



**DEFORME ÇADIR DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNDEKİ
DİNAMİK SİSTEMLERİN İNCELENMESİ**

Yüksek Lisans Tezi

DAMLA AYDOĞDU

Eskişehir 2022

DEFORME ÇADIR DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNDEKİ DİNAMİK
SİSTEMLERİN İNCELENMESİ

DAMLA AYDOĞDU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uygulamalı Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa SALTAN

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ağustos 2022

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Damla AYDOĞDU' nun "Deforme Çadır Dönüşümleri Üzerindeki Dinamik Sistemlerin İncelenmesi" başlıklı tezi 25/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç. Dr. Mustafa SALTAN
Üye	: Prof. Dr. Yunus ÖZDEMİR
Üye	: Doç. Dr. Serhan EKER

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

25/08/2022

DANIŞMAN ONAYI

DaniŐmanlıđını yurüttüğüm yüksek lisans öğrencisi Damla AYDOĞDU “Deforme Çadır Dönüşümleri Üzerindeki Dinamik Sistemlerin İncelenmesi” başlıklı tez çalışmasını tamamlamıŐtır. HazırlamıŐ olduğu tez tarafımca incelenmiŐ ve öğrencinin tez savunması sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüŐtür.

Tez DaniŐmanı
Doç. Dr. Mustafa SALTAN

ÖZET

DEFORME ÇADIR DÖNÜŞÜMLERİ ÜZERİNDEKİ DİNAMİK SİSTEMLERİN İNCELENMESİ

Damla AYDOĞDU

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ağustos 2022

Danışman: Doç. Dr. Mustafa SALTAN

Dinamik sistemler üzerine yapılan çalışmalar birçok disiplinde karşımıza çıkmaktadır. Bu çalışmalar arasında, literatürde tent dönüşümü olarak bilinen ve ismini grafiğinin çadıra benzemesinden alan çadır dönüşümü önemli bir yere sahiptir. Çadır dönüşümünün dinamiği ikilik sistemde daha basit bir şekilde incelenmekte ve periyodik noktaları genel bir formda yazılabilmektedir. Ayrıca, çadır ailesinin ilginç dinamiği çatallanma diyagramı ile görülebilmektedir.

Bu tezde, ilk olarak klasik çadır dönüşümü ikilik tabanda ifade edildikten sonra çadır ailesi ve bu ailenin çatallanma diyagramı detaylı olarak verilmektedir. Daha sonra, çadır dönüşümünün inşasından yararlanarak deforme edilmiş çadır dönüşümleri ikilik tabanda ifade edilmekte ve bu dinamik sistemler için genel bir formül verilmektedir. Ayrıca, deforme çadır dönüşümünün ilk versiyonu için periyodik noktalar genel bir formda ifade edildikten sonra bu dinamik sistemin Devaney anlamında katikliği araştırılmaktadır. Ek olarak, bu dinamik sistem için bir aile tanımlanmakta ve bu ailenin çatallanma diyagramı verilmektedir.

Tezin son bölümde ise, bu inşa kullanılarak farklı bir deforme çadır dönüşümü ele alınmaktadır. Ayrıca, tanımlanan çadır dönüşümlerinin topolojik eşlenik olup olmadıkları gösterilmektedir.

Anahtar Sözcükler: Çadır Dönüşümü, Dinamik Sistemler, Periyodik Noktalar, Devaney Kaos.

ABSTRACT

INVESTIGATION OF THE DYNAMICAL SYSTEMS ON DEFORMED TENT MAPS

Damla AYDOĞDU

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, August 2022

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa SALTAN

Studies on dynamical systems appear in many disciplines. Among these works, the map, which is known as tent map in the literature and takes its name from the similarity of its graphic to a tent, has an important place. The dynamics of the tent map is analyzed in a simpler way in the binary system and its periodic points can be written in a general form. Also, the tent family has an interesting dynamic and the bifurcation diagram can be illustrated.

In this thesis, firstly, the tent family and bifurcation diagram are given in detail after the classical tent map is expressed in binary. Then, using the construction of the tent map, deformed tent maps are expressed in binary, and a general formula is given for these dynamical systems. In addition, after the periodic points are expressed in a general form for the first version of the deformed tent map, the chaoticity of this dynamical system in the sense of Devaney is investigated. Also, a family is defined for this dynamical system and the bifurcation diagram is given.

In the last part of the thesis, a different deformed tent map is discussed using this construction. We also show that whether these tent maps are topologically conjugate or not.

Keywords: Tent Map, Dynamical Systems, Periodic Points, Devaney Chaos.

TEŐEKKÖR

Bu tez çalıŐmasının ortaya çıkmasından sonlanmasına kadar geçen sÖrete bilgi, tecrÖbe ve fikirleriyle yol gÖsteren, her zaman koŐulsuz destek olan değerli tez da-nıŐmanım Doç. Dr. Mustafa SALTAN'a en içten teŐekkÖrlerimi sunarım.

Manevi desteklerini her zaman hissettiđim ÖZTÖRK ve AYDOĞDU ailelerine teŐekkÖr ederim.

Son olarak, her daim yanımda olan, yol gÖsteren, destekleyen; bu sÖrete gÖs-termiŐ olduğu anlayıŐ, sabır ve fedakarlıklardan dolayı sevgili eŐim ArŐ. Gör. Dr. Volkan AYDOĞDU'ya gönÖlden sonsuz teŐekkÖr ederim.

Damla AYDOĞDU

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Damla AYDOĞDU

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XII
1. GİRİŞ.....	1
2. KAOTİK DİNAMİK SİSTEMLER	3
2.1. Dinamik Sistem Nedir?	3
2.2. Dinamik Sistem Kavramı ve Örnekleri	4
2.3. Temel Kavramlar	4
2.3.1. Grafik analiz yöntemiyle bir noktanın yörüngesini bulma	9
3. KLASİK ÇADIR DÖNÜŞÜMÜ	12
3.1. Çadır Dönüşümünün İnşası	12
3.2. Çadır Ailesi	18
3.2.1. Çadır ailesinin çatallanma diyagramı.....	22
4. DEFORME EDİLMİŞ ÇADIR DÖNÜŞÜMLERİ	23

4.1. T_{d_1} Dönüşümünün İnşası	23
4.2. $\{T_{td_1}\}$ Deforme Çadır Ailesi	24
4.2.1. $\{T_{td_1}\}$ deforme çadır ailesinin çatallanma diyagramı ..	29
4.3. T_{d_1} Dönüşümünün Dinamiğinin İncelenmesi	30
4.3.1. T_{d_1} dönüşümünün periyodik noktalarının hesaplanması	32
4.3.2. T_{d_1} dönüşümünün kaotikliğinin incelenmesi	33
4.4. T_{d_2} Dönüşümünün İnşası	35
4.4.1. T_{d_2} dönüşümünün dinamiğinin incelenmesi	37
4.5. T_{d_3} Dönüşümünün İnşası	41
4.6. T_{d_n} Dönüşümünün İnşası	43
4.7. Deforme Çadır Dönüşümlerinin Farklı Bir Versiyonu	44
5. SONUÇ.....	53
KAYNAKÇA.....	54
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 1.1.	Çadır dönüşümü	1
Şekil 2.1.	Lojistik ailenin çatallanma diyagramı	8
Şekil 2.2.	$x = 0.113$ noktasının yörüngesi	9
Şekil 2.3.	$x = \frac{4}{5}$ noktasının yörüngesi	10
Şekil 2.4.	$x = \frac{2}{7}$ noktasının yörüngesi	10
Şekil 2.5.	$x = \frac{2}{15}$ noktasının yörüngesi	11
Şekil 3.1.	$T(x) = (g \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası	12
Şekil 3.2.	Çadır dönüşümü ve $y = x$ doğrusu	13
Şekil 3.3.	T, T^2, T^3 ve T^4 dönüşümleri	14
Şekil 3.4.	$T_{\frac{1}{4}}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	19
Şekil 3.5.	$T_{\frac{1}{2}}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	19
Şekil 3.6.	$T_{\frac{3}{4}}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	21
Şekil 3.7.	$T_1(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	21
Şekil 3.8.	Çadır ailesinin çatallanma diyagramı	22
Şekil 4.1.	$T_{d_1}(x) = (g \circ g_1 \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası	23
Şekil 4.2.	T_{d_1} dönüşümü	24
Şekil 4.3.	$T_{\frac{1}{4}d_1}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi ...	25
Şekil 4.4.	$T_{\frac{1}{2}d_1}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi ...	26
Şekil 4.5.	$T_{\frac{3}{4}d_1}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi ...	27
Şekil 4.6.	$T_{d_1}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	29
Şekil 4.7.	$\{T_{td_1}\}$ deforme çadır ailesinin çatallanma diyagramı	29
Şekil 4.8.	$T_{d_1}^2$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	31
Şekil 4.9.	$T_{d_1}^3$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	32
Şekil 4.10.	$T_{d_2}(x) = (g \circ g_1 \circ g_2 \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası	36
Şekil 4.11.	T_{d_2} dönüşümünün grafiği	37
Şekil 4.12.	$T_{d_2}^2$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	38
Şekil 4.13.	$T_{d_2}^3$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	40
Şekil 4.14.	$T_{d_2}^4$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	40

Şekil 4.15. $T_{d_2}^5$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	41
Şekil 4.16. $T_{d_3}(x) = (g \circ g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası	42
Şekil 4.17. T_{d_3} dönüşümünün grafiği	43
Şekil 4.18. $T_{d'}(x) = (g \circ g_1 \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası	44
Şekil 4.19. $T_{d'}$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	45
Şekil 4.20. $T_{d'}^2$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	47
Şekil 4.21. $T_{d'}^3$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	49
Şekil 4.22. $T_{d'}^4$ dönüşümünün grafiği	51
Şekil 4.23. $T_{d'}^5$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi	52



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- T : Çadır (Tent) dönüşümü
- $\{T_t\}$: Çadır ailesi
- $\{T_{td_1}\}$: Deforme edilmiş çadır ailesi
- T_{d_1} : Çadır dönüşümünün 1. deformasyonu
- T_{d_2} : Çadır dönüşümünün 2. deformasyonu
- T_{d_3} : Çadır dönüşümünün 3. deformasyonu
- T_{d_4} : Çadır dönüşümünün 4. deformasyonu
- T_{d_n} : Deforme edilmiş çadır dönüşümünün genel hali
- $T_{d'}$: Deforme edilmiş çadır dönüşümünün farklı bir versiyonu
- (X, d) : Metrik uzay
- $\{X; f\}$: Dinamik sistem
- $f \approx_h g$: Topolojik denklik
- B_p : p sabit noktasının çekim havzası
- $O_f(x_0)$: x_0 noktasının f fonksiyonu altındaki yörüngesi

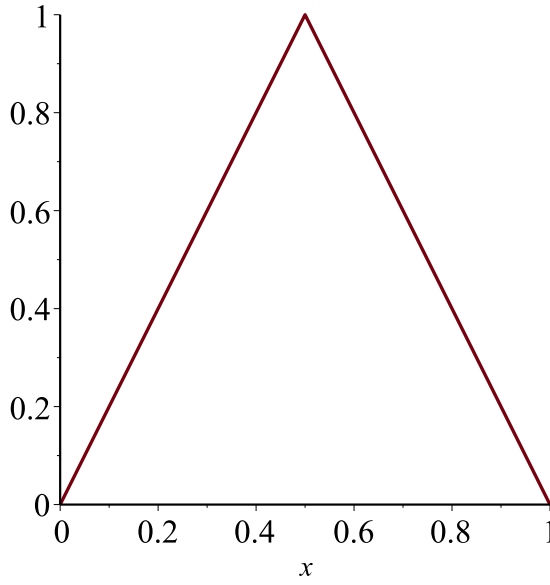
1. GİRİŞ

Dinamik sistemler ayrık zamanlı ve sürekli olmak üzere farklı katagorilere ayrılmaktadır. Bu tezde, ayrık dinamik sistemlerin en temel modellerinden biri olan ve adını grafiğinden alan çadır (tent) dönüşümü detaylı olarak incelenmektedir. Bu dönüşüm,

$$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır (Bkz. Şekil 1.1). Literatürde birçok kaynakta ayrık dinamik sistemler için temel bir model olarak verilmektedir ([1-7]).



Şekil 1.1. Çadır dönüşümü

$\{[0, 1]; T\}$ dinamik sisteminin önemli özelliklerinden biri bu sistemin çok basit görünmesine karşın iterasyonları detaylı olarak incelendiğinde çok ilginç sonuçlarla karşılaşılmasıdır.

$$0 < t \leq 1 \text{ için } T_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

$$T_t(x) = \begin{cases} 2tx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2t(1 - x) & , \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere $\{T_t\}$ çadır ailesi için belli parametrelerde bu inceleme daha basit olmasına rağmen sistemin $t = 1$ için kaotik olduğu görülmektedir.

Bu tezde, klasik çadır dönüşümünün inşası kullanılarak deforme edilmiş çadır dönüşümleri elde edilecektir. Bu amaç için önce Bölüm 2’de temel tanım, kavram ve teoremler ifade edildikten sonra Bölüm 3’de klasik çadır dönüşümü, çadır ailesi ve bu ailenin çatallanma diyagramı detaylı olarak verilecektir. Bölüm 4’de ise deforme çadır dönüşümleri ele alınacaktır. Bölüm 4.1’de, bu deforme dönüşümlerden biri olan T_{d_1} detaylı olarak incelenecektir. Özellikle periyodik noktalarını formülüle edebilmek için ikilik sistemdeki karşılığı yazılacak ve böylece T_{d_1} ve iterasyonları daha kolay formülüle edilecektir. Ayrıca; Bölüm 4.2’de, $\{T_{d_1}\}$ ailesi tanımlanıp çatallanma diyagramı verilecek ve $\{T_t\}$ ile $\{T_{td_1}\}$ aileleri karşılaştırılacaktır. Bölüm 4.3’de, T_{d_1} dönüşümünün dinamiği incelenecektir ve bu dönüşümün periyodik noktalarının kümesinin yoğun olmadığı ve topolojik geçişken olmadığı gösterildikten sonra Devaney anlamında kaotik olmadığı sonucuna varılacaktır. Bölüm 4.4’de, T_{d_2} dönüşümü inşa edilecek ve dinamiği incelenerek kaotik olmadığı sonucuna varılacaktır. Bölüm 4.5’de, T_{d_3} dönüşümü inşa edildikten sonra Bölüm 4.6’da, deforme edilmiş çadır dönüşümlerinin n . deformasyonu için genel bir formül verilecektir. Son olarak, Bölüm 4.7’de, deforme çadır dönüşümlerinin farklı bir versiyonu olan $T_{d'}$ dönüşümü ikilik tabanda gösterilecektir.

2. KAOTİK DİNAMİK SİSTEMLER

Bu bölümde; dinamik sistem tanımı, bazı önemli teoremler ve örnekler verildikten sonra Devaney kaos tanımı ve topolojik geçişkenlik kavramları ifade edilecektir.

2.1. Dinamik Sistem Nedir?

Dinamik sistemler kabaca hareket halindeki süreçtir. Bu tür süreçler tüm bilim dallarında hatta günlük yaşantımızda ortaya çıkmaktadır. Basit örnekler vermek gerekirse, hava durumu ve borsa zamana bağlı olarak değişen sistemlerdir. Ayrıca, bir popülasyonun artışı ya da azalışı, basit bir sarkacın hareketi, kimyasal değişiklikler, göklerdeki gezegenlerin ve galaksilerin hareketi ilk akla gelen dinamik sistem örnekleri olarak verilebilir. Anlaşıldığı gibi dinamik sistemlere günlük yaşantımızdan bile birçok örnek verilebilir. Buradaki önemli nokta, bir dinamik sistem zaman içinde değiştiğinden sistemdeki belli bir durumun belli bir zaman sonra ne olduğunu tahmin etmektir. Örneğin, bir dinamik sistemi hava durumu olarak alırsak, belli bir bölgedeki havanın yarın güneşli, yağmurlu ya da karlı olup olmayacağını tahmin etmek önemlidir. Hatta, gelişen teknoloji ile bu tahminler artık haftalık ve aylık olarak da yapılmaktadır.

Günümüzde, bazı doğal felaketler için belli önlemlerin alınmasında bu tahminler çoğu zaman işe yarasa da, bazı tahminlerde hava yağmurlu tahmini yapılırken güneşli bir günle karşılaşılabilir. Bu ise sistemin kaotik olması ile alakalıdır. Yani, başlangıç şartlarındaki küçük değişiklikler sistemin belli bir zaman sonraki tahminini zorlaştırmaktadır. Başlangıç şartlarına hassas bağımlılık kaotik dinamik sistemlerin en önemli özelliklerinde biridir. Buna ek olarak; sistem topolojik geçişken ve periyodik noktalarının kümesi yoğun ise bu dinamik sisteme Devaney anlamında kaotiktir denir. Son yıllarda bu sistemlerle ilgili birçok çalışma yapılmaktadır ([1-10]).

Sonuç olarak, bazı dinamik sistemler tahmin edilebilirken bazıları ise tahmin edilemeyebilirler. Ayrıca, dinamik sistemler sürekli ve ayrık olmak üzere ikiye ayrılırlar. Zamanın yıllar gibi ayrık olarak ölçüldüğü sistemler ayrık zamanlı (kısaca ayrık) dinamik sistemlerdir. Zamanın sürekli bir değişken olduğu sistemler ise sürekli dinamik sistemler olarak adlandırılır ve diferansiyel denklemler bu sistemlerin örneklerindedir ([10]). Bu tez boyunca, ayrık dinamik sistem örneklerinden biri olan çadır dönüşümü ele alınacaktır.

2.2. Dinamik Sistem Kavramı ve Örnekleri

Tanım 2.1. (X, d) bir metrik uzay olmak üzere, $\phi : \mathbb{N} \times X \rightarrow X$ fonksiyonu

i. $\forall x \in X$ için $\phi(0, x) = x$

ii. $\forall s, t \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in X$ için $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$

koşullarını sağlıyorsa ϕ fonksiyonuna X metrik uzayında kesikli dinamik sistem denir. Eğer \mathbb{N} yerine \mathbb{R} alınrsa ϕ fonksiyonu X üzerinde bir sürekli dinamik sistemdir denir ([2,3]). Burada X durum uzayı, \mathbb{N} (veya \mathbb{R}) kümesini ifade etmektedir.

Not: Kesikli dinamik sistem için 1 birim zaman sonra keyfi bir x noktasının durumunu bildiğimizi varsayalım. Yani, $\phi(1, x) = x_1 = f(x)$ olsun. Bu durumda;

$$\phi(2, x) = \phi(1 + 1, x) = \phi(1, \phi(1, x)) = \phi(1, x_1) = x_2 = f(x_1) = f(f(x)) = f^2(x)$$

$$\phi(3, x) = \phi(1 + 2, x) = \phi(1, \phi(2, x)) = \phi(1, x_2) = x_3 = f(x_2) = f(f^2(x)) = f^3(x)$$

⋮

$$\phi(n, x) = \phi(1 + n - 1, x) = \phi(1, \phi(n - 1, x)) = \phi(1, x_{n-1}) = x_n = f^n(x)$$

elde edilir.

Tanım 2.2. (X, d) metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olmak üzere $\{X; f\}$ ikilisine kesikli dinamik sistem denir ([2]).

2.3. Temel Kavramlar

Tanım 2.3. X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in X$ için $f(x_0) = x_0$ ise x_0 noktasına f fonksiyonunun sabit noktası denir ([3, 6]).

Tanım 2.4. X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in X$ için $f^p(x_0) = x_0$ eşitliğini sağlayan en küçük p sayısı için x_0 noktasına f fonksiyonunun periyodu p olan noktası denir ([3, 6]).

Tanım 2.5. $x_0; f$ fonksiyonunun p -periyotlu noktası ise

$$\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0)\}$$

kümesine p -li döngü adı verilir ([3, 6]).

Tanım 2.6. X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $x_0 \in X$ için;

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots$$

dizisine x_0 noktasının yörüngesi (orbiti) denir ([3, 6]).

Tanım 2.7. X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $x_1 \in X$ noktası verilsin. x_0, f fonksiyonunun sabit noktası olsun. x_1 noktasının yörüngesi;

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_0, x_0, x_0, \dots$$

olacak şekilde ise x_1 noktasına f fonksiyonunun akıbeti sabit noktası denir ([3, 6]).

Tanım 2.8. X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $x_1 \in X$ noktası verilsin. x_0, f fonksiyonunun p -periyotlu noktası olsun. x_1 noktasının yörüngesi;

$$x_1, x_2, \dots, x_m, x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0), x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0), \dots$$

olacak şekilde ise x_1 noktasına f fonksiyonunun akıbeti p -periyotlu noktası denir ([3, 6]).

Tanım 2.9. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve sabit noktası p olsun.

$\exists \epsilon > 0$ için $|x - p| < \epsilon$ olacak şekilde $\forall x \in I$ için $\lim_{x \rightarrow \infty} f^n(x) = p$ ise p 'ye f 'nin asimtotik kararlı sabit noktası veya çekici sabit noktası denir ([3, 6]).

Tanım 2.10. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve sabit noktası p olsun.

$\exists \epsilon > 0$ için $0 < |x - p| < \epsilon$ olacak şekilde $\forall x \in I$ için $|f(x) - p| > |x - p|$ ise p ye f nin itici sabit noktası denir ([3, 6]).

Teorem 2.11. p, f fonksiyonunun sabit noktası ve f, p 'de türevlenebilir olsun.

a. Eğer $|f'(p)| < 1 \Rightarrow p$, çekici sabit noktadır.

b. Eğer $|f'(p)| > 1 \Rightarrow p$, itici sabit noktadır.

c. Eğer $|f'(p)| = 1 \Rightarrow$ test sonuç vermez. Yani, p itici olabilir yada çekici olabilir yada ne itici ne çekici olabilir ([3, 4, 6]).

Tanım 2.12. p , f fonksiyonunun sabit noktası olsun.

$n \rightarrow \infty$ iken $f^n(x) \rightarrow p$ olacak şekilde tanım kümesindeki tüm x noktalarından oluşan kümeye p sabit noktasının çekim havzası denir B_p ile gösterilir ([6]).

Tanım 2.13. x , f fonksiyonunun p -periyotlu noktası olsun.

i. Eğer x , f^p fonksiyonunun çekici sabit noktası ise x noktasına f 'nin p -periyotlu çekici sabit noktası denir.

ii. Eğer x , f^p fonksiyonunun itici sabit noktası ise x noktasına f 'nin p -periyotlu itici sabit noktası denir ([3, 6]).

Teorem 2.14. f fonksiyonu p noktasında sürekli ve x noktasının iterasyonları f 'nin tanım kümesinde olsun.

$n \rightarrow \infty$ iken $f^n(x) \rightarrow p$ ise p , f 'nin sabit noktasıdır ([6]).

Sonuç 2.15. $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $(f^n(x))$ dizisi sınırlı ve monoton bir dizi olsun.

$n \rightarrow \infty$ iken $f^n(x) \rightarrow p$ olacak şekilde p sabit noktası vardır ([6]).

Tanım 2.16. $O_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$ için $\overline{O_f(x_0)} = X$ ise x_0 , X de yoğun yörüngeye sahiptir ([3, 6, 9]).

Tanım 2.17. (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu;

i. Başlangıç şartlarına hassas bağımlı,

ii. Topolojik geçişken,

iii. Periyodik noktaların kümesi X 'de yoğun,

özelliklerine sahip ise $\{X; f\}$ dinamik sistemi Devaney anlamında kaotiktir denir ([2-6]). Bu tanımda geçen ilk üç koşulu kısaca ifade edelim.

(X, f) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun.

Tanım 2.18. Eğer $\exists \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall x \in X$ ve x noktasının keyfi bir $B(x, \delta)$ komşuluğu $d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon$ olacak şekilde bir $y \in B(x, \delta)$ ve $n \geq 0$ tam sayısı var ise $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır. Yani; X durum uzayında hangi noktayı alırsak alalım bu noktanın çok yakınında olan fakat belli bir zaman sonra bu noktadan uzaklaşan bir nokta vardır ([2, 3-4, 6]).

Tanım 2.19. (X, d) metrik uzayında U ve V açık alt kümesi için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ varsa f fonksiyonu topolojik geçişkendir. Yani; X 'in herhangi bir açık alt kümesi alındığında boştan farklı başka bir açık alt küme ile belli bir zaman sonra ortak noktası vardır ([2, 3-4, 6]).

Tanım 2.20. X 'nin herhangi bir x noktasına yeterince yakın olan periyodik noktaları varsa f 'nin periyodik noktaları kümesi X 'de yoğundur denir ([2, 3-4, 6]).

Teorem 2.21. X bir topolojik uzay ve X 'in boş olmayan hiç bir U açık alt kümesinin U 'da yoğun ve sonlu bir alt kümesi olmasın. Bu durumda $f : X \rightarrow X$ fonksiyonu yoğun bir yörüngeye sahip ise topolojik geçişkendir ([9]).

Teorem 2.22. (X, d) metrik uzay, $f : X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu topolojik geçişken ve periyodik noktaları X 'de yoğun ise f başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır ([8]).

Tanım 2.23. (X, d_1) ve (Y, d_2) iki metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $h \circ f = g \circ h$ olacak şekilde h homeomorfizmi varsa f ve g fonksiyonları topolojik eşleniktir denir. Bu durumda; h homeomorfizmasına f ile g arasındaki eşlenik dönüşüm denir ve $f \approx_h g$ ile gösterilir. Topolojik eşlenik olma bir denklik bağıntısıdır. Bu durumda $\{X, f\}$ ve $\{Y, g\}$ dinamik sistemleri topolojik denktir denir ([3-4, 6]).

Önerme 2.24. $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ fonksiyonları için $f \approx_h g$ olsun.

1. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $h \circ f^n = g^n \circ h$ dır.
2. c , f 'nin m -periyotlu noktası ise $h(c)$ de g 'nin m -periyotlu noktasıdır.
3. f topolojik geçişkendir \iff g topolojik geçişkendir.
4. f 'nin periyodik noktaları yoğundur \iff g 'nin periyodik noktaları yoğundur

5. f kaotiktir $\iff g$ kaotiktir ([3-6]).

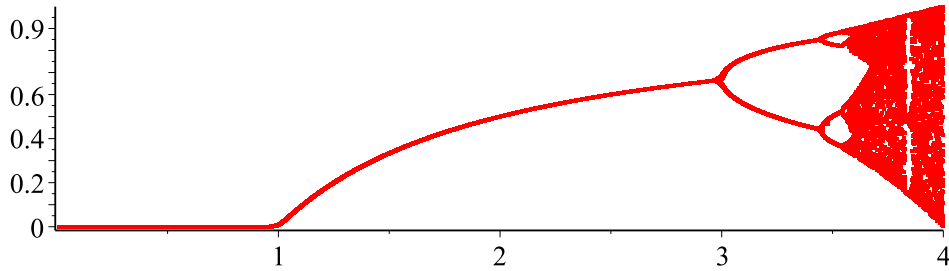
Tanım 2.25. $\{f_\mu\}$ parametrik ailesi verilsin. Eğer; μ_0 dan μ ye geçerken f_μ nün periyodik noktalarının sayısı veya doğası (çekiciliği ve iticiliği) değişiyor ise f_μ ailesi μ_0 da çatallanmaya sahiptir denir ([3-6]).

Örnek 2.26. $f_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1], 0 < t \leq 4$

$$f_t(x) = tx(1 - x)$$

olmak üzere t parametresine bağlı olarak elde edilen $\{f_t(x)\}$ ailesi lojistik aile olarak adlandırılır.

Lojistik ailesinin çatallanma diyagramı aşağıdaki gibidir:

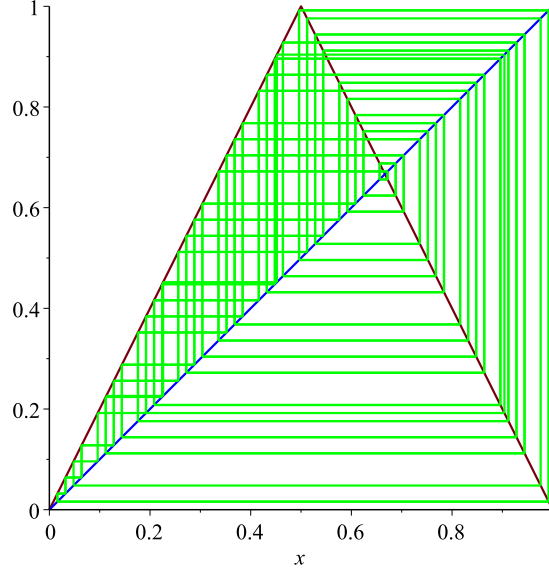


Şekil 2.1. Lojistik ailenin çatallanma diyagramı

Şekil 2.1’de görüldüğü gibi $0 < t \leq 1$ iken f_t ’nin bir tek çekici sabit noktası vardır ve bu sabit nokta $p_0 = 0$ dır. $1 < t \leq 3$ iken t ’nin iki sabit noktası vardır. $p_0 = 0$ sabit noktası itici iken $p_1 = 1 - \frac{1}{t}$ sabit noktası çekici sabit noktadır. $3 < t < 4$ iken bu sabit noktalar itici sabit noktalardır fakat çekici 2-periyotlu noktalar ortaya çıkar. Bu ise Şekil 2.1’de görüldüğü gibi çatallanmaya sebep olmaktadır (Bkz. ([3-6])).

2.3.1. Grafik analiz yöntemiyle bir noktanın yörüngesini bulma

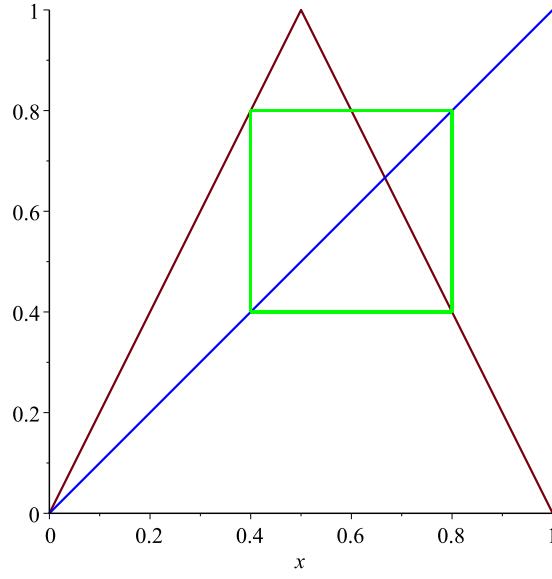
Verilen bir noktanın belli bir zaman sonra durumu hakkında bilgi sahibi olmanın yöntemlerinden biri grafik analizidir. Şekil 2.2'de 0.113 noktasının yörüngesi verilmektedir.



Şekil 2.2. $x = 0.113$ noktasının yörüngesi

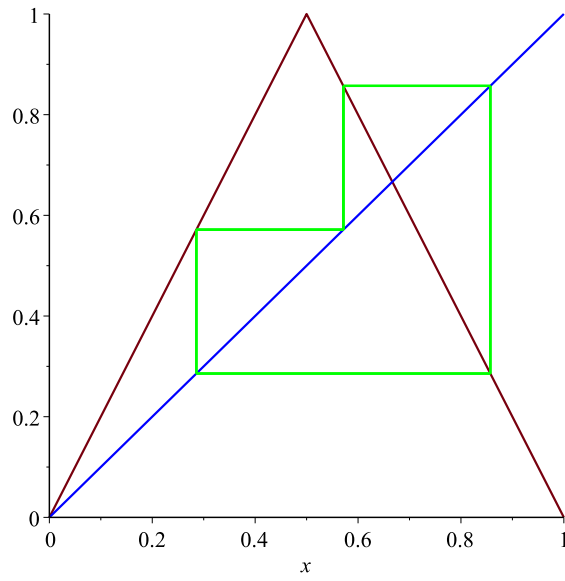
$f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir noktası verildiğinde bu noktanın yörüngesi grafik analiz yöntemiyle bulunabilir. Şekil 2.3, 2.4, 2.5, 2.6'da farklı noktaların izlediği yollar yeşil renkle gösterilmiştir. x noktasının yörüngesini elde etmek için önce $(x, f(x))$ noktası grafik üzerinde işaretlenir. Sonra bu noktadan $y = x$ doğrusuna yatay doğru çizilir ve $y = x$ doğrusunu kestiği nokta işaretlenir. Daha sonra $(f(x), f(x))$ noktasından dikey olarak bir doğru çizilir ve grafiği kestiği nokta olan $(f(x), f^2(x))$ noktası işaretlenir. Sırasıyla yatay olarak $y = x$ doğrusuna ve dikey olarak grafiğe doğru gidilirse ve bu süreç devam edilirse x noktasının yörüngesi elde edilir.

2-periyotlu bir noktanın yörüngesi:



Şekil 2.3. $x = \frac{4}{5}$ noktasının yörüngesi

3-periyotlu bir noktanın yörüngesi:



Şekil 2.4. $x = \frac{2}{7}$ noktasının yörüngesi

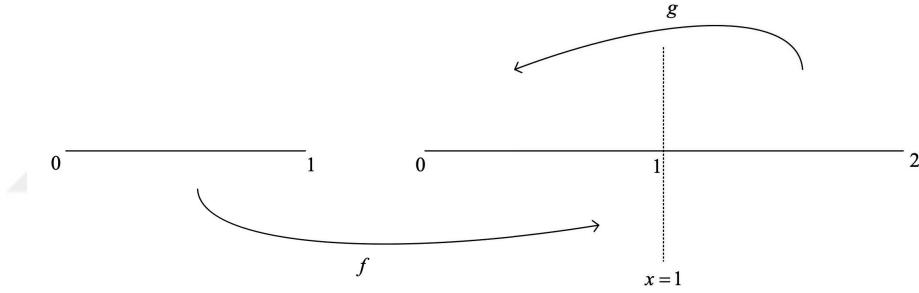
3. KLASİK ÇADIR DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde, kaotik sistemlerin en temel örneklerinden $[0, 1]$ üzerinde tanımlı çadır dönüşümü detaylı olarak incelenecektir ([3-6]).

3.1. Çadır Dönüşümünün İnşası

Bu bölümün asıl amacı, çadır dönüşümünü geometrik olarak ifade ettikten sonra periyodik noktalarını daha kolay hesaplamak için ikilik tabana göre yazmaktır. Çadır dönüşümü geometrik olarak aşağıdaki gibi elde edilmektedir:

$[0, 1]$ doğru parçası önce 2 kat büyütülüp daha sonra $x = 1$ doğrusunun sağında kalan parçası $x = 1$ doğrusuna göre katlandığında elde edilen dönüşüm çadır dönüşümü olarak adlandırılır (Bkz. Şekil 3.1).



Şekil 3.1. $T(x) = (g \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası

Açık olarak ifade edersek, $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$, $f(x) = 2x$ ve $g : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$, $g(x) = 1 - |x - 1|$ olmak üzere T dönüşümü $T(x) = (g \circ f)(x)$ dir. Böylece;

$$T(x) = (g \circ f)(x) = g(2x) = 1 - |2x - 1|$$

eşitliğinden,

$$T : [0, 1] \rightarrow [0, 1] ,$$

$$T(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

elde edilir ve bu şekilde tanımlanan dönüşüme çadır (tent) dönüşümü denir.

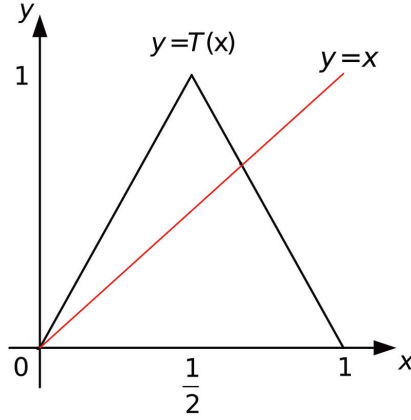
İlk olarak T dönüşümünün periyodik noktaları klasik yöntemle hesaplanırsa:

$T(x) = x$ eşitliğinden,

$$2x = x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$2 - 2x = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

sabit noktaları elde edilir (Bkz. Şekil 3.2).



Şekil 3.2. Çadır dönüşümü ve $y = x$ doğrusu

Şimdi, T dönüşümünün 2-periyotlu noktalarını hesaplamak için öncelikle T^2 fonksiyonu elde edilmelidir.

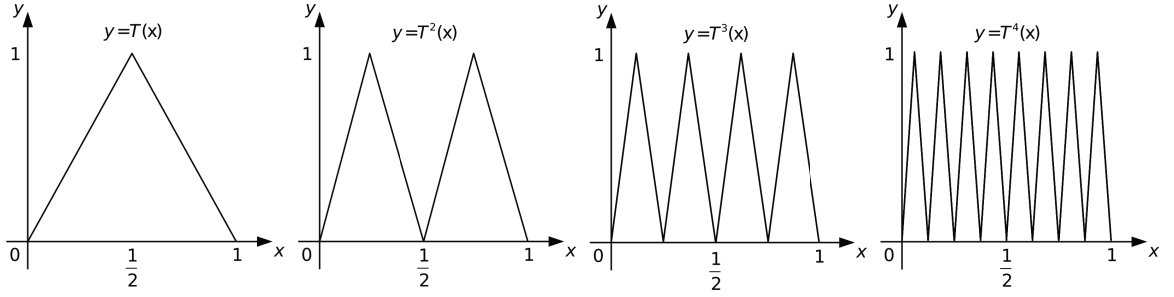
$T^2 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu,

$$T^2(x) = \begin{cases} 2T(x) & , \quad 0 \leq T(x) \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2T(x) & , \quad \frac{1}{2} \leq T(x) \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere,

$$T^2(x) = \begin{cases} 4x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2 - 4x & , \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 4x - 2 & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 4 - 4x & , \quad \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir (Bkz. Şekil 3.3).



Şekil 3.3. T, T^2, T^3 ve T^4 dönüşümleri

$T^2(x) = x$ den benzer hesaplamalar yapılarak,

$$4x = x \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$2 - 4x = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{5}$$

$$4x - 2 = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}$$

$$4 - 4x = x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4}{5}$$

olacak şekilde hesaplanır. Dikkat edilirse $x = 0$ ve $x = \frac{2}{3}$ sabit noktalarıdır. Sonuç olarak, T dönüşümünün 2'li döngüsü $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ elde edilir.

T dönüşümünün $n > 2$ periyotlu noktalarını hesaplamak için 2^n parçalı fanksiyonunu elde etmek ve $T^n(x) = x$ hesabını yapmak gereklidir. T^n dönüşümünün genel bir formülünü elde etmek için bu dönüşümü noktalarının 2-tabanındaki gösterimleri yazılarak ifade edilecektir.

$a \in [0, 1]$ sayısı ikilik tabanda $a = a_1a_2a_3 \dots = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} \dots$, $a_i \in \{0, 1\}$ şeklinde yazılabilir (Gereksiz yazımlardan kaçınmak için bu tez boyunca $0, a_1a_2a_3 \dots$ yerine $a_1a_2a_3 \dots$ kullanılacaktır).

i) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ ise $a_1 = 0$ ve $a = 0a_2a_3a_4 \dots$ olur. Buradan,

$$2a = \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} \dots = a_2a_3a_4 \dots$$

olarak ifade edilir.

ii) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ ise $a_1 = 1$ ve $a = 1a_2a_3a_4 \dots$ olur. $\tilde{a}_i = \begin{cases} 1 & , \quad a_i = 0 \\ 0 & , \quad a_i = 1 \end{cases}$ olsun. Bu dönüşümden;

$$\begin{aligned}
2 - 2a &= 2 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} \dots\right) \\
&= 2 - 1 - \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) - \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\
&= \left(\frac{1 - a_2}{2} + \frac{1 - a_3}{2^2} + \frac{1 - a_4}{2^3} + \dots\right) \\
&= \frac{\tilde{a}_2}{2} + \frac{\tilde{a}_3}{2^2} + \frac{\tilde{a}_4}{2^3} + \dots \\
&= \tilde{a}_2\tilde{a}_3\tilde{a}_4\dots
\end{aligned}$$

olacak şekilde hesaplanır.

Sonuç olarak çadır dönüşümü ikilik tabanda

$$T(a_1a_2a_3\dots) = \begin{cases} a_2a_3a_4\dots, & a_1 = 0 \\ \tilde{a}_2\tilde{a}_3\tilde{a}_4\dots, & a_1 = 1 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilmektedir ([2, 7]). Ayrıca, tümevarım yöntemi ile T^n dönüşümü,

$$T^n(a_1a_2a_3\dots) = \begin{cases} a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots, & a_n = 0 \\ \tilde{a}_{n+1}\tilde{a}_{n+2}\tilde{a}_{n+3}\dots, & a_n = 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

Şimdi, T dönüşümünün periyodik noktalarının hesabı için genel bir formül elde edilecektir:

$$\begin{aligned}
a_1 = 0 \text{ ise } T(a_1a_2a_3\dots) &= a_2a_3a_4\dots = a_1a_2a_3\dots \Rightarrow a = 00000\dots = \bar{0} \\
a_1 = 1 \text{ ise } T(a_1a_2a_3\dots) &= \tilde{a}_2\tilde{a}_3\tilde{a}_4\dots = a_1a_2a_3\dots \Rightarrow a = 10101\dots = \bar{10}
\end{aligned}$$

T dönüşümünün sabit noktalarıdır.

$$T^2(a_1a_2a_3\dots) = \begin{cases} a_3a_4a_5\dots, & a_2 = 0 \\ \tilde{a}_3\tilde{a}_4\tilde{a}_5\dots, & a_2 = 1 \end{cases}$$

olduğundan dolayı $T^2(a) = a$ dan,

$$\begin{aligned} a_2 = 0 \text{ ise } T(a_1a_2a_3\dots) &= a_3a_4a_5\dots = a_1a_2a_3\dots \\ &\Rightarrow a_1 = a_3 = a_5 = \dots \text{ ve } a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0 \\ &\Rightarrow a = 0000\dots \text{ ve } a = 1010\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 = 1 \text{ ise } T(a_1a_2a_3\dots) &= \tilde{a}_3\tilde{a}_4\tilde{a}_5\dots = a_1a_2a_3\dots \\ &\Rightarrow \tilde{a}_3 = a_1, \tilde{a}_4 = 1 \Rightarrow a_4 = 0, \tilde{a}_5 = a_3, \tilde{a}_6 = a_4 \Rightarrow a_6 = 1, \dots \\ &\Rightarrow a = 01100110\dots \text{ ve } a = 11001100\dots \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece T^n nin 2-periyotlu noktaları $\overline{0110}$ ve $\overline{1100}$ olur.

Şimdi T^n 'nin 3-periyotlu noktaları hesaplanırsa

$$T^3(a_1a_2a_3\dots) = \begin{cases} a_4a_5a_6\dots, & a_3 = 0 \\ \tilde{a}_4\tilde{a}_5\tilde{a}_6\dots, & a_3 = 1 \end{cases}$$

olduğundan dolayı;

$$\begin{aligned} a_3 = 0 \text{ ise } T(a_1a_2a_3\dots) &= a_4a_5a_6\dots = a_1a_2a_3\dots \\ &\Rightarrow a_1 = a_4 = a_7 = \dots, a_2 = a_5 = a_8 = \dots = 0 \\ &\quad \text{ve } a_3 = a_6 = a_9 = \dots = 0 \\ &\Rightarrow a = 0000\dots, a = 010010\dots, a = 100100\dots \\ &\quad \text{ve } a = 110110\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 = 1 \text{ ise } T(a_1a_2a_3\dots) &= \tilde{a}_4\tilde{a}_5\tilde{a}_6\dots = a_1a_2a_3\dots \\ &\Rightarrow \tilde{a}_4 = a_1, \tilde{a}_5 = a_2, \tilde{a}_6 = a_3 \Rightarrow a_6 = 0, \\ &\quad \tilde{a}_7 = a_4, \tilde{a}_8 = a_5, \tilde{a}_9 = a_6 \Rightarrow a_9 = 1, \dots \\ &\Rightarrow a = 001110\dots, a = 011100\dots, a = 101010\dots \\ &\quad \text{ve } a = 111000\dots \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak; $\{\overline{010}, \overline{100}, \overline{110}\}$ ve $\{\overline{111000}, \overline{001110}, \overline{011100}\}$ 3-lü döngülerdir. Benzer metotla, bu dönüşümün tüm periyodik noktaları elde edilebilir. Yani;

$$T^n(a_1a_2a_3\dots) = \begin{cases} a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots, & a_n = 0 \\ \tilde{a}_{n+1}\tilde{a}_{n+2}\tilde{a}_{n+3}\dots, & a_n = 1 \end{cases}$$

olduğundan dolayı;

i) $a_n = 0 \Rightarrow T^n(a_1a_2a_3\dots) = a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}\dots = a_1a_2a_3\dots$ olup;

n -periyotlu nokta; $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} 0}$ formundadır.

ii) $a_n = 1 \Rightarrow T^n(a_1 a_2 a_3 \dots) = \tilde{a}_{n+1} \tilde{a}_{n+2} \tilde{a}_{n+3} \dots = a_1 a_2 a_3 \dots$ olup;

n -periyotlu nokta; $\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} 1 \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \dots \tilde{a}_{n-1} 0}$ formundadır.

Teorem 3.1. $[0, 1]$ üzerindeki çadır dönüşümü Devaney anlamında kaotiktir ([2-6]).

Kanıt. Teorem 2.22'den T sürekli olduğundan dolayı T 'nin Devaney anlamında kaotik olduğunu göstermek için topolojik geçişken ve periyodik noktalarının yoğun olduğunu göstermek yeterlidir.

Periyodik noktaların yoğunluğu:

$[0, 1]$ aralığında keyfi bir $a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ noktası alınsın. Bu noktaya yeteri kadar yakın bir periyodik nokta bulunmalıdır.

n yeteri kadar büyük olmak üzere,

$$\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} 0}$$

periyodik noktasını alalım. Açık olarak,

$$\begin{aligned} d(a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots, \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} 0}) &\leq \left| \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \end{aligned}$$

olduğundan istenilen elde edilir.

Topolojik geçişkenlik:

U ve V keyfi açık kümeler olsunlar. Bu durumda;

$$U' = \{a_1 a_2 a_3 \dots a_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} \dots \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ keyfi}\}$$

olmak üzere $U' \subseteq U$ kümesi vardır. Açık olarak,

$$T^n(U') = \{y_{n+1} y_{n+2} y_{n+3} \dots \mid y_i \in \{0, 1\} \text{ keyfi}\}$$

olup $T^n(U') = [0, 1]$ elde edilir. Böylece, $U' \subseteq U$ olup $T^n(U') \subseteq T^n(U) = [0, 1]$ olduğundan boştan farklı her V açık kümesi için $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olur. Sonuç olarak, T topolojik geçişkendir. \square

3.2. Çadır Ailesi

$0 < t \leq 1$ için $T_t : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$T_t(x) = \begin{cases} 2tx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2t(1-x) & , \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde gösterilen $\{T_t(x)\}$, çadır ailesi olarak adlandırılır. t parametresine göre çadır ailesi ilginç bir dinamiğe sahiptir. Şimdi bu değerlere göre çadır ailesini ayrıntılı olarak incelenecektir.

i) $0 < t < \frac{1}{2}$ olsun, $T_t(x) = x$ ise $2tx = x$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) olup buradan $x = 0$ sabit noktadır.

$2t(1-x) = x$ ($\frac{1}{2} \leq x \leq 1$) Şekil 3.4'den görüldüğü gibi bu aralıkta hiçbir sabit nokta gelmemektedir.

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow 0 \leq T_t(x) = 2tx < x \\ \frac{1}{2} < x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq T_t(x) = 2t(1-x) < 1-x < \frac{1}{2} < x \end{aligned}$$

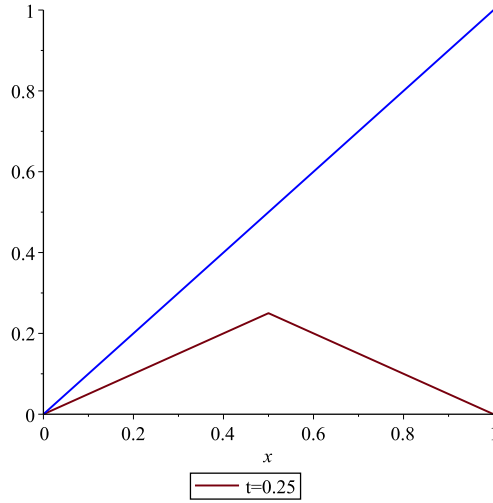
olup böylece $0 \leq x \leq 1$ için $T_t(x) < x$ elde edilir.

$$T_t^2(x) = T_t(T_t(x)) < T_t(x) < x$$

olup,

$$T_t^n(x) < T_t^{n-1}(x) < \dots < T_t(x) < x$$

benzer hesaplamalarla elde edilir. Yani; $\forall x \in [0, 1]$ için, $(T_t^n(x))$ dizisi azalan bir dizidir ve 0 ile alttan sınırlıdır. Böylece Tanım 2.9 gereğince bu dizi 0 sabit noktasına yakınsar. Böylece; 0 çekici sabit noktadır ($\lim_{x \rightarrow \infty} T_t^n(x) = 0$). $\forall x \in [0, 1]$ için bu sağlandığından 0 sabit noktasının çekim havzası $[0, 1]$ dir. Sonuç olarak $[0, 1]$ aralığında $p > 1$ iken $T_t(x)$ fonksiyonunun hiçbir p-periyotlu noktası yoktur (Bkz. Şekil 3.4).



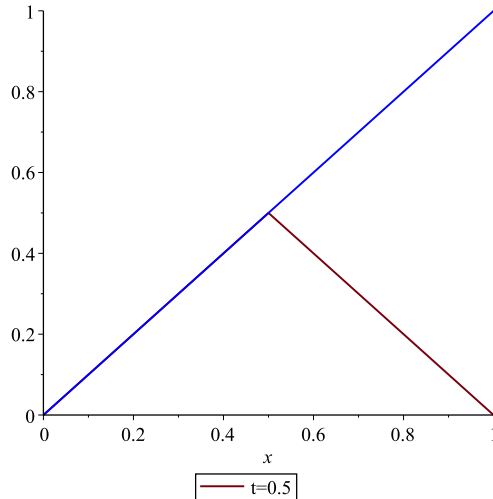
Şekil 3.4. $T_{\frac{1}{4}}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

ii) $t = \frac{1}{2}$ olsun,

$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}}(x) = 2(\frac{1}{2})x = x$ olup bu aralıktaki her nokta fonksiyonun sabit noktasıdır.

$\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq T_{\frac{1}{2}}(x) = 2(\frac{1}{2})(1-x) = 1-x < \frac{1}{2}$ elde edilir. Yani; $T_{\frac{1}{2}}(x) < \frac{1}{2}$ olup $T_{\frac{1}{2}}(x)$, $T_{\frac{1}{2}}$ 'nin sabit noktasıdır.

Sonuç olarak; $\forall x \in [0, 1]$ için x noktası, $T_{\frac{1}{2}}$ 'nin ya sabit noktasıdır yada ilk iterasyonu sabit noktadır. Böylece $p > 1$ için bu aralıkta hiçbir p -periyotlu noktası yoktur (Bkz. Şekil 3.5).



Şekil 3.5. $T_{\frac{1}{2}}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

iii) $\frac{1}{2} < t < 1$ olsun.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ için } 2tx = x \Rightarrow x = 0$$

olup $p_1 = 0$ sabit noktadır.

$$\begin{aligned} |f'_t(x)| &= 2t \\ |f'_t(0)| &= 2t > 1 \quad \left(\frac{1}{2} < t < 1\right) \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ için } 2t(1-x) = x &\Rightarrow 2t - 2tx = x \\ &\Rightarrow x + 2tx = 2t \\ &\Rightarrow x(1+2t) = 2t \\ &\Rightarrow x = \frac{2t}{1+2t} \end{aligned}$$

olup $p_2 = \frac{2t}{1+2t}$ sabit noktadır. Ayrıca,

$$\left| f'_t\left(\frac{2t}{1+2t}\right) \right| = 2t > 1$$

olup p_1 ve p_2 itici sabit noktalardır.

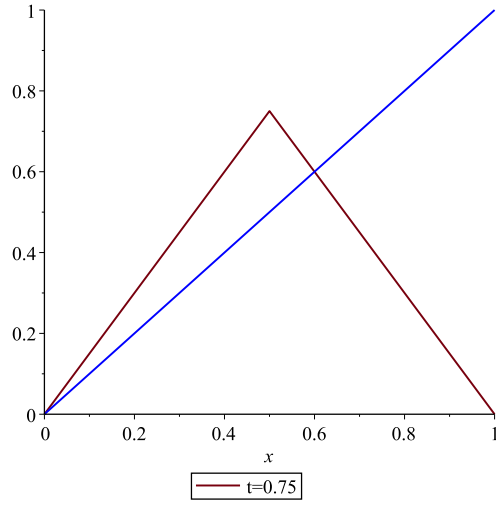
$$T_t^2(x) = \begin{cases} 4t^2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4t} \\ 2t(1-2tx) & , \quad \frac{1}{4t} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2t(1-2t+2tx) & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 - \frac{1}{4t} \\ 4t^2(1-x) & , \quad 1 - \frac{1}{4t} < x \leq 1 \end{cases}$$

olup $T_t^2(x) = x$ eşitliğinden;

sabit noktalar: $x = 0$ ve $x = \frac{2t}{1+2t}$

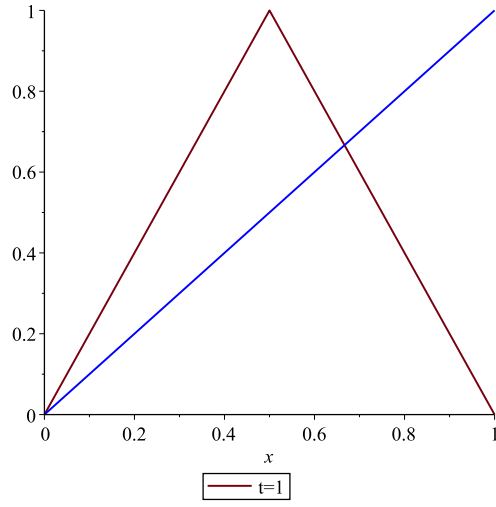
2-periyotlu noktalar: $x = \frac{2t}{1+4t^2}$ ve $x = \frac{4t^2}{1+4t^2}$ şeklinde elde edilir.

Ayrıca $\left| (T_t^2)'(x) \right| = 4t^2 > 1$ olduğundan 2-periyotlu noktalar iticidir (Bkz. Şekil 3.6).



Şekil 3.6. $T_{\frac{3}{4}}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

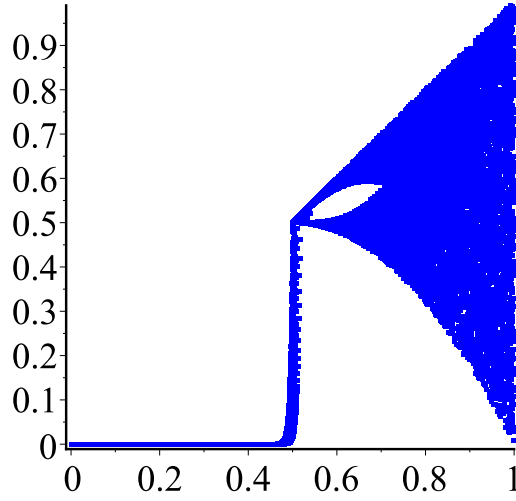
iv) $t = 1$ olsun. Bu durum klasik çadır dönüşümüdür (Bkz. Şekil 3.7). Teorem 3.1’de detaylı olarak verilmektedir.



Şekil 3.7. $T_1(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

3.2.1. Çadır ailesinin çatallanma diyagramı

Şekil 3.8'de görüldüğü gibi $0 < t < \frac{1}{2}$ için bir tek çekici sabit nokta vardır ve $[0, 1]$ aralığındaki tüm noktaların iterasyonları 0 çekici sabit noktasına yakınsar. $t = \frac{1}{2}$ ise $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığındaki her x noktası sabit noktadır ve $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ aralığındaki noktaların ilk iterasyonları $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ aralığında olacağından diyagramdaki durum ortaya çıkmaktadır. $\frac{1}{2} < t < 1$ aralığında biraz daha karmaşık durum görülmektedir. Buradaki tüm periyodik noktalar iticidir. Fakat, $(0, 1)$ 'deki x değerlerinin çoğunun iterasyonları t , 1'e yaklaşırken $[0, 1]$ aralığı üzerinde yayılırlar ve Şekil 3.8'deki durum ortaya çıkar.



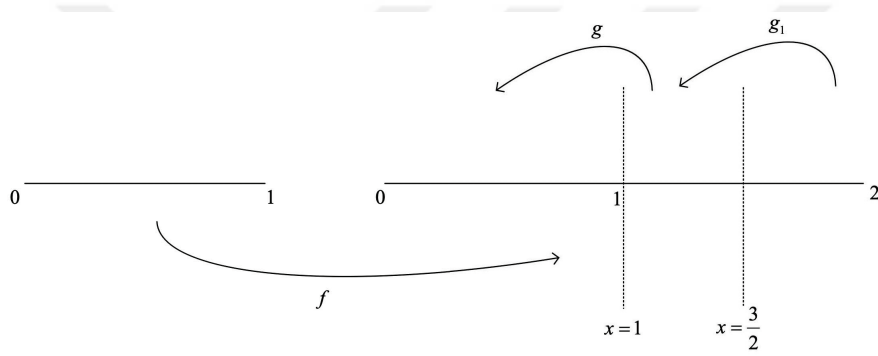
Şekil 3.8. Çadır ailesinin çatallanma diyagramı

4. DEFORME EDİLMİŞ ÇADIR DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde, çadır dönüşümünün inşasından yola çıkarak deforme edilmiş çadır dönüşümleri inşa edilecektir.

4.1. T_{d_1} Dönüşümünün İnşası

$[0, 1]$ doğru parçası önce 2 kat büyütülüp sonra ilk olarak $x = \frac{3}{2}$ doğrusunun sağında kalan parçası $x = \frac{3}{2}$ doğrusuna göre katlanıp son olarak da $x = 1$ doğrusunun sağında kalan parça $x = 1$ doğrusuna göre katlanarak çadır dönüşümünün deforme hali olan T_{d_1} dönüşümü elde edilir (Bkz. Şekil 4.1). Bu tez boyunca T_{d_1} dönüşümünü, çadır dönüşümünün 1. deformasyonu olarak adlandıracacağız.



Şekil 4.1. $T_{d_1}(x) = (g \circ g_1 \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası

Açık olarak ifade edersek,

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 2] \quad , \quad f(x) = 2x$$

$$g_1 : [0, 2] \rightarrow [0, \frac{3}{2}] \quad , \quad g_1(x) = \frac{3}{2} - \left| x - \frac{3}{2} \right|$$

$$g : [0, \frac{3}{2}] \rightarrow [0, 1] \quad , \quad g(x) = 1 - \left| x - 1 \right|$$

olmak üzere T_{d_1} dönüşümü $T_{d_1}(x) = (g \circ g_1 \circ f)(x)$ dir. Böylece;

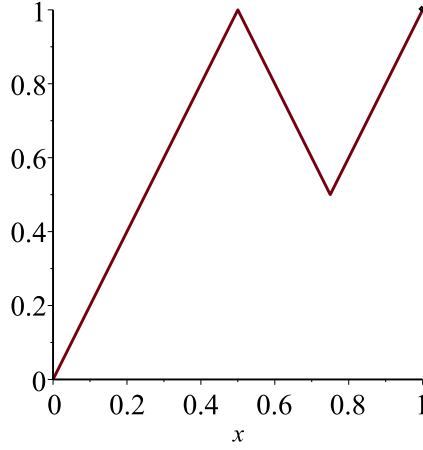
$$\begin{aligned} T_{d_1}(x) &= (g \circ g_1 \circ f)(x) = g(g_1(2x)) \\ &= g\left(\frac{3}{2} - \left| 2x - \frac{3}{2} \right|\right) \\ &= 1 - \left| \frac{3}{2} - \left| 2x - \frac{3}{2} \right| - 1 \right| \\ &= 1 - \left| \frac{1}{2} - \left| 2x - \frac{3}{2} \right| \right| \end{aligned}$$

eşitliğinden,

$T_{d_1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dönüşümü açık olarak

$$T_{d_1}(x) = \begin{cases} 2x & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1 & , \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olacak şekilde elde edilir (Bkz. Şekil 4.2).



Şekil 4.2. T_{d_1} dönüşümü

4.2. $\{T_{td_1}\}$ Deforme Çadır Ailesi

$0 < t \leq 1$ için $T_{td_1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$T_{td_1}(x) = \begin{cases} 2tx & , 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2t(1 - x) & , \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \\ 2t(x - \frac{1}{2}) & , \frac{3}{4} < x \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde gösterilen $\{T_{td_1}\}$ deforme edilmiş çadır ailesidir. t parametresine göre bu aile ilginç bir dinamiğe sahiptir. Şimdi, deforme edilmiş çadır ailesi ayrıntılı olarak incelenecektir.

i) $0 < t < \frac{1}{2}$ olsun. $T_{td_1}(x) = x$ ise $2tx = x$ ($0 \leq x < \frac{1}{2}$) olup, buradan $x = 0$ sabit noktadır.

$2t(1 - x) = x$ ($\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}$) elde edilir. İlgili aralıkta eşitliğin çözüm kümesi boş kümedir. Bu yüzden bu durum için sabit nokta yoktur (Bkz. Şekil 4.3).

$2t(x - \frac{1}{2}) = x$ ($\frac{3}{4} \leq x < 1$) elde edilir. Şekil 4.3 den görüldüğü gibi bu aralıkta da hiçbir sabit nokta gelmemektedir. Ayrıca;

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{1}{2} &\Rightarrow 0 \leq T_{td_1}(x) = 2tx < x \\ \frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} &\Rightarrow 0 \leq T_{td_1}(x) = 2t(1-x) < 1-x < \frac{1}{2} < x \\ \frac{3}{4} < x \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq T_{td_1}(x) = 2t(x - \frac{1}{2}) < x - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} < x \end{aligned}$$

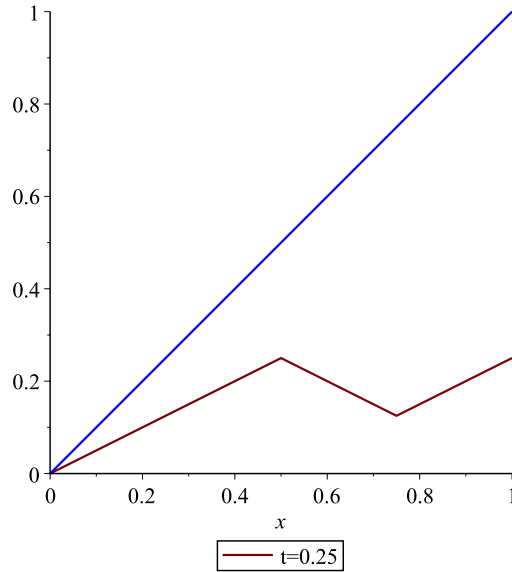
olup böylece $0 \leq x \leq 1$ için $T_{td_1}(x) < x$ elde edilir.

$$T_{td_1}^2(x) = T_{td_1}(T_{td_1}(x)) < T_{td_1}(x) < x$$

olup,

$$T_{td_1}^n(x) < T_{td_1}^{n-1}(x) < \dots < T_{td_1}(x) < x$$

eşitsizlikleri benzer hesaplamalarla elde edilir. Yani; $\forall x \in [0, 1]$ için, $(T_{td_1}^n(x))$ dizisi azalan bir dizidir ve 0 ile alttan sınırlıdır. Böylece, Tanım 2.9 gereğince bu dizi 0 sabit noktasına yakınsar. Yani; 0 çekici sabit noktadır ($\lim_{x \rightarrow \infty} T_{td_1}^n(x) = 0$). $\forall x \in [0, 1]$ için bu sağlandığından 0 sabit noktasının çekim havzası $[0, 1]$ dir. Sonuç olarak; $[0, 1]$ aralığında $p > 1$ iken $T_{td_1}(x)$ fonksiyonunun hiçbir p -periyotlu noktası yoktur (Bkz. Şekil 4.3).



Şekil 4.3. $T_{\frac{1}{4}, d_1}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

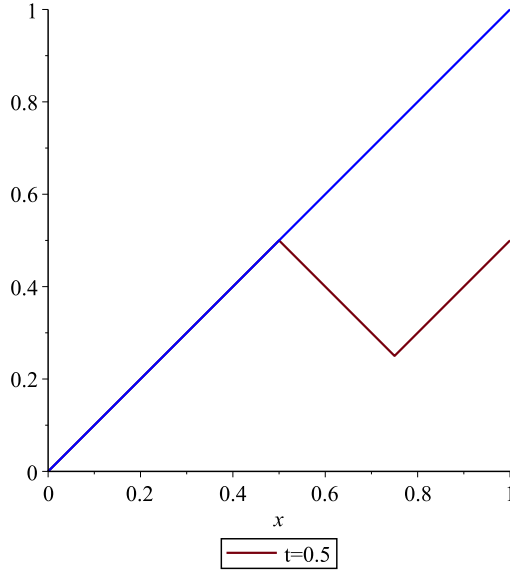
ii) $t = \frac{1}{2}$ olsun.

a. $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}d_1}(x) = 2(\frac{1}{2})x = x$ olup bu aralıktaki her nokta fonksiyonun sabit noktasıdır.

b. $\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq T_{\frac{1}{2}d_1}(x) = 2(\frac{1}{2})(1-x) = 1-x < \frac{1}{2}$ elde edilir.

c. $\frac{3}{4} < x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq T_{\frac{1}{2}d_1}(x) = 2(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) = x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ elde edilir.

Yani; b ve c durumları için $T_{\frac{1}{2}d_1}(x) \leq \frac{1}{2}$ olup $T_{\frac{1}{2}d_1}(x)$, $T_{\frac{1}{2}d_1}$ nin sabit noktasıdır. Sonuç olarak; $\forall x \in [0, 1]$ için x noktası, $T_{\frac{1}{2}d_1}$ nin ya sabit noktasıdır yada ilk iterasyonu sabit noktadır. Böylece $p > 1$ için bu aralıkta hiçbir p-periyotlu noktası yoktur (Bkz. Şekil 4.4).



Şekil 4.4. $T_{\frac{1}{2}d_1}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

iii) $\frac{1}{2} < t < 1$ olsun.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ için } 2tx = x \Rightarrow x = 0$$

olup, $p_1 = 0$ sabit noktadır.

$$|f'_{td_1}(x)| = 2t$$

$$|f'_{td_1}(0)| = 2t > 1 \quad (\frac{1}{2} < t < 1)$$

olur. Teorem 2.14 gereğince $p_1 = 0$ noktası itici sabit noktadır.

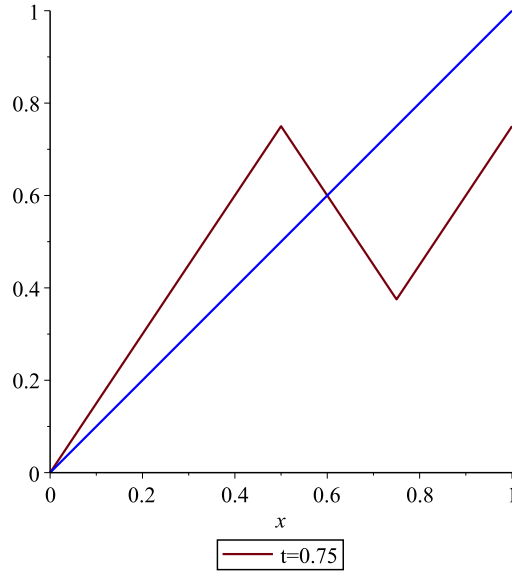
$$\begin{aligned}\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{4} \text{ için } 2t(1-x) = x &\Rightarrow 2t - 2tx = x \\ &\Rightarrow x + 2tx = 2t \\ &\Rightarrow x(1+2t) = 2t \\ &\Rightarrow x = \frac{2t}{1+2t}\end{aligned}$$

olur. Teorem 2.14 gereğince $p_2 = \frac{2t}{1+2t}$ noktası itici sabit noktadır. Çünkü,

$$\left| f'_t\left(\frac{2t}{1+2t}\right) \right| = 2t > 1 \text{ dir.}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \text{ için } 2t\left(x - \frac{1}{2}\right) = x &\Rightarrow 2t\left(x - \frac{1}{2}\right) = x \\ &\Rightarrow 2tx - t = x \\ &\Rightarrow 2tx - x = t \\ &\Rightarrow x(2t - 1) = t \\ &\Rightarrow x = \frac{t}{2t - 1}\end{aligned}$$

olup Şekil 4.5 den görüldüğü gibi bu aralıkta sabit nokta yoktur.



Şekil 4.5. $T_{\frac{3}{4}, d_1}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

iv) $t = 1$ olsun.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ için } 2tx = x \Rightarrow x = 0$$

olup $p_1 = 0$ sabit noktadır.

$$|f'_{td_1}(x)| = 2t$$

$$|f'_{td_1}(0)| = 2t = 2 > 1 \quad \left(\frac{1}{2} < t < 1\right)$$

olur.

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \text{ için } 2t(1-x) = x \Rightarrow 2 - 2x = x$$

$$\Rightarrow x + 2x = 2$$

$$\Rightarrow 3x = 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

olup $p_2 = \frac{2}{3}$ sabit noktadır.

$$\left| f'_{td_1}\left(\frac{2}{3}\right) \right| = 2t > 1$$

$$\frac{3}{4} \leq x \leq 1 \text{ için } 2t\left(x - \frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right) = x$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = x$$

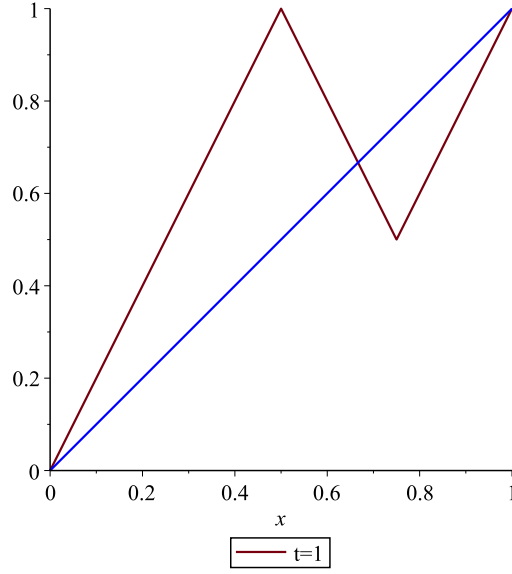
$$\Rightarrow 2x - x = 1$$

$$\Rightarrow x = 1$$

olup $p_3 = 1$ sabit noktadır.

$$\left| f'_{td_1}(1) \right| = 2t > 1$$

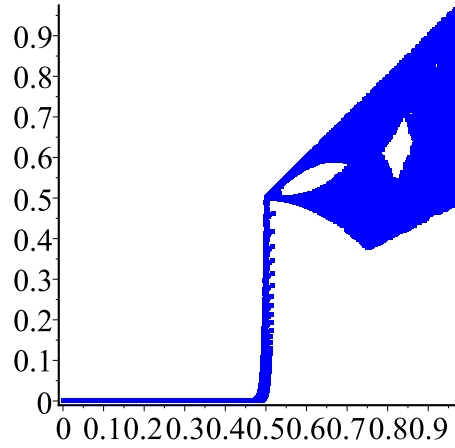
olup p_1, p_2, p_3 itici sabit noktalardır (Bkz. Şekil 4.6).



Şekil 4.6. $T_{d_1}(x)$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

4.2.1. $\{T_{td_1}\}$ deforme çadır ailesinin çatallanma diyagramı

Şekil 4.7’de görüldüğü gibi $0 \leq t < \frac{1}{2}$ için sabit nokta 0 dir ve $[0, 1]$ aralığındaki tüm noktaların iterasyonları bu sabit noktaya yakınsar. $t = \frac{1}{2}$ için $[0, \frac{1}{2}]$ aralığındaki tüm x noktaları sabit noktadır ve $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ olacak şekilde tüm x değerleri ise akıbeti sabit noktalardır. Fakat, klasik çadır ailesinden farklı olarak diyagramda görüldüğü gibi $[0, 1]$ ’de yoğun bir yörüngeye sahip bir noktası yoktur.



Şekil 4.7. $\{T_{td_1}\}$ deforme çadır ailesinin çatallanma diyagramı

Şimdi, $T_{d_1}(x)$ dönüşümünün dinamiğinin daha kolay anlaşılması için ikilik tabanda ifade edilip dinamiği incelenecektir.

4.3. T_{d_1} Dönüşümünün Dinamiğinin İncelenmesi

Bu bölümde, çadır dönüşümünün deforme hali olan T_{d_1} dönüşümünün periyodik noktaları bulunarak dinamiği incelenecektir. İlk olarak, T_{d_1} dönüşümünü ikilik tabanda göstereyim. $a = a_1a_2a_3\dots$ ve $a_i \in \{0, 1\}$ olsun.

i) $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ için $a_1 = 0$ dir. Ayrıca;

$$\begin{aligned} 2a &= 2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots\right) \\ &= a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \\ &= 0 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \\ &= a_2a_3a_4\dots \end{aligned}$$

olur.

ii) $\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{4}$ için $a_1 = 1$ ve $a_2 = 0$ dir. Aşağıda verilen hesaplamalarla,

$$\begin{aligned} 2 - 2a &= 2 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots\right) \\ &= 2 - 1 - \left(\frac{0}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\ &= 1 - \left(\frac{0}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\ &= \left(\frac{1-0}{2} + \frac{1-a_3}{2^2} + \frac{1-a_4}{2^3} + \dots\right) \\ &= \tilde{a}_2\tilde{a}_3\tilde{a}_4\dots \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $\frac{3}{4} \leq a \leq 1$ için $a_1 = 1$ ve $a_2 = 1$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned} 2a - 1 &= 2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots\right) - 1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) - 1 \\ &= a_2a_3a_4\dots \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Sonuç olarak, T_{d_1} 'in ikilik tabandaki ifadesi,

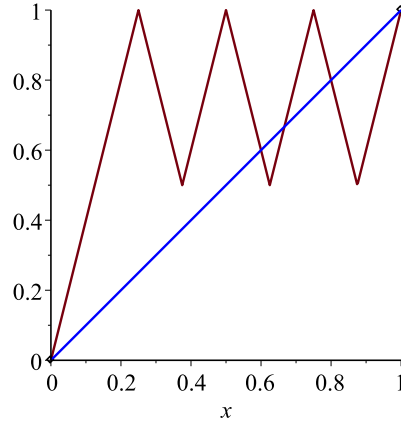
$$T_{d_1}(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_2 a_3 a_4 \dots & , a_1 = 0 \\ \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0 \\ a_2 a_3 a_4 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1 \end{cases}$$

olacak şekilde formüle edilir. $T_{d_1}^2$ dönüşümünün ikilik tabandaki gösterimi açık olarak,

$$T_{d_1}^2(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 0 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1 \end{cases}$$

olur (Bkz. Şekil 4.8). Bu ifade düzenlenirse aşağıdaki eşitlik elde edilir;

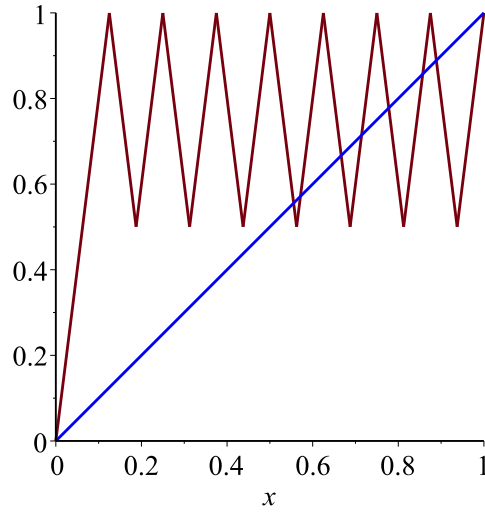
$$T_{d_1}^2(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = a_2 = 0 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_3 = 0, \exists a_i \neq 0, (i = 1, 2) \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_3 = 1, \exists a_i \neq 0, (i = 1, 2) \end{cases}$$



Şekil 4.8. $T_{d_1}^2$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

Benzer hesaplamalarla, $T_{d_1}^3$ dönüşümü aşağıdaki formda elde edilir (Bkz. Şekil 4.9);

$$T_{d_1}^3(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_4 a_5 a_6 \dots & , a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots & , a_4 = 0, \exists a_i \neq 0, (i = 1, 2, 3) \\ a_4 a_5 a_6 \dots & , a_4 = 1, \exists a_i \neq 0, (i = 1, 2, 3) \end{cases}$$



Şekil 4.9. $T_{d_1}^3$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

Genel bir formül vermek gerekirse $T_{d_1}^n$ dönüşümü,

$$T_{d_1}^n(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_{n+1} a_{n+2} \dots, & a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \\ \tilde{a}_{n+1} \tilde{a}_{n+2} \dots, & a_{n+1} = 0, \exists a_i \neq 0, (i = 1, 2, 3, \dots, n) \\ a_{n+1} a_{n+2} \dots, & a_{n+1} = 1, \exists a_i \neq 0, (i = 1, 2, 3, \dots, n) \end{cases} \quad (4.1)$$

olur.

4.3.1. T_{d_1} dönüşümünün periyodik noktalarının hesaplanması

Denklem (4.1) kullanarak T_{d_1} dönüşümünün periyodik noktaları aşağıdaki gibi formüle edilmektedir:

$$\begin{aligned} \text{i) } a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0 \text{ ise } T_{d_1}^n(a_1 a_2 a_3 \dots) &= a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \\ &\Rightarrow a_{n+1} = a_1 = 0, a_{n+2} = a_2 = 0, \dots \\ &\Rightarrow x_{p_1} = 0000 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } a_{n+1} = 0, \exists a_i \neq 0 \text{ ise } T_{d_1}^n(a_1 a_2 a_3 \dots) &= \tilde{a}_{n+1} \tilde{a}_{n+2} \tilde{a}_{n+3} \dots = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \\ &\Rightarrow \tilde{a}_{n+1} = a_1 = 1, \tilde{a}_{n+2} = a_2, \dots \\ &\Rightarrow x_{p_2} = \overline{1a_2 a_3 \dots a_n 0 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \dots \tilde{a}_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{iii) } a_{n+1} = 1, \exists a_i \neq 0 \text{ ise } T_{d_1}^n(a_1 a_2 a_3 \dots) &= a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} \dots = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots \\
&\Rightarrow a_{n+1} = a_1 = 1, a_{n+2} = a_2, \dots \\
&\Rightarrow x_{p_3} = \overline{1 a_2 a_3 \dots a_n}
\end{aligned}$$

olup üç farklı formda periyodik noktalar sınıflandırılabilir.

4.3.2. T_{d_1} dönüşümünün kaotikliğinin incelenmesi

Bu bölümde, T_{d_1} dönüşümünün Devaney anlamında kaotikliği araştırılacaktır.

Başlangıç Şartlarına Hassas Bağımlılık

$[0, 1]$ in keyfi bir $a = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots$ noktasını alalım. $a_n \neq b_n$, $a_{n+1} = b_{n+1}$, $a_{n+2} \neq b_{n+2}$ olmak üzere $b = a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} b_n a_{n+1} b_{n+2} \dots \in [0, 1]$ noktasını seçelim. Bu durumda;

$$\begin{aligned}
d(a, b) &\leq \frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \dots + \frac{0}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \frac{0}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}}
\end{aligned}$$

olup,

$$d(a, b) < \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow b \in B\left(a, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

elde edilir. Ayrıca;

$$T_{d_1}^{n-1}(a) = \begin{cases} a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots, & a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0 \\ \tilde{a}_n \tilde{a}_{n+1} \tilde{a}_{n+2} \dots, & a_n = 0, \exists a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots, & a_n = 1, \exists a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{cases}$$

$$T_{d_1}^{n-1}(b) = \begin{cases} b_n b_{n+1} b_{n+2} \dots, & a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0 \\ \tilde{b}_n \tilde{b}_{n+1} \tilde{b}_{n+2} \dots, & b_n = 0, \exists a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n-1) \\ b_n b_{n+1} b_{n+2} \dots, & b_n = 1, \exists a_i \neq 0 (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{cases}$$

eşitliğinden dolayı;

i) $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} d\left(T_{d_1}^{n-1}(a), T_{d_2}^{n-1}(b)\right) &= d(a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots, b_n a_{n+1} b_{n+2} \dots) \\ &\geq \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{(-1)}{2^3} + \frac{(-1)}{2^4} + \dots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

ii) $a_n = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ için $\exists a_i \neq 0$ olsun. Bu durumda $a_n \neq b_n$ olup $b_n = 1$ dir ve

$$\begin{aligned} d\left(T_{d_1}^{n-1}(a), T_{d_2}^{n-1}(b)\right) &= d(\tilde{a}_n \tilde{a}_{n+1} \tilde{a}_{n+2} \dots, b_n a_{n+1} b_{n+2} \dots) \\ &\geq \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6} - \dots \\ &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

iii) ii) durumuna benzer şekilde yapılır.

Sonuç olarak, T_{d_1} dönüşümü başlangıç şartlarına hassas bağımlıdır.

Periyodik Noktaların Yoğunluğu

Keyfi bir $x = 001\bar{0} \in [0, 1]$ noktasını alınsın. Bu keyfi noktaya yeteri kadar yakın bir periyodik nokta bulunmalıdır. Periyodik noktalar x_{p_1}, x_{p_2} ve x_{p_3} olacak şekilde üç farklı formda olduğu biliniyor. Basit hesaplamalar ile;

$$\begin{aligned} d(x, x_{p_1}) &= \frac{1}{8} \\ d(x, x_{p_2}) &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \\ d(x, x_{p_3}) &\geq \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani; $x = 001\bar{0} \in [0, 1]$ noktasına yeteri kadar yakın olan bir periyodik nokta yoktur.

Sonuç olarak, T_{d_1} dönüşümü için periyodik noktaların kümesi $[0, 1]$ 'de yoğun

değildir.

Topolojik Geçişkenlik

U, V keyfi açık kümeleri için $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ olup olmadığını araştırılacaktır.

$$U' = \{11x_3x_4x_5 \dots \mid x_i \text{ keyfi}\} \supseteq U$$

ve

$$V' = \{00y_3y_4y_5 \dots \mid y_i \text{ keyfi}\} \supseteq V$$

olarak seçilirse,

$$V \subset V' \subseteq \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

olur. Buradan da,

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } f^n(U) \subseteq f^n(U') \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

elde edilir.

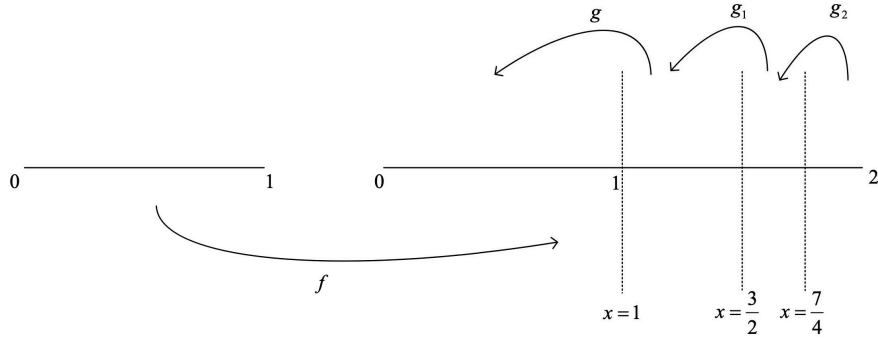
Sonuç olarak, $f^n(U) \cap V = \emptyset$ olup T_{d_1} dönüşümü topolojik geçişken değildir.

Teorem 4.1. $\{[0, 1]; T_{d_1}\}$ dinamik sistemi Devaney anlamında kaotik değildir.

Kanıt. $\{[0, 1]; T_{d_1}\}$ dinamik sistemi başlangıç şartlarına hassas bağımlı fakat periyodik noktaların kümesi $[0, 1]$ 'de yoğun değil ve topolojik geçişken olmadığından Devaney anlamında kaotik değildir. \square

4.4. T_{d_2} Dönüşümünün İnşası

$[0, 1]$ doğru parçası önce 2 kat büyütülüp sonra ilk olarak $x = \frac{7}{4}$ doğrusunun sağında kalan parça $x = \frac{7}{4}$ doğrusuna göre katlanıp ikinci olarak $x = \frac{3}{2}$ doğrusunun sağında kalan parça $x = \frac{3}{2}$ doğrusuna göre katlanıp son olarak da $x = 1$ doğrusunun sağında kalan parçayı $x = 1$ doğrusuna göre katlayarak çadır dönüşümünün deforme hali olan T_{d_2} dönüşümü elde edilir (Bkz. Şekil 4.10). T_{d_2} dönüşümü çadır dönüşümünün 2. deformasyonu olarak adlandırılacaktır.



Şekil 4.10. $T_{d_2}(x) = (g \circ g_1 \circ g_2 \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası

Açık olarak ifade edersek,

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 2] \quad , \quad f(x) = 2x$$

$$g_2 : [0, 2] \rightarrow [0, \frac{7}{4}] \quad , \quad g_2(x) = \frac{7}{4} - \left| x - \frac{7}{4} \right|$$

$$g_1 : [0, \frac{7}{4}] \rightarrow [0, \frac{3}{2}] \quad , \quad g_1(x) = \frac{3}{2} - \left| x - \frac{3}{2} \right|$$

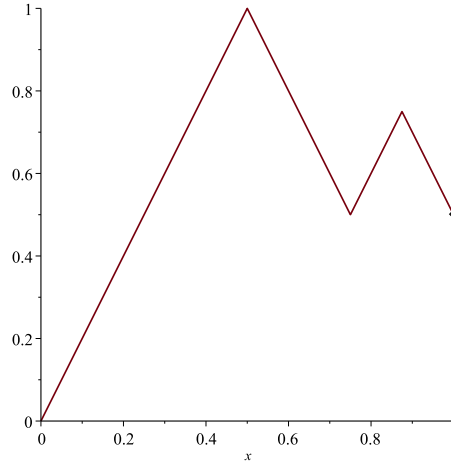
$$g : [0, \frac{3}{2}] \rightarrow [0, 1] \quad , \quad g(x) = 1 - |x - 1|$$

olmak üzere T_{d_2} dönüşümü $T_{d_2}(x) = (g \circ g_1 \circ g_2 \circ f)(x)$ dir. T_{d_1} dönüşümünün hesaplanmasındaki benzer işlemler yapılarak,

$T_{d_2} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü açık olarak

$$T_{d_2}(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1 & , \quad \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ -2x + \frac{5}{2} & , \quad \frac{7}{8} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olacak şekilde elde edilir (Bkz. Şekil 4.11).



Şekil 4.11. T_{d_2} dönüşümünün grafiği

Şimdi, T_{d_2} dönüşümünü ikilik tabanda ifade edelim. T_{d_1} dönüşümünü ikilik tabanda ifade ederken uygulanan benzer işlemler yapılarak T_{d_2} dönüşümünün ikilik tabandaki ifadesi:

$$T_{d_2}(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_2 a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 0 \\ \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0 \\ a_2 a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1 \end{cases}$$

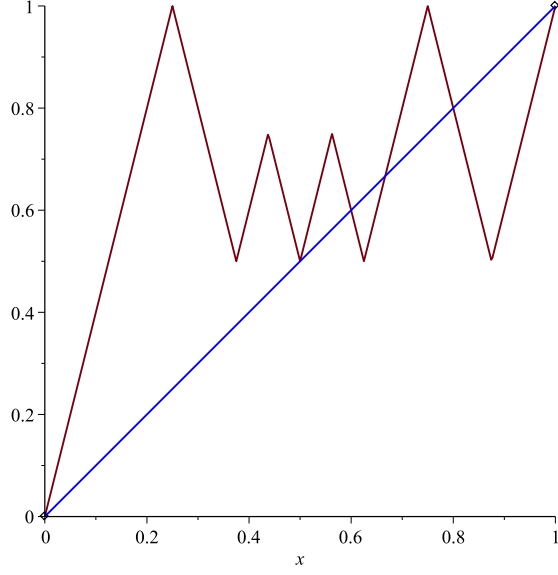
olarak formüle edilir.

4.4.1. T_{d_2} dönüşümünün dinamiğinin incelenmesi

Bu bölümde, çadır dönüşümünün deforme hali olan T_{d_2} dönüşümünün dinamiği incelenecektir. $T_{d_2}^2$ dönüşümünün ikilik tabandaki gösterimi açık olarak,

$$T_{d_2}^2(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 0 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1 \end{cases}$$

olur (Bkz. Şekil 4.12).

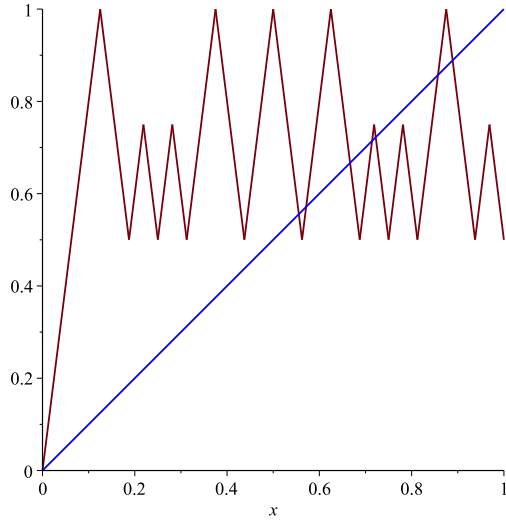


Şekil 4.12. $T_{d_2}^2$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

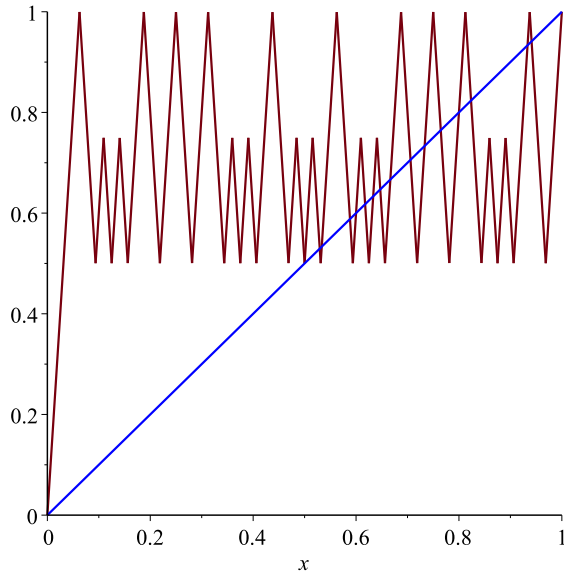
Benzer şekilde $T_{d_2}^3$ dönüşümünün ikilik tabandaki gösterimi açık olarak,

$$T_{d_2}^3(a_1 a_2 a_3 \dots) = \left\{ \begin{array}{l} a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0 \\ a_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 1 \\ \tilde{a}_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 1 \\ \tilde{a}_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0 \\ a_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1 \end{array} \right. \quad (4.2)$$

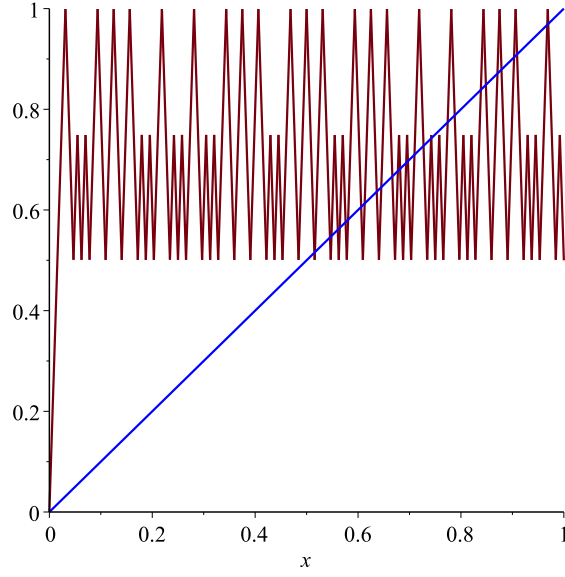
formüle edilir (Bkz. Şekil 4.13).



Şekil 4.13. $T_{d_2}^3$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi



Şekil 4.14. $T_{d_2}^4$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

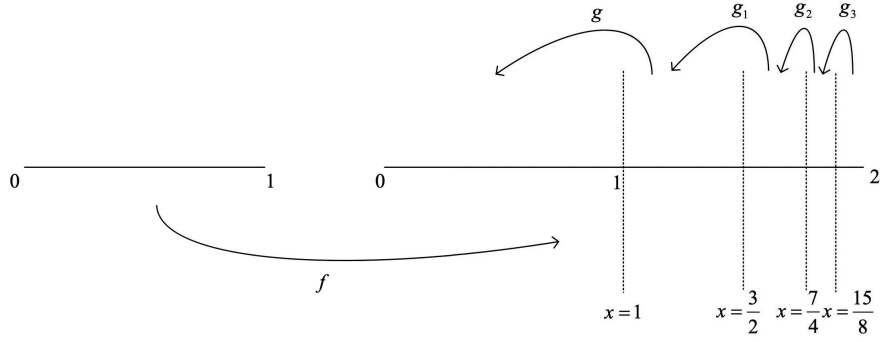


Şekil 4.15. $T_{d_2}^5$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

Not: T_{d_1} dönüşümü kullanılarak $T_{d_1}^n$ dönüşümü basit bir formda formüle edilebilmektedir. Fakat, T_{d_2} dönüşümünü kullanarak $T_{d_2}^n$ dönüşümü elde etmek Denklem (4.2)'de görüldüğü gibi kolay değildir. Bu yüzden T_{d_2} dönüşümünün periyodik noktaları için genel bir formül vermek çok basit görülmemektedir. Bu; $T_{d_1}^n$ dönüşümünün ve periyodik noktalarının formülizasyonunun kayda değer olduğunu göstermektedir. Burada $T_{d_2}^n$ dönüşümünün bazı n değerleri için grafikleri kullanılarak, Devaney anlamında kaotik olmadığı bu grafiklerden yorumlanabilir (Bkz. Şekil 4.14, 4.15).

4.5. T_{d_3} Dönüşümünün İnşası

$[0, 1]$ doğru parçası önce 2 kat büyütülüp sonra ilk olarak $x = \frac{15}{8}$ doğrusunun sağında kalan parça $x = \frac{15}{8}$ doğrusuna göre katlanıp ikinci olarak $x = \frac{7}{4}$ doğrusunun sağında kalan parçayı $x = \frac{7}{4}$ doğrusuna göre katlayıp üçüncü olarak $x = \frac{3}{2}$ doğrusunun sağında kalan parçayı $x = \frac{3}{2}$ doğrusuna göre katlayıp ve son olarak da $x = 1$ doğrusunun sağında kalan parçayı $x = 1$ doğrusuna göre katlayarak çadır dönüşümünün deforme hali olan T_{d_3} dönüşümü elde edilir (Bkz. Şekil 4.16). T_{d_3} dönüşümü çadır dönüşümünün 3. deformasyonu olarak adlandırılacaktır.



Şekil 4.16. $T_{d_3}(x) = (g \circ g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası

Açık olarak ifade edilirse,

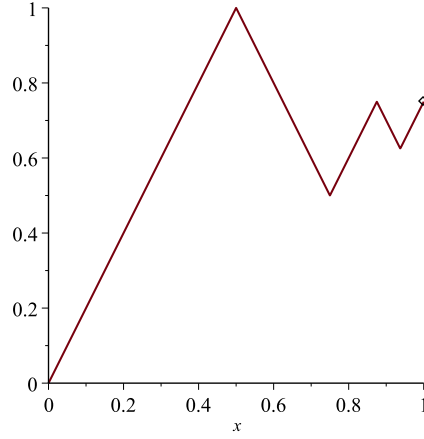
$$\begin{aligned}
 f : [0, 1] &\rightarrow [0, 2] & , & \quad f(x) = 2x \\
 g_3 : [0, 2] &\rightarrow \left[0, \frac{15}{8}\right] & , & \quad g_3(x) = \frac{15}{8} - \left|x - \frac{15}{8}\right| \\
 g_2 : \left[0, \frac{15}{8}\right] &\rightarrow \left[0, \frac{7}{4}\right] & , & \quad g_2(x) = \frac{7}{4} - \left|x - \frac{7}{4}\right| \\
 g_1 : \left[0, \frac{7}{4}\right] &\rightarrow \left[0, \frac{3}{2}\right] & , & \quad g_1(x) = \frac{3}{2} - \left|x - \frac{3}{2}\right| \\
 g : \left[0, \frac{3}{2}\right] &\rightarrow [0, 1] & , & \quad g(x) = 1 - |x - 1|
 \end{aligned}$$

olmak üzere T_{d_3} dönüşümü $T_{d_3}(x) = (g \circ g_1 \circ g_2 \circ g_3 \circ f)(x)$ dir. Böylece;

$T_{d_3} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dönüşümü

$$T_{d_3}(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ 2x - 1 & , \quad \frac{3}{4} \leq x \leq \frac{7}{8} \\ -2x + \frac{5}{2} & , \quad \frac{7}{8} \leq x \leq \frac{15}{16} \\ 2x - \frac{5}{4} & , \quad \frac{15}{16} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olacak şekilde elde edilir (Bkz. Şekil 4.17).



Şekil 4.17. T_{d_3} dönüşümünün grafiği

Benzer hesaplamalar ile T_{d_3} dönüşümünün ikilik tabandaki ifadesi,

$$T_{d_3}(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_2 a_3 a_4 \dots & , a_1 = 0 \\ \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0 \\ a_2 a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_2 \tilde{a}_3 a_4 a_5 a_6 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1 \end{cases}$$

olacak şekilde formüle edilir.

4.6. T_{d_n} Dönüşümünün İnşası

$T_{d_1}, T_{d_2}, T_{d_3}$ dönüşümlerinin ikilik tabandaki gösterimlerinde tekrar eden benzerlikler görülmektedir. Bu yüzden T_{d_4} dönüşümünün ikilik tabandaki ifadesi,

$$T_{d_4}(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_2 a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 0 \\ \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0 \\ a_2 a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0 \\ a_2 \tilde{a}_3 a_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \tilde{a}_7 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1 \end{cases}$$

olur. Sonuç olarak; $T_{d_1}, T_{d_2}, T_{d_3}$ ve T_{d_4} için elde edilen formüller kullanılarak;

$$T'_{d_{n-1}}(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_2 \tilde{a}_3 a_4 \tilde{a}_5 \dots \tilde{a}_{n-2} a_{n-1} \tilde{a}_n a_{n+1} a_{n+2} \dots & , a_{n+1} = 1, n \text{ tek ise} \\ a_2 \tilde{a}_3 a_4 \tilde{a}_5 \dots a_{n-2} \tilde{a}_{n-1} a_n \tilde{a}_{n+1} \tilde{a}_{n+2} \dots & , a_{n+1} = 1, n \text{ çift ise} \end{cases}$$

olmak üzere deforme çadır dönüşümlerinin genel formülü;

$$T_{d_n}(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} T'_{d_{n-1}}(a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} \dots) & , \quad a_{n+1} = 1 \text{ ise} \\ T_{d_{n-1}}(a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n a_{n+1} \dots) & , \quad \text{d.d} \end{cases}$$

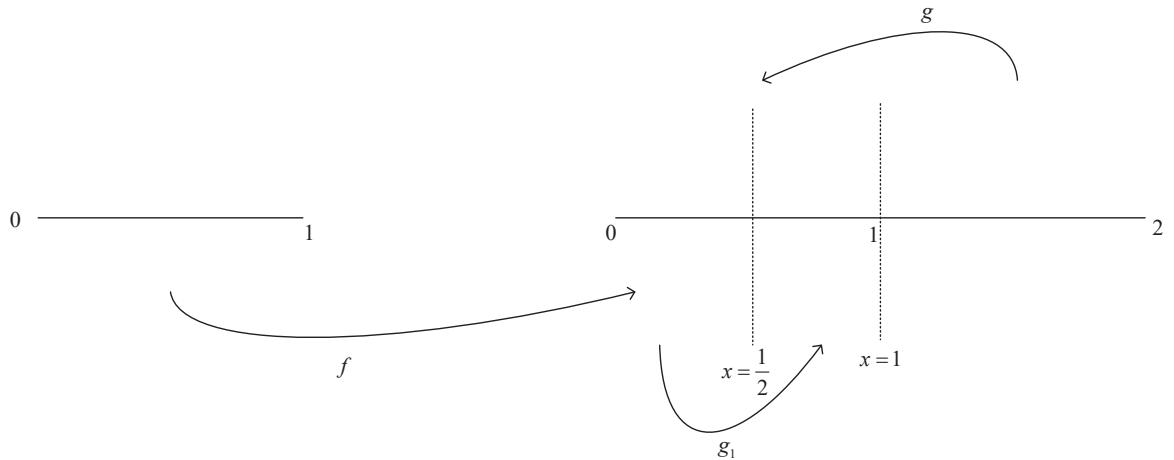
olarak ifade edilir. Bu dönüşüm çadır dönüşümünün n . deformatsyonu olarak adlandırılır.

Not: T çadır dönüşümünün sabit nokta sayısı 2, T_{d_1} çadır dönüşümünün 1. deformatsyonunun sabit nokta sayısı 3; $T_{d_2}, T_{d_3}, \dots, T_{d_n}$ çadır dönüşümünün ($n \geq 2$) için n . deformatsyonunun sabit nokta sayıları 2 olduğundan dolayı T_{d_1} ile ($n \geq 2$) için T_{d_n} dönüşümleri ve T çadır dönüşümü Tanım 2.23 ve Önerme 2.24 gereğince topolojik denk olamaz. Ayrıca; T_{d_n} dönüşümleri ($n \geq 2$) için Devaney anlamında kaotik olmadığından dolayı T_{d_n} ($n \geq 2$) ile T çadır dönüşümü topolojik denk olamaz.

4.7. Deforme Çadır Dönüşümlerinin Farklı Bir Versiyonu

Bu bölümde, çadır dönüşümlerinin deforme edilmiş inşalarından farklı olarak bir g_1 katlama dönüşümü kullanılarak deforme çadır dönüşümünün farklı bir versiyonu inşa edilecektir.

$[0, 1]$ doğru parçası önce 2 kat büyütülüp sonra ilk olarak $x = \frac{1}{2}$ doğrusunun solunda kalan parçayı $x = \frac{1}{2}$ doğrusuna göre katlayıp son olarak da $x = 1$ doğrusunun sağında kalan parça $x = 1$ doğrusuna göre katlayarak deforme çadır dönüşümünün farklı bir versiyonu olan $T_{d'}$ dönüşümü elde edilir (Bkz. Şekil 4.18).



Şekil 4.18. $T_{d'}(x) = (g \circ g_1 \circ f)(x)$ dönüşümünün inşası

Açık olarak ifade edersek,

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 2] \quad , \quad f(x) = 2x$$

$$g_1 : [0, 2] \rightarrow \left[\frac{1}{2}, 2\right] \quad , \quad g_1(x) = \frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2} - x \right|$$

$$g : \left[\frac{1}{2}, 2\right] \rightarrow [0, 1] \quad , \quad g(x) = 1 - \left| x - 1 \right|$$

olmak üzere T_d dönüşümü $T_d(x) = (g \circ g_1 \circ f)(x)$ dir. Böylece;

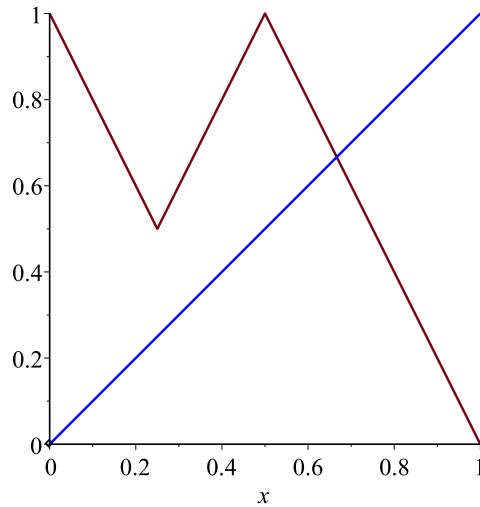
$$\begin{aligned} T_d(x) &= (g \circ g_1 \circ f)(x) = g(g_1(2x)) \\ &= g\left(\frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2} - 2x \right|\right) \\ &= 1 - \left| \frac{1}{2} + \left| \frac{1}{2} - 2x \right| - 1 \right| \\ &= 1 - \left| \left| \frac{1}{2} - 2x \right| - \frac{1}{2} \right| \end{aligned}$$

eşitliğinden,

$T_d : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dönüşümü

$$T_d(x) = \begin{cases} 1 - 2x & , \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 2x & , \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olacak şekilde elde edilir (Bkz. Şekil 4.19).



Şekil 4.19. T_d dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

Şimdi, T_d dönüşümünü ikilik tabanda gösterelim. $a = a_1a_2a_3\dots$ olsun.

i) $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$ için $a_1 = 0$ ve $a_2 = 0$ dir. Ayrıca;

$$\begin{aligned}
 1 - 2a &= 1 - 2\left(\frac{0}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} \dots\right) \\
 &= 1 - \left(\frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots\right) - \left(\frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} \dots\right) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{\tilde{a}_3}{2^2} + \frac{\tilde{a}_4}{2^3} + \frac{\tilde{a}_5}{2^4} + \dots \\
 &= 1\tilde{a}_3\tilde{a}_4\tilde{a}_5\dots \\
 &= \tilde{a}_2\tilde{a}_3\tilde{a}_4\tilde{a}_5\dots
 \end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$ için $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ dir. Böylece;

$$\begin{aligned}
 2a &= 2\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots\right) \\
 &= a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \\
 &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \dots \\
 &= a_2a_3a_4\dots
 \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

iii) $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ için $a_1 = 1$ dir. Açık olarak;

$$\begin{aligned}
 2 - 2a &= 2 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots\right) \\
 &= 2 - 1 - \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\
 &= 1 - \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) - \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{2^2} + \frac{a_4}{2^3} + \dots\right) \\
 &= \left(\frac{1 - a_2}{2} + \frac{1 - a_3}{2^2} + \frac{1 - a_4}{2^3} + \dots\right) \\
 &= \tilde{a}_2\tilde{a}_3\tilde{a}_4\dots
 \end{aligned}$$

olur.

Böylece $T_{d'}$ 'nin ikilik tabandaki ifadesi,

$$T_{d'}(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 0 \\ a_2 a_3 a_4 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 1 \\ \tilde{a}_2 \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \dots & , a_1 = 1 \end{cases}$$

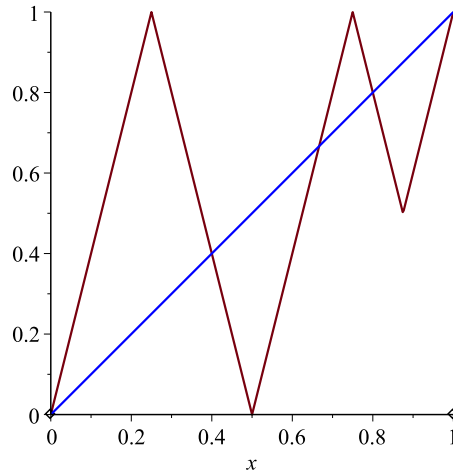
olacak şekilde formüle edilir.

$T_{d'}^2$ dönüşümünün ikilik tabandaki gösterimi açık olarak,

$$T_{d'}^2(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 0 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 1 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 0 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1 \end{cases}$$

olur (Bkz. Şekil 4.20). Bu ifadeyi düzenlersek aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$T_{d'}^2(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} a_3 a_4 a_5 \dots & , a_2 = 0 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 0, a_2 = 1 \\ \tilde{a}_3 \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ a_3 a_4 a_5 \dots & , a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1 \end{cases}$$



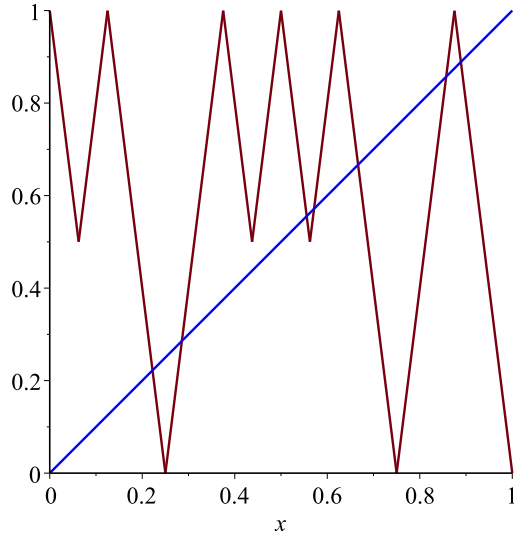
Şekil 4.20. $T_{d'}^2$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

Benzer şekilde, T_d^3 dönüşümünün ikilik tabandaki gösterimi açık olarak,

$$T_d^3(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, & a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, & a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, & a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, & a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, & a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1 \end{cases}$$

olur (Bkz. Şekil 4.21). Bu ifadeyi düzenlersek aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$T_d^3(a_1 a_2 a_3 \dots) = \begin{cases} \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, & a_2 = a_3 = 0, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_2 = 0, a_3 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, & a_2 = 1, a_3 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, & a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, & a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1 \end{cases}$$



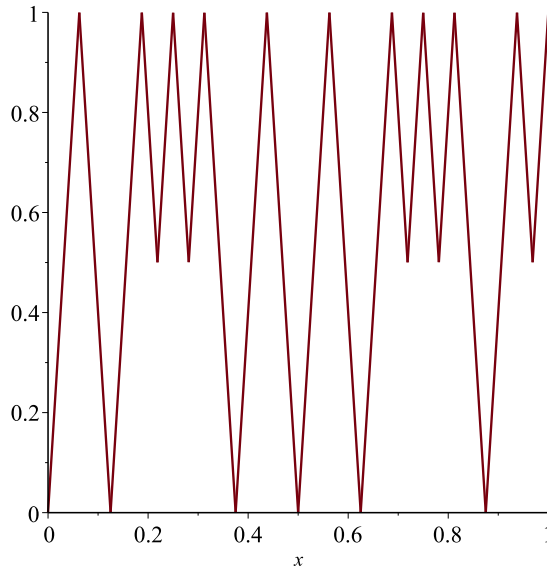
Şekil 4.21. T_d^3 dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

Benzer şekilde T_d^4 dönüşümünün ikilik tabandaki gösterimi açık olarak,

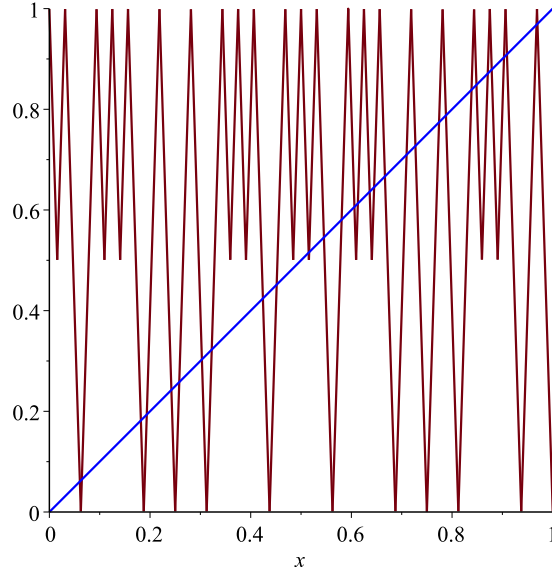
$$T_{d'}^4(a_1 a_2 a_3 \dots) = \left\{ \begin{array}{l} a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1 \end{array} \right.$$

olur (Bkz. Şekil 4.22). Bu ifadeyi düzenlersek aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$T_{d'}^4(a_1 a_2 a_3 \dots) = \left\{ \begin{array}{l} a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_2 = a_3 = a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_2 = a_3 = 0, a_4 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_2 = a_4 = 0, a_3 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_2 = a_5 = 0, a_4 = a_3 = 1 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_2 = 0, a_3 = a_4 = a_5 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_2 = 1, a_3 = a_4 = a_5 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_3 = a_4 = 0, a_2 = a_5 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_2 = a_4 = 1, a_3 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_2 = a_3 = 1, a_4 = 0 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_2 = a_3 = a_4 = 1 \\ \tilde{a}_4 \tilde{a}_5 \tilde{a}_6 \dots, \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = 0 \\ a_4 a_5 a_6 \dots, \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 1, a_5 = 1 \end{array} \right.$$



Şekil 4.22. $T_{d'}^4$ dönüşümünün grafiği



Şekil 4.23. $T_{d'}^5$ dönüşümünün grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesişimi

$T_{d'}^1, T_{d'}^2, T_{d'}^3, T_{d'}^4$ ve $T_{d'}^5$ (Şekil 4.23)'den görüldüğü gibi $T_{d'}^n$ için genel bir formül vermenin kolay olmadığı anlaşılmaktadır. Bu yüzden periyodik noktalar için genel bir formül vermek yerine sadece bir tek sabit noktası olduğundan çadır dönüşümünün yanı sıra deforme edilmiş çadır dönüşümlerinin hiçbirine topolojik denk olmadığı sonucuna varılabilir.

5. SONUÇ

Çadır dönüşümü kaotik dinamik sistemlerin en temel örneklerinden birisidir. Bu tezde, bu dönüşümün inşasından yararlanarak deforme edilmiş bazı durumlar ikilik sisteme dönüştürülerek incelenmektedir. Bunların bazıları için bu dönüşümlerin dinamiğini araştırmada genel bir formül vermek kolay iken farklı durumlarda ise çok basit olmadığı gözlemlenmiştir. Sonuç olarak, genel durumu formüle edilebilen T_{d_1} dönüşümünün dinamiği detaylı olarak incelenmekte, periyodik noktaları formüle edilebilmekte ve Devaney anlamında kaotik olmadığı açık olarak gösterilmektedir. Ayrıca; çadır dönüşümü için farklı katlama dönüşümleri kullanılarak çok sayıda dinamik sistem inşa edilebileceği sonucuna varılmaktadır. Bu yüzden bu konu üzerinde birçok araştırma yapılabilir ve elde edilen ilginç dinamik sistemler detaylı olarak incelenebilir. Elde edilen dinamik sistemler de topolojik denk olup olmadıklarına göre sınıflandırılabilir.

KAYNAKÇA

- [1] Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A. (1996). CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems. *Springer*.
- [2] Barnsley, M. (1988). Fractals Everywhere. *San Diego: Academic Press*.
- [3] Devaney, R.L. (2020). A First Course in Chaotic Dynamical Systems. *CRC Press, Taylor and Francis Group*.
- [4] Devaney, R.L. (2022). An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. *CRC Press, Taylor and Francis Group*.
- [5] Googson, G.R. Lecture Notes on Dynamical Systems, Chaos and Fractal Geometry. Towson University, Mathematics Department.
- [6] Gulick, D. (1988). Encounters with Chaos and Fractals. *Boston: Academic Press*, 88(3-4), 979-984.
- [7] Peitgen, H.O., Jurgens, H. and Saup, D. (2004). Chaos and fractals. *New frontiers of science. Springer-Verlag*.
- [8] Banks, J., Brooks, J., Cairns, G., Davis, G. and Stacey, P. (1992). On Devaney's Definition of Chaos. *The American Mathematical Monthly*, 99, 4, 332-334.
- [9] Değirmenci, N., Koçak, Ş. (2003). Existence of a Dense Orbit and Topological Transitivity: When are They Equivalent? *Acta Mathematica Hungarica*, 99, 185-187.
- [10] Strogatz, S.H. (2018). Nonlinear Dynamics and Chaos With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering. *CRC Press, Taylor and Francis Group*.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID : 0000-0001-9801-6374

Adı-Soyadı : Damla AYDOĞDU

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2010-2015, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2020-2022, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Uygulamalı Matematik, Yüksek Lisans

Yayımları ve/veya Bilimsel/Sanatsal Faaliyetleri:

- ‘The Investigation of Dynamics of a Deformed Tent Family’ in 8th IFS and Contemporary Mathematics Conference (ICRAPAM2022), 16-19 Haziran 2022, Mersin, TÜRKİYE.