

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN
KANIT ŞEMALARININ İNCELENMESİ



MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
(İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ)
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FUNDA KURTTEKİN

EKİM 2022

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN
KANIT ŞEMALARININ İNCELENMESİ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
(İLKÖĞRETİM MATEMATİK EĞİTİMİ)
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Funda KURTTEKİN

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa AKINCI

ZONGULDAK

Ekim 2022

KABUL:

Funda KURTTEKİN tarafından hazırlanan “İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Kanıt Şemalarının İncelenmesi” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 21/10/2022

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa AKINCI
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Murat GENÇ
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Emine Gaye ÇONTAY
Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./..../20....

Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Funda KURTTEKİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İLKÖĞRETİM MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN KANIT ŞEMALARININ İNCELENMESİ

Funda KURTTEKİN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Mustafa AKINCI

Ekim 2022, 97 sayfa

Çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmenlerinin kullandıkları kanıt şemalarını ve bu şemaların nasıl ortaya çıktığını belirlemektir. Nitel araştırma yönteminin benimsendiği bu çalışma, durum çalışmasıdır. Çalışmanın araştırma grubunu oluşturan, MEB’te görev yapmakta olan dört ilköğretim matematik öğretmenin seçiminde; amaçlı örnekleme yöntemi olan kolay ulaşılabilir örnekleme yönteminden yararlanılmıştır. Çalışmanın verileri, görev temelli görüşmeler yardımıyla toplanmıştır. Görev temelli görüşmeler, çalışma kâğıdı ve kanıt süreçlerine ait soru formu ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmenlerin sahip oldukları kanıt şemaları, Harel ve Sowder (1998)’in kanıt şemaları kavramsal çerçevesine göre belirlenmiştir. Elde edilen bulguların analizinde, nitel veri analizi olan betimsel analiz ve içerik analizi yöntemi kullanılmıştır. Öğretmenlerin görev temelli görüşmelerden elde edilen bulguları göz önüne alındığında dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemaları şeklinde üç temel kategorideki kanıt şemalarına ait özelliklere sahip oldukları görülmüştür. Bununla beraber öğretmenlerin doğrulamalarında dışsal otoriter ve sembolik kanıt şeması özelliklerine rastlanmamıştır. Öğretmenlerin bir soruya ait doğrulamalarında farklı şemalara ait özelliklere sahip olduğu

ÖZET (devam ediyor)

belirlenmiştir. Görev temelli görüşmelerde en fazla kullanılan şema analitik dönüşümsel kanıt şeması olmuştur. Analitik kanıt şemaları ağırlıklı kullanılmış olmasına rağmen öğretmenlerin kendilerini ifade etme konusunda çekimser bir tavır sergiledikleri ve kanıta ait bilgilerinde eksikler olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Kanıt, kanıt şemaları, matematik öğretimi



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

EXAMINATION OF PROOF SCHEMES OF ELEMENTARY MATHEMATICS TEACHERS

Funda KURTTEKİN

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics and Science Education**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Mustafa AKINCI

October 2022, 97 pages

The aim of the study is to determine the proof schemes used by elementary mathematics teachers and how these schemes emerged. This study, in which the qualitative research method is adopted, is a case study. In the selection of four primary school mathematics teachers working in the Ministry of National Education, constituting the research group of the study; the easily accessible sampling method, which is a purposeful sampling method, was used. The data of the study were collected with the help of task-based interviews. Task-based interviews were carried out with a worksheet and a questionnaire regarding the proof processes. The proof schemes that teachers have were determined according to the conceptual framework of Harel and Sowder (1998)'s proof schemes. In the analysis of the findings, descriptive analysis and content analysis methods, which are qualitative data analysis, were used. Considering the teachers' findings obtained from task-based interviews, it was seen that they had the characteristics of proof schemes in three basic categories as external, experimental and analytical proof schemes. However, external authoritarian and symbolic proof scheme features were not found in teachers'

ABSTRACT (continued)

validations. It was determined that the teachers had the characteristics of different schemes in their validation of a question. The most used scheme in task-based interviews was the analytical transformational proof scheme. Although analytical proof schemes were mainly used, it was observed that teachers had a hesitant attitude to express themselves and there were deficiencies in their knowledge of proof.

Keywords: Proof, proof schemes, teaching mathematics



TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın her aşamasında deneyim ve fikirleriyle yoluma ışık tutan, sorduğum her soruya enerjisiyle cevap vererek motivasyonumu artıran ve desteğini her daim hissettiğim çok kıymetli hocam Dr. Öğr. Üyesi Mustafa AKINCI (Bülent Ecevit Üniversitesi Eğitim Fakültesi)'ya teşekkür ederim.

Tez savunma jürimde yer alan değerli hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Murat GENÇ (Bülent Ecevit Üniversitesi Eğitim Fakültesi)'e ve Dr. Öğr. Üyesi Emine Gaye ÇONTAY (Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi)'a tezime sunmuş oldukları katkılardan dolayı teşekkür ederim.

Çalışmamda fikir ve önerilerini esirgemeyen hocam Sayın Prof. Dr. Derya ÇELİK (Trabzon Üniversitesi Eğitim Fakültesi)'e değerli vaktini ayırdığı için teşekkür ederim.

Çalışmamın uygulama sürecinde katkıda bulunan zümre öğretmen arkadaşlarıma ayırmış oldukları zaman ve yönelttiğim sorulara vermiş oldukları samimi cevaplar için teşekkür ederim.

Eğitim öğretim hayatım boyunca maddi, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem Eda KURTTEKİN, babam Asım KURTTEKİN ve kıymetlim, kardeşim Berkay KURTTEKİN'e teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xiii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xix
BÖLÜM 1 GİRİŞ	1
1.1 ARAŞTIRMA PROBLEMİ	4
1.2 ARAŞTIRMANIN AMACI	4
1.3 ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ	5
1.4 ARAŞTIRMANIN SINIRLILIKLARI	7
1.5 ARAŞTIRMANIN VARSAYIMLARI.....	7
1.6 TANIMLAR	7
BÖLÜM 2 KAVRAMSAL ÇERÇEVE	9
2.1 PROBLEM ÇÖZME	9
2.2 AKIL YÜRÜTME.....	9
2.3 KANIT.....	10
2.4 KANITIN MATEMATİK EĞİTİMİNDEKİ YERİ.....	11
2.5 KANIT ŞEMALARI	12
2.5.1 Dışsal Kanıt Şemaları	15
2.5.1.1 Otoriter Kanıt Şeması.....	15
2.5.1.2 Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	16

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

2.5.1.3 Sembolik Kanıt Şeması	16
2.5.2 Deneysel Kanıt Şemaları	17
2.5.2.1 Algısal Kanıt Şeması	17
2.5.2.2 Temel Örnekler Kanıt Şeması	17
2.5.3 Analitik Kanıt Şemaları	18
2.5.3.1 Dönüşümsel Kanıt Şeması	18
2.5.3.2 Aksiyomatik Kanıt Şeması	18
2.6 KANIT VE KANIT ŞEMALARI İLE İLGİLİ YAPILAN ÇALIŞMALAR	20
2.6.1 Kanıt İle İlgili Yapılan Çalışmalar	20
2.6.2 Kanıt Şemaları İle İlgili Yapılan Çalışmalar	23
BÖLÜM 3 YÖNTEM	31
3.1 ARAŞTIRMANIN DESENİ	31
3.2 ARAŞTIRMANIN ÖRNEKLEMİ	31
3.3 VERİ TOPLAMA ARAÇLARI	32
3.3.1 Görev Temelli Görüşmeler	32
3.3.1.1 Çalışma Kâğıdı	33
3.3.1.2 Kanıt Süreçlerine Ait Soru Formu	35
3.4 PİLOT UYGULAMA	35
3.5 VERİ TOPLAMA SÜRECİ	36
3.6 VERİ ANALİZİ	37
3.7 GEÇERLİK VE GÜVENİRLİK	39
3.7.1 Geçerlik	39
3.7.1.1 İç Geçerlik	39
3.7.1.2 Dış Geçerlik	40
3.7.2 Güvenirlik	40
3.7.2.1 İç Güvenirlik	40
3.7.2.2 Dış Güvenirlik	41
3.8 ARAŞTIRMACININ ROLÜ	41

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

Sayfa

BÖLÜM 4 BULGULAR.....	43
4.1 GÖREV TEMELLİ GÖRÜŞMELERDE ÖĞRETMENLERİN DIŞSAL KANIT ŞEMALARINA AİT CEVAPLARI	43
4.1.1 Öğretmenlerin Dışsal Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şemasına Ait Cevapları.....	44
4.2 GÖREV TEMELLİ GÖRÜŞMELERDE ÖĞRETMENLERİN DENEYSEL KANIT ŞEMALARINA AİT CEVAPLARI	44
4.2.1 Öğretmenlerin Deneysel Algısal Kanıt Şemasına Ait Cevapları.....	45
4.2.2 Öğretmenlerin Deneysel Temel Örnekler Kanıt Şemasına Ait Cevapları.....	48
4.3 GÖREV TEMELLİ GÖRÜŞMELERDE ÖĞRETMENLERİN ANALİTİK KANIT ŞEMALARINA AİT CEVAPLARI	56
4.3.1 Öğretmenlerin Analitik Dönüşümsel Kanıt Şemasına Ait Cevapları	57
4.3.2 Öğretmenlerin Analitik Aksiyomatik Kanıt Şemasına Ait Cevapları	69
BÖLÜM 5 TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER	75
5.1 TARTIŞMA VE SONUÇ.....	75
5.2 ÖNERİLER	79
KAYNAKLAR.....	81
EK AÇIKLAMALAR	93
ÖZGEÇMİŞ	97



ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Harel ve Sowder (1998)'in kanıt şemaları sınıflandırması.	14
Şekil 4.1 Eylül'ün çalışma kâğıdının üçüncü sorusuna ait cevabı.	46
Şekil 4.2 Eylül'ün çalışma kâğıdının yedinci sorusuna ait cevabı.	48
Şekil 4.3 Rana'nın çalışma kâğıdının ikinci sorusuna ait cevabı.	50
Şekil 4.4 Rana'nın çalışma kâğıdının altıncı sorusuna ait cevabı.	52
Şekil 4.5 Fatma'nın çalışma kâğıdının altıncı sorusuna ait cevabı.	53
Şekil 4.6 Rana'nın çalışma kâğıdının altıncı sorusuna ait cevabı.	56
Şekil 4.7 Eylül'ün çalışma kâğıdının birinci sorusuna ait cevabı.	58
Şekil 4.8 Fulya'nın çalışma kâğıdının ikinci sorusuna ait cevabı.	59
Şekil 4.9 Eylül'ün çalışma kâğıdının ikinci sorusuna ait cevabı.	60
Şekil 4.10 Eylül'ün çalışma kâğıdının dördüncü sorusuna ait cevabı.	61
Şekil 4.11 Fulya'nın çalışma kâğıdının dördüncü sorusuna ait cevabı.	63
Şekil 4.12 Selin'in çalışma kâğıdının beşinci sorusuna ait cevabı.	63
Şekil 4.13 Eylül'ün çalışma kâğıdının beşinci soruna ait cevabı.	64
Şekil 4.14 Fulya'nın çalışma kâğıdının dokuzuncu sorusuna ait cevabı.	65
Şekil 4.15 Selin'in çalışma kâğıdının dokuzuncu sorusuna ait cevabı.	67
Şekil 4.16 Eylül'ün çalışma kâğıdının sekizinci sorusuna ait cevabı.	68
Şekil 4.17 Selin'in çalışma kâğıdının yedinci sorusuna ait cevabı.	70
Şekil 4.18 Selin'in çalışma kâğıdının sekizinci sorusuna ait cevabı.	71



ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 Lee'den (1999) uyarlanan kanıt şemaları sınıflandırması.	19
Çizelge 3.1 Kanıt şemalarının asıl uygulamaya ait göstergeleri.	38
Çizelge 4.1 Öğretmenlerin deneysel kanıt şemaları göstergelerine ait dağılımları.....	45
Çizelge 4.2 Öğretmenlerin analitik kanıt şemaları göstergelerine ait dağılımları.....	57





EK AÇIKLAMALAR DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
EK 1: Çalışma Kâğıdı (Pilot Uygulama Öncesi)	93
EK 2: Çalışma Kâğıdı (Pilot ve Asıl Uygulama)	94
EK 3: Kanıt Süreçlerine Ait Soru Formu (Pilot ve Asıl Uygulama).....	95
EK 4: Etik Kurulu Kararı	96





SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

KISALTMALAR

MEB : Milli Eğitim Bakanlığı

NCTM : National Council of Teachers of Mathematics





BÖLÜM 1

GİRİŞ

Matematik, elde edilen her bilginin ve becerinin sonraki süreçlerde de kullanılmasını gerekli kılan; eski ve yeni bilgilerin üst üste eklendiği değil harmanlandığı bir bilim dalıdır (Moralı, Uğurel, Tünnüklü ve Yeşildere 2006). Matematik bir düşünme şeklidir (Baki, Güven ve Karataş 2002). Bu sebeple, analitik ve yaratıcı düşünen bireyler yetiştirme noktasında matematik eğitimi önemli bir yere sahiptir (Şahin ve Eraslan 2019). Matematiğe bu yönden bakıldığında matematiksel düşünmeden söz edilebilir.

Matematiksel düşünme, problemleri çözüp doğrularken matematiğe ait yöntem, teknik ve kavramları direkt ya da dolaylı yoldan kullanmaktır (Henderson ve Tilbury 2004). Bireylerin günlük hayatlarında da problemlerle karşılaşması kaçınılmazdır, dolayısıyla bireyler bu problem çözme sürecinde de matematiksel düşünmeyi kullanırlar (Arslan ve Yıldız 2010). Matematik eğitimcilerinin teoremleri ne şekilde kanıtladıklarını anlamak matematiksel düşünmeyi belirlemenin bir yoludur (Polya 1945).

NCTM [National Council of Teachers of Mathematics], süreç standartlarında ‘kanıt ve muhakeme’ olgusunu belirlemiş ve kanıt kavramının matematik eğitiminde önemli bir yeri olduğunu vurgulamıştır (NCTM 2000). Kanıt matematiğin temelini oluşturan (Mingus ve Grassl 1999) ve matematikte büyük önem taşıyan bir yere sahiptir (Hanna 2000). Dolayısıyla kanıtlar, matematiksel bilgileri içselleştirmeyi sağlayan önemli ve ana mekanizmalardan biri olarak görülebilir (Pala ve Narlı 2018). Çünkü kanıtlama esnasında bir teoremi açıklama, bu teoremin doğruluğunun ya da yanlışlığının neden olduğunu ifade etme; farklı mantıksal düşünme yöntemlerini ve kanıt çeşitlerini seçme ve kullanma söz konusudur (Baki 1996).

Kanıt kavramı matematiğe Yunanlılar döneminde girmiştir (Grabiner 2012). Kanıtı ilk kullanan kişinin ise M.Ö. VI. yüzyılda yaşamış Thales olduğu söylenmektedir. Öncesinde matematik bilgilerinin çok ilkel olduğu sadece bir durumun doğruluğunun bilindiği ve uygulandığı söylenmektedir. Ancak Thales bu durumu üst basamağa taşıyarak hem bu bilgileri kullanmış hem de nasıl doğru olduğunu göstermiştir. III. yüzyılda ise Euclid geometride aksiyomlar için

kanıt kavramını getirmiştir. Ayrıca geçmişten günümüze matematiğin tüm bilim dallarında kullanılmaktadır.

Kanıt bir probleme ait bulunan sonucun doğruluğunu göstermek, sonucu başkalarına aktararak görmelerini sağlamak ve bu bilgiye ikna etmek amacıyla kullanılır (Almeida 2003). Bell (1976) ise kanıtı üç farklı anlamla açıklamıştır. Bunları bir problemin ya da durumun doğruluğunu doğru mu ya da yanlış mı diye test etmek, bunun doğru ise neden doğru; yanlış ise neden yanlış olduğunu belirtmek, ardından doğruluğunu kabul ettiğimiz ifadelerin sonuçlarını tümdengelim şeklinde düzenleyip sistemleştirmek olarak tanımlamıştır.

Matematiksel kanıt sayesinde öğrenciler, matematik bilgilerinin aşamalarını inşa ederek keşfedebilir (Stylianides 2007). Yine matematik bilgileri kanıtlama sayesinde öğrenciler tarafından neden sonuç ilişkileri kurularak öğrenilebilir, kavranabilir (Hanna 1990). Aynı zamanda matematiğe ait bilgilerini geliştirebilir (Kitcher 1984). NCTM de kanıtın sadece bir ünite içerisinde aktarılamayacağı görülür (Jones ve Rodd 2001). Uygan ve diğerleri (2014), kanıtın öneminin sayısız kaynakta belirtilmiş olmasına rağmen matematik eğitiminin gerçekleştirildiği sınıf ortamlarında kanıt kavramı hakkında yeterli bilgiye sahip olunmadığı, genel olarak sıkıcı bir eylem olarak ifade edildiği, herhangi bir problemin sadece sonucuna ulaşmak için kullanılan bir yöntem olarak görüldüğünü belirtmişlerdir. Dolayısıyla matematiksel kanıt, öğretim programlarının sadece belirli zamanlarında ya da belirli konularında kullanılan bir süreç olarak değil de, müfredatın bir parçası ve sınıftaki tüm öğrenciler tarafından benimsenen eğlenceli tartışmalar bütünü haline getirilebilir.

Tall (2014), matematiksel kanıtın gelişme sürecinin erken çocukluk döneminde başladığını, yaşantılarla her dönem de geliştiğini belirtmiştir. Dolayısıyla kanıt çok küçük yaşlarda bilişsel olarak sahip olunan bir özelliktir ve zamanla gelişmesi de durağan hale gelmesi ya da gerilemesinin de bireyin yaşantılarına bağlı olduğu söylenebilir. Bu sebeple kanıt kavramının eğitim öğretim kademelerinin tümünde yer alması gerekmektedir (CadwalladerOlsker 2007, Hanna 2000).

Harel ve Sowder (1998), kanıtlama kavramını bir ifadenin doğrulanmasında ortaya çıkan kuşku ortadan kaldırabilme veya oluşturabilme amacıyla kişinin yaşadığı süreç olarak açıklamıştır. Problemi çözümlenerek, doğru anda doğru fikrin akla gelmesi ise kanıt oluşturma demektir (Selden ve Selden 2003). Harel ve Sowder (1998), kanıtlamayı “aslına anlama” ve “ikna etme” süreci olarak ifade etmiştir. Bell (1976), matematiksel kanıt ile ilgili yayın yapan

ilk araştırmacılarıdır. Ona göre matematiksel kanıt bir durumun doğruluğunu gösterirken karşı tarafı ikna etme sürecinde takip edilen adımlardır. Formel bir yol olarak karşımıza çıkan matematiksel kanıt belli bir gerekçelendirme aynı zamanda akıl yürütme biçimidir (NCTM 2000). Matematiksel kanıt, matematik ve matematik eğitimi için önemli bir elemandır (Güven, elik ve Karataş 2005). Matematiksel kanıt sayesinde öğrenciler matematikçiler tarafından yapılanların ne anlam ifade ettiğini öğrenebilirler (İmamoglu 2010). Çünkü ğrenciler matematiğe ait kanıtlamalar sayesinde doğrulamalara ait formüllerin yeterli olmayacağını aynı zamanda formüllerin sebepleriyle açıklanması gerektiğini öğrenirler (Güven, elik ve Karataş 2005).

Kanıt şemaları kişilerin nasıl ikna olduklarını ve etrafında bulunan kişileri nasıl ikna ettiklerini göstermektedir (Harel ve Sowder 1998). Bu sayede kanıt şemaları öğrencilerin ya da öğretmenlerin matematiksel durumlar karşısındaki tepkilerini görmeyi sağlayabilir. Kanıt şeması bireyin kanıtlama sürecindeki doğrulama aşamalarını ve söylemlerini ele alan bir kavramsal çerçevedir. Bu aşamalarda birey karşısındakine yaptığı doğrulamaları nasıl gerçekleştiriyorsa, karşısındakini doğruluğa nasıl ikna ediyorsa buna göre şemalara sahiptir denilebilir. Güven (2002), matematiğin düşünme biçimi olduğunu belirtmişlerdir. Kanıt şemaları da bu düşünme sürecinin bir parçası olarak karşımıza çıkmakta ve bu düşünmelere ait tepkileri göz önüne sermektedir.

Günümüzde bireylerin becerilerini geliştirerek değişiklikler göstermesi, bilgiye teknoloji kullanarak ulaşabilmesi, bilgiyi oluşturarak tanımlayabilmesi, problemler karşısında daha yaratıcı ve etkisi yüksek zmler üretebilmesi konuları eğitimde önemli amaçlar olarak görülmektedir (English ve Watters 2004). Ayrıca günümüzde hayatında matematiği kullanabilen, karşılaştığı problemleri ozeabilen, bu problemlere eleştirel gözle bakabilen, üzüm ve düşüncelerini paylaşabilen, grup çalışması yapabilen, sorumluluk sahibi, dünya vatandaşı haline gelmiş bireyler yetiştirebilmeyi amaç edinmek; matematik ğretim programının temel yapıtaşı haline gelmiştir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] 2018).

Matematik eğitimcileri kanıtlamayla bu yapıları kullanarak kabul görülebilir yeni yapılar inşa etmektedirler (İskenderoğlu 2010). Oluşan bu yeni yapılar matematiğin gelişimi ve büyümesi için temel oluşturmaktadır (Mingus ve Grassl 1999). Fakat ğrencilerin genellikle matematiksel kanıtlamanın gereğine inanmadıkları görülmektedir. Hlbuki ğrencilerin matematiksel sorulara ürettikleri üzümlerin neden doğru olduğundan emin oldukları kadar bunlardan nasıl emin oldukları da önem taşımaktadır (İskenderoğlu 2010). Dolayısıyla ğretmenler, öğrencileri

için kanıtı uygulayabilecekleri fırsatı yaratarak, içeriği zenginleştirilmiş öğrenme ortamı oluşturmalıdır, çünkü yenilikçi eğitim anlayışı doğrultusunda bunlar beklenmektedir (Knuth 2002a). Bu sebeple matematik öğretmenlerinin matematiğin ne anlam ifade ettiğini bilmesi ve matematik bilgilerine ait fikirlerden anladıklarını eleştirel biçimle yorumlayabilmesi gereklidir (Masingila 1998).

Bu bağlamda çalışmada ilköğretim matematik öğretmenlerinin kanıt şemaları belirlenmeye çalışılmıştır. Öğretmenlerin kanıt şemaları belirlenerek kanıt süreçlerinin anlamlandırılacağı ve öğretmenlere yönelik öneriler geliştirilerek alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.1 ARAŞTIRMA PROBLEMİ

Matematik ve matematik eğitimi için kanıtın önemi gün geçtikçe artmaktadır (İskenderoğlu 2010). Öğretmenlerin kanıta ait algıları ve deneyimleri öğrencilerin kanıtlama becerisi elde etme süreçlerinde etkin rol oynamaktadır (Almeida 2003). Kanıt, kanıtlama sürecindeki araçları içerirken; bu süreçte sergilenen tüm düşünceler sonucunda ise kanıt şemaları oluşmaktadır.

Kanıt şeması, bir bireyin kendisi için araştırma yaparken ayrıca kendisini ikna etmeye çalışırken ortaya çıkmaktadır (Harel 2001). Ayrıca bireyin savunma yöntemleri kanıt şemalarını oluşturmaktadır (Harel ve Sowder 2005). Bu da düşünmenin bir yolunun kanıt şemaları olduğunu göstermektedir (Harel 2008).

Kanıt şemaları ile öğrencilerin anlama düzeylerini ve öğrencilerin ikna oldukları kanıt tekniklerini belirlemek mümkün olmaktadır (Knapp 2006). Dolayısıyla öğretmenlerin yetkinlik ve beceri konusunda donanımlı olması gerekmektedir (Moralı ve diğerleri 2006). Çünkü öğretmen kanıtlamada ne derece başarılı ve yetenekli olursa öğrencilerinin de kendilerindeki bu yeteneği ortaya koyabilmelerine fırsat tanımış olur (Baki 1999). Bunun da öğretmenin, öğrencilerine farklı bakış açıları kazandırabilecek yetkinliğe ulaşmasına katkı sağlayabileceği düşünülmektedir.

Bu çalışmada “*İlköğretim matematik öğretmenlerinin kanıt şemaları nelerdir?*” sorusuna cevap aranacaktır.

1.2 ARAŞTIRMANIN AMACI

Bu çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel önermeleri doğrulama süreçlerine ait kanıt şemalarını belirlemektir.

1.3 ARAŞTIRMANIN ÖNEMİ

Matematik bir düşünme ürünüdür (Baki, Güven ve Karataş 2002). Matematiksel düşünmeyi anlamada kanıt büyük önem taşımaktadır (Güner 2012). Matematik öğreniminde ve öğretiminde önemli bir yere sahip olan kanıt süreci birçok araştırmacı tarafından tanımlanmış ve önemine vurgu yapılmıştır (Tall 1998, Yeşildere ve Türnüklü 2007).

Matematiksel kavramların anlaşılmasında, bilgilerin gelişip olgunlaşmasında matematiksel kanıtlar temel eleman ve önemli bir araç olarak görülmektedir (Schoenfeld 2002, Stylianides 2007). Matematiği daha anlamlı öğrenmenin bir yolu olarak karşımıza matematiksel kanıtlar çıkmaktadır (Tucker 1999). Matematiksel kanıtlar, öğrencilere karşılaştıkları problemlerin çözümü için yöntemler; stratejiler, araçlar ve kavramlar gibi önemli matematiksel ifadeler sunmaktadır (Mariotti ve Balacheff 2008). Ayrıca matematiksel kanıtlar, matematik eğitimcilerinin yaptıklarının öğrenciler tarafından anlaşılmasını sağlayan bir araçtır (İmamoğlu 2010). Problem çözümünde kanıtların sağladığı bu yeni kavramsal ilişkiler, yöntemler ve matematiksel anlayış; kanıtlara, matematiksel önermelerin doğruluğunu göstermekten daha çok değer kazandırır (Hanna ve Barbeau 2002). Dede ve Karakuş (2014), kanıt yapma sürecinde öğrencilerin denemeler yaparak keşfetme sürecine girdiklerini; matematiğin estetik yönünü fark ettiklerini ve analitik düşünme becerilerini geliştirebileceklerini ifade etmişlerdir. Dolayısıyla öğretmenler, öğrencilerinin matematiksel bilgileri keşfedebilmeleri için gerekli olan zamanı tanımalılardır (Martino ve Maher 1999). Güven ve diğerleri (2005) de kanıtlama etkinlikleri yoluyla, öğrencilerin bir yandan matematiğin aksiyomatik yapısını tanıma fırsatı yakalarken bir yandan da muhakeme becerilerini geliştirebileceklerini dile getirmişlerdir.

Matematik yapmanın temel yollarından biri kanıttır (İskenderoğlu 2010). Eğer öğretmenler matematik bilmenin ne anlama geldiğini bilirse bazı temel matematiksel fikirleri de bilmediklerini görebileceklerdir (Masingila 1998). Çünkü araştırmalara göre öğrenciler gibi birçok öğretmen de kanıt kavramında zorluklarla karşılaşmaktadırlar (Galindo 1998). Öğretmenler kanıtın ne olduğunu anlamalıdır, kanıt için neye ihtiyaç olduğunu ve bir tahmin kanıtlanırken nasıl yapıldığını bilmelilerdir. Öğretmenler kanıt yapmaktalar fakat kanıt yapmayı ifade ederken zorluklar yaşamaktadırlar (Masingila 1998). Öğretmenler öğretim programlarında matematiksel kanıtı öğretecek düzeyde eğitim almamalarından dolayı kanıtla dair yeterli düzeye erişmeyen pedagojik görüş ve matematikte kullanılan tüm bilgilerde kısıtlı beceri göstermektedirler (Yoo 2008). Bu da öğretmenlerin geleneksel eğitim anlayışıyla derslerini yürütmesine sebep olabilir. Geleneksel eğitim anlayışında öğretmenler,

öğrencilerinin dersle ilgili faaliyetlere az katılmasına sebep olmakta ve yenilikçi eğitim anlayışından uzak kalmaktadırlar (Yoo 2008). Oysa öğretmenlerin bilgi ve düşüncelerinin tamamı öğrencilerin performansında rol oynamaktadır (Peterson, Fennema, Carpenter ve Loef 1989). Öğretmenlerin kanıtla dair görüşleri sınıflarındaki kanıtlama süreçlerinin sıklığını etkilemektedir (İskenderoğlu, Baki ve Palancı 2011). Bunun için matematik öğretmenleri kanıtın matematik eğitimindeki önemini ancak anlayarak sınıfta kullanımını artıracaklardır (Hanna 2000). Dolayısıyla öğretmenin kanıt öğretimi konusunda bilgi sahibi olması ve bunu öğrencilerine aktif bir şekilde aktarabilmesi önemli hale gelmektedir.

Matematiksel kanıtlar, matematik ve matematik eğitimi için önemli bir olmasına rağmen matematiksel kanıt yapmak her seviyeden öğrenci ve matematik öğretmen adayları için zor görülmektedir (Arslan 2007, Aydoğdu, Olkun ve Toluk 2003, Arslan ve Yıldız 2010). Yapılan çalışmalar öğrenci ve öğretmenlerin kanıtı anlamlandırmada ve kanıtlamaya dair kavram yanlışlarına sahip olduklarını göstermektedir (Güner 2012, Moralı ve diğerleri 2006, Knuth 2002a, Norby 2013, Riley 2003). Ayrıca öğrencilerin kanıt yaparken karşılaştıkları problemlerin altında yatan güçlüklerin nedenlerini belirlemeye yönelik çalışmalar, öğrencilerin sadece kanıt yaparken değil, kanıtın ne olduğunu bile anımsarken zorluk yaşadığını ortaya koymuştur (Moore 1994, Chazan 1993).

Tüm bunlardan yola çıkarak bu çalışma ilköğretim matematik öğretmenleriyle yürütülmüştür. Öğretmenlerin kanıt şemaları belirlenerek öğrencilere aktaracağı kanıt eğitimi hakkında bilgiler elde edileceği ve öğretmenlerin kanıt hakkında kendilerine ait bilgi eksikliklerinin tespit edileceği düşünülmektedir.

Alan yazında öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin kanıtla bakış açılarını, kanıtlama süreçlerini ve kanıtı içselleştirmelerini ortaya koymaya çalışan çalışmalara rastlanmıştır (Harel ve Sowder 1998, Jones 1997, Almeida 2000, Recio ve Godino 2001, Knuth 2002, Solomon 2006, Housman ve Porter 2003, Cusi ve Malara 2007, İskenderoğlu 2010). Ülkemizde de kanıt süreçlerinin yaşatılmasının ve kanıt kavramının öğretime katkısı fark edilmiş pek çok araştırmacı tarafından son yıllarda çalışmalar yapılmıştır (Aydoğdu İskenderoğlu 2003, Zaimoğlu 2012, Pekşen Sağır 2013, Çontay 2017, İskenderoğlu 2010).

Kanıt kavramı ile ilgili çalışmalara sıklıkla rastlandığı görülmüştür. Bu çalışmalardan kanıt şemalarının tespit edilebilmesi amacıyla bazıları öğretmen adaylarıyla (Sowder ve Harel 2003, Ellis 2007, Grigoriadou 2012, Harel ve Rabin 2010, Haverhals 2011, İskenderoğlu 2010,

Stylinou, Chae ve Blanton 2006, Plaxco 2011, Koichu 2009, Martin ve diğeri 2005, Sarı ve diğeri 2007, Liu ve Manouchehri 2013, Şengül ve Güner 2013, Uygan ve diğeri 2014, Oflaz ve diğeri 2016, Weber 2010, Çontay 2017), bazıları öğrencilerle (Harel ve Sowder 1998, Harel 2001, Flores 2002, Flores 2006, Ören 2007, Şen ve Güler 2015, Aydoğdu İskenderoğlu 2003, Hanna 1990, Bell 1976, Hersch 1993, McCrone ve Martin 2004), bazıları ise öğretmenler (Soto 2010) ile yürütülmüştür.

Bu çalışmalardan veri grubu öğretmenler olan çalışmalara az rastlanmıştır. Ulusal alan yazında yapılmış olan çalışmalar incelendiğinde ise ilköğretim matematik öğretmenleri ile yürütülen çalışmalara rastlanılmamıştır. Çalışmanın bu alandaki eksikliğe katkıda bulunabileceği düşünülmektedir. Ayrıca öğretmenlerin kullandıkları kanıt şemalarının belirlenmesinin, öğretmenlerin düşünce biçimlerini ve ne tür kanıt şemaları kullandıklarını ortaya koyarak önerilerde bulunabilmek adına önemli olduğu düşünülmektedir.

1.4 ARAŞTIRMANIN SINIRLILIKLARI

- Çalışma farklı ortaokullarda görev yapmakta olan dört ilköğretim matematik öğretmeni ile sınırlıdır.
- Çalışma öğretmenlere yöneltilen dokuz matematiksel önerme ile sınırlıdır.
- Çalışmada elde edilen kanıt şemalarına ait bulgular Harel ve Sowder (1998)'ın kanıt şemaları kavramsal çerçevesi ile sınırlıdır.

1.5 ARAŞTIRMANIN VARSAYIMLARI

Çalışmaya katılan öğretmenlerin görev temelli görüşmeler esnasında yöneltilen tüm sorulara içtenlikle cevap verdikleri varsayılmıştır.

1.6 TANIMLAR

Akıl Yürütme: Eldeki bilgilerle düşünerek, bütün etmenleri dikkate alarak; kanıtları ve iddiaları değerlendirerek akılcı bir karara ulaşma sürecidir (Ergül 2014).

Doğrulama: Bir ifadenin ya da durumun doğruluğunu göstermektir (Aydoğdu İskenderoğlu 2016).

Kanıt: Bir ifadenin doğruluğunu veya yanlışlığını nedenleri ile beraber açıklamayı sağlayan araçlardır (Hanna 2000).

Kanıtlama: Bir bireyin ya da topluluğun, bir iddianın doğruluğu ile ilgili şüphelerini ortadan kaldırmak için kullanılan zihinsel eylemler bütünüdür (Harel ve Sowder 1998).

Kanıt Şemaları: Kanıt içeren, matematiksel bir durum karşısında kişinin kendini ya da karşısındakini bu duruma ait doğruluk veya yanlışlığa ikna etme sürecinde kullandığı savunmalara kanıt şemaları denir (Aydoğdu İskenderoğlu 2016).

Görev Temelli Görüşme: Bireyin akıl yürütmesi, problem çözme davranışları, matematiksel bilgi ve matematik anlayışıyla ilgili bilgi edinmek amacıyla kullanılan görüşme türüdür (Koichu 2009).



BÖLÜM 2

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde problem çözmeden, akıl yürütmeden, kanıttan, kanıtın matematik eğitimindeki yerinden, matematikten bağımsız düşünülemeyen kanıt şemalarından, kanıt ve kanıt şemaları ile ilgili yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir.

2.1 PROBLEM ÇÖZME

Problem çözme sorunu tanımlama, farklı çözümler üretme, uygun olan çözümü plânlama, bu plâni uygulama ve değerlendirme adımlarından oluşmaktadır. Bireyler problem çözme için matematiksel içeriği anlamak, keşfetmek; problem durumlarının doğruluğunu kanıtlamak, yorumlamak ve problemleri çözmeye farklı yöntemler geliştirmek, uygulamak için kullanılmaktadırlar (NCTM 1989). Matematik öğretim programlarının bir parçası problem çözümdür (Karataş 2002). Bireylerin ilköğretim ikinci kademeğe başladıkları an da, matematik öğretim programlarının en önemli konuları matematiksel akıl yürütme ve problem çözme olarak karşımıza çıkmaktadır (Schmidt ve Bednarz 1997). Matematiksel bilginin anlaşılması ve bunlar arasındaki ilişkilerin oluşturulması, problem çözme esnasında gerçekleşmektedir (Swings ve Peterson 1988). Problemler, yapı itibarıyla rutin problemler ve rutin olmayan problemlerden oluşmaktadır. Rutin problemler, çözümü net biçimde görülebilen ve temel işlem becerisiyle çözülebilen problemlerdir (Altıntaş, İlgün ve Angay 2022). Rutin olmayan problemler ise çözümün net biçimde görülemediği bu sebeple gerçek hayat problemleri olarak da ifade edilen üst bilişsel becerilerin dâhil olduğu problemlerdir (Altun, 2000). Matematik eğitiminde en fazla kullanılan problem çözmeye ait aşamalar George Polya (1962) tarafından önerilmiştir. Bu aşamalar: Problemi anlama, çözüm için plan hazırlama, planı uygulama ve çözümü değerlendirmedir.

