

**ÇANKIRI KARATEKİN ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DÜZLEMSEL GRAFLAR VE TOPOLOJİ İLE İLİŞKİSİ**

**Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ÇANKIRI  
2022**

**Her hakkı saklıdır**

## TEZ ONAYI

Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH tarafından hazırlanan “**Düzlemsel Graflar ve Topoloji ile İlişkisi**” adlı tez çalışması 26/08/2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA

### Jüri Üyeleri :

**Başkan** : Doç. Dr. İbrahim ÖZEN  
Matematik Anabilim Dalı  
Marmara Üniversitesi

**Üye** : Doç. Dr. Faruk KARAASLAN  
Matematik Anabilim Dalı  
Çankırı Karatekin Üniversitesi

**Üye** : Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA  
Matematik Anabilim Dalı  
Çankırı Karatekin Üniversitesi

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof. Dr. İbrahim ÇİFTÇİ**  
**Enstitü Müdürü**

## ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum “**Düzlemsel Graflar ve Topoloji ile İlişkisi**” konulu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, tezin Çankırı Karatekin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nden başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve bu çalışmanın Çankırı Karatekin Üniversitesi tarafından kullanılan “Bilimsel İntihal Tespit Programı”yla tarandığını, “intihal içermediğini” beyan ederim. Çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması halinde ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm. Çankırı Karatekin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim (26/08/2022).

**Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH**

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

### DÜZLEMSEL GRAFLAR VE TOPOLOJİ İLE İLİŞKİSİ

Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH

Çankırı Karatekin Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA

Bu tezin hazırlanmasında kullanılan başlıca kaynak, Diestel (2017)'in "Graph Theory" kitabıdır. Esas itibariyle bizim yaptığımız, tezin başlığından da anlaşılacağı üzere, "düzlemsel graflar ve topoloji ile ilişkisi" konusunu anlamak ve anlatmak için, söz konusu kitabın dördüncü bölümünü Türkçeye çevirmekten ibarettir. Fakat tabii ki motamot bir çeviri yapılmamış, bir yandan bazı çok zorlu veya teknik ispatlar atlanırken, diğer yandan kitabın okuyucuya bırakılan bazı kısımları şerh edilerek konu daha anlaşılır bir şekilde sunulmuştur. Ayrıca, bu bölümün anlaşılabilmesi için ön şart durumunda olan graf teorisinin temel tanım ve teoremleri, mevzubahis kitabın birinci bölümünün ihtiyaç olunan kadarı teze eklenerek verilmiştir. Bunlara ek olarak, kaynaklar kısmında listelenmiş olan makalelere de başvurulmuştur. Ana hatlarıyla özetlemek gerekirse: Birinci bölümde, temel tanımların ardından, yollar ve çevrimler, bağlantılılık, ağaçlar ve ormanlar ve iki parçalı graflarla ilgili gerekli tanım ve teoremler işlenmiştir. İkinci bölümün ilk alt bölümünde, sonraki alt bölümlerde ihtiyacımız olacak temel topolojik kavramlara ve ilgili teoremlere kısaca değinilmiştir. İkinci alt bölümünde, düzlem grafların yapısal özellikleri çalışılmaya başlanmış, çok iyi bilinen Euler formülü ve bazı sonuçları ispat edilmiştir. Üçüncü alt bölümünde, bir düzlemsel grafin iki farklı düzlem çiziminin birbirinden nasıl farklı olabileceği incelenmiştir. Sonraki iki alt bölümde, bir soyut grafin ne zaman düzlemsel olduğu ile ilgili bazı klasik düzlemsellik kriterleri, özel olarak ünlü Kuratowski (1930) (ve Wagner 1937) teoremi ifade edilmiş ve mevzubahis kriterlerin bazılarının ispatı verilmiştir. İkinci bölüm, grafların cebirsel, renklendirme ve akış özellikleri ile çok ilginç bağlantıları bulunan bir kavram olan "düzlem dualitesi"nin işlendiği bir alt bölümle tamamlanmıştır. Tezin üçüncü, sonuç ve önerilerden önceki son bölümünde ise, mevzubahis kitabın dördüncü bölümünün notlar kısmı kullanılarak, tezin konusu ile ilgili kısa bir literatür taraması sunulmuştur.

**2022, 59 sayfa**

**ANAHTAR KELİMELER:** Düzlem grafları, Kuratowski teoremi, Düzlem dualitesi

## ABSTRACT

Master of Science Thesis

### PLANAR GRAPHS AND ITS CONNECTION WITH TOPOLOGY

Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH

Çankırı Karatekin University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Celalettin KAYA

The main source used in the preparation of this thesis is Diestel's (2017) "Graph Theory" book. Essentially, what we do is to translate the fourth chapter of the mentioned book into Turkish to understand and explain the subject of "planar graphs and their connection with topology", as can be understood from the title of the thesis. But of course, no literal translation was made, on the one hand, some very difficult or technical proofs were skipped, on the other hand, some parts of the book that were left to the reader were explained and the subject was presented more understandably. In addition, the basic definitions and theorems of graph theory, which are prerequisites for understanding this study, are given by adding the necessary part of the first chapter of the aforementioned book to the thesis. In addition to these, the articles listed in the references were also consulted. To summarize: In the first chapter, after the basic definitions, necessary definitions and theorems related to roads and loops, connectedness, trees and forests, and bipartite graphs are covered. In the first section of the second chapter, the basic topological concepts and related theorems that we will need in the next sections are briefly mentioned. In the second section, the structural properties of plane graphs have been studied, and the well-known Euler formula and some of its results have been proved. In the third section, it is examined how two different plane drawings of a planar graph can differ from each other. In the next two sections, some classical planarity criteria about when an abstract graph is planar, and in particular the famous Kuratowski (1930) (and Wagner 1937) theorem, are stated and proofs of some of these criteria are given. The second chapter is completed with a section where the concept of "plane duality", which has very interesting connections with the algebraic, coloring, and flow properties of graphs, is covered. In the third chapter of the thesis, before the conclusions and recommendation chapter, a brief literature review on the subject of the thesis is presented by using the notes section of the fourth chapter of the mentioned book.

**2022, 59 pages**

**Keywords:** Plane graphs, Kuratowski's theorem, Plane duality

## ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu çalışma derleme bir çalışmadır ve hazırlanmasında kullanılan başlıca kaynak Diestel (2017) dir: Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics, 173). Bu kitabın, tez için esas kaynak olarak alınabilmesi adına, danışman hocamız, Reinhard Diestel’le e-posta üzerinden iletişim kurmuş ve olumlu cevap almıştır.

Yazarın bilgilendirilmesiyle birlikte alınan izin sonrasında, graf teoride lisansüstü seviyede hazırlanmış en mükemmel kanyaklardan birisi olan bu kitap, tezin esas kaynağı olarak benimsenmiştir. Dolayısıyla, tezde geçen hemen hemen tüm şekiller, tanım ve teoremler Diestel (2017) den alınmış ve her birisi için ayrı ayrı atıf vermek yerine, bu durumun burada belirtilmesi daha uygun bulunmuştur. Tezde ifade edilmiş ve fakat ispat edilmemiş teoremlerin hemen hemen tümünün ispatı, yine mevzubahis kitapta bulunabilir.

Ayrıca, graf teori ile ilgili herhangi bir konu çalışmak isteyen herkesin ihtiyaç duyduğu temel tanım ve teoremler, diğer bir ifadeyle gerekli ön bilgiler doğal olarak aynıdır. Bu sebeple, bu tezin “graf teoriye giriş” bölümü, danışman hocamızla birlikte yapılan çalışmalarla, Abdulqadir Ramzi Ahmed SELI, Ibrahim Mohammed Abbas ALAMEEN ve Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH tarafından ortak olarak hazırlanmıştır ve dolayısıyla, adı geçen yüksek lisan öğrencilerinin her birinin tezlerinin bu ilk bölümleri aynıdır.

Her şeyden önce, rahman ve rahim olan Allah’a çok teşekkür ederim.

Bu tez sürecimin tamamlanmasında emeği geçen birçok kişiye teşekkür etmekten mutluluk duyarım. Bu çalışmanın hazırlanması ve yürütülmesi sırasında ilgi ve alakasını hiç eksik etmediği, ortaya çıkan her türlü problemin çözümünde bilgi ve deneyimleri ile yardım ettiği, tüm bu süreçte manevi desteğini daima hissettirdiği için çok değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Celalettin KAYA’ya şükranlarımı sunarım. Ayrıca araştırmam boyunca gösterdiği akıl hocalığı ve sabrı için kendisine sonsuz teşekkürler etmek istiyorum. ÇAKÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümünde görev yapan tüm öğretim üyelerine çok teşekkür ederim. Zor zamanlarımda beni her zaman yüreklendiren ve manevi desteğini esirgemeyen anneme babama teşekkür ederim. Destek olan kardeşlerime ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, çalışma yıllarım boyunca ve bu tezi araştırma ve yazma sürecim boyunca bana sürekli destek ve sürekli cesaret veren anne babama ve arkadaşlarıma çok derin şükranlarımı ifade etmeliyim. Bu başarı onlar olmadan mümkün olmazdı. Teşekkürler.

**Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH**

**Çankırı, Ağustos 2022**

## İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
SİMGELER DİZİNİ .....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	vi
1. GRAF TEORİYE GİRİŞ .....	1
1.1 Temel Tanımlar .....	1
1.2 Yollar ve Çevrimler .....	8
1.3 Bağlantılılık .....	13
1.4 Ağaçlar ve Ormanlar .....	17
1.5 İki Parçalı Graflar .....	25
2. DÜZLEMSEL GRAFLAR .....	28
2.1 Temel Topolojik Kavramlar .....	29
2.2 Düzlem Graflar.....	32
2.3 Çizimler.....	39
2.4 Düzlemsel graflar: Kuratowski Teoremi.....	42
2.5 Cebirsel Düzlemsellik Ölçütleri .....	44
2.6 Düzlem Dualitesi.....	49
3. LİTERATÜR TARAMASI .....	54
4. SONUÇ VE ÖNERİLER .....	56
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	59

## SİMGELER DİZİNİ

$G$	Graf
$E(G)$	$G$ grafının kenar kümesi
$\  G \ $	$G$ grafının kenar sayısı
$V(G)$	$G$ grafının köşe kümesi
$  G  $	$G$ grafının köşe sayısı
$\Delta(G)$	$G$ grafının maksimum derecesi
$\delta(G)$	$G$ grafının minimum derecesi
$\overline{G}$	$G$ grafının tümleyeni
$G = (V, E)$	Köşe kümesi $V$ ve kenar kümesi $E$ olan $G$ grafi



## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	$G = (V, E)$ grafinin bir çizimi . . . . .	1
Şekil 1.2	$G, G_1, G_2, G_3$ grafları . . . . .	5
Şekil 1.3	$G$ ve $H$ grafları . . . . .	5
Şekil 1.4	$G$ ve $H$ graflarının birleşimi, kesişimi ve farkı . . . . .	5
Şekil 1.5	Bir $G$ grafi ve tümleyeni . . . . .	6
Şekil 1.6	Bir $G$ grafi ve $L(G)$ çizgi grafi . . . . .	7
Şekil 1.7	Bir $G$ grafi içindeki $P^5$ yolu . . . . .	8
Şekil 1.8	$P, Q$ ve $nPyQz$ yolları . . . . .	9
Şekil 1.9	$ny$ kırıışına sahip bir $C^6$ çevrimi ve $C^3$ ve $C^5$ indüke çevrimleri . . . .	10
Şekil 1.10	Önerme 1.3 ün ispatında bahsedilen $P$ yolu (Diestel 2017) . . . . .	10
Şekil 1.11	Dört bileşenli bir $G$ grafi . . . . .	14
Şekil 1.12	$G$ grafi, $e = ny$ köprüsü, $v, n, y, z, w$ ayırıcı köşeleri . . . . .	15
Şekil 1.13	$\kappa(G) = 1, \lambda(G) = 2, \delta(G) = 3$ şartlarını sağlayan bir $G$ grafi . . . . .	16
Şekil 1.14	$K^4$ ün iki kopyası ve bir $e$ kenarından elde edilen bir $G$ grafi . . . . .	17
Şekil 1.15	Bir $T$ ağacı . . . . .	20
Şekil 1.16	$G = K^5$ tam grafi ve üç geren ağacı (Diestel 2017) . . . . .	20
Şekil 1.17	Bir $G$ grafi ve $G$ nin kökü $r$ olan bir $T$ normal geren ağacı (Diestel 2017)	24
Şekil 1.18	3–parçalı iki graf örneği (Diestel 2017) . . . . .	25
Şekil 1.19	$K_{3,3} = K_3^2$ iki parçalı tam grafinin üç farklı çizimi (Diestel 2017) . . . .	26
Şekil 1.20	$T + e$ grafi ve içindeki $C$ çevrimi (Diestel 2017) . . . . .	27
Şekil 2.1	Lemma(ii) de verilen yaylar (Diestel 2017) . . . . .	31
Şekil 2.2	$P$ yayı, $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$ nin $\mathcal{O}$ bölgesini ayırmaz (Diestel 2017) . . . .	31
Şekil 2.3	$G, X$ in bir alt-böl. ve $X, Y$ nin bir top. minörüdür (Distel 2017) . . . .	38
Şekil 2.4	$G, X$ in $Y$ içinde bir modelidir; $X, Y$ nin bir minörüdür (Distel 2017) .	39
Şekil 2.5	$C_e$ esas çevrimi ve $D_f$ esas kesimi (Distel 2017) . . . . .	47
Şekil 2.6	Bir $G$ düzlem grafi ve duali $G^*$ (Distel 2017) . . . . .	50

# 1. GRAF TEORİYE GİRİŞ

Bu bölümde, graf teori ile ilgili temel kavramlar ve teoremler verilecektir.

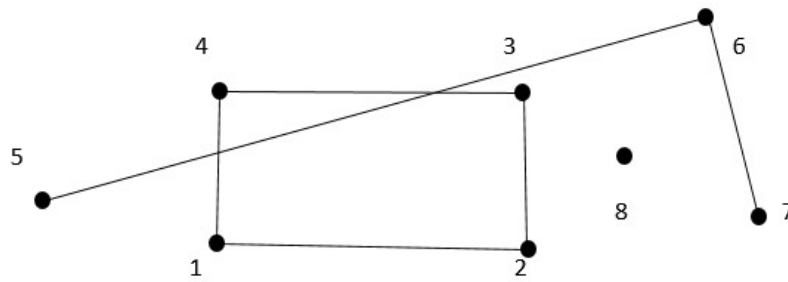
## 1.1 Temel Tanımlar

**Tanım 1.1** Bir  $G$  grafi,  $E \subseteq [V]^2$ , yani  $E, V$ 'nin 2-elemanlı alt kümelerinin kümesinin bir alt kümesi olmak üzere,  $G = (V, E)$  biçiminde bir küme çiftidir.  $V$  nin bir elemanı "köşe" (veya "nokta") ve  $E$  nin bir elemanı "kenar" olarak adlandırılır.

Şu andan itibaren,  $G$  her zaman bir grafi gösterecektir.

Bir grafi noktalar ve doğru (veya eğri) parçaları kullanarak resmedebiliriz şöyle ki eğer  $\{u, v\} \in E$  ise,  $u, v \in V$  köşelerine karşılık gelen noktalar bir doğru/eğri ile birleştirilir. Noktaların ve eğrilerin nasıl çizildiğinin herhangi bir önemi yoktur; önemli olan tek husus, köşeler arasındaki komşu olma ve olmama ilişkisinin korunmasıdır.

**Örnek 1.1**  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ ,  $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}\}$  olsun. Bu durumda,  $G = (V, E)$  grafını Şekil 1.1 deki gibi çizebiliriz.



**Şekil 1.1**  $G = (V, E)$  grafının bir çizimi

**Notasyon 1.1** Bir  $G$  grafının köşe kümesi  $V(G)$ , kenar kümesi  $E(G)$  ile gösterilir.

**Not 1.1**  $v \in V(G)$  veya  $e \in E(G)$  yerine, sırayla  $v \in G$  veya  $e \in G$  yazabiliriz.

**Tanım 1.2** Bir  $G$  grafinin köşelerinin (karşılık olarak, kenarlarının) kümesinin eleman sayısına, bu grafin "mertebesi" (karşılık olarak, "derecesi") denir ve  $|G|$  (karşılık olarak,  $\|G\|$ ) biçiminde gösterilir. Bir graf mertebesine göre, "sonlu graf", "sonsuz graf", "sayılabilir graf" vesaire biçiminde adlandırılır.

**Tanım 1.3**  $G = (\phi, \phi)$  grafına "boş graf" denir.

**Tanım 1.4** Eğer bir  $G$  grafinin mertebesi 0 veya 1 ise, bu grafa "trivial graf" denir.

**Tanım 1.5**  $G = (V, E)$  bir graf ve  $v \in V, e \in E$  olsun. Eğer  $v \in e$  ise  $v$  köşesi  $e$  kenarına veya  $e$  kenarı  $v$  köşesine "bağlıdır" denir. Eğer  $e = \{v, w\}$  ise,  $v$  ve  $w$  köşelerine  $e$  nin "uç köşeleri" veya "uçları" denir ve bu durumda,  $e$  kenarı,  $v$  ve  $w$  köşelerini "bağlar" veya "birleştirir" denir.

**Notasyon 1.2** Bir  $e = \{x, y\}$  kenarı,  $xy$  veya  $yx$  biçiminde yazılabilir.

**Tanım 1.6**  $G = (V, E), X, Y \subseteq V$  ve  $x \in X, y \in Y$  olmak üzere,  $e = xy \in E$  olsun. Bu durumda,  $e = xy$  bir " $X - Y$  kenarı" olarak adlandırılır. Bir  $F \subseteq E$  kümesindeki tüm  $X - Y$  kenarlarının kümesi,  $F(X, Y)$  biçiminde gösterilir.

**Notasyon 1.3**  $F(\{x\}, Y)$  ve  $F(X, \{y\})$ , basit bir şekilde sırasıyla,  $F(x, Y)$  ve  $F(X, y)$  biçiminde gösterilir.  $F(v), F \subseteq E$  kümesindeki  $v \in V$  köşesine bağlı tüm kenarların kümesini gösterir.

**Tanım 1.7**  $x, y \in V(G)$  ve  $e \neq f \in E(G)$  olsun. Eğer  $xy \in E(G)$  ise,  $x$  ve  $y$  köşeleri "bağlıdır" veya "komşudur" denir. Eğer  $e$  ve  $f$  kenarlarının ortak bir uçları var ise,  $e$  ve  $f$  kenarları "bağlıdır" denir. Eğer  $G$  grafinin birbirinden farklı herhangi iki köşesi bağlı ise,  $G$  ye bir "tam graf" denir ve  $n$  köşeli bir tam graf  $K^n$  biçiminde gösterilir. Ayrıca  $K^3$ , "üçgen" olarak adlandırılır.

**Tanım 1.8** Köşelerin bir kümesindeki veya kenarların bir kümesindeki herhangi iki eleman bağlı değil ise, bu kümelerin her birine "bağımsız" küme denir.

**Tanım 1.9**  $G = (V, E), H = (W, F)$  iki graf ve  $q : V \rightarrow W$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $q$  fonksiyonu köşeler arasındaki komşuluk ilişkisini koruyor ise, yani  $xy \in E$  iken  $q(x)q(y) \in F$  ise;  $q$  fonksiyonuna,  $G$  grafından  $H$  grafına bir "homomorfizma" denir.

**Not 1.2** Eğer  $z \in q(V)$ , yani  $z$  köşesi,  $q$  fonksiyonunun görüntü kümesinde ise,  $q^{-1}(z) = \{x \in V : q(x) = z\} \subseteq V$  alt kümesi bağımsızdır: Diyelim ki  $q^{-1}(z)$  bağımsız olmasın. Bu durumda,  $q^{-1}(z)$  içinde komşu olan  $x$  ve  $y$  gibi iki köşe vardır. Şimdi,  $q(x) = z = q(y)$  olduğundan,  $\{q(x), q(y)\} = \{z\}$  elde ederiz. Fakat  $\{z\}$ ,  $W$  nun 2-elemanlı bir alt kümesi değildir, yani  $\{z\} \notin [W]^2$  dir.

**Tanım 1.10** Bir önceki tanımda verilen  $q$  fonksiyonu bire-bir ve örten,  $q^{-1}$  fonksiyonu da bir homomorfizma ise,  $q$  fonksiyonuna bir "izomorfizma" denir. Bu durumda,  $G$  ve  $H$  grafları "izomorfiktir" denir ve  $G \simeq H$  yazılır. Eğer  $q$  bir izomorfizma ve  $H = G$  ise,  $q$ 'ya  $G$  nin bir "otomorfizması" denir.

**Not 1.3**  $q : V(G) \rightarrow V(H)$  bir izomorfizmadır ancak ve ancak  $q$  bire-bir ve örten bir fonksiyondur ve " $xy \in E(G) \Leftrightarrow q(x)q(y) \in E(H)$ " dir:

( $\Rightarrow$ )  $q$  fonksiyonu, izomorfizma tanımını gereği, bire-bir ve örtendir.

Ayrıca,  $xy \in E(G) \Leftrightarrow q(x)q(y) \in E(H)$  dir:

( $\Rightarrow$ )  $xy \in E(G) \Rightarrow q(x)q(y) \in E(H)$  dir, çünkü  $q$  bir homomorfizmadır.

( $\Leftarrow$ )  $x'y' \in E(H) \Rightarrow q$  örten olduğundan,  $q(x) = x'$  ve  $q(y) = y'$  olacak şekilde  $x, y \in V(G)$  vardır.  $\Rightarrow q(x)q(y) \in E(H)$  dir.

$\Rightarrow q^{-1}(q(x))q^{-1}(q(y)) \in E(G)$  dir, çünkü  $q^{-1}$  bir homomorfizmadır.  $\Rightarrow xy \in E(G)$  dir.

( $\Leftarrow$ ) Bu izomorfizma tanımıdır. Yani:  $q$  bire-bir ve örten,  $q$  ve  $q^{-1}$  birer homomorfizma olduğundan,  $q$  bir izomorfizmadır.

**Not 1.4** İzomorfik graflar esasında aynı graflardır. Bu sebeple,  $G \simeq H$  yerine,  $G = H$  yazabiliriz.

**Tanım 1.11** Grafların izomorfizma altında korunan bir özelliğine, bir "graf özelliği" denir. Grafların kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon, eğer tüm izomorfik graflarda aynı değeri alıyor