal non- FC -grup, Sonlumsu permütasyon grup, Yansonlumsu permütasyon grup, Mükemmel grup, Lokal çözülebilir grup

Sayfa Adedi : 85

Danışman : Prof. Dr. Aynur ARIKAN

GENERALIZATIONS OF BARELY TRANSITIVE GROUPS

(Ph. D. Thesis)

Oğuz ALKIŞ

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

October 2022

ABSTRACT

In this thesis, N -barely transitive groups which is a generalization of barely transitive groups and NC -barely transitive groups which is a more powerful form of N -barely transitive groups are described. The main properties and structure of N -barely transitive groups and the subclasses of N -barely transitive groups which are NC -barely transitive groups are investigated. Also, perfect and non-perfect NC -barely transitive group examples which are not barely transitive groups are given.

Science Code : 20401

Key Words : Barely transitive group, N -barely transitive group, Minimal non- FC -group, Finitary permutation group, Cofinitary permutation group, Perfect group, Locally soluble group

Page Number : 85

Supervisor : Prof. Dr. Aynur ARIKAN

TEŞEKKÜR

Akademik çalıŐmalarım boyunca ve bu tezin ortaya çıkmasında değerli bilgileri, tavsiyeleri ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam danıŐmanım Prof. Dr. Aynur ARIKAN'a ve eŐi değerli hocam Prof. Dr. Ahmet ARIKAN'a (Gazi Üniversitesi); teŐvik ve rehberliğiyle bana desteğini esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Sait HALICIOęLU'na (Ankara Üniversitesi); tavsiyeler ve düzeltmelerle tezimi geliŐtirmemi sağlayan değerli TİK Üyeleri hocalarım Prof. Dr. Selami ERCAN (Gazi Üniversitesi) ve Doç. Dr. Sevgi ATLIHAN'a (Gazi Üniversitesi); Hartley'in grup inŐalarında yararlı olan tartıŐmalar için Prof. Dr. Giovanni Cutolo'ya (Università di Federico II); 2211-A Yurtıi Doktora Burs Programı ile tez çalıŐmamı destekleyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire BaŐkanlıęı Birimine; bu çalıŐmam boyunca bana destek veren ailem ve arkadaşlarıma sonsuz teŐekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE YARDIMCI ÖNERMELER.....	5
2.1. Ordinal Sayılar	5
2.2. Simetrik Gruplar.....	7
2.3. Grup Etkisi	7
2.4. Grup Çarpımları.....	13
2.4.1. Yarıdirekt çarpım.....	13
2.4.2. Çelenk çarpım	16
2.5. Grup Sınıfları	18
2.5.1. Çözülebilir gruplar.....	19
2.5.2. Lokal çözülebilir gruplar.....	22
2.5.3. Hipermerkez gruplar ve nilpotent gruplar	23
2.5.4. FC -gruplar.....	27
2.2.5. Bölünebilir gruplar.....	29
2.6. Minimal non- FC -gruplar.....	31
2.7. Grup Halkaları.....	31
3. N -BARELY TRANSITIVE GRUPLAR	35

	Sayfa
3.1. <i>NBT</i> -Grupların Temel Özellikleri.....	35
3.2. <i>NCBT</i> -Gruplar	45
3.2.1. <i>NBT</i> -grupların <i>NCBT</i> -grup olan alt sınıfları	46
3.2.2. Epimorfik görüntüleri basit olmayan <i>NBT</i> -gruplar	47
3.2.3. Mükemmel olmayan <i>NBT</i> -gruplar	49
3.2.4. Lokal çözülebilir <i>NBT</i> -gruplar	53
3.2.5. Lokal nilpotent <i>NBT</i> -gruplar	54
3.3. <i>NBT</i> -Grup Örnekleri.....	56
3.3.1. Mükemmel olmayan <i>NBT</i> -grup örnekleri	56
3.3.2. Mükemmel <i>NBT</i> -grup örnekleri	64
3.4. <i>GNFC</i> -Gruplar	75
3.4.1. <i>MNFC</i> -gruplar	76
3.4.2. Miller-Moreno tipinden gruplar.....	77
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	79
KAYNAKLAR	81
ÖZGEÇMİŞ	85

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$H \leq G, H < G$	H, G nin altgrubu, öz altgrubu
$N \triangleleft G$	N, G nin normal altgrubu
x^y	$y(x)$, x in y altındaki görüntüsü ya da $y^{-1}xy$, x in y ile eşleniği
$[x, y]$	$x^{-1}y^{-1}xy = x^{-1}x^y$, x ile y nin komütatörü
$\langle X \rangle$	X tarafından üretilen grup
$[X, Y]$	$\langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$
X^G	$\langle g^{-1}Xg \mid g \in G \rangle$, X in G içindeki normal kapanışı
$\text{Core}_G(H), H_G$	$\bigcap_{g \in G} H^g$, H nin G içindeki kuru
G'	$[G, G]$, G nin komütatör altgrubu
$\gamma_s(G)$	G nin aşağı merkez serisinin s -yinci terimi
$Z(G)$	G nin merkezi
$C_G(X)$	X in G içindeki merkezleyeni
$N_G(X)$	X in G içindeki normalleyeni
$d(K)$	Çözülebilir K grubunun çözülebilir uzunluğu
G_α	α nin G içindeki (nokta) dengeleyeni
$\text{FSym}(\Omega)$	Ω üzerinde sonlumsu permütasyonlar grubu
$\text{Aut}(G)$	G nin otomorfizma grubu
$\text{End}(G)$	G nin endomorfizmalarının kümesi
C_p	$\langle a \mid a^p = 1 \rangle$, p mertebeli devirli grup
C_{p^∞}	$\langle a_i \mid a_1^p = 1, a_{i+1}^p = a_i, i = 1, 2, \dots \rangle$, yarıdevirli p -grup
$ G : H $	H nin G içindeki indeksi
$G \rtimes H$	G nin H ile yarıdirekt çarpımı
$H \wr K$	H nin K ile standart çelenk çarpımı

1. GİRİŞ

1942’de Kurosh ve Chernikov’un “Normalleyen şartını¹ sağlayan grup hipermerkez² midir?” sorusuna olumsuz cevap Heineken ve Mohamed tarafından merkezi birim ve her öz altgrubu nilpotent ve altnormal olan grup inşa edilerek verildi [1]. Hartley bu inşa edilen grubun sağladığı bazı özellikleri sağlayan $C_p \wr C_{p^\infty}$ standart çelenk çarpımın altgruplarını ve her n doğal sayısı için G'_n , p^n exponentli ve abelyan olacak şekilde G_n grubunu inşa etti ve bu gruplar sayesinde barely transitive grup kavramını keşfetti [2, 3]. Bir sonsuz küme üzerinde geçişli olan bir permütasyon grubunun eğer her öz altgrubunun her yörüngesi sonlu ise bu gruba barely transitive grup denir [3, 4]. Bu tanım grup etkisiyle şu ifadeye denktir; bir sonsuz küme üzerine geçişli ve sadık etki eden bir grubun eğer her öz altgrubunun her yörüngesi sonlu ise bu gruba barely transitive permütasyon temsili vardır denir. Eğer bir grubun barely transitive permütasyon temsili varsa bu gruba barely transitive grup (kısaca *BT*-grup) denir [5]. Tanımdan görülebileceği üzere bir sonsuz G grubunun *BT*-grup olması için gerek ve yeter şart $\text{Core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} H^g = 1$ ve her $L < G$ için $|L : L \cap H| < \infty$ olacak şekilde G nin bir H altgrubunun olmasıdır. Buradan H nın G nin bir nokta dengeleyenine karşılık geldiği görülebilir. Ayrıca G geçişli olduğundan G nin herhangi iki nokta dengeleyeni birbirine eşleniktir.

Bir sonsuz grubun eğer her öz altgrubu sonluysa bu gruba Schmidt ya da yarısonlu grup denir. Kendi üzerine regüler permütasyon temsilinde grubun *BT*-grup olması için gerek ve yeter şart her öz altgrubunun sonlu olması, yani bir Schmidt grubu olmasıdır. Böylece kendi üzerine regüler permütasyon temsilinde her yarıdevirli grup *BT*-gruptur. Schmidt problemi olarak bilinen her yarısonlu grubun bir p asal sayısı için yarıdevirli p -grubu olup olmadığı bilinmemektedir. Dolayısıyla *BT*-gruplar Schmidt probleminin bir genellemesi olarak düşünülebilir.

Abelyan olmayan ve mükemmel olmayan (lokal sonlu) barely transitive grup örnekleri ilk olarak Hartley tarafından verilmiştir [2, 3]. Abelyan olmayan iki üreteçli basit Schmidt grubu örnekleri Olshanskii tarafından verilmiştir [6]. Bu gruplar periyodik, basit lokal sonlu olmayan *BT*-grup örnekleridir.

Mükemmel olmayan *BT*-grupların yapısı tam olarak bilinmemektedir [3]. Lokal sonlu barely transitive grupların temel özellikleri Kuzucuoğlu tarafından verilmiştir [4]. 1990’lardan günümüze kadar barely transitive gruplar kapsamlı şekilde çalışılmıştır.

¹ G bir grup olmak üzere her $K < G$ için $K < N_G(K) = \{g \in G \mid K^g = K\}$ ise G ye normalleyen şartını sağlar denir öyle ki $N_G(K)$ ya K nın G içindeki normalleyeni denir.

² G bir grup ve $N \triangleleft G$ olmak üzere eğer her $G/N \neq 1$ için $Z(G/N) \neq 1$ ise G ye hipermerkez grup denir.

G bir BT -grup ve G nin bir nokta dengeleyeni H olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır [4, 5, 7, 8]:

1. G nin sonlu indeskli öz altgrubu yoktur.
2. G nin her öz altgrubu residually sonlu ve her öz normal altgrubu sonlu exponentlidir. Dolayısıyla G nin öz normal altgrupları lokal sonludur.
3. Her $K, L < G$ için $KL \neq G$ dir. Eğer G lokal sonluysa $\langle K, L \rangle < G$ dir.
4. G abelyan ise bir p asal sayısı için $G \cong C_{p^\infty}$ dir.¹ G abelyan değilse $Z(G)$ sonludur ve G nin hipermerkezi merkezine eşittir. Ayrıca G nin sonlu normal altgrupları merkezinin içindedir.
5. Bir $N \triangleleft G$ için eğer $\text{Core}_{G/N}(HN/N) = N$ ise G/N , N nin bütün yörüngelerinin kümesinde bir BT -gruptur. Bundan dolayı maksimal normal altgruplarla oluşturulan G nin her bölüm grubu da bir BT -gruptur.
6. G sayılabilirdir.
7. Eğer G lokal sonlu ise bir p asal sayısı için G bir p -gruptur.
8. Basit lokal sonlu BT -grup yoktur.
9. Eğer G lokal sonlu ve H çözülebilir ise G çözülebilirdir.

Bizim bu tez çalışmasındaki asıl amacımız şu sorulara cevap aramaktır: BT -grupların tanımındaki öz altgruplar öz normal altgruplara kısıtlanırsa BT -grupların hangi özellikleri korunur? BT -grup olmayan bu tipte grup örnekleri var mıdır? Tanımladığımız yeni grup bir sonsuz küme üzerine sadık ve geçişli etki eder ve bu grubun her öz normal altgrubunun her yörüngesi sonludur, bu yeni gruba N -barely transitive grup (NBT -grup) diyeceğiz. BT -gruplarda olduğu gibi bir sonsuz grubun NBT -grup olması için gerek ve yeter şart $\text{Core}_G(H) = 1$ ve G nin her öz normal N altgrubu için $|N : N \cap H| < \infty$ olacak şekilde G nin bir H altgrubunun olmasıdır. Böylece sonsuz basit grupların NBT -grup olduğu görülür. Ayrıca herhangi bir sonsuz kardinaliteye sahip basit gruplar elde edilebildiğinden² ve bu gruplar basit olduğundan sayılamaz mükemmel NBT -gruplar vardır. Eğer NBT -grup tanımında N öz normal altgrubu yerine bir x elemanı için $N\langle x \rangle$ öz altgrubu alınırsa bu durumda NBT -grubunun bir özelleştirmesi elde edilir. Bu durumda da BT -grupların bir genellemesi elde edilmiş olur. Bu ikinci durumda gruba NC -barely transitive grup ($NCBT$ -grup) diyeceğiz. Burada dikkat edilecek olursa mükemmel olmayan NBT -gruplar birer $NCBT$ -gruptur. Aslında Lemma 3.2.2.3'te görüleceği üzere aşikar

¹ $C_{p^\infty} = \langle a_1, a_2, \dots \mid a_1^p = 1, a_{i+1}^p = a_i \rangle$ grubuna p^∞ tipinden Prüfer grubu (Prüfer group of type p^∞) veya yarıdevirli (quasicyclic) p -grubu denir. C_{p^∞} tanımında, abelyan gruplarda genellikle kullandığı şekilde toplamsal notasyon yerine genel olarak gruplardaki çarpımsal notasyon kullanıldı. C_{p^∞} , kompleks sayılar cisminde her $n \geq 0$ için birimin tüm p^n -inci köklerinin oluşturduğu çarpımsal gruptur.

²Herhangi bir sonsuz alterne grubun (alternating group) kardinalitesi tanımlı kümenin kardinalitesine eşittir ve bu gruplar basittir.

olmayan epimorfik görüntüleri basit olmayan NBT -gruplar birer $NCBT$ -gruptur. Bu tez çalışmasında $NCBT$ -grup olan NBT -gruplar incelenmiş ve genel olarak NBT -grupların yapısı araştırılarak BT -gruplarla ilgili çalışmalar ışığında NBT -gruplar üzerine odaklanılmıştır.

p ve q farklı asal sayılar olmak üzere bir elemanter abelyan p -grubuyla bir yarıdevirli q -grubunun yarıdirekt çarpımı formundaki gruplar Carin (p, q) -grupları veya (p, q^∞) -grupları olarak bilinmektedir. Bu gruplar çözülebilir uzunluğu 2 olan ve normal altgrupları üzerinde minimal şartını sağlayan lokal sonlu çözülebilir gruplardır. Bu tezde Carin (p, q) -gruplarının BT -grup olmayan NBT -grup olduğu gösterilmiştir. Bu gruplardan yararlanarak çözülebilir uzunluğu $m + 2$ ($m \geq 1$) olan ve BT -grup olmayan çözülebilir lokal sonlu NBT -gruplar inşa edilmiştir. Böylece BT -grup olmayan ve mükemmel olmayan sayılabilir NBT -grupların varlığı ispatlanmıştır. Mükemmel olmayan sayılamaz NBT -grupların varlığı henüz bilinmemektedir. Bunun için Hartley'in inşa ettiği normal altgrupları üzerinde minimal şartını sağlayan çözülebilir uzunluğu 3 olan sayılamaz çözülebilir grupların NBT -grup olup olmadığı incelenmiştir. Bu gruplar normal altgruplar üzerinde sonlu indeks özelliğini sağlarken core-free şartını sağlamaz.

Her elemanı sonlu eşlenikli olan gruba FC -grup denir. Eğer bir grubun her öz altgrubu FC -grup ancak kendisi değilse bu gruba minimal non- FC -grup (kısaca $MNFC$ -grup) denir. Mükemmel lokal sonlu bir $MNFC$ -grubun varlığı hâlen bilinmemektedir. Eğer böyle bir grup varsa bu grubun etki ettiği küme üzerinde bir sonlumsu BT - p -grubu olan bir epimorfik görüntüsü vardır [9, 10]. Hatırlatmak gerekirse her elemanı sonlu sayıda noktayı hareket ettiren permütasyon grubuna sonlumsu permütasyon grubu denir. Eğer bir sonlumsu BT -grup varsa bu grubun bir p asal sayısı için bir mükemmel $MNFC$ - p -grubu olduğu gösterilmiştir [11]. Böylece [12]'de de belirtildiği gibi bir sonlumsu BT -grubun varlığı probleme pozitif bir çözüm olur. Bu tezde bu probleme kısmi bir cevap olarak mükemmel sonlumsu NBT -grup örnekleri verilmiştir. Bunun için şu sonuç ispatlanmıştır:

G bir sonsuz sonlumsu permütasyon grubu olsun. Eğer G nin mükemmel ve geçişli olan ancak $MNFC$ -grup olmayan bir K altgrubu varsa K , BT -grup olmayan bir NBT -gruptur.

NBT -gruplara benzer şekilde $MNFC$ -gruplara karşılık olarak grubun kendisi FC -grup değilken her öz normal altgrubu FC -grupsa bu gruba bir Genelleştirilmiş NFC -grup ($GNFC$ -grup) denir (NFC -gruplar için bkz. [13]). Bir sonlumsu permütasyon grubunun NBT -grup olması için gerek ve yeter şart bu grubun bir

GNFC-grup olmasıdır. Ayrıca bir mükemmel lokal çözülebilir *GNFC*- grubun *NBT*-grup olan aşıkâr olmayan bir epimorfik görüntüsünün olduğu gösterilmiştir.

Eğer birimden farklı her elemanı sonlu sayıdaki noktayı sabit bırakıyorsa bu gruba yansonlumsu permütasyon grubu denir. [14]'te yansonlumsu *BT*-gruplar için gösterilmiş sonuçlardan yararlanarak mükemmel lokal çözülebilir yansonlumsu *NBT*- grubun olmadığı gösterilmiştir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ikinci bölüm ise temel kavram ve yardımcı önermelere ayrılmıştır. Üçüncü bölüm tezin ana çalışma konusu olan *NBT*-grupları içermektedir. Bu bölümün başında *NBT*-grupların temel özellikleri verilmiş, sonrasında *NBT*-grupların bir alt sınıfı olan *NCBT*-gruplar incelenmiştir. Ardından mükemmel ve mükemmel olmayan durumlar için *NCBT*-grup olup *BT*-grup olmayan *NBT*-grup örnekleri verildikten sonra *MNFC*-grupların bir genellemesi olan *GNFC*-gruplar tanımlanmış, *GNFC*-gruplar ve Miller-Moreno tipinden grupların *NBT*-gruplarla ilgili kısa sonuçlar verilmiştir. Tezin son bölümü tezde elde edilmiş sonuçlarla birlikte öneriler ve sorulara ayrılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE YARDIMCI ÖNERMELER

Bu bölümde tezde kullanılacak olan bazı temel kavramlarla yardımcı önermeler verilecektir.

2.1. Ordinal Sayılar

Doğal sayılar sayma işlemini formalize edilerek 0 a ard arda bir birim ekleyerek $0, 1, 2, 3, \dots$ şeklinde elde edilir. Ardıl operatörünü $S(x) = x \cup \{x\}$ şeklinde tanımlarsak doğal sayılar S altında kapalı olan 0 ı içeren en küçük kümedir.

Bu şekildeki sayma işlemini doğal sayıların ötesine taşıyalım. Tüm doğal sayılardan sonra gelen bir sonsuz ω sayısı olduğunu kabul edelim. Böylece $\omega, \omega + 1, (\omega + 1) + 1, \dots$ şeklinde sayma işlemine devam edebiliriz.

İlk olarak her bir doğal sayının kendisinden küçük olan doğal sayılardan oluşan kümeyle belirlenebildiği gerçeğini kullanalım. Yani $n \in \mathbb{N}$ ise $n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$. Benzer şekilde ω en küçük sonsuz sayı olsun. Buradan $\omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ dır.

Bu limit adımından sonra 0 ı takip eden sayıları üretmede kullanıldığı gibi ω yı takip eden sayıları üretmede ardıl operatörü kullanılabilir:

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, 2, \dots, \omega\}, \\ S(S(\omega)) &= S(\omega) \cup \{S(\omega)\} = \{0, 1, 2, \dots, \omega, S(\omega)\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ardıl operatörü için şu notasyon kullanılabilir:

$$S(\omega) = \omega + 1, S(S(\omega)) = (\omega + 1) + 1 = \omega + 2, \dots$$

Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için büyük ve daha büyük sayılar üretilebilir: $\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + n, \dots$. Tüm $\omega + n$ sayılarından sonra gelen sayı bu sayıdan küçük tüm sayılardan oluşan küme şeklinde düşünülebilir:

$$\omega 2 = \omega + \omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$$

Bu şekilde daha da büyük sayılar elde edilebilir:

$$\omega^2 + 1 = \omega + \omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega\}$$

$$\omega^3 = \omega + \omega + \omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots, \omega + \omega, \omega + \omega + 1, \dots\}$$

$$\omega \cdot \omega = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^3, \dots, \omega^4, \dots\}.$$

Üretilen bu kümeler \in eleman olma bağıntısına göre tam sıralı ve boştan farklı her altkümesinin bir en küçük elemanı vardır. Boştan farklı her altkümesinin bir en küçük elemanı olan tam sıralı kümelere iyi sıralı dendiğini hatırlayalım [15].

2.1.1. Tanım

Bir T kümesinin her elemanı aynı zamanda T nin bir altkümesiye T ye geçişli (transitive) denir. Bir başka deyişle bir T kümesi geçişliyse şu özelliği sağlar: $u \in v \in T$ ise $u \in T$ dir [15].

2.1.2. Tanım

Bir α kümesi geçişli ve \in_α eleman olma bağıntısına göre iyi sıralıysa α ya ordinal sayı denir.

Ordinal sayılar Yunan harfleriyle gösterilir. Ayrıca ordinal terimi de sıklıkla ordinal sayı yerine kullanılır.

Tanımdan ve bu kısmın başındaki açıklamadan her doğal sayı bir ordinaldir. $\omega = \mathbb{N}$ olarak adlandıralım. ω da bir ordinaldir. Ayrıca S ardıl operatörü olmak üzere α ordinal sayı ise $S(\alpha)$ da bir ordinal sayıdır.

α ordinalinin ardıl ordinalini $\alpha + 1 = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ şeklinde tanımlayalım. Bir β ordinal sayısı bir α ordinali için $\beta = \alpha + 1$ şeklinde yazılırsa β ya ardıl (successor) ordinal denir. Bu şekilde yazılamayan ordinallere limit ordinali denir. Böylece ω bir limit ordinaldir [15].

ω dan sonraki en küçük limit ordinali ω^2 ve her n doğal sayısı için ω^n bir limit ordinaldir. Buradan $\omega\omega = \omega^2$ bir limit ordinali olur ve her n doğal sayısı için ω^n bir limit ordinaldir. Benzer şekilde $\omega^3, \omega^4, \dots, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots, \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$ limit ordinalleri elde edilebilir.

2.2. Simetrik Gruplar

2.2.1. Tanım

Ω boştan farklı bir küme olsun. Ω nın elemanları noktalar şeklinde ifade edilecektir. Ω üzerinde birebir örten bir fonksiyona bir permütasyon denir. Ω üzerinde tüm permütasyonların kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba Ω üzerinde simetrik grup denir ve $\text{Sym}(\Omega)$ ile gösterilir. n bir pozitif tamsayı olmak üzere $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$ iken $\text{Sym}(\Omega)$ simetrik grubu S_n ile gösterilir. Bir simetrik grubun her altgrubuna permütasyon grubu denir [16].

2.2.2. Tanım

Ω boştan farklı bir küme olmak üzere $x \in \text{Sym}(\Omega)$ için $\text{supp}(x) = \{\alpha \in \Omega \mid \alpha^x \neq \alpha\}$ kümesine x in desteği (support) denir. $\text{Sym}(\Omega)$ simetrik grubunun sonlu destekli elemanlarının kümesi $\text{Sym}(\Omega)$ simetrik grubunun normal altgrubudur. Bu gruba Ω üzerinde sonlumsu (finitary) simetrik grubu denir ve $\text{FSym}(\Omega)$ ile gösterilir. Bir başka ifadeyle $\text{FSym}(\Omega) = \{x \in \text{Sym}(\Omega) \mid |\text{supp}(x)| < \infty\}$ dur. $\text{FSym}(\Omega)$ sonlumsu simetrik grubunun her altgrubuna Ω üzerinde tanımlı sonlumsu permütasyon grubu denir [16].

2.2.3. Tanım

Eğer bir permütasyon grubunun birimden farklı her elemanı sonlu sayıda noktayı sabit bırakıyorsa bu gruba yansonlumsu (cofinitary) denir [17].

Sonlumsu permütasyonların aksine bir simetrik gruptaki tüm yansonlumsu permütasyonlar bir grup yapısı oluşturmaz. Örneğin $\text{Sym}(\mathbb{Z}^+)$ simetrik grubunun $\tau := (4, 5)(6, 7) \dots$ yansonlumsu permütasyonu için $\sigma := (1, 2, 3)\tau$ yansonlumsu olmasına rağmen $\sigma^2 = (1, 3, 2)$ yansonlumsu değildir.

2.3. Grup Etkisi

2.3.1. Tanım

G bir grup ve Ω boştan farklı bir küme olsun. Her $\alpha \in \Omega$ ve $x \in G$ için $\Omega \times G$ den Ω ya $(\alpha, x) \mapsto \alpha^x$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer

1. G nin birim elemanı 1 olmak üzere her $\alpha \in \Omega$ için $\alpha^1 = \alpha$.

2. Her $\alpha \in \Omega$ ve $x, y \in G$ için $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$.

şartları sağlanıyorsa bu fonksiyona G nin Ω üzerine bir etkisi (action) veya G, Ω üzerine etki eder denir [16]. Burada Ω nin α^x elemanı fonksiyon altında (α, x) in görüntüsüdür.

2.3.2. Tanım

Kabul edelim ki G , boştan farklı bir Ω kümesi üzerine etki etsin. O zaman G nin her bir x elemanını Ω üzerinde $\bar{x} : \alpha \mapsto \alpha^x$ fonksiyonuyla eşleyelim. \bar{x} birebir örten bir fonksiyon olduğundan $x^\rho := \bar{x}$ olmak üzere $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ bir homomorfizmadır. Genel olarak G den $\text{Sym}(\Omega)$ simetrik grubuna giden her homomorfizmaya G nin Ω üzerine bir permütasyon temsili veya kısaca temsili (representation) denir. Böylece G nin Ω üzerine her etkisinden G nin Ω üzerine bir temsili elde edilir. Karşıt olarak her temsil de bir etkiye karşılık gelir. Çünkü her $\psi : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$ homomorfizması için $\alpha \in \Omega$ olmak üzere $\alpha \mapsto \alpha^g := \alpha^{g^\psi}$ bağıntısı G nin Ω üzerine bir etkisidir. Böylece grup etkileri ve permütasyon temsilleri aynı durumun farklı şekilde açıklaması olarak düşünülebilir [16].

2.3.3. Tanım

Bir küme üzerine etki eden bir grubun etkiye karşılık gelen ρ temsiline çekirdeği $\text{Ker}(\rho)$ ya etkinin çekirdeği denir. Eğer etkinin çekirdeği aşıkarsa, yani $\text{Ker}(\rho) = 1$ ise etkiye veya temsile sadık (faithful) denir [16].

Örnek

Her $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ permütasyon grubu için α^x etkisi α nin x altındaki görüntüsü şeklinde tanımlanırsa Ω üzerine etki eder [16].

Örnek (Cayley Temsili)

G bir grup olmak üzere $\Omega := G$ ve etki, $a, x \in G$ için $a^x := ax$, G nin grup işlemine göre sağdan çarpma şeklinde tanımlansın. Bu etkiye karşılık gelen temsile (sağ) regüler permütasyon temsili denir ve bu etki sadıktır. Bu durumda her grup bir permutasyon grubuna izomorftur [16].

2.3.4. Tanım

Bir G grubu bir Ω kümesi üzerine etki ettiğinde G nin elemanları herhangi bir $\alpha \in \Omega$ yı

diğer noktalarla eşler. Bu görüntü kümesine α nın G altındaki yörüngesi (orbit) denir ve $\alpha^G := \{\alpha^x \mid x \in G\}$ olarak ifade edilir [16].

2.3.5. Lemma

Bir G grubu bir Ω kümesi üzerine etki etsin. O zaman G nin tüm yörüngelerinin kümesi Ω nın bir parçalanışıdır [16].

İspat

Kabul edelim ki X kümesi G nin tüm yörüngelerinden oluşsun. Kolayca görüleceği üzere eğer X in elemanları Ω nın tüm tek nokta kümelerinden ya da bir tek Ω dan oluşuyorsa iddia açıktır. X in elemanları boştan farklıdır ve tüm elemanlarının birleşimi Ω ya eşittir. $A, B \in X$ olsun. O zaman $A = \alpha^G$ ve $B = \beta^G$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in \Omega$ elemanları vardır. $A \cap B \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\alpha^{g_1} = \beta^{g_2}$ olacak şekilde $g_1, g_2 \in G$ vardır. Böylece $\alpha \in B$ ve $\beta \in A$ olduğundan $\alpha^G = A \leq B$ ve $\beta^G = B \leq A$ olup $A = B$ dir. \square

2.3.6. Tanım

Bir G grubu Ω kümesi üzerine etki etsin. Ω nın bir α noktasını sabit bırakan G nin elemanlarının kümesine α nın G içindeki dengeleyeni (stabilizer) denir ve

$$G_\alpha := \{x \in G \mid \alpha^x = \alpha\}$$

şeklinde gösterilir [16].¹

2.3.7. Tanım

Bir Ω kümesi üzerine etki eden bir G grubunun bir tek yörüngesi varsa, yani $\alpha^G = \Omega$ ise G ye geçişli (transitive) grup veya geçişlidir denir. Başka bir deyişle her $\alpha, \beta \in \Omega$ için $\alpha^x = \beta$ olacak şekilde $x \in G$ varsa G geçişli gruptur [16].

2.3.8. Tanım

Bir G grubu bir Ω kümesi üzerine etki etsin. Eğer $\alpha \neq \beta$ ve $\gamma \neq \delta$ olacak şekilde Ω nın her sıralı (α, β) ve (γ, δ) ikilisi için $\alpha^x = \gamma$ ve $\beta^x = \delta$ olacak şekilde bir $x \in G$ elemanı

¹Genel olarak G_α lara G nin nokta dengeleyenleri (point stabilizer) denir.

varsa G grubuna 2-geçişli (2-transitive) denir [16].

2.3.9. Lemma

G bir Ω kümesi üzerine geçişli etki eden bir grup, K , G nin bir altgrubu ve bir $\alpha \in \Omega$ için G_α , G nin nokta dengeleyeni olsun. O zaman $G = KG_\alpha$ olması için gerek ve yeter şart K nin geçişli altgrup olmasıdır. Özel olarak, G_α yı kapsayan G nin tek geçişli altgrubu G nin kendisidir [16].

İspat

Kabul edelim ki bir $\alpha \in \Omega$ ve bir $K \leq G$ için $G = KG_\alpha$ olsun. O zaman

$$\alpha^G = \alpha^{KG_\alpha} = (\alpha^{G_\alpha})^K = \alpha^K$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca hipotezden $\alpha^G = \Omega$ olduğundan K geçişli altgruptur.

Karşıt olarak K , G nin bir geçişli altgrubu olsun. O zaman her $g \in G$ için $\alpha^g \in \alpha^K (= \Omega)$ olduğundan bir $x \in K$ için $\alpha^g = \alpha^x$ dir. Dolayısıyla $gx^{-1} \in G_\alpha$ olup $g \in G_\alpha K = KG_\alpha$ dır. O halde $G = KG_\alpha$ dır.

Özel olarak bir geçişli $L \leq G$ için $G_\alpha \leq L$ olsun. O zaman $G = LG_\alpha = L$ olduğundan son iddia da gösterilmiş olur. \square

2.3.10. Tanım

Bir G grubu bir Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin ve Δ , Ω nin boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer her $x \in G$ için ya $\Delta^x = \Delta$ ya da $\Delta^x \cap \Delta = \emptyset$ ise Δ ya G için bir blok (block) denir [16].

Örnek

Bir Ω kümesi üzerine geçişli etki eden her grup için Ω ve Ω nin $\{\alpha\}$ tek nokta kümeleri grup için bir bloktur. Bunlara aşık blok (trivial block) denir [16].

2.3.11. Lemma

G bir Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin ve $\Delta \subseteq \Omega$ kümesi G için bir blok olsun. O zaman $\Sigma = \{\Delta^g \mid g \in G\}$ olmak üzere Σ nın her elemanı G için bir bloktur. Ayrıca Σ Ω nın bir parçalanışdır [16].

İspat

Kabul edelim ki $\Delta^g \in \Sigma$ ve bir $x \in G$ için $\Delta^g \cap \Delta^{gx} \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\alpha^g = \beta^{gx}$ olacak şekilde $\alpha, \beta \in \Delta$ vardır. Böylece $\Delta \cap \Delta^{gxg^{-1}} \neq \emptyset$ ve Δ kümesi G için bir blok olduğundan $\Delta = \Delta^{gxg^{-1}}$ olup $\Delta^g = \Delta^{gx}$ dir. Dolayısıyla Σ nın her elemanı G için bir bloktur.

$\delta \in \Delta$ olsun. G geçişli olduğundan her $\gamma \in \Omega$ için $\gamma = \delta^y$ olacak şekilde $y \in G$ vardır. Böylece $\gamma \in \Delta^y$ olduğundan $\Omega = \bigcup_{g \in G} \Delta^g$ dir. İlk paragraftan Σ nın elemanları boştan farklı ve Σ nın elemanları ikişer ikişer ayrık olduğundan Σ, Ω nın bir parçalanışdır. \square

Yukarıda verilen Σ kümesine Δ yı içeren bloklar sistemi denir [16].

2.3.12. Lemma

Bir G grubu bir Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin. O zaman G nin her öz normal altgrubunun her yörüngesi G için bir bloktur [16].

İspat

Açık olarak G nin aşikar altgrubunun yörüngeleri Ω nın tek nokta altkümeleri olduğundan iddia sağlanır. Kabul edelim ki $1 \neq N \triangleleft G$ olsun. G nin Ω üzerine etkisi N ye kısıtlanırsa N nin Ω üzerine etkisi elde edilir. Her $g \in G$ ve $\alpha \in \Omega$ için

$$(\alpha^N)^g = \alpha^{(Ng)} = \alpha^{(gN)} = (\alpha^g)^N$$

ve $\alpha^g \in \Omega$ olduğundan $(\alpha^N)^g$ kümesi N nin bir yörüngesidir. N, Ω üzerine etki ettiğinden Lemma 2.3.5'ten her $\alpha \in \Omega$ için α^N kümesi G için bir bloktur. \square

2.3.13. Lemma

Ω bir sonsuz küme olmak üzere $G, \text{FSym}(\Omega)$ nın geçişli bir altgrubu ve N, G nin bir öz normal altgrubu olsun. Eğer N nin Ω üzerinde bir sonsuz yörüngesi varsa o zaman N, G nin geçişli altgrubudur [18].

İspat

Kabul edelim ki N nin bir sonsuz $\Delta := \alpha^N$ yörüngesi için $\Delta \neq \Omega$ olsun, yani N , Ω üzerinde geçişli olmasın. Lemma 2.3.12'den Δ kümesi G için bir blok ve $\Delta \neq \Omega$ olduğundan $\Delta \cap \Delta^g = \emptyset$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır. Böylece g elemanı Δ nın tüm elemanlarını hareket ettirdiğinden $\Delta \subseteq \text{supp}(g)$ dir. Ancak $G \leq \text{FSym}(\Omega)$ olduğundan Δ sonlu olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabul yanlış olup iddia doğrudur. \square

2.3.14. Lemma

G bir Ω kümesi üzerine geçişli etki eden bir grup ve $\Delta \subseteq \Omega$ kümesi G için bir blok olsun. O zaman G grubunun $G_{\{\Delta\}} = \{x \in G \mid \Delta^x = \Delta\}$ altgrubu Δ kümesi üzerine geçişli etki eder [16].

İspat

$G_{\{\Delta\}}$ kümesinin G nin bir altgrubu olduğu kolayca gösterilebilir. G grubu Ω kümesi üzerine etki ettiğinden $G_{\{\Delta\}}$ altgrubu Δ kümesi üzerine etki eder. Böylece herhangi bir $\alpha \in \Delta$ için $\alpha^{G_{\{\Delta\}}} \subseteq \Delta$ dir. G geçişli olduğundan her $\beta \in \Delta$ için $\alpha^g = \beta$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Böylece $\beta \in \Delta \cap \Delta^g$ ve Δ , G için bir blok olduğundan $\Delta = \Delta^g$ olup $G_{\{\Delta\}}$ nın tanımından $g \in G_{\{\Delta\}}$ dir. Böylece $\beta \in \alpha^{G_{\{\Delta\}}}$ olup $\Delta = \alpha^{G_{\{\Delta\}}}$ olduğundan iddia sağlanır. \square

2.3.15. Tanım

Bir G grubu bir Ω kümesi üzerine geçişli etki etsin. Eğer G nin Ω ve Ω nın tek nokta kümeleri dışında bloğu yoksa G grubuna ilkel (primitive) denir. Aksi durumda G grubuna ilkel olmayan (imprimitive) denir [16].

2.3.16. Lemma

G , 2-geçişli bir grup olsun. O zaman G ilkel gruptur [16].

İspat

G , Ω kümesi üzerinde 2-geçişli olsun. Tanımdan $\alpha, \beta \in \Omega$ ($\alpha \neq \beta$) için (α, β) ve (β, α) ikilileri seçilirse $\alpha^x = \beta$ olacak şekilde $x \in G$ olduğundan G , Ω üzerine geçişli etki eder.

Kabul edelim ki Δ , $1 \neq |\Delta|$ olacak şekilde G için bir blok olsun. Böylece birbirinden farklı $\mu, \nu \in \Delta$ elemanları ve $\mu \neq \gamma$ olacak şekildeki her $\gamma \in \Omega$ için (μ, ν) ve (μ, γ) ikilileri alınır. G , 2-geçişli olduğundan $\mu^x = \mu$ ve $\nu^x = \gamma$ olacak şekilde bir $x \in G$ elemanı vardır. Böylece $\mu \in \Delta^x \cap \Delta$ olup Δ , G için bir blok olduğundan $\Delta^x = \Delta$ dir. Dolayısıyla $\gamma = \nu^x \in \Delta^x = \Delta$ olup $\gamma \in \Delta$ dir. O hâlde $\Delta = \Omega$ olup iddia doğrudur. \square

2.3.17. Teorem

Bir G grubu en az iki elemanlı bir küme üzerine geçişli etki etsin. O zaman G grubunun ilkel olması için gerek ve yeter şart G nin her nokta dengeleyeninin maksimal altgrup olmasıdır [16].

İspat

Kabul edelim ki G grubu ilkel ve G_α , G nin bir nokta dengeleyeni olmak üzere $G_\alpha \leq M$ olacak şekilde bir $M \leq G$ ve $\Delta = \alpha^M$ olsun. $x \in G$ için eğer $\Delta^x \cap \Delta \neq \emptyset$ ise $\alpha^{ux} = \alpha^v$ olacak şekilde $u, v \in M$ vardır. Böylece $uxv^{-1} \in G_\alpha$ olduğundan $x \in M$ dir. Böylece $\Delta^x = \Delta$ dir. Dolayısıyla Δ kümesi G için bir bloktur. G ilkel olduğundan $\Delta = \{\alpha\}$ veya $\Delta = \Omega$ dir. Eğer $\Delta = \{\alpha\}$ ise $M \leq G_\alpha$ olup $G_\alpha = M$ dir. Eğer $\Delta = \Omega$ ise M altgrubu G_α yı kapsayan G nin geçişli altgrubu olduğundan Lemma 2.3.9'dan dolayı $M = G$ dir. Böylece G nin nokta dengeleyenleri maksimal altgruptur.

Karşıt olarak bir $\gamma \in \Omega$ için G nin G_γ nokta dengeleyeni maksimal ve $1 \neq |\Gamma|$ olacak şekilde $\Gamma \subseteq \Omega$ kümesi G için bir blok olsun. O zaman Lemma 2.3.11'den $\gamma \in \Gamma^g$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Böylece $G_\gamma \leq G_{\{\Gamma^g\}}$ dir. G_γ maksimal olduğundan ya $G_\gamma = G_{\{\Gamma^g\}}$ ya da $G_{\{\Gamma^g\}} = G$ dir. Eğer ilk durum sağlanırsa Lemma 2.3.14'ten dolayı $G_{\{\Gamma^g\}}$, G nin Γ^g bloğu üzerine geçişli etki ettiğinden $\Gamma^g = \gamma^{G_{\{\Gamma^g\}}} = \{\gamma\}$ olup $\beta := \gamma^{g^{-1}} \in \Omega$ için $\Gamma = \{\beta\}$ dir. Eğer ikinci durum sağlanırsa G , Ω üzerinde geçişli ve $\gamma \in \Gamma^g$ olduğundan $\Gamma^g = \gamma^{G_{\{\Gamma^g\}}} = \Omega$ dir. Ayrıca Γ^g , G için blok ve $\gamma \in \Gamma \cap \Gamma^g$ olduğundan $\Gamma = \Omega$ dir. O halde G ilkel gruptur. \square

2.4. Grup Çarpımları

2.4.1. Yarıdirekt çarpım

2.4.1.1. Teorem

H ve K birer grup olmak üzere her $x \in H$ için $u \mapsto u^x$ eşlemesi K nin bir otomorfizması

olacak şekilde H grubu K üzerine etki etsin.

$$G = \{(u, x) \mid u \in K, x \in H\}$$

olmak üzere G üzerinde her $(u, x), (v, y) \in G$ için

$$(u, x)(v, y) = (uv^{x^{-1}}, xy)$$

şeklinde bir çarpım tanımlansın. G bu işleme göre bir gruptur. G nin birimi $(1, 1)$ ve $(u, x) \in G$ elemanının tersi $(u, x)^{-1} = ((u^x)^{-1}, x^{-1})$ dir.

G nin $H^* = \{(1, x) \mid x \in h\}$ ve $K^* = \{(u, 1) \mid u \in K\}$ altgrupları için $H^* \cong H$ ve $K^* \cong K$ ve $G = K^*H^*$ ve $K^* \cap H^* = 1$ dir. Ek olarak K^* , G nin normal alt grubudur. Açık olarak $|G| = |H||K|$ ve H^* in K^* üzerine

$$(1, x)^{-1}(u, 1)(1, x) = (u^x, 1)$$

eşlenikleme etkisi H nin K üzerine etkisine karşılık gelir öyle ki $(u, 1) \mapsto (u^x, 1)$ eşlemesi K^* in otomorfizmasıdır [16].

İspat

H, K üzerine $K \times H \rightarrow K, (k, h) \mapsto k^h$ şeklinde etki etsin ve her $h \in H$ için $K \rightarrow K, k \mapsto k^h$ permütasyonu K nin bir otomorfizması olsun. G nin verilen işleme göre bir grup olduğunu gösterelim. Yukarıda verilen işlem G üzerinde bir ikili işlemdir.

Her $(u, x), (v, y), (t, z) \in G$ için

$$\begin{aligned} (u, x)[(v, y)(t, z)] &= (u, x)(vt^{y^{-1}}, yz) = (u(vt^{y^{-1}})^{x^{-1}}, xyz) \\ &= (uv^{x^{-1}}t^{(xy)^{-1}}, xyz) \\ &= (uv^{x^{-1}}, xy)(t, z) \\ &= [(u, x)(v, y)](t, z) \end{aligned}$$

olduğundan verilen işlem birleşme özelliğini sağlar.

G nin birim elemanının $(1, 1)$ olduğu açıktır.

Her $(u, x) \in G$ için

$$\begin{aligned} (u, x)((u^x)^{-1}, x^{-1}) &= (u(u^{-1})^{xx^{-1}}, xx^{-1}) = (1, 1) \\ &= ((u^x)^{-1}u^x, x^{-1}x) = ((u^x)^{-1}, x^{-1})(u, x) \end{aligned}$$

olduğundan $(u, x)^{-1} = ((u^x)^{-1}, x^{-1})$ dir. Böylece G verilen işleme göre bir gruptur.

G nin $H^* = \{(1, x) \mid x \in h\}$ ve $K^* = \{(u, 1) \mid u \in K\}$ altgrupları için $H \rightarrow H^*$, $h \mapsto (1, h)$ ve $K \rightarrow K^*$, $k \mapsto (k, 1)$ eşlemeleri tanımlanır. $H^* \cong H$ ve $K^* \cong K$ olduğu kolayca görülür. Her $(k, h) \in G$ için $(k, h) = (k1^{1^{-1}}, 1h) = (k, 1)(1, h)$ olduğundan $G \leq K^*H^*$ ve böylece $G = K^*H^*$ dir. Her $(k, h) \in G$ ve her $(u, 1) \in K^*$ için

$$(u, 1)^{(k, h)} = (k, h)^{-1}(u, 1)(k, h) = ((k^h)^{-1}, h^{-1})(uk, h) = ((k^h)^{-1}(uk)^h, 1)$$

ve $k^h, (uk)^h \in K$ olduğundan $(u, 1)^{(k, h)} \in K^*$ ve böylece $K^* \triangleleft G$ dir. Ayrıca $K^* \cap H^* = 1$ olduğuna açıktır ve $G = K \times H$ olduğundan $|G| = |K||H|$ dir. \square

2.4.1.2. Tanım

Teorem 2.4.1.1'de tanımlanan 1G grubuna K nın H ile yarıdirekt çarpımı (semidirect product) denir ve $G = K \rtimes H$ şeklinde gösterilir. Etki tanımı verilmese de yarıdirekt çarpım H nın K üzerine etkisine ve bu etki yardımıyla tanımlanan K üzerindeki otomorfizmaya bağlıdır [16].

2.4.1.3. Tanım (Parçalanma Genişlemesi)

G bir grup ve G nin H ve K altgrupları için $G = KH$, $K \triangleleft G$ ve $K \cap H = 1$ ise G grubuna K nın H ile parçalanma genişlemesi (split extension) denir .

G içinde H nın K üzerine eşlenikleme etkisi göz önüne alınacak olursa $k \mapsto k^h = h^{-1}kh$ eşlemesi K nın bir otomorfizması ve $G \cong K \rtimes H$ olduğuna açıktır. Dolayısıyla her parçalanma genişlemesi buna karşılık gelen yarıdirekt çarpıma izomorftur ve Teorem 2.4.1.1'den her yarıdirekt çarpım bir parçalanma genişlemesine karşılık gelir [16].

2.4.1.4. Lemma

¹ H dan $\text{Sym}(K)$ simetrik grubuna homomorfizma tanımlanabileceğinden ve bu etki K nın bir otomorfizması olduğundan yarıdirekt çarpım tanımında H nın K üzerine otomorfizma şeklinde etkisi yerine $\alpha : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ homomorfizma şartı verilebilir [19].

K ve H grupları için $G := K \rtimes H$ yarıdirekt çarpımı tanımlı olsun. O zaman G nin abelyan olması için gerek ve yeter şart H nın K üzerine etkisi birim otomorfizma olacak şekilde H ve K gruplarının abelyan olmasıdır.

İspat

Kabul edelim ki G abelyan olsun. O zaman her $g_1 = (k_1, h_1), g_2 = (k_2, h_2) \in G$ için

$$g_1 g_2 = (k_1 k_2^{h_1^{-1}}, h_1 h_2) = (k_2 k_1^{h_2^{-1}}, h_2 h_1) = g_2 g_1 \quad (2.1)$$

dir. (2.1)'de ikililerin eşitliğinden H nın abelyan olduğu açıktır ve h_i ler keyfi olduğundan $h_1 = h_2 = 1$ alınırsa K nın da abelyan olduğu görülür. Benzer şekilde (2.1)'den her $k_1, k_2 \in K$ ve $h_1, h_2 \in H$ için $k_1 k_2^{h_1^{-1}} = k_2 k_1^{h_2^{-1}}$ olduğundan $k_1 = k_2 = k$ alınırsa $k^{h_1^{-1} h_2} = k$ dir. Burada h_1^{-1} elemanı sabit bırakılırsa h_2 ler H nin elemanlarını taradığında $h_1^{-1} h_2$ de H nın tüm elemanlarını tarar. Böylece her $h \in H$ ve her $k \in K$ için $k^h = k$ olur ki böylece H, K üzerine birim otomorfizma şeklinde etki eder.

Karşıt olarak H nın K üzerine etkisi birim otomorfizma olacak şekilde H ve K grupları abelyan olsun. O zaman her $g_1 = (k_1, h_1), g_2 = (k_2, h_2) \in G$ için $k_2^{h_1^{-1}} = k_2$ ve $k_1^{h_2^{-1}} = k_1$ olduğundan (2.1)'den $g_1 g_2 = g_2 g_1$ dir. \square

2.4.2. Çelenk çarpım

2.4.2.1. Teorem

Γ ve Δ boştan farklı kümeler olmak üzere Γ dan Δ üzerine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi $\text{Fun}(\Gamma, \Delta)$ olsun. Eğer K bir grup ise her $f, g \in \text{Fun}(\Gamma, K)$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için

$$\gamma^{(fg)} := \gamma^f \gamma^g$$

çarpımı $\text{Fun}(\Gamma, K)$ kümesi üzerinde bir grup tanımlar öyle ki eşitliğin sağındaki çarpım K nın elemanıdır. $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ olacak şekilde Γ kümesi sonluysa $\text{Fun}(\Gamma, K)$ grubu $f \mapsto (\gamma_1^f, \dots, \gamma_m^f)$ eşlemesiyle K^m kartezyen çarpım grubuna izomorftur [16].

İspat

Γ boştan farklı bir küme ve K bir grup olduğundan $\text{Fun}(\Gamma, K)$ kümesi sabit

fonksiyonları içerir ve böylece $\text{Fun}(\Gamma, K) \neq \emptyset$ dir. $f, g \in \text{Fun}(\Gamma, K)$ olsun. Her $\gamma \in \Gamma$ için $\gamma^{(fg)} = \gamma^f \gamma^g$ ve $\gamma^f \gamma^g \in K$ olduğundan işlem kapalıdır ve iyi tanımlı olduğu açıktır. Böylece verilen işlem bir ikili işlemdir. $\text{Fun}(\Gamma, K)$ kümesi birleşme özelliğini sağlar.

$\iota \in \text{Fun}(\Gamma, K)$ fonksiyonu Γ nın her elemanını K nın birim elemanına götüren sabit fonksiyon olsun. O zaman ι , $\text{Fun}(\Gamma, K)$ nın birim elemanıdır.

Her $f \in \text{Fun}(\Gamma, K)$ ve $\gamma \in \Gamma$ için $\gamma^{gf} = (\gamma^f)^{-1}$ şeklinde tanımlı g_f fonksiyonu $\text{Fun}(\Gamma, K)$ nın elemanı ve $f^{-1} = g_f$ dir. Dolayısıyla $\text{Fun}(\Gamma, K)$ kümesi verilen çarpma işlemine göre bir gruptur.

$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ olsun. $\phi : \text{Fun}(\Gamma, K) \rightarrow K^m$, $f \mapsto (\gamma_1^f, \dots, \gamma_m^f)$ eşleminin bir izomorfizma olduğunu gösterelim. Bu eşlemin kapalı ve iyi tanımlı olduğu açıktır. Her $f, g \in \text{Fun}(\Gamma, K)$ ve $\gamma \in \Gamma$ için

$$(fg)^\phi = (\gamma_1^{fg}, \dots, \gamma_m^{fg}) = (\gamma_1^f, \dots, \gamma_m^f)(\gamma_1^g, \dots, \gamma_m^g) = f^\phi g^\phi$$

olduğundan ϕ bir homomorfizmadır. Her $(k_1, \dots, k_m) \in K^m$ için $1 \leq j, s \leq m$ olmak üzere $\gamma_j^{f_j} = k_j$ ve $s \neq j$ için $\gamma_s^{f_j} = 1$ olacak şekilde $f_j \in \text{Fun}(\Gamma, K)$ sabit fonksiyonları vardır. $h = f_1 f_2 \dots f_m$ şeklinde tanımlanırsa $h^\phi = (k_1, \dots, k_m)$ olur ve böylece ϕ örtendir. Ayrıca her $g \in \text{Ker}(\phi)$ için

$$(\gamma_1^g, \dots, \gamma_m^g) = (1, \dots, 1) \Leftrightarrow g = \iota$$

olduğundan $\text{Ker}(\phi) = 1$ dir. Dolayısıyla ϕ bir izomorfizmadır. □

2.4.2.2. Tanım

H ve K birer grup olsun ve H boştan farklı bir Γ kümesi üzerine etki etsin. $\text{Fun}(\Gamma, K) \rtimes H$ yarıdirekt çarpımına K nın H ile çelenk çarpımı (wreath product) denir öyle ki H , $\text{Fun}(\Gamma, K)$ grubu üzerine her $f \in \text{Fun}(\Gamma, K)$, $\gamma \in \Gamma$ ve $x \in H$ için $\gamma^{f^x} := (\gamma^{x^{-1}})^f$ şeklinde etki¹ eder. $\text{Fun}(\Gamma, K) \rtimes H$ grubu $Kwr_\Gamma H$ ile gösterilir.

$$B := \{(f, 1) \mid f \in \text{Fun}(\Gamma, K)\} \cong \text{Fun}(\Gamma, K)$$

¹Her $f, g \in \text{Fun}(\Gamma, K)$, her $x \in H$ ve her $\gamma \in \Gamma$ için $\gamma^{(fg)^x} = (\gamma^{x^{-1}})^{(fg)} = (\gamma^{x^{-1}})^f (\gamma^{x^{-1}})^g = \gamma^{f^x} \gamma^{g^x}$ olduğundan H nın $\text{Fun}(\Gamma, K)$ üzerine etkisi bir otomorfizmadır.

altgrubuna çelenk çarpımının baz grubu (base group) denir [16].

2.4.2.3. Tanım

Bir H grubu kendi üzerine regüler etki etsin. $Kwr_H H$ çelenk çarpımına standart çelenk çarpım denir ve $Kwr_H H$ ya da $K \wr H$ ile gösterilir [16].

2.5. Grup Sınıfları

2.5.1. Tanım

\mathfrak{X} grupların bir sınıfı olsun. Eğer bu sınıf birim grubu içerir ve $G_1 \cong G \in \mathfrak{X}$ iken $G_1 \in \mathfrak{X}$ ise bu sınıfa bir grup-teorik sınıf (group-theoretical class) ya da bir gruplar sınıfı (class of groups) denir. Örneğin, tüm sonlu gruplar ve tüm abelyan gruplar birer grup sınıfıdır. Daha genel olarak, \mathcal{P} gruplara ait bir özellik olsun. Eğer birim grup ve bir G grubu \mathcal{P} özelliğini sağladığında $G_1 \cong G$ iken G_1 de \mathcal{P} özelliğine sahipse \mathcal{P} ye bir grup-teorik özellik (group-theoretical property) denir. O zaman açıkça görüleceği üzere bir grup teorik özelliğe sahip grupların sınıfı bir grup sınıfıdır. Benzer şekilde bir grup sınıfına ait olma özelliği de bir grup teorik özellik olur. Dolayısıyla bu iki kavram birbirine denktir. Bir \mathfrak{X} sınıfındaki bir gruba \mathfrak{X} -grup denir [19].

2.5.2. Tanım (Lokal \mathfrak{X} -gruplar)

\mathfrak{X} bir grup teorik sınıf ve G bir grup olsun. Eğer G nin her sonlu altkümesi bir \mathfrak{X} -altgrubu tarafından kapsanıyorsa G ye lokal \mathfrak{X} -grubu (locally \mathfrak{X} -group) denir. Eğer her $K \in \mathfrak{X}$ için K nin her altgrubu da bir \mathfrak{X} -grupsa, yani \mathfrak{X} -grup teorik sınıfa ait olma özelliği altgruplar tarafından da sağlanıyorsa G nin lokal \mathfrak{X} -grubu olması için gerek ve yeter şart G nin sonlu üreteçli her altgrubunun bir \mathfrak{X} -altgrubu olmasıdır [19]. \mathfrak{X} grup sınıfı sonlu gruplar alınır, bir grubun lokal sonlu olması için sonlu üreteçli her altgrubunun sonlu olması yeterlidir.

2.5.3. Tanım (Grup sınıfı çarpımı)

\mathfrak{X} ve \mathfrak{Y} iki grup sınıfı olsun. Bir G grubunun $N \in \mathfrak{X}$ ve $G/N \in \mathfrak{Y}$ olacak şekilde bir N normal altgrubu varsa G grubu $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ grup sınıfındandır denir. Bu şekilde tanımlanan $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ grup sınıfına, genişleme (extension) ya da sınıf çarpımı (product class) denir. $\mathfrak{X}\mathfrak{Y}$ grup sınıfındaki gruplara da \mathfrak{X} -by- \mathfrak{Y} gruplar denir [20].

2.5.1. Çözülebilir gruplar

2.5.1.1. Tanım

Bir G grubunun bir sonlu abelyan serisi (abelian series) varsa, yani her G_{i+1}/G_i faktörü abelyan olacak şekilde G nin bir $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ serisi varsa G ye çözülebilir (soluble, solvable) grup denir.

Her abelyan grup çözülebilirdir. S_3 simetrik grubu abelyan olmayan çözülebilir bir grup örneğidir.

G çözülebilir grubunun en kısa abelyan serisinin uzunluğuna G nin çözülebilir uzunluğu veya komütatör uzunluğu (derived length) denir ve $d(G)$ ile gösterilir. Böylece $d(G) = 0$ olması için gerek ve yeter şart G nin mertebesinin 1 olmasıdır. Ayrıca çözülebilir uzunluğu en fazla 1 olan gruplar abelyandır. Çözülebilir uzunluğu en fazla 2 olan gruba metabelyan (metabelian) denir [19].

2.5.1.2. Tanım (Komütatör Serisi)

G bir grup olsun. $G' = [G, G] = \langle [x, y] \mid x, y \in G \rangle$ alt grubuna G nin komütatör alt grubu denir. $G^{(0)} = G, G^{(1)} = G'$ olmak üzere $n \geq 1$ için $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$ olarak alınırsa

$$G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq \dots$$

serisi elde edilir. Bu seriye G grubunun komütatör serisi (derived series) denir. Bu seri birim gruba ulaşmak ya da sonlu olmak zorunda değildir. Açık olarak bu serinin $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ faktörleri abelyandır [19].

2.5.1.3. Lemma

G bir grup ve K ve H , G nin alt grupları olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

1. $[K, H] \triangleleft \langle K, H \rangle$
2. $K \triangleleft G$ ve $G = KH$ ise $G' = K'[K, H]H'$ dür.

İspat

(1) $[K, H]$ nın her $[k, h]$ üretici ve her $x \in K \cup H$ için $[k, h]^x$ eşleniğini inceleyelim. Eğer $x \in K$ ise $[k, h]^x = [kx, h][h, x] \in [K, H]$ dir. Eğer $x \in H$ ise $[k, h]^x = [x, k][k, hx] \in [K, H]$ dir.

Şimdi $[K, H] \triangleleft \langle K, H \rangle$ olduğunu gösterelim. Her $a \in [K, H]$ ve her $g \in \langle K, H \rangle = \langle K \cup H \rangle$ için $a = [k_1, h_1]^{\epsilon_1} [k_2, h_2]^{\epsilon_2} \dots [k_r, h_r]^{\epsilon_r}$ ve $g = g_1^{\omega_1} g_2^{\omega_2} \dots g_s^{\omega_s}$ olacak şekilde $\epsilon_i, \omega_j = \pm 1$, $k_i \in K$, $h_i \in H$ ve $g_j \in K \cup H$ vardır. Dikkat edilecek olursa

$$a^g = ([k_1, h_1]^g)^{\epsilon_1} ([k_2, h_2]^g)^{\epsilon_2} \dots ([k_r, h_r]^g)^{\epsilon_r}$$

dir. Buradan da $[k_i, h_i]^g = ([k_i, h_i]^{g_1^{\omega_1}})^{g_2^{\omega_2} \dots g_s^{\omega_s}}$ dir. Önceki paragraftan $[k_i, h_i]^{g_j} \in [K, H]$ olduğundan $a^g \in [K, H]$ dir. Böylece iddia sağlanır.

(2) $k_1, k_2 \in K$ ve $h_1, h_2 \in H$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [k_1 h_1, k_2 h_2] &= [k_1, k_2 h_2]^{h_1} [h_1, k_2 h_2] \\ &= [k_1, h_2]^{h_1} [k_1, k_2]^{h_2 h_1} [h_1, h_2] [h_1, k_2]^{h_2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

dir. (1)'den $[K, H] \triangleleft \langle K, H \rangle = KH = G$ dir. Ayrıca $K' \triangleleft K \triangleleft G$ ve K', K nın bir karakteristik altgrubu olduğundan normallik geçişmelidir [19], yani $K' \triangleleft G$ dir. (2.2)'den $G' = [K, H]K'H'[K, H] = K'[K, H]H'$ dir. \square

2.5.1.4. Lemma

Bir G grubunun komütatör serisinin terimleri fully-invariant altgruptur, yani her $\alpha \in \text{End}(G)$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(G^{(n)})^\alpha \leq G^{(n)}$ dir [19].

İspat

n üzerinden tümevarım uygulayalım. $n = 0$ için iddia sağlanır. Kabul edelim ki $n \geq 1$ olmak üzere her $\alpha \in \text{End}(G)$ için $(G^{(n-1)})^\alpha \leq G^{(n-1)}$ olsun. O zaman

$$(G^{(n)})^\alpha = [(G^{(n-1)})^\alpha, (G^{(n-1)})^\alpha] \leq [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] = G^{(n)}$$

olup iddia tümevarımdan sağlanır. \square

2.5.1.5. Lemma

G bir grup olsun. O zaman $d(G) = n$ olması için gerek ve yeter şart G nin komütatör serisinin uzunluğunun n olmasıdır [19].

İspat

Kabul edelim ki G nin bir abelyan serisi $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ olsun. Her $0 \leq i \leq n$ için $G^{(i)} \leq G_{n-i}$ olduğunu i üzerinden tümevarımla gösterelim. $i = 0$ için iddia açıktır. Kabul edelim ki $i - 1 \geq 0$ için iddia sağlansın, yani $G^{(i-1)} \leq G_{n-i+1}$ olsun. O zaman

$$G^{(i)} = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}] \leq G'_{n-i+1}$$

ve G_{n-i+1}/G_{n-i} abelyan olduğundan $G'_{n-i+1} \leq G_{n-i}$ dir.¹ Böylece tümevarımdan eşitsizlik sağlanır. Dolayısıyla $G^{(n)} \leq G_0 = 1$ dir.

Karşıt olarak n , $G^{(n)} = 1$ olacak şekilde en küçük tamsayı olsun. Hipotezden ve Lemma 2.5.1.4'ten G nin komütatör serisi bir abelyan seri olup² G çözülebilirdir. $d(G) = m$ olsun. O zaman $m \leq n$ ve ilk paragraftan $G^{(m)} = 1$ dir. n , $G^{(n)} = 1$ olacak şekilde en küçük tamsayı olduğundan $n \leq m$ olup $d(G) = n$ dir. \square

2.5.1.6. Lemma

Çözülebilir gruplar altgrup, homomorfik görüntü ve genişlemeye göre kapalıdır [19].

İspat

G bir çözülebilir grup olsun. O zaman Lemma 2.5.1.5'ten bir $n \in \mathbb{N}$ için $G^{(n)} = 1$ dir. $K \leq G$ olsun. O zaman $K^{(n)} \leq G^{(n)} = 1$ olduğundan Lemma 2.5.1.5'ten K çözülebilirdir.

$N \triangleleft G$ olmak üzere $\overline{G} = G/N$ bölüm grubunun çözülebilir olduğunu gösterelim.

$$\overline{G}^{(n)} = (G/N)^{(n)} = G^{(n)}N/N = N$$

olduğundan \overline{G} çözülebilirdir.

¹ K bir grup ve $H \triangleleft K$ olmak üzere K/H nin abelyan olması için gerek ve yeter şartın $K' \leq H$ olması gerektiği kolaylıkla gösterilebilir.

² $G^{(n)}/G^{(n+1)} = G^{(n)}/(G^{(n)})'$ olduğundan G nin komütatör serisi abelyandır.

Son olarak bir K grubu için K/M çözülebilir olacak şekilde M , K nin çözülebilir normal bir altgrubu olsun. O zaman $(K/M)^{(t)} = M$ ve $M^{(s)} = 1$ olacak şekilde $t, s \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $K^{(t)} \leq M$ olur. Böylece $(K^{(t)})^{(s)} = K^{(t+s)} = 1$ olup Lemma 2.5.1.5'ten K çözülebilirdir. \square

2.5.2. Lokal çözülebilir gruplar

Aşağıdaki lemmanın ispatında [19]'da 12.5.1'den yararlanılmıştır.

2.5.2.1. Lemma

G birimden farklı lokal çözülebilir grup olsun. O zaman her $x, y \in G$ için $\langle [x, y] \rangle^G \neq G$ dir.

İspat

Kabul edelim ki $X := \langle [x, y] \rangle^G = G$ olacak şekilde $x, y \in G$ olsun. $z = [x, y]$ olmak üzere $x, y \in X$ olduğundan $x, y \in \langle z^{g_1}, z^{g_2}, \dots, z^{g_k} \rangle$ olacak şekilde $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ vardır. $Y = \langle x, y, g_1, \dots, g_k \rangle$ olsun. O zaman $Z = \langle z \rangle^Y$ olmak üzere $x, y \in Z$ olduğundan $z \in Z'$ dir. $Z' \triangleleft Y$ olduğundan her $y \in Y$ için $z^y \in Z'$ olur. Böylece $Z \leq Z'$ dir. Ancak hipotezden Y çözülebilir olduğundan Lemma 2.5.1.6'dan Y nin altgrubu olan Z de çözülebilir ki bu durum Z nin mükemmel olmasıyla çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış olup iddia doğrudur. \square

2.5.2.2. Lemma

Sonsuz lokal çözülebilir gruplar basit değildir.

İspat

Kabul edelim ki bir sonsuz lokal çözülebilir G grubu basit olsun. O zaman G abelyan değildir. Aksi halde basit abelyan grup sonlu olduğundan bu durum hipotez ile çelişir. Böylece $z = [x, y] \neq 1$ olacak şekilde $x, y \in G$ vardır. G basit olduğundan $\langle [x, y] \rangle^G = G$ olur ki bu Lemma 2.5.2.1 ile çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış olup iddia doğrudur. \square

2.5.2.3. Lemma

G bir mükemmel lokal çözülebilir grup ve F , G nin sonlu üreteçli bir altgrubu olsun.

O zaman G nin her öz normal N altgrubu için $F^G N \neq G$ dir. Özel olarak G sonlu indeksli öz altgrubu olmayan sonsuz üreteçli bir gruptur.

İspat

İlk önce $F_n = \langle x_i \mid 1 \leq i \leq n, x_i = [y_i, z_i], y_i, z_i \in G \rangle$ olmak üzere $F_n^G \neq G$ olduğunu göstermek için n üzerinden tümevarım uygulayalım. Lemma 2.5.2.1'den $n = 1$ için iddia sağlanır. $n \geq 2$ olmak üzere $F_{n-1}^G \neq G$ olsun. Kabul edelim ki $F_n^G = G$ olsun. O zaman

$$F_n^G = F_{n-1}^G \langle x_n \rangle^G = G$$

dir. Tümevarım kabulünden $L := F_{n-1}^G \neq G$ dir. Böylece $G/L = \langle x_n L \rangle^{G/L}$ ve G/L mükemmel lokal çözülebilir grup olduğundan bu durum Lemma 2.5.2.1 çelişir. O halde $F_n^G = G$ kabulü yanlış ve $F_n^G \neq G$ dir.

Kabul edelim ki F , üreteçleri G nin komütatörleri olan G nin bir sonlu üreteçli altgrubu ve G nin bir N öz normal altgrubu için $G = NF^G$ olsun. O zaman $\overline{G} = G/N$ olmak üzere $\overline{G} = \overline{F}^{\overline{G}}$ dir. Fakat \overline{G} mükemmel lokal çözülebilir grup olduğundan bu durum önceki paragrafta çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış olup üreteçleri G nin komütatörleri olan G nin her sonlu üreteçli F altgrubu ve G nin her N öz normal altgrubu için $G \neq NF^G$ dir. K , G nin sonlu üreteçli altgrubu olsun. Hipotezden $G = G'$ olduğundan K nin her üreteci G nin sonlu sayıda komütatörü tarafından üretilir. Böylece K nin kendisi de G nin sonlu sayıda komütatörü tarafından üretildiğinden $G \neq NK^G$ dir.

G nin sonlu indeksli bir H öz altgrubu olsun. G/H_G sonludur. Böylece $G = TH_G$ olacak şekilde G nin sonlu üreteçli T altgrubu vardır. Dolayısıyla $G = T^G H_G$ olur. Ancak bu durum önceki paragrafta elde edilen sonuçla çelişir. Dolayısıyla G nin sonlu indeksli öz altgrubu yoktur. G mükemmel ve lokal çözülebilir olduğundan sonlu üreteçli olamaz. \square

2.5.3. Hipermerkez gruplar ve nilpotent gruplar

2.5.3.1. Tanım (Seriler)

G bir grup, $H \leq G$ ve Σ bir tam sıralı küme olsun. Eğer $\mathcal{S} = \{A_\sigma, V_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ kümesi

1. Her A_σ ve V_σ , H yı kapsar.

2. $G \setminus H = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \Lambda_\sigma \setminus V_\sigma$.
3. Eğer $\tau < \sigma$ ise $\Lambda_\tau \leq V_\sigma$.
4. $V_\sigma \triangleleft \Lambda_\sigma$.

şartlarını sağlıyorsa bu kümeye H ve G arasında bir seri denir. Birim altgrup ile G arasındaki bir seriye G içinde bir seri denir. Λ_σ ve V_σ altgruplarına serinin terimleri, Λ_σ/V_σ gruplarına serinin faktörleri denir. Eğer $\tau \leq \sigma$ ise (3) ve (4)'ten $\Lambda_\tau \leq \Lambda_\sigma$ ve $V_\tau \leq V_\sigma$ dır. Böylece \mathcal{S} nin terimleri kapsamaya göre tam sıralıdır ve Λ_σ ve V_σ nin sıralaması Σ nin sıralamasına karşılık gelir.

$x \in G \setminus H$ olsun. O zaman (2)'den $x \in \Lambda_\sigma \setminus V_\sigma$ olacak şekilde bir $\sigma(x) := \sigma \in \Sigma$ vardır. Eğer $x \in \Lambda_\tau$ ise (3)'ten $\tau \geq \sigma$ dır. Benzer şekilde eğer $x \notin V_\tau$ ise $\tau \leq \sigma$ dır. Böylece $\sigma(x)$ hem $x \in \Lambda_\tau$ olacak şekilde Σ nin en küçük elemanı hem de $x \notin V_\tau$ olacak Σ nin en büyük elemanıdır. Buradan görüldüğü üzere $\Lambda_{\sigma(x)}$, \mathcal{S} nin x i içeren tüm terimlerinin kesişimi iken $V_{\sigma(x)}$ ise x i içermeyen tüm terimlerinin birleşimidir. Daha genel olarak her $\sigma \in \Sigma$ için

$$\Lambda_\sigma = \bigcap_{\tau > \sigma} V_\tau$$

ve

$$V_\sigma = \bigcup_{\tau < \sigma} \Lambda_\tau$$

elde edilir öyle ki eğer Σ nin en küçük veya en büyük elemanı varsa σ , Σ nin en son elemanı olduğunda $\Lambda_\sigma = G$ ve σ , Σ nin ilk elemanı olduğunda $V_\sigma = H$ dır şeklinde yorumlanabilir [20].

2.5.3.2. Tanım

Eğer her $\alpha < \beta$ için $G_\alpha \triangleleft G$ ve $G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq Z(G/G_\alpha)$ olacak şekilde G nin bir $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$ yukarı merkez serisi (upper central series) varsa G ye hipermerkez (hypercentral) denir. Eğer n bir doğal sayı olmak üzere G nin sonlu merkez serisi (central series) varsa, yani $G_{i+1}/G_i \leq Z(G/G_i)$ olacak şekilde G nin $1 = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \dots \triangleleft G_n = G$ normal serisi varsa G ye nilpotent grup denir. G nin bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğu G nin nilpotentlik sınıfı (nilpotent class) denir [19].

Nilpotent gruplar artan ve azalan merkez serileri tarafından da karakterize edilebilirler.

2.5.3.3. Tanım (Genelleştirilmiş Yukarı Merkez Serisi)

G bir grup olmak üzere $Z_0(G) = 1$ olsun. Eğer $1 < \alpha$ bir ordinal ise

$$Z_{\alpha+1}(G)/Z_\alpha(G) = Z(G/G_\alpha),$$

eğer α bir limit ordinali ise

$$Z_\alpha(G) = \bigcup_{\beta < \alpha} Z_\beta(G)$$

şeklinde tanımlansın.¹ G nin kardinalitesi aşılamayacağından $Z_\lambda(G) = Z_{\lambda+1}(G) = \dots$ olacak şekilde bir en küçük λ ordinali vardır. $Z_\lambda(G)$ ye G nin hipermerkezi (hypercenter) denir ve $Z_\infty(G)$ ile gösterilir. Böylece

$$Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq \dots$$

serisine G nin genelleştirilmiş yukarı merkez serisi (transfinitely extended upper central series) denir.

Eğer $Z_\infty(G) = G$ ise G bir hipermerkez gruptur. Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ ise G bir nilpotent gruptur ve bu şekildeki n doğal sayılarının en küçüğü G nin nilpotentlik sınıfıdır [19].

2.5.3.4. Tanım (Genelleştirilmiş Aşağı Merkez Serisi)

G bir grup olmak üzere $\gamma_1(G) = G$ olsun. Eğer α bir ordinal ise

$$\gamma_{\alpha+1}(G) = [\gamma_\alpha(G), G],$$

eğer α bir limit ordinal ise

$$\gamma_\alpha(G) = \bigcap_{\beta < \alpha} \gamma_\beta(G)$$

şeklinde tanımlansın.

¹Dikkat edilecek olursa $Z_1(G) = Z(G)$ dir.

$$\dots \leq \gamma_2(G) \leq \gamma_1(G)$$

serisine G nin genelleştirilmiş aşağı merkez serisi (transfinitely extended lower central series) denir. Eğer bir n doğal sayısı için $\gamma_{n+1}(G) = 1$ ise G nilpotenttir. Bu şekildeki doğal sayıların en küçüğü $n + 1$ ise G nin nilpotentlik sınıfı n dir [19].

Aşağıdaki lemmada [19] 12.1.6'dan yararlanılmıştır.

2.5.3.5. Lemma

G birimden farklı bir lokal nilpotent grup olsun. O zaman her $x \in G$ için $[x, G] \neq G$ dir.

İspat

Kabul edelim ki bir $1 \neq x \in G$ için $[x, G] = G$ olsun. O zaman $x \in [x, G]$ olur ve $x = \prod_{i=1}^k [x, y_i]^{\varepsilon_i}$ olacak şekilde $\varepsilon_i = \mp 1$ ve $y_1, y_2, \dots, y_k \in G$ vardır. $Y = \langle x, y_i : 1 \leq i \leq k \rangle$ ve $Z = \langle x \rangle^Y$ olsun. Her i için $x^{y_i} = \prod_{j=1}^k [x^{y_i}, y_j]^{\varepsilon_j} \in [Z, Y]$ olduğundan $Z \leq [Z, Y]$ dir. Karşıt olarak her i, j için $[x^{y_i}, y_j] = (x^{y_i})^{-1} x^{y_i y_j} \in Z$ olur ve böylece $Z = [Z, Y]$ dir. Böylece her m pozitif tamsayısı için $Z = [Z, {}_m Y]$ olur.¹ Y nilpotent olduğundan bir n pozitif tamsayısı için $Z = [Z, {}_n Y] \leq [Y, {}_n Y] = 1$ dir. Böylece $Z = 1$ ve $x = 1$ olur ki bu $G = 1$ olmasını gerektirir. Ancak bu hipotezle çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış olup iddia sağlanır. \square

2.5.3.6. Lemma

G bir mükemmel lokal nilpotent grup olsun. O zaman G nin sonlu üreteçli her F altgrubu ve her N öz altgrubu için $NF^G \neq G$ dir. Özel olarak G sonlu indeksli öz altgrubu olmayan sonsuz üreteçli bir gruptur.²

İspat

İlk önce G nin her x elemanının G deki normal kapanışı $\langle x \rangle^G$ nin G nin bir öz altgrubu olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bir $x \in G$ için $\langle x \rangle^G = \langle x \rangle [x, G] = G$ olsun. G mükemmel olduğundan $\langle x \rangle \neq G$ ve G sonsuz olduğundan Lemma 2.5.3.5'ten $N :=$

¹ $[Z, {}_m Y] = [Z, \underbrace{Y, Y, \dots, Y}_m]$

²Lokal nilpotent gruplar lokal çözülebilir olduğundan Lemma 2.5.3.6, Lemma 2.5.2.3'ten sağlanır. İspatları farklı olduğundan teze eklendi.

$[x, G] \neq G$ dir. Ancak G/N devirli olduğundan abelyandır ve $G' \leq N$ olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabul yanlış olup her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G \neq G$ dir.

$F_n = \langle x_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ G nin sonlu üreteçli bir altgrubu olmak üzere $F_n^G \neq G$ olduğunu göstermek için n üzerinden tümevarım uygulayalım. İlk paragraftan $n = 1$ için iddia sağlanır. $n \geq 2$ olmak üzere $F_{n-1}^G \neq G$ olsun. Kabul edelim ki $F_n^G = G$ olsun. O zaman

$$F_n^G = F_{n-1}^G \langle x_n \rangle^G = G$$

dir. İlk paragraftan ve tümevarım kabulünden $\langle x_n \rangle^G \neq G$ ve $L := F_{n-1}^G \neq G$ dir. Böylece $G = \langle x_n \rangle [x_n, G] L$ dir. Eğer $M := [x_n, G] L \neq G$ ise G/M devirli olduğundan $G = G' \leq M$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece $G = M$ ve $G/L = [x_n L, G/L]$ dir. Ancak G/L mükemmel lokal nilpotent grup olduğundan ilk paragrafta çelişir. O halde $F_n^G = G$ kabulü yanlış ve $F_n^G \neq G$ dir.

Kabul edelim ki G nin bir sonlu üreteçli F altgrubu ve bir H öz normal altgrubu için $G = HF^G$ olsun. O zaman $\bar{G} = G/H$ olmak üzere $\bar{G} = \bar{F}^{\bar{G}}$ dir. Fakat \bar{G} mükemmel lokal nilpotent grup olduğundan bu durum ilk paragrafta çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış olup G nin her sonlu üreteçli F altgrubu ve her H öz normal altgrubu için $G \neq HF^G$ dir.

Son olarak eğer $|G : K|$ sonlu olacak şekilde G nin bir K öz altgrubu varsa $C = \text{Core}_G(K) = \bigcap_{x \in G} K^x$ olmak üzere G/C sonludur. G lokal nilpotent olduğundan G/C nilpotent olur ki bu G nin mükemmel olmasıyla çelişir. Ayrıca sonlu üreteçli her $F \leq G$ için $F^G \neq G$ olduğundan $F \neq G$ olup G sonsuz üreteçlidir. \square

2.5.4. FC-gruplar

2.5.4.1. Tanım

G bir grup olsun. Bir $x \in G$ için x in G içindeki tüm eşleniklerinin kümesine x i içeren G nin eşlenik sınıfı (conjugacy class) denir. Eğer G nin tüm elemanlarının eşlenik sınıfları sonluyorsa G ye FC -grup denir. Bu tanıma denk olarak eğer her $x \in G$ için $|G : C_G(x)|$ sonluyorsa G grubu FC -gruptur [21].¹

¹ $X \subseteq G$ olmak üzere $C_G(X)$ e X in G içindeki merkezleyeni (centralizer) denir ve $C_G(X) = \{g \in G \mid \text{her } x \in X \text{ için } gx = xg\}$ şeklinde tanımlanır. $X = \{x\}$ şeklinde X in tek nokta kümesi olduğu durumda $C_G(x) = \{g \in G \mid gx = xg\}$ dir.

Aşağıdaki lemma [7]'deki Lemma 5.34'ün ispatının bir kısmının değiştirilmiş hâli ile verilmiştir.

2.5.4.2. Lemma

G bir FC -grup olsun. Eğer G abelyan-by-sonlu grupsa $G/Z(G)$ sonludur [7].

İspat

G grubunun bir L abelyan normal altgrubu vardır ki G/L sonludur. O zaman $X = \{x_i \mid x_i \in G, i = 1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere G nin sonlu üreteçli bir $F = \langle X \rangle$ altgrubu için $G = LF$ dir. $C = \bigcap_{i=1}^n C_G(x_i)$ olsun. G grubu FC -grup olduğundan her i için $|G : C_G(x_i)|$ sonlu olduğundan $|G : C|$ sonludur. Böylece G/L sonlu olduğundan $|G : C \cap L|$ de sonludur. $x \in C \cap L$ ve $g \in G$ olsun. $G = LF$ olduğundan $g = yz$ olacak şekilde $y \in L$ ve $z \in F$ vardır. O zaman $g^x = y^x z^x$ dir. $x, y \in L$ ve L abelyan olduğundan $y^x = y$ dir. $z \in F$ olduğundan $z = x_{j_1}^{\epsilon_{j_1}} x_{j_2}^{\epsilon_{j_2}} \dots x_{j_k}^{\epsilon_{j_k}}$ olacak şekilde $1 \leq s \leq k$ ve $1 \leq j_s \leq n$ olmak üzere $\epsilon_{j_s} = \mp 1$ ve $x_{j_s} \in X$ vardır. Dolayısıyla $z^x = (x_{j_1}^x)^{\epsilon_{j_1}} (x_{j_2}^x)^{\epsilon_{j_2}} \dots (x_{j_k}^x)^{\epsilon_{j_k}}$ dir. $x \in C$ olduğundan her j_s için $x_{j_s}^x = x_{j_s}$ olduğundan $z^x = z$ dir. O halde $g^x = g$ ve $C \cap L \leq Z(G)$ dir. Böylece $|G : Z(G)| \leq |G : C \cap L|$ olduğundan $G/Z(G)$ sonludur. \square

Aşağıdaki lemma [21]'deki Theorem 1.6'dan yararlanarak Theorem 1.2'nin farklı bir ispatı verilmiştir.

2.5.4.3. Lemma

G bir grup olsun. Eğer $G/Z(G)$ sonluysa G' sonludur [21].

İspat

İlk olarak G nin bir FC -grup olduğunu gösterelim. $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C_G(x)$ olduğu rahatlıkla gösterilebilir. Dolayısıyla her $x \in G$ için $Z(G) \leq C_G(x)$ dir. Böylece

$$|G : C_G(x)| \leq |G : Z(G)|$$

olduğundan hipotezden $|G : C_G(x)|$ sonludur. O hâlde G bir FC -gruptur.

Şimdi G' komütatör altgrubunun sonlu olduğunu gösterelim. $G/Z(G)$ sonlu olduğundan X, G nin sonlu bir altkümesi olmak üzere $G = Z(G)F$ olacak şekilde bir $\langle X \rangle = F \leq G$

vardır. O zaman Lemma 2.5.1.3(2)'den ve [19]'da 5.1.6(iii)'den

$$G' = [G, G] = [Z(G)F, Z(G)F] = [F, F] = [X, X]^F$$

dir. X sonlu olduğundan $[X, X]$ altgrubu komütatör tanımından sonlu üreteçlidir. $[X, X] \leq G'$ ve G' lokal sonlu olduğundan $[X, X]$ sonludur [21, 22]. Böylece G grubu FC -grup olduğundan $[X, X]^F$ sonlu ve dolayısıyla G' sonludur. \square

2.5.4.4. Lemma

Bir G grubunun G' komütatör altgrubu sonluysa G bir FC -gruptur [21].

İspat

$x \in G$ olsun. O zaman her $y \in G$ için $x^y = xx^{-1}y^{-1}xy = x[x, y]$ ve x^y eşleniği xG' kosetinin elemanıdır. Böylece $|xG'| = |G'| < \infty$ olduğundan iddia doğrudur. \square

2.5.5. Bölünebilir gruplar

2.5.5.1. Tanım

G bir abelyan grup olsun. Eğer her $g \in G$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $nx = g$ denkleminin G içinde bir çözümü varsa, yani $x = b$ olacak şekilde $b \in G$ varsa G grubuna bölünebilir (divisible) denir. Böylece G nin bölünebilir olması için gerek ve yeter şart her pozitif n tamsayısı için $G = nG = \{ng \mid g \in G\}$ olmasıdır [23].

2.5.5.2. Tanım

G bir abelyan grup olsun. Eğer her pozitif k tamsayısı için $p^k G = G$ olacak şekilde bir p asal sayısı varsa G ye p -bölünebilir denir [23].

2.5.5.3. Lemma

Bir abelyan G grubunun bölünebilir olması için gerek ve yeter şart her p asal sayısı için G nin p -bölünebilir olmasıdır [23].

İspat

Eğer G bölünebilir grupsa tanımdan p -bölünebilir olduğu görülür. Karşıt olarak her p asal sayısı için G p -bölünebilir olsun. Her n pozitif tamsayısı için $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ olacak şekilde p_i asal sayıları ve k_i pozitif tamsayıları vardır. Böylece her i için $p_i^{k_i} G = G$ olduğundan $nG = G$ dir. \square

2.5.5.4. Lemma

G bir abelyan grup olsun. G nin bölünebilir grup olması için gerek ve yeter şart G nin sonlu indeksli öz altgrubunun olmamasıdır [23].

İspat

G bir bölünebilir grup ve kabul edelim ki G nin sonlu indeksli bir K öz altgrubu olsun. O zaman $L = \text{Core}_G(K)$ olmak üzere $n = |G/L| < \infty$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı vardır. Dolayısıyla $G = nG \leq L$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabul yanlış olup G nin sonlu indeksli öz altgrubu yoktur.

Karşıt olarak G nin sonlu indeksli öz altgrubu olmasın. Kabul edelim ki G bölünebilir olmasın. O zaman Lemma 2.5.5.3'ten bir k pozitif tamsayısı için $p^k G \neq G$ olacak şekilde bir p asal sayısı vardır. Böylece $pG \neq G$ dir. G abelyan ve $p(G/pG) = pG$ olduğundan G/pG bir elemanter abelyan p -gruptur. $\overline{G} = G/pG$ olsun. [23]'teki Theorem 8.5'ten \overline{G} devirli p mertebeli altgrupların direkt çarpımı şeklinde yazılabilir. Direkt çarpımdan p mertebeli bir altgrup alınsın ve geri kalan direkt çarpım \overline{H} olsun. $\overline{H}, \overline{G}$ nin öz normal altgrubu olur. Böylece $\overline{G}/\overline{H}, p$ mertebeli sonlu grup olduğundan G nin sonlu indeksli bir altgrubu vardır ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabul yanlış olup G bir bölünebilir gruptur. \square

2.5.5.5. Lemma

Her öz altgrubu sonlu olan sonsuz bir abelyan grup bir p asal sayısı için yarıdevirli C_{p^∞} grubuna izomorftur [23].

İspat

Kabul edelim ki bir G grubu hipotezi sağlasın. Eğer $|G : K| < \infty$ olacak şekilde G nin bir K öz altgrubu varsa G sonlu olacağından bu hipotezle çelişir. Böylece G nin sonlu indeksli öz altgrubu olmadığından Lemma 2.5.5.4'ten G bölünebilir gruptur. [23]'teki Theorem 23.1'den G yarıdevirli grupların ve rasyonel sayıların direkt çarpımıdır. Eğer

direkt çarpım en az bir rasyonel sayılar grubu ya da en az iki yarıdevirli grup içerirse G nin sonsuz öz altgrupları vardır. Dolayısıyla hipotezden G nin her öz altgrubu sonlu olduğundan bir p asal sayısı için $G \cong C_{p^\infty}$ dur. \square

2.6. Minimal Non- FC -Gruplar

2.6.1. Tanım

\mathfrak{X} bir grup sınıfı ve G bir grup olsun. Eğer $G \notin \mathfrak{X}$ ve G nin her K öz altgrubu için $K \in \mathfrak{X}$ ise G grubuna minimal non- \mathfrak{X} -grup, kısaca $MN\mathfrak{X}$ -grup denir [20].

\mathfrak{X} grup sınıfı olarak FC -gruplar, çözülebilir gruplar, hipermerkez gruplar alınırsa $MN\mathfrak{X}$ -grup sırasıyla $MNFC$ -grup, MNS -grup ve $MNHC$ -grup olur.

2.6.2. Tanım

G bir grup olsun. Eğer G nin her K öz altgrubu için K' sonlu iken G' sonsuz ise G ye Miller-Moreno tipinden grup denir [24].

2.6.3. Lemma

Miller-Moreno tipinden bir grup $MNFC$ -gruptur.

İspat

Kabul edelim ki bir G grubu Miller-Moreno tipinden bir FC -grup olsun. O zaman $C := C_G(x) < G$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır. Aksi halde G abelyan ve dolayısıyla $G' = 1$ olur ki bu durum G nin Miller-Moreno tipinden olmasıyla çelişir. $K = \text{Core}_G(C)$ olsun. G grubu FC -grup olduğundan $|G : C|$ sonlu ve dolayısıyla $|G : K|$ sonludur. Böylece $|G/K' : K/K'| \leq |G : K|$ olduğundan $|G/K' : K/K'|$ sonludur. K/K' abelyan olduğundan G/K' abelyan-by-sonludur. Lemma 2.5.4.2 ve Lemma 2.5.4.3'ten G' sonlu olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabul yanlıştır ve G bir FC -grup değildir. Tanımdan G nin her K öz altgrubu için K' sonludur. Böylece Lemma 2.5.4.4'ten K bir FC -grup olup iddia sağlanır. \square

2.7. Grup Halkaları

2.7.1. Tanım

G bir grup ve R bir halka olmak üzere $R(G)$, $\sum_{g \in G} R$ (her $g \in G$ elemanına karşılık gelen R nin kopyalarının toplamı) toplamsal abelyan grubu olsun. $R(G)$ nin elemanlarını yeni bir formda gösterelim. $R(G)$ nin her $x = \{r_g\}_{g \in G}$ elemanı, $g_i \in G$ olmak üzere sonlu sayıda sıfırdan farklı $r_{g_1}, r_{g_2}, \dots, r_{g_n}$ koordinatlarına sahiptir. x elemanını sonlu toplam (formal sum) şeklinde

$$r_{g_1}g_1 + r_{g_2}g_2 + \dots + r_{g_n}g_n$$

veya $\sum_{i=1}^n r_{g_i}g_i$ şeklinde tanımlayalım. Buradan bazı r_{g_i} ler sıfır ve bazı g_i ler tekrar edebileceğinde $R(G)$ nin elemanları farklı formlarda yazılabilir; $r_1g_1 + 0g_2 = r_1g_1$ veya $r_1g_1 + s_1g_1 = (r_1 + s_1)g_1$. Bu notasyonda $R(G)$ grubu içindeki toplama işlemi

$$\sum_{i=1}^n r_{g_i}g_i + \sum_{i=1}^n s_{g_i}g_i = \sum_{i=1}^n (r_{g_i} + s_{g_i})g_i$$

şeklindedir öyle ki gerektiğinde sıfır katsayılı terimler eklenerek herhangi iki sonlu toplamın tam olarak aynı g_1, g_2, \dots, g_n indekslerine sahip olduğu her zaman kabul edilebilir. $R(G)$ içinde

$$\left(\sum_{i=1}^n r_i g_i\right) \left(\sum_{j=1}^m s_j h_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (r_i s_j) (g_i h_j)$$

çarpımını tanımlayalım. O zaman verilen işlemlerle $R(G)$ bir halkadır ve bu halkaya G nin R üzerindeki grup halkası denir. R ve G nin değişmeli olması için gerek ve yeter şart $R(G)$ nin değişmeli olmasıdır. Eğer R halkası 1_R birimine sahipse G nin birim elemanı e olmak üzere $R(G)$ nin birim elemanı $1_R e$ dir [30].

2.7.2. Tanım (K-Cebiri)

K birimli ve değişmeli bir halka ve A bir halka olsun. Eğer

1. $(A, +)$ birimli sol K -modül
2. Her $k \in K$ ve $a, b \in A$ için $k(ab) = (ka)b = a(kb)$

şartları sağlıyorsa A ya bir K -cebiri veya K üzerinde bir cebir denir. Bir cisim üzerindeki cebirler o cisim üzerinde bir vektör uzayıdır [30].

2.7.3. Tanım (Grup Cebiri)

G bir çarpımsal grup ve K birimli ve değişmeli bir halka olsun. O zaman yukarıda tanımlanan $K(G)$ grup halkası

$$k(\sum r_i g_i) = \sum (kr_i) g_i \quad (k, r \in K; g_i \in G)$$

ile bir K -modülü yapısında bir K -cebiridir. $K(G)$ ye G nin K üzerindeki grup cebiri denir [30].





3. *N*-BARELY TRANSITIVE GRUPLAR

3.1. Tanım

Bir sonsuz küme üzerine geçişli ve sadık şekilde etki eden bir grubun eğer her öz normal alt grubunun her yörüngesi sonluysa bu gruba *N*-barely transitive grup (*NBT*-grup) denir.

Tanımdan *NBT*-grup kavramı barely transitive grup (*BT*-grup) kavramının bir genellemesidir. Çünkü *BT*-grupların her öz alt grubunun her yörüngesi sonludur. Tanımdan görüleceği üzere *NBT*-grupların yapısı öz normal alt gruplarına bağlıdır.

3.1. *NBT*-Grupların Temel Özellikleri

BT-grupların [4]'teki Lemma 2.1 karakterizasyonunda öz alt gruplar yerine öz normal alt gruplar alındığında *NBT*-grupların bir karakterizasyonu elde edilir.

3.1.1. Lemma

Bir sonsuz G grubunun *NBT*-grup olması için gerek ve yeter şart $\bigcap_{g \in G} H^g = 1$ ve G nin her öz normal N alt grubu için $|N : N \cap H| < \infty$ olacak şekilde bir $H \leq G$ olmasıdır.

İspat

Kabul edelim ki G bir *NBT*-grup olsun. O zaman G bir sonsuz Ω kümesi üzerine sadık ve geçişli etki eder. G nin Ω üzerine etkisi $\Omega \times G \rightarrow \Omega$, $(\beta, g) \mapsto \beta^g$ olmak üzere $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega)$, $g \mapsto g^\rho$ permütasyon temsili vardır öyle ki etki yardımıyla $g^\rho : \Omega \rightarrow \Omega$, $\beta \mapsto \beta^g$ permütasyonu tanımlanır.

Bir $\alpha \in \Omega$ için $H = G_\alpha$ olsun. O zaman

$$\text{Core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} H^g = \bigcap_{g \in G} (G_\alpha)^g = \bigcap_{g \in G} G_{\alpha^g} = \bigcap_{\beta \in \Omega} G_\beta \quad (3.1)$$

ve

$$x \in \text{Ker}\rho \Leftrightarrow \forall \beta \in \Omega, \beta^x = \beta \Leftrightarrow x \in \bigcap_{\beta \in \Omega} G_\beta \quad (3.2)$$

sağlanır. G bir NBT -grup olduğundan ρ temsilinin çekirdeği birimdir. Dolayısıyla (3.1) ve (3.2)'den $\text{Ker}\rho = \text{Core}_G(H)$ olup $\bigcap_{g \in G} H^g = 1$ dir.

G nin her öz normal N altgrubu için nokta dengeleyen özelliğinden

$$|N : N \cap H| = |N : N \cap G_\alpha| = |N : N_\alpha| = |\alpha^N|$$

ve tanımdan N nin her yörüngesi sonlu olduğundan $|N : N \cap H| = |\alpha^N| < \infty$ dur.

Karşıt olarak $\bigcap_{x \in G} H^x = 1$ ve G nin her öz normal N altgrubu için $|N : N \cap H| < \infty$ olacak şekilde bir $H \leq G$ olsun. $\Omega = \{Hg \mid g \in G\}$, yani Ω kümesi H nin G içindeki tüm sağ kosetleri kümesi olsun. Ω sonlu olamaz. Aksi halde $|\Omega| = |G : H| < \infty$ ve $\text{Core}_G(H) = 1$ olduğundan $|G : H_G| = |G|$ sonlu olur ki bu G nin sonsuz olmasıyla çelişir. Böylece $\phi : G \rightarrow \text{Sym}(\Omega), x \mapsto x^\phi : Hg \rightarrow Hgx$ temsili tanımlıdır öyle ki $\Omega \times G \rightarrow \Omega, (Hg, x) \mapsto Hgx$, G nin Ω üzerine bir etkisidir. Her $Hg_1, Hg_2 \in \Omega$ için $Hg_2 = (Hg_1)^{g_1^{-1}g_2}$ olacak şekilde $g_1^{-1}g_2 \in G$ olduğundan G grubu Ω üzerine geçişli etki eder.

$$x \in \text{Ker}\phi \Leftrightarrow \forall Hg \in \Omega, Hgx = Hg \Leftrightarrow x \in \bigcap_{g \in G} H^g = \text{Core}_G(H)$$

oldüğünden $\text{Ker}\phi = \text{Core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} H^g = 1$ dir. Böylece G , Ω üzerine sadık etki eder. Son olarak G nin her öz normal N altgrubunun her yörüngesinin sonlu olduğunu gösterelim. İlk önce her $Hg \in \Omega$ için $G_{Hg} = H^g$ olduğunu gösterelim.

$$x \in G_{Hg} \Leftrightarrow Hgx = Hg \Leftrightarrow x \in H^g$$

dir. O hâlde

$$\begin{aligned} |(Hg)^N| &= |N : N \cap G_{Hg}| \\ &= |N : N \cap H^g| \\ &= |N^{g^{-1}} : N^{g^{-1}} \cap H| \\ &= |N : N \cap H| < \infty \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır. \square

Dikkat edilecek olursa tanımdan bir *NBT*-grup bir sonsuz küme üzerine geçişli etki ettiğinden her nokta dengeleyeni Lemma 3.1.1 yeter şartını sağlar. Böylece bir sonsuz grubun *NBT*-grup olup olmadığını anlamak için bir nokta dengeyeninin incelenmesi yeterlidir.

3.1.2. Lemma

G , sonsuz bir Ω kümesi üzerinde bir *NBT*-grup ve G nin bir nokta dengeleyeni H olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

1. G nin sonlu indeksli öz altgrubu yoktur.
2. G nin her M, N öz normal altgrubu için $MH \neq G \neq MN$ dir. Böylece $KH = G$ olacak şekilde her $K < G$ için $K^G = G$ dir.
3. G nin her öz normal altgrubu sonlu exponentli¹ residually² sonludur. Böylece G nin her öz normal altgrubu lokal sonludur. Ayrıca G nin her öz normal altgrubunun tüm yörüngelerinin kardinaliteleri aynıdır.
4. G abelyan ise bir p asal sayısı için $G \cong C_{p^\infty}$ dur.
5. G abelyan değilse $Z(G)$ sonlu ve $Z_2(G) = Z(G)$ dir, yani G nin hipermerkezi merkezine eşittir.
6. Eğer G nin sonlu normal N altgrubu varsa $N \leq Z(G)$.

İspat

(1) Kabul edelim ki $|G : K| < \infty$ olacak şekilde bir $K < G$ olsun. O zaman $|G : K_G| < \infty$ dir. G bir *NBT*-grup olduğundan Lemma 3.1.1'den $|K_G : K_G \cap H| < \infty$ dur. Böylece

$$|G : H| \leq |G : K_G| |K_G : K_G \cap H|$$

olduğundan $|G : H|$ sonludur. Ancak Lemma 3.1.1'in ispatından bu bir çelişkidir. Çünkü *NBT*-gruplar tanımdan ve $|\Omega| = |G : H| \leq |G|$ olmasından dolayı sonlu değildir. Böylece kabul yanlış olup G nin sonlu indeksli öz altgrubu yoktur.

¹Eğer bir grubun elemanlarının mertebeleri sonlu ve sınırlıysa gruba sonlu exponentli denir ve böylece elemanlarının mertebelerinin en küçük ortak katı grubun exponentidir [19].

² \mathfrak{X} bir grup teorik özellik olmak üzere bir G grubunun her x elemanı için $x \notin N_x$ ve $G/N_x \in \mathfrak{X}$ olacak şekilde bir $N_x < G$ varsa G ye residually \mathfrak{X} -grup denir [19].

(2) Tanımdan G nin her öz normal altgrubu geçişli olamaz. Dolayısıyla Lemma 2.3.9'dan G nin her öz normal N altgrubu için $NH \neq G$ dir, yani G nin her öz normal altgrubu ile her nokta dengeleyinin çarpımı G nin öz altgrubudur.

M ve N , G nin öz normal altgrupları olsun. Her $\beta \in \Omega$ için M , G nin öz normal altgrubu olduğundan her yörüngesi sonlu olup $\beta^M = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}$ dir. Böylece

$$\beta^{(MN)} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k\}^N = \bigcup_{i=1}^k \beta_i^N$$

dir. N , G nin öz normal altgrubu olduğundan ve her β_i^N sonlu olduğundan yukarıdaki birleşim sonlu olur. Böylece MN nin her yörüngesi sonlu ve G nin yörüngesi tek ve sonsuz olduğundan $MN \neq G$ dir.

Bir $K < G$ için kabul edelim ki $KH = G$ olsun. Bir önceki paragraftan $K^G < G$ ise $(K^G)H \neq G$ olduğundan $K^G = G$ dir.

(3) N , G nin bir öz normal altgrubu olsun. O zaman G , NBT -grup olduğundan $|N : N \cap H| < \infty$ ve $|N : (N \cap H)_N|$ sonludur. $M = (N \cap H)_N$ ve $|N : M| = k$ olsun. O zaman $N^k \leq M \leq H$, $N^k \triangleleft G$ ve $\text{Core}_G(H) = 1$ den H nin içinde G nin birimden farklı öz normal altgrubu olmadığından dolayı $N^k = 1$ dir. Böylece N sonlu exponentlidir.

Her $g \in G$ için

$$|N : N \cap H| = |N^g : (N \cap H)^g| = |N : N \cap H^g| < \infty$$

ve

$$\bigcap_{g \in G} N \cap H^g \leq N \cap \left(\bigcap_{g \in G} H^g \right) = 1$$

dir. Böylece her $x \in N$ için $x \notin N \cap H^y$ olacak şekilde bir $y \in G$ vardır öyle ki $|N : N \cap H^y|$ sonludur. Böylece $|N : (N \cap H^y)_N|$ sonludur. O halde her $x \in N$ için $x \notin (N \cap H^y)_N$ olacak şekilde bir $(N \cap H^y)_N \triangleleft N$ olduğundan N residually sonludur.

Zelmanov'un Restricted Burnside Problemi çözümünden sonlu exponentli residually sonlu gruplar lokal sonlu olduğundan G nin öz normal altgrupları lokal sonludur [12].

Kabul edelim ki M , G nin bir öz normal altgrubu ve $\gamma, \theta \in \Omega$ olsun. G geçişli olduğundan $\gamma = \theta^g$ olacak şekilde $g \in G$ var ve buradan $G_\gamma = (G_\theta)^g$ dir. O zaman

$$|\gamma^M| = |M : M \cap G_\gamma| = |M : M \cap (G_\theta)^g| = |M^{g^{-1}} : M^{g^{-1}} \cap G_\theta| = |M : M \cap G_\theta| = |\theta^M|$$

olduğundan G nin her öz normal altgrubunun her yörüngesinin kardinalitesi birbirine eşittir.

(4) G abelyan olsun. O zaman G nin H nokta dengeleyenleri Lemma 3.1.1'den $H_G = H = 1$ dir. Aynı lemmadan her $K < G$ için $|K : K \cap H| = |K : 1| = |K| < \infty$ dir. Böylece G abelyan grubunun her öz altgrubu sonlu olduğundan Lemma 2.5.5.5'ten G bir p asal sayısı için yarıdevirli p -grubuna izomorftur.

(5) G abelyan değilse $Z(G) < G$ dir. Böylece $|Z(G) : Z(G) \cap H| < \infty$ dir. Lemma 3.1.1'den $\text{Core}_G(H) = 1$ olduğundan H , G nin aşikar olmayan öz normal altgrubunu içermez. $Z(G) \cap H \triangleleft G$ olduğundan $Z(G) \cap H = 1$ dir. Böylece $|Z(G)|$ sonludur.

$Z_2(G)$, G nin artan merkez serisinin ikinci terimi olmak üzere $z \in Z_2(G)$ olsun. [4]'teki Lemma 2.13'ün ispatındaki gibi Grün's Lemmadan $G/C_G(z)$, $Z(G)$ nin sonlu otomorfizmalar grubunun bir altgrubuna izomorftur. (1)'den G nin sonlu indeksli öz altgrubu olmadığından $G = C_G(z)$ dir. Böylece $z \in Z(G)$ ve $Z_2(G) = Z(G)$ olur.

(6) Kabul edelim ki N , G nin bir sonlu normal altgrubu olsun. [19]'daki 1.6.13'ten $N_G(N)/C_G(N)$ bölüm grubu $\text{Aut}(N)$ otomorfizmalar grubunun bir altgrubuna izomorf ve hipotezden $N \triangleleft G$ olduğundan $N_G(N) = G$ dir. N sonlu olduğundan $|\text{Aut}(N)|$ sonludur. (1) den G nin sonlu indeksli öz altgrubu olmadığından $C_G(N) = G$ ve böylece $N \leq Z(G)$ dir. \square

3.1.3. Lemma

G bir NBT -grup ve G nin bir öz normal altgrubu N olsun. Eğer

$$\bigcap_{gN \in G/N} (HN/N)^{gN} = N$$

ise G/N bölüm grubu N nin tüm yörüngelerinin kümesi üzerinde bir NBT -gruptur.

İspat

G bir sonsuz Ω kümesi üzerinde NBT -grup olsun. $\alpha \in \Omega$ için $H = G_\alpha$ ve N nin $\beta \in \Omega$ elemanını içeren yörüngesi β^N olmak üzere G nin Ω üzerine etkisi $\Omega \times G \rightarrow \Omega$, $(\beta, g) \mapsto \beta^g$ şeklinde tanımlansın ve $\bar{\Omega} = \{\beta^N \mid \beta \in \Omega\}$ olsun. O zaman $\bar{\Omega} \times G/N \rightarrow \bar{\Omega}$, $(\beta^N, gN) \mapsto (\beta^N)^{gN} = (\beta^g)^N$, $(\beta \in \Omega)$ bağımsız G/N nin $\bar{\Omega}$ üzerine bir etkisidir. Böylece $gN \in G/N$ için $(gN)^\rho : \beta^N \mapsto (\beta^g)^N$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \rho : G/N &\rightarrow \text{Sym}(\bar{\Omega}) \\ gN &\mapsto (gN)^\rho \end{aligned}$$

temsili vardır. Ayrıca

$$xN \in \text{Ker}\rho \Leftrightarrow \forall \beta^N \in \bar{\Omega}, (\beta^N)^{(xN)^\rho} = \beta^N \Leftrightarrow xN \in \bigcap_{\beta^N \in \bar{\Omega}} (G/N)_{\beta^N}$$

olduğundan $\text{Ker}\rho = \bigcap_{\beta^N \in \bar{\Omega}} (G/N)_{\beta^N}$ dir.

$(G/N)_{\alpha^N} = HN/N$ olduğunu gösterelim. $gN \in (G/N)_{\alpha^N}$ olsun. O zaman $(\alpha^g)^N = \alpha^N$ dir. Böylece $\alpha^{gn} = \alpha$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır ve $gn \in H$ dir. Böylece $gN \in HN/N$ dir. Tersine $hN \in HN/N$ olsun. Böylece $h \in H$ olduğundan $(\alpha^N)^{hN} = (\alpha^h)^N = \alpha^N$ ve $hN \in (G/N)_{\alpha^N}$ dir.

G grubu Ω kümesi üzerinde geçişli olduğundan $\alpha^G = \Omega$ dir. Böylece her $\beta \in \Omega$ için $\beta = \alpha^g$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \text{Ker}\rho &= \bigcap_{\beta \in \Omega} (G/N)_{\beta^N} \\ &= \bigcap_{g \in G} (G/N)_{(\alpha^g)^N} \\ &= \bigcap_{g \in G} (G/N)_{(\alpha^N)^{gN}} \\ &= \bigcap_{gN \in G/N} ((G/N)_{\alpha^N})^{gN} = \bigcap_{gN} (HN/N)^{gN} = N \end{aligned}$$

olduğundan ρ bir monomorfizmadır. Böylece ρ bir sadık temsildir. Her $\beta^N, \theta^N \in \bar{\Omega}$ için G grubu Ω kümesi üzerinde geçişli olduğundan $\theta = \beta^g$ olacak şekilde $g \in G$ vardır. Böylece $\theta^N = (\beta^g)^N = (\beta^N)^{gN}$ olacak şekilde $gN \in G/N$ olduğundan $G/N, \bar{\Omega}$ üzerinde geçişli gruptur.

K/N , G/N nin bir öz normal altgrubu olsun. Her $\beta^N \in \bar{\Omega}$ için $\beta^N = (\alpha^N)^{g^N}$ olacak şekilde $g^N \in G/N$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|(\beta^N)^{(K/N)}| &= |K/N : (K/N)_{\beta^N}| \\
&= |K/N : (K/N) \cap (G/N)_{(\alpha^N)^{g^N}}| \\
&= |K/N : (K/N) \cap (HN/N)^{g^N}| \\
&= |(K/N)^{g^{-1N}} : (K/N)^{g^{-1N}} \cap HN/N| \\
&= |K/N : (K/N) \cap (HN/N)| \\
&\leq |K : K \cap HN| \\
&\leq |K : K \cap H| < \infty
\end{aligned}$$

dir. Böylece G/N nin her öz normal altgrubunun her yörüngesi sonlu olduğundan ispat tamamlanmış olur. \square

Sonuç

G , bir Ω kümesi üzerinde bir NBT -grup ve M , G nin bir maksimal normal altgrubu olsun. O zaman G/M bölüm grubu M nin tüm yörüngelerinin kümesi üzerinde bir NBT -gruptur.

İspat

M , G grubunun maksimal normal altgrubu olduğundan G/M basit gruptur. $\text{Core}_{G/M}(HM/M)$, HM/M nin içerdiği, G/M nin maksimal normal altgrubudur. Dolayısıyla

$$\text{Core}_{G/N}(HN/N) = \bigcap_{g^N \in G/N} (HN/N)^{g^N} = N$$

dir. Böylece Lemma 3.1.3'ten iddia sağlanır. \square

3.1.4. Lemma

G basit olmayan bir NBT -grup olsun. O zaman G ilkel olamaz. Böylece grubun nokta dengeleyeni maksimal değildir. Özel olarak G 2-geçişli olamaz.

İspat

Kabul edelim ki G grubu bir sonsuz Ω kümesi üzerinde ilkel NBT -grup ve N , G nin aşıkâr olmayan bir öz normal altgrubu olsun. Her $\beta \in \Omega$ için Lemma 2.3.12'den N nin β^N yörüngesi G için bir bloktur. Kabulden dolayı $\beta^N = \{\beta\}$ ya da $\beta^N = \Omega$ dır. İlk durum sağlanırsa $N \leq G_\beta$ dır. Ancak G nin nokta dengeleyenleri G nin öz normal altgrubunu içermediğinden bu bir çelişkidir.¹ İkinci durumda ise G nin öz normal N altgrubu geçişli ve Ω sonsuz olduğundan N nin yörüngesi sonsuzdur. Ancak bu G nin NBT -grup olmasıyla çelişir. Böylece kabul yanlıştır ve G bir ilkel gruptur.

Teorem 2.3.17'den nokta dengeleyeninin maksimal olması, grubun ilkel olmasını gerektirdiğinden grubun nokta dengeleyeni maksimal olamaz.²

Lemma 2.3.16'dan 2-geçişli gruplar ilkel olduğundan basit olmayan NBT -grup 2-geçişli olamaz. □

Sonuç

Mükemmel olmayan NBT -gruplar ve lokal çözülebilir NBT -gruplar ilkel değildir.

İspat

Mükemmel olmayan NBT - grubun komütatör altgrubu birimse grup yarıdevirli p - grubuna izomorf olduğundan grup basit değildir. Eğer komütatör altgrubu birimden farklıysa grubun basit olmadığı açıktır. Lokal çözülebilir gruplar Lemma 2.5.2.2'den basit olmadığından iddia Lemma 3.1.4'ten sağlanır. □

3.1.5. Lemma

Torsiyonsuz NBT -grup basittir.

İspat

Lemma 3.1.2(3)'ten bir NBT - grubun her öz normal altgrubu lokal sonludur. G torsiyonsuz olduğundan birimden farklı öz normal altgrubu olamaz. Dolayısıyla iddia sağlanır. □

¹ $\text{Core}_G(G_\beta) = 1$

²Alternatif olarak bir H nokta dengeleyeni maksimal ise Lemma 3.1.2(2)'den $N \leq H$ olur. Ancak $1 \neq N$ olduğundan bu durum Lemma 3.1.1 ile çelişir.

3.1.6. Lemma

G , lokal sonlu olmayan bir NBT -grup olsun. O zaman $G = G'$ ve G nin bir tek maksimal normal lokal sonlu altgrubu vardır [5].

İspat

Kabul edelim ki G nin tüm öz normal altgrupları tarafından üretilen altgrubu M olsun. Lemma 3.1.2(3)'ten M, G nin bir tek maksimal normal lokal sonlu altgrubudur.

Kabul edelim ki $G' \neq G$ olsun. Lemma 3.1.2(2)'den $MG' \neq G$ ve M, G nin maksimal normal altgrubu olduğundan $G' \leq M$ olup G/M basit abelyan gruptur. Dolayısıyla G/M sonlu olur ki bu Lemma 3.1.2(1) ile çelişir. Dolayısıyla kabul yanlıştır ve $G' = G$ dir. \square

3.1.7. Lemma

\mathfrak{X} bir grup sınıfı olmak üzere G bir NBT -grup ve H, G nin bir nokta dengeleyeni olsun. Eğer H nin bir sonlu indeksli \mathfrak{X} -altgrubu varsa G nin bir NBT -temsili vardır öyle ki G nin nokta dengeleyenleri \mathfrak{X} -altgruptur [5].

İspat

Bir $K \leq H$ için $K \in \mathfrak{X}$ ve $|H : K| < \infty$ olsun. Lemma 3.1.1'den $\bigcap_{x \in G} K^x \leq \bigcap_{x \in G} H^x = 1$ ve $\bigcap_{x \in G} K^x = 1$ dir. Ayrıca G nin her N öz normal altgrubu için

$$\begin{aligned} |N : N \cap K| &= |NK : K| \\ &\leq |NH : K| \\ &= |N : N \cap H| |H : K| < \infty. \end{aligned}$$

olduğundan Lemma 3.1.1'den iddia sağlanır. \square

3.1.8. Lemma

G bir NBT -grup ve G nin öz normal altgruplarının bir zinciri $N_1 < N_2 < \dots$ olmak

üzere

$$G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$$

olsun. Eğer G nin bir H nokta dengeleyeni çözülebilir ise G çözülebilirdir. Ayrıca $d(G) \leq d(H) + 1$ dir.

İspat

H, G nin çözülebilir bir nokta dengeleyeni olsun. O zaman Lemma 3.1.1'den her $i \in \mathbb{N}$ için $|N_i : N_i \cap H| < \infty$ dur. H nin çözülebilir uzunluğu $d(H) := t$ olsun. O zaman Khukro-Makarenko Teoreminden N_i nin $d(C_i) \leq t$ olacak şekilde sonlu indeksli karakteristik¹ C_i altgrubu vardır [25]. $\bar{G} = G/C_i$ olmak üzere $\bar{G}/C_{\bar{G}}(\bar{N}_i)$ bölüm grubu sonlu $Aut(\bar{N}_i)$ otomorfizmalar grubunun bir altgrubuna izomorftur [19]. O zaman Lemma 3.1.2(1)'den $\bar{N}_i \leq Z(\bar{G})$ ve \bar{N}_i abelyandır. Böylece $N'_i \leq C_i$ ve $d(N'_i) \leq t$ dir. Hipotezden $G' = \bigcup_{i=1}^{\infty} N'_i$ olduğundan $d(G') \leq t$ ve $d(G) \leq t + 1$ dir. Dolayısıyla G çözülebilirdir. \square

3.1.9. Lemma

G bir NBT - p -grup olsun. O zaman G nin her öz normal altgrubu nilpotenttir.

İspat

H ve N sırasıyla G nin bir nokta dengeleyeni ve bir öz normal altgrubu olsun. O zaman $|N : N \cap H| < \infty$ dir. $M = Core_G(N \cap H)$ olmak üzere N/M sonlu p -grup olduğundan nilpotenttir. Dolayısıyla N/M nin aşağı merkez serisinin bir n -yinci terimi $\gamma_n(N/M)$, M ye eşit olduğundan $\gamma_n(N) \leq M$ dir. $\gamma_n(N)$, N nin fully-invariant altgrubu ve fully-invariant grup karakteristik olduğundan $\gamma_n(N) \triangleleft G$ dir. Ancak $Core_G(H) = 1$ ve $\gamma_n(N) \leq N \cap H$ olduğundan $\gamma_n(N) = 1$ dir. Böylece N nilpotenttir. \square

3.1.10. Lemma

Bir NBT -grubun sayılabilir her öz normal altgrubu, her yörüngesi sonlu olan bir

¹Bir G grubunun bir H altgrubu için eğer her $\alpha \in Aut(G)$ için $H^\alpha \leq H$ ise H ya G içinde karakteristik (characteristic) denir. Dikkat edilecek olursa $\alpha \in Aut(G)$ ise $\alpha^{-1} \in Aut(G)$ dir. Böylece $H^{\alpha^{-1}} \leq H$ olduğundan $H \leq H^\alpha$ dir. Böylece H, G de karakteristik ise her $\alpha \in Aut(G)$ için $H^\alpha = H$ dir.

yansonlumsu permütasyon grubuna izomorftur.

İspat

Lemma 3.1.2(3)'ten bir *NBT*- grubun her öz normal altgrubu sonlu exponentli residually sonludur. Böylece iddia [14]'teki Lemma 4.1'den sağlanır. \square

BT-gruplarda sağlanan Lemma 3.1.2'deki 1., 4., 5. ve 6. özelliklerinin, Lemma 3.1.3, Lemma 3.1.4, Lemma 3.1.5, Lemma 3.1.6, Lemma 3.1.7 ve Lemma 3.1.9'un *NBT*-gruplarda da sağlandığı gösterilmiştir [4, 5, 7].

3.2. *NCBT*-Gruplar

NBT-grupların daha güçlü bir formunu tanımlayalım.

3.2.1. Tanım

G bir sonsuz küme üzerinde geçişli olan bir permütasyon grubu olsun. Eğer $N\langle x \rangle \neq G$ olacak şekilde her $x \in G$ ve G nin her öz normal N altgrubu için $N\langle x \rangle$ alt grubunun her yörüngesi sonlu ise G grubuna *NC*-barely transitive permütasyon grubu ya da kısaca *NCBT*-grup denir.

Başka bir ifadeyle bir sonsuz küme üzerine geçişli ve sadık şekilde etki eden bir grubun devirli altgruplarıyla öz normal altgruplarının gruptan farklı olacak şekilde her çarpımının¹ her yörüngesi sonluysa bu gruba *NC*-barely transitive grup (*NCBT*-grup) denir.

Yukarıda tanımlanan grup için Lemma 3.1.1 ile bu grubun bir karakterizasyonu verilecektir.

3.2.2. Lemma

Bir sonsuz G grubunun *NCBT*-grup olması için gerek ve yeter şart $\text{Core}_G(H) = 1$ ve $G \neq N\langle x \rangle$ olacak şekilde her öz normal N altgrubu ve her $x \in G$ için $|N\langle x \rangle : (N\langle x \rangle) \cap H| < \infty$ olacak şekilde bir $H \leq G$ olmasıdır.

¹ $N\langle x \rangle = \langle N, x \rangle$ olduğundan çarpım yerine grubun öz normal altgruplarıyla her elemanın gruptan farklı olacak şekilde ürettiği altgrup da alınabilir.

İspat

Lemma 3.1.1'in ispatında her öz normal N altgrubu yerine $G \neq N\langle x \rangle$ olacak şekildeki $x \in G$ için $N\langle x \rangle$ ile değiştirildiğinde iddianın gerek şartı sağlanır.

Karşıt olarak $\text{Core}_G(H) = 1$ ve $G \neq N\langle x \rangle$ olacak şekildeki her N öz normal altgrubu ve her $x \in G$ için $|N\langle x \rangle : (N\langle x \rangle) \cap H| < \infty$ olacak şekilde bir $H \leq G$ olsun. Eğer $x \in G$ için $G \neq N\langle x \rangle$ normalse N yerine $N\langle x \rangle$ alınırsa Lemma 3.1.1'in ispatıyla aynıdır. Ω , Lemma 3.1.1'deki şekilde tanımlansın. $N\langle x \rangle$, G nin normal altgrubu değilse o zaman $Hg \in \Omega$ elemanının $N\langle x \rangle$ içindeki yörüngesinin sonlu olduğunu göstereyim. $\langle x \rangle \cong \langle x^{g^{-1}} \rangle$ ve $G \neq N\langle x \rangle$ olduğundan $G \neq N\langle x^{g^{-1}} \rangle$ dir. Böylece hipotezden

$$\begin{aligned} |(Hg)^{N\langle x \rangle}| &= |N\langle x \rangle : (N\langle x \rangle) \cap G_{Hg}| \\ &= |N\langle x \rangle : (N\langle x \rangle) \cap H^g| \\ &= |(N\langle x \rangle)^{g^{-1}} : (N\langle x \rangle)^{g^{-1}} \cap H| \\ &= |N\langle x^{g^{-1}} \rangle : (N\langle x^{g^{-1}} \rangle) \cap H| < \infty \end{aligned}$$

sağlanır. □

Böylece her $NCBT$ -grup bir NBT -gruptur. Ayrıca öz normal altgrup olarak birim grup alınırsa her $x \in G$ için $|\langle x \rangle : \langle x \rangle \cap H|$ sonludur ve buradan x ya sonlu mertebelidir ya da $\langle x \rangle^n \in H$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

3.2.1. NBT -grupların $NCBT$ -grup olan alt sınıfları

3.2.1.1. Lemma

Periyodik NBT -gruplar, sonsuz NBT -gruplar, mükemmel olmayan NBT -gruplar ve lokal çözülebilir NBT -gruplar $NCBT$ -gruptur.

İspat

Kabul edelim ki G bir periyodik NBT -grup ve H , G nin bir nokta dengeleyeni olsun. O zaman Lemma 3.1.2(1)'den her $x \in G$ ve G nin her öz normal N altgrubu için $\langle x \rangle N \neq G$ dir.

$$|\langle x \rangle N : N \cap H| = |\langle x \rangle N : N| |N : N \cap H| < \infty$$

olduğundan $|\langle x \rangle N : (\langle x \rangle N) \cap H| < \infty$ olup G bir $NCBT$ -gruptur.

Sonlumsu permütasyon grupları tanımdan lokal sonludur. Ayrıca Lemma 3.2.3.2(3), Lemma 3.2.3.1, Lemma 3.2.4.1 ve Lemma 3.2.2.3'ten mükemmel olmayan veya lokal çözülebilir olan NBT -gruplar lokal sonludur. O halde ilk paragraftan sonlumsu NBT -gruplar, mükemmel olmayan NBT -gruplar ve lokal çözülebilir NBT -gruplar birer $NCBT$ -gruptur. \square

3.2.2. Epimorfik görüntüleri basit olmayan NBT -gruplar

Bu kısımda aşıkâr olmayan¹ tüm epimorfik görüntüleri basit olmayan NBT -gruplar incelenecektir. Bu şart altındaki NBT -gruplar karakterize edilecektir.

3.2.2.1. Lemma

G bir NBT -grup olsun. O zaman G nin aşıkâr olmayan her epimorfik görüntüsünün basit olmaması için gerek ve yeter şart her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G \neq G$ olmasıdır.

İspat

Kabul edelim ki G nin aşıkâr olmayan her epimorfik görüntüsü basit olmasın ve bir $x \in G$ için $\langle x \rangle^G = G$ olsun. Böylece G nin her öz normal alt grubu x elemanını içermez. Dolayısıyla G nin bir maksimal normal alt grubu olduğundan G nin aşıkâr olmayan bir basit epimorfik görüntüsü vardır ki bu bir çelişkidir.

Karşıt olarak her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G \neq G$ olsun. Kabul edelim ki G nin bir maksimal normal N alt grubu olsun. O zaman G/N basit olduğundan bir $x \in G \setminus N$ için $N\langle x \rangle^G = G$ dir. Fakat Lemma 3.1.2(2)'den bu bir çelişkidir. Dolayısıyla iddia sağlanır. \square

3.2.2.2. Lemma

G bir NBT -grup olmak üzere her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G \neq G$ olması için gerek ve yeter şart G nin sonlu üreteçli her F alt grubu için $F^G \neq G$ olmasıdır.

İspat

¹Gruptan grubun birimine tanımlı sıfır homomorfizması bir epimorfizma olduğundan birim eleman tarafından üretilen alt grup grubun aşıkâr epimorfik görüntüsüdür.

İspatın yeter şartı açıktır. $F = \langle g_1, g_2, \dots, g_j \rangle$ G nin bir sonlu üreteçli altgrubu olsun. O zaman

$$F^G = \langle g_1 \rangle^G \langle g_2 \rangle^G \dots \langle g_j \rangle^G$$

olduğundan Lemma 3.1.2(2)'den $F^G \neq G$ dir. \square

3.2.2.3. Lemma

Bir G NBT -grubunun aşikar olmayan her epimorfik görüntüsü basit olmasın ve H , G nin bir nokta dengeleyeni olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

1. G lokal sonludur.
2. G öz normal altgruplarının birleşimidir.
3. G bir $NCBT$ -gruptur.
4. G nin sonlu üreteçli her F altgrubu için $F^G H \neq G$ dir.

İspat

(1) Lemma 3.1.2(3) ve Lemma 3.2.2.2'den iddia sağlanır.

(2) Hipotezden G basit olmadığından birimden farklı bir öz normal N_1 altgrubu vardır. O zaman G/N_1 birimden farklıdır. Hipotezden G/N_1 basit olmadığından $N_1 \leq N_2$ olacak şekilde G nin bir N_2 öz normal altgrubu vardır öyle ki $(G/N_1)/(N_2/N_1) \cong G/N_2$ birimden farklıdır. Bu şekilde devam edilirse bir α limit ordinali için

$$G = \bigcup_{\beta < \alpha} N_\beta$$

olacak şekilde öz normal altgrupların artan bir zinciri $\{N_\beta : \beta < \alpha\}$ vardır.

(3) Lemma 3.1.2(2) ve Lemma 3.2.2.1'den her $x \in G$ ve G nin her öz normal N altgrubu için $\langle x \rangle^G N \neq G$ sağlanır. O zaman $|\langle x \rangle N : (\langle x \rangle N) \cap H| \leq |\langle x \rangle^G N : (\langle x \rangle^G N) \cap H| < \infty$ olduğundan iddia doğrudur.¹

(4) Lemma 3.1.2(2) ve Lemma 3.2.2.2'den iddia doğrudur. \square

¹Alternatif olarak (1) ve Lemma 3.2.1.1'den iddia sağlanır.

3.2.3. Mükemmel olmayan *NBT*-gruplar

Bu kısımda *NBT*-grupların mükemmel olmadığı durumda sağladığı özellikler incelenecektir.

3.2.3.1. Lemma

Mükemmel olmayan *NBT*-grupların aşık olmayan her epimorfik görüntüsü basit değildir.

İspat

G bir *NBT*-grup ve N , G nin bir öz normal altgrubu olsun. $(G/N)' = G'N/N$ olduğundan G/N de mükemmel değildir. Aksi hâlde $G'N/N = G/N$ olacağından $G = G'N$ olur ki bu Lemma 3.1.2(2) ile çelişir. Dolayısıyla G nin her G/N epimorfik görüntüsü mükemmel olmadığından basit değildir. \square

3.2.3.2. Lemma

G bir mükemmel olmayan *NBT*-grup ve H , G nin bir nokta dengeleyeni olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

1. H yı kapsayan G nin maksimal ya da maksimal normal altgrubu yoktur [4].
2. H , G nin bir inert altgrubudur, yani her $g \in G$ için $|H : H \cap H^g| < \infty$ dir.
3. G lokal sonludur [12].
4. $G/G' \cong C_{p^\infty}$ [3].
5. $|G : H|$ sayılabilirdir.
6. Bir p asal sayısı için G nin $Q^G = G$ olacak şekilde bir Q p -altgrubu vardır.
7. Her $x \in G$ için $\langle x \rangle^G \neq G$ dir.

İspat

(1) Kabul edelim ki G nin H yı kapsayan bir M maksimal altgrubu olsun. O zaman ya $MG' = G$ ya da $MG' \neq G$ dir. İlk durumda

$$|G : M| = |MG' : M| = |G' : G' \cap M| \leq |G' : G' \cap H| < \infty$$

olduğundan bu Lemma 3.1.2(1) ile çelişir. İkinci durumda ise M maksimal altgrup

olduğundan $G' \leq M$ dir. Böylece G/M sonlu olur ki bu durum tekrar Lemma 3.1.2(1) ile çelişir.

M nin maksimal normal altgrup olduğu durumda Lemma 3.1.2(2)'den sadece ikinci durum sağlanır ancak yukarıdaki şekilde tekrar çelişkiye düşülür. Dolayısıyla kabul yanlış olup H yı kapsayan G nin maksimal ya da maksimal normal altgrubu yoktur.

(2) Lemma 3.1.2(2)'den $|HG' : HG' \cap H| < \infty$ olup her $g \in G$ için $|HG' : HG' \cap H^g| < \infty$ dir. O hâlde her $g \in G$ için

$$|H : H \cap H^g| \leq |HG' : HG' \cap H^g| < \infty$$

olduğundan istenilen elde edilir.

(3) $L = HG'$ olmak üzere G/L bir sonsuz abelyan gruptur. K/L , G/L nin bir öz altgrubu olsun. O zaman

$$|K : L| \leq |K : H| < \infty$$

olup Lemma 2.5.5.5'ten $G/L \cong C_{p^\infty}$ dir. Böylece G/L lokal sonludur. Ayrıca Lemma 3.1.2(3)'ten L de lokal sonludur. O hâlde lokal sonlu gruplar genişlemeye göre kapalı olduğundan G lokal sonludur [19].¹

(4) G/G' abelyan bölüm grubunun Lemma 3.1.2(1)'den sonlu indeksli altgrubu olmadığından Lemma 2.5.5.4'ten G/G' bölünebilir gruptur. Böylece (3)'ten G lokal sonlu olduğundan G/G' bölüm grubu prüfer gruba izomorf olan altgrupların direkt çarpımı şeklinde yazılabilir [19]. Ancak Lemma 3.1.2(2)'den G iki öz normal altgrubun çarpımı şeklinde yazılamadığından bir p asal sayısı için $G/G' \cong C_{p^\infty}$ dur.

(5) Lemma 3.1.1'den $|G' : G' \cap H|$ sonlu ve (4)'ten G/G' sayılabilirdir. Böylece $|G : G' \cap H|$ sayılabilirdir. O hâlde

$$|G : H| \leq |G : G' \cap H|$$

olduğundan iddia sağlanır.

¹Alternatif olarak Lemma 3.2.2.3 ve Lemma 3.2.3.1'den iddia sağlanır.

(6) (4)'ten G/G' bir lokal sonlu p -grubu olduğundan [16]'daki Lemma 1.D.4'ten $G = QG'$ olacak şekilde G nin bir Q p -altgrubu vardır Böylece iddia Lemma 3.1.2(2)'den sağlanır.

(7) İddia Lemma 3.2.2.1 ve Lemma 3.2.3.1'den sağlanır. \square

Bir mükemmel olmayan G NBT -grubu bir Ω kümesi üzerine etki ediyorsa H , G nin bir nokta dengeleyeni olmak üzere $|\Omega| = |G : H|$ olduğundan Lemma 3.2.3.2(5)'ten Ω sayılabilir. Böylece mükemmel olmayan NBT -grupların daima sayılabilir kümeler üzerine etki ettiklerini söyleyebiliriz.

3.2.3.3. Lemma

G mükemmel olmayan bir NBT -grup olsun. O zaman G nin

$$N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \cdots \triangleleft N_i \triangleleft N_{i+1} \triangleleft \cdots$$

öz normal altgruplarının bir zinciri vardır öyle ki $H < N_0$, $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$ ve G nin her öz normal N altgrubu için $N \leq N_r$ olacak şekilde bir r pozitif tamsayısı vardır (bkz. [4] Lemma 2.10).

İspat

$N_0 = HG'$ olsun. O zaman $H < N_0$ ve $N_0 \triangleleft G$ dir öyle ki Lemma 3.1.1'den $|N_0 : H|$ sonludur. Lemma 3.2.3.2(1)'den N_0 , G nin maksimal normal altgrubu olamaz. Böylece G nin

$$N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \cdots \triangleleft N_i \triangleleft N_{i+1} \triangleleft \cdots$$

öz normal altgruplarının bir zincirini elde ederiz öyle ki her $i \in \mathbb{N}$ için $|N_i : H| < \infty$ ve $|N_0 : H| < |N_1 : H| < \cdots$ sağlanır. $N = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} N_i$ olsun. O zaman $N \triangleleft G$ ve $|N : H|$ sonsuzdur. Dolayısıyla Lemma 3.1.1'den $N = G$ dir.

M , G nin bir öz normal altgrubu olsun. O zaman Lemma 3.1.1'den $|M : M \cap H|$ sonludur. T , $M \cap H$ nın M deki koset temsilcilerinin¹ bir tam kümesi olsun. O zaman $M = \langle T, M \cap H \rangle$ ve bir $r \in \mathbb{N}$ için $T \subseteq N_r$ dir. O hâlde $H \leq N_r$ olduğundan $M \leq N_r$ dir. \square

¹ $t_1 \neq t_2$ olacak şekilde her $t_1, t_2 \in T$ için $t_1 M \cap H \neq t_2 M \cap H$ dir.

Sonuç

G mükemmel olmayan bir NBT -grup olsun. O zaman G sonsuz üreteçlidir.

İspat

Lemma 3.2.3.2(3) veya Lemma 3.2.3.3'ten iddia sağlanır. \square

Sonuç

G mükemmel olmayan bir NBT - p -grup olsun. O zaman G çözülebilirdir.

İspat

Lemma 3.1.9'dan G' nilpotenttir. Böylece G' çözülebilir olup $d(G) \leq d(G') + 1$ olduğundan iddia sağlanır. \square

Sonuç

G mükemmel olmayan bir NBT -grup olsun. Eğer G nin bir nokta dengeleyeni çözülebilir ise G çözülebilirdir.

İspat

İddia Theorem 3.1.8 ve Lemma 3.2.3.3'ten sağlanır. \square

3.2.3.4. Teorem

G mükemmel olmayan bir NBT -grup olsun. O zaman G nin BT -grup olması için gerek ve yeter şart herhangi iki öz alt grubunun bir öz alt grup üretmesidir.

İspat

Kabul edelim ki G nin herhangi iki öz alt grubu bir öz alt grup üretsin. H ve K sırasıyla, G nin bir nokta dengeleyeni ve bir öz alt grubu olsun. O zaman hipotezden $KG' \neq G$

dir. Böylece

$$|K : K \cap H| \leq |KG' : KG' \cap H| < \infty$$

ve buradan $|K : K \cap H| < \infty$ elde edilir. O hâlde [4]'teki Lemma 2.1'den G bir BT -gruptur.

Gerek şart Lemma 3.2.3.2(3)'ten G lokal sonlu olduğundan [4]'teki Lemma 2.10'dan sağlanır. \square

3.2.4. Lokal çözülebilir NBT -gruplar

3.2.4.1. Lemma

Bir lokal çözülebilir NBT -grubun aşikar olmayan her epimorfik görüntüsü basit değildir.

İspat

G bir lokal çözülebilir NBT -grup olsun. Lemma 2.5.2.2'den G basit değildir. Kabul edelim ki N , G nin birimden farklı bir öz normal alt grubu olsun. O zaman Lemma 3.1.2(1)'den G/N sonsuz lokal çözülebilir gruptur. Böylece Lemma 2.5.2.2'den G/N basit olmadığından iddia sağlanır. \square

3.2.4.2. Lemma

G bir sayılabilir lokal çözülebilir NBT -grup olsun. Eğer G nin bir H nokta dengeleyeni çözülebilirse G çözülebilirdir.

İspat

Lemma 3.2.2.3(2)'den $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ olacak şekilde G , öz normal N_i alt gruplarının birleşimi şeklinde yazılabilir. Gerçekten bir $x_1 \in G$ için $N_1 = \langle x_1 \rangle^G$ olsun. Lemma 3.2.2.3(4)'ten N_1 , G nin öz normal alt grubudur. O zaman bir $x_2 \in G \setminus N_1$ vardır. $N_2 = \langle x_1, x_2 \rangle^G$ olarak alınırsa benzer şekilde $N_2 \neq G$ olur. Bu şekilde devam edilirse G nin $N_1 < N_2 < \dots$ öz normal alt gruplarının bir zinciri elde edilir öyle ki $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$ dir. O hâlde Lemma 3.1.8'den iddia sağlanır. \square

Lemma 3.2.4.2'den mükemmel, sayılabilir ve lokal çözülebilir olan bir NBT -grubun çözülebilir nokta dengeleyeni yoktur.

Aşağıda verilen sonuç lokal sonlu BT -gruplar için [14]'teki Theorem 1.5'in genellemesidir.

3.2.4.3. Teorem

G bir lokal çözülebilir yansonlumsu NBT -grup olsun. O zaman bir p asal sayısı için $G \cong C_{p^\infty}$ dur.

İspat

Kabul edelim ki N , G nin bir sonsuz öz normal altgrubu olsun. G , NBT -grup olduğundan tanımdan N nin tüm yörüngeleri sonludur ve G bir sonsuz Ω kümesi üzerine etki ettiğinden bu etki N ye kısıtlanırsa N de Ω üzerine etki eder ve Ω sonsuz olduğundan N nin sonsuz sayıda yörüngesi vardır.¹ N yansonlumsu permütasyon grubunun Lemma 3.1.2(3)'ten sonsuz sayıda aynı kardinaliteli yörüngesi olduğundan [17]'deki Proposition 2.4'ten N sonlu olur ki bu kabul ile çelişir. Dolayısıyla G nin öz normal altgrupları sonludur. Lemma 3.1.2(6)'dan G nin öz normal altgrupları abelyan ve Lemma 3.2.2.3(4)'ten her $x, y \in G$ için $\langle x, y \rangle^G \neq G$ olduğundan G abelyandır. Böylece Lemma 3.1.2(4)'ten iddia sağlanır. \square

3.2.5. Locally nilpotent NBT -gruplar

Sonuç

Bir NBT -grubun nilpotent olması için gerek ve yeter şart abelyan olmasıdır.

İspat

Lemma 3.1.2(5)'ten nilpotent olan bir NBT -grup abelyan değilse hipermerkezine eşit ve hipermerkezi, sonlu merkezine eşit olacağından NBT -grup sonlu olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla nilpotent NBT -grup abelyandır. Karşit olarak abelyan grup nilpotent olduğundan iddia sağlanır. \square

Lokal sonlu bir BT -grubun bir p asal sayısı için p -grubu olduğu biliniyor [8]. Aşağıdaki

¹Lemma 2.3.5'ten N nin tüm yörüngelerinin kümesi Ω nın bir parçasıdır.

lemmada gösterildiği üzere lokal nilpotent *NBT*-gruplar da aynı özelliği sağlar.

Hatırlatmak adına bir grubun normal nilpotent altgrupları tarafından üretilen altgruba o grubun Fitting altgrubu denir.

3.2.5.1. Lemma

G bir lokal nilpotent *NBT*-grup olsun. O zaman p bir asal sayı olmak üzere G bir lokal sonlu Fitting p -gruptur.

İspat

Lemma 3.2.2.3(1) ve Lemma 3.2.4.1'den G lokal sonludur. Böylece G , Sylow- p altgruplarının direkt çarpımıdır, yani S_p , G nin bir tek normal Sylow p -altgrubu¹ olmak üzere

$$G = \prod_{p \in \pi(G)} S_p$$

eşitliği sağlanır [19]. Lemma 3.1.2(2)'den bir p asal sayısı için $G = S_p$ olup G bir p -grubudur. Lemma 3.1.9 ve Lemma 3.2.2.3(4)'ten G nin her elemanı bir normal nilpotent alt grubun elemanı olduğundan G bir Fitting gruptur. Böylece iddia sağlanır. \square

Aşağıdaki teorem, [26]'daki Theorem 10'un *NBT*-gruplar için bir genellemesidir.

3.2.5.2. Teorem

G bir mükemmel lokal nilpotent *NBT*-grup olsun. O zaman G nin sonlu üreteçli her U altgrubu ve her çözülebilir L altgrubu için

$$\bigcap_{y \in G \setminus L} \langle U, y \rangle = U$$

eşitliği sağlanır.

İspat

¹ q bir asal sayı olmak üzere bir grubun maksimal her q -alt grubuna Sylow q -altgrubu denir.

Lemma 3.1.9, Lemma 3.2.5.1 ve [26]'daki Teorem 10'dan iddia sağlanır. (bkz. [27]'de Lemma 2.1) \square

3.3. *NCBT*-Grup Örnekleri

Bu kısımda bu tezin hazırlanmasında motivasyon kaynağı olan *BT*-grup olmayan *NBT*-grup örneklerinin varlığı sorusu cevaplanmıştır: Mükemmel ve mükemmel olmayan durumlara *BT*-grup olmayan *NBT*-grup örnekleri vardır.

3.3.1. Mükemmel olmayan *NBT*-grup örnekleri

Eğer bir grubun altgruplarından oluşan boştan farklı her kümenin bir minimal elemanı varsa bu gruba minimal şartını sağlar denir ve bu şart min ile gösterilir [19]. Eğer bir grubun normal altgruplarından oluşan boştan farklı her kümenin bir minimal elemanı varsa bu gruba normal altgrupları üzerinde minimal şartını sağlar denir ve min- n ile gösterilir [19]. Bu kısımda gösterileceği üzere min- n şartını sağlayan Čarin'in inşa ettiği gruplar *BT*-grup olmayan lokal sonlu, metabelyan *NBT*-grup örnekleridir [28]. Bir grubun bir tek minimal normal alt grubu varsa gruba monolitik, tek minimal normal alt grubuna monolit denir. Bu hatırlatmadan sonra [29]'da Example 1'deki şekilde Čarin (p, q) -gruplarının inşâsını verdikten sonra bu grupların *NBT*-grup olduğunu gösterelim.

İlk önce bazı hatırlatmaları yapalım. Bir cismin polinomlar halkasında sabit olmayan her polinomun cisim içinde bir kökü varsa bu cisme cebirsel kapalı denir [30]. F , bir K cisminin bir cisim genişlemesi olmak üzere eğer F , K üzerinde cebirsel ve F cebirsel kapalıysa (veya [30]'daki Theorem 3.4'ten F , $K[x]$ içindeki tüm indirgenmez polinomlar kümesinin K üzerindeki parçalanma cismi¹ ise) F ye K nın cebirsel kapanışı denir [30]. [30]'da Theorem 3.6'dan her cismin bir cebirsel kapanışı vardır. p bir asal sayı olmak üzere $GF(p)$ Galios cismi mertebesi p olan cisimdir ve p modülüne göre kalanlar cismi Z_p ye izomorftur [30].

Örnek

p ve q birbirinden farklı asal sayılar olsun. K cismi $GF(p)$ Galios cisminin cebirsel

¹ F bir cisim, E , F nin bir cisim genişlemesi ve S , $F[x]$ deki pozitif dereceli polinomların bir kümesi olsun. Eğer S deki her polinom $E[x]$ içinde parçalanır, yani her $f \in F[x]$ için $f = u_0(x - u_1)(x - u_2) \dots (x - u_n)$ olacak şekilde $u_i \in E$ varsa ve E , F ye S deki tüm polinomların köklerinin katılmasıyla elde edilen cisim genişlemesi ise E ye polinomların kümesi S nin F üzerindeki parçalanma cismi denir [30].

kapanışı olsun. O zaman K nın karakteristiği p dir.¹ K nın çarpımsal grubu K^* olmak üzere [31]'deki Theorem 77.1'den K^* ın $X \cong C_{q^\infty}$ olacak şekilde bir X altgrubu vardır [20]. F , K nın X tarafından üretilen altcismi olsun. F nin toplamsal grubu A olmak üzere A bir sonsuz elemanlı abelyan p -grubudur. Böylece her $a \in A$ ve her $x \in X$ için $a^x = ax$ fonksiyonu X in A üzerine grup otomorfizması şeklinde bir etkisini tanımlar öyle ki a ile x in çarpımı F cismindeki çarpımdır. Böylece $G := A \rtimes X$ yarıdirekt çarpımı tanımlıdır. Bu tip gruplar *Čarin (p, q) -grupları* (veya (p, q^∞) -grupları) olarak biliniyor. G nin $B = \{(a, 1) \mid a \in A\}$ ve $Y = \{(0, x) \mid x \in X\}$ altgrupları için $A \cong B$ ve $X \cong Y$ dir ve G , B nin Y ile parçalanma genişlemesidir, yani $G = BY$, $B \triangleleft G$ ve $B \cap Y = 1$ dir. G nin monolitinin B olduğunu gösterelim [29, 32]. Kabul edelim ki $B_1 \leq B$ olacak şekilde G nin aşıkâr olmayan bir B_1 öz normal altgrubu olsun. Böylece $B_1 \cong A_1$ olacak şekilde $A_1 \leq A$ altgrubu vardır. $B_1 \triangleleft G$ olduğundan her $g = (a, x) \in G$ ve her $1 \neq b = (c, 1) \in B_1$ için

$$\begin{aligned} g^{-1}bg &= (a, x)^{-1}(c, 1)(a, x) = (-ax, x^{-1})(c + a, x) \\ &= (-ax + (c + a)x, 1) = (cx, 1) \in B \end{aligned} \quad (3.3)$$

dir. Burada $1 \neq b = (c, 1)$ olduğundan $c \neq 0$ dır ve böylece $c^{-1} \in F$ vardır. F , K nın X tarafından üretilen altcismi olduğundan $c^{-1} = \sum_{x \in X} \lambda_x x$ olacak şekilde $GF(p)$ nin λ_x elemanları vardır. Eşitliğin her iki tarafı c ile çarpılırsa

$$1 = cc^{-1} = \sum_{x \in X} \lambda_x cx$$

olur. (3.3)'ten her $x \in X$ için $(cx, 1) \in B_1$ olduğundan

$$\left(\sum_{x \in X} \lambda_x cx, 1 \right) = (1, 1) \in B_1$$

dir. Böylece (3.3)'te $x \in X$ olmak üzere $g = (0, x)$ ve $b = (1, 1)$ alınırsa $g^{-1}bg = (x, 1) \in B_1$ olur. Böylece $X \leq A_1$ dir. A , $\sum_{x \in X} \lambda_x x$ formundaki elemanlardan oluştuğundan $A_1 = A$ dır. Buradan $B_1 = B$ olur ve böylece B , G nin bir minimal normal altgrubudur. Ayrıca (3.3)'ten B kendi kendini merkezler, yani $B = C_G(B)$ dir. Eğer N , G nin B yi içermeyen aşıkâr olmayan bir öz normal altgrubu ise $N \cap B = 1$ dir. Böylece $[N, B] = 1$ dir. Buradan $N \leq C_G(B) = B$ olur ki bu bir çelişkidir. Böylece B , G nin bir tek minimal normal altgrubudur, yani B bir monolittir. Dolayısıyla G nin birimden farklı

¹ K , $GF(p)$ cisminin cebirsel kapanışı olduğundan $GF(p)[x]$ deki indirgenmez polinomların köklerinin kümesi X olmak üzere $GF(p)$ cismine katılmasıyla elde edilen cisim genişlemesi K dır, yani $K = GF(p)(X)$ dir. Böylece $\lambda \in GF(p)$ ve $k_i \in \mathbb{N}$ olmak üzere K nın elemanları $\lambda u_1^{k_1} u_2^{k_2} \dots u_n^{k_n}$ tipindeki monomların sonlu toplamı şeklindedir [30].

her normal altgrubu B yi içerir. $G/B \cong C_{q^\infty}$ ve $1 \neq [Y, B]$ olduğundan $1 \neq G' \leq B$ olup $G' = B$ dir. B abelyan olduğundan $G'' = 1$ dir. Böylece G metabelyandır. Ayrıca öz altgrupları sonlu olduğu için yarıdevirli gruplar min şartını sağlar. $G/B \cong Y$ ve $Y \cong C_{q^\infty}$ olduğundan G/B min- n şartını sağlar. G/B ve G nin normal altgrupları birebir eşlendiğinden G , min- n şartını sağlar.

G nin bir NBT -grup olduğunu gösterelim. B elemanter abelyan p -grubu olduğundan B nin sonlu indeksli bir H öz altgrubu vardır [23]. B, G nin tek minimal normal altgrubu olduğundan $\text{Core}_G(H) = 1$ ve $|G : H|$ sonsuzdur. Eğer $|G : H|$ sonluysa $|G| = |G : \text{Core}_G(H)|$ olduğundan G sonlu olur ki bu bir çelişkidir.¹ N, G nin bir öz normal altgrubu olsun. Böylece B monolit olduğundan $B \leq N$ ve $G/B \cong C_{p^\infty}$ olduğundan N/B sonludur. Dolayısıyla $|N : B||B : H|$ sonlu olduğundan $|N : H|$ sonludur. G/B ve B lokal sonlu olduğundan ve lokal sonluluk genişlemeye göre kapalı olduğundan G lokal sonludur. [3]'teki Theorem(i)'den G bir BT -grup değildir. \square

Keyfi çözülebilir uzunluğunda çözülebilir monolitik gruplar inşa etmek mümkündür (bkz. [29] Example 4).

İlk olarak inşâyı kısaca tanımlamak adına çözülebilir uzunluğu 3 olan bir grup inşa edelim.

Örnek

$C = A \rtimes X = BY$ yukarıdaki örnekte tanımlanan birbirinden farklı p, q asal sayıları için Čarin (p, q) -grubu olsun. Kolaylık olması açısından $B = A$ ve $Y = X$ alınacak, yani her $a \in A$ elemanı $(a, 1)$ ile her $x \in X$ ise $(0, x)$ olarak alınarak $C = AX$ olduğu kabul edilecektir. r, p den farklı bir asal sayı ve C_r mertebesi r olan devirli grup olmak üzere standart çelenk çarpımını $W = C_r \wr C$ şeklinde tanımlayalım. O zaman tanımdan W nun D baz altgrubu için $W = D \rtimes C$ dir. C ye benzer şekilde $W = DC$ olarak alalım. Böylece A tarafından merkezlenmeyen D nin bir W -chief faktörü² H/L vardır [32]. Kabul edelim ki D nin bir W -chief serisi $\{D_\alpha \mid \alpha \in I\}$ olmak üzere³ her $\alpha \in I$ için $[D_{\alpha+1}, A] \leq D_\alpha$ olsun. O zaman $\{D_\alpha A\}_{\alpha \in I}$ serisi DA nın bir merkez serisidir.⁴ Böylece

¹ Alternatif olarak $|G : B| \leq |G : H|$ olup G/B sonlu olur ki bu bir çelişkidir.

² G bir grup, $H \leq G$ ve $L \triangleleft G$ olsun. Eğer $H/L, G/L$ nin minimal normal altgrubu ise H/L ye G -chief faktör denir [19].

³ Bir G grubunun bir normal serisi tam, yani serinin terimlerinin tüm birleşim ve kesişimleri yine serinin bir terimi ve serinin her faktörünün aşikar olmayan fully-invariant altgrubu yoksa bu seriye chief serisi denir. Bu serinin faktörlerine chief faktör denir ve $K < H, K \triangleleft G$ olmak üzere serinin faktörleri H/K formundadır ve $H/K, G/K$ nin minimal normal altgrubudur.

⁴ $DA/D_\alpha A \cong D/D \cap (D_\alpha A)$ ve D abelyan olduğundan her $d, d_1 \in D$ ve $a, a_1 \in A$ için $[da, d_1 a_1] D_\alpha A = D_\alpha A$ dir.

DA bir residually merkez grup olur, yani her $x \in DA$ için $x \notin D_\alpha A$ olacak şekilde DA nın bir $D_\alpha A$ normal altgrubu vardır öyle ki $x D_\alpha A \in Z(DA/D_\alpha A)$ dir. Ayrıca D bir elemanter abelyan r -grubu ve A bir elemanter abelyan p -grubu olduğundan DA bir periyodik gruptur ve exponenti pr dir. Gerçekten her $(d, a) \in DA$ için

$$(d, a)^{pr} = (dd^{a^{-1}} \dots d^{(a^{p-1})^{-1}}, 1)^r = (1, 1)$$

dir. Eğer bir s pozitif tamsayısı DA nın exponenti ise $s \leq pr$ ve mertebeleri p ve r olan elemanların s -yinci kuvvetleri birim olduğundan $pr|s$ olur ve buradan $s = pr$ dir. Böylece her $(d, a) = (d, 1)(1, a) \in DA$ için A ve D abelyan ve $(d, 1)$ ile $(1, a)$ nın mertebeleri aralarında asal olduğundan [20]'deki Theorem 6.14(i)'den DA abelyandır. $D \rtimes A$ yarıdirekt çarpımı tanımlı ve abelyandır. Ancak Lemma 2.4.1.4'ten A nın D üzerine etkisi birim otomorfizmadır. Dolayısıyla her $a \in A$ ve her $d \in D$ için $d^a = d$ dir. D, W nun baz altgrubu olduğundan $C = AX$ den C_r ye tüm fonksiyonların grubuna izomorftur. Dolayısıyla A nın birimden farklı bir a elemanı için $a^f \neq 1^f$ olacak şekilde bir $f \in D$ vardır. Ancak $f^a = f$ olduğundan

$$\begin{aligned} a^{f^a} &= a^f \\ (aa^{-1})^f &= a^f \\ 1^f &= a^f \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Böylece A tarafından merkezlenmeyen D nin bir W -chief factorü H/L vardır.¹ Sadelik için $N = H/L$ olsun. $G = N \rtimes C$ olsun.² O zaman G nin monoliti $N = G''$ ve çözülebilir uzunluğu 3 olan bir çözülebilir grup olduğunu gösterelim [32]. Kabul edelim ki $T \triangleleft G$ ve $T \leq N$ olsun. $G = N \rtimes C$ olduğundan her $(1, c) \in C$ ve $(t, 1) \in T$ için $(t, 1)^{(1, c)} = (t^c, 1) \in T$ ve D abelyan olduğundan $(d, c)L \in W/L$ ve $(x, 1)L \in T$ olmak üzere

$$\begin{aligned} ((x, 1)L)^{(d, c)L} &= ((d^c)^{-1}, c^{-1})(x, 1)(d, c)L \\ &= ((d^c)^{-1}, c^{-1})(xd, c)L \\ &= ((d^c)^{-1}(x)^c d^c, 1)L = (x^c, 1)L \in T \end{aligned}$$

olup $T \triangleleft W/L$ dir. Ancak $N, W/L$ nin minimal normal altgrubu olduğundan $T = L$ veya $T = N$ dir. Dolayısıyla N, G nin minimal normal altgrubudur. N nin bir tek

¹ $H \leq (D, 1)$ ve $H/L, W/L$ nin minimal normal altgrubudur.

² $W = D \rtimes C$ şeklinde yarıdirekt çarpım tanımlı ve $N = H/L \leq D/L$ olduğundan $((h, 1)L, c) \mapsto ((h, 1)L)^c = (h^c, 1)L$, N nin otomorfizması olacak şekilde etkisi tanımlıdır. Sadelik olması açısından yeri geldiğinde $G = N \rtimes C = NC$, yani G, N nin C ile parçalanma genişlemesi olarak alınacaktır.

minimal normal altgrup olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki G nin N yi içermeyen ve aşikar olmayan bir normal altgrubu M olsun. O zaman N minimal normal altgrup olduğundan $N \cap M = 1$ olur ve buradan $M \leq C_G(N)$ dir. Ayrıca A, C nin monoliti ve $MN \cap C \triangleleft C$ olduğundan $A \leq MN \cap C$ dir. N, D nin W -chief factorü olduğundan $N' = 1$ dir. Buradan

$$[A, N] \leq [MN, N] = [M, N]N' = 1$$

ve $[A, N] = 1$ dir. Böylece A, N yi merkezler ki bu durum N nin seçimiyle çelişir. Böylece N, G nin monolitidir. Şimdi G nin çözülebilir uzunluğunun 3 olduğunu gösterelim.

Lemma 2.5.1.3(1)'den $[N, C] \triangleleft NC = G$ dir. N, G nin monoliti olduğundan $N = [N, C]$ dir. Ayrıca $N \triangleleft G$ ve $G = NC$ olduğundan Lemma 2.5.1.3(2)'den $G' = N'[N, C]C' = NA$ dir. Benzer şekilde A ve N abelyan olduğundan $G'' = [N, A]$ dir. $N \triangleleft G$ olduğundan $G'' = [N, A] \leq N$ dir. N aynı zamanda monolit olduğundan $N \leq [N, A] = G''$ dır. Böylece $G'' = N$ dir. N abelyan olduğundan $G''' = 1$ dir. Böylece $d(G) = 3$ tür.

D elemanter abelyan r -grubu olduğundan N elemanter abelyan r -grubudur (bkz. [32]'de Lemma 1.2.4). Böylece N nin sonlu indeksli bir öz altgrubu H vardır [23]. $K = \langle H, A \rangle$ olsun. O zaman N, G nin bir tek minimal normal altgrubu olduğu için $\text{Core}_G(K) = 1$ dir. Eğer $L := \text{Core}_G(K) \neq 1$ ise N monolit olduğundan $N \leq L$ dir. Böylece $NA = \langle H, A \rangle$ dir. Ancak $1 \neq |N : H| < \infty$ olduğundan $|NA : \langle H, A \rangle| > 1$ olur ki bu bir çelişkidir.¹ Ayrıca $|G : K|$ sonsuzdur. Aksi halde $|G : K_G|$ sonlu olup buradan G sonlu olur ki bu bir çelişkidir. M, G nin birimden farklı bir öz normal altgrubu olsun. O zaman $N \leq M$ dir. Kabul edelim ki $G = MA$ olsun. O zaman $MA = MC$ dir. Eğer $M \cap C \neq 1$ ise $M \cap C \triangleleft C$ olduğundan $A \leq M$ olur ve böylece $G = M$ dir ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $M \cap C = 1$ dir. $G = MA = MC$ olduğundan

$$A \cong A/(M \cap A) \cong MA/M = MC/M \cong C/(M \cap C) \cong C$$

olur ve buradan C abelyandır. Ancak bu durum $d(C) = 2$ olmasıyla çelişir. O hâlde $MA \neq G$ dir. Dolayısıyla $MA/NA, G/NA \cong X$ in öz altgrubu olup sonludur. Ayrıca $|N : H|$ sonlu ve $K = \langle H, A \rangle$ olduğundan $|NA : K|$ sonludur. Böylece $M/(M \cap NA)$ bölüm grubu ve $|M \cap (NA) : M \cap K|$ sonlu olduğundan $|M : M \cap K|$ sonlu olduğu

¹Alternatif olarak bir $x \in N \setminus H$ vardır öyle ki bir k pozitif tamsayısı için $x = h_1 a_1 h_2 a_2 \dots h_k a_k$ olacak şekilde $h_i \in H$ ve $a_i \in A$ elemanları vardır. $N \triangleleft G$ olduğundan bir $h \in N$ için $xh = a_1 a_2 \dots a_k$ olur ki bu durum $N \cap C = 1$ olmasıyla çelişir.

görülür. Sonuç olarak G nokta dengeleyeni K ve çözülebilir uzunluğu 3 olan çözülebilir bir NBT -gruptur. İlk örnekteki şekilde G bir BT -grup değildir.

Örnek

Yukarıdaki şekilde [29]'daki yaklaşımı kullanarak çözülebilir uzunluğu $m + 2$ olan çözülebilir

$$G_m := N_m(\dots(N_0X))$$

grupları inşa edilebilir öyle ki $N_0 = A$ ve N_m, G_m in monolitidir. Her $m \geq 1$ için S_m, N_m in sonlu indeksli öz altgrubu olmak üzere

$$K_m = \langle S_m, N_{m-1}, \dots, N_1, N_0 \rangle$$

G_m nin bir nokta dengeleyenidir. Her $m \geq 1$ için bu şekilde G_m grubunun varlığını göstereyim. m üzerinden tümevarım uygulayalım. $m = 1$ için iddia yukarıdaki örnekteki şekilde $G_1 = NC = NAX$ olarak alınırsa sağlanır. Dikkat edilecek olursa N bir chief faktördür. Kabul edelim ki iddia $m-1 \geq 0$ için sağlansın. O zaman çözülebilir uzunluğu $m + 1$ olan $G_{m-1} = N_{m-1}(\dots(N_0X))$ çözülebilir NBT -grubu vardır öyle ki N_{m-1} bir chief faktördür ve G_{m-1} in monolitidir. [32]'deki Lemma 1.2.4'ten N_{m-1} , bir p asal sayısı için elemanter abelyan p -grubudur. $q \neq p$ olacak şekilde q asal sayısı için mertebesi q olan devirli C_q grubu için $V := C_q \wr G_{m-1}$ şeklinde standart çelenk çarpımını tanımlayalım. E, V nin baz altgrubu olmak üzere $V = E \rtimes G_{m-1}$ dir. Yukarıda G_1 için gösterildiği şekilde E nin bir V -chief faktörü P/Z vardır öyle ki $[P, N_{m-1}] \not\leq N_{m-1}$ dir.¹ $N_m := P/Z$ olmak üzere $G_m = N_m \rtimes G_{m-1} = N_m G_{m-1}$ olsun. N_1 in G_1 için gösterildiği şekilde N_m, G_m nin bir minimal normal altgrubudur. N_m nin teklifi de N_1 in teklifinin gösteriminde $N = N_m, C = G_{m-1}$ ve $A = N_{m-1}$ alınırsa N_m nin monolit olduğu gösterilmiş olur. $d(G_m) = m + 2$ olduğunu göstereyim. $N_m \triangleleft G_m$ abelyan ve tümevarım kabülünden $d(G_{m-1}) = m + 1$ olduğundan $G_m = N_m G_{m-1}$ çözülebilirdir.² G_{m-1} in bir abelyan serisi $1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \dots \triangleleft H_{m+1} = G_{m-1}$ olsun. O zaman $K_0 = 1$ ve her $i = 1, 2, \dots, m + 2$ için $K_i = N_m H_{i-1}$ olmak üzere $K_0 \triangleleft K_1 \triangleleft \dots \triangleleft K_{m+2}$ serisi G_m nin bir abelyan serisi olduğundan $d(G_m) \leq m + 2$ dir. Kabul edelim ki bir $1 \leq j < m + 2$ için $K_j = K_{j+1}$ olsun. O zaman $N_m H_{j-1} = N_m H_j$ ve $N_m \cap H_{j-1} = N_m \cap H_j$ dir. Her $x \in H_j$ için $x \in N_m H_{j-1}$ olduğundan $xy^{-1} = n$ olacak şekilde $n \in N_m$ ve $y \in H_{j-1}$ vardır. $N_m \cap H_{j-1} = N_m \cap H_j$ olduğundan $xy^{-1} \in N_m \cap H_{j-1}$ olur ve buradan $x \in H_{j-1}$

¹ Aksi durumda tanımdan $V = EG_{m-1} = EN_{m-1}G_{m-2}$ olmak üzere EN_{m-1} abelyan olur. Ancak $E \rtimes N_{m-1}$ yarıdirekt çarpımı tanımlı olduğundan bu durum Lemma 2.4.1.4 ile çelişir.

² S bir grup ve $T, V \leq S$ ve $T \triangleleft S$ olmak üzere T ve V çözülebilirse TV de çözülebilir.

dir.¹ Ancak bu durum $d(G_{m-1}) = m + 1$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $d(G_m) = m + 2$ dir.

G_m nin bir *NBT*-grup olduğunu gösterelim. S_m, N_m in sonlu indeksli bir öz altgrubu olmak üzere $K_m = \langle S_m, N_{m-1}, \dots, N_1, N_0 \rangle$ olsun. Eğer $\text{Core}_{G_m}(K_m) \neq 1$ ise N_m monolit olduğundan $N_m \leq K_m$ dir. Buradan

$$\langle N_m, N_{m-1}, \dots, N_1, N_0 \rangle = \langle S_m, N_{m-1}, \dots, N_1, N_0 \rangle$$

dir. Ancak

$$|\langle N_m, N_{m-1}, \dots, N_1, N_0 \rangle : \langle S_m, N_{m-1}, \dots, N_1, N_0 \rangle| = |N_m : S_m| > 1$$

olduğundan² bu bir çelişkidir.³ Dolayısıyla $\text{Core}_{G_m}(K_m) = 1$ dir.

Kabul edelim ki $N_m^* = N_{m-1}N_{m-2} \dots N_0$ olsun. İlk önce tümevarımla her m için $G'_m = N_m N_m^*$ olduğunu gösterelim. $G_1 = N_1 N_0 X = N A X$ olmak üzere $G'_1 = N A = N_1 N_0$ olduğu gösterilmişti. Tanımdan $G_2 = N_2 G_1$ ve $N_2 \triangleleft G_2$ olduğundan $G'_2 = N'_2 [N_2, G_1] G'_1$ dür. N_2, G_2 nin monoliti ve $[N_2, G_1] \triangleleft G_2$ olduğundan $N_2 = [N_2, G_1]$ dir. Böylece $G'_2 = N_2 G'_1 = N_2 N_1 N_0$ dir. Kabul edelim ki iddia $m - 1$ için sağlansın, yani $G'_{m-1} = N_{m-1} N_{m-1}^*$ olsun. O zaman N_m, G_m nin monoliti ve $[N_m, G_{m-1}] \triangleleft G_m$ olduğundan $G'_m = [N_m, G_{m-1}] G'_{m-1} = N_m N_{m-1} N_{m-1}^* = N_m N_m^*$ dir ve böylece tümevarımdan iddia sağlanmış olur.

M, G_m nin bir öz normal altgrubu olsun. N_m, G_m nin monoliti olduğundan $N_m \leq M$ dir. $G_m = M N_m^*$ olsun. O zaman $M N_m^* = M N_m^* X$ dir. Eğer $M \cap G_{m-1} = 1$ ise

$$N_m^* \cong N_m^* / (M \cap N_m^*) \cong M N_m^* / M = M N_m^* X / M = M G_{m-1} / M \cong G_{m-1} \quad (3.4)$$

olur. Ancak $d(G_{m-1}) = m + 1$ ve

$$d(N_m^*) = d(G'_{m-1}) = m \quad (3.5)$$

¹ $H_j = H_j \cap (N_m H_j) = H_j \cap (N_m H_{j-1}) = (H_j \cap N_m) H_{j-1} = (H_{j-1} \cap N_m) H_{j-1} = H_{j-1}$

²Ayrıca $\langle N_m, N_{m-1}, \dots, N_1, N_0 \rangle = N_m N_{m-1} \dots N_0$ ve $\langle S_m, N_{m-1}, \dots, N_1, N_0 \rangle = \langle S_m, N_{m-1} \dots N_1 N_0 \rangle$ dir.

³Alternatif olarak N_m^* aşağıdaki şekilde tanımlı olsun. O zaman $N_m N_m^* = S_m N_m^*$ dir. $|N_m : S_m| > 1$ olduğundan bir $x \in N_m \setminus S_m$ vardır öyle ki bir l pozitif tamsayısı için $x = h_1 n_1 h_2 n_2 \dots h_l n_l$ olacak şekilde $h_i \in S_m$ ve $n_i \in N_m^*$ elemanları vardır. $N_m \triangleleft G$ olduğundan $xh = n_1 n_2 \dots n_l$ olur ki bu durum $N_m \cap N_m^* = 1$ olmasıyla çelişir.

olduğundan $m + 1 = m$ olur ki bu bir çelişkidir. Eğer $M \cap G_{m-1} \neq 1$ ise $G_m = MN_m^* = MG_{m-1} = MG_{m-2}$ dir. Benzer şekilde $M \cap G_{m-2} \neq 1$ ise $MG_{m-1} = MG_{m-2} = MG_{m-3}$ eşitliği sağlanır. Her $1 \leq i < m$ için $M \cap G_{m-i} \neq 1$ ise $G_m = M$ olur ki bu bir çelişkidir.¹ Dolayısıyla bir $1 \leq i < m$ için $M \cap G_{m-i} = 1$ dir. Ancak (3.4) ve (3.5)'te $m - 1$ yerine $m - i$ alınırsa $d(G_{m-i}) = m - i + 2 = m - i + 1 = d(G'_{m-i})$ elde edilir ki bu da bir çelişkidir. Böylece $MN_m^* \neq G_m$ dir. Buradan

$$MN_m^*/N_mN_m^* \leq G/N_mN_m^* \cong C_{q^\infty}$$

olduğundan $MN_m^*/N_mN_m^*$ sonludur. Buradan $|M : M \cap (N_mN_m^*)| < \infty$ olduğu görülür. Ayrıca kabulden $|N_m : S_m| < \infty$ olduğundan $|N_mN_m^* : K_m|$ sonludur. Buradan $|M \cap N_mN_m^* : M \cap K_m| < \infty$ olduğu görülür. Böylece $|M : M \cap K_m|$ sonlu olur ki böylece G_m nin *NBT*-gruptur. Böylece tümevarımdan her $m \geq 1$ için $G_m := N_m(\dots(N_0X))$ mükemmel olmayan bir *NBT*-gruptur. İlk örnekteki şekilde G_m bir *BT*-grup değildir.

Mükemmel olmayan sayılamaz *NBT*-grup örneği henüz bilinmiyor. Ama eğer *NBT*-grup tanımında sadece sadık etki etme şartı kaldırılırsa nokta dengeleyenler core-free olmaz ve *NBT*-gruplar tarafından sağlanan çoğu özellikten feragat edilmiş olur. Bu durumu sağlayan Hartley tarafından oluşturulmuş örnekler vardır (bkz. [33] Theorem A).

Önceki paragrafta belirtildiği üzere bazı şartları sağlamayan sayılamaz bir grup örneği verilecektir. Hartley'in [33]'te Theorem A'da inşa ettiği G grubunu inceleyelim. Bu grup min- n şartını sağlayan çözülebilir grupların sayılabilir olup olmadığı sorusuna cevap olarak verildi. Bu teorem min- n şartını sağlayan çözülebilir uzunluğu 3 olan sayılamaz çözülebilir bir grubun varlığını gösterir. Burada yukarıdaki örneklerden farklı olarak Hartley'in terminolojisi kullanıldı. Bu noktada Hartley'in grup inşâlarında mail yoluyla Prof. Dr. Giovanni Cutolo'yla yapılan görüşmelerden yararlanıldı.

Örnek

$p \nmid (q - 1)$ ve $q \mid r - 1$ olacak şekilde p, q, r farklı asal sayılar olsun. $H = BX$ bir Çarin (q, p) -grubu olsun. Önceden gösterildiği üzere B, H nin monoliti ve $X \cong C_{p^\infty}$ dur. B aynı zamanda bir elemanter abelyan q -altgrubu, $B = H'$, $[B, X] = B$ dir. [33]'te Theorem A'daki şekilde $G = W \rtimes H$ yarıdirekt çarpımını inceleyelim öyle ki $Z_r(H)$ grup cebirinin bir altmodülü olan ve Ω ilk sayılamayan ordinal olmak üzere öz altmodülleri Ω sıralama tipinde bir zincir oluşturan W bir sonsuz elemanter abelyan r -

¹ $M \cap G_1 \neq 1$ ise $G_m = MAX$ dir. $M \cap A = 1$ ise benzer şekilde (3.4) ve (3.5)'ten çelişki elde edilir. Aksi durumda ise $G_m = M$ dir.

grubudur. Ayrıca W nun öz altmodülleri Ω sıralama tipinde bir zincir oluşturduğundan $[W, H] = W$ dur [33].

N , G nin bir öz normal altgrubu olsun ve $N \cap H \neq 1$ olduğunu kabul edelim. Böylece $N \cap H \triangleleft H$ ve B , H nin monoliti olduğundan $B \leq N \cap H \leq N$ sağlanır. Eğer $WN = G$ ise G/N abelyan olduğundan $G' \leq N$ dir. W , G nin öz normal altgrubu olduğundan $G' = W'[W, H]H' = WB$ dir. Böylece $W \leq N$ ve $WN = G$ olduğundan $N = G$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $N \cap H \neq 1$ olduğu durumda $WN \neq G$ dir. Böylece $G = WBX$ olduğundan WN/WB , $G/WB \cong C_{p^\infty}$ nin bir öz altgrubudur. Böylece $WN/WB = WNB/WB \cong N/N \cap (WB)$ bölüm grubu dolayısıyla da $|N : N \cap WB|$ sonludur. Böylece $N \cap H = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece N , p ya da q mertebeli elemanlar içermez. Böylece $N \leq W$ olup $WB/WB = WNB/WB$ olduğundan $|N : N \cap WB| = 1$ dir. S , B nin sonlu indeksli bir öz altgrubu olmak üzere $K = WS$ olsun. O zaman $|G : WB|$ sonsuz olduğundan $|G : K|$ sonsuzdur.¹ Dolayısıyla $|WB : WS|$ sonlu, $|N \cap WB : N \cap K| = |N \cap WB : N \cap WS| \leq |WB : WS|$ ve $|N : N \cap K| = |N : N \cap WB| |N \cap WB : N \cap K|$ olduğundan G nin her öz normal N altgrubu için $|N : N \cap K|$ sonludur. Ancak

$$\text{Core}_G(K) = \bigcap_{g \in G} (WS)^g = \bigcap_{g \in G} WS^g \geq W$$

olduğundan $C := \text{Core}_G(K) \neq 1$ dir. $C \leq WB$ olduğundan

$$G/C = CH/C \cong H/H \cap C$$

ve H Ćarin (q, p) -grubu sayılabilir olduğundan G/C sayılabilirdir. Ayrıca

$$\text{Core}_{G/C}(K/C) = \text{Core}_G(K)C/C = C$$

dir ve G nin her öz normal N altgrubu için $|N : N \cap K|$ sonlu olduğundan G/C nin öz normal her L/C altgrubu için $|L/C : L/C \cap K/C| \leq |L : L \cap K| < \infty$ sağlanır. Böylece Lemma 3.1.1'den G/C sayılabilir bir NBT -gruptur ancak G sayılabilir değildir. \square

3.3.2. Mükemmel NBT -grup örnekleri

Bu kısımda her p asal sayısı için BT -grup olmayan mükemmel sonlumsu NBT - p -grubunun varlığı ispatlanacaktır. Böylece mükemmel sonlumsu BT -grubun

¹ $|G : K| = |G : WB| |WB : WS|$

varlığı problemi *BT*-grupların bir genellemesi olan *NBT*-gruplarda cevaplandırılmış olur.

Her p asal sayısı için [34]'teki Wiegold'un örneğinin inşâsını inceleyelim (bkz. [35–37]).

3.3.2.1. Teorem (Wiegold)

p bir asal sayı olmak üzere her $k \geq 1$ ve $n \geq 0$ tamsayıları için p^{k-1} tane p -devirin çarpımı olan

$$x_{k,n} = \prod_{i=1}^{p^{k-1}} (i + np^k, i + np^k + p^{k-1}, \dots, i + np^k + (p-1)p^{k-1}) \quad (3.6)$$

permütasyonu tanımlansın. $X_k := \{x_{k,n} \mid n = 0, 1, \dots\}$ olmak üzere G grubu $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ tarafından üretilsin, yani $G = \langle \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \rangle$ ve $G_k = \langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle$ olsun. O zaman $G_k \triangleleft G$, $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ ve her k pozitif tamsayısı için G_{k+1}/G_k bir elemanter abelyan p -grubudur. G_k nın yörüngeleri p^k kardinaliteli

$$\{1, 2, \dots, p^k\}, \{p^k + 1, p^k + 2, \dots, 2p^k\}, \dots$$

kümeleridir. Böylece G , $\text{FSym}(\mathbb{Z}^+)$ sonsuzlu simetrik grubunun lokal nilpotent ve hiperabelyan olan bir p -altgrubudur öyle ki G , \mathbb{Z}^+ üzerinde geçişlidir. Dolayısıyla G bir *FC*-grup değildir. Ayrıca her $k \in \mathbb{Z}^+$ için X_k nın elemanları G içinde eşleniktir.

[] tam değer fonksiyonu olmak üzere, $k < l$ ve $t = \lfloor n/p^{l-k} \rfloor$ olacak şekilde her $k, l \geq 1$ ve $n, t \geq 0$ tamsayıları için

$$x_{k,n}^{x_{l,t}} = \begin{cases} x_{k,n+p^{l-k-1}}, & n + p^{l-k-1} < (t+1)p^{l-k} \\ x_{k,n+p^{l-k-1}-p^{l-k}}, & n + p^{l-k-1} \geq (t+1)p^{l-k} \end{cases}$$

dir. Ayrıca $W_k = \langle x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{k,0} \rangle$ şeklinde tanımlanırsa

$$(\dots (\langle x_{1,0} \rangle \wr \langle x_{2,0} \rangle) \wr \dots) \wr \langle x_{k,0} \rangle \cong W_k$$

ve $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ dir.

İspat

Tanımdan X_k lar

$$X_1 = \{(1, 2, \dots, p), (p+1, p+2, \dots, 2p), (2p+1, 2p+2, \dots, 3p), \dots\}$$

$$X_2 = \{\prod_{i=1}^p(i, i+p, \dots, i+(p-1)p), \prod_{i=1}^p(i+p^2, i+p^2+p, \dots, i+p^2+(p-1)p), \dots\}$$

$$X_3 = \{\prod_{i=1}^{p^2}(i, i+p^2, \dots, i+(p-1)p^2), \prod_{i=1}^{p^2}(i+p^3, i+p^3+p^2, \dots, i+p^3+(p-1)p^2), \dots\}$$

$$X_4 = \{\prod_{i=1}^{p^3}(i, i+p^3, \dots, i+(p-1)p^3), \prod_{i=1}^{p^3}(i+p^4, i+p^4+p^3, \dots, i+p^4+(p-1)p^3), \dots\}$$

⋮

şeklindedir.

Kabul edelim ki $\text{supp}(x_{k,n}) = \Delta_{k,n}$ olsun. O zaman

$$\Delta_{k,n} = \{1 + np^k, 2 + np^k, \dots, (n+1)p^k\}$$

dır. $\mathbb{Z}^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_{k,n}$ ve $x_{k,n}$ ler ayrık permütasyon olduğundan $n \neq m$ olacak şekildeki her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\Delta_{k,m} \cap \Delta_{k,n} = \emptyset$ dir. Dolayısıyla $\Delta_{k,n}$ ler \mathbb{Z}^+ in bir parçalanışını oluşturur.

$l \geq 1$ tamsayı ve $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\Delta_{k,n}$ ile $\Delta_{l,t}$ arasındaki bağlantıyı inceleyelim. $k = l$ olsun. O zaman $\Delta_{k,n}$ ler \mathbb{Z}^+ in bir parçalanışı olduğundan $n \neq t$ ise $\Delta_{k,n} \cap \Delta_{l,t} = \emptyset$ dir. $k < l$ olsun. $\Delta_{l,t}$ kümesi $\Delta_{k, tp^{l-k}+r}$ formundaki ayrık

$$\{1 + (tp^{l-k})p^k, 2 + (tp^{l-k})p^k, \dots, p^k + (tp^{l-k})p^k\}$$

$$\{1 + (tp^{l-k} + 1)p^k, 2 + (tp^{l-k} + 1)p^k, \dots, p^k + (tp^{l-k} + 1)p^k\}$$

⋮

$$\{1 + (tp^{l-k} + p^{l-k} - 1)p^k, 2 + (tp^{l-k} + p^{l-k} - 1)p^k, \dots, p^k + (tp^{l-k} + p^{l-k} - 1)p^k\}$$

kümelerinin birleşimine eşittir, yani

$$\Delta_{l,t} = \bigcup_{r=0}^{p^{l-k}-1} \Delta_{k, tp^{l-k}+r} \quad (3.7)$$

dir. Buradan bir $0 \leq r < p^{l-k}$ tamsayısı için $n = tp^{l-k} + r$ ise $\Delta_{k,n} \subset \Delta_{l,t}$ aksi hâlde

$\Delta_{k,n} \cap \Delta_{l,t} = \emptyset$ olduğu görülür. Dolayısıyla her $k, l \geq 1$ ve $n, t \geq 0$ tamsayıları için $\Delta_{k,n} \cap \Delta_{l,t} = \emptyset$ ya da $\Delta_{k,n} \subseteq \Delta_{l,t}$ olduğu gösterildi. Buradan $k \leq l$ olduğu durumda $\Delta_{l,t}$ nin elemanlarının $x_{k,n}$ altındaki görüntüsü yine $\Delta_{l,t}$ nin içindedir, yani $\Delta_{l,t}^{x_{k,n}} = \Delta_{l,t}$ dir.

Şimdi keyfi $k, l \geq 1$ ve $n, t \geq 0$ tamsayıları için $k \leq l$ olmak üzere $x_{k,n}^{x_{l,t}}$ eşleniğini inceleyelim. $\lfloor \cdot \rfloor$ tamdeğer fonksiyonu olsun. Önceki paragraftan görüldüğü üzere $x_{k,n}^{x_{l,t}} \neq x_{k,n}$ olması için $\lfloor n/p^{l-k} \rfloor = t$ olmalıdır. $x_{l,t}$, p^{l-1} tane ayrık p -devirin çarpımıdır. i -yinci satırları sırasıyla $x_{l,t}$ nin ayrık p -devirlerinin hareket ettirdiği noktalara karşılık gelen

$$[i + tp^l, i + tp^l + p^{l-1}, \dots, i + tp^l + (p-1)p^{l-1}]$$

satır matrisleri olacak şekilde

$$\mathbf{A}_{1,t} = \begin{bmatrix} 1 + tp^l & p^{l-1} + 1 + tp^l & \dots & p^l - p^{l-1} + 1 + tp^l \\ 2 + tp^l & p^{l-1} + 2 + tp^l & \dots & p^l - p^{l-1} + 2 + tp^l \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{l-1} + tp^l & 2p^{l-1} + tp^l & \dots & p^l + tp^l \end{bmatrix}_{p^{l-1} \times p}$$

matrisini tanımlayalım. $\lfloor n/p^{l-k} \rfloor = t$ şartı sağlandığından $\Delta_{k,n}$ kümesi, $\mathbf{A}_{1,t}$ nin herhangi bir j -yinci sütununun elemanlarından oluşan

$$\Gamma_j = \{i + tp^l + (j-1)p^{l-1} \mid i = 1, 2, \dots, p^{l-1}\}$$

kümesinin içindedir. Buradan görüleceği üzere $j < p$ iken $\Delta_{k,n} \subseteq \Gamma_j$ ise $x_{k,n}^{x_{l,t}}$ eşleniği $x_{k,n}$ nin hareket ettirdiği her bir noktaya p^{l-1} eklenmesiyle elde edilir, yani

$$\begin{aligned} x_{k,n}^{x_{l,t}} &= \prod_{i=1}^{p^{k-1}} (i + np^k + p^{l-1}, \dots, i + np^k + (p-1)p^{k-1} + p^{l-1}) \\ &= \prod_{i=1}^{p^{k-1}} (i + (n + p^{l-k-1})p^k, \dots, i + (n + p^{l-k-1})p^k + (p-1)p^{k-1}) \\ &= x_{k, n+p^{l-k-1}} \end{aligned} \tag{3.8}$$

dir.¹ Eğer $\Delta_{k,n} \subseteq \Gamma_p$ ise $x_{k,n}^{x_{l,t}}$ eşleniği $x_{k,n}$ nin hareket ettirdiği her bir noktaya $p^{l-1} - p^l$ eklenmesiyle elde edilir ve böylece $\Delta_{k,n}$ nin elemanları $\mathbf{A}_{1,t}$ nin ilk sütun elemanlarının

¹ $x_{k,n}^{x_{l,t}} = \prod_{i=1}^{p^{k-1}} ((i + np^k)^{x_{l,t}}, (i + np^k + p^{k-1})^{x_{l,t}}, \dots, (i + np^k + (p-1)p^{k-1})^{x_{l,t}})$

içine eşlenir, yani

$$\begin{aligned}
x_{k,n}^{x_{l,t}} &= \prod_{i=1}^{p^{k-1}} (i + np^k + p^{l-1} - p^l, \dots, i + np^k + (p-1)p^{k-1} + p^{l-1} - p^l) \\
&= \prod_{i=1}^{p^{k-1}} (i + (n + p^{l-k-1} - p^{l-k})p^k, \dots, i + (n + p^{l-k-1} - p^{l-k})p^k + (p-1)p^{k-1}) \\
&= x_{k, n+p^{l-k-1}-p^{l-k}}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

dir. $j < p$ veya $j = p$ ise $\mathbf{A}_{1,t}$ den yararlanarak sırasıyla

$$\begin{aligned}
1 + np^k &< p^l - p^{l-1} + 1 + tp^l \\
n + p^{l-k-1} &< (t+1)p^{l-k}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

veya

$$n + p^{l-k-1} \geq (t+1)p^{l-k} \tag{3.11}$$

dir. O hâlde $k < l$ ve $\lfloor n/p^{l-k} \rfloor = t$ olacak şekilde her $k, l \geq 1$ ve $n, t \geq 0$ tamsayıları için (3.8),(3.9),(3.10) ve (3.11)'den

$$x_{k,n}^{x_{l,t}} = \begin{cases} x_{k, n+p^{l-k-1}}, & n + p^{l-k-1} < (t+1)p^{l-k} \\ x_{k, n+p^{l-k-1}-p^{l-k}}, & n + p^{l-k-1} \geq (t+1)p^{l-k} \end{cases} \tag{3.12}$$

dir.

Tanımdan $G_k = \langle X_1, X_2, \dots, X_k \rangle$ olmak üzere G_k nın G nin bir normal altgrubu olduğunu göstereyim. Her $g \in G$ ve her $x \in G_k$ için $g = g_1^{\epsilon_1} g_2^{\epsilon_2} \dots g_s^{\epsilon_s}$ ve $x = x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \dots x_{s'}^{\omega_{s'}}$ olacak şekilde $\epsilon_i, \omega_j = \pm 1$ tamsayıları ile $g_i \in \bigcup_{t=1}^{\infty} X_t$ ve $x_i \in \bigcup_{t=1}^k X_t$ elemanları vardır. O zaman

$$x^g = (x_1^{\epsilon_1} g_2^{\epsilon_2} \dots g_s^{\epsilon_s})^{\omega_1} (x_2^{\epsilon_1} g_2^{\epsilon_2} \dots g_s^{\epsilon_s})^{\omega_2} \dots (x_{s'}^{\epsilon_1} g_2^{\epsilon_2} \dots g_s^{\epsilon_s})^{\omega_{s'}}$$

dir. $1 \leq i \leq s'$ ve $1 \leq j \leq s$ olmak üzere $x_i^{g_j}$ eşleniğini inceleyelim. Eğer $g_j \in \bigcup_{t=1}^k X_t$ ise $x_i^{g_j} \in G_k$ olduğu açıktır. $g_j \in \bigcup_{t=k+1}^{\infty} X_t$ olsun. $x_i \in \bigcup_{t=1}^k X_t$ olduğundan $1 \leq u \leq k$, $k+1 \leq v < \infty$ ile $m, n \geq 0$ tamsayıları vardır öyle ki $x_i = x_{u,m}$ ve $g_j = x_{v,n}$ dir. Eğer $\lfloor m/p^{v-u} \rfloor \neq n$ ise (3.7)'den $x_i^{g_j} = x_i$ dir. $\lfloor m/p^{v-u} \rfloor = n$ olsun. O zaman (3.12)'den bir

$m' \geq 0$ için $x_i^{g_j} = x_{u,m}^{x_{v,n}} = x_{u,m'} \in G_k$ olduğundan $x^g \in G_k$ olur ki bu durum $G_k \triangleleft G$ olmasını gerektirir.

Tanımdan G grubu $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ tarafından üretildiğinden $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ dir. Her i için $G_{i+1}/G_i = \langle X_{i+1} \rangle G_i/G_i$ ve X_{i+1} kümesi ayrık p -devirlerden oluştuğundan G_{i+1}/G_i bir elemanter abelyan p -grubudur. Böylece $G_1 \triangleleft G_2 \triangleleft \dots \triangleleft G_\beta = G$ olacak şekilde faktörleri abelyan olan G nin bir normal serisi olduğundan G hiperabelyan (hyperabelian) gruptur [19].

G_k ların yörüngelerini belirleyelim. Bunun için tekrar satırları sırasıyla $x_{k,n}$ nin ayrık p -devirlerinin hareket ettirdiği noktalardan oluşan

$$\mathbf{A}_{k,n} = \begin{bmatrix} 1 + np^k & p^{k-1} + 1 + np^k & \dots & (p-1)p^{k-1} + 1 + np^k \\ 2 + np^k & p^{k-1} + 2 + np^k & \dots & (p-1)p^{k-1} + 2 + np^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p^{k-1} + np^k & 2p^{k-1} + np^k & \dots & (n+1)p^k \end{bmatrix}_{p^{k-1} \times p}$$

matrisini inceleyelim. Uygun bir $n \geq 0$ tamsayısı için herhangi bir $z \in \mathbb{Z}^+$ bu matrisin sadece bir satırında olmak zorundadır. Dolayısıyla z yi içeren G_k nin yörüngeleri $A_{k,n}$ nin z yi içeren satırdaki noktaları da içerir. $1 + np^k$ nin yörüngesini inceleyelim. $1 + np^k$ nin G_1 içindeki yörüngesi $\text{supp}(x_{1,np^{k-1}})$ dir, yani $\{1 + np^k, 2 + np^k, \dots, p + np^k\}$ dir. $A_{2,np^{k-2}}$ matrisi

$$\mathbf{A}_{2,np^{k-2}} = \begin{bmatrix} 1 + np^k & p + 1 + np^k & \dots & (p-1)p + 1 + np^k \\ 2 + np^k & p + 2 + np^k & \dots & (p-1)p + 2 + np^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ p + np^k & 2p + np^k & \dots & p^2 + np^k \end{bmatrix}_{p \times p}$$

olmak üzere buradan $1 + np^k$ nin G_2 içindeki yörüngesi $\text{supp}(x_{2,np^{k-2}})$ dir, yani

$$\{1 + np^k, 2 + np^k, \dots, p^2 + np^k\}$$

dır. Dikkat edilecek olursa $1 \leq i < k$ olmak üzere $\text{supp}(x_{i,np^{k-i}})$ kümesi $A_{i+1,np^{k-i-1}}$ matrisinin ilk sütun elemanları kümesine eşittir. Dolayısıyla $1 + np^k$ nin G_1, G_2, \dots, G_{k-1} içindeki yörüngeleri göz önüne alınacak olursa $1 + np^k$ nin G_k içindeki yörüngesi $\text{supp}(x_{k,n})$, yani

$$\Delta_{k,n} = \{1 + np^k, 2 + np^k, \dots, p^k + np^k\}$$

dır. Böylece

$$\{1, 2, \dots, p^k\}, \{p^k + 1, p^k + 2, \dots, 2p^k\}, \dots$$

kümeleri, yani $\Delta_{k,n}$ ler G_k nin p^k kardinaliteli yörüngeleridir. $G_k \triangleleft G$ olduğundan Lemma 2.3.12'den $\Delta_{k,n}$ ler G için birer bloktur. Her $k \geq 1$ için $\Delta_{k,0} = \{1, 2, \dots, p^k\}$ G_k nin bir yörüngesi ve $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ olduğundan G grubu \mathbb{Z}^+ üzerinde geçişlidir. G , \mathbb{Z}^+ üzerinde geçişli olduğundan \mathbb{Z}^+ , G nin tek sonsuz yörüngesidir. G , \mathbb{Z}^+ üzerinde bir sonlumsu permütasyon grubu olduğundan [34]'teki Theorem 1'den G bir FC -grup değildir.

n nin p tabanındaki ifadesi $n = m_0 + m_1p + \dots + m_l p^l$ öyle ki $0 \leq l$, $0 \leq m_i < p$ olmak üzere (3.12)'den

$$x_{k,n} = (\dots ((x_{k,0}^{m_0})^{x_{k+1,0}^{m_1}})^{x_{k+2,0}^{m_2}} \dots)^{x_{k+l,0}^{m_l}}$$

olduğundan her $k \in \mathbb{Z}^+$ için X_k nin elemanları G içinde eşleniktir.

G nin bir p -grubu olduğunu gösterelim. Bunun için [36]'daki Proposition 2.1'deki ispatı [38]'deki Proposition 19.10'dan yararlanarak verelim. Önceki paragraftan her $k \geq 1$ için her $x_{k,n}$ permütasyonu $k \leq l$ olmak üzere $x_{k,0}$ in $x_{k+1,0}^{m_0}, x_{k+2,0}^{m_1}, \dots, x_{k+l,0}^{m_l}$ permütasyonlarının çarpımının eşleniği biçimde yazılabildiğinden

$$W_k = \langle x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{k,0} \rangle$$

şeklinde tanımlanırsa $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$ dir. Buradan eğer W_k lar p -grubuysa G nin de bir p -grubu olduğunu söyleyebiliriz. Aslında W_k lar $\text{Sym}(\Delta_{k,0})$ ların birer Sylow p -altgruplarıdır. Tümevarımla bu iddiayı gösterelim. $k = 1$ için iddia doğrudur. Çünkü $W_1 = \langle x_{1,0} \rangle$ ve $|W_1| = p$ dir öyle ki $|\Delta_{1,0}|!$ i bölen p nin en büyük kuvveti p dir. $k = 2$ ise $W_2 = \langle x_{1,0}, x_{2,0} \rangle$ dir. $x_{2,0}$ permütasyonu

$$\{1, 2, \dots, p\}, \{p + 1, p + 2, \dots, 2p\}, \dots, \{(p - 1)p + 1, (p - 1)p + 2, \dots, p^2\}$$

kümelerinden herbirini bir diğerine eşler ve bu kümeler ayrık olduğundan $i = 0, 1, \dots, p - 1$ olmak üzere $W_1^{x_{2,0}^i}$ ler sırasıyla bu kümeler üzerindeki Sylow p -altgruplarına karşılık gelir. Ayrıca $i \neq j$ için $W_1^{x_{2,0}^i}$ ile $W_1^{x_{2,0}^j}$ nin destekleri ayrık

olduğundan W_2 nin bu iki altgrubunun elemanları birbiriyle değişmelidir. Dolayısıyla

$$\langle x_{1,0} \rangle \wr \langle x_{2,0} \rangle \cong (W_1 W_1^{x_{2,0}} \dots W_1^{x_{2,0}^{p-1}}) \langle x_{2,0} \rangle \leq W_2$$

olduğundan $W_2 = (W_1 W_1^{x_{2,0}} \dots W_1^{x_{2,0}^{p-1}}) \langle x_{2,0} \rangle$ dir. Ayrıca

$$|(W_1 W_1^{x_{2,0}} \dots W_1^{x_{2,0}^{p-1}}) \langle x_{2,0} \rangle| = p|W_1|^p$$

olduğundan W_2 , $\text{Sym}(\Delta_{2,0})$ in bir Sylow p -alt grubudur.¹ Kabul edelim ki iddia $k \geq 1$ için sağlansın. Yani W_k , $\text{Sym}(\Delta_{k,0})$ in bir Sylow p -alt grubu olsun. $k = 2$ için yapılan işlemlere benzer şekilde $x_{k+1,0}$,

$$\{1, 2, \dots, p^k\}, \{p^k + 1, p^k + 2, \dots, 2p^k\}, \dots, \{(p-1)p^k + 1, (p-1)p^k + 2, \dots, p^{k+1}\}$$

kümelerinden herbirini bir diğerine eşler ve bu kümeler ayrık olduğundan $i = 0, 1, \dots, p-1$ olmak üzere $W_k^{x_{k+1,0}^i}$ ler sırasıyla bu kümeler üzerindeki Sylow p -alt gruplarına karşılık gelir. Dolayısıyla

$$(\dots (\langle x_{1,0} \rangle \wr \langle x_{2,0} \rangle) \wr \dots \wr \langle x_{k+1,0} \rangle) \cong (W_k W_k^{x_{k+1,0}} \dots W_k^{x_{k+1,0}^{p-1}}) \langle x_{k+1,0} \rangle \leq W_{k+1}$$

olduğundan $W_{k+1} = (W_k W_k^{x_{k+1,0}} \dots W_k^{x_{k+1,0}^{p-1}}) \langle x_{k+1,0} \rangle$ dir.² Ayrıca

$$|(W_k W_k^{x_{k+1,0}} \dots W_k^{x_{k+1,0}^{p-1}}) \langle x_{k+1,0} \rangle| = p|W_k|^p$$

olduğundan iddia tümevarımdan sağlanır. Böylece G bir p -grubudur. Ayrıca G sonsuz permütasyon grubu olduğundan lokal sonludur. Dolayısıyla sonlu p -grubu nilpotent olduğundan G lokal nilpotent p -grubudur. \square

3.3.2.2. Teorem

G bir sonsuz sonlusu permütasyon grubu olsun. Eğer G nin mükemmel ve geçişli olan ancak $MNFC$ -grup olmayan bir K alt grubu varsa K , BT -grup olmayan bir NBT -gruptur.

¹ p^{p+1} , $|\Delta_{2,0}|!$ i bölen p nin en büyük kuvvetidir.

² $L = W_1 \times W_1^{x_{2,0}} \times \dots \times W_1^{x_{2,0}^{p-1}}$ olmak üzere $W_k^{x_{k+1,0}^i}$ ler değişmeli, destekleri ayrık olduğundan $W_k^{x_{k+1,0}^i}$ ler L nin normal alt gruplarıdır. Dolayısıyla L , $\text{Sym}(\Delta_{k+1,0})$ içinde iç direkt çarpımdır.

İspat

Ω bir sonsuz küme olmak üzere $G \leq \text{FSym}(\Omega)$ olsun. Kabul edelim ki G nin mükemmel ve geçişli olan ancak $MNFC$ -grup olmayan bir K altgrubu olsun. K mükemmel olduğundan Lemma 2.3.13 ve [39]'daki Theorem 1'den K nin her öz normal altgrubunun her yörüngesi sonludur. Böylece K bir NBT -gruptur.

K geçişli olduğundan K nin tek yörüngesi sonsuz Ω kümesidir. Dolayısıyla [34]'teki Theorem 1'den K bir FC -grup değildir. Hipotezden K grubu $MNFC$ -grup olmadığından K nin FC -grup olmayan bir öz altgrubu vardır. Böylece [34]'teki Theorem 1 den K nin sonsuz yörüngeli bir öz altgrubu olduğundan K permütasyon grubu BT -grup değildir. \square

3.3.2.3. Teorem

Herhangi bir p asal sayısı için BT -grup olmayan mükemmel sonlumsu NBT - p -grubu vardır.

İspat

Kabul edelim ki W grubu Teorem 3.3.2.1'de inşâ edilen Wiegold'un grup örneği olmak üzere W' komütatör altgrubunu inceleyelim. [16]'daki Corollary 8.3A'dan W' , \mathbb{Z}^+ üzerinde geçişli ve $W' = W''$, yani W' mükemmeldir.

Asar'ın G grubu inşâsını kısaca verelim [35–37]. $k \geq 1$ ve $n \geq 0$ tamsayılar ve p bir asal sayı olmak üzere $x_{k,n}$, (3.6)'daki şekilde tanımlı olsun.

$$u_k = x_{k,0}x_{k-1,0} \dots x_{1,0}$$

ve

$$v_k = u_k^{x_{k+1,0}} u_k^{x_{k+1,0}^2} \dots u_k^{x_{k+1,0}^{p-1}}$$

olmak üzere

$$g_k = u_k v_k$$

şeklinde tanımlansın. Dikkat edilecek olursa u_k ve v_k ayrık permütasyonlardır.¹ O zaman [35]'teki Lemma 3.2(a)'dan $u_k = (a_1, a_2, \dots, a_{p^k})$ dir öyle ki $1 \leq a_i \leq p^k$ dir. $G = \langle g_k \mid k = 1, 2, \dots \rangle$ olsun. $p = 2$ için

$$\begin{aligned} x_{1,0} &= (1, 2) & x_{2,0} &= (1, 3)(2, 4) & x_{3,0} &= (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8) \\ x_{4,0} &= (1, 9)(2, 10)(3, 11)(4, 12)(5, 13)(6, 14)(7, 15)(8, 16) & \dots \end{aligned}$$

ve

$$\begin{array}{ll} u_1 = (1, 2) & v_1 = (3, 4) \\ u_2 = (1, 4, 2, 3) & v_2 = (5, 8, 6, 7) \\ u_3 = (1, 8, 4, 6, 2, 7, 3, 5) & v_3 = (9, 16, 12, 14, 10, 15, 11, 13) \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

olmak üzere G nin üreteç elemanlarının bazıları

$$\begin{aligned} g_1 &= (1, 2)(3, 4) \\ g_2 &= (1, 4, 2, 3)(5, 8, 6, 7) \\ g_3 &= (1, 8, 4, 6, 2, 7, 3, 5)(9, 16, 12, 14, 10, 15, 11, 13) \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinindedir. O zaman 1 in $\langle g_k \rangle$ lar altındaki yörüngeleri $\{1, 2, \dots, p^k\}$ olduğundan G , W nun bir geçişli altgrubudur. Şimdi $G \leq W'$ olduğunu gösterelim [36]. Eğer G nin üreteç elemanları W' de olduğu gösterilirse G nin de W' nün içinde olduğu gösterilmiş olur. Her k pozitif tamsayısı için $u_k^{x_i^j}$ ler ayrık permütasyonlar ve $1 \leq i \leq k$ için

$$\begin{aligned} y_i &:= x_{i,0}^{x_{k+1,0}} x_{i,0}^{x_{k+1,0}^2} \dots x_{i,0}^{x_{k+1,0}^{p-1}} \\ &= x_{i,0}^p (x_{i,0}^{p-1})^{-1} x_{i,0}^{x_{k+1,0}} x_{i,0}^{x_{k+1,0}^2} \dots x_{i,0}^{x_{k+1,0}^{p-1}} = \prod_{j=1}^{p-1} [x_{i,0}, x_{k+1,0}^j] \end{aligned} \quad (3.13)$$

olduğundan

$$g_k = u_k v_k = u_k u_k^{x_{k+1,0}} u_k^{x_{k+1,0}^2} \dots u_k^{x_{k+1,0}^{p-1}} = y_k y_{k-1} \dots y_1 \quad (3.14)$$

¹ [35–37] makalelerinde u_k ve v_k nin ayrık permütasyon olduğunu vurgulamak ve işlem kolaylığı için $g_k = u_k \times v_k$ alınmıştır.

dır. $x_{k,0}$ lar W nun ve g_k lar da G nin üreteçleri olduğundan (3.13) ve (3.14)'ten $G \leq W'$ dür. Ayrıca [37]'deki Theorem 1.6(d)'den G' bir *MNFC*-grup olmadığından ve $G \leq W'$ olduğundan W' nün *FC*-grup olmayan bir öz altgrubu vardır. Dolayısıyla W' bir *MNFC*-grup değildir. Böylece iddia Teorem 3.3.2.2'den sağlanır. \square

Dikkat edilecek olursa Lemma 3.2.1.1 ve Teorem 3.3.2.2'den Wiegold'un grup örneğinin komütatör altgrubu bir mükemmel sonsuz *NCBT*- p -grubudur.

Aşağıdaki lemmada [11]'deki Lemma 1'in ispatından yararlanılmıştır.

Sonuç

Her sonsuz *NBT*-grup mükemmeldir.

İspat

Kabul edelim ki bir sonsuz Ω kümesi üzerinde tanımlı bir sonsuz G *NBT*-grubu mükemmel olmasın ve bir $\alpha \in \Omega$ için $\Delta = \alpha^{G'}$ olmak üzere $\Sigma = \{\Delta^g \mid g \in G\}$ olsun. O zaman Lemma 2.3.12'den Δ bir G -bloktur. Ayrıca Δ , G nin bir normal altgrubu olan G' nün bir yörüngesi olduğundan Δ^g ler de G' nün birer yörüngesidir. Böylece $\rho : G \rightarrow \text{Sym}(\Sigma)$, $x \mapsto x^\rho : \Delta^g \mapsto \Delta^{gx}$ şeklinde homomorfizma tanımlanabilir. Böylece G , Σ üzerine geçişli etki eder.

$$x \in K := \text{Ker}\rho \Leftrightarrow \forall \Delta^g \in \Sigma, \Delta^{gx} = \Delta^g \Leftrightarrow x \in \bigcap_{g \in G} G_{\{\Delta^g\}} = \text{Core}_G(G_{\{\Delta\}})$$

dir. $\Delta = \alpha^{G'}$ olduğundan her $y \in G'$ ve her $g \in G$ için

$$\Delta^{gy} = \alpha^{G'gy} = \alpha^{G'g} = \Delta^g$$

olduğundan $G' \leq K$ dır.

ρ yardımıyla $\psi : G/K \rightarrow \text{Sym}(\Sigma)$, $xK \mapsto (xK)^\psi : \Delta^g \mapsto (\Delta^g)^{x^\rho} = \Delta^{gx}$ şeklinde homomorfizması da tanımlanabildiğinden G/K sonsuz¹ abelyan grubu Σ üzerine sadık ve geçişli etki eder. Δ sonlu ve G , Ω üzerinde geçişli olduğundan $\Delta^{xK} \neq \Delta$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır. G/K abelyan olduğundan her $\Delta^g \in \Sigma$ için $(\Delta^g)^{xK} \neq \Delta^g$ dir öyle ki $(\Delta^g)^{xK} \cap \Delta^g = \emptyset$ dir. G , Ω üzerinde geçişli olduğundan $\alpha^G = \Omega$ dir. $x \notin G_{\{\Delta\}} \geq G_\alpha$ ve

¹ G bir *NBT*-grup olduğundan sonlu indeksli öz altgrubu yoktur.

$\Delta = \alpha^{G'}$ olduğundan her $\beta \in \Omega$ için $\beta^x \neq \beta$ dır, yani $\text{supp}(x)$ sonsuz olur ki bu $G \leq \text{FSym}(\Omega)$ hipoteziyle çelişir. Dolayısıyla kabul yanlış olup iddia sağlanır. \square

3.4. GNFC-gruplar

Eğer bir grubun her öz normal altgrubu FC -grup iken grubun kendisi FC -grup değilse bu grubu Genelleştirilmiş NFC -grup (kısaca $GNFC$ -grup) olarak adlandıralım. Bu grup belirli altgrupları FC -grup olan grupların bir başka versiyonu olan NFC -grupların bir genellemesidir [13].¹ Bu kısımda $GNFC$ -gruplarla NBT -gruplar arasındaki bağlantı incelendi.

3.4.1. Lemma

G bir sonsuz, sonlumsu geçişli permütasyon grubu olsun. O zaman G nin bir $GNFC$ -grup olması için gerek ve yeter şart G nin bir NBT -grup olmasıdır.

İspat

İddia [34]'teki Theorem 1'den sağlanır. \square

Aşağıdaki lemmada Lemma 3.4.1.1'in ispatından yararlanarak $MNFC$ -grupların bir genellemesi olan $GNFC$ -grupların belli kısıtlamalar altında NBT -grup olan bir epimorfik görüntüsünün olduğu gösterildi.

3.4.2. Lemma

G bir mükemmel lokal çözülebilir $GNFC$ -grup olsun. O zaman G nin NBT -grup olan bir epimorfik görüntüsü vardır.

İspat

G mükemmel olduğundan $G \neq Z(G)$ dir. Böylece $1 \neq a \in G \setminus Z(G)$ vardır. $C = C_G(a)$, $L = \text{Core}_G(C)$ ve $\bar{G} = G/L$ olsun. Eğer $|G : C|$ sonluysa \bar{G} sonlu olur. Buradan \bar{G} çözülebilir. Ancak hipotezden G mükemmel olduğundan \bar{G} mükemmel olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $|G : C|$ sonsuz ve $\text{Core}_{\bar{G}}(\bar{C}) = \bar{1}$ dir. \bar{N} , \bar{G} nin bir öz normal

¹ $GNFC$ -gruplar, $MNFC$ -grupların bir genellemesidir.

altgrubu olsun. O zaman

$$|\bar{N} : \bar{N} \cap \bar{C}| \leq |N : N \cap C| \leq |\langle a \rangle^G N : (\langle a \rangle^G N) \cap C| \quad (3.15)$$

sağlanır. Lemma 2.5.2.3'ten $\langle a \rangle^G N$ bir FC -gruptur. Böylece $|\langle a \rangle^G N : (\langle a \rangle^G N) \cap C|$ sonludur. Dolayısıyla (3.15)'ten $|\bar{N} : \bar{N} \cap \bar{C}| < \infty$ sağlanır. Ayrıca $|G : C|$ sonsuz olduğunda \bar{G} sonsuzdur. O hâlde Lemma 3.1.1'den \bar{G} bir NBT -gruptur. \square

3.4.1. MNFC-Gruplar

Her elemanı sonlu eşlenikli olan gruba FC -grup denir. Eğer bir grubun her öz altgrubu FC -grup ancak kendisi değilse bu gruba minimal non- FC -grup (kısaca $MNFC$ -grup) denir. Bu kısımda lokal sonlu $MNFC$ -grupların bir BT -grup olan epimorfik görüntüye sahip olmasından hareketle genel olarak lokal sonluluk şartı olmadan bu özelliğin NBT -gruplar tarafından sağlandığı gösterildi. (bkz. [27] Lemma 3.1 ve [10] Theorem)

3.4.1.1. Lemma

G bir mükemmel $MNFC$ -grup olsun. O zaman G nin NBT -grup olan bir epimorfik görüntüsü vardır.

İspat

G grubu mükemmel olup aynı zamanda bir FC -grup olmadığından $|G : C_G(a)|$ sonsuz olacak şekilde bir $a \in G \setminus Z(G)$ elemanı vardır. $C = C_G(a)$, $L = \text{Core}_G(C)$ ve $\bar{G} = G/L$ olsun. O zaman $\text{Core}_{\bar{G}}(\bar{C}) = \bar{1}$ dir. \bar{N} , \bar{G} nin bir öz normal altgrubu olsun. O zaman

$$|\bar{N} : \bar{N} \cap \bar{C}| \leq |N : N \cap C| \leq |\langle a, N \rangle : \langle a, N \rangle \cap C| \quad (3.16)$$

sağlanır. Eğer $\langle a, N \rangle = G$ ise G/N abelyan olduğundan $G' \leq N$ olur ki bu G nin mükemmel olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $\langle a, N \rangle$, G nin öz altgrubu olduğundan bir FC -gruptur. Böylece $|\langle a, N \rangle : \langle a, N \rangle \cap C|$ sonludur. Dolayısıyla (3.16)'ten $|\bar{N} : \bar{N} \cap \bar{C}| < \infty$ sağlanır. Ayrıca $|G : C|$ sonsuz olduğunda \bar{G} sonsuzdur. O hâlde Lemma 3.1.1'den \bar{G} bir NBT -gruptur. \square

3.4.2. Miller-Moreno tipinden gruplar

Bu kısımda *MNFC*-grupların alt sınıfı olan Miller-Moreno tipinden grupların *NBT*-gruplarla arasındaki bağlantı incelenmiştir.

3.4.2.1. Lemma

Lokal sonlu Miller-Moreno tipinden *NBT*-grup yoktur.

İspat

Kabul edelim ki G lokal sonlu Miller-Moreno tipinden bir *NBT*-grup olsun. O zaman [24]'teki Corollary'den $G' \neq G$ dir. Böylece Lemma 2.6.3'ten G bir *MNFC*-grup olduğundan [40]'taki Theorem 10'dan G nin sonlu indeksli bir öz alt grubu vardır ki bu durum Lemma 3.1.2(1) ile çelişir.¹ Dolayısıyla iddia sağlanır. \square

Sonuç

Miller-Moreno tipinden *NBT*-grup mükemmeldir.

İspat

Lemma 3.2.3.2(3) ve Lemma 3.4.2.1'den iddia sağlanır. \square

Sonuç

G abelyan olmayan bir lokal sonlu *NBT*-grup olsun. O zaman K' sonsuz olacak şekilde G nin bir öz alt grubu vardır.

İspat

G nin sonlu indeksli alt grubu olmadığından G bir *FC*-grup değildir. Dolayısıyla Lemma 2.5.4.4'ten G' sonsuzdur. Lemma 3.4.2.1'den G Miller-Moreno tipinden bir grup olamayacağından iddia sağlanır. \square

¹ [40]'taki Theorem 8 ve Theorem 10 dan G/G' sonludur.



4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında BT -grup genelleştirilerek NBT -grup ve bu grubun daha güçlü formu olan $NCBT$ -gruplar tanımlanmıştır. Genel olarak NBT -grupların yapısı incelenmiş ve NBT -grupların $NCBT$ -grup olan alt sınıflarının bazı özellikleri verilmiştir.

Hâlen çözülememiş olan sonlumsu BT -grubun var olup olmadığı sorusu bu çalışmada BT -grup olmayan sonlumsu $NCBT$ -grup örnekleri verilerek BT -grupların bir genellemesi olan NBT -gruplarda olumlu şekilde cevaplanmış ve BT -gruplar için bu soru kısmen sınırlandırılmıştır. Ayrıca BT -grup olmayan ve mükemmel olmayan $NCBT$ -grup örnekleri verilmiştir. Buradan hareketle $NCBT$ -grup olmayan NBT -grup örnekleri var mıdır?

BT -gruplar sayılabilirlerdir. Mükemmel olmayan NBT -grupların sayılabilir kümeler üzerine etki ettikleri gösterildi. Ancak genel olarak NBT -grupların sayılabilirliği hakkında ne söylenebilir? Bu çalışmada verilen NBT -grup örnekleri sayılabilirlerdir ve herhangi bir kardinaliteye sahip basit sonsuz gruplar mükemmel NBT -gruplardır. Abelyan NBT -gruplar yarıdevirli p -gruplarına izomorftur. Mükemmel olmayan sayılamaz NBT -grup örneği var mıdır? Genel olarak sayılamaz basit olmayan NBT -grup örneği var mıdır?

Lokal sonlu BT -grubun p -grubu olduğundan hareketle lokal nilpotent durumda NBT -grupların lokal sonlu Fitting p -grubu olduğu gösterilmiştir. Başka hangi kısıtlamalar altında NBT -gruplar p -gruptur?

Çözülebilir nokta dengeleyenli lokal sonlu BT -grup çözülebilirlerdir. Çözülebilir nokta dengeleyenli NBT -gruplar sayılabilir ve lokal çözülebilir olduğunda çözülebilir olduğu gösterildi.

Ek olarak mükemmel yansonlumsu lokal sonlu BT -grubun var olmadığından hareketle mükemmel lokal çözülebilir yansonlumsu NBT -grubun var olmadığı gösterilmiştir.



KAYNAKLAR

1. Heineken, H. and Mohamed, I. J. (1968). A group with trivial center satisfying the normalizer condition. *Journal of Algebra*, 10(3), 368-376.
2. Hartley, B. (1973). A note on the normalizer condition. *Proceedings Of The Cambridge Philosophical Society*, 74(1), 11-15.
3. Hartley, B. (1974). On the normalizer condition and barely transitive permutation groups. *Algebra and Logic*, 13(5), 334-340.
4. Kuzucuoğlu, M. (1990). Barely transitive permutation groups. *Archiv der Mathematik*, 55(6), 521-532.
5. Betin, C. and Kuzucuoğlu, M. (2009). Description of barely transitive groups with soluble point stabilizer. *Communications in Algebra*, 37(6), 1901-1907.
6. Ol'sanskii, A. Ju. (1979). Infinite groups with cyclic subgroups. *Soviet Mathematics - Doklady*, 245(4), 785-787.
7. Betin, C. (2007). *Barely transitive groups*. Doctoral dissertation, METU Graduate School of Natural and Applied Sciences, Ankara, 1-46.
8. Belyaev, V. V. and Kuzucuoglu, M. (2003). Locally finite barely transitive groups, *Algebra and Logic*, 42(3), 147-152.
9. Belyaev, V. V. (1998). On the question of existence of minimal non-FC-groups. *Siberian Mathematical Journal*, 39(6), 1093-1095.
10. Leinen, F. (1999). A reduction theorem for perfect locally finite minimal non-FC groups. *Glasgow Mathematical Journal*, 41(1), 81-83.
11. Hartley, B. and Kuzucuoğlu, M. (1997). Non-simplicity of locally finite barely transitive groups. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 40(3), 483-490.
12. Kuzucuoğlu, M. (2007). Barely transitive groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 31(5), 79-94.
13. Alkış, O., Arikan, Ah. and Arikan, Ay. (2022). On groups with certain proper FC-subgroups. *Algebras and Representation Theory*, 25(4), 953-961.
14. Arikan, Ah., Arikan, Ay. and Zitouni, A. (2020). On finitary series of groups represented as permutation or linear groups. *Communications in Algebra*, 48(3), 1356-1370.

15. Hrbacek, K. and Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory*. (Third Edition). New York: Marcel Dekker, 291.
16. Dixon, J. D. and Mortimer, B. (1996). *Permutation Groups*. (First Edition). New York: Springer, 348.
17. Cameron, P. J. (1996) Cofinitary permutation groups. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 28(2), 113-140.
18. Asar, A. O. (2006). On finitary permutation groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 30(1), 101-116.
19. Robinson, D. J. S. (1996). *A Course in the Theory of Groups*. (Second Edition). New York: Springer, 502.
20. Robinson, D. J. S. (1972). *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups Part 1-2*. (First Edition). Berlin, Heidelberg: Springer, 466.
21. Tomkinson M. (1984). *FC-groups*. (First Edition). Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 171.
22. Neumann, B. H. (1951). Groups with Finite Classes of Conjugate Elements (In Memoriam Issai Schur), *Proceedings of the London Mathematical Society*, s3-1(1), 178-187.
23. Fuchs, L. P. (1970). *Infinite Abelian Groups Volume 1*. (First Edition). New York: Academic Press, 290.
24. Belyaev, V. V. (1978). Groups of Miller-Moreno type. *Siberian Mathematical Journal*, 19(3), 356-360.
25. Khukro, E. I., Makarenko, N. Y. (2007). Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities. *Doklady Mathematics*, 75(1), 112-114.
26. Arikan, A. (2019). On certain \mathfrak{F} -perfect groups. *Mathematical Reports*, 21(71), 123-133.
27. Asar, A. O. (1997). Barely transitive locally nilpotent p -groups. *Journal of the London Mathematical Society*, 55(2), 357-362.
28. Carin, V. S. (1949). A remark on the minimal condition for subgroups. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 66, 575-576.
29. McDougall, D. (1970). Soluble groups with the minimum condition for normal subgroups. *Mathematische Zeitschrift*, 118(3), 157-167.

30. Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*. (Thirteenth Edition). New York: Springer, 504.
31. Fuchs, L. (1960). *Abelian Groups*. (Third Edition). Oxford: Pergamon Press, 367.
32. Dixon, M. R. (1994). *Sylow theory, formations and Fitting classes in locally finite groups*. (First Edition). Singapore: World Scientific Publishing, 304.
33. Hartley, B. (1977). Uncountable Artinian modules and uncountable soluble groups satisfying min- n . *Proceedings of the London Mathematical Society*, 35(3), 55-75.
34. Wiegold, J. (1974). Groups of finitary permutations. *Archiv der Mathematik*, 25(1), 466-469.
35. Asar, A. O. (2011). Totally imprimitive permutation groups with the cyclic-block property. *Journal of Group Theory*, 14(1), 127-141.
36. Asar, A. O. (2017). Permutation with cyclic block property and *MNFC*-groups. *Turkish Journal of Mathematics*, 41(4), 983-997.
37. Asar, A. O. (2017). Subgroups of totally imprimitive permutation groups. *Communications in Algebra*, 45(6), 2690-2707.
38. Humphreys, J. F. (1994). *A course in group theory*. (First Edition). Great Britain: Oxford University Press, 279.
39. Neumann, P. M. (1976). The structure of finitary permutation groups. *Archiv der Mathematik*, 27(1), 3-17.
40. De Falco, M. (2016). A note on groups with restrictions on centralizers of infinite index. *Note di Matematica*, 36(1), 1-13.





GAZİ GELECEKTİR..