2.2 AKIL YÜRÜTME

Matematik, işlem yeteneğinin tek başına yeterli olmadığı; üst düzey düşünmeyi gerektiren ve düşünme becerileriyle işlem yeteneğinin bütünleştiği çalışma alanıdır (Ersözlü ve Çoban 2012). Yıldırım (2004) matematiğin bilim, teknoloji, iş yaşamıyla beraber amaçlarının kendi içinde

var olduğu; analitik düşünme yeteneği yüksek ve bireyin öğrenme, üretmeye olan ilgisini besleyen ve gelişimine katkı sunan eğitsel bir disiplin olduğunu ifade etmiştir.

Umay ve Kaf (2005)'a göre matematik ve akıl yürütmeyi birbirinden bağımsız düşünmek imkânsızdır. Çünkü matematik, cebiri, cebirsel işlemleri, geometriyi ve daha birçok konuyu öğretirken kendi doğası gereği özünde bulunan akıl yürütmeyi, gerekçeli düşünmeyi, keşfetmeyi, tahminde bulunmayı ve sonuçlara ulaşmayı öğretir (Umay 2003). Yani matematik işlem ya da birbiriyle alakasız konuların bir arada verildiği bir yığın bilgi değil; kimi temel ilke ve kavramlara dayanan bir düşünme yöntemi, geniş anlamda bir problem çözme, bulma ve kanıtlama etkinliğidir (Yıldırım 2004).

Akıl yürütme sayesinde konular arasında bağlantı kurarak yeni yargılara varılabilmektedir. Muhakeme, usa vurma ya da başka bir deyişle akıl yürütme bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma işidir (Umay 2003). Eğer... ise... ifadelerini kullanmayı öğrenmek akıl yürütmede; sonuç çıkarma ve varsayımda bulunma becerisini artırır (Mason 2001). Akıl yürütme ortaokul matematik dersine ait öğretim programında semboller, tanımlar gibi matematiğe ait araçların ve tümevarım, karşılaştırma, genelleme, tümevarım gibi düşünme tekniklerinin var olan bilgilerle kullanılarak yeni bilgilere ulaşma süreci olarak tanımlanmaktadır (MEB 2013). Akıl yürütme matematik eğitiminin parçası olduğu takdirde matematik başarısının artacağı düşünülebilir. Birey öğrendiği bilgiler arasında bağlantı kurabilmeyi öğrenirse, akıl yürütme becerisi artmış demektir.

2.3 KANIT

Kanıt, bireyin elde ettiği doğrulamaya ya da ifadeye karşısındaki bireyi ikna etmesidir. Kanıt matematiği daha anlaşılabilir hale getirmeyi sağlar. Ayrıca mantıksal gerçeklikleri savunmak ve keşfetmek gibi amaçlara sahiptir. Kanıt, anlama ve düşünmenin arasında yer alan üst düzey matematiksel beceridir (Harel ve Sowder 2005). Kanıt bir sonucu doğrulayarak, bireyleri bilgilendirmek ayrıca bilgiye ikna etmek için kullanılır (Almeida 2003). Bell (1976), kanıtı üç kapsamda incelemiştir; bir savı doğrulama, sistemli hale getirme ve açıklamadır. Kanıt kavramı ile matematik eğitimi birbirinden bağımsız düşünülemez. Eğer içselleştirilmiş matematiksel bilgi ve kavramlara sahip olmak isteniyorsa öncelikle kanıt ve kanıtlama kavramlarına hâkim olmak gerekmektedir. Çünkü kanıt matematiksel bilgiyi bilmek ve bunu başkalarına da aktarabilme esnasında neden sonuç muhakemesini yapabilmeyi gerektirir. Kanıt elde edilmiş olan bilgilerin doğruluğunu gösterirken bizlere yol göstermektedir. Doğruluğuna inandırılan

bilgi de zihinde kalıcı hale gelir. Böylece etkili ve aktif öğrenme sağlanmış olur. Kanıt, kişinin kanıtlama sürecindeki yanlış öğrenmelerini de ortaya çıkarır. Böylece karşılaşılan öğrenme güçlüklerine çözüm bulmaya çalışılır. Dolayısıyla kanıtlar ilerideki öğrenmelere ve öğretim yöntemlerine ışık tutacak nitelikte devam eder.

Formel bir araç olan matematiksel kanıt belli akıl yürütmeye gerekçelendirme tarzını sergilemenin yoludur (NCTM 2000). Bell (1976), bir probleme ait kanıtın niçin doğru olduğuna dair ipuçları taşıması gerektiğinden bahsetmiştir. Hanna (2000) da iyi bir kanıt önermelerin ne dediğini anlamamıza ve neden doğru olduğunu idrak etmemize destek olması gerektiğini vurgulamıştır. Benzer şekilde Kayagil (2012), kanıtın iki farklı yolla yapılabileceğini söylemiştir. Birincisi önermenin ya da problem durumunun doğruluğunu gösterebilmek, ikincisi ise bu doğruluğun niçin doğru olduğunu açıklamaktır. Kanıt eldeki verilerin doğruluğunun niçin doğru olduğunu ifade etmektir (Hanna 1989).

Matematiksel kanıt karşındakini bir bilgiye ikna etmenin yanı sıra açıklayıcı olması özelliği ile de ön plana çıkmaktadır. Matematik çalışmalarında kanıt ilk olarak ikna edici özelliğiyle öne çıkmaktayken sınıflardaki görevi açıklayıcı olmasıdır (Hersh 1993). Kanıt ve kanıtlama matematiği temel alan merkezi konumunda yer alan kavramlardır (Jones ve Rodd 2001).

2.4 KANITIN MATEMATİK EĞİTİMİNDEKİ YERİ

Matematik bilimlerin temel yapıtaşlarını oluşturan, hayatın içerisinde her alanda kullanılan bir disiplindir. Bu disiplini anlamlı kılan bir olguyu neden sonuç çerçevesi içerisinde ele alabilmektir. Böylece edinilen bilgiyi anlamlandırmak daha kolay olabilir. Anlamlandırma sürecinde kanıt kavramı kullanılan araçlardandır. Kanıt, önermenin doğruluğunu gösterirken aynı zamanda neden doğru olduğunu açıklayabilmektir (Knuth 2002b).

Matematiksel kanıt, matematik ve matematik eğitimine ait önemli bir unsurdur (Güven, Çelik ve Karataş 2005). Dolayısıyla hem ders içi hem ders dışı etkinliklerde sıkça kullanılmalıdır. Önemli düşünme becerilerini hayatın parçası haline getirebilmek için matematiksel kanıtlar yapmak fayda sağlamaktadır (Fawcett 1938). Öğrenciler matematiğe ait ifadelerin kanıtlamalarını oluştururken formülleri kullanmanın ya da elde edilen sonuçları sebepleriyle açıklanmanın zaruri olduğunu öğrenirler (Gökkurt, Deniz, Akgün ve Soylu 2017). Oluşturulan her kanıt önceki kanıtların sistematik devamlılığını ele alır (Selden ve Selden 2003). Matematiğin tarihsel sürecinde her zaman yeri olduğunu bu ifade de göstermektedir.

Problem çözüme sürecinde yeni yöntemler, stratejiler, araçlar kanıt sayesinde ortaya çıkar (Rav 1999). Tüm bu becerilerin kazanılmasında öğretmenin büyük payı vardır. Çünkü öğretmenin kanıt bakış açısı neyse öğrencinin de kanıtlamadaki becerisi ona göre şekillenecektir. Dolayısıyla öğretmenin kanıt karşı sınırlı anlamlandırmaları varsa öğrencilerinin de kanıt kavrama noktasında eksik kalacağı kaçınılmaz bir gerçektir. Yapılan araştırmalar öğretmenlerin de öğrencilerin de kanıt anlamlandırmalarında yeterli düzeyde olmadıklarını ayrıca kavram yanılgılarına düştüklerini göstermiştir (Güner 2012, Knuth 2002a, Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere 2006, Norby 2013, Riley 2003). Yapılan araştırmaların sonucu da öğrenci ve ilköğretim öğretmenlerinin kavram yanılgısına düştüklerini ve deneme yoluyla doğrulama yapmayı kanıtlama olarak düşündüklerini göstermiştir (Healy ve Hoyles 2000, Martin ve Harel 1989). Öğretmenlerin sınıftaki öğretim sürecinde, geleneksel biçimde derslerini yürüttüğü ve yenilikçi anlayışa uyum sağlamada zorluklar yaşadığı anlaşılmaktadır (Knuth 2002a, Yoo 2008).

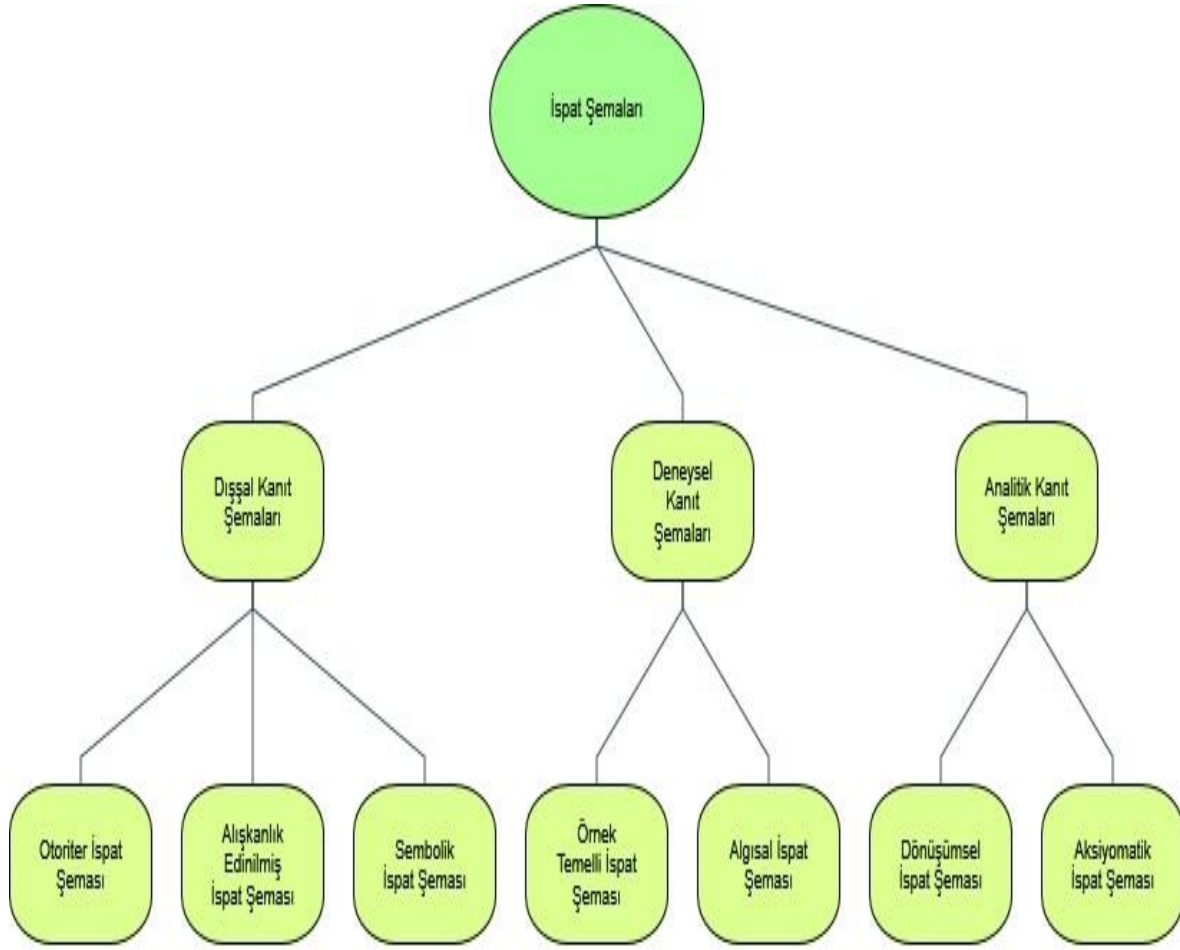
Okul matematiğinde kanıt bir önermenin doğruluğunun gösterilmesi için kullanılmaktadır (Knuth 2002a). Ayrıca kanıt, matematiksel durumlara öğrencileri ikna etmek için kullanılmaktadır (Rodd 2000). Kanıtlamanın sınıflardaki temel rolü ise matematiksel anlamayı geliştirmeye destek olmaktır (Hanna 2000).

2.5 KANIT ŞEMALARI

Kanıt içeren, matematiksel bir durum karşısında kişinin kendini ya da karşısındakini bu duruma ait doğruluk veya yanlışlığa ikna etme sürecinde kullandığı savunmalara kanıt şemaları denir (Aydoğdu İskenderoğlu 2016). Kişilerin kanıt şemaları doğrulama biçimlerine göre farklılık göstermektedir. Dolayısıyla her bireyin düşünme tarzı farklı olabileceği için kanıt şemaları da farklılıklar gösterebilmektedir. Kişilerin herhangi bir konuda emin olma şeklini ve etrafındakileri nasıl inandırdığı kanıt şemalarını göstermektedir.

Harel ve Sowder (1998), üniversitede farklı kademelerdeki öğrencilerin matematik problemlerine ait doğrulamalarını savunurken bazı şemalar oluşturmuşlardır. Kullanılan bu şemaları dışsal, deneysel ve analitik şeklinde üç ana şemaya ve bazı alt şemalara ayırmışlardır. Flores (2002), ilköğretim seviyesindeki öğrencilerle yaptığı çalışmasında öğrencilere kendi seçtikleri problemleri sormuşlardır. Problemleri doğrulamaları tamamlandıktan sonra ‘Doğru olduğunu nereden biliyorsun?’, ‘Elde ettiğın sonucun doğru olduğunu nasıl kanıtlarsın?’ sorularını yöneltmiş ve ilköğretim kademesindeki öğrencilerin üniversitedeki öğrencilere

benzeyen şemalara ait tepkiler gösterdiklerini tespit etmiştir. Bu aşamada Flores (2002), Harel ve Sowder (1998)'in kullanmış olduğu kanıt şemalarını kullanmıştır. Ortaöğretim öğrencileriyle yapmış olduğu başka bir araştırmada Flores (2006)'in tekrar Sowder ve Harel (1998)'in ortaya çıkardığı kanıt şemalarını kullandığı görülmüştür. Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998) yaptıkları araştırmalarında kişinin gelişiminde ortaya çıkan zihinsel yetenek ve bilişsel düzeyin kanıt şemalarının temsili olduğunu ifade etmişlerdir. Kanıt şemaları kişinin fikirlerinden, doğru ya da yanlışlarından, kuşkularından oluşan ve kanıt yöntemi olmayan gruplamalardır (Harel ve Sowder 1998, Sowder ve Harel 1998). Harel ve Sowder (1998) kanıtın süreç içerisinde değerlendirildiğini ve bireylerin yazmış oldukları ifadelerden değil, düşüncelerinden yola çıkarak kanıt şeması ifadesini kavramsallaştığını belirtmişlerdir. Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998) araştırmalarında kanıt şemalarını sınıflandırmışlar ve yeni bir teori olarak ortaya koymuşlardır. Harel (2007) bunu daha sonra yeniden ele almıştır. Harel ve Sowder (1998)'in kanıt şemaları sınıflandırması üç temel kategoriden oluşmaktadır. Bu kategoriler birbirinden bağımsız düşünülemez. Bu çalışmada Harel ve Sowder (1998)'in kanıt şemaları sınıflandırması kullanılmıştır. Harel ve Sowder (1998), kişilerin aynı zamanda birden fazla kanıt şemasına ait özellik gösterebileceğini ifade etmişlerdir. Ayrıca bireyler kısa zaman sonrasında da farklı kanıt şemasına özgü özellikler gösterebilmektedirler (Harel ve Sowder 1998).



Şekil 2.1 Harel ve Sowder (1998)'in kanıt şemaları sınıflandırması.

Harel ve Sowder (1998), Şekil 2.1’de sunulmuş olan kanıt şemaları sınıflandırmasının kısmi bir hiyerarşik yapıya sahip olduğunu belirtmişlerdir. Yani dönüştürsel kanıt şemasının, aksiyomatik kanıt şemasını oluşturmanın gerekli şartı olduğu düşünülmektedir. Fakat öte yandan, dışsal kanıt şemalarının analitik kanıt şemalarının gelişiminde önem arz ettiği düşünülmemektedir. Dışsal otoriter kanıt şemaları ve deneysel kanıt şemalarının öğrencilerin bazı kademelerde sadece onaylayıcı ve varsayımsal görevi karşıladıkları düşünülmektedir (Harel ve Sowder 1998).

İskenderoğlu (2010) ise bu yapıyı dışsal ve deneysel kanıt şemalarını öğrencilerin kullanmasının istenmediği şemalar olduğunu ve analitik kanıt şemalarının ise matematiksel akıl yürütmenin merkezi olarak düşünüldüğü için öğrencilerin kullanması istenen şemalar olduğunu ifade etmektedir. Bu ifadeye göre analitik kanıt şemalarının diğer kanıt şemalarından daha üst seviyede olduğu düşünülmektedir. Ayrıca bireylerin akıl yürütme yoluyla eski ve yeni bilgilerinin harmanlandığı, eski bilgilerin yeni bilgiler oluştururken kullanıldığı ve karmaşık

olan kanıt şemasıdır. Kanıt şemalarının en üst düzeyinde analitik kanıt şemalarından aksiyomatik kanıt şeması bulunmaktadır. Aşağıda temel kanıt şemaları ve alt kanıt şemaları detaylıca anlatılmıştır.

2.5.1 Dışsal Kanıt Şemaları

Dışsal kanıt şemalarına ait özelliklere sahip diyebileceğimiz bireylerin, bir durumun aslını anlayabilme ve bu duruma karşısındakini ikna etme sürecinin dışsal kaynaklara bağlı olduğu anlaşılmaktadır. Bu kaynakların öğretmen, kitap ya da formüle dayandırıldığı otoriter (otoriter kanıt şeması), bir durumun biçim veya görünümünden etkilenildiği alışkanlık (alışkanlık edinilmiş kanıt şeması) ve sembollerin anlamsız şekilde kullanıldığı sembolik (sembolik kanıt şeması) kanıt şeması olarak ifade edilmektedir (Harel ve Sowder 1998, Harel 2014). Kişilerin matematik öğreniminde elde ettiği bilgileri doğrulamalarında otorite, önceden edindikleri ifadeler veya sembol gibi bazı nedenlere dayandırılmasıyla oluşmaktadır (Martin, McCrone, Bower ve Dindyal 2005, İskenderoğlu 2010). Burada kişinin belirtilen sebeplere güvenmesi söz konusudur. Birey güvendiği ya da inandığı şekliyle doğrulamalarını yaptığında doğrulamalarından şüphe duymamaktadır. Dışsal kanıt şemaları otoriter, alışkanlık edinilmiş ve sembolik kanıt şeması olmak üzere üç alt şemaya ayrılmıştır.

2.5.1.1 Otoriter Kanıt Şeması

Matematik söz konusu olduğunda kişiler doğrulamalarının aşamalarını merak etmeden sonuç bulma odaklı davranmaktadırlar. Oysa matematik sonuç bulmaktan ibaret bir etkinlik değildir. Matematik öğretiminin ilk basamaklarından itibaren matematiksel bilgiler öğretmenler tarafından sistematik biçimde öğrencilere aktarılmaktadır. Öğrenci de bunların birer basamak olduğunu ve kendisinin de öğretmenlere benzer süreçlerden geçmesi gerektiğini düşünmektedir. Bu da bireyin merak duygusunu köreltip, düşünelerden uzak bakış açısı geliştirmesine neden olmaktadır. Dolayısıyla hazır olan her bilgi ya da doğrulama öğrenciler açısından sıklıkla tercih edilmektedir. Elde edilen bu ezber ya da taklit yöntemi vazgeçmesi zor hale gelmektedir. Bireyler doğrulamalarında öğretmen, kitap, formül ya da güvendiği herhangi bir kişiyi referans olarak gösteriyorsa; bireylerin otoriter kanıt şeması özelliklerine ait tepkiler sergilediği söylenebilmektedir. Kişi kanıtlama sürecinde “Formülü kullandım.”, “Sınıftaki arkadaşım böyle çözmüştü.”, “Kitapta yazanlara göre.” şeklinde ifadeler kullanarak otoriter kanıt şemasına ait ifadelere başvurabilmektedir. Bu noktada otoriteye başvurduğu anlaşılmaktadır. Bir doğrulamaya ikna etmek için, belli kaynaktan ulaşılan kural, tanım, formüller kullanılmaktadır (İskenderoğlu 2010). Çontay (2017), otoriter kanıt şeması

özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; *“İzlediği yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yapma”* ifadesiyle bu kanıt şemasının göstergesi olarak belirtmektedir.

2.5.1.2 Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması

Bireyler probleme ait doğrulamalarını sunarken problemin doğruluğu yerine görüntüsünden ya da kanıtın alışılan biçiminden yola çıkarak sonuca varmaktadırlar (Martin ve Harel 1989). Bundan dolayı öğrenciler yapılan kanıtlama yanlış da olsa biçimine bakarak doğru olduğuna karar vermektedirler (Martin ve Harel 1989). Bireyler zihinsel süreçte düşünme becerilerini kullanarak çözüm üretmek yerine karşısındaki kişiyi ikna edebilmek için eskiden öğrendikleri nedenleri ortaya koymaktadırlar. Çontay (2017), alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; *“işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma”*, *“sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama”*, *“kanıtı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma”*, *“kullandığı yöntem hakkında yanlış bilgiyle kanıtı yapılandırma”*, *“kanıtın doğruluğunu kanıtın görüntüsünden etkilenerek yargılama”* ve *“genel ifadelerle yüzeysel deliller sunma”* ifadeleriyle bu kanıt şemasının göstergeleri olarak belirtmektedir. Bu şemaya ait özellikler göz önünde bulundurulduğunda öğrenciler doğrulamalarını kanıtlamak için eski öğrenmiş oldukları bilgilerini ve düşünme yollarını tercih etmektedirler. Bireyler, yüzeysel çözüm basamaklarını ön plana almakta ve detaylı açıklamalar önemsenmemektedir (Lee 1999). Ancak biçim matematik eğitimi için kanıtlama aşamasında tek başına yeterli olacak bir kavram değildir (Harel ve Sowder 1998). Doğrulamadaki genel kanıtların doğru olduğunu kabul etmiş çoğu öğrencinin yanlış olan kanıt doğrulamalarını kabul etmediği görülmektedir (İskenderoğlu 2010). Çünkü sebebin doğruluğundan değil kanıtın alışlagelen görüntüsünden etkilendikleri görülmektedir.

2.5.1.3 Sembolik Kanıt Şeması

Bu şemada semboller anlam ifade etmeden bilinçsizce kullanılmaktadır. Bireyler sembolleri kendi anlamından bağımsız, verilen durumla ilişkisi olmadan kullanmaktadırlar (Sowder ve Harel 1998). Çontay (2017), sembolik kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; *“kanıtı yapılandırırken sembolleri anlamsızca manipüle etme”* ifadesiyle bu kanıt şemasının göstergesi olarak belirtmektedir. Alışlagelmiş sembolik fikirler içeren şemalar, sembolik kanıt şemalarıdır (Aydoğdu İskenderoğlu 2016). Sembolik kanıt şemaları, matematiksel fikirlerin; sembolik akıl yürütme ile kanıtlanmasıdır (Harel ve Sowder 1998).

Örneğin öğrencilerin kesirlerle toplama işlemi yaparken, paydaları eşitleyerek işlem yapması gerektiğini ihmal ederek; payları toplayarak elde ettiği değeri kesrin payına, paydaları toplayarak elde ettiği değeri ise kesrin paydasına yazması sembolik kanıt şemasına ait izler taşıdığını göstermektedir.

2.5.2 Deneysel Kanıt Şemaları

Bu şemaya ait özellikler göz önünde bulundurulduğunda bireylerin örnekler üzerinden doğrulamalar gerçekleştirdiği görülmektedir. Kanıtlar çoğunlukla örneklere dayandırılmaktadır (Flores 2002). Bir başka açıdan bakıldığında da kanıtlamalarında çizimlerden de faydalanılabilir. Deneysel kanıt şeması fiziksel kanıt ya da duyuusal deneyimlerin kullanılarak doğruluk ve yanlışlığın gösterildiği kanıt şemalarıdır (Harel ve Sowder 1998). Deneysel kanıt şemasına ait tepkiler sergileyen bireyler, problem çözme sürecinde matematiksel duruma ait çözümlerinde sezgilerini ve bilgilerini kullanmaktadırlar (Lee 1999). Deneysel kanıt şemaları, algısal ve temel örnekler kanıt şeması olmak üzere iki alt şemaya ayrılmıştır.

2.5.2.1 Algısal Kanıt Şeması

Bu kanıt şemasında bireyler, güçlü kanıta sahip değillerdir; kanıtlamalarındaki doğruları ya da yanlışları, hisseleriyle ifade etmeye çalışmaktadırlar (Mejia-Ramos ve Tall 2005). Çontay (2017), algısal kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; “*kanıtın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalışma*” ve “*sadece özel bir durum için inceleme yaparak nedensel ilişkileri belirleyememe*” ifadeleriyle bu kanıt şemasının göstergeleri olarak belirtmektedir. Çizim ve sezgiler esas alınarak sonuca ulaşılmaya çalışılmaktadır (Aydoğdu İskenderoğlu 2016). Bireylerin görsel algıları bu kanıt şemasına ait özellik olarak karşımıza çıkmaktadır (Harel 2007).

2.5.2.2 Temel Örnekler Kanıt Şeması

Bu kanıt şemasında bir duruma ait doğrulamalarda örneklerden yararlanılmaktadır. Temel örnekler kanıt şeması, öğrencilerin örneklerle varsayıdıkları doğruluğa kendisini veya karşısındakini ikna etmek amacıyla kullandığı düşünme biçimidir (Harel ve Sowder 1998, Aydoğdu İskenderoğlu 2016). Bireyler, öğrendikleri bilgileri kontrol etmek için ya da anlamlandırmak için de örneklerden yararlanmaktadırlar (Flores 2002). Çontay (2017), temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; “*kanıtın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma*” ifadesiyle bu kanıt şemasının göstergesi

olarak belirtmektedir. Ayrıca bu şema kanıt yapmaya yeni başlayanlar için net, anlaşılır bir şemadır ve matematik diliyle geçersiz veya geçerli olabilmektedir (Hanna ve de Villiers 2008).

2.5.3 Analitik Kanıt Şemaları

Bu şemaya ait özelliklerde öğrencilerin mantıksal çıkarımlarla varsayımları geçerli kılması söz konusudur (Harel ve Sowder 1998). Bu süreçte öğrenciler mantıksal tümdengelim kullanmaktadırlar. Ayrıca doğrulama sürecinde sunulan nedenler aksiyom ve teoremlerle birlikte akıl yürütmeyi de içermektedir (Aydoğdu İskenderoğlu 2016). Matematikte analitik kanıt şemaları kanıt yapmada son aşama olarak görülmektedir (Harel ve Sowder 1998). Kişilerin çözümlerinde biçim değil, zihinsel süreçteki ifadeleri büyük önem taşımaktadır. Ayrıca öğrenciler matematiksel ifadeleri kullanarak bunlar arasındaki ilişkileri keşfetmekte ve yeni stratejiler geliştirmektedirler (Aydoğdu İskenderoğlu 2016). Analitik kanıt şemaları, dönüşümsel kanıt şeması ve aksiyomatik kanıt şeması olmak üzere iki alt şemaya ayrılmıştır.

2.5.3.1 Dönüşümsel Kanıt Şeması

Dönüşümsel kanıt şemasına ait özellikler sergileyen bireylerin gerekçelendirme yolu durumların genel yönleriyle bağlantılıdır ve akıl yürütme süreçleri, varsayımları genel bir analitik çerçeveye yöneliktir (Harel ve Sowder 1998). Bu kanıt şeması akıl yürütmeleri içermektedir. Bireyler bu kanıt şemasına ait tepkilerinde özel bir durumdan yola çıkarak genellemelere ulaşmaktadırlar. Mantıksal çıkarım, genelleme ve işlemsel beceri bu kanıt şemasına ait önemli üç özelliktir (Harel ve Sowder 2007, Aydoğdu İskenderoğlu 2016). Çontay (2017), dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip bir bireyin doğrulamalarını; “*kanıtı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma*”, “*ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma*” ve “*kanıtın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama*” ifadeleriyle bu kanıt şemasının göstergeleri olarak belirtmektedir. Dönüşümsel kanıt şemaları aksiyomatik kanıt şemaları için gerekli alt yapı olarak görülmektedir (Harel ve Sowder 1998).

2.5.3.2 Aksiyomatik Kanıt Şeması

Aksiyomatik kanıt şemasına ait özellikler sergileyen birey, bir matematiksel gerekçelendirmenin başlama noktasını; tanımsız terimler, aksiyomlar olarak ele almakta ve bu sistemde rahat biçimde çalışabilmektedir (Harel ve Sowder 1998, Sowder ve Harel 1998). Ayrıca matematiksel ifadelerin doğruluğu gösterilirken tanımlar, teoremler; tahminler ve tanımsız terimler neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanılmaktadır (Harel ve Sowder 2007). Yani

aksiyomatik kanıt şeması özelliklerine sahip bir birey, kanıtının başlangıç noktasını tanım; teorem ve formüller olarak almakta ayrıca bunları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanarak akıl yürütmelerini gerçekleştirmektedir.

Lee (1999), kanıt şemaları tanımlarını Harel ve Sowder (1998)'in kanıt şemaları gruplandırmasına göre tabloda özetlemiştir. Bu tanımlar Çizelge 2.1'de yer almaktadır.

Çizelge 2.1 Lee'den (1999, s. 33) uyarlanan kanıt şemaları sınıflandırması.

DIŞSAL KANIT ŞEMALARI		
Kanıt Şeması Öğeleri	Özellikler ve Bireylerin İnançları	Gerçekleşme Yöntemleri
Otoriter Kanıt Şeması	İspatın neden doğru olduğu hakkında gerekçelendirme yapamama, İspatın doğruluğunun bireyin kendisi tarafından belirlenememesi.	Teoremleri ezberleme, Formülleri uygulama, Kuralları uygulama, Kanıtı öğretmene, arkadaşına, kitaba dayandırma.
Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	Yüzeysel deliller oluşturma, Kanıtın delilleri arasında sınırlı bağlantı kurma.	Benzer kanıt süreçleri arama, Diğer kanıt sürecini taklit etme.
Sembolik Kanıt Şeması	Sembollerin anlamını anlama, Anlamsız deliller oluşturma, Kanıtın sembollerin içinde olduğuna inanma, Matematiksel sembolleri manipüle ederek kanıt yapma.	Matematiksel ifadeleri semboller kullanarak yazma, İyi bilinen sembolik algoritmalar kullanma, Kanıtın ilk ve devam eden basamaklarında sembolik manipülasyonlar yapma.
DENEYSEL KANIT ŞEMALARI		
Kanıt Şeması Öğeleri	Özellikler ve Bireylerin İnançları	Gerçekleşme Yöntemleri
Temel Örnekler Kanıt Şeması	Mantıksal delillerin bulunmaması, Sonuçları hızlıca yapma, Bir kanıtın doğruluğunu örneklerle belirtme.	Örnekler göstererek diğerlerini ikna etmek, Bir kanıtı örnekler göstererek oluşturmak.
Algısal Kanıt Şeması	Çizimler aracılığıyla kanıt basamakları ile hipotezleri ilişkilendirme; bu süreçte mantıksal delilleri göz ardı etme, Bir kanıtın doğruluğunu çizimlerle belirtme.	Akranlarını çizimlerle ikna etmek, Bir veya daha fazla çizime odaklanarak sonuçlar çıkarma.
ANALİTİK KANIT ŞEMALARI		
Kanıt Şeması Öğeleri	Özellikler ve Bireylerin İnançları	Gerçekleşme Yöntemleri
Dönüşümsel Kanıt Şeması	Tutarlı basamaklar yapılandırma, Kanıtın önceki ifadelerine mantıksal kurallar uygulama.	Ana meseleyi belirleme, Diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna etme.
Aksiyomatik Kanıt Şeması	Tanımsız terimlerle sınırlı küme oluşturma, Lineer yöntemler kullanarak kanıt yapma, Geleneksel kanıt süreçlerini takip etme.	Aksiyomatik sistem geliştirme, Bir teoremin sonucunun aksiyomatik sistemden nasıl çıktığını kanıtlama.

2.6 KANIT VE KANIT ŞEMALARI İLE İLGİLİ YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde alan yazında kanıt ve kanıt Şemaları ile ilgili yapılmış olan çalışmalara yer verilmiştir.

2.6.1 Kanıt İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Almedia (2001), çalışmasında öğrencilerin kanıtlama için yeni kuralları kullanmalarını ve kabul etmelerini, buldukları kuralları daha açık açıklamalar getirerek paylaőmalarını ve sonuçları savunma süreçlerinde gerekli olan dili geliőtirmelerini öğretmen ile sosyal etkileşimin sağladığı sonucuna ulaőmıőtir.

Baştürk (2010), çalışmasını 33 lise matematik öğretmen adayı ile yürütmüştür. Elde edilen verilerin analizinde anket ve mülakat teknikleri kullanılmıőtir. Çalışmada katılımcıların kanıtın önemine inandıkları aynı zamanda kanıtlama ile ilgili olumsuz tutum geliőtirdikleri sonucuna ulaőılmıőtir. Mülakatta ise katılımcılar genellikle kanıtın kalıcı ve anlamlı öğrenmenin gerçekteşmesinde önemini ifade etmişlerdir.

Goetting (1995), çalışmasını 11 ortaokul ve 16 lise olmak üzere toplam 27 matematik öğretmeni adayı ile yürütmüştür. Çalışmada ortaokul öğretmeni adayları çoğunlukla kanıtın bir iddianın doğruluğunu sergileme sürecindeki işlevini dile getirmişler, lise öğretmeni adayları ise çoğunlukla kanıtın bir teoremin neden ya da niçin doğru olduğunu açıklama sürecindeki rolüne dikkat çekmişlerdir.

Jones (2000), çalışmasında üniversite öğrencilerinin matematiksel kanıtlamayla ilgili deneyimlerini tespit etmeye çalıőmış bu amaçla kavram haritalarını kullanmıştır. Çalışmadan elde edilen verilerin analizi sonucunda öğrencilerin kanıt kavramıyla ilgili eksik bir bakış açısına sahip oldukları görülmüştür.

Kanıt hakkında olumsuz düşüncelere sahip öğretmenler olduğu görülmüştür. Öğretmenler bunun sebebi olarak öğrencilere bir durumu sebepleriyle verdiklerinde tartışma ortamının olmayacağını ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra bazı çalışmalar öğretmenlerin cebirsel, formal kanıtları kullandığını göstermektedir (Healy ve Hoyles 2000).

Knuth (2002), çalışmasında öğretmenlerin kanıtın ileri düzeydeki öğrenciler için uygun olacağını ifade ettiklerini görmüőtür. Öğretmenler alt kademelerdeki öğrenciler için kanıtın uygun olmadığını belirtmişlerdir. Ancak informal kanıtları uygun görmektedirler. Bunun sebebi

olarak öğretmenlerin informel kanıtları, formel kanıtlar için basamak görevi gördüğünü belirtmişlerdir.

Knuth (2002a), çalışmasını kıdem yılı 3-20 arasında olan 16 matematik öğretmeni ile yürütmüştür. Elde edilen verilerin analizinde mülakat tekniği kullanılmıştır. Nitel yöntemlerin kullanıldığı çalışmada öğretmenlere matematik eğitiminde kanıtın kullanım amaçları ve rolü ile ilgili sorular yöneltilmiştir. Tüm katılımcılar, kanıtın bir ifadenin ya da durumun doğruluğunu ortaya koyma sürecindeki rolüne işaret ederken; üç öğretmen kanıtın açıklama özelliğini vurgulamışlar, 8 öğretmen ise kanıtın yeni bilgileri keşfetmedeki işlevini dile getirmişlerdir. Knuth (2002a), kanıtın kavramlar arası ilişkilerin araştırılmasının; bilgi ve düşünce gelişimine sunduğu katkının öğretmenler tarafından dile getirilmemesini ilginç bir durum şeklinde ifade etmiştir.

Knuth (2002b), çalışmasında öğretmenlerin kanıta dair fikirlerini ortaokul matematiği bağlamında incelemiştir. İki ortaokul ve 15 lise öğretmeni ile yürütülen çalışmada öğretmenlerin büyük kısmının kanıtı bir ifadenin doğruluğunu gösteren tümdengelsel bir araç olarak açıklamışlardır. Diğer öğretmenlerin ise kanıtı daha genel ikna edici bir delil olarak tanımladıkları görülmüştür. Öğretmenlerin büyük kısmı kanıtın ortaokul matematiğinde merkezi fikir olmaması gerektiğini, kanıtın öğrencilere uygun olup olmadığını sorgulayarak belirtmişlerdir. Birçok öğretmen kanıtın öğrencilere üniversitede gelişmiş matematik sınıflarında daha uygun olduğunu ifade etmişlerdir. Bununla beraber birçok öğretmen ortaokul düzeyinde kanıtın Öklid geometrisi içerisinde yer alabileceğini vurgulamıştır.

Maher ve Martino (1996), çalışmalarında bir kız öğrencinin 1-5. sınıf arasındaki matematiksel savunma yaklaşımına ait gelişimini incelemişlerdir. Öğrenci küçük grup çalışmaları, bireysel çalışmalar ve tüm sınıf ile çalışmalarda bulunmuştur. Ayrıca aynı çalışma şekillerinde görüşmeler yapılmıştır. Çalışmanın verileri analiz edildiğinde öğrencinin ilk olarak sunduğu açıklamasını 1. sınıfta yaptığı belirlenmiştir. 4. sınıfta karmaşık savunmalarda bulunarak bunları arkadaşlarına sunduğu görülürken, 5. sınıfta ise savunmalardan kanıtlara geçmiş; düşüncelerini açıklayarak arkadaşlarını ikna etmiştir.

Martin ve diğerleri (2005), çalışmasında lise kademesinde bulunan geometri sınıflarındaki kanıtın; öğrenme ve öğretme arasındaki ilişkisini incelemişlerdir. Çalışmada dört ay boyunca öğrencilerin, kanıtı öğrenme potansiyellerine; formal kanıtlamadaki yeteneklerine, kanıtın doğası hakkındaki inanışlarına ve öğretmen ile öğrencilerin eylemleri gözlenmiştir. Çalışma

süresince aksiyomatik sistem içinde kanıt oluşturma öğretimi devam etmiş ve sonucunda formal kanıtlar ortaya çıkmaya başlamıştır. Öğrencilerin çoğunun analitik kanıt şemaları ve alt şemalarını kullandıkları görülmüştür. Özetle bu çalışmada, sınıfın sosyal içeriğinde öğretmen ile öğrencinin eylemleri arasındaki karşılıklı etkileşimi tanımlanmıştır. Çalışmada kanıt oluşturma'nın önemli bir elemanının, öğrenci ve öğretmen etkileşimlerinin olduğu görülmüştür.

Mingus ve Grassl (1999), çalışmalarını 30 ortaokul ve 21 lise olmak üzere toplam 51 matematik öğretmeni adayını ile görüşmeler gerçekleştirmiştir. Çalışmada öğretmen adaylarının çoğunluğunun kanıtın sadece tek bir rolüne vurgu yaptıkları görülmüştür. Bu rolde kanıtın bir teoremi kanıtlama sürecinde kullanılan bilgilerin ve kavramların açıklanmasındaki işlevini içerdiği ifade edilmiştir. Ayrıca kanıt kavramının öğrencilerin soyut düşünme becerisini arttırdığını, öğrenmelerini kolaylaştırdığını, düşünmeyi sağladığını düşünmesine rağmen kanıtların her sınıf kademedeki öğrenciler için uygun olmadığını belirtmişlerdir.

Moralı ve diğerleri (2006), çalışmalarını matematiksel kanıtlamaya dair görüşlerini tespit etmek amacıyla gerçekleştirmişlerdir. Çalışmaya katılan 337 ilköğretim matematik öğretmen adayları: 182 birinci sınıf, 155 son sınıf; 59 ortaöğretim ve 278 ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinden oluşmaktadır. Çalışmada geliştirilen 20 maddeden oluşan ölçek yardımıyla matematik öğretmeni adaylarının kanıt ve kanıtlamaya dair görüşlerini ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Verilerin analizi sonucunda matematik öğretmeni adaylarının çoğunluğunun kanıtlamaya dair görüşlerinin olmadığı veya görüşlerinin yeterli olmadığı belirlenmiştir.

Oehrtman ve Lawson (2008), çalışmalarında lise matematik ve fen bilimleri öğretmenlerinin kanıt ve reddetme içeren birçok terim hakkında fikirlerini değerlendirmişlerdir. Çalışma Amerika'da bir devlet okulunda görev yapmakta olan 45 öğretmen ile yürütülmüştür. Çalışmanın verileri analiz edildiğinde, öğretmenlerin kanıtın ve reddetmenin anlamları ile rolleri hakkında eksik bir anlayışın hâkim olduğu ortaya çıkmıştır.

Özer ve Arıkan (2002), çalışmalarını 100 lise 2 öğrencisiyle gerçekleştirmiştir. Çalışmada öğrencilerin matematik derslerinde kanıtlama becerilerinin tespit edilmesi ve kanıt seviyelerini incelemek amaçlanmıştır. Ayrıca çalışmada öğrencilerin materyal yardımıyla kanıtlama yapıp yapmadıkları gözlemlenmiştir. Çalışmadan elde edilen veriler analiz edildiğinde öğrencilerin çoğunun tümevarım ve tümdengelim yöntemiyle kanıt yapamadıkları belirlenmiştir. Öğrenciler verilen ifadelerdeki doğruluğu ifadeye özel sayı değerleri ile göstermişler bu şekilde gösterimin

doğruluğundan emin olmuşlardır. Üç öğrenci ile gerçekleştirilen görüşmede öğrencilerin materyal yardımıyla kanıt yapamadıkları ancak araştırmacının desteğiyle materyalleri kullanarak kanıtlamaya çalıştıkları gözlemlenmiştir. Dolayısıyla öğrencilerin bu konuyla ilgili eksikleri açık bir şekilde ortaya konmuştur (Özer ve Arıkan 2002).

Raman (2001), çalışmasını 11 üniversite öğrencisi ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yaparak gerçekleştirmiştir. Çalışmada öğrenciler öncelikle yöneltilen soruyu çözmüşler ardından öğrencilere farklı çözümler gösterilerek, onların bu çözümleri değerlendirmeleri istenmiştir. Bu değerlendirmenin sonucunda öğrencilerden deneysel, grafiksel, zincir kuralı ile yapılan kısa kanıt, kitaba bağlı olarak türevin tanımının kullanılması ve formal kanıt gibi görünen yanlış çözüm şeklindeki beş yanıtta birini seçmeleri istenmiştir. Öğrencilerin yoğun olarak benimsedikleri seçeneğin türevin kitaba bağlı olarak tanımının kullanıldığı olarak belirlenmiştir (Raman 2001). Bu cevabın öğrencilerin formal tanımlarla gerçekleştirilen kanıtları daha geçerli gördüklerine dair düşünceye sahip olduklarını gösterdiği düşünülebilir.

Selden ve Selden (2003), çalışmalarında 12 üniversite matematik öğrencilerinin kolay bir teoremin kanıtına dair yükledikleri anlamı ve geçerlilik yeteneklerini incelemeyi amaçlamışlardır. Çalışmada matematik öğrencilerine kanıtlar sunmuşlar ve bunlardan hangilerinin geçerli ya da geçersiz olduğunu öğrencilerin belirlemeleri istenmiştir. Elde edilen veriler ışığında çoğu öğrencinin kanıtlarda doğru ya da yanlış ayırt etmekte zorlandıkları görülmüştür. Bununla beraber kanıtları tanımlama yeteneklerinin oldukça sınırlı olduğu görülmüştür (Selden ve Selden 2003).

Üzel ve Özdemir (2009), çalışmalarını 70 üçüncü sınıf ve 95 birinci sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütmüşlerdir. Çalışmada öğretmen adaylarının kanıt ve kanıt yapmaya dair tutumlarını belirlemek amaçlanmıştır. Çalışmadan elde edilen bulgulara bakıldığında birinci sınıf ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kanıt ile ilgili düşüncelerinin, üçüncü sınıf öğretmen adaylarından daha olumlu bakış açısına ve tutuma sahip oldukları görülmüştür. Birinci sınıf ilköğretim matematik öğretmen adaylarının kanıtla ilgili tutumlarının olumlu olmasında henüz formal kanıtın nasıl yapıldığından haberdar olmamaları olabilir (Üzel ve Özdemir 2009).

2.6.2 Kanıt Şemaları İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Alan yazında ilköğretim ve ortaöğretim kademesindeki matematik öğretmeni adaylarının kanıt şemalarını (Güner 2012, Şengül ve Güner 2013, İskenderoğlu 2010), kanıtla ilgili tutum ve

inanişlarını (İmamoğlu 2010), ortaokul öğrencilerine ait kanıt anlayişlarını (Knuth, Chopin ve Bieda 2009) nicel, nitel veri analiziyle tespit etmeye çalışan araştırmalar yapılmıştır. Bu çalışmalarda sınıf seviyesi arttıka şemaların dışsal kanıt şemalarından analitik kanıt şemaları düzeyine doğru değiştiği ya da gerekçelendirme şekillerinin dışsal ve deneysel araçlardan analitik araçlara doğru değiştiği belirlenmiştir.

Alan yazındaki bazı çalışmalarda (Aydoğdu İşkenderoğlu 2003, Flores 2006, Heinze ve Reiss 2003, Güner 2012, İşkenderoğlu 2010, Liu ve Manouchehri 2013, Sarı, Altun ve Aşkar 2007, Aydoğdu İşkenderoğlu ve Baki 2011, Sen ve Güler 2015, Weber 2010, Koichu 2009, şengül ve Güner 2013, Oflaz, Bulut ve Akçakın 2016) kanıt şemaları kendi özellikleriyle ele alınmıştır. Bu çalışmalardan bazıları (İşkenderoğlu 2010, Sarı, Altun ve Aşkar 2007, Aydoğdu İşkenderoğlu ve Baki 2011) kanıt şemalarını deneysel olmayan yaklaşımla farklı değişkenler olmaksızın ele alınmış, matematik ğretmeni adaylarıyla yürütülmüştür. Bu çalışmalardan bazıları (Aydoğdu İşkenderoğlu ve Baki 2011, İşkenderoğlu 2010) kanıt şemalarını deneysel olmayan yaklaşımla farklı değişkenler olmaksızın matematik ğretmen adaylarıyla klinik görüşmeler yaparak yürütürken bir başka çalışmada (Sarı, Altun ve Aşkar 2007) yalnızca görüşmeler yaparak yürütmüşlerdir.

Alanyazındaki araştırmalarda (İşkenderoğlu ve diğerleri 2011, Plaxco 2011, CadwalladerOlsker 2007, Koichu 2009) ğrenci ve ğretmen adaylarının analitik kanıt şemalarından aksiyomatik kanıt şemasına ait tepkiler sergilediklerini belirlemiştir.

Alan yazındaki bazı çalışmalar kanıt şemalarını özellikleriyle doğrudan betimsel şekilde incelememişlerdir. Bu alışmalar boylamsal araştırma olan niversite ğrencilerinin kanıt şemalarının gelişimini inceleyen (Haverhals 2011, CadwalladerOlsker 2007, Martin, Soucy McCrone, Wallece Bower ve Dindyal 2005, Mccrone ve Martin 2004, Recio ve Godino 2001, Sowder ve Harel 2003) kanıt şemalarının farklı değişkenlerle ilişkisini bir arada inceleyen (Plaxco 2011, Housman ve Porter 2003, ren 2007, Uygan, Tanışlı ve Köse 2014, Stylinou, Chae ve Blanton 2006) ve bulgularında kanıt şemaları ile özelliklerinden bahseden (Harel ve Rabin 2010, Grigoriadou 2012, Ellis 2007, Harel 2001, Soto 2010) deneysel araştırmalardır.

Alan yazındaki bazı çalışmalar ortaokuldaki (Liu ve Manouchehri 2013, ren 2007, Aydoğdu İşkenderoğlu 2003, şen ve Güler 2015) ve lise kademesindeki (Aydoğdu İşkenderoğlu 2003) ğrencilerin büyük kısmının dışsal kanıt şemalarına ait tepkiler sergiledikleri belirlenmiştir.

İskenderoğlu, Baki ve İskenderoğlu (2010), çalışmalarında altı sınıf öğretmeni adayı ile klinik görüşmeler gerçekleştirmişlerdir. Çalışmada öğretmen adaylarına problemler yöneltilmiş ve problemlerin çoğu öğretmen adayları tarafından çözülebilirken, çözemedikleri problemlere de rastlanmıştır. Elde edilen veriler analiz edildiğinde öğretmen adaylarının dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarının her birini kullandıkları görülmüştür. Kullanılan dışsal kanıt şemalarından otoriter, deneysel kanıt şemalarından temel örnekler ve analitik kanıt şemalarından ise aksiyomatik kanıt şemalarının ağırlıklı kullanıldığı görülmüştür. Bununla beraber bir öğretmen adayının analitik kanıt şemasını hiç kullanmadığı görülmüştür. Eğitim öğretim hayatlarının son kademesinde olan üniversite öğrencileriyle çalışılmış olunmasına rağmen en az kullanılan kanıt şeması, kanıtlamada son aşama olarak nitelendirilen analitik kanıt şeması olmuştur.

CadwalladerOlsker (2007), 77 yüksekokul öğrencisiyle gerçekleştirdiği çalışmada öğrencilerin kanıt şemaları dönem başında ve sonunda karşılaştırılmıştır. Bu bağlamda bir dönem süresince öğrencilerin kanıt şemalarının değişip değişmediği ve gelişimleri gözlenmiştir. Çalışma nitel araştırma yöntemiyle analiz edilmiştir. Yapılan analiz sonucunda öğrencilerin büyük kısmı analitik kanıt şemalarından dönüşümsel ve aksiyomatik kanıt şemasını daha inandırıcı bulduklarını dile getirmişlerdir.

Çontay (2017), araştırmasını ortaokul matematik öğretmeni adayları ile yürütmüştür. Çalışmanın amacı öğretmen adaylarının sayılar öğrenme alanından seçilen problemlere ait tepkilerinde hangi kanıt şemalarını kullandığını belirlemek ve bu kanıt şemalarının nasıl ortaya çıktığını incelemektir. Öğretmen adaylarının tüm temel ve alt kanıt şemalarına ait özellikleri sergiledikleri görülmüştür. Dışsal kanıt şeması ağırlıklı kullanılırken analitik kanıt şeması bunu takip etmiştir. Ayrıca en az kullanılan kanıt şemasının deneysel kanıt şeması olduğu görülmüştür.

Dickerson (2006), çalışmasını on matematik öğretmeni adayıyla yürütmüştür. Çalışmada öğretmen adaylarının ilişkileri açıklarken kanıtı nasıl değerlendirdikleri ve kanıt yazarken iletişimin rolünü nasıl algıladıkları araştırılmıştır. Çalışmada katılımcıların kanıtı matematiksel tümevarım şeklinde kabul ederek sundukları görülmektedir. Bunun yanı sıra yöntemdeki inançları dışsal kanıt şemaları kullandıklarını göstermektedir. Ayrıca öğretmen adayları kanıtları çoğunlukla anlamadıklarını, bu nedenle dışsal kanıt şemalarından otorite kanıt şemasını kullanabileceklerini ifade etmişlerdir. Bunun sebebi olarak öğretmen adayları hazır biçimde olduğu için anlamamanın önemli olmadığını dile getirmişlerdir (Dickersen 2006).

Flores (2006), çalışmasını 70 lise ve ortaokul kademesindeki öğrencilerle yürütmüştür. Çalışmanın amacı öğrencilerin matematik bilgilerini ve matematikte öğrenmiş olduklarının doğruluğunu inceleyerek, kullanmış oldukları kanıt şemalarını belirlemektir. Bu bağlamda öğrencilere sorular sorularak, alınan cevaplar doğrultusunda bu cevaplardan nasıl emin oldukları sorulmuştur. Harel ve Sowder (1998)'in ortaya koyduğu kanıt şemaları bağlamında öğrencilerin cevapları incelenmiştir. Araştırmanın bulgularında öğrencilerin genellikle otorite seçiminde öğretmen ve kitapları seçtikleri görülmüştür. Ayrıca alt sınıfların çoğunlukla sembolik kanıtlar sundukları, durumları ilişkilendiremedikleri ve hesaplamayı tercih ettikleri belirlenmiştir.

Harel ve Sowder (1998), veri grubunu üniversite öğrencilerinin oluşturduğu çalışmada öğrencilerin kanıta ait kavramlarını tespit etmek, öğrencilerin savunmalarını değerlendirme süreçleri ve bir nedene ikna etmede kanıtın işleviyle ilgili sorulara cevap aramıştır. Öğrencilere ait kanıt şemaları araştırmanın esas konusudur. Bu bağlamda çalışmaya 128 üniversite öğrencisi katılmıştır. Öğrencilerle klinik görüşmeler yapılmıştır. Veriler analiz edildikten sonra öğrencilerin sahip oldukları kanıt şemaları belirlenmiştir (Harel ve Sowder 1998). Çalışmanın bulguları incelendiğinde kanıt şemalarına ait her bir sınıfın öğrenciler var olan entelektüel kabiliyeti ve matematiksel gelişimlerdeki bir bilişsel düzeye ait olduğu ayrıca bu bulguların öğrencilerin kanıtlama sürecindeki gerçek eylemlerinin gözlemlerinden ortaya çıktığı vurgulanmıştır. Bununla beraber çalışmada kanıt şemalarının birbirlerinden bağımsız biçimde ele alınamayacağı ve bir kişinin birden fazla kanıt şemasına ait özelliklere sahip olabileceği belirtilmiştir. Çalışmada görüşme çalışmalarının ve öğretim uygulamalarının net sonuçlar vermediği, diğer farklı çalışmaları yorumlamak amacıyla bir çerçeve ve şartların göstergelerini içerdiği belirtilmiştir.

Housman ve Porter (2003), çalışmasını üniversite eğitimine devam etmekte olan 11 matematik öğrencisi ile yürütmüştür. Çalışmada yapılandırılmış görüşmeler yardımıyla öğrencilerin kullandıkları kanıt şemalarını belirlemek amaçlanmıştır. Görüşmelerde öğrenciler ile kanıt yazma ve okuma üzerine çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca bu süreçte öğrencilere bazıları doğru veya yanlış olan yedi varsayım verilmiştir. Verilen bu varsayımların doğru ya da yanlışlığı sorulmuş ve bunları savunmaları istenmiştir. Öğrencilerin savunmaları Harel ve Sowder (1998)'in kanıt şemaları kategorilerine göre sınıflandırılmıştır. Çalışmanın bulgularına bakıldığında bir öğrencinin dört farklı kanıt şemasını kullanırken diğerlerinin bir ya da daha fazla kanıt şeması kullandıkları görülmüştür. Katılımcılardan sadece dışsal kanıt şemaları kullanan öğrenciye rastlanmazken sadece analitik ve sadece deneysel kanıt şemalarını kullanan öğrencilere rastlanmıştır. Öğrencilerin verilen varsayımları savunma süreçlerinde, dışsal kanıt şeması ile analitik kanıt şeması kullananlar,

deneysel kanıt şeması ile analitik kanıt şemasını kullananlar ve her üç kanıt şemasını kullananlar olmuştur. Bu öğrencilerden dışsal kanıt şemasını kullananların örnek oluşturmada, örnekleri kullanmakta ve kavramları tekrar formüleştirmede başarısız oldukları görülmüştür. Ayrıca deneysel kanıt şemaları kullananlardan sadece bir öğrencinin örnek oluşturma konusunda diğer öğrencilere göre daha başarılı olduğu belirlenmiştir (Housman ve Porter 2003).

İlgili alan yazın incelendiğinde birçok çalışmada (Housman ve Porter 2003, Aydoğdu İskenderoğlu 2003, Güner 2012, Haverhals 2011, Flores 2006, Harel 2001, İskenderoğlu 2010, İskenderoğlu, Baki ve İskenderoğlu 2010, Plaxco 2011, Ören 2007, Sarı Altun ve Aşkar 2007, Stylinou, Chae ve Blanton 2006, Şengül ve Güner 2013, Şen ve Güler 2015) öğretmen adaylarının sergiledikleri tepkilerin üç temel kategoride bulunan dışsal deneysel ve analitik kanıt şemalarına ait olduğu belirlenmiştir.

Aydoğdu İskenderoğlu (2003), çalışmasında öğrencilerin karşılaştıkları matematik problemlerine ait sergiledikleri kanıt şemalarını ve kanıta bakış açılarını tespit etmeye çalışmıştır. 5., 6., 7., 8., ve 9. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdiği çalışmada öğrencilerin doğrulamalarından emin olma biçimlerini incelemiştir. Veriler nitel olarak analiz edilmiş ve klinik görüşmeler yapılmıştır. Bulgulara bakıldığında öğrencilerin deneysel kanıt şemalarından temel örnekler kanıt şemasına, dışsal kanıt şemalarından ise otoriter kanıt şemasına ait tepkiler sergiledikleri görülmüştür. Ayrıca tüm kanıt şemaları kategorisine bakıldığında analitik kanıt şemalarının diğerlerinden az kullanıldığı görülmüştür.

İskenderoğlu (2010), ilköğretim matematik öğretmeni adayları ile çalışma gerçekleştirmiştir. Çalışmada elde edilen veriler yazılı sınav ve klinik görüşme aracılığıyla elde edilmiştir. Ayrıca gelişimci araştırma yöntemi benimsenmiştir. Bu çalışmanın amacı öğretmen adaylarının fonksiyonlar konusunda kullanmış oldukları kanıt şemalarını ayrıca matematiksel kanıta dair görüşlerini belirlemek ve bu ikisi arasında paralellik olup olmadığını tespit etmektir. Ayrıca araştırmacı bu iki araştırma amacının farklı sınıf kademelerine göre değişimlerini ortaya koymaya çalışmıştır. Araştırmanın bulgularına bakıldığında sınıf kademesi arttıkça sergilenen kanıt şemalarının üst seviye şemalar olduğu görülmüştür. Ayrıca şemalar ve kanıt ile ilgili görüşlerin paralellik gösterdiği tespit edilmiştir.

Koichu (2009), çalışmasını yedi öğretmen adayı ve beş lisansüstü öğrencisiyle yürütmüştür. Çalışmada kanıt ve kanıtlama dersi bağlamında lise öğrencileriyle görev temelli görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Çalışmada kanıtlama yollarının ve kanıt şemalarının ortaya çıkarılması

amaçlanmıştır. 14 hafta süresince gerçekleştirilen çalışmanın çoğunluğu katılımcılarla kanıt ve kanıtlama hakkındaki güncel çalışmaların okunup tartışılmasıyla sürmüştür. Çalışmada lisansüstü öğrencileri ve öğretmen adaylarının lise öğrencisiyle görüşmeleri istenmiştir. Ardından bu görüşmelerin analizi katılımcılardan istenmiştir. Öğrencilerin kanıt şemaları Harel ve Sowder (1998)'ın kanıt şemaları sınıflandırmasına göre belirlenmiştir. Çalışmada bir katılımcı kanıt ile ikna olduğunu ve kanıtı matematiksel semboller içerdiğinde sınıf arkadaşlarını da ikna edeceğini dile getirmiştir. İki öğretmen adayı, katılımcının emin olma gerekçesinin; verilmiş olan ifadeyi matematiksel aksiyom olarak görmesinden kaynaklandığını belirtmiştir. Bu sebeple belirtilen katılımcının analitik aksiyomatik kanıt şemasına ait özellikler gösterdiğini ifade etmiştir. Bununla beraber katılımcının, kanıtın doğruluğuna yönelik inanç kaynağının; okulda öğretmenin anlatımı olduğunu dolayısıyla otoriter kanıt şemasına ait özellikler sergilediği belirtilmiştir. Katılımcı ifadeyi kanıtladığında ifadesinin doğru olduğuna matematiksel semboller sayesinde ikna olduğunu ifade etmiştir. Bu durum katılımcının sembolik kanıt şemasına ait özellikler sergilediği düşünülmüştür. Bazı katılımcıların ise kanıt şeması kavramını anlamlandırmakta zorlandıklarını belirtmişlerdir.

Oflaz, Bulut ve Akçakın (2016), nitel yöntem kullandığı araştırmasında sınıf öğretmeni adaylarının kanıt şemalarını tespit etmeye çalışmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının başarı düzeylerini düşük, orta ve yüksek olarak incelemiştir. Bu öğretmen adaylarından deneysel kanıt şemasına ait tepkiler sergileyenin en başarılı olan, dışsal sembolik kanıt şemasına ait tepkiler sergileyenin orta düzeyde başarılı olan ve dışsal alışkanlık edinilen kanıt şemasına ait tepkiler sergileyenin ise en düşük başarı düzeyinde olduğunu belirlemişlerdir.

Pektaş ve Bilgici (2019), çalışmasında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt şemalarını incelemiştir. Çalışmada öğrencilerin trigonometri konusuna ait tepkilerinde kullanılan kanıt şemalarını tespit etmeye çalışmıştır. Ayrıca öğrenme stillerine göre değişimi göstermeyi amaçlamışlardır. Çalışmada tarama yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen verileri Kolb öğrenme stili ve trigonometri kanıt formu ile toplamışlardır. Öğrencilerin Kolb öğrenme stillerine göre kullanmış oldukları kanıt şemaları nitel araştırma yöntemlerinden betimsel analiz ile incelenmiştir. Elde edilen verilere bakıldığında öğrencilerde en fazla karşılaşılan öğrenme stiline özümseyen olduğu, cinsiyete ve sınıf kademesine göre farklılık göstermediği belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin en fazla analitik kanıt şemalarını kullandığı ve bu şemaların öğrenme stillerine göre farklılık göstermediği belirlenmiştir.

Plaxco (2011), üç matematik öğretmeni adayıyla gerçekleştirdiği çalışmasında onların matematiksel kavramlara ait tanım anlayışlarını ve bu anlayışların kanıt şemalarıyla ilişkisini

belirlemeye çalışmıştır. Çalışma nitel yöntemlerle hazırlanmıştır. Öğretmen adaylarıyla görüşmeler gerçekleştirilmiş, onların kanıtları kabul ya da reddetmelerine bağlı olarak kanıt şemaları belirlenmeye çalışılmıştır. Bir öğretmen adayının ağırlıklı olarak analitik kanıt şemasına ait olan aksiyomatik sezgisel özellikleri gösterdiği belirlenmiştir. Ayrıca kanıtın içeriğine değil, biçimine önem verdiğini dolayısıyla dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini sergilediği bunula beraber kanıt yapılandırmasında örnekleri kullanma konusunda önemli anlayışa sahip olduğu görülmüştür. Bir diğer öğretmen adayı ağırlıklı olarak analitik kanıt şeması özellikleri sergilemesiyle beraber bazı doğrulamalarda dışsal alışkanlık edinilmiş ve deneysel kanıt şeması özelliklerine ait izler göstermiştir. Diğer bir öğretmen adayı ise üç farklı kanıt şemasına ait özellikleri bir arada göstermiştir. Bu şemalar dışsal otoriter kanıt şeması, deneysel tümevarım kanıt şeması ve analitik kanıt şemasıdır. Çalışmada öğretmen adaylarının matematiğe ait anlayışlarında, kavram imgelerini adapte etme konusundaki yetkinliklerinin; kanıt şemalarını geliştirdiği veya engellediği sonucuna ulaşılmıştır.

Sarı ve diğerleri (2007), veri grubunu üç matematik öğretmen adayının oluşturduğu çalışmayı yürütmüşlerdir. Öğretmen adayları başarı seviyesi yüksek, orta ve düşük olacak şekilde seçilmiştir. Çalışmanın bulgularında öğretmen adaylarının analiz dersindeki başarılarıyla kanıt yapma başarısının aynı olduğu görülmüştür. Ayrıca analitik kanıt şemalarından dönüşümsel kanıt şemasına ait tepkiler sergileyen öğretmen adayının yüksek başarılı olan ve araştırmacının yönlendirmesiyle analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait tepkiler sergileyen öğretmen adayının ise orta başarı seviyesinde olduğu görülmüştür.

Soto (2010), çalışmasında bir matematik öğretmenin kanıt şemalarını tespit edebilmek amacıyla öğretim uygulamalarında yapmış olduğu kanıtları iki yıl boyunca incelemiştir. Çalışmada elde edilen bulgulara bakıldığında öğretmenin başlangıçta yapmış olduğu kanıtlamalarda ihmal ettiği kanıtın temel ifadelerini fark ettiği gözlenmiştir. Bunun yanı sıra katılımcının kanıt şemalarında deneysel kanıt şemasından tümdengelimli kanıt şemasına geçiş yaptığı belirlenmiştir. Bu değişikliğin nedeni öğretmenin öğrencilerinin kanıtlamalarını birbirleri arasında tartışmalarına fırsat vermek, öğrencilerine varsayımların kanıtını sormak, buldukları çözüme alternatif fikirler sunup sunamayacaklarını belirleme ve doğru çözümlere ait matematiksel detayları keşfetmeye çalışmak olarak belirlenmiştir.

Şengül ve Güner (2013), çalışmalarını ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim görmekte olan 135 birinci ve dördüncü sınıf öğretmen adayı ile yürütmüşlerdir. Çalışmada öğretmen adaylarının problemleri doğrulama süreçlerinde kullandıkları kanıt şemalarını ve farklı

sınıf kademelerindeki öğrencilerin kullandığı kanıt şemalarında anlamlı farklılığa sahip olup olmadıklarını belirlemek amaçlanmıştır. Çalışma tarama modeli ile yürütülmüş, adaylara beş problem sorulmuş ve sorulara alınan cevaplar Harel ve Sowder (1998)'ın kanıt şemaları kategorilerine göre sınıflandırılmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının kanıt şemalarının tümüne ait tepkileri sergiledikleri görülmüştür. Ayrıca öğretmen adaylarının tümünün en fazla analitik kanıt şemasını, birinci sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının en fazla deneysel kanıt şemalarını ve son sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ise en fazla analitik kanıt şemalarını kullandıkları belirlenmiştir. Farklı sınıf kademelerinde öğretmen adaylarının kullandığı deneysel ve analitik kanıt şemaları arasında anlamlı bir farklılık olduğu belirlenmiştir. Son sınıf ilköğretim matematik öğretmen adaylarının en fazla kullandığı şema analitik kanıt şemasının ardından dışsal kanıt şemasının olduğu ortaya çıkmıştır. En az kullanılan kanıt şemalarının ise deneysel kanıt şemalarının olduğu görülmüştür.

Weber (2010), çalışmasını üniversitede öğrenimlerine devam etmekte olan birinci ve ikinci sınıf 28 matematik lisans öğrencisi ile yürütmüştür. Çalışmada öğrencilerin hangi tip delilleri ikna edici bulduklarının, matematiksel kanıt olarak gördüklerinin ve kanıtlanan bir iddianın doğruluğuna dair şüpheleri olup olmadığının, ayrıca olduysa şüphelerinin sebeplerinin tespit edilmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın katılımcıları kanıt giriş dersini tamamlama ve ortalamasının üzerinde not ortalamasına sahip olma ölçütüne göre seçilmiştir. Katılımcıların her biriyle görev temelli görüşmeler (task based interviews) yapılmıştır. Öğrencilere matematik kanıtları verilerek her bir kanıt için, kanıtı ne kadar ikna edici gördükleri ve bu kanıtın matematiksel bir kanıt oluşturup oluşturmadığına dair sorular yöneltilmiştir. Çalışmada kanıt şemaları Harel ve Sowder (1998)'ın kanıt şemaları kategorisine göre sınıflandırılmıştır. Çalışmanın bulgularına bakıldığında öğrencilerin birçoğunun deneysel kanıtları ikna edici buldukları fakat kanıt şartlarını karşılamadığını ifade edilmiştir. Ayrıca katılımcıların büyük çoğunluğu ise diyagramlı bir delili hem ikna edici bulmuşlar hem de kanıt olarak nitelendirmişlerdir. Bunun yanı sıra tümdengelsel delili biçimiyle değil içeriğiyle değerlendirmişler ve geçersiz olan tümdengelsel delillerin mantıksal kusurlarını görmedikleri için ikna edici kanıtlar olarak değerlendirmişlerdir.

BÖLÜM 3

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın deseni, araştırmanın örnekleme, veri toplama araçları, pilot uygulama, veri toplama süreci, veri analizi, geçerlik ve güvenilirlik, araştırmacının rolü ile ilgili açıklamalara yer verilmiştir.

3.1 ARAŞTIRMANIN DESENİ

Çalışmada nitel araştırma desenlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Bir durumu detaylıca anlamlandırabilmek için durumun kendine özgü yollarla sorgulanmasına ve anlamlandırma sürecine nitel araştırma denir (Creswell 2009). Nitel araştırma yöntemi algıları ve olayları kendi gerçek ortamında, gerçeğe dayanan ve bütün olacak şekilde ele alan araştırmalardır (Yıldırım ve Şimşek 2018). Durum çalışması ise bir veya daha fazla olayın, ortamın, programın, sosyal grubun, birbiriyle ilişkili sistemlerin ayrıntılı incelendiği yöntemdir (McMillan 2000). Gall, Borg ve Gall (1996)'a göre ise durum çalışması, bir olayı ortaya çıkaran detayları ifade edip görmek, bir olaya ilişkin muhtemel açıklamalar tasarlamak, bir olayı derinlemesine değerlendirmek amacıyla kullanılan bir yöntemdir. Durum çalışması, basit bir "Ne?" sorusundan ziyade özel bir "Nasıl?" ve "Niçin?" sorularını cevaplama yeteneğini dolayısıyla değerlendirme ve açıklama potansiyelini sunmaktadır (Yin 2003). Durum çalışmalarında katılımcılara zorunlu olmadıkça herhangi bir müdahalede bulunulmamaktadır. Bu bağlamda çalışmada katılımcıların doğrulama süreçlerine müdahale edilmemiş ve kanıt şemalarının derinlemesine incelenebilmesi için çalışmanın araştırma deseninin nitel araştırma desenlerinden durum çalışmasına uygun olduğuna karar verilmiştir.

3.2 ARAŞTIRMANIN ÖRNEKLEMİ

Çalışmada amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Amaçlı örnekleme yöntemi belli özelliklere sahip özel durumların incelenmesinde tercih edilmektedir. Amaçlı örnekleme yönteminde katılımcılar, araştırmacı tarafından belirlenmektedir. Araştırmacı, gerçekleştireceği çalışmanın amacına en uygun nitelikteki kişilerle örneklemini oluşturmaktadır (Balcı 2005). Öğretmenlerin şemalarıyla ilgili

net karar verilemeyen durumlarda kendileriyle tekrar iletişime geçebilmek için rahat ulaşılabilir olmasına dikkat edilmiş ve kendilerini daha rahat ifade edebilmeleri amacıyla araştırmacının tanıdığı isimlerle çalışılmıştır.

Örnekleme belirleme sürecinin ardından araştırmacının örneklemini, MEB'in farklı ortaokullarında görev yapmakta olan dört ilköğretim matematik öğretmeni oluşturmuştur. Çalışmada yer alan öğretmenlerin gönüllülük esasına göre katılımına dikkat edilmiştir. Gizlilik, özel hayata saygı; katılımcıların kimlikleri ile çalışmanın gerçekleştirildiği sosyal ve kültürel ortamı tanımlayan bilgilerin paylaşılmaması, katılımcıların kimliklerinin gizli tutulmasıdır (Johnson ve Christensen 2014). Bu doğrultuda çalışmada yer alan öğretmenlerin gerçek kimlikleri belirtilmemiştir. Öğretmenler Eylül, Fulya, Rana ve Selin olarak isimlendirilmiştir. Öğretmenler, farklı devlet üniversitelerinin eğitim fakültelerinden mezun; ilçe merkezi ve köyde görev yapmaktadırlar. Tüm öğretmenlerin görev süreleri 8-10 yıl arasındadır. Ayrıca öğretmenlerden Selin ve Eylül matematik eğitimi alanında yüksek lisans yapmaktadırlar.

Durum çalışmasında katılımcı sayısının az olması, durum çalışmasının ayrıntılı ve derinlemesine bir araştırma yöntemi olmasından kaynaklanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek 2018). Bu bağlamda bu çalışmada öğretmen sayısının az olmasıyla detaylı ve derinlemesine bir analiz yapılacağı düşünülmüştür.

3.3 VERİ TOPLAMA ARAÇLARI

Çalışmada, elde edilen veriler; farklı veri toplama araçları kullanılarak tek bir oturumda toplanmıştır. Veri toplama araçları, görev temelli görüşmeler bölümünü içermektedir.

3.3.1 Görev Temelli Görüşmeler

Çalışmada öğretmenlerle görev temelli görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görev temelli görüşmeler, görüşmecinin önceden hazırladığı yapılandırılmış şekilde olabildiği gibi, araştırmacının düşüncelerine göre farklılaşabilen değişimleri içeren ve görüşmeciye katılımcıların muhakemelerini yargılamaya fırsat verecek yarı yapılandırılmış şekilde de olabilir (Maher ve Sigley 2020). Bu çalışmada görev temelli görüşmeler yarı yapılandırılmış şekilde gerçekleştirilmiştir.

Görev temelli görüşmeler, bireyin akıl yürütmesi; problem çözme davranışları, matematiksel bilgi ve matematik anlayışıyla ilgili bilgi edinmek amacıyla kullanılır (Koichu 2009). Görev temelli görüşmeler klinik görüşmelerin bir biçimidir. Birçok araştırmacı tarafından matematik

eğitiminde görev temelli görüşme kullanılır (Koichu ve Harel 2007). Ayrıca görev temelli görüşmeler katılımcı ve görüşmeci ile gerçekleştirilir (Houssart ve Evens 2011). Görev temelli görüşmelerde katılımcıya görüşmeyi yapan kişi tarafından bir ya da daha fazla görev verilir (Goldin 2000). Bu süreçte katılımcı problem çözme aşamasında veya sonrasında görüşme süresince konuşarak problemle de uğraş içerisinde. Katılımcılara görev olarak eskiden görmüş oldukları veya ilk kez karşılaştıkları soru, problem ya da etkinlikler yöneltilebilir (Maher ve Sigley 2020). Koichu ve Harel (2007), görüşmeci ve katılımcının normlar tarafından düzenlenmiş görev üzerinde etkileşimde buldukları durumu görev temelli görüşme olarak adlandırmaktadırlar.

Çalışmada görev temelli görüşmeler, çalışma kâğıdı ve kanıt süreçlerine ait soru formu ile yürütülmüştür. Araştırmacı, öğretmenler çalışma kâğıdındaki soruları doğrularken; aynı zamanda öğretmenlere yaptıkları işlemleri açıklaması amacıyla kanıt süreçlerine ait sorular (Ek 3) yöneltmiştir.

3.3.1.1 Çalışma Kâğıdı

Öğretmenlerin hangi kanıt şemaları özelliklerine sahip olduklarını belirlemek amacıyla kullanılacak olacak sorular, öğretmenlerin seviyelerine uygunluğu ve kanıt şemalarının ortaya çıkarılması açısından önem taşımaktadır. Bu sebeple çalışma kâğıdındaki soruların, ortaokul müfredatına uygun olmasına; bu kapsamda her öğrenme alanına ait soru hazırlanılmasına ve öğretmenlerin tüm kanıt şemalarına ait özellikleri sergileyebilecekleri seviyede olmasına dikkat edilmiş, sorular bu doğrultuda hazırlanılmaya çalışılmıştır. Çalışma kâğıdındaki sorular için pilot uygulama öncesi uzman görüşü alınmış, soruların geçerliği ve güvenilirliği test edilmiştir. Bu uzman bir devlet üniversitesinin matematik eğitimi alanında öğretim üyesi olarak görev yapmaktadır. Pilot uygulama öncesi uzmandan alınan görüşler doğrultusunda on beş sorudan oluşan çalışma kâğıdı (Ek 1) hazırlanmıştır. Ardından matematik eğitimi alanında görev yapmakta olan iki öğretim üyesinden uzman görüşü alınarak çalışma kâğıdı (Ek 2) dokuz soru olarak revize edilmiştir. Uzmanların görüşleri doğrultusunda çalışma kâğıdındaki soruların ifadeleri değiştirilmiş ve uygun görülmeyen sorular çalışma kâğıdından çıkarılmıştır. Alan uzmanlarının, Ek 1’de verilmiş olan çalışma kâğıdından çıkarılan sorulara ait ifadeleri aşağıda detaylı şekilde açıklanmıştır.

Çalışma kâğıdının üçüncü sorusunda (a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ olduğunu gösteriniz.) derslerinde sıklıkla gözlemlediği durumla (öğretmenlerin direkt cebirsel

müdahalelerle çözüp doğru sonuca varabilecekleri) karşılaşma olasılığının muhtemel olduğunu belirtmiştir. Bu açıdan öğretmenlerin kanıt şemalarını resmetmek için uygun fırsatlar sunmayabileceğini ifade etmiştir.

Çalışma kâğıdının dördüncü (Sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu gösteriniz.) ve beşinci sorusunda ($\sqrt{3}$ 'ün irrasyonel bir sayı olduğunu gösteriniz.) bu soruların kanıtının lisans derslerinde verildiğini dolayısıyla bu durumun öğretmenlerin dışsal şemalara başvurmalarına sebep olabileceğini dolayısıyla çalışmanın sonuçlarını etkileyebileceğini belirtmiştir.

Çalışma kâğıdının dokuzuncu (n kenarlı düzgün çokgenin köşegen sayısının $\frac{n.(n-3)}{2}$ olduğunu gösteriniz.), onuncu (n kenarlı bir düzgün çokgenin dış açılar toplamının 360° olduğunu gösteriniz.) ve on birinci (n kenarlı bir düzgün çokgenin iç açılar toplamının $(n - 2) \cdot 180^\circ$ olduğunu gösteriniz.) sorularında bu soruların benzerlerinin daha önceki çalışmalarında kullanıldığını ve katılımcıların büyük bölümünün dışsal şemaları tercih ettiğini belirtmiştir. Ayrıca bu soruların öğretmenler açısından ve çalışma kâğıdındaki diğer sorulara göre kolay olduğunu belirterek çalışmanın sonuçlarında farklılaşmaya neden olabileceğini ifade etmiştir.

Çalışma kâğıdına ait tüm sorularda “olduğunu gösteriniz” ifadesi yerine “önermesini kanıtlayınız” ifadesinin kullanılması önerisinde bulunmuştur. Belirtilen tüm düzenlemeler sonucu pilot uygulama öncesi son halini alan çalışma kâğıdı (Ek 2), pilot uygulamada kullanılmıştır. Bu çalışma kâğıdına ait sorular aşağıda sunulmuştur:

- 1) “İkizkenar üçgenin taban açıları eşittir.” Önermesini kanıtlayınız.
- 2) “İkizkenar bir üçgende tabana indirilen dikme tabanı iki eş parçaya böler.” Önermesini kanıtlayınız.
- 3) “Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir.” Önermesini kanıtlayınız.
- 4) “ x tamsayı olmak üzere, $5x - 11$ çift tamsayı ise x tek tamsayıdır.” Önermesini kanıtlayınız.
- 5) “ x tamsayı olmak üzere, $5x - 7$ tek tamsayı ise $9x + 2$ çift tamsayıdır.” Önermesini kanıtlayınız.
- 6) “ $a, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere, eğer $a > b$ ise $c.a < c.b$ ’dir.” Önermesini kanıtlayınız.
- 7) “A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \emptyset$ ise $A = \emptyset$ dir.” Önermesini kanıtlayınız.

- 8) “Düzlemde birbirine paralel olan doğruların eğimleri eşittir.” Önermesini kanıtlayınız.
- 9) “Düzlemde birbirine dik olan doğruların eğimler çarpımı -1 'dir.” Önermesini kanıtlayınız.

3.3.1.2 Kanıt Süreçlerine Ait Soru Formu

Asıl uygulamada öğretmenlerin kanıt şemaları tespit edilirken, kanıtlama sürecinde kullandıkları yöntemler ile ilgili detaylı bilgi alınmasını sağlayacak sorular yöneltilen kanıt şemalarını daha net ortaya çıkarmak açısından önem taşıdığı düşünülmektedir. Araştırmacı, Ek 3'te verilen kanıt süreçlerine ait soru formunu alan yazındaki çalışmalardan (Aydoğdu İskenderoğlu 2003, İskenderoğlu 2010, Çontay 2017, Flores 2002, Sowder ve Harel 1998) derleyerek oluşturmuştur. Kanıt süreçlerine ait soru formundaki soruların, öğretmenleri herhangi bir kanıt şemasına yönlendirmeyecek şekilde seçilmesine dikkat edilmiştir. Pilot uygulama sonrası son halini alan sorular (Ek 3) belirli bir sıraya göre değil, öğretmenlerin doğrulamalarına uygun olacak şekilde yöneltilmiştir. Pilot uygulamaya ait detaylı bilgiye 3.4. başlığında yer verilmiştir. Kanıt süreçlerine ait soru formunda öğretmenlere çalışma kâğıdındaki soruları nasıl kanıtlayacakları, kanıtlamalarından nasıl emin oldukları, kanıtlamalarında uyguladıkları yöntem, akıllarına ilk gelen yöntemin uyguladıkları yöntem olup olmadığı ve her zaman bu yöntemi kullanıp kullanmadıkları şeklinde sorular yöneltilmiştir. Kanıt süreçlerine ait soru formu Ek 3'te sunulmuştur.

3.4 PİLOT UYGULAMA

Asıl uygulama öncesinde bir ön çalışma yapmak, veri toplama araçlarını son haline getirmek ve kullanılacak bu araçların geçerliğini teyit etmek açısından önem taşımaktadır (Karataş 2002). Pilot uygulama, MEB'te görev yapmakta olan bir ilköğretim matematik öğretmeni ile gönüllülük esas alınarak gerçekleştirilmiştir. Çevrimiçi video konferans uygulaması olan Zoom üzerinden gerçekleştirilen görev temelli görüşme kayıt altına alınmıştır. Öğretmenin doğrulama süresi sınırlandırılmamış, yaklaşık 1 saat 30 dakika sürmüştür. Öğretmeninden çalışma kâğıdında yöneltilen sorulara (Ek 2) ait doğrulamalarını yapmaları istenmiş ayrıca detaylıca inceleyebilmek ve kanıt şemalarının daha net belirlenebilmesi amacıyla öğretmene, Ek 3'te verilen kanıt süreçlerine ait soru formundaki sorular yöneltilmiştir. Uygulamanın ardından elde edilen tüm veriler betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir.

Pilot uygulamada, öğretmenin çalışma kâğıdındaki sorulara cevap verebildiği; sorulara ait vermiş olduğu cevaplarda kanıt şemalarının gözlemlenebildiği tespit edilmiştir. Bu sebeple Ek 2'de

verilen çalışma kâğıdı aynı şekliyle asıl uygulamaya dâhil edilmiştir. Ayrıca kanıt süreçlerine ait soru formunun (Ek 3) da öğretmenin kanıt şemalarını ortaya çıkarmak açısından uygun olduğu görülmüş, aynı şekliyle asıl uygulamada kullanılmıştır.

Araştırmacının deneyimi, çalışma verilerinin geçerliği ve güvenilirliği; görev temelli görüşmelerin doğru biçimde yürütülebilmesi ile bağlantılıdır (Karataş 2002). Dolayısıyla görev temelli görüşmeye alışkanlık kazanmak ve görev temelli görüşmelerin sağlıklı şekilde yürütülebilmesi için asıl uygulamada elde edilecek veriler öncesinde pilot uygulama gerçekleştirmek önem kazanmaktadır. Araştırmacı, pilot uygulamadan elde edilen verileri ve video kayıtları inceleyip hataya düştüğü noktaları tespit ederek asıl uygulamada bu hataları yapmamak için pilot uygulama gerçekleştirmiştir. Örneğin; araştırmacı, öğretmene sorduğu sorularda tekrara düştüğünü fark etmiş asıl çalışmada aynı soruları yöneltmemeye dikkat etmiştir. Araştırmacı zoom üzerinden gerçekleştirilen görev temelli görüşmeler sonucunda kamerayı öğretmenin çözüm yaptıkları kâğıda çevirmelerinin yönlendirici olmayan sorular sormak açısından daha önemli olduğunu fark etmiştir. Dolayısıyla asıl uygulamada kameraların çözüm kâğıdı görülecek şekilde yerleştirilmesi istenmiş, öğretmenlerin çözümlerine yardımcı olacak ifadelerden kaçınılmıştır. Öğretmenin, çalışma kâğıdındaki birinci soruyu gördüğünde sorunun zor olduğunu söyleyerek uygulamayı durdurmak, soruların kendisine verilmesini isteyerek yalnız çözmek ve ardından araştırmacı ile görüşmek istemiştir. Araştırmacı, öğretmeni motive etmenin önemini fark etmiş; asıl uygulamada çözümlerinin doğruluğunun ya da yanlışlığının önemli olmadığını, istedikleri sorudan başlayabileceklerini vurgulamıştır.

3.5 VERİ TOPLAMA SÜRECİ

Araştırmacı çalışmaya başlamadan önce öğretmenlerle ayrı ayrı yapılacak olan çalışmanın içeriğini ve amacını detaylı şekilde anlattığı görüşmeler gerçekleştirmiştir. Araştırmacı öğretmenlere çalışma kâğıdını yönelteceğini, buradaki soruları kendi çözüm yöntemleri doğrultusunda istedikleri gibi cevaplandırabileceklerini ve bu sürecin video kayıt altına alınacağını belirtmiştir. Araştırmacı video kayıtların kendisinde kalacağını, kimseyle paylaşılmayacağını öğretmenlere belirterek kendilerinden kayıt için izin almıştır. Ayrıca doğrulamalarındaki ifadelerinin doğru ya da yanlış olmasından ziyade düşüncelerinin, çözüm aşamalarının ve fikirlerinin paylaşılmasının önemli olduğu özellikle belirtilmiştir. Gerçekleştirilen görev temelli görüşmeler, 1 saat 20 dakika ile 1 saat 40 dakika arasında sürmüştür. Video kayıt altına alınan tüm süreç araştırmacı tarafından yazı haline dönüştürülmüştür.

3.6 VERİ ANALİZİ

Çalışmada elde edilen veriler, nitel veri analizi yöntemlerinden; betimsel analiz ve içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Öğretmenlerin kanıt şemalarının ortaya çıkarılması amacıyla yapılan analizler, araştırmacı ve bir devlet üniversitesinin matematik eğitimi alanında görev yapmakta olan öğretim üyesi ile gerçekleştirilmiştir.

Betimsel analizin amacı, elde edilen verileri düzenlenmiş ve yorumlanmış bir şekilde okuyucuya sunmaktır. Bu amaç doğrultusunda elde edilen veriler, anlaşılır ve mantıklı bir biçimde betimlenir. Ardından yapılan bu betimlemeler neden, sonuç ilişkisi içerisinde açıklanır ve bazı sonuçlar elde edilir. Betimsel analizde veriler önceden belirlenmiş olan temalar çerçevesinde özetlenmekte ve yorumlanmaktadır. Ayrıca katılımcıların, doğrudan ifadelerine yer verilebilir; böylece görüşleri çarpıcı şekilde yansıtılmaktadır. Yıldırım ve Şimşek (2018), betimsel analizin dört aşamadan oluştuğunu ifade etmektedirler. Bu aşamalar: Betimsel analiz için çerçeve oluşturulması, tematik çerçeveye göre verilerin işlenmesi, bulguların tanımlanması ve bulguların yorumlanması şeklindedir. Betimsel analizin ardından verilerin ayrıntılı yorumlanabilmesi için içerik analizi yöntemi kullanılmaktadır. İçerik analizinin amacı, toplanmış olan verileri açıklayabilecek ilişkilere ve kavramlara ulaşabilmektir. Betimsel analizde özetlenmiş ve yorumlanmış olan veriler, içerik analizi ile daha ayrıntılı bir işleme tabi tutularak betimsel analiz ile fark edilemeyen kavramlar ya da temalar içerik analizi yöntemi ile keşfedilmektedir. Bu çalışmada öğretmenlerin kanıt şemaları, Sowder ve Harel (1998)'in kavramsal çerçevesi ve alan yazındaki kanıt şemalarına ait göstergeler kullanılarak belirlenmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda bu çalışmanın betimsel analiz ve içerik analizi yöntemine uygun olduğu düşünülmüştür.

Görev temelli görüşmelerin analizi her bir öğretmen için ayrı ayrı yapılmıştır. İlk etapta her öğretmenin tüm sorulara verdiği cevaplar incelenmiş, ardından öğretmenlerin aynı sorulara ait cevapları bir araya getirilmiştir. Bu süreçte ortak özellik taşıdığı belirlenen benzer çözümler birbiriyle ilişkilendirilip aynı şema altında birleştirilmiştir. Öğretmenlerin kanıt şemaları, Harel ve Sowder (1998)'in geliştirmiş olduğu kanıt şemaları olan üç temel şema ile bu şemalara ait yedi alt şemaya göre değerlendirilmiş ve bu çalışmanın analiz birimini oluşturmuştur.

Görev temelli görüşmelerden elde edilen verilerin analizinde ilk olarak video kayıtlar, bilgisayar ortamında yazı haline dönüştürülmüştür. Yazı haline dönüştürülen metinler ve öğretmenlerin çalışma kâğıdına ait cevapları yardımcı araştırmacı ile paylaşılmıştır. Bu

verilerin, hangi kanıt şemaları özellikleri taşıdığını; araştırmacılar birbirinden bağımsız şekilde belirlemişlerdir. Ardından üç hafta boyunca belirli aralıklarla bir araya gelerek on iki saat süren görüşmelerde, iki analizi birbiriyle karşılaştırmışlardır. Ortak belirlenen şemalar, aynı şekilde alınmış; farklı şemalara ait olduğu düşünülen veriler ise tekrar incelenmiş ve üzerine tartışılarak ortak bir karara bağlanmıştır. Son durumda araştırmacıların veri setindeki analizleri karşılaştırıldığında tutarlık oranının yüzde yüz olduğu belirlenmiştir.

Kanıt şemalarının belirlenmesi sürecinde öğretmenlerin ifadeleri ve cevapları dikkate alınmıştır. Belirlenen kanıt şemalarının göstergeleri olan kodlar alan yazındaki bazı çalışmalardan (Harel ve Sowder 1998, Harel ve Sowder 2007, İskenderoğlu 2010, Çontay 2017) derlenerek oluşturulmuştur. İlgili temel kanıt şemaları, temalar; alt kategorilerindeki kanıt şemaları, alt temalar ve belirlenen kanıt şemasının göstergeleri olan kodlar aşağıda Çizelge 3.1’de sunulmuştur.

Çizelge 3.1 Kanıt şemalarının asıl uygulamaya ait göstergeleri.

Kanıt Şeması (Temalar)	Kanıt Şemasının Alt Kategorileri (Alt Temalar)	Kanıt Şemasının Göstergesi (Kodlar)
Dışsal Kanıt Şeması	Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şeması	Önceki öğrenmelerini anlamlandırmadan kullanma
Deneysel Kanıt Şeması	Algısal Kanıt Şeması	Önermenin doğruluğunu sezgilerine dayanarak göstermeye çalışma
	Temel Örnekler Kanıt Şeması	Önermenin doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma
Analitik Kanıt Şeması	Dönüşümsel Kanıt Şeması	Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar oluşturma
	Aksiyomatik Kanıt Şeması	Tanımları, neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanma

Çizelge 3.1’te görüldüğü üzere öğretmenlerde dışsal otoriter ve sembolik kanıt şemasına ait özelliklere rastlanmazken dışsal alışkanlık edinilmiş, deneysel ve analitik kanıt şemalarına rastlanmıştır. Kanıt şemaları belirlenirken öğretmenlerin önermeye ait doğrulamalarına ait gerekli işlemleri yaparsan illaki çıkar, emin olsam gelecek şeklindeki ifadeleri “önermenin doğruluğunu sezgilerine dayanarak göstermeye çalışma” göstergesi altında değerlendirilerek deneysel algısal kanıt şemasına dâhil edilmiştir.

3.7 GEÇERLİK VE GÜVENİRLİK

Merriam (1998), geçerlik; güvenilirlik kavramlarının önemini açıklarken bir çalışmanın kavramsallaştırılması sürecinde, veri toplama; analiz etme, yorumlama ve bulguları sunma aşamalarında dikkatle yaklaşılması gerektiğini vurgulamıştır.

3.7.1 Geçerlik

Geçerlik, elde edilen bilimsel verilerin doğruluğunu içermektedir (LeCompte ve Goetz 1982). Yıldırım ve Şimşek (2018), nitel olan çalışmalarda geçerliği sağlayan önemli özelliklerin araştırma yapılan yere yakınlık, görüşmelerin yüz yüze gerçekleştirilerek bilgilerin doğal ortamında toplanması, ulaşılan bulguları onaylayabilmek için araştırma yapılan yere geri gidebilme ve gerekirse ek bilgi toplayabilme imkânının olması olarak açıklamıştır.

3.7.1.1 İç Geçerlik

Nitel araştırmalarda geçerlik, araştırmacının incelediği olguyu, olduğu gibi ve olabildiğince tarafsız gözlemesidir (Yıldırım ve Şimşek 2018). İç geçerliğin sağlanması bulguların kendi içinde tutarlı ve farklı yöntemlere göre elde edilen bulguların bütün olarak anlamlı olmasına bağlıdır. Bu çalışmada tüm öğretmenlerin doğrulamaları bir kanıt şemasına dâhil edilebilmiştir. Öğretmenlerin doğrulamalarının kendi aralarında anlamlı ve tutarlı ayrıca Sowder ve Harel (1998)'ın geliştirdiği kanıt şeması sınıflandırmasıyla uyumlu olduğu düşünülmektedir.

Huberman ve Miles (1994), çalışmada tahminler yapıp yapılmadığını ayrıca bu tahminlerin uygunluğunun sorulmasının iç geçerliği artıran unsur olduğunu belirtmiştir. Çalışmada elde edilen bulgular tartışıldıktan sonra araştırmacılara gelecek çalışmalar için öneriler sunulmuş ve hangi çalışmaların daha faydalı olabileceğiyle ilgili tahminlere yer verilmiştir.

Yıldırım ve Şimşek (2018), nitel çalışmada araştırmacının esnek olmasının geçerlik için önemli olduğunu dolayısıyla araştırmacının, araştırma sürecinde yeni stratejilere başvurabileceğini; görüşmeye yeni sorular ekleyebileceğini, daha öncesinde planlanmamış görüşmeler yapabileceğini ve elde edilen bilgiyi teyit etmesi amacıyla farklı veri toplama yöntemleri kullanabileceğini belirtmiştir. Bu çalışmada araştırmacı süreç boyunca esnek olmaya çalışmıştır. Pilot uygulama sonrasına kadar geçen sürede çalışma geliştirilmiş, uzman görüşleri alınarak; sorular eklenip çıkarılmış ve veri toplama araçları son haline getirilmiştir. Ayrıca tüm uygulamalar araştırmacının deneyim kazanmasına ve konuyu daha iyi tanınmasına yardımcı olmuştur. Böylece araştırmacının çalışmadaki iç geçerliği artırdığı düşünülmektedir.

3.7.1.2 Dış Geçerlik

Dış geçerlik, araştırma sonuçlarının genellenebilirliği ile ilgilidir. Eğer bir araştırmanın sonuçları, benzer ortamlara ve durumlara genellenbiliyorsa araştırmanın dış geçerliğinin olduğu söylenebilir. Çalışmadan elde edilen bulgular, Sowder ve Harel (1998)'in kavramsal çerçevesi ve bu konuda yapılmış benzer araştırmalar ile uyumlu olduğu için çalışmanın başka araştırmalar tarafından yararlanılabilir seviyede olduğu düşünülmektedir. Ayrıca çalışma bulgularının farklı öğretmenlere uygulanabilir nitelikte ve benzer ortamlarda kolaylıkla test edilebilir olduğu düşünülmektedir.

Bir çalışmada betimlemelere ve amaçlı örnekleme yer vermek dış geçerliği artırmanın temel yollarındandır (Erlandson, Harris, Skipper ve Allen 1993). Çalışmada katılımcıların hangi örneklem seçme yöntemi ile oluşturulduğu, araştırma ortamı ve sürecinin özellikleri detaylı şekilde anlatılmıştır. Ayrıca temalar, analiz çerçeveleri ve kategoriler kısacası tüm aşamaların her birinin iyi tanımlanması nitel araştırmalarda dış geçerliği artıran diğer unsurlardır. Yapılan çalışmada da veri toplama araçları, verilerin betimsel analiz çerçeveleri, analizdeki tema ve kod eşleştirmeleri okuyucuya yorum katılmadan, detaylı olarak aktarılmıştır. Bunun yanı sıra çalışma, yazıya dönüştürülürken veri analiz süreci detaylı biçimde ele alınmıştır. Çalışmanın bulguları ve tartışmalar ayrıntılarıyla raporlanmıştır. Dolayısıyla çalışmanın dış geçerlik özelliklerini sağladığı düşünülmektedir.

3.7.2 Güvenirlik

Güvenirlik, araştırma sonuçlarının tekrar edilebilirliği ile ilgilidir. Nitel araştırmada güvenilirlik, çalışma gerçekleştirilen ortamda meydana gelen her detayın veri olarak kaydedilmesi olarak yorumlanmaktadır (Büyüköztürk ve diğerleri 2018).

3.7.2.1 İç Güvenirlik

Nitel çalışmalarda iç güvenilirlik 'tutarlılık' şeklinde ifade edilebilir (Yıldırım ve Şimşek 2018). İç güvenilirliğin sağlanması için elde edilen veriler yorum yapılmadan sunulmalı, yorumları sonradan yapılmalıdır (Çontay 2017). Bu çalışmada elde edilen veriler ilk olarak yorum yapılmadan okuyucuya sunulmuş, ardından verilerin yorumu yapılmıştır. Bunun yanında kodlama güvenilirliğini sağlamak amacıyla, veri analizi sürecinde öğretmenlerin kanıt şemaları belirlenirken uzman görüşünden yararlanılmış; çalışmanın iç güvenilirliğini artırmak amaçlanmıştır.

Yıldırım ve Şimşek (2018), güvenilirliği sağlamak için araştırmacının alabileceği en iyi önlemlerden biri çalışmanın tüm sürecini açık ve ayrıntılı olarak rapor etmek olarak belirtmektedir. Bu sebeple öğretmenler görüşme süresince video ve ses kaydına alınmıştır. Kayıtların tekrar dinlenip yazı haline dönüştürülmesi ve öğretmenlerin tüm cevaplarının bulgular bölümünde direkt sunulmasıyla çalışmadaki güvenirlığın artırıldığı düşünülmektedir.

3.7.2.2 Dış Güvenirlik

Le Compte ve Goetz (1982), çalışmalarda dış güvenirligi sağlamak için beş ölçüt ortaya koymuştur. Bunlar: Araştırmacının durumu, katılımcı seçimleri, sosyal durum ve koşullar, analitik yapılar ve dayanaklar, veri toplama ve analiz yöntemleri olarak karşımıza çıkmaktadır.

Bu çalışmada araştırmacının görüşmeci pozisyonunda bulunduğu, öğretmenlerin amaçlı örnekleme yöntemi ile nasıl seçildiği, görüşmelerin gerçekleştiği süreçte öğretmenlerin kendilerini rahat hissettikleri yerde bulunduğu, çalışmada kanıt şemalarının belirlenebilmesi için Harel ve Sowder (1998)'in kavramsal çerçevesinin kullanıldığı ve araştırmanın aşamaları, yöntemi açık şekilde anlatılmıştır. Ayrıca verilerin nasıl toplandığı işlendiği, yorumlandığı, sonuçlara ulaşıldığı detaylı şekilde sunulmuştur. Uygulamanın sonuçları, elde edilen verilerle ilişkilendirilerek ham veriler başkaları tarafından incelenebilecek biçimde muhafaza edilmiştir. Çalışmanın tartışma bölümünde farklı ya da aynı çalışmalar bu çalışma ile karşılaştırılmış, birbiriyle ilişkili şekilde sunulmuştur. Tüm bunların çalışmanın dış güvenirligini artırdığı düşünülmektedir.

3.8 ARAŞTIRMACININ ROLÜ

Araştırmacı, çalışma alanda bizzat zaman harcayan; katılımcılarla doğrudan görüşen ve gerektiği zaman katılımcıların tecrübelerini yaşayan, alanda kazandığı görüşleri ve tecrübeleri elde edilen bilgilerin analizinde kullanan kişidir (Yıldırım ve Şimşek 2018). Nitel çalışmalarda araştırmacı veri analizi ve veri toplama sürecinde temel kaynak olarak karşımıza çıkmaktadır (Çontay 2017). Nitel araştırmacı, araştırma süreçlerinin doğal bir parçasıdır ve bilgi toplama aracı işlevi görmektedir (Yıldırım ve Şimşek 2018). Bu çalışma, araştırmacının bizzat kendisi tarafından yürütülmüştür.

Nitel araştırmanın bazı durumlarda nesnel olmadığı öne sürülmekte ve bu nedenle araştırmacının rolünü ve araştırmaya dair bulgulara ulaşma yöntemini detaylıca belirlemesi gerekmektedir (Yıldırım ve Şimşek 2018). Araştırmacı, öğretmenlerin kanıt şemalarını ortaya

ıkarırken; nesnellığe zarar vermemek amacıyla birçok kaynakta yıllardır kullanılmakta ve geçerlik, güvenirliği kanıtlanmış olan Sowder ve Harel (1998)'ın kanıt Şemaları sınıflandırmasını kullanmıştır. Veri toplama sürecinde nesnellıği korumak için öğretmenlere yönlendirici olmayan sorular yönelttiği görev temelli görüşmeler yapmıŐtır. Araştırmacı, elde ettiği verileri öncelikle deŐifre etmiş ardından bulguları ortaya koymuŐ ve kendi yorumunu ifade ederek çalışmanın tartışma bölümünü oluşturmuştur.



BÖLÜM 4

BULGULAR

Bu bölümde görev temelli görüşmelerden elde edilen bulgular ve yorumlar, kanıt şemaları ve bunların alt kategorilerine göre alt başlıklar halinde sunulmuştur.

Öğretmenlerin, görev temelli görüşmelerde bazı kanıt şemalarının özelliklerini çalışma kâğıdının bazı sorularında gösterdikleri belirlenmiştir. Çalışmadan elde edilen bazı bulgularda, öğretmenlerin kanıtlarını yapılandırmasında hatalar olduğu belirlenmiştir. Bu hatalı kanıt yapılandırmalarına bulgularda yer verilmemiştir. Görev temelli görüşmelerde çalışma kâğıdındaki ve kanıt süreçlerine ait soru formunda yer alan sorulara verdikleri cevaplar kullanılmıştır. Alıntıların bazı kısımlarında kanıt süreçlerine ait soru formunda yöneltilen soruları belirtmek amacıyla sorunun sonuna (SF) yazılmıştır. Ayrıca öğretmenlerin, belirlenen kanıt şemasının özelliklerine sahip olabilecek ifadeleri alıntılarda koyu renk ile vurgulanmıştır. Öğretmenlerin temel kanıt şemaları ve bunların alt kategorilerine ait şemaları çalışmanın yöntem bölümünde, verilerin analizi kısmında temalar ve alt temalar olarak; bu kanıt şemalarının göstergeleri ise kodlar olarak tanımlanarak (Çizelge 3.1) sunulmuştur. Aşağıdaki başlıklarda öğretmenlerin her bir kanıt şemasının alt kategorilerine dâhil olan ifadeleri, bu ifadelerin kanıt şemaları sınıflandırmaları (temalar ve alt temalar) ve kanıt şemalarının göstergesi (veri analizi kodu) olarak alt başlıklar halinde sunulmuştur. Bu sınıflandırmalar her bölümün giriş kısmında okuyucuya tablo şeklinde verilmiştir.

4.1 GÖREV TEMELLİ GÖRÜŞMELERDE ÖĞRETMENLERİN DIŞSAL KANIT ŞEMALARINA AİT CEVAPLARI

Bu bölümde, öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde dışsal kanıt şemalarına ait cevapları incelenmiştir. Öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde dışsal kanıt şemalarının alt kategorisi olan alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini bazı sorularda, ağırlıklı olmasa da sergiledikleri görülmüştür. Ayrıca öğretmenlerin dışsal kanıt şemalarının diğer alt kategorileri olan otoriter kanıt şeması ve sembolik kanıt şeması özelliklerine ait ifadelerine rastlanmamıştır.

4.1.1 Öğretmenlerin Dışsal Alışkanlık Edinilmiş Kanıt Şemasına Ait Cevapları

Rana'nın çalışma kâğıdının üçüncü sorusuna ("Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir" önermesini kanıtlayınız.) ait bazı açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini sergilediği fakat ağırlıklı olarak deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir. Rana'nın belirtilen bu soruya ait tüm cevapları ve açıklamaları, ağırlıklı olarak kullandığı deneysel temel örnekler kanıt şeması başlığı (4.2.2.) altında detaylı şekilde sunulmuştur.

Selin'in çalışma kâğıdının dördüncü sorusuna (" x tamsayı olmak üzere, $5x - 11$ çift tamsayı ise x tek tamsayıdır." önermesini kanıtlayınız.) ait bazı açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini sergilediği fakat ağırlıklı olarak dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde Selin'in, çalışma kâğıdının beşinci sorusuna (" x tamsayı olmak üzere, $5x-7$ tek tamsayı ise $9x+2$ çift tamsayıdır." önermesini kanıtlayınız.) ait bazı açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini gösterirken ağırlıklı olarak dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir. Selin'in belirtilen bu sorulara ait tüm cevapları ve açıklamaları, ağırlıklı olarak kullandığı dönüşümsel kanıt şeması başlığı (4.3.1.) altında detaylı şekilde sunulmuştur.

4.2 GÖREV TEMELLİ GÖRÜŞMELERDE ÖĞRETMENLERİN DENEYSEL KANIT ŞEMALARINA AİT CEVAPLARI

Bu bölümde, öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde deneysel kanıt şemalarına ait cevapları incelenmiştir. Öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde deneysel kanıt şemalarının alt kategorileri olan algısal kanıt şeması ve temel örnekler kanıt şeması özelliklerini sergiledikleri görülmüştür. Öğretmenlerin deneysel kanıt şemalarının göstergelerine ait dağılımları aşağıda Çizelge 4.1'de sunulmuştur:

Çizelge 4.1 Öğretmenlerin deneysel kanıt şemaları göstergelerine ait dağılımları.

Kanıt Şeması	Kanıt Şemasının Alt Kategorileri	Kanıt Şemasının Göstergeleri	Öğretmen	Soru No
Deneysel Kanıt Şeması	Algısal Kanıt Şeması	Önermenin doğruluğunu sezgilerine dayanarak göstermeye çalışma	Eylül	3, 7
	Temel Örnekler Kanıt Şeması	Önermenin doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma	Rana	1, 2, 3, 5, 6
			Fulya	6
			Eylül	3*

* bu kanıt şeması özelliklerini tam olarak sergilemese de bu kanıt şemasına ait bazı düşüncelere sahip olması

4.2.1 Öğretmenlerin Deneysel Algısal Kanıt Şemasına Ait Cevapları

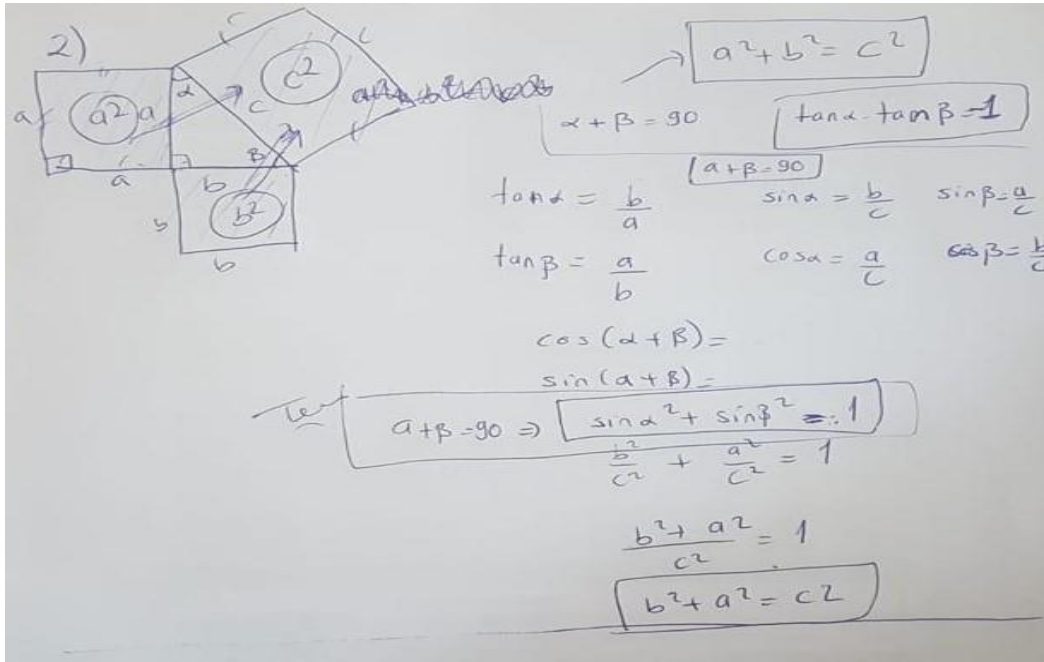
Öğretmenlerden Eylül, çalışma kâğıdının üçüncü ve yedinci sorularında deneysel algısal kanıt şemasına ait ifadelerde bulunmuştur. Bu ifadeler “*önermenin doğruluğunu sezgilerine dayanarak göstermeye çalışma*” şeklinde sınıflandırılan bu kanıt şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca Eylül’ün bu sorulara ait cevaplarında deneysel temel örnekler ve analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerinden izler taşıdığı görülmüştür. Öğretmenin belirtilen göstergeye ait cevapları aşağıda sunulmuştur.

Eylül, çalışma kâğıdının üçüncü sorusuna (“Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir” önermesini kanıtlayınız.) başladığında deneysel temel örnekler kanıt şemasına ait özellikleri sergilemiş ardından bunun kanıt için yeterli olmadığını belirtmiştir. Ardından kendisini doğru cevaba ulaştıracak tutarlı basamakları oluşturduğu fakat yapılandırmasında yazdığı formülden emin olmadığı dolayısıyla deneysel algısal kanıt şemasına ait özellikler taşıdığı düşünülmüştür. Eylül, bu soruya ait cevaplarında öncelikle kenar uzunlukları a, b ve c birim olan bir üçgen çizmiş ardından bu kenarlardan aynı kenar uzunluklarına sahip kareler oluşturmuştur. Dik kenarlardan oluşturulan karelerin alanları toplamının, hipotenüs kenarından oluşturulan karenin alanına eşit olduğunu ifade ederek bunun bir doğrulama olabileceğini fakat kanıt oluşturmadığını ifade etmiştir. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

Araştırmacı (A): Önermeyi kanıtlar mısın? (SF)

Eylül (E): Doğrulama ile ilgili pek çok yöntem biliyorum. Ama kanıt olur mu? Kendime yakın olanı yapacağım. Şimdi bu dik üçgen, bu üçgenin dik kenarlarından kare çiziyorum, b ise b uzunluğunda. Ama bu da sanki doğrulama olacak. Buraya da aynı şekilde çiziyorum. Bunun alanı ne olur? Kare çizdiğim için a^2 , bu taraf b^2 . Buraya da bir kare çiziyorum, c olacak şekilde. Alanı c^2 olur. Bu benim en çok kullandığım yöntem. Ama benimki bir doğrulama oluyor. Şimdi bunları taşıyıp eşit olduğunu görüyoruz. Ama şu an matematiksel olarak bunu yapamam. Bu şekilde ispata varamayacağım.

Eylül'ün ifadelerine ait cevabına aşağıda Şekil 4.1'de bir numaralı kısımda yer verilmiştir:



Şekil 4.1 Eylül'ün çalışma kâğıdının üçüncü sorusuna ait cevabı.

Eylül, soruya ait ilk cevaplarında a, b ve c birim uzunluğunda bir üçgen çizerek önermeyi doğrulamaya çalışmıştır. Buradan deneysel temel örnekler kanıt şemasına ait ifadelerle doğrulamaya başladığı fakat yaptıklarının kanıt olmadığını belirterek trigonometrik oranlarla kanıtını yapılandırmaya çalıştığı görülmüştür. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

E: Açılardan yola çıksam. Bunun kanıtı büyük ihtimal sinüs tanjant kullanacağım. Çünkü matematiksel olarak kanıtını böyle yapabilirim ama hiç kullanmadığım için hatırlamıyorum. Ama tanjant diyelim, büyük ihtimal buradan. (çizdiği ABC üçgeninin trigonometrik oranlarını yazar.) $\alpha + \beta = 90^\circ$ ise $\tan \alpha \cdot \tan \beta = -1$ e eşitti şöyle bir şey vardı. Getiremeyeceğim şu an. Aklıma da bir şey gelmiyor.

A: Düşünebilirsin süre sınırimız yok.

E: $\sin(\alpha + \beta)$ 'dan gelir bence. Kesin gelir ama hatırlamıyorum.

Eylül'ün $\sin(\alpha + \beta)$ ya da $\cos(\alpha + \beta)$ trigonometrik ifadelerini kullanarak kanıtı yapılandırabileceğine dair kuvvetli bir sezgisi olduğu görülmüştür. Bu ifadelerinden nasıl emin olduğu sorulduğunda ise, bu trigonometrik açılımların var olduğunu; kendisinin de bu açılımları doğru matematiksel işlemler yaparak, sonuca ulaşabileceğini belirtmiştir. Bu açıklamalara ait ifadeleri aşağıda sunulmuştur:

A: Nasıl eminsin?

E: Çünkü bu doğru, doğruluğuna eminim bunun. Kullanıyoruz zaten bunu. Bu kanıtlanmış bir şey. Ama şu an nasıl kanıtlayacağım? Benim aklıma gelmiyor. Buradan matematiksel işlemleri yaparak gelir. Buraya a/b, b/c falan yazacağız. E doğru olan bir şey illaki çıkar, gerekli işlemleri yaparsan. Yollar değişir ama bu

doğru kesin çıkar. Onu sağlamak için tüm formüller önümde olsaydı yapabilirdim. Şu an formülleri hatırlamadığım için ilerleyemiyorum. Mesela $(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = 1$ böyle bir şey vardı ama emin değilim. Bundan emin olsam geleceğini düşünüyorum. Evet, bak gelecek (oranları yazar). Eğer bu teoremi doğru hatırlıyorsam kanıtladım.

Eylül'ün cevabına bakıldığında tutarlı basamaklar oluşturarak kendisini doğru cevaba ulaştıracak yöntemleri tespit ettiği dolayısıyla analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait izler taşıdığı fakat yazmış olduğu $(\sin \alpha)^2 + (\sin \beta)^2 = 1$ formülünden emin olamadığı görülmüştür. Eylül'ün “gerekli işlemleri yaparsan illaki çıkar, emin olsam gelecek” gibi ifadelerinden kanıtlamasında sezgileriyle hareket ettiği söylenebilir. Buradan Eylül'ün deneysel temel örnekler kanıt şeması ile kanıtla başladığı ardından kanıtının kurgusunda analitik dönüşümsel kanıt şeması izlerinin olduğu fakat ağırlıklı olarak deneysel algısal kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Eylül, çalışma kâğıdının yedinci sorusunda (“A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \emptyset$ ise $A = \emptyset$ dir.” önermesini kanıtlayınız.) analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait izler taşısa da ağırlıklı olarak deneysel algısal kanıt şemasına ait ifadelerde bulunmuştur. Eylül bu soruda, üçüncü soru için belirttiği açıklamalarla benzer ifadelerde bulunmuş; yaptıklarının kanıt olmayacağını belirtmiştir. Ardından kendisini sorunun doğruluğuna ulaştıracak tutarlı basamakları oluşturduğu görülmüştür. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

A: Bu önermeyi nasıl kanıtlarsın? (SF)

E: Yapacağım ama bence yine ispat olmayacak. Boş küme kapsıyorsa A'yı, A boş kümedir. Yani eğer boş küme A'yı kapsıyorsa boş kümenin eleman sayısı yani boş kümedeki eleman sayısı daha fazladır. Şimdi şöyle bir teorem olduğunu hatırlıyorum. Eğer bir küme bir kümenin alt kümesi ise bunun eleman sayısı daha fazladır. Ya da hatta eşittir. Şimdi hatırladım bunu. O halde boş kümenin eleman sayısının A'nın eleman sayısından daha fazla olması gerekiyor. Ama boş kümenin tanımı neydi? Eleman sayısı boş kümenin 0 idi. O zaman boş kümenin eleman sayısı 0 ise sıfırdan büyük ya da eşit A'nın eleman sayısı olmalı. Bu ne zaman mümkün olabilir? A kümesinin eleman sayısı, negatiflik söz konusu olmadığına göre sıfıra eşit olduğunda mümkün olabilir. A'nın eleman sayısı 0 ise boş kümedir. O zaman A'nın elemanı 0 ise A kümesi eşittir boş kümedir diyebilirim.

Eylül'ün soruya ait cevabına aşağıda Şekil 4.2'de yer verilmiştir:

$$\begin{array}{l}
 A \subset \emptyset \Rightarrow A = \emptyset \\
 s(\emptyset) \gg s(A) \\
 \emptyset \Rightarrow s(\emptyset) = 0 \\
 0 \gg s(A) \\
 s(A) = 0 \Rightarrow A = \emptyset
 \end{array}
 \quad
 \boxed{
 \begin{array}{l}
 B \supset A \\
 s(B) \gg s(A)
 \end{array}
 }$$

Şekil 4.2 Eylül'ün çalışma kâğıdının yedinci sorusuna ait cevabı.

Eylül'ün Şekil 4.2'deki cevabına bakıldığında kendisini doğru sonuca ulaştıracak tutarlı basamakları oluşturduğu görülmüştür. Buradan Eylül'ün mantıksal çıkarımlarda bulunduğu, akıl yürütme yaparak kanıtını doğru yapılandırdığı söylenebilir. Fakat kanıtlamasını her durumda kullanıp kullanmayacağı sorulduğunda yaptıklarından emin olmadığı, ilk seçmiş olduğu kapsama durumuyla ilgili olan teoremin varlığını sorguladığı görülmüştür. Bu açıklamalara ait araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

A: Her durumda kullanır mısın? (SF)

E: Bilmiyorum şu an ilk aklıma gelen bu oldu. **Bundan da emin olmadığım için hayır her durumda kullanmam.**

A: Doğruluğundan emin misin? (SF)

E: Şundan emin değilim. Acaba böyle bir teorem var mı? Şu an bakmak istedim. Öyle bir teorem olduğunu anımsıyorum ama emin değilim, mesela B kapsıyorsa A'yı o zaman B'nin eleman sayısı büyük eşittir A'dan. **Eğer bu doğruysa, ispatım doğrudur. Öyle bir şey varsa.**

Eylül'ün ifadeleri incelendiğinde teorem olarak seçtiği ifadesinden emin olmadığı için kanıtını yapılandırmasında sezgileriyle hareket ettiği söylenebilir. Bunun yanı sıra Şekil 4.2'deki cevabına bakıldığında, analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine ait izler görülmüş olsa da ağırlıklı olarak deneysel algısal kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

4.2.2 Öğretmenlerin Deneysel Temel Örnekler Kanıt Şemasına Ait Cevapları

Öğretmenler çalışma kâğıdının birinci, ikinci, üçüncü, beşinci ve altıncı sorularında deneysel temel örnekler kanıt şemasına ait ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler “önermenin doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma” şeklinde sınıflandırılan bu kanıt şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin belirtilen göstergeye ait cevapları aşağıda sunulmuştur.

Rana, çalışma kâğıdının birinci sorusuna (“İkizkenar üçgenin taban açıları eşittir.” önermesini kanıtlayınız.) ait ifadelerinde sözel açıklamalarda bulunduğu görülmüştür. Açıklamalarını göstermesi istendiğinde araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

A: Önermeyi nasıl kanıtlarsın? (SF)

Rana (R): İkizkenar üçgenin taban açıları eşittir. Yani bu kenarların uzunluklarından aklıma geldi. Kenar uzunlukları eşit ise eş kenarların karşısında eş açılar bulunur. O yüzden açıları eşittir, ikizkenar üçgenin taban açıları. Olur mu?

A: İlk aklına gelen neden bu oldu? (SF)

R: Yani kenarlar eşit olduğu için. Kenarlar eşit olursa açıların eşitliğini getirir. O yüzden.

A: Peki, nasıl gösterirsin bunu? (SF)

R: Normal çizerim.

A: Evet çizebilirsin.

R: Yani eşit uzunlukta 2 tane kenar alırım. Ama işte uzunluk açığa karşılık bu nasıl yapacağız? Şimdi neden taban açıları eşit? Başka bir şey gelmedi hakkında olmazsa geçelim.

A: Hiç problem değil. İstediyin sorudan devam edebiliriz. İstediyin kadar da düşünebilirsin. Herhangi bir süre sınırimız yok.

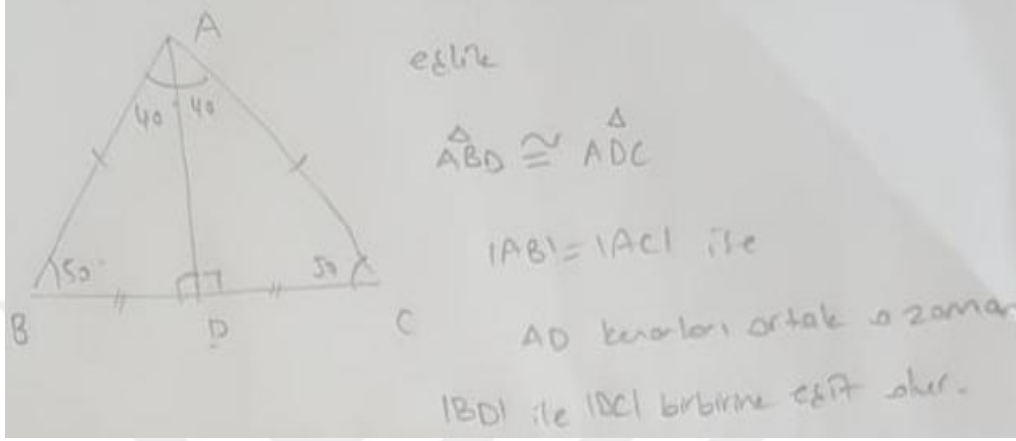
R: İçeride bir dik üçgen oluştursak, mesela dik üçgen oluşturduğum zaman zaten 60°'lik bir tane temsili üçgen alırım. Ama açıların eşit olduğunu biliyor muyum daha önceden? Otomatik 60°'lik bir üçgenin içine dik çizsem, tabanı iki eş parçaya bölünecek. İşte oradan da gidemeyiz değil mi? Eşkenar üçgen aldım. Orada da olmuyor. 60°'lik üçgen oluyor. Yani eşkenar üçgen olmuş oluyor. Bir şey olmuyor. Buradan olmaz. Neyse ikiye bakalım.

Yukarıdaki ifadelerinden Rana'nın açıklamalarını gösterme konusunda problem yaşadığı anlaşılmıştır. Bu noktada araştırmacı süre ile ilgili bir sınırlaması olmadığını belirtmiş, diğer sorular cevaplandıktan sonra bu soruya tekrar dönülmüştür. Soru için tekrar dönüldüğünde Rana bir kâğıt yardımıyla önermenin doğruluğunu göstermeye çalışmıştır. İlgili ifadelerine ait açıklamaları aşağıda verilmiştir:

R: Sonradan aklıma şu geldi. Kâğıtla gösterebilirim diye geldi. Yine A4 kâğıdını alırım bir kare oluştururum. Karenin içinde iki tane ikizkenar üçgen var. İkizkenar üçgeni oluşturduğumda da ben kareyi ortadan ikiye bölmüştüm. Burası 90°, 45°, 45° bölünür. Yani bu oluşan üçgenlerin açıları 45°. Tepedeki açı da 90° olmuş olacak. Demek ki taban açıları birbirine eşittir.

Rana'nın son ifadeleri göz önüne alındığında 45°- 45°- 90° üçgeni üzerinden önermenin doğruluğunu göstermeye çalıştığı anlaşılmıştır. Ayrıca bir örnek ile kanıtını yapılandığı ve kendisini de araştırmacıyı da ikna etmek için yaptığını yeterli gördüğü söylenebilir. Buradan Rana'nın deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Rana, çalışma kâğıdının ikinci sorusunda (“İkizkenar bir üçgende tabana indirilen dikme tabanı iki eş parçaya böler.” önermesini kanıtlayınız.) çizdiği ikizkenar üçgenin tepe noktasından indirilen dikme ile oluşan üçgenlerin açılarını belirlemiştir. Burada oluşan üçgenler yardımıyla tabandaki açılardan eşliğini göstermeye çalışmıştır. Rana’nın bu ifadelere ait cevabına aşağıda Şekil 4.3’teki yer verilmiştir:



Şekil 4.3 Rana'nın çalışma kâğıdının ikinci sorusuna ait cevabı.

Rana’nın eşlik benzerlik ile yapılandığı Şekil 4.3’teki cevabına ait açıklamaları aşağıda verilmiştir:

A: Bu önermenin doğruluğunu nasıl kanıtlarsın? (SF)

R: Zaten şey benzerlikten yapabiliriz. İkizkenarsa tabana indirdiğim dikme zaten şu, 90° . Şu açılar da diyelim ki 50° olsun. Zaten yukarıdaki açılar da $50^\circ-50^\circ$, 100° . Geriye 80° kalıyor. 40° , 40° ayırarak. Ama bunuda mı ispatlamamız gerekiyor? Açının iki eş parçaya bölündüğünü. İndirdiğimizde iki tane benzer üçgen çıkıyor. İndirdiğim dik, tepe noktasından dik indirdiğimde benzer üçgen çıkmış oluyor. Hatta eşi bile olabilir. Çünkü ikizkenarsa indirdiğim dikmede ortak. İkizkenarlar ortak, o zaman diğer kalan kenarlarda birbirinin aynısı olur. Demek ki tabanı iki eş parçaya ayırmış oluyor.

Rana, bir örnek ile soruya ait kanıtlamasını göstermiştir. Bunun yeterli olup olmadığı sorulduğunda araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

A: Senin için yeterli bir kanıt mı? (SF)

R: Yeterli bence. Yani bir tane temsili üçgen aldım. Ama yani bir tane temsili üçgen aldım. Ama ondan sonra aldıktan sonra birbirine eş olduğunu gösteriyor.

A: İlk aklına gelen yöntemin bu olma sebebi nedir? (SF)

R: Eşlikten aklıma geldi.

A: Neden acaba? (SF)

R: Başka türlü nasıl olabilir? Dikme indir. İndireceğim iki eş parçaya ayrılacaktır. Niye? Çünkü birbirinin benzeri yani, başka bir şey gelmiyor aklıma. Hatta orada indirdiğim dikme, eş olur bunlar. Çünkü iki eşit kenarları ortak, geriye kalan kenarlar da mutlaka eşit olmalı.

A: *Bu yaptığın doğrulamandan nasıl emin olursun? (SF)*

R: *Şu an aklıma geldi. Üçgeni katlarsam B'yi, C'nin üzerine getirirsem zaten kenarlar da eşit. B ile C tam üst üste geliyorsa, tabandaki iki kenar da eş olur.*

A: *Nasıl gösterirsin bunu bana? (SF)*

R: *Çizip mi, katlayarak mı?*

A: *Nasıl istersen? Beni nasıl ikna edersin bu söylediğine? (SF)*

R: *Normal üçgen alırım. Hani hiç kenar uzunlukları eşit olmadan zaten şuradaki tepe noktasından indirdiğim o dikme, katlayarak gösterebiliyorum. Nasıl gösteririm? Üçgen oluşturmam lazım. Mesela şöyle bir üçgen alsam [A4 kâğıt alıyor, kare oluşturuyor ve ortadan ikiye bölüp ikizkenar üçgeni gösteriyor]*

Şu kenarlar eşit aslında. Zaten dikme dediğim şey, tepe noktasından karşıdaki kenara indirdiğim düz bir çizgi. Onu da çizmek için alttaki iki köşeyi birleştiririm. Böyle birleştirdiğim zaman çizerim yüksekliği. Zaten ikizkenar, bu kenar da ortak; tam orta noktasına indiğim için bu kenarlar da eşit olur. Yani böyle ispatlarım. Aslında böyle daha inanmış olur karşıdaki.

A: *Her zaman kullandığın bir yöntem mi? (SF)*

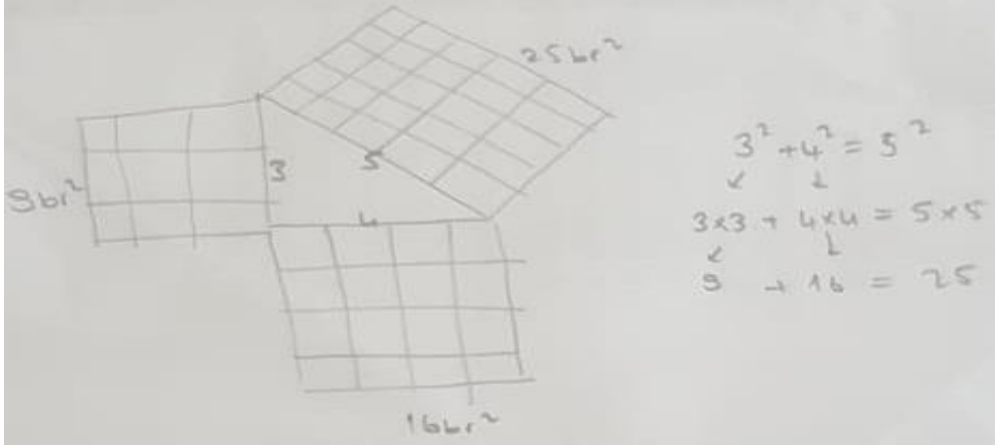
R: *Evet derste de kullanıyorum.*

A: *Peki ilk benzerliği kullanmıştın bunu kullanma sebebin neydi?*

R: *Belki de buradan kaynaklı bir bilgi birikimimi bilmiyorum. Sürekli öyle anlatıyoruz ya. Aslında benzer değil de, eş olmuş oluyor. Çünkü benzerlikte oran vardı, eşte yok. Ötelemiş. Aslında döndürülmüş gibi, oradan yararlınsak daha iyi; daha doğru olmuş olacak.*

Yukarıdaki ifadeler göz önüne alındığında Rana'nın yaptıklarını kanıt için yeterli bulduğu ve araştırmacıyı, kanıtına ikna etmek için A4 kâğıdı katlayarak; yine temsili bir üçgen (45° - 45° - 90°) aldığı görülmüştür. Dolayısıyla Rana'nın soruyu anlamlandırmak ve karşısındaki kişiyi ikna etmek için belirlediği örneklerden yararlanmayı kolay bulduğu söylenebilir. Buradan Rana'nın deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Rana çalışma kâğıdının üçüncü sorusuna (“Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir.” önermesini kanıtlayınız) başladığında deneysel temel örnekler kanıt şemasına ait özellikler sergilemiştir. Bunun yanı sıra yaptıklarının “*ezber olduğunu*” ifade ettiği için dışsal alışkanlık kanıt şemasına ait izler taşıdığı düşünülmüştür. Rana, bu soruya ait cevaplarında öncelikle kenar uzunlukları 3-4-5 br olan üç tane kareyi köşelerinden birleştirmiş; bu karelerin arasında en bilindik 3-4-5 üçgenini oluşturduğunu ifade etmiştir. Ayrıca dik kenarlara ait karelerin alanları toplamının; hipotenüs kenarında oluşturduğu karenin alanına eşit olduğunu göstermiştir. Rana'nın bu ifadelerine ait cevabı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4.4 Rana'nın çalışma kâğıdının altıncı sorusuna ait cevabı.

Yukarıda Şekil 4.4'te verilen cevap incelendiğinde Rana'nın bir örnek olarak kanıtını yapılandığı görülmüştür. Rana'dan cevabını anlatması istendiğinde ise aşağıdaki açıklamalarda bulunmuştur:

R: Bu zaten bildiğimiz bir şey. Burada 3 farklı kare alıyorum. En bilindik zaten, 3-4-5 üçgeni olduğu için. Hatta üçgeni çizeyim. 3 birimlik kare aldım. Bunu birer birimlik karelere böldüm. O zaman alanı 9 br^2 olmuş oldu. Daha sonra 4 birim, 1 birimlik olacak şekilde 4 parçaya ayırdım. Bunun alanı da 16 br^2 oldu. En son da zaten şey 5 olan, 5 birimlik bir kare alıyorum. 25 br^2 . Sonra bu üç tane kareye birleştirdiğimizde, birer noktalarını birleştirdiğimizde üçgen oluşturur. 3-4-5

A: Aklına ilk bu yöntemin gelme sebebi nedir? (SF)

R: 16 ile 9'u topladığımızda 25 oluyor. Biraz aslında ezber gibi olmuş oldu da.

A: Her zaman bu yöntemi kullanır mısın? (SF)

R: Yani bunu gösteriyorum ama mantığı da şu an söyleyeceğim de.

A: Nasıl gösteriyorsun?

R: Yani üçgen her zaman şöyle kullanamayabilirim. Çünkü kenar uzunlukları mesela rasyonel olduğu zaman böyle gösteriyoruz. Ama irrasyonel olduğu zaman gösteremiyoruz. Yani ona uygun bir kare çizemem. Aslında kareleyerek alan hesabına gidiyorum. Yani burada bütün kareyi mesela 9, yani bir kenarı; kareyi, 9 eş parçaya bölebilirim. $4^2 = 16$. Onu da bölebiliyorum ama mesela $4\sqrt{2}$, onu bölemezim. İrrasyonel olduğunda kullanamıyorum.

A: O zaman doğruluğundan nasıl emin olursun? (SF)

R: Demek ki nasıl emin olurum. Rasyonellerde kullanamıyorum. Ama o zaman genelleme yapmış oluyorum. Yani diyelim ki, 3 değil de; kenar uzunluğu $3\sqrt{2}$ olsa, bunun karesini aldığında diğer kenar da $4\sqrt{3}$ olsun. Bunların karelerini aldığında, bunların toplamı diğer kenarın karesine eşit oluyorsa demek ki diyorum uygulayacağım rasyonellerden; irrasyonellere de sağlıyor diye düşünüyorum. Yani rasyonellerde bulduğum yöntemi, irrasyonel sayılar ile deneyebildim. Eğer doğru oluyorsa demek ki hepsinde kullanabilirim.

İlgili ifadeler incelendiğinde Rana'nın bir örnek olarak doğrulamasının, önermeyi genellemek için yeterli gördüğü belirlenmiştir. Ayrıca Rana yaptıklarının geçerli bir kanıt olduğunu ifade

ederek, 3-4-5 üçgeni dışında bir örnek daha almış önermenin sağladığını göstermiştir. Bu ifadelerle ait açıklamaları aşağıda sunulmuştur:

A: Senin için yeterli bir ispat mı? (SF)

R: Evet çünkü dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşit diyor. Ben kenarlardan kareler oluşturdum 3 cm'lik. Karesi 3^2 yani 3^2 demek zaten Bunun alanı demek. Burada birim kareleri ayırdım. 9 br² çıktı. Buradaki küçük kareleri topladığımızda 25 oldu. Yani büyük karenin alanı küçük karenin alanları toplamı da öyle de ispatlamış oldum.

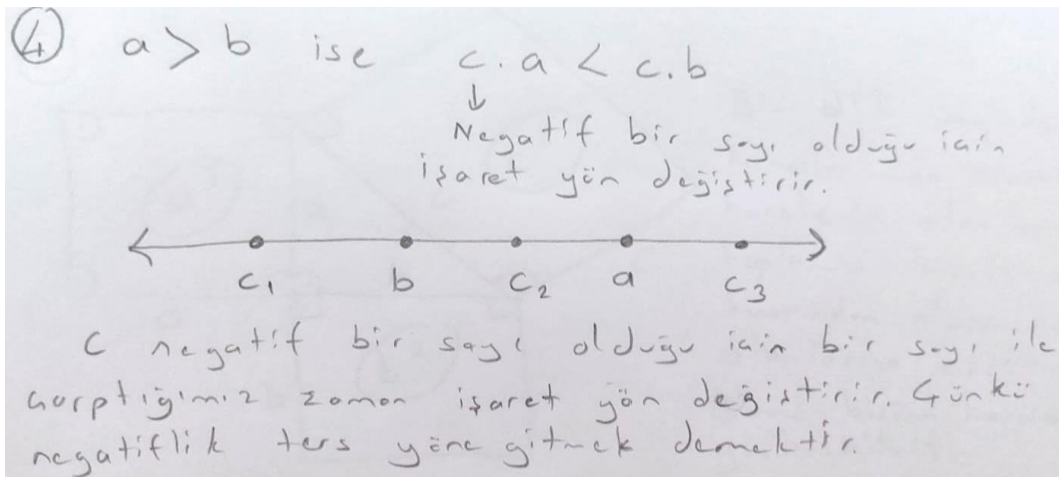
A: Bunu kullanma sebebin var mı? [cevap yok]

A: Farklı sorular da kullanabilir misin?

R: Bakalım 3-4-5 değil, başka olsa. 6 alsam, 5 alsam. Kareler toplamı 61, yani $\sqrt{61}$.

Rana yaptıklarını ezber olarak nitelendirmiş olmasına rağmen kendisini de araştırmacıyı da ikna etmek için iki örnek üzerinden kanıtını tamamlamıştır. Ayrıca Rana'nın belirlediği iki örnek ile kanıtı anlamlandırmayı kolay bulduğu söylenebilir. Buradan Şekil 4.4'teki cevabı ve tüm ifadeleri göz önüne alındığında Rana'nın dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerine ait izler taşıdığı ancak ağırlıklı olarak deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Fulya, çalışma kâğıdının altıncı sorusuna ("a, b ∈ IR ve c ∈ IR⁻ olmak üzere, eğer a > b ise c.a < c.b dir." önermesini kanıtlayınız.) ait cevaplarında kanıtını yapılandırırken öncelikle; sayıların negatif bir sayı ile çarpıldığında işaretlerinin değişeceğini belirtmiştir. Fulya'nın bu ifadelerine ait cevabına Şekil 4.5'te yer verilmiştir:



Şekil 4.5 Fatma'nın çalışma kâğıdının altıncı sorusuna ait cevabı.

Ardından a, b ve c için belirli sayı değerleri seçerek önermenin doğruluğunu göstermiştir. Fulya'ya bu yöntemini her zaman kullanıp kullanmayacağı sorulduğunda ise her zaman kullandığını belirtmiştir. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

Fulya (F): Kullanırım. Biz zaten kullanıyoruz. 8. sınıflara gidiyorum yine, 8. sınıflarda eşitsizlik konusunda bunu çok fazla kullanıyoruz. Biz çocuklara da direkt onu söylüyoruz. İstikamet derken de şunu ifade ediyorum. Örneğin (+2)'yi, (-1) ile çarpsam ne olur? (-2) olur. Çünkü negatiflik demek ters yön demek olacağı için orada artılar eksi, eksiler artı olacak. O yüzden işaretimiz yön değiştirir. Şundan emin değilim. c'yi nereye koyacağımı da kestiremedim. Çünkü b de burada negatif olabilir. c için 2 farklı seçenek var aslında.

A: Peki o durumda ne yapacağız?

F: Hatta 3 farklı seçenek var c için.

A: Nedir bu seçenekler?

F: c için a'dan da büyük olabilir. a ve b negatif sayılardır. İkisi de negatif sayı olabilir. c için 3 farklı seçenek var burada kullanabileceğim. Ama yani durumların hiçbirinde değişmiyor, aynı yola çıkıyoruz.

A: Nasıl emin oluyorsun peki? (SF)

F: Şöyle emin oluyorum. Şimdi, a sayısını düşünelim. a sayısı pozitif bir sayı olsun. Örneğin; 3 olsun. Negatif bir sayı ile çarptığında a her zaman ne olacak negatif olacak. Örneğin (-1) ile çarpıyorum (-3) olur. b, a'dan küçük olacağı için 3'ten küçük bir değer vermem gerekiyor. Negatif bir değer olsun, (-4) olsun. c ile çarptığında c'ye (-1) demiştim. Bu durumda b sayım (-1) ile (-4)'ü çarparsak (+4) olur. $a > b$ 'den; $c \cdot b > c \cdot a$ 'dan oldu. Baktığımız zaman (-3), (+4) olacağı için büyük oldu. Yani birinci ispatım doğrulandı.

A: Tüm durumlar için dener misin?

F: Tabii ki.

Fulya'nın ifadeleri ve Şekil 4.5'te verilen cevabı incelendiğinde bilinmeyen ifadeler yerine belirlediği değerleri yazarak bulduğu sonuçların, önermenin doğruluğunu göstermesinde yeterli gördüğü söylenebilir. Ayrıca Fulya'nın önermeyi kontrol etmek veya anlamlandırmak için örneklerden yararlandığı belirlenmiştir. Buradan Fulya'nın deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Rana çalışma kâğıdının altıncı sorusuna (" $a, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere, eğer $a > b$ ise $c \cdot a < c \cdot b$ dir." önermesini kanıtlayınız.) ait cevaplarında öncelikle a ve b'nin pozitif olması durumunu göz önüne alarak a'yı 4, b'yi 3 ve c'nin negatifliğini düşünerek (-1) sayı değerlerini seçmiştir. Belirlediği sayı değerleri üzerinden verilen önermenin sağladığını göstermiştir. Ardından soruda verilen eşitsizliği sağlamayan bir durum bulmasının yeterli olabileceğini ifade etmiştir. Bu açıklamalara ait ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

A: Önermeyi kanıtlar mısın? (SF)

R: a ve b reel. O zaman her şeyi alabiliriz. Önce tam sayı alalım. a, b'den büyükse, a mesela 4 desek. Bir pozitifler için denesek mesela. $b=3$ desek. $c < 0$ olacağı için (-1) diyelim. 4,3 den büyükse; (-1) ile çarpınca bu (-4) oluyor. Diğeri de (-3) oluyor. Yani (-4), (-3)'ten küçük oldu. Bunu sağladı. a ile b'yi pozitif seçtim. Ama burada aslında olmayan bir şey bulursam, yani sayılar mesela rasyonellerde oluyor mu acaba?

Rana, önermenin doğruluğunu sağlamayan bir ifade bulmasının yeterli olacağını belirtmiş olmasına rağmen farklı sayı kümelerinden belirli değerler seçtiğinde nasıl bir durum olacağını tespit etmek için önce rasyonel sayılar sonra negatif tam sayılar ardından da kareköklü sayılar için önermenin sağlayıp sağlamadığını kontrol etmiştir. Bu açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir:

R: Başka ne sayılar var bir sürü sayı var. Bulabileceğim ne var mesela? c ile çarptığında değişmeyecek. a ile b pozitif olacak değil mi?

A: Pozitif diye bir ayırım yok, reel sayı sadece. c için ayırım geçerli, negatif.

R: O zaman onları da negatif alayım. O zaman belki farklı olabilir. Negatif tamsayı alsam, a'yı (-3); b'yi (-4) alayım. Çünkü a, b'den büyüktü. (-1) ile çarpınca $3 < 4$ oldu. Yine doğru oldu. Evet, bu da oldu. Rasyonel alsak a'ya $\frac{1}{2}$ diyelim. b'ye de $\frac{1}{3}$ diyelim. c'yi de $(-\frac{1}{2})$ alsak. Ya da yine (-1) alayım. Ama yine doğru olur o zaten. $(-\frac{1}{2})$ alsam c'yi. $(-\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{6})$ bu da doğru oluyor. Yani kareköklülere de bakmamız gerekiyor mu?

A: Denemeli miyiz karekök için?

R: Yani, onu da sağlar ya herhalde. $\sqrt{16}$, $3\sqrt{2}$. Bence bu da doğru

A: Sence doğru?

R: Evet. Gerçi ispatlamamız gerekiyor da. Bir dakika $\sqrt{16}$ alsam, $\sqrt{9}$ alsam. Bunu da (-1) alsam. Çarpınca (-4) , (-3) 'ten küçük. Bu da doğru oluyor.

A: Yani kareköklü için bir örnek sağladığında hepsi için sağladığını gösterir mi?

R: O da var. Sağlar ya. Yani $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ alsak 18'e, 32 yine sağlar.

A: O zaman sen bu soru için 4 farklı durum mu değerlendirdin?

R: Evet reel sayı dediği için. Doğal sayı olarak alsak, pozitif tam sayılar, rasyonel sayılar için de denedim. Köklü sayılar için de denedim. Onların hepsi için doğru oldu önerme. Demek ki doğrudur diyorum.

A: İkisini pozitif tam sayı seçtin, negatif tamsayı seçtin, rasyonel sayı seçtin ve kareköklü sayı seçtin.

R: Evet.

A: Peki, bu dördünün sağlaması senin için yeterli mi? Emin misin doğruluğundan? (SF)

R: Evet şu an aksini bulamıyorum. Belki gözümünden kaçan bir şey olabilir. Ama şu an yaptığım bütün değerlerde hepsi sağladı bu önermenin doğruluğunu.

Bu açıklamalara ait cevabına aşağıda Şekil 4.6'da yer verilmiştir:

(4) $a, b \in \mathbb{R}$
 $c \in \mathbb{R}$

Positif Tam Sayı
 $a=4$
 $b=3$
 $4 > 3$

Negatif
 $c=-1$
 $-4 < -3$ ✓

Negatif Tam Sayı
 $a=-3$
 $b=-4$
 $-3 > -4$ $3 < 4$ ✓

Rasyonel Sayı
 $a=\frac{1}{2}$ $b=\frac{1}{3}$ $c=-\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$
 $\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{6}$ $-\frac{1}{4} > -\frac{1}{6}$
 $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ $-\frac{1}{4} > -\frac{1}{6}$ $-\frac{3}{12} > -\frac{2}{12}$ ✓

Karekök
 $a=\sqrt{16}$ $c=-\sqrt{1}$
 $b=\sqrt{9}$
 $\sqrt{16} > \sqrt{9}$ $-\sqrt{16} < -\sqrt{9}$
 $-4 < -3$

Şekil 4.6 Rana'nın çalışma kâğıdının altıncı sorusuna ait cevabı.

Rana'ya uyguladığı ilk yöntemin bu olma sebebi sorulduğunda, önermeyi kanıtlayabilmek için belirlediği sayıları önermede denemesi gerektiğini belirtmiştir. Bu ifadeye ait açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir:

A: Aklına ilk bunun gelme sebebi nedir?(SF)

R: Bir sürü küme var. Her biri için doğru mu acaba, sağlıyor mu diye denedim. Yani denemeden ya da değer vermeden şu an bir şey diyemiyorum ispatlayamıyorum zaten. **İkna etmek için denerim kendimi de ikna etmek için öyle yaparım.**

Rana'nın ifadeleri ve Şekil 4.6'daki çözümü incelendiğinde, bu soru için dört farklı durumun önermenin doğruluğunu sağlamasının; soruyu kanıtlaması için yeterli gördüğü anlaşılmıştır. Ayrıca kendisini de ikna etmek için bu yöntemi kullanmasının, kendi bilgilerini anlamlandırmak ve kontrol etmek açısından önemli gördüğü ifade edilebilir. Buradan Rana'nın deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

4.3 GÖREV TEMELLİ GÖRÜŞMELERDE ÖĞRETMENLERİN ANALİTİK KANIT ŞEMALARINA AİT CEVAPLARI

Bu bölümde öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde analitik kanıt şemalarına ait cevapları incelenmiştir. Öğretmenlerin görev temelli görüşmelerde analitik kanıt şemalarının alt kategorileri olan dönüşümsel kanıt şemasına ve aksiyomatik kanıt şemasına ait özellikleri sergiledikleri görülmüştür. Öğretmenlerin analitik kanıt şemalarının göstergelerine ait dağılımları aşağıda Çizelge 4.2'de sunulmuştur:

Çizelge 4.2 Öğretmenlerin analitik kanıt şemaları göstergelerine ait dağılımları.

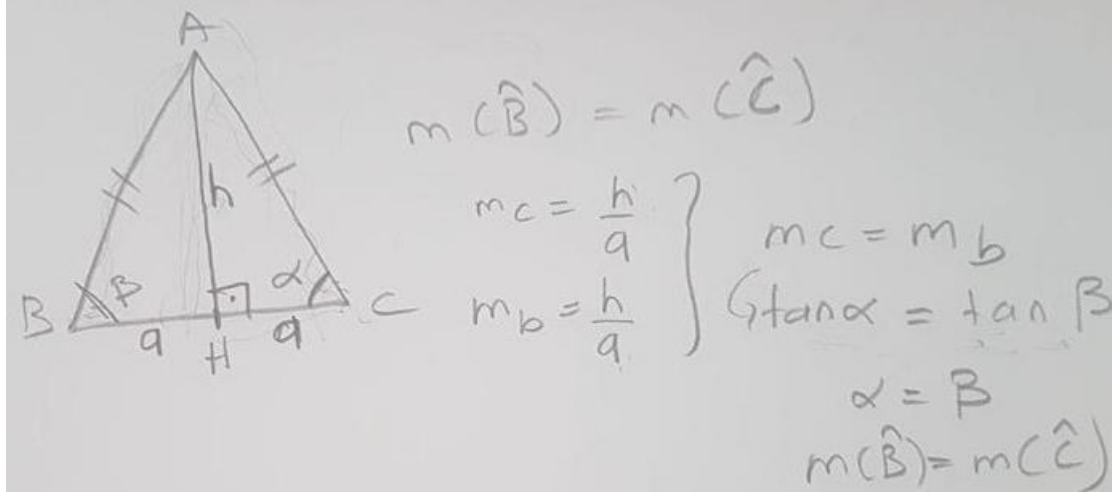
Kanıt Şeması	Kanıt Şemasının Alt Kategorileri	Kanıt Şemasının Göstergeleri	Öğretmen	Soru No
Analitik Kanıt Şeması	Dönüşümsel Kanıt Şeması	Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar oluşturma	Eylül	1, 2, 3*, 4, 5, 7*, 8
			Fulya	1, 2, 4, 5, 8, 9
			Selin	1, 2, 4, 5, 9
	Aksiyomatik Kanıt Şeması	Tanımları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanma	Rana	7
			Fulya	7
			Selin	7, 8

* bu kanıt şeması özelliklerini tam olarak sergilemese de bu kanıt şemasına ait bazı düşüncelere sahip olması

4.3.1 Öğretmenlerin Analitik Dönüşümsel Kanıt Şemasına Ait Cevapları

Öğretmenler çalışma kâğıdının birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci, yedinci, sekizinci ve dokuzuncu sorularında analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler “*ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar oluşturma*” şeklinde sınıflandırılan bu kanıt şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bununla beraber çalışma kâğıdının bazı sorularında, bir öğretmenin cevaplarının analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait özellikler taşıdığı görülmüş olmasına rağmen cevaplarına ait savunmasında dışsal alışkanlık kanıt şeması özelliklerine ait izler taşıdığı belirlenmiştir. Öğretmenlerin belirtilen göstergeye ait cevapları aşağıda sunulmuştur.

Öğretmenlerden Eylül’ün çalışma kâğıdının birinci sorusunda analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait özellikler sergilediği görülmüştür. Eylül, doğrulamasına ikizkenar bir üçgen çizerek başlamış ardından B ve C açılarının eğimlerini hesaplamıştır. Eğimlerin aynı çıkmasının ancak belirtilen açılar aynı olmasıyla mümkün olduğunu ifade etmiştir. Eylül’ün ifadelerine ait çözümüne aşağıda yer verilmiştir.



Şekil 4.7 Eylül'ün çalışma kâğıdının birinci sorusuna ait cevabı.

Eylül'ün Şekil 4.7'de verilen cevabına ait açıklamaları aşağıda verilmiştir.

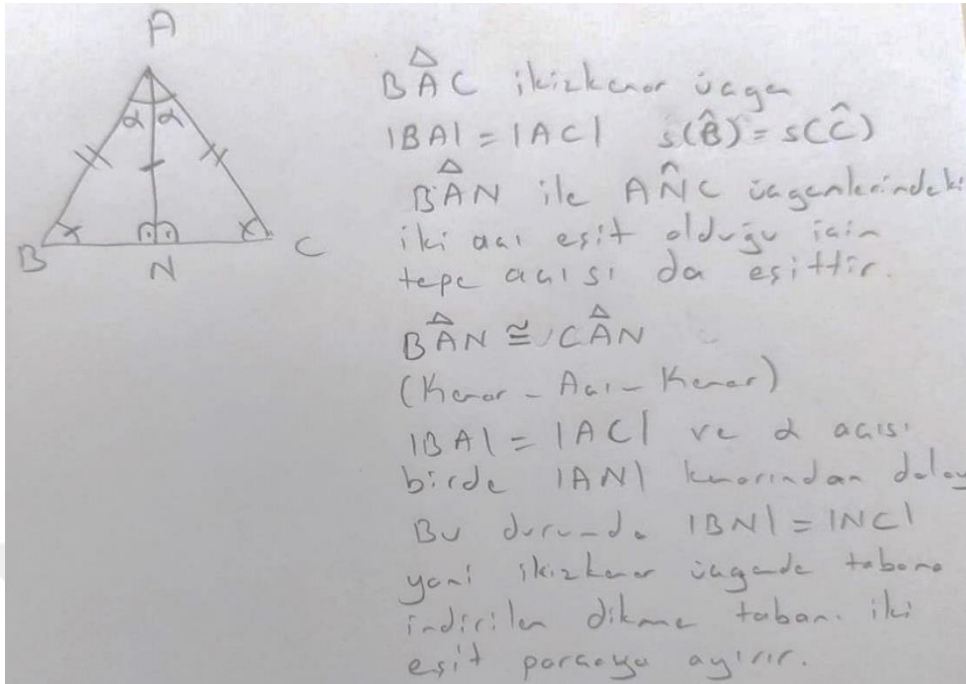
E: ABC üçgeni çizerim ve B açısının C açısına eşit olduğunu göstermemi istiyor bunda. Ben ne yapabilirim hatırlayamıyorum. Sanki trigonometrik fonksiyonlar ile olabilir gibi geldi ama şuradan diklik çizsem. Buna h diyelim. Az önceki sorudan indirilen dikme kenarları eşit iki parçaya ayırıyordu. Açıların eşitliğini bilmiyorum. $BH=a$ dersem, HC de a olur. Bence sanki şu an olacak gibi. O halde C açısının eğimine bakayım h/a , B açısının eğimi h/a birbirine eşit. O halde $m_c=m_b$ dir. Eğimlerin eşitliği $\tan \alpha = \tan \beta$ dir. O halde $C=B$ dir. Burada tanjantların eşitliği şu şüpheyi getirdi tanjantı 90 ya da 180 e tamamlayan açılar eşitti. Ama bunu da şöyle sağlarım bu bir üçgen olduğu için B ve C açıları dar açı olması gerekiyor o yüzden $\alpha=\beta$ diyebiliriz.

Yukarıdaki ifadeleri ve Şekil 4.7'deki cevabı incelendiğinde Eylül'ün yöneltilen sorudaki ana meseleyi belirlediği ve buna uygun adımlarla kanıtlamasını gerçekleştirdiği görülmüştür. Buradan Eylül'ün analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Fulya, çalışma kâğıdının birinci sorusuna (“İkizkenar üçgenin taban açıları eşittir.” önermesini kanıtlayınız.) ait doğrulamasında öncelikle bir üçgen çizmiş, üçgenin tepe noktasından karşısındaki kenara bir dikme indirmiş ve oluşan iki üçgenin eş üçgenler olduğunu belirtmiştir. Ardından eşlik kavramından yola çıkarak önermenin doğruluğunu göstermiştir. Bu açıklamalara ait ifadeler aşağıda sunulmuştur:

İkizkenar üçgen demek, taban açıları birbirine eşit olan üçgen demektir. Dikme olduğu için 90 olacak. İki açı eşitse, üçüncü açı da eşit olmak zorundadır. Yani tepe açılarını iki eş parçaya ayırmak zorunda. Bu durumda biz burada iki tane eş üçgen elde ettik. İki eş üçgen oldukları için aynı açının karşısındaki kenarlarda birbirine eşittir. O yüzden tepe açısının gördüğü tabandaki iki kenar birbirine eşit olmak zorunda derim.

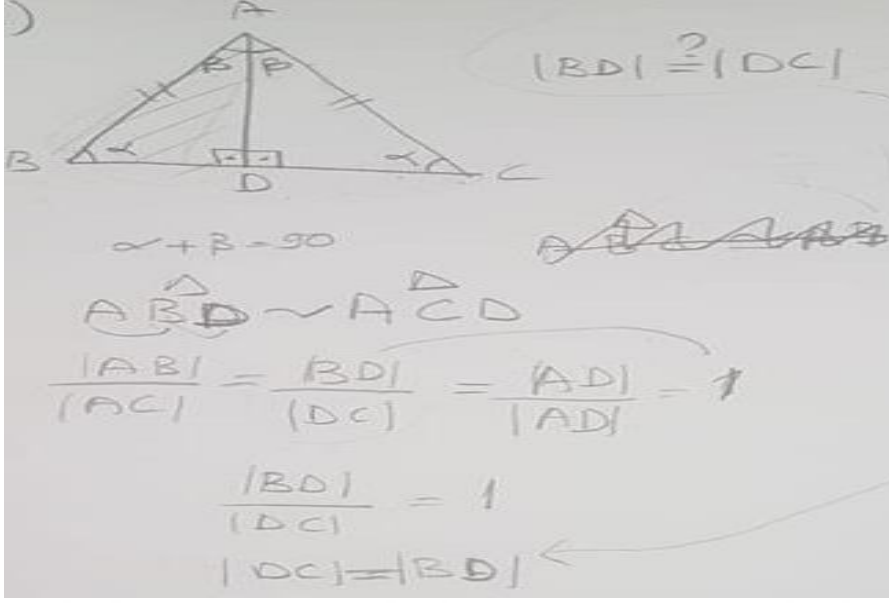
Fulya'nın soruya ait cevabına Şekil 4.8'deki yer verilmiştir:



Şekil 4.8 Fulya'nın çalışma kâğıdının ikinci sorusuna ait cevabı.

Fulya'nın ifadeleri ve Şekil 4.8'de verilen cevabı incelendiğinde önermenin doğruluğuna ulaşabilmek için mantıksal çıkarımlarla kanıtlamasını doğru biçimde yapılandığı görülmüştür. Dolayısıyla ana meseleyi belirlediği ve buna uygun tutarlı basamaklar oluşturarak kanıtını yapılandığı söylenebilir. Buradan Fulya'nın analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Eylül, çalışma kâğıdının ikinci sorusunda ("İkizkenar bir üçgende tabana indirilen dikme tabanı iki eş parçaya böler." önermesini kanıtlayınız.) temsili bir ikizkenar üçgen çizmiş ardından tepe noktasından karşısındaki kenara bir dik indirerek oluşan iki üçgende eş açılar belirlemeye çalışmıştır. Buradan eşlik yardımıyla kanıtını yapılandırmaya çalıştığı görülmüştür. Eylül'ün soruya ait cevabına aşağıda Şekil 4.9'da yer verilmiştir:



Şekil 4.9 Eylül'ün çalışma kâğıdının ikinci sorusuna ait cevabı.

Eylül'ün Şekil 4.9'daki bu cevabına ait açıklamaları aşağıda sunulmuştur:

E: Önce ikizkenar bir üçgeni çizeyim ABC üçgeni olsun. İkizkenar olduğunu bize vermiş Birde dik olduğunu vermiş. Bu dikmeyi de çizelim. Şimdi şuraya da D diyelim. Bize DC eşit midir BD bunu soruyor. Şimdi bilinenlerden yola çıkarak hareket edeceğim. İkizkenar üçgen olduğu için ben tabandaki bu iki açının eş olduğunu biliyorum. B açısına α dersem, C açısına da α derim. İndirdiğim dik 90° ise diğer tarafı da 90° 'dir. Diğer açuya da β diyelim α ile β toplamı 90° . O halde A'nın sağ tarafındaki açı da β olur, sağlaması için. Burada iki tane dik üçgen var. ABD üçgeni ile ACD üçgeni, bu iki üçgenin bir kenarları eşit. AC ve AB ve B açısı ile C açısı birbirine eşit. Bunu görünce aklıma direkt benzerlik geliyor. AKA buradan yazacağım [oranları yazıyor]. Oranlarda AD/AD olduğu için, 1'e eşit. Amacım BD/DC 'nin eşitliğini sağlamaktı. Buradan $BD/BC = 1$. İçler dışlar çarpımı yaparsak $DC=BD$ olur.

Eylül'ün ifadeleri ve Şekil 4.9'daki cevabı incelendiğinde soruda istenen asıl meseleyi belirlediği ve buna uygun tutarlı basamaklar oluşturduğu görülmüştür. Eylül'e aklına ilk gelen bu yöntemin bu olup olmadığı sorulduğunda ise araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

A: Aklına ilk gelen yöntem bu muydu? (SF)

E: Evet.

A: Neden? (SF)

E: Açı eşitliği görünce benzerlik kullanmak geldi aklıma.

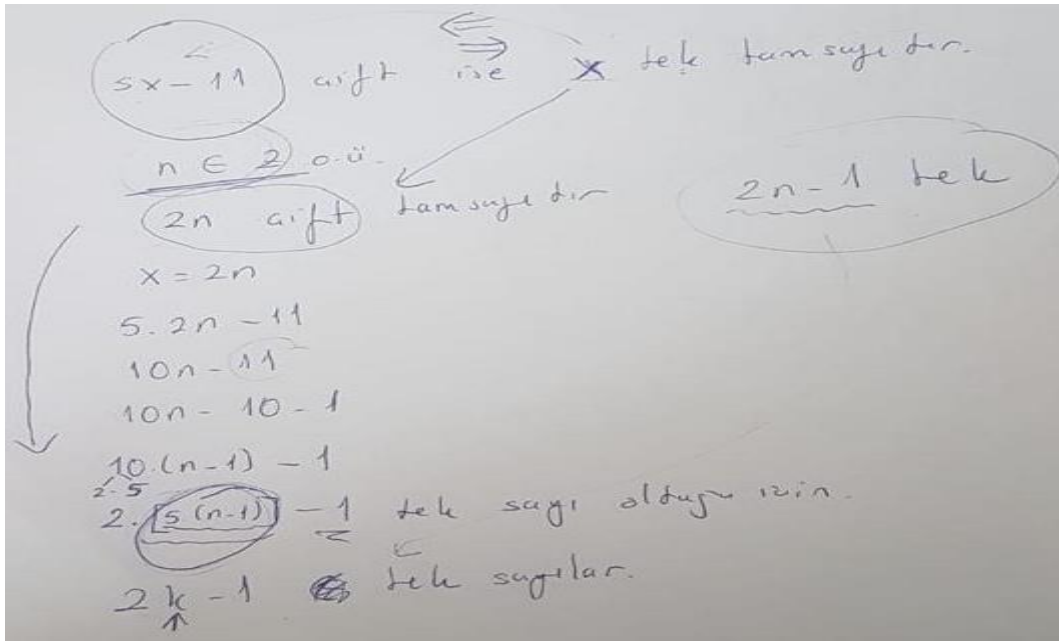
A: Senin için geçerli bir kanıt mı? (SF)

E: Evet, çünkü doğru sistemler kurarak buldum.

Yukarıdaki alıntıda görüldüğü üzere Eylül kanıtlamasını doğru sistemler üzerine kurarak yapılandırmış, kendisini sorunun doğru cevabına ulaştıracak adımları gerçekleştirmiştir.

Eylül'ün akıl yürütmelerini doğru şekilde gerçekleştirdiği söylenebilir. Buradan Eylül'ün analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Eylül, çalışma kâğıdının dördüncü sorusuna ("x tamsayı olmak üzere, $5x - 11$ çift tamsayı ise x tek tamsayıdır." önermesini kanıtlayınız.) ait ifadelerinde olmayana ergi yöntemiyle kanıtını yapılandırabileceğini belirterek, x'i çift sayı ($x=2n$) olarak kanıtlamaya başlamıştır. Ardından $5x-11$ ifadesinde, x yerine $2n$ ifadesini yazarak doğrulamasında kendisini doğru cevaba ulaştıracak tutarlı basamakları oluşturduğu görülmüştür. Bu ifadelere ait cevabına aşağıda Şekil 4.10'da yer verilmiştir:



Şekil 4.10 Eylül'ün çalışma kâğıdının dördüncü sorusuna ait cevabı.

Şekil 4.10'da Eylül'ün akıl yürütmelerini doğru şekilde gerçekleştirdiği görülmüştür. Bu cevabına ait açıklamalarına ise aşağıda yer verilmiştir:

E: $5x-11$ çift ise x tek tamsayıdır. Bunu olmayan ergi diye bir yöntem vardı üniversitede. Tersten gitmek bana şu an ilk aklıma gelen. Bu çift ise bunu kabul edip yanlışlığını gösterip doğru olduğunu ispat edebilirim diye düşünüyorum. O zaman x bir tek tamsayı ise elemanıdır tam sayı olmak üzere şöyle tanım yapmak istiyorum $2n$ çift tam sayıdır. n herhangi bir tamsayı ise $2n$ de çifttir. Eğer $2n$ çift tamsayı ise $x=2n$ şeklinde yazıyorum. O zaman x gördüğüm yere $2n$ yazarım $5 \cdot 2n - 11$ şeklinde ifade edebilirim. Daha sonra $10n-11$ oldu. $10n-10-1$ şeklinde parçalıyorum. Sonra $10 \cdot (n-1) - 1$ şeklinde yazarım. -1 yalnız kaldı sonra 10 yerine $2 \cdot 5$ yazıyorum. Burada $5 \cdot (n-1)$ herhangi bir tam sayıyı ifade ediyor. Bu sayının 2 katının 1 eksiği de nedir tek sayıdır tanımından. O zaman x çift olduğunda $5x-11$ tek oluyorsa tersi doğru olmuş oluyor. Deriz ki o zaman $5x-11$ çift ise x tek tam sayıdır. Aklıma ilk gelen bu yöntem

A: Aklına ilk gelen yöntemin bu olma sebebi nedir? (SF)

E: Daha basit daha kolay olur diye geldi. İşin içinden çıkabilirim gibi geldi. X'in tek olduğunu ifade edip yapmak daha kolaydı tersten ama $5x-11$ 'i tek ya da çift sayı olarak tanımlayamadım. Genelleyemedim. Parçalayamadım. Buradaki 5 ifadesi tek olduğu için burada ben 2 çarpanı bulamazdım. O yüzden buradan x çift düşünüp bunun tek olduğunu gösterip o halde doğrudur.

Eylül'ün ifadelerine ve cevabına bakıldığında doğru açıklamalar yaptığı ve kendisini genel bir yargıya ulaştıracak tutarlı basamakları oluşturduğu görülmüştür. Buradan Eylül'ün analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Fulya, çalışma kâğıdının dördüncü sorusuna (" x tamsayı olmak üzere, $5x - 11$ çift tamsayı ise x tek tamsayıdır." önermesini kanıtlayınız.) ait cevaplarında $5x-11$ ifadesini genel bir çift sayı olarak belirtmiş, denklem kurarak kanıtını yapılandırabileceğini düşünmüştür. Fulya'nın ilgili açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir:

A: Bu önermeyi bana kanıtlar mısın?(SF)

F: Şimdi $5x - 11$ çift sayıymış. Şimdi buradan denklemlerden yola çıkacağım. Bu durumda -11 , karşıya $+ 11$ olarak geçer. Çift bir sayı ile tek bir sayıyı topladığımızda her zaman tek bir sayı elde ederiz. Bu durumda $5x$ 'in tek olması gerekiyor. $5x$ 'in tek olması için de x de tek olmak zorunda. Sebebi de şu: Eğer x çift bir sayı olursa çiftle de çarpsam tekle de çarpsam çift olur. O yüzden x tek olmak zorunda. Bu şekilde bir denklem kurdum. Yani bu bana nasıl ispatlarsınız deseydi de örnek vererek giderdim aslında burada. İşte örneğin derdim ki, hani çiftle artı 11 'in toplamı neden tek diye sorulsaydı.

Yukarıdaki ifadelerinde bu soruyu yapılandırırken örneklerden yararlanacağını ifade etmiş olmasına rağmen, bu örnekleri sadece zihinsel bir dayanak noktası olarak düşündüğü görülmüştür. Bu açıklamalara ait ifadelere aşağıda yer verilmiştir:

A: Burada araya girmek istiyorum örnek gelmeden önce. Dedin ya 5 ile neyi çarparsam tek olur, tek sayı. Burada sen değer vermeden düşündün o zaman?

F: Yoo, kafamdan değer verdim yine. Çünkü ben kendim de öyle yapıyorum. Tek, çift sorularında her zaman kafamda değer vererek ilerlerim. İspatlamak için hem tek sayıyı hem çift sayıyı da veririm. Çünkü kendim inanmalıyım önce gerçekten öyle olduğuna. Çünkü hiçbir zaman şunu ezberlemedim ben. $\ç+\ç=\ç$, $\ç+t=t$ diye. Her zaman kafamda somut örnekler vererek ilerliyorum, bu tarz sorularda.

Fulya'nın soruya ait cevabına aşağıda Şekil 4.11'de yer verilmiştir:

$$5x - 11 = \text{Çift}$$

$$5x = \underbrace{\text{Çift} + 11}_{\text{Tek}} \rightarrow (\text{Çift bir sayı ile tek bir sayının toplamı tek bir sayıdır.})$$

$$5x = \text{Tek} \rightarrow (\text{Tek bir sayı ile tek bir sayının çarpımı tek bir sayıdır.})$$

↓
Tek bir sayıdır.

Şekil 4.11 Fulya'nın çalışma kâğıdının dördüncü sorusuna ait cevabı.

Fulya'nın ifadeleri ve Şekil 4.11'deki cevabı incelendiğinde kendisini doğru cevaba ulaştıracak adımları tutarlı şekilde gerçekleştirdiği görülmüştür. Ayrıca $\text{ç}+\text{ç}=\text{ç}$ ifadelerini hiçbir zaman ezberlemediğini dile getirerek kendisinin mantıksal çıkarımlar doğrultusunda kanıtlamasını gerçekleştirdiği söylenebilir. Buradan Fulya'nın analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Selin, çalışma kâğıdının beşinci sorusunda ("x tamsayı olmak üzere, $5x-7$ tek tamsayı ise $9x+2$ çift tamsayıdır." önermesini kanıtlayınız.) ilk olarak $5x-7$ 'yi bir tek sayı ($2n+1$) olarak ifade ederek x'in teklik çiftlik durumunu araştırmıştır. Selin, x'in çiftliğini tespit ettikten sonra gerekli dönüşümleri yaparak $9x+2$ ifadesinin çift olduğu sonucuna ulaşmıştır. Selin'in bu ifadelerle ait cevabına aşağıda yer verilmiştir:

$$5x - 7 \Rightarrow \text{Tek tamsayı}$$

$$9x + 2 \Rightarrow \text{Çift}$$

$$\begin{array}{c} \text{Çift} \\ \text{Çift} \\ \hline \text{Tek tamsayı} = 2n + 1 \end{array}$$

$$5x - 7 = 2n + 1$$

$$5x = 2n + 1 + 7$$

$$5x = 2n + 8$$

↓ Çift

Çift

Şekil 4.12 Selin'in çalışma kâğıdının beşinci sorusuna ait cevabı.

Şekil 4.12'deki cevabı incelendiğinde, Selin'in dönüşüm yaparak kendi akıl yürütmelerini gerçekleştirdiği görülmüştür. Aşağıda Selin'in cevabına ait açıklamalarına yer verilmiştir:

Selin (S): $5x-7=2n+1$ dedim. Buradan $5x=2n+8$, $2n$ çift bir sayı. $\ç+\ç=\ç$ gelmek zorunda. O zaman $5.x$ çift olmalı. O zaman x de çift olmak zorunda. x , çift sayı ise buraya döndüğümüzde $(9x+2)$, $9.x$ de çift sayı geliyor. 2 bir çift sayı çift ile çiftin toplamı da çift sayı. Yine burada lisedeki bilgilerime dayanarak yaptığım bir ispat oldu. Yine kabullerden yola çıktım tekle çiftin toplamı tek gibi yani 3te anlattığım kabullerden yola çıktım.

Selin, cevabında ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklarla kanıtını yapılandırmıştır. Fakat bazı ifadelerinde, doğrulamalarını lisedeki öğrenmelerine dayandırdığı görülmüştür. Bunun yanı sıra Selin'e bu soruya ait kullandığı yöntemi her zaman tercih edip etmeyeceği sorulduğunda "Yani başka bu tarz bir soru gelse, yine aynı şeyi söylerdim." ifadesini kullanmıştır. Tüm bu ifadeler göz önüne alındığında Selin'in, kanıtını savunmasına ait ifadelerinde dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerinden izler taşıdığı fakat kanıtlamasına ait cevabında analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Eylül, çalışma kâğıdının beşinci sorusunda (" x tamsayı olmak üzere, $5x-7$ tek tamsayı ise $9x+2$ çift tamsayıdır." önermesini kanıtlayınız.) ilk olarak $5x-7$ 'yi bir tek sayı $(2n-1)$ olarak ifade ederek x 'in teklik çiftlik durumunu araştırmıştır. Eylül, x 'in çiftliğini tespit ettikten sonra gerekli dönüşümleri yaparak $9x+2$ ifadesinin çift olduğu sonucuna ulaşmıştır. Eylül'ün bu ifadelerine ait cevabına aşağıda yer verilmiştir:

The image shows a handwritten mathematical proof on a piece of paper. The text is as follows:

$x \in \mathbb{Z}$
 $n \in \mathbb{Z}$
 $5x - 7 \rightarrow \text{Tek}$
 $5x - 7 = 2n - 1 \Rightarrow 9x + 2 = 2n ?$
 $5x - 6 = 2n + 1$
 $5x = 2n + 6$
 $5x = 2 \cdot (n + 3)$
 $5x = 2k$
 $x = 2t$
 $9 \cdot 2t + 2$
 $18t + 2$
 $2 \cdot (9t + 1)$
 $9t + 1 \in \mathbb{Z} \text{ o.ü.}$
 $2 \cdot (9t + 1)$ çift bir tamsayıdır

Şekil 4.13 Eylül'ün çalışma kâğıdının beşinci soruna ait cevabı.

Eylül'ün Şekil 4.13'teki cevabına ait açıklamaları aşağıda verilmiştir:

E: $5x-7=2n-1$ şeklinde ifade edebilirim. Böyleyse $9x+2=2n$ olmasını bekliyorum. Bu ifadeden sonra $9x+2$ 'nin, $2n$ olduğunu gösterebilirim ispatı yapmış olabilirim belki. Deneyeceğim bilmiyorum nasıl olur.

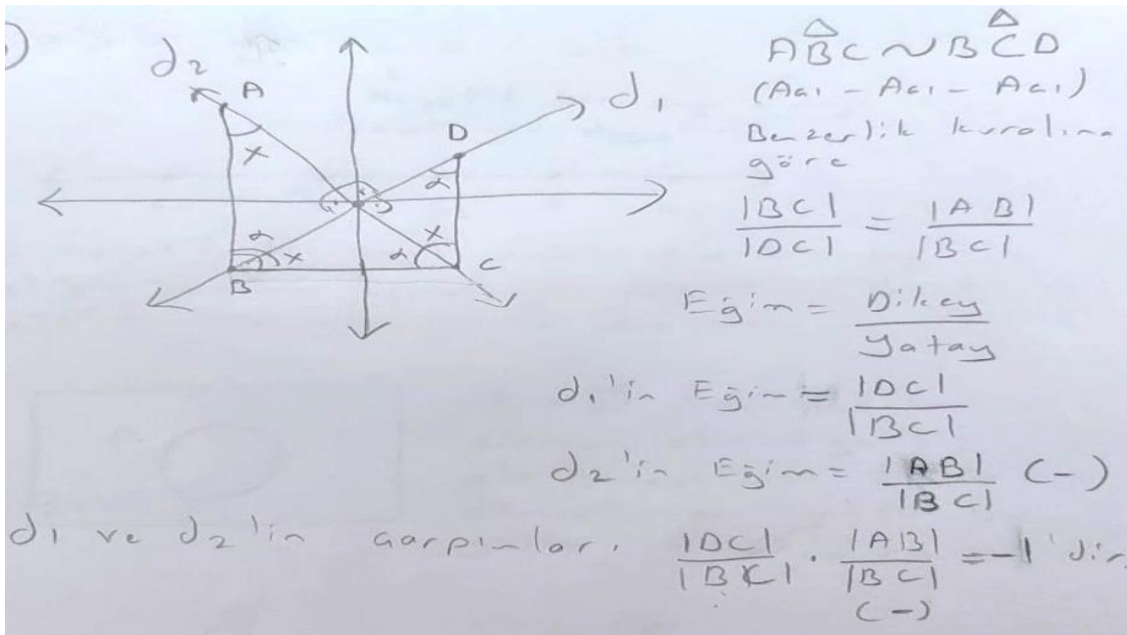
A: Deneyebilirsin.

E: Burada yine n herhangi tamsayı olmak üzere bu yine önermeyi değiştirmez. Zaten $2n-1$ tek bir sayı anlamına geliyor. (-1) 'i diğer tarafa atsam $5x-6=2n$, $5x=2n+6$. O zaman $5x=2.(n+3)$ o halde $5x$ çift bir sayıymış. Yandaki ifadede, $5x$ gördüğüm yere ben $2k$ diyebilirim. k değişken herhangi ifade olabilir. Benim amacım çiftliği ifade etmek.

$5x$ çift ve $2k$ 'de çift bir ifade ediyor yani $5x$ in çift olması için x 'in çift olması lazım. İkinci kısmına geçerim. $x=2t$ yazayım. $9.2t+2=18t+2=2(9t+1)$, $9t+1$ tamsayı olmak üzere $2.(9t+1)$ çift tam sayıdır.

Yukarıdaki ifadeleri ve cevabı incelendiğinde Eylül'ün akıl yürütmesini gerçekleştirerek kanıtını doğru şekilde yapılandığı ve ikna edici tutarlı basamaklar oluşturduğu söylenebilir. Buradan Eylül'ün analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Fulya, çalışma kâğıdının dokuzuncu sorusuna ("Düzlemde birbirine dik olan doğruların eğimler çarpımı (-1) ' dir." önermesini kanıtlayınız.) ait doğrulamasında öncelikle koordinat sistemi ardından orijinden geçen birbirine dik iki doğru çizmiştir. Burada oluşan ABC ve BCD üçgenlerinin eş açılarını belirlemeye çalışarak kanıtında doğru cevaba ulaştığı görülmüştür. Fulya'nın ilgili ifadelerine ait cevabına aşağıda Şekil 4.14'te yer verilmiştir:



Şekil 4.14 Fulya'nın çalışma kâğıdının dokuzuncu sorusuna ait cevabı.

Fulya'nın Şekil 4.14'teki cevabına ait açıklamaları aşağıda verilmiştir:

A: Bu önermeyi nasıl kanıtlarsın? (SF)

F: ABC ve BCD üçgenlerini aldım, eğimler için. Eş mi diye kontrol edecektim. Eş değiller. Çünkü burada A'nın karşısı, burada x'in karşısı aynı oluyor. Sadece benzer üçgen bunlar. Eş diyemedik. Der miyiz? (orantı kuruyor)

d1 ve d2 doğrularının eğimini formülden yazarak çarpırım. Bunlar birbirinin tersi, çarpınca 1 olur. Ama d2 ters tarafta olduğu için eğim her zaman negatiftir. Eğimde x ekseninden saat yönünün tersine ilerliyorduk. Eğer dar açıysa eğim pozitif, geniş açı ise eğim negatif. Yanlış mı hatırlıyorum?

A: Beni doğrulamana nasıl ikna edersin? (SF)

F: Sol ve sağda oluşan üçgenlere bakabilirim. Dikey uzunluğu pozitif, yatay uzunluğu da pozitif; pozitifin pozitive bölümü pozitif (sağdaki üçgen), dikey uzunluğu pozitif ve yatay uzunluğu negatiftir. Bu durumda artının eksiye bölümü (-) olacağı için d2'nin eğimi negatif. Somutlaştırarak görmüş oldum.

A: Yaptıklarının doğruluğundan emin misin? (SF)

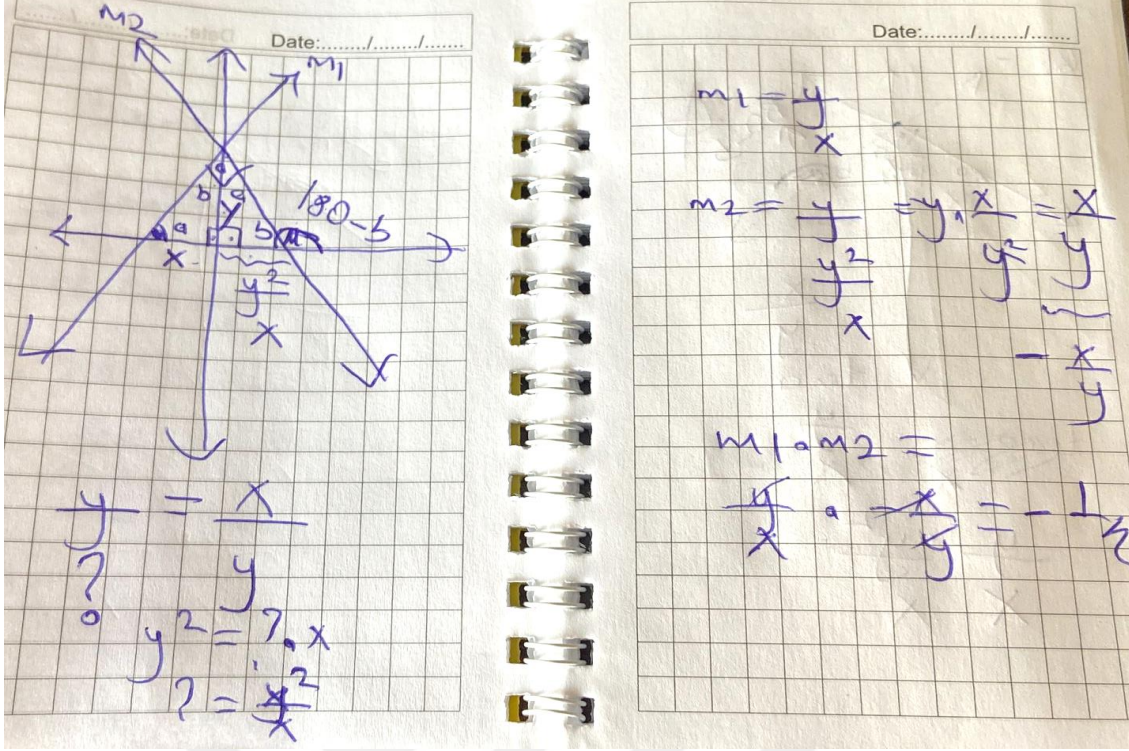
F: Eminim, orijinden geçirdik çünkü.

A: O zaman sen önce koordinat sistemini çizdin. Birbirine dik iki tane doğru aldın, orijinden geçen. Burada birbirine benzer üçgenler oluşturdu ve orantıyı kurarak, eğimlerinin çarpımının 1 olduğunu elde ettin. Sonra sağa ve sola yatık durumuna bakarak işaretlerini belirledin. Biri pozitif eğim, diğeri negatif eğim olduğu için çarpımları (-1) olmuş oldu.

F: Aynen, evet.

Yukarıdaki açıklamalarından ve Şekil 4.14'teki cevabından Fulya'nın soruya ait ana meseleyi belirlediği ve kendisini doğru cevaba ulaştıracak tutarlı basamakları oluşturduğu söylenebilir. Ayrıca Fulya'nın akıl yürütmelerini doğru şekilde gerçekleştirdiği düşünülebilir. Buradan Fulya'nın analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Selin, çalışma kâğıdının dokuzuncu sorusuna “Düzlemde birbirine dik olan doğruların eğimler çarpımı (-1)' dir.” önermesini kanıtlayınız.) ait kanıtını, koordinat sisteminde birbirini dik kesen iki doğru alarak tutarlı basamaklarla yapılandırdığı görülmüştür. Selin'in ilgili ifadelerine ait cevabına aşağıda Şekil 4.15'te yer verilmiştir:



Şekil 4.15 Selin'in çalışma kâğıdının dokuzuncu sorusuna ait cevabı.

Selin'in Şekil 4.15'teki cevabına ait açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir:

A: Önermeyi kanıtlar mısın? (SF)

S: Yine tanjanttan giderim ben.

A: İlk aklına gelen tanjant mı?

S: Evet.

A: Neden peki? (SF)

S: Genel denklemden yola çıkamayacağım için eğim deyince tanjant geliyor hemen. Aklıma trigonometrik denklemler geliyor buradan mutlaka mantıklı bir açıklama gelir diye düşünüyorum.

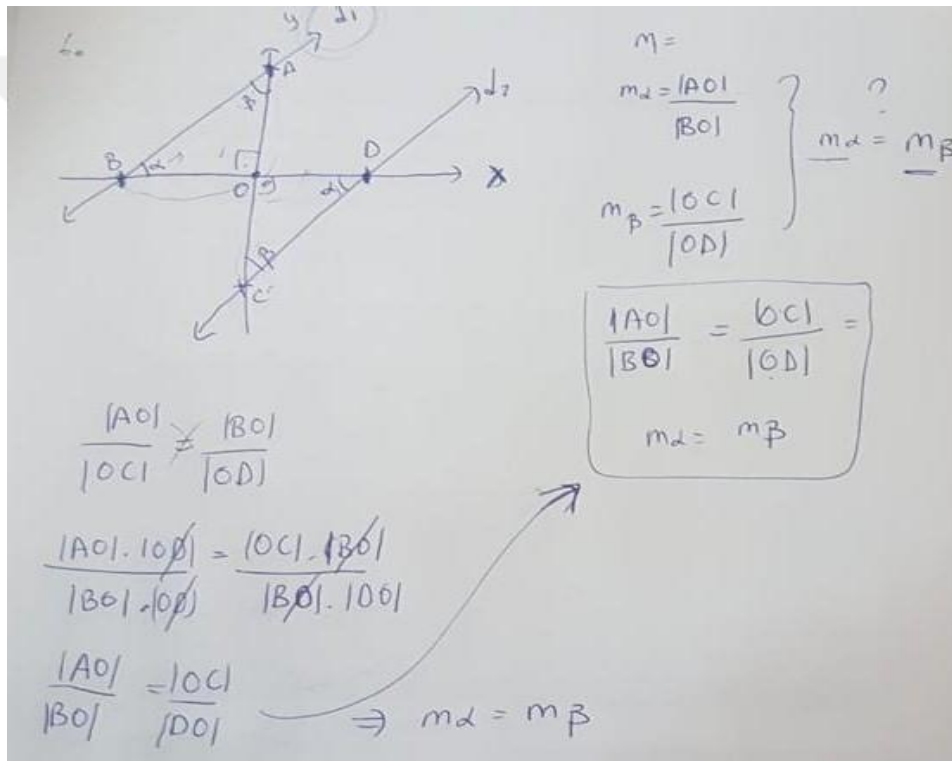
A: Neden? (SF)

S: Mutlaka mantıklı olan o diye. Açılardan mutlaka gelecek. Çünkü neden mantıklı geldiğini bilmiyorum. Koordinat sisteminde iki dik kesişen doğru olarak, tanjantlardan eğimin mutlaka geleceğini düşünüyorum. 2 tane dik doğru var önce bunların kenar uzunluklarını belirlemek için açılardım. Açıları oluşturduktan sonra kenar uzunluklarını oluşturmaya başladım. Buraya y dedim, buraya x dedim. A açısı, y'yi görürken; buradaki A açısının neyi gördüğünü bilmiyorum. Buraya "?" dedim. Burada B açısı, x'i görürken buradaki B açısı y'yi gördü. $y^2 = ? \cdot x$, $? = y^2/x$ dedim. Eğim tanjant demiştik. Şu ilk doğrum, m1 dedim. m1'in pozitif eksenle yaptığı açının tanjantı karşı/komşu dan y/x geldi. Diğeri m2 olsun. Bunun tanjantı $\frac{y}{y^2/x}$ yani x/y . Ama burada benim asıl hesaplamam gereken yer şurası. Yani $180-b$ birim çemberdeki kurallardan ötürü bu eksi olmak zorunda. Eğim $-y/x$. Dolayısıyla $m1.m2 = -1$ 'i buldum.

İlgili ifadeleri dikkate alındığında Selin'in mantıksal çıkarımlarına ait akıl yürütmelerini doğru biçimde gerçekleştirdiği görülmüştür. Ayrıca kendisine kullandığı bu yöntemle ilgili sorular

yöneltildiğinde, ilk düşündüğü yöntemin; uyguladığı bu yöntem olduğunu ve bunu ilk defa burada kullandığını belirtmiştir. Dolayısıyla Selin'in zihinsel düşüncelerini gerçekleştirerek kanıtını yapılandığı söylenebilir. Buradan Selin'in analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Eylül, çalışma kâğıdının sekizinci sorusunda ("Düzlemde birbirine paralel olan doğruların eğimleri eşittir." önermesini kanıtlayınız.) çizdiği koordinat sisteminde birbirine paralel iki doğru olarak kanıtını yapılandırmaya çalışmıştır. Çizdiği doğrularla eksenler arasında kalan üçgenlerin eşlik durumunu belirlemiş ve orantı kurarak kanıtını tamamlamıştır. Bu ifadelerle ait cevabı aşağıda Şekil 4.16'da verilmiştir:



Şekil 4.16 Eylül'ün çalışma kâğıdının sekizinci sorusuna ait cevabı.

Yukarıdaki cevabı incelendiğinde Eylül'ün kendisini doğru cevaba ulaştıracak tutarlı basamakları mantıksal çıkarımlarla oluşturduğu görülmüştür. Bu ifadelerine ait açıklamaları aşağıda sunulmuştur:

E: Öncelikle koordinat sistemi çizmek istiyorum. Eğimden bahsedeceğim için diklik olması lazım. Bu da benim referans noktam gibi olacak, x-y düzlemi burada. Birbirine paralel doğrular çizeceğim. Eğimin tanımı, dikeydeki değişimin; yataydaki değişimle oranıdır. Burada iki farklı doğru var. Bu açıya α diyelim, doğrular birbirine paralel. Paralel doğrular arasında bazı açı eşitliği vardı. Yöndeş, iç ters gibi. Bundan faydalanacağım [oluşturduğu iki üçgendeki eş açılar belirledi]. Daha sonra eğimini hesaplamaya çalışalım [d_1 ve d_2 doğrusunun eğimini yazıyor]. Şimdi ben

bunların birbirine eşit olduğunu ispat edersem, ispat edebilirim diye düşünüyorum. Burada aklıma benzerlik yapabiliriz diye geldi. Çünkü 3 açı eşit. Benzerlik neydi? Karşıdaki açıların oranları, birbirine eşitti [benzerlik oranlarını yazdı]. Mesela, şimdi ispat yaptığımı düşünüyorum. Burada işlemler yaparak bunu buldum [Eğimlerinin eşit olduğunu kurmuş olduğu orantılar sonucu elde etmesini kastediyor]. O zaman böyleyse $m\alpha = m\beta$ diye yazabilirim. Bence ispatladım.

A: Şu an aklına ilk bu yöntemin gelme sebebi nedir? (SF)

E: Eğim olduğu için koordinat sistemi çalışacaktık. Diklik lazımdı bana.

A: Eğim deyince koordinat her zaman olmalı mı?

E: Hayır, olmamalı ama benim bir şeyler yazabilmem için burada gerçi bunu yapmasak da olabilirdi. Ama dikliği burada kabul edilmiş bir şey. Doğruluğu bilinen bir şeydir. Bunun üzerinde çalışmak işimi kolaylaştırdı. Sonrası için emin değildim ama sonradan çıktığı için hani olur mu diye düşündüm.

A: Doğrulamandan nasıl emin olursun? (SF)

E: Ben kurduğum doğru bir sistem üzerinde şunu ispatlamış oldum. Bu sistem her zaman geçerli, bu sistem üzerine yanlış olmayan şeyler yazdım ve bu doğru olan şeyler de bu eşitliği buldum. Bu da zaten bana her zaman doğru olduğunu gösterir. Yani bunu alıp kullanmadım. Ben bunu yaptığım işlemler sonucunda buldum, $m\alpha = m\beta$.

Eylül'ün ifadelerinden ve Şekil 4.16'daki cevabından görüldüğü üzere mantıksal çıkarımlarda bulunduğu, oluşturduğu basamaklar arasında doğru bağlantılar kurarak kanıtını yapılandığı söylenebilir. Buradan Eylül'ün analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

4.3.2 Öğretmenlerin Analitik Aksiyomatik Kanıt Şemasına Ait Cevapları

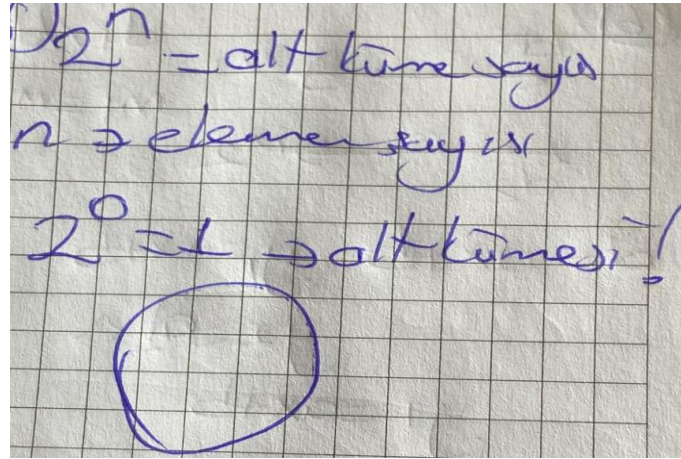
Öğretmenler, çalışma kâğıdının yedinci ve sekizinci sorularında analitik aksiyomatik kanıt şemasına dair ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler “*tanımları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanma*” şeklinde sınıflandırılan bu kanıt şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Öğretmenlerin bu göstergelere ait cevapları aşağıda sunulmuştur.

Selin, çalışma kâğıdının yedinci sorusuna (“A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \emptyset$ ise $A = \emptyset$ dir.” önermesini kanıtlayınız.) ait doğrulamasına alt küme sayısının formülünü tanımlayarak başlamıştır. Bu ifadelere ait açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir:

A: Önermeyi nasıl kanıtlarsın? (SF)

S: Hani doğruluğunu bilirsin de kanıtlayamazsın ya öyle bir şey. Öz alt küme sayısı 2^{n-1} değil miydi? 2^n Alt küme sayıydı. Buradaki n 'de eleman sayısı, boş kümenin eleman sayısı 0 olduğuna göre; $2^0=1$ değil mi? Demek ki bir tane alt kümesi olmak zorunda. Boş kümenin kendisi de mutlaka onun alt kümesi olmak zorunda değil mi? O zaman bir taneydi, kendisi olmak zorunda. O zaman o da boş küme oluyor.

Selin'in ifadelerine ait cevabı aşağıda verilmiştir:



Şekil 4.17 Selin'in çalışma kâğıdının yedinci sorusuna ait cevabı.

Yukarıdaki açıklamalar ve Şekil 4.17'deki cevabı incelendiğinde Selin'in tanımdan yola çıkarak mantıksal çıkarımlarda bulunduğu görülmüştür. Selin'e düşündüğü ilk yöntem sorulduğunda ise araştırmacı ile aralarında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

A: Aklına ilk gelen yöntem bu muydu? (SF)

S: Evet.

A: Aklına ilk bunun gelme sebebi nedir? (SF)

S: Alt kümeyi görünce eleman sayısı canlandı zihnimde.

Selin'in kanıtlanmasında mantıksal çıkarımlarına alt küme sayısı tanımı ile başladığı anlaşılmıştır. Ayrıca tanımları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullanarak kanıtını yapılandığı söylenebilir. Buradan Selin'in analitik aksiyomatik kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Selin, çalışma kâğıdının sekizinci sorusuna ("Düzlemde birbirine paralel olan doğruların eğimleri eşittir." önermesini kanıtlayınız.) başladığında kanıtını yapılandıramamış, eski öğrenmelerini hatırlamaya çalışmıştır. Ardından eğimin tanımından yola çıkarak kanıtını yapılandığı görülmüştür. Selin'in ilgili ifadelerine ait açıklamalarından bir kesit aşağıda sunulmuştur:

S: Aklıma direkt doğru formülü geliyor $a.x+b$ doğrunun genel denklemi diğerine $c.x+d$ yazacağım.

A: Soruyu ilk görünce anımsadığın bir şey var mı?

S: Var aslında ben bunu çözmeyi biliyordum, hatırlıyorum yazdığında da.

A: Biliyorum dedin.

S: Biliyorum aslında. Yani anımsıyorum. Bu tarz bir soruyla daha önce karşılaştım açıkçası. Tanıdık geliyor çünkü.

A: Daha önce derken.

S: Büyük ihtimal üniversitede karşılaşmışsınızdır.

A: Yapmış mıydınız kanıtını?

S: Büyük ihtimal yaptık. Paralellik kavramından gitmeliyiz. Hiçbir ortak noktaları yok.

A: Üniversiteden hatırladığın şey bunu ispatlamak için yeterli olur muydu?

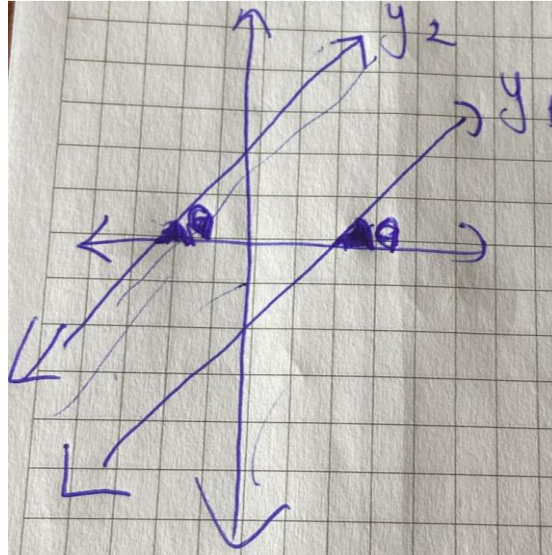
S: Büyük ihtimal yeterli olurdu. Toparlayamıyorum şimdi. [Bir şeyler yazıyor]

Selin'in yukarıdaki ifadelerinden kanıtını yapılandırmak için eski öğrenmelerine ait ipuçları aradığı görülmüştür. Ardından Selin, koordinat sistemi çizerek; eğimin tanımından yararlanabileceğini ifade etmiştir. Selin'e bu ifadelerinin üniversiteden hatırladıklarının olup olmadığı sorulduğunda ise Selin'in aşağıdaki açıklamayı yaptığı görülmüştür:

A: Bu yaptıkların üniversiteden hatırladıkların mı?

S: Hayır onları hatırlamıyorum. Onlardan bağımsız yaptıklarım. Aklıma koordinat sisteminde göstermek geldi. 2 tane paralel doğru çizsem. $y = 5$, $y = -2$ birbirine paralel. Eğimleri eşit ama nasıl gösteririm bunu. Tanjanttan mı gitsek acaba eğimde? Bu ikisinin eğiminin eşit olduğunu görüyorum. Şu an tanjanttan gitmek geliyor aklıma. Şöyle bir şey diyebilir miyiz? Eğim demek, x eksenine yaptığı açı mı demekti? Açı demekti. Değil miydi ya? Eğimin tanımından. Paralel olduğu için açıları eşit olmak zorunda. **Tanjantları birbirine eşit olduğu için eğimleri eşittir.** Bu sanırım geometrik ispat. Eğimin tanımından gittim. Yanlış hatırlamıyorsam **eğim demek, x ekseninin pozitif yönde yaptığı açının tanjantı demekti.** O zaman ben bu paralel doğrularda açılara bakıyorum. 2 tane paralel doğru çizdim. Buradaki iki açı birbirine eşit olmak zorundadır. İç ters, dış ters kurallarından açılar eşit olduğu için tanjantları da birbirine eşit. **Tanjantlar da birbirine eşit olduğu için eğimler de birbirine eşittir.**

Selin'in ifadelerine ait cevabına Şekil 4.18'de yer verilmiştir:



Şekil 4.18 Selin'in çalışma kâğıdının sekizinci sorusuna ait cevabı.

Yukarıdaki açıklaması dikkate alındığında Selin'in doğrulamasını eski öğrenmelerinden bağımsız gerçekleştirdiği anlaşılmıştır. Ayrıca Selin'in kanıtı yapılandırırken eğimin tanımdan

yararlanarak neden sonuç ilişkisi kurduğu söylenebilir. Buradan Selin'in analitik aksiyomatik kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Rana çalışma kâğıdının yedinci sorusuna ("A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \emptyset$ ise $A = \emptyset$ dir." önermesini kanıtlayınız.) A kümesinin boş kümeden farklı olduğunu varsayarak başlamıştır. Bu takdirde A kümesinin bir elemanının olacağını dolayısıyla boş küme olmayacağını belirtmiştir. Fakat A kümesinin, boş kümenin alt kümesi olması için elemanının olmaması gerektiğini ve varsayımının, $A \subset \emptyset$ ile çeliştiğini ifade etmiştir. Rana'nın ilgili açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir:

R: Boş kümenin alt kümesi ise zaten boş kümedir. Nasıl kanıtlarız? Güzel soru. Şimdi boş küme hiç elemanı olmayan küme demek, yani hiç elemanı yoksa A da bunun alt kümesi ise bu da boştur yani.

A: Nasıl ikna edersin beni? (SF)

R: Tersine düşünüyorum. Diyelim ki mesela boş kümenin elemanı olmasın. Yani alt kümesi olmasa, sonuçta A'nın bir elemanı olacak. A'nın elemanı olursa o zaman boş küme olmaz. E, A da boş küme olduğunu söylüyor. O zaman A demek ki boş küme değil. Bilmiyorum cümle ile anlatsam dedim ama aklıma gelmedi.

A: Şimdi A'nın elemanı olsun, boş küme olmasın dedin. Kabul ettik.

R: Evet A'nın eleman sayısı, boş kümeden farklı olsun dedim. O zaman dur bakalım nasıl yapıyorduk? Üniversitede yapıyorduk bunu. Elemanın farklı olsun. O zaman boş kümeden farklıysa bir elemanı olacak. Bir elemanı varsa, zaten şeydir boş küme değildir. Ama ben boş kümenin alt kümesiysem ilk baştaki önerme ile çakışıyor. Yani bu gösterdiğim o zaman diyorum ki, demek ki ben yanlış yapıyorum. Demek ki A her zaman boş küme olmak zorunda diyorum.

A: Bu ifadenle verilen önerme doğrulanmış oluyor mu?

R: Şimdi boş küme demek, hiçbir elemanım olmayacak demek. Bunun elemanı yoksa bunun alt kümelerinin hiçbir şekilde elemanı yok.

A: Dayanak noktan nedir peki buradaki? (SF)

R: Boş kümenin tanımı aslında. Boş küme nedir? Hiçbir şekilde elemanı olmayan küme demektir. Elemanı olsaydı zaten boş küme olmazdı. O zaman elemanım yoksa benim bütün alt kümelerim de boştur.

Yukarıdaki ifadeler incelendiğinde, Rana'nın $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluğunu göstermek için $p \wedge q'$ önermesinin tanımını kullandığı yani çelişki yöntemi ile kanıtını yapılandığı görülmüştür. Rana'nın çelişki yöntemi ile kanıtın tanımından yola çıkarak neden sonuç ilişkilerini doğru biçimde kurguladığı söylenebilir. Buradan Rana'nın analitik aksiyomatik kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.

Fulya çalışma kâğıdının yedinci sorusuna ("A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \emptyset$ ise $A = \emptyset$ dir." önermesini kanıtlayınız.) ait doğrulamasında tanımlardan yola çıkarak sözel açıklamalarda bulunmuştur. Öncelikle bir A kümesi çizmiş, bu küme; boş küme

olduğu için elemanı olmadığını dolayısıyla tüm alt kümelerinin de elemanının olmaması gerektiğini ifade etmiştir. Fulya'nın ilgili ifadelerine ait açıklamalarına aşağıda yer verilmiştir:

F: Yani bunu direkt küme çizerek kanıtlarım. Bir tane kümem var, herhangi bir küme. Şimdi boş küme demek, elemanı olmayan küme demektir. Bu durumda eleman olmadıysa bunun kaç tane alt kümesi olursa olsun, hiçbirinin elemanının olmaması gerekiyor. Tanımımıza aykırı bir durum var burada. O yüzden A da kesinlikle boş kümedir.

A: Beni nasıl ikna edersin bu duruma? (SF)

F: Şema çizerim. Aynı şekilde kâğıdıma da çizdim. Bir tane küme çizdim. Bu kümenin içinde hiç eleman yok. Alt küme ne demektir? Bu kümenin altındaki kümeler demektir. Yani içindeki kümeler. Bu kümenin içerisine de A kümesini çizdim. Ama bunun elemanı olamaz. Çünkü bu, alt kümenin elemanı olsaydı eğer yani A'nın herhangi bir elemanı olsaydı bu aynı zamanda boş kümenin de elemanı olacaktı. Bu durumda boş küme, boş küme olmayacak. O yüzden bu önermeyi şekil çizerek görsellere dayanarak kanıtlarım.

Yukarıdaki ifadeler incelendiğinde Fulya'nın tanımlardan yola çıkarak mantıksal çıkarımlarla kanıtını gerçekleştirdiği belirlenmiştir. Fulya'ya ilk aklına gelen yöntemin bu olup olmadığı sorulduğunda araştırmacı ile arasında aşağıdaki diyalog gerçekleşmiştir:

A: Aklına gelen ilk yöntem bu mu? (SF)

F: İlk yöntem bu, evet.

A: Peki bunun olma sebebi nedir, var mı sebebi? (SF)

F: Var aslında. Kümeler çok soyut bir kavram. Soyut kavramları somutlaştırmak insanın her zaman aklında daha kalıcı hale geliyor. O yüzden somutlaştırarak anlatırım her zaman. Kümeleri ben de ve de kendim kümelerle ilgili işlem yaparken de aynı şeyi yaparım. Somutlaştırmak için şemalara yerleştiririm. Çizerim ben şemalarımı. Küme problemlerinde de öyle.

A: Bunu dayandırdığın bir yer var mı?

F: Ezberi sevmiyorum. Bir şeyin benim için somut olması, görsellik daha önemli. Benim, onu anlamam için görmem lazım.

Fulya'nın tüm ifadeleri incelendiğinde kanıtını sözel olarak karşıt ters yöntemi ile yapılandığı görülmüştür. Ayrıca tanımları kullanarak neden sonuç ilişkisi içerisinde kanıtını yapılandığı söylenebilir. Buradan Fulya'nın analitik aksiyomatik kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir.



BÖLÜM 5

TARTIŞMA, SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde ilköğretim matematik öğretmenlerinin sahip oldukları kanıt şemalarını belirlemeyi amaçlayan bu çalışmadan elde edilen verilere ait bulgular tartışılmıştır. Bu tartışma ışığında matematik eğitimi hakkında önerilerde bulunulmuş, yapılan çalışmalarla benzerlikleri ve farklılıkları yansıtılmıştır.

5.1 TARTIŞMA VE SONUÇ

Öğretmenlerin kanıtlarını yapılandırırken üç temel kategorideki dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarına ait özelliklere sahip oldukları belirlenmiştir. Bu çalışma bu yönüyle alan yazındaki bazı çalışmalarla (Flores 2006, Haverhals 2011, Şengül ve Güner 2013, Şen ve Güler 2015, Aydoğdu İskenderoğlu 2016) paralellik göstermiştir. Elde edilen bulgulara göre bir öğretmenin (Rana) deneysel temel örnekler ve analitik aksiyomatik, bir öğretmenin (Eylül) deneysel algısal ve analitik dönüşümsel, bir öğretmenin (Fulya) deneysel temel örnekler ile beraber analitik dönüşümsel ve aksiyomatik, diğer bir öğretmenin (Selin) ise analitik dönüşümsel ve aksiyomatik kanıt şeması özelliklerine sahip olduğu belirlenmiştir. Öğretmenlerin dışsal otoriter ve dışsal sembolik kanıt şeması özelliklerine ait doğrulamalarına bu çalışmada rastlanılmamıştır. Bu da öğretmenlerin kanıt yapılandırmalarında herhangi bir otoriteyi referans almadıklarını ve sembollerini anlamsızca manipüle etmediklerini gösteriyor olabilir.

Öğretmenlerin, yöneltilen sorularda en fazla analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine sahip oldukları belirlenmiştir. Yani öğretmenlerin doğrulamalarında mantıksal çıkarımlarını gerçekleştirdikleri aynı zamanda işlemsel süreçler ile bunları destekledikleri ve genellemeye vardıkları söylenebilir. Öğretmenlerin akıl yürütmelerle dönüşümsel kanıt şeması özelliklerine ait doğrulamalarda bulunmalarına rağmen bazı noktalarda doğrulamalarını net ifade edemedikleri hatta gerçekleştirilen doğrulamalarından emin olmadıkları durumlarda öğretmenlerin çekimser bir tavır sergiledikleri görülmüştür. Bunun sebebi ise eğitim öğretim programlarında kanıta ait kazanımların az olması dolayısıyla öğretmenlerin kanıt yapmayı

kullanmaması olabilir. Ayrıca lisans döneminin ardından belirli bir zaman geçtiği için kanıta ait bilgilerini unutmuş da olabilirler. Çünkü öğretmenlerden bazıları kanıtın ne olduğunu bilmelerine rağmen kanıt çeşitlerini unuttuklarını bu sebeple sorularla ilk karşılaştıkları an da kanıt yapamayacaklarını belirtmişlerdir. Analitik dönüşümsel kanıt şemasının ardından en fazla kullanılan kanıt şeması deneysel temel örnekler kanıt şeması olmuştur.

Deneysel kanıt şemaları özellikleri sergileyen öğretmenler genellikle belirledikleri örneklerle önermenin doğruluğunu göstererek, temel örnekler kanıt şemasını kullanmışlardır. Örneğin; öğretmenlerden Rana, çalışma kâğıdında verilen dokuz sorudan altısını doğru cevaplamış; bu cevapların beş tanesinde deneysel temel örnekler kanıt şeması özelliklerine ait doğrulamalarda bulunmuştur. Sowder ve Harel (1998) da bazı öğrencilerin genel bir ifadeyi kanıtlarken belirli bir veya birkaç tane durum için gerçekleştirdiğinde teoremi kanıtladıklarına inandığını ve teoremin kanıtı için yeterli olduğunu düşündüklerini belirtmiştir. Öğrencilerin verilen ifadenin doğruluğunu gösterebilmek amacıyla belirli sayısal değerler verdikleri ve böylece bunu gösterdiklerine ikna oldukları görülmüştür. (Özer ve Arıkan 2002). Öğrencilerin kanıt yapma ve formal matematikle üniversitede ilk defa karşılaşmaları bunun önemli bir nedeni olabilir. Bu sebeple matematiksel dile alışma, soyut ve üst düzey düşünme, formal matematiği anlama konusunda zorluklar yaşamalarına sebep olmaktadır (Sarı ve diğerleri 2007). Knapp ve Zandieh (2004), örneklerin üniversite öğrencileri için kanıt şemalarında önemli bir yer tuttuğunu belirtmişlerdir. Oysa öğretmenlerin öğretici rollerinden dolayı doğrulama süreçlerinde öğrenci ve öğretmen adaylarından farklı bakış açısına sahip olması beklenir. Çünkü belirli sayısal değerlerin, önermeyi sağlıyor olması; kanıt için her zaman yeterli olmayabilir. Ayrıca öğretmenlerin, öğrencilerin rol modeli olduğu göz önünde bulundurulduğunda genellemeye varabilmesi; mantıksal çıkarımlarda bulunabilmesi ve öğrencilere kanıt yöntemlerini uygulama fırsatı verebilecekleri ortamı yaratması beklenebilir.

Öğretmenlerin deneysel temel örnekler kanıt şemasının ardından en fazla sergilemiş olduğu özelliklerin analitik aksiyomatik kanıt şemasına ait olduğu belirlenmiştir. Yapılan bazı çalışmalarda (Cadwallader Olsker 2007, Koichu 2009, İskenderoğlu 2010, Plaxco 2011) bulgularla bu durum paralellik göstermiştir. Alan yazındaki bu çalışmalarda lisans öğrencileri ve öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik kanıt şemasına ait özellikler sergiledikleri görülmüştür. Bu çalışmada öğretmenlerin kanıtlamalarını ifade etme konusunda zorluklar yaşadığı görülmüş olsa da kanıtlamalarında tanımları neden sonuç ilişkisi içerisinde kullandıkları görülmüştür. Öğretmenlerin ilköğretim düzeyinde kanıtı çok fazla

kullanmamaları ve lisans eğitimlerinin üzerinden zaman geçmiş olması bu zorluğu yaşamalarının sebebi olarak görülmüş olsa da öğretmenler eski öğrenmelerini hatırladıkça kanıtlarında analitik kanıt şeması özelliklerini göstermişlerdir.

Öğretmenlerin analitik aksiyomatik kanıt şeması özelliklerini sergilediği dört sorudan üçünün kümeler öğrenme alanına ait olduğu görülmüştür. Öğretmenlerin bu soruda analitik aksiyomatik kanıt şemasını kullanmalarındaki en önemli sebeplerden biri bu konuya ait bilgi birikimleri ya da tecrübeleri olabilir. Ayrıca bu konu ile ilgili soruda ağırlıklı olarak analitik aksiyomatik kanıt şemasının kullanılması, öğretmenlerin bu konuya ait tanımlara hâkim olması ve bu tanımları kullanarak zihinlerinde kendilerine ait oluşturdukları tutarlı basamaklarla düşünme sürecine girdiklerinin bir göstergesi olabilir. Bununla beraber belirtilen soruda direkt sonuç odaklı çözüm yapamayacakları için düşünme süreci gerçekleştirdikleri de söylenebilir.

Görev temelli görüşmeler incelendiğinde üç öğretmenin (Eylül, Fulya, Selin) çalışma kâğıdının aynı olan çoğu sorusunda, aynı kanıt şemasına ait özellikler sergiledikleri görülmüştür. Buradan bu üç öğretmenin bu sorularda benzer düşünme süreçleri gerçekleştirdikleri ya da benzer düşünme biçimlerine sahip oldukları söylenebilir. Diğer bir öğretmenin (Rana) ise bahsi geçen üç öğretmenden çoğunlukla farklı kanıt şemalarına ait özellikler gösterdiği belirlenmiştir.

Çalışmada, bazı öğretmenlerin; bazı sorularda birden fazla kanıt şemasına ait özelliklere sahip oldukları görülmüştür. Çalışmanın bulguları, yapılan diğer bazı çalışmaların (Sarı ve diğ., 2007) bulgularında da ifade edildiği şekilde Harel ve Sowder (1998)'in "Bir kişi birden fazla kanıt şemasına ait özellikler sergileyebilir." düşüncesiyle paralellik göstermiştir. Örneğin; bir öğretmen bazı sorularda analitik dönüşümsel kanıt şeması özelliklerini kanıtlamalarında göstermiş olmasına rağmen dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerinden izlere de rastlanmıştır. Aynı zamanda öğretmenlerin kanıt şemaları, Harel ve Sowder (1998)'in belirttiği gibi konudan konuya ve sorudan soruya farklılık göstermiştir. Tüm bu ifadeler öğretmenlerin sabit bir kanıt şeması özelliğine sahip olmadığını gösteriyor olabilir.

Çalışmada, bir öğretmen çalışma kâğıdının iki sorusunda analitik dönüşümsel kanıt şeması ile beraber dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerinden ve farklı başka bir öğretmen deneysel temel örnekler kanıt şeması ile beraber dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerinden izler sergilemiştir. Ancak belirtilen öğretmenlerin dışında farklı başka bir öğretmen deneysel algısal kanıt şeması özelliklerini ağırlıklı sergilerken analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait izler göstermiştir. Dolayısıyla bu çalışmada iki farklı kanıt şeması özelliği

sergileyen öğretmenlerin şemalarının bir tanesi dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şemasıdır, şeklinde kesin bir yargıya varılmamıştır. Bu çalışmada iki farklı kanıt şemasına ait özellikler sergileyen öğretmenlerin şemalarının mutlaka belirli bir kanıt şemasına ait denilebilecek ifadelerine rastlanmamıştır. Plaxco (2011), çalışmasında lisans düzeyinde üç matematik öğrencisinin; kanıt anlayışları arasındaki ilişkileri inceleyerek, bu öğrencilerden ikisinin analitik kanıt şemasıyla beraber dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması özelliklerini sergiledikleri sonucuna ulaşmıştır. Çontay (2017), bir öğretmen adayının sorulara ait doğrulamalarında iki farklı kanıt şeması özelliklerini bir arada sergiledikleri durumlarda kanıt şemalarından birinin kesinlikle dışsal alışkanlık edinilmiş kanıt şeması olduğunu ifade etmiştir. Bu çalışma bu yönüyle bahsi geçen çalışmalarla farklılık göstermiştir. Ancak belirtilen çalışmaların örneklemini öğretmen adayları oluşturmaktadır. Dolayısıyla örneklem farklılığından kaynaklanan bir sonuç olabilir.

Ulusal alan yazında yapılan çalışmaların bulgularına bakıldığında sınıf kademesi arttıkça kanıt şemalarından en üst düzey olarak görülen analitik kanıt şemalarında artış olduğu belirlenmiştir (Aydoğdu İskenderoğlu ve Baki 2011). Bazı çalışmalar (Knuth ve diğerleri 2009) sınıf kademesi arttıkça, kanıt şemalarının dışsal kanıt düzeyinden analitik kanıt düzeyine geçiş yaptığını veya doğruluğunu gösterme şekillerinin dışsal ve deneysel çıkarımlar yerine analitik çıkarımlara doğru değiştiğini göstermiştir. Bu çalışmanın eğitim öğretim basamaklarını tamamlayan öğretmenlerle gerçekleştirildiği düşünüldüğünde, öğretmenlerin analitik kanıt şemaları özelliklerini ağırlıklı sergilemesi; belirtilen çalışmalarla paralellik göstermesinin doğal bir sonucu olarak karşımıza çıkmıştır.

Bu çalışmada öğretmenlerin kanıt yöntemlerini (tümevarım, olmayana ergi...) unuttuklarını fakat okul matematiğinde de kullanmaları gerektiğini görev temelli görüşmelerde ifade ettikleri görülmüştür. Oehrtman ve Lawson (2008), çalışmalarında matematik öğretmenlerinin kanıtlamanın anlamları ve rolleri ile ilgili eksik anlayışa sahip olduklarını ayrıca kanıtın okul matematiğinde merkezi fikir olmaması gerektiğini vurguladıklarını belirtmişlerdir. Dolayısıyla belirtilen çalışma ile bu çalışma öğretmenlerin kanıta olan bakış açıları bakımından benzerlik göstermiştir. Bu sebeple kanıtı hem öğretmenin aktif kullanabilmesi hem de öğrencilerine aktarabilmesi için kanıtın öğretim programlarında sıklıkla yer alması ve kullanılması gerektiği söylenebilir.

Dışsal, deneysel ve analitik kanıt şemalarına ait özelliklerin kullanılmasının yanında bazı sorular boş bırakılmıştır. Öğretmenler bu sorularda eski öğrenmelerini hatırlamaya çalışmışlar,

sözel olarak ifade etmeye çalışsalar da yarım bırakmışlar ve kanıtlarını yapılandıramamışlardır. Bunun sebebi düşündüklerinin kanıt olmayacağına dair kuvvetli sezgilerinin olması ya da kendilerini sonuca ulaştırarak işlem basamaklarını hatırlamamaları ve sebepleriyle açıklayamamaları olabilir. Bunun yanında öğretmenlerin bazı sorularda da kanıtlamalarında hatalarına rastlanmıştır. Örneğin; önermenin hükmünden yola çıkarak kanıtlarını yapılandırmaya çalışmışlar bunun doğruluğunu savunmuşlardır. Bunun sebebinin yine eski öğrenmelerini hatırlamıyor ya da yanlış hatırlıyor olmalarından kaynaklandığı söylenebilir.

Bu çalışmada elde edilen bulgular incelendiğinde ilköğretim matematik öğretmenlerinin kanıta ait bilgilerinin geliştirilmesi ile kendilerini daha rahat ifade edebilecekleri ve kanıtlarını yapılandırma sürecinde daha özgüvenli olabilecekleri düşünülmektedir.

5.2 ÖNERİLER

Bu çalışmada ilköğretim matematik öğretmenlerinin kanıt şemalarına ait elde edilen bulguların sonuçları incelendiğinde öğretmenlerin ağırlıklı olarak analitik dönüşümsel kanıt şemasına ait özelliklere sahip oldukları görülmüştür. Bu sonuç, öğretmenlerin; kanıtlamada son basamak olarak görülen şemalara sahip olduklarını dolayısıyla kanıtlamaya yönelik etkinlikleri yapabilme potansiyellerinin yüksek olduğunu göstermektedir. O halde öğretmenlerin, öğrencilerine öğretim programındaki kazanımları direkt aktarmak yerine öğrencilerinin keşfetmelerini sağlayacak keşif çalışmaları yaptırabilecekleri fırsatın öğretmenler için oluşturulması ve bu keşif çalışmalarına yönelik eğitim uygulamalarının tasarlanması önerilebilir.

Bu çalışmada öğretmenlerin çekimser davranmalarının sebebi olarak lisans eğitiminden sonra kanıtı kullanmamalarının olduğu belirtilmiştir. Bunun önüne geçebilmek adına öğretmenlerin kanıt ve kanıtlamaya ait bilgilerini taze tutmak için ilköğretim kademesinde öğrencilerine matematik derslerinde kanıtı aktif şekilde kullanabilecekleri öğretim programları tasarlanabilir. Ayrıca NCTM (2000), süreç standartlarında akıl yürütme ve kanıt becerilerine sahip olunması gerektiği vurgulamıştır. Bunun yanı sıra MEB (2018) öğretim programında kanıta ait ifadelerin eksikliği görülmüştür. Bu sebeple kanıtın ve kanıtlamanın öğretim programlarındaki kazanımlara eklenmesi ve öğretmenlerin yoğun olarak kullanması sağlanabilir. Çünkü alan yazında da belirtildiği gibi öğrencinin kanıt yapma becerisinin gelişmesi için öğretmenin gerekli yeterlik ve donanıma sahip olması beklenmektedir. Dolayısıyla öğretmen, aktif bir

şekilde ders ortamlarında kanıt kullandığında kendi bilgilerinin de kalıcılığının artacağı ve bilgilerini öğrencilerine rahatlıkla aktaracağı düşünülebilir.

Bu çalışmada öğretmenlerin kanıtla ilgili eski öğrenmelerini unuttuklarını bundan dolayı da kanıt yapamayacaklarını belirttikleri görülmüştür. Oysa belirtildiği üzere öğretmenler kanıtlamada en son basamak olarak görülen analitik kanıt şemalarını ağırlıklı kullanmışlardır. Dolayısıyla öğretmenlerin kanıt yapabildikleri ancak kendilerine olan özgüvenlerinde ve kanıtla ilgili bilgilerinde eksikler olduğu görülmüştür. Bu sebeple kanıtla ilgili bakış açılarının olumlu yönde geliştirecek ortamların yaratılması ve kanıt yöntemlerine hâkim olacakları hizmet içi eğitim programları yürütülebilir.

Ulusal alan yazında kanıtla ilgili yapılan çalışmaların çoğunlukla öğretmen adaylarıyla yürütüldüğü görülmüştür (Öztürk ve Demirel 2022). Kanıt konusunda öğretmenlerin yeterlikleriyle ilgili alan yazındaki çalışmaların çoğunu yabancı araştırmacıların gerçekleştirdiği görülmektedir (Bayazıt 2017). Ayrıca ulusal alan yazında öğretmenlerin kanıt şemalarının belirlenmesine yönelik çalışmalara rastlanmamıştır. Dolayısıyla kanıt şemaları bağlamında çalışma yapacak araştırmacılara örneklem grubunun öğretmenlerden oluşturulması önerilebilir. Bu sayede yapılan çalışmaları karşılaştırarak öğretmenlere yönelik daha rasyonel öneriler geliştirmek mümkün olabilir.

KAYNAKLAR

- Almeida D** (2000) A Survey of Mathematics Undergraduates' Interaction with Proof: Some Implications for Mathematics Education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31 (6): 869-890.
- Almeida D** (2001) Pupils' Proof Potential. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 32 (1): 53-60.
- Almeida D** (2003) Engendering Proof Attitudes: Can The Genesis of Mathematical Knowledge Teach us Anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34 (4): 479-488.
- Altıntaş E, İlgün Ş ve Angay M** (2022) İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Problem Çözme ile İlgili Görüşleri. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 23 (2): 1223-1244.
- Altun A** (2000) Patterns in Cognitive Processes and Strategies in Hypertext Reading: A Case Study of Two Experienced Computer Users. *Journal of Educational Multimedia and Hypermedia*, 9 (1): 35-55.
- Arslan M** (2007) Eğitimde Yapılandırmacı Yaklaşımlar. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*, 40 (1): 41-61.
- Arslan S ve Yıldız C** (2010) 11. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünmenin Aşamalarındaki Yaşantılarından Yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35 (156): 17-31.
- Aydoğdu İskenderoğlu T** (2003) Farklı Sınıf Düzeylerindeki Öğrencilerin Matematik Problemlerini Kanıtlama Süreçleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, Bolu, 103 s.
- Aydoğdu İskenderoğlu T ve Baki A** (2011) Quantitative Analysis of Pre-service Elementary Mathematics Teachers' Opinions About Doing Mathematical Proof. *Educational Sciences: Theory and Practice*, 11 (4): 2285-2290.
- Aydoğdu T, Olkun S ve Toluk Z** (2003) İlköğretim 6, 7 ve 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Problemlerine Ürettikleri Çözümleri Kanıtlama Süreçleri. *Eğitim Araştırmaları*, 4 (12): 64-74.
- Aydoğdu İskenderoğlu T** (2016) Kanıt ve Kanıt Şemaları. *Matematik Eğitiminde Teoriler*, 1. Baskı, ISBN 978-605-318-380-8, Pegem Akademi, Ankara, 65-84.
- Baki A** (1996) Okul Matematiğinde Ne Öğretelim, Nasıl Öğretelim? *Matematik Dünyası*, 6 (3): 6-11.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Baki A** (1999) Öğretmen Eğitimi Üzerine Düşünceler. *Türk Yurdu*, 19 (138): 4-9.
- Baki A, Güven B ve Karataş İ** (2002) Dinamik Geometri Yazılımı Cabri ile Keşfederek Öğrenme. V. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunulan bildiri*, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Balcı A** (2005) *Açıklamalı Eğitim Yönetimi Terimleri Sözlüğü*. 7. Baskı, ISBN 978-605-364-074-5, Pegem Akademi, Ankara, 328 s.
- Baştürk S** (2010) First-Year Secondary School Mathematics Students' Conceptions of Mathematical Proofs and Proving. *Educational Studies*, 36 (3): 283-298.
- Bayazit İ** (2017) İspatın Önemi ve İspat Konusundaki Öğretmen Yeterliklerinin İncelenmesi. *Turkish Studies*, 12 (14): 19-40.
- Bell A W** (1976) A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7: 23-40.
- Büyüköztürk Ş, Kılıç-Çakmak E, Akgün Ö, Karadeniz Ş ve Demirel F** (2018) *Bilimsel Araştırma Yöntemleri*. 24. Baskı, ISBN 978-9944-919-28-9, Pegem Akademi, Ankara, 339 s.
- CadwalladerOlsker T** (2007) Proof Schemes and Proof Writing. *Unpublished PhD Thesis*, Claremont Graduate University, Claremont.
- Chazan D** (1993) High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4): 359-387.
- Creswell J W** (2009) Mapping The Field of Mixed Methods Research. *Journal of Mixed Methods Research*, 3 (2): 95-108.
- Cusi A and Malara N** (2007) Proofs Problems in Elementary Number Theory: Analysis of Trainee Teachers' Productions. In *Proceedings of The Fifth Congress of The European Society for Research in Mathematics Education*, 5: 591-600.
- Çontay E G** (2017) Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Şemaları. *Doktora Tezi*, Pamukkale Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Denizli, 298 s.
- Dede Y ve Karakuş F** (2014) Matematiksel İspat Kavramına Pedagojik Bir Bakış: Kuramsal Bir Çalışma. *Adıyaman University Journal of Educational Sciences*, 4 (2): 47-71.
- Dickerson D** 2006 Aspects of Preservice Teachers' Understandings of The Purposes of Mathematical Proof. In *Proceedings of The Twenty- eighth Annual Meeting of The North American Chapter of The International Group for The Psychology of Mathematics Education*, 2: 710-716.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Ellis A B** (2007) Connections Between Generalizing and Justifying; Students' Reasoning with Linear Relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3): 194-229.
- English L D and Watters J J** (2004) Mathematical Modelling with Young Children. *International Group for The Psychology of Mathematics Education*, 2: 335-342.
- Ergül A** (2014) Erken Matematiksel Akıl Yürütme Becerileri Değerlendirme Aracı Geliştirilmesi. *Doktora Tezi*, Hacettepe Üniversitesi, Sağlık Bilimleri Enstitüsü, Çocuk Gelişimi ve Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara, 186 s.
- Erlandson D A, Harris E L, Skipper B L and Allen S D** (1993) *Doing Naturalistic Inquiry: A Guide to Methods*. Newbury Park, CA: Sage.
- Ersözlü Z ve Çoban H** (2012) The Relationship Between Candidate Teachers' Mathematical Reasoning Skills and Their Levels of Using Metacognitive Learning Strategies. *Mustafa Kemal Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 9 (19): 205-221.
- Fawcett H P** (1938). *The Nature of Proof. Thirteenth Yearbook of The NCTM*. New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.
- Flores A** (2002) How Do Children Know That What They Learn in Mathematics is True? *Teaching Children Mathematics*, 8 (5): 269-279.
- Flores A** (2006) How Do Students Know What They Learn in Middle School Mathematics is True? *School Science and Mathematics*, 106 (3): 124-132.
- Galindo E** (1998) Implementing The Assessment Standards for School Mathematics: Assessing Justification and Proof in Geometry Classes Taught Using Dynamic Software. *The Mathematics Teacher*, 91 (1): 76-82.
- Gall M D, Borg W R and Gall J P** (1996) *Educational Research: An Introduction*. 6th edition, ISBN: 1-2807-4794-4, Longman Publishing, New York (e-book), 788s.
- Goetting M M** (1995) The College Students' Understanding of Mathematical Proof. *Unpublished PhD Thesis*, The University of Maryland, USA.
- Goldin G A** (2000) Affective Pathways and Representation in Mathematical Problem Solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (3): 209-219.
- Gökkurt B, Deniz D, Akgün L ve Soylu Y** (2017) Matematik Alanında İspat Yapma Süreci Üzerine Yapılmış Bazı Araştırmalardan Bir Derleme. *Başkent University Journal of Education*, 1 (1): 55-63.
- Grabiner J V** (2012) Why Proof? A Historian's Perspective. G. Hanna and M. de Villiers (eds.), In *Proof and Proving in Mathematics Education*, 15: 147-167. Springer, Dordrecht.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Grigoriadou O** (2012) Reasoning in Geometry. How First Learning to Appreciate The Generality of Arguments Helps Students Come to Grips with The Notion of Proof. *Unpublished Master Thesis*, University of Amsterdam, Holland.
- Güner P** (2012) Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinde DNR Tabanlı Öğretime Göre Anlama ve Düşünme Yollarının İncelenmesi. *Yüksek Lisans Tezi*, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Ana Bilim Dalı, İstanbul, 228 s.
- Güven B** (2002) Dinamik Geometri Yazılımı Cabri ile Keşfederek Geometri Öğrenme. *Yüksek Lisans Tezi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Trabzon, 182 s.
- Güven B, Çelik D ve Karataş İ** (2005) Ortaöğretimdeki Çocukların Matematiksel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi*, 30 (316): 35-45.
- Hanna G** (1989) More than Formal Proof. *For The Learning of Mathematics*, 9 (1): 20-23.
- Hanna G** (1990) Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21 (1): 6-13.
- Hanna G** (2000) Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44 (1): 5-23.
- Hanna G and Barbeau E** (2002) What is A Proof? *History of Modern Science and Mathematics*, 1: 36-48.
- Hanna G and de Villiers M** (2008). ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education. *ZDM*, 40 (2): 329-336.
- Harel G** (2001) The Development of Mathematical Induction as a Proof Scheme: A Model for DNR-Based Instruction. In S. Campbell and R. Zaskis (Eds.). Learning and Teaching Number Theory, *Journal of Mathematical Behavior*. New Jersey, Ablex Publishing Corporation, 185-212.
- Harel G** (2007) Students' Proof Schemes Revisited. In *Theorems in School* (pp. 65-78). Brill.
- Harel G** (2008). DNR Perspective on Mathematics Curriculum and Instruction, Part I: Focus on Proving. *ZDM*, 40 (3): 487-500.
- Harel G** (2014) Common Core State Standards for Geometry: An Alternative Approach. *Notices of The AMS*, 61 (1): 24-35.
- Harel G and Rabin J M** (2010) Brief Report: Teaching Practices Associated With The Authoritative Proof Scheme. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41 (1): 14-19.
- Harel G and Sowder L** (1998) Students' Proof Schemes: Results From Exploratory Studies. *American Mathematical Society*, 7: 234-283.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Harel G and Sowder L** (2005) Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7 (1): 27-50.
- Harel G and Sowder L** (2007) Toward Comprehensive Perspectives on The Learning and Teaching of Proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 2: 805-842.
- Haverhals N J** (2011) Students' Development in Proof: A Longitudinal Study. *Unpublished PhD Thesis*, University of Montana, Missoula, 575 pp.
- Healy L and Hoyles C** (2000) A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4): 396-428.
- Heinze A and Reiss K** (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. In *Proceedings of The Third Conference of The European Society for Research in Mathematics Education*, 4: 1-10.
- Henderson K and Tilbury D** (2004) *Whole-School Approaches to Sustainability: An International Review of Sustainable School Programs*. Canberra, Australia: Australian Government Department of The Environment and Heritage and The Australian Research Institute in Education for Sustainability (ARIES).
- Hersch R** (1993) Proving is Convincing and Explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (4): 389-399.
- Housman D and Porter M** (2003) Proof Schemes and Learning Strategies of Above-Average Mathematics Students. *Educational Studies in Mathematics*, 53 (2): 139-158.
- Houssart J and Evens H** (2011) Conducting Task-Based Interviews with Pairs of Children Consensus, Conflict, Knowledge Construction and Turn Taking. *International Journal of Research and Method in Education*, 34 (1): 63-79.
- İmamoğlu Y** (2010) An Investigation of Freshmen an Senior Mathematics and Teaching Mathematics Students' Conceptions and Practices Regarding Proof. *Doktora Tezi*, Boğaziçi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı, İstanbul, 223 s.
- İskenderoğlu T** (2010) İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıtlamayla İlgili Görüşleri ve Kullandıkları Kanıt Şemaları. *Doktora Tezi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Üniversitesi, İlköğretim Ana Bilim Dalı, Trabzon, 364 s.
- İskenderoğlu T, Baki A ve İskenderoğlu M** (2010) Proof Schemes Used by First Grade of Preservice Mathematics Teachers About Function Topic. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9: 531-536.
- İskenderoğlu T, Baki A ve Palancı M** (2011) Matematiksel Kanıt Yapmaya Yönelik Görüş Ölçeği: Geçerlik ve Güvenirlik Çalışması. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 5 (1): 181-203.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Jones K** (1997) Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof. *Mathematics Education Review*, 9: 21-32.
- Jones K** (2000) The Student Experience of Mathematical Proof at University Level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31 (1): 53-60.
- Jones K and Rodd M** (2001) Geometry and Proof. *Proceedings of The British Society for Research into Learning Mathematics*, 21 (1): 95-100.
- Karataş İ** (2002) 8. Sınıf Öğrencilerinin Problem Çözme Sürecinde Kullanılan Bilgi Türlerini Kullanma Düzeyleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Ana Bilim Dalı, Trabzon, 149 s.
- Kayagil S** (2012) İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri ve Bu Görüşlerin Bazı Değişkenlere Göre İncelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports and Science Education (IJTASE)*, 1 (2): 135-141.
- Kitcher P** (1984) *The Nature of Mathematical Knowledge*. Oxford University Press on Demand.
- Knapp J and Zandieh M** (2004) Examples as Tools for Understanding Proof in Geometry. *North American Chapter of The International Group for The Psychology of Mathematics Education*, 2: 675-677.
- Knapp J L** (2006) Students' Appropriation of Proving Practices in Advanced Calculus. *Unpublished Phd Thesis*, Arizona State University, USA.
- Knuth E J** (2002a) Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33 (5), 379-405.
- Knuth E J** (2002b) Teachers' Conceptions of Proof in The Context of Secondary School. *Mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education*, 5: 61-88.
- Knuth E J, Choppin J M and Bieda K N** (2009) Examples and Beyond. *Mathematics Teaching in The Middle School*, 15 (4): 206-211.
- Koichu B** (2009) What Can Pre-service Teachers Learn from Interviewing High School Students on Proof and Proving? *In Proceedings of The ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, 2: 9-15.
- Koichu B and Harel G** (2007) Triadic Interaction in Clinical Task-based Interviews with Mathematics Teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 65 (3): 349-365.
- LeCompte M D and Goetz J P** (1982) Problems of Reliability and Validity in Ethnographic Research. *Review of Educational Research*, 52 (1): 31-60.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Lee W I** (1999) The Relationship Between Students' Proof-writing Ability and Van Hiele Levels of Geometric Thought in A College Geometry Course. *Unpublished PhD Thesis*, College of Arts and Sciences Department of Mathematical Sciences, University of Northern Colorado, USA.
- Liu Y and Manouchehri A** (2013) Middle School Children's Mathematical Reasoning and Proving Schemes. *Investigations in Mathematics Learning*, 6 (1): 18-40.
- Maher C A and Martino A M** (1996) The Development of The Idea of Mathematical Proof: A 5-year Case Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2): 194-214.
- Maher C A and Sigley R** (2020) Task-based Interviews in Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 821-824.
- Mariotti M A and Balacheff N** (2008) Introduction to The Special Issue on Didactical and Epistemological Perspectives on Mathematical Proof. *ZDM*, 40 (3): 341-344.
- Martin T S, McCrone S M S, Bower M L W and Dindyal J** (2005) The Interplay of Teacher and Student Actions in The Teaching and Learning of Geometric Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 60 (1): 95-124.
- Martin W G and Harel G** (1989) Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1): 41-51.
- Martino A M and Maher C A** (1999) Teacher Questioning to Promote Justification and Generalization in Mathematics: What Research Practice has Taught Us. *The Journal of Mathematical Behavior*, 18 (1): 53-78.
- Masingila J O** (1998) Implementing The Professional Standards for Teaching Mathematics: Thinking Deeply About Knowing Mathematics. *The Mathematics Teacher*, 91 (7): 610-614.
- Mason J** (2001) Questions About Mathematical Reasoning and Proof in Schools. *Opening Address to QCA Conference, UK*.
- McCrone S S and Martin T S** (2004) The Impact of Teacher Actions on Student Proof Schemes in Geometry. In *Proceedings of The 26th Annual Meeting of The North American Chapter of The International Group for The Psychology of Mathematics Education*, 2: 593-602.
- McMillan E M** (2000) The New Sciences of Chaos and Complexity and Organisational Change: A Case Study of The Open University. *PhD Thesis*, The Open University, 431 pp.
- Mejia-ramos J P and Tall D** (2005) Personal and Public Aspects of Formal Proof: A Theory and A Single-case Study. In Hewitt D and Noyes A (Eds), *Proceedings of The Sixth British Congress of Mathematics Education held At The University of Warwick*, 97-104.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Merriam S B** (1998) *Qualitative Research and Case Study Applications in Education*. San Francisco: Jossey-Bass, 199-200.
- Miles M B and Huberman M A** (1994) *Qualitative Analysis: An Expanded Sourcebook*. 2nd edition, ISBN: 0-8039-4653-8, Thousand Oaks, CA: Sage, 337 pp.
- Milli Eğitim Bakanlığı** (2018) *Matematik Dersi Öğretim Programı* (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar). Ankara.
- Mingus T T and Grassl R M** (1999) Preservice Teacher Beliefs About Proofs. *School Science and Mathematics*, 99 (8): 438-444.
- Moore R C** (1994) Making The Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27 (3): 249-266.
- Moralı S, Uğurel İ, Türnüklü E ve Yeşildere S** (2006) Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14 (1): 147-160.
- National Council of Teachers of Mathematics** (1989) *Curriculum and Evaluation Standarts for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics** (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Norby K** (2013) Investigating Viable Arguments: Pre-service Mathematics Teachers' Construction and Evaluation of Arguments. *Unpublished PhD Thesis*, Montana State University, Montana, 218 pp.
- Oehrtman M and Lawson A E** (2008) Connecting Science and Mathematics: The Nature of Proof and Disproof in Science and Mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6 (2): 377-403.
- Oflaz G, Bulut N ve Akçakın V** (2016) Pre-service Classroom Teachers' Proof Schemes in Geometry: A Case Study of Three Pre-service Teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, 16: (63), 133-152.
- Ören D** (2007) An Investigation of 10th Grade Students' Proof Schemes in Geometry with Respect to Their Cognitive Styles and Gender. *Unpublished Master Thesis*, Middle East Technical University, Department of Secondary Science and Mathematics Education, Ankara, 105 pp.
- Özdemir E ve Devrim U** (2009) Elementary Mathematics Teacher Candidates Attitudes Towards Proof and Proving. *Education Sciences*, 4 (4): 1226-1236.
- Özer Ö ve Arıkan A** (2002) Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri. *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 16-18 Eylül 2002, Ankara, *Bildiriler Kitabı*, 2: 1083-1089.
- Öztürk T ve Kutlu D** (2022) Türkiye'de İspat Üzerine Yapılan Çalışmaların Analizi: Bir Sistemik Derleme. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 54: 32-68.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Pala O ve Narlı S** (2018) Matematik Öğretmen Adaylarının Sayılabilirlik Kavramına Yönelik İspat Şemalarının İncelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 12 (2): 136-166.
- Pala O ve Narlı S** (2018) Matematik Öğretmeni Adaylarının Sonsuz Kümelerin Denkliği ile İlgili İspatlama Yaklaşımları ve Yaşadıkları Güçlükler. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 9 (3): 449-475.
- Pekşen-Sağır P** (2013) Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapma Süreçlerinin İncelenmesi. *Yüksek Lisans Tezi*, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, İstanbul, 103 s.
- Pektaş O ve Bilgici G** (2019) Matematik Öğretmen Adaylarının Trigonometri Konusunda Kullandıkları Kanıt Şemalarının Öğrenme Stillere Göre İncelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 27 (3): 1347-1358.
- Peterson P L, Fennema E, Carpenter T P and Loef M** (1989) Teacher's Pedagogical Content Beliefs in Mathematics. *Cognition and Instruction*, 6 (1): 1-40.
- Plaxco D B** (2011). Relationship Between Students' Proof Schemes and Definitions. *Unpublished Master Thesis*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, USA.
- Polya G** (1962) *Mathematical Discovery*. 1st edition, ISBN 0-471-08975-3, Published Simultaneously in Canada, New York, 458 pp.
- Pólya G and Szegő G** (1945) Inequalities for The Capacity of a Condenser. *American Journal of Mathematics*, 67 (1): 1-32.
- Raman M** (2001) Beliefs About Proof in Collegiate Calculus. *Proceedings of The Twenty Second Annual Meeting of The North American Chapter for The International Group for The Psychology of Mathematics Education*, Snowbird, Utah, 595-603.
- Rav Y** (1999) Why Do We Prove Theorems? *Philosophia Mathematica*, 7 (1): 5-41.
- Recio A M and Godino J D** (2001) Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48 (1): 83-99.
- Riley K J** (2003) An Investigation of Prospective Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Proof and Refutations. *PhD Thesis*, Montana State University, Bozeman, Montana, 199 pp.
- Rodd M M** (2000) On Mathematical Warrants: Proof Does not Always Warrant, and A Warrant may be Other than A Proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (3): 221-244.
- Sarı Uzun M, Altun A ve Aşkar P** (2007) Undergraduate Students Mathematical Proof Processes in A Calculus Course A Case Study. *Ankara University, Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40 (2): 295-319.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Schmidt S and Bednarz N** (1997) Raisonnements Arithmétiques et Algébriques Dans un Contexte de Résolution de Problèmes: Difficultés Rencontrées Par Les Futurs Enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, 32 (2): 127-155.
- Schoenfeld A H** (2002) Making Mathematics Work for All Children: Issues of Standards, Testing and Equity. *Educational Researcher*, 31 (1): 13-25.
- Selden A and Selden J** (2003) Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves A Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34 (1): 4-36.
- Solomon Y** (2006) Deficit or Difference? The Role of Students' Epistemologies of Mathematics in Their Interactions with Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 61 (3): 373-393.
- Soto O D** (2010) Teacher Change in The Context of a Proof-centered Professional Development. *Phd Thesis*, San Diego State University, San Diego.
- Sowder L and Harel G** (1998) Types of Students' Justifications. *The Mathematics Teacher*, 91 (8): 670-675.
- Sowder L and Harel G** (2003) Case Studies of Mathematics Majors' Proof Understanding, Production and Appreciation. *Canadian Journal of Math, Science and Technology Education*, 3 (2): 251-267.
- Stylianides A J** (2007) The Notion of Proof in The Context of Elementary School Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65: 1-20.
- Stylianides A L** (2007) Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (3): 289-321.
- Stylianou D, Chae N and Blanton M** (2006) Students Proof Schemes: A Closer Look at What Characterizes Students Proof Conceptions. In *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2: 54-60.
- Swing S and Peterson P** (1988) Elaborative and Integrative Thought Processes in Mathematics Learning. *Journal of Educational Psychology*, 80 (1): 54.
- Şahin N ve Eraslan A** (2019) Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının Matematik Uygulamaları Dersinde Modelleme Etkinliklerinin Kullanılmasına Yönelik Görüşleri. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 10 (2): 373- 393.
- Şen C ve Güler G** (2015) Examination of Secondary School Seventh Graders' Proof Skills and Proof Schemes. *Universal Journal of Educational Research*, 3 (9): 617- 631.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Şengül S ve Güner P** (2013) DNR Tabanlı Eğitime Göre Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarının İncelenmesi. *The Journal of Academic Social Science Studies*, 6 (2): 869-878
- Tall D** (1998) The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof for All or Some? *Developments in School Mathematics Education Around the World*, 4: 117–136.
- Tall D** (2014) Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. In *Mathematics and Mathematics Education: Searching for Common Ground* (pp. 223-235), Springer, Dordrecht.
- Tucker T W** (1999) On The Role of Proof in Calculus Courses. *Contemporary Issues in Mathematics education*, 36: 31-35.
- Umay A** (2003) Matematiksel Muhakeme Yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 2003 (24): 234-243.
- Umay A** (2003) Okul Öncesi Öğretmen Adaylarının Matematik Öğretmeye Ne Kadar Hazır Olduklarına İlişkin Bazı İpuçları. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 2003 (25): 194-203.
- Umay A and Kaf Y** (2005) A Study on Flawed Reasoning in Mathematics. *Hacettepe University Journal of Education*, 28 (28): 188-195.
- Uygan C, Tanışlı D ve Köse N** (2014) İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıt Bağlamındaki İnançlarının, Kanıtlama Süreçlerinin ve Örnek Kanıtları Değerlendirme Süreçlerinin İncelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5 (2): 137-157.
- Weber K** (2010) Mathematics Majors' Perceptions of Conviction, Validity and Proof. *Mathematical Thinking and Learning*, 12 (4): 306-336.
- Yeşildere S ve Türnüklü E B** (2007) Öğrencilerin Matematiksel Düşünme ve Akıl Yürütme Süreçlerinin İncelenmesi. *Ankara University Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40 (1): 181-213.
- Yıldırım A ve Şimşek H** (2018) *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri*. 11. Baskı, Seçkin Yayıncılık, Ankara, 427 s.
- Yıldırım İ** (2004) Algılanan Sosyal Destek Ölçeğinin Revizyonu. *Eurasian Journal of Educational Research*, (17): 221-236.
- Yin R K** (2003) Designing Case Studies. *Qualitative research methods*, 5 (14): 359-386.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Yoo S (2008) Effects of Traditional and Problem-based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers. *PhD Thesis*, The University of Texas at Austin.

Zaimoğlu Ő (2012) 8. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreci ve Eğilimleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Kastamonu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Ana Bilim Dalı, Trabzon, 98 s.



EK AÇIKLAMALAR

EK 1: Çalışma Kâğıdı (Pilot Uygulama Öncesi)

1. İkizkenar üçgenin taban açılarının eşit olduğunu gösteriniz.
2. İkizkenar bir üçgende tabana indirilen dikmenin tabanı iki eş parçaya böldüğünü gösteriniz.
3. a ve b pozitif reel sayılar olmak üzere $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$ olduğunu gösteriniz.
4. Sonsuz çoklukta asal sayı olduğunu gösteriniz.
5. $\sqrt{3}$ 'ün irrasyonel olduğunu gösteriniz.
6. Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamının hipotenüsün karesine eşit olduğunu gösteriniz.
7. x tamsayı olmak üzere, eğer $5x-11$ çift tamsayı ise x tek tamsayıdır.
8. x tamsayı olmak üzere, eğer $5x-7$ tek ise o zaman $9x+2$ çift tamsayıdır.
9. n kenarlı düzgün çokgenin köşegen sayısının $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$ olduğunu gösteriniz.
10. n kenarlı bir düzgün çokgenin dış açılar toplamının 360° olduğunu gösteriniz.
11. n kenarlı bir düzgün çokgenin iç açılar toplamının $(n-2) \cdot 180^\circ$ olduğunu gösteriniz.
12. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere, eğer $a > b$ ise $c \cdot a < c \cdot b$ olduğunu gösteriniz.
13. A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \emptyset$ ise $A = \emptyset$ olduğunu gösteriniz.
14. Düzlemde birbirine paralel olan doğruların eğimlerinin eşit olduğunu gösteriniz.
15. Düzlemde birbirine dik olan doğruların eğimler çarpımı (-1) olduğunu gösteriniz.

EK 2: Çalışma Kâğıdı (Pilot ve Asıl Uygulama)

1. “İkizkenar üçgenin taban açıları eşittir.” Önermesini kanıtlayınız.
2. “İkizkenar bir üçgende tabana indirilen dikme tabanı iki eş parçaya böler.” Önermesini kanıtlayınız.
3. “Bir dik üçgende dik kenarların kareleri toplamı hipotenüsün karesine eşittir.” Önermesini kanıtlayınız.
4. “ x tamsayı olmak üzere, $5x - 11$ çift tamsayı ise x tek tamsayıdır.” Önermesini kanıtlayınız.
5. “ x tamsayı olmak üzere, $5x - 7$ tek tamsayı ise $9x + 2$ çift tamsayıdır.” Önermesini kanıtlayınız.
6. “ $a, b \in \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}^-$ olmak üzere, eğer $a > b$ ise $c \cdot a < c \cdot b$ dir.” Önermesini kanıtlayınız.
7. “ A evrensel kümenin bir alt kümesi olmak üzere, eğer $A \subset \emptyset$ ise $A = \emptyset$ dir.” Önermesini kanıtlayınız.
8. “Düzlemde birbirine paralel olan doğruların eğimleri eşittir.” Önermesini kanıtlayınız.
9. “Düzlemde birbirine dik olan doğruların eğimler çarpımı -1 ’ dir.” Önermesini kanıtlayınız.

EK 3: Kanıt Süreçlerine Ait Soru Formu (Pilot ve Asıl Uygulama)

- 1) Önermeyi kanıtlar mısın?
- 2) Önermenin doğruluğunu nasıl gösterirsin?
- 3) Önermenin doğruluğunu nasıl kanıtlarsın?
- 4) Önermenin doğruluğuna beni nasıl ikna edersin?
- 5) Göstermiş olduğun kanıtlamayı her durumda kullanır mısın?
- 6) Aklına gelen ilk doğrulama bu muydu?
- 7) Aklına ilk bu yöntemin gelme sebebi nedir?
- 8) Gerçekleştirdiğin doğrulamadaki yöntemi neden kullandın?
- 9) Kanıtlamanın doğru olduğundan nasıl emin olursun?
- 10) Başka yöntemle de kanıtlayabilir misin?

EK 4: Etik Kurulu Kararı

Evrak Tarih ve Sayısı: 24.05.2021-38952

Kurum Kayıt Tarihi ve
Sayısı:21.04.2021 / 34819

Protokol No: 171

30.04.2021



T.C
ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
İNSAN ARAŞTIRMALARI ETİK KURULU KARARI

ÇALIŞMANIN TÜRÜ:	Anket
BAŞLIK:	İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin İspat Şemalarının İncelenmesi
SORUMLU ARAŞTIRMACI:	Dr. Öğr. Üyesi Mustafa AKINCI
KARAR:	UYGUN

ETİK KURUL ÜYELERİ

Prof. Dr. Ertuğrul YILDIRIM
Başkan

Prof. Dr. Ali ARSLAN
Üye

Prof. Dr. Ahmet Ferda ÇAKMAK
Üye

Prof. Dr. Ahmet EFİLOĞLU
Üye

Doç. Dr. Ahmet Erkan KOCA
Üye

Doç. Dr. Tülay KUZLU AYYILDIZ
Üye

29.05.2014 tarih ve 2014/08-13 sayılı Senato Kararı ile kabul edilmiştir.

Bu belge, güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Evrak sorgulaması <https://turkiye.gov.tr/ebd?eK=5319&eD=BSR5AEJAR0&eS=38952> adresinden yapılabilir.

ÖZGEÇMİŞ

Funda KURTTEKİN, İlkokul ve ortaokulu Ereğli Cumhuriyet İlkokulu'nda, liseyi Kdz. Ereğli Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Lisans eğitimine 2010 yılında Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde başlayarak, 2014 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Şanlıurfa Siverek Güvenli İsmail Hakkı Bucak Ortaokulu'na atandı. 2014-2017 yıllarında buradaki görevinin ardından, 2017-2020 yıllarında Kdz. Ereğli Ormanlı İmam Hatip Ortaokulu'nda görev yaptı. 2020 yılında atandığı Kdz. Ereğli Kızılcapınar Ortaokulundaki görevine halen devam etmektedir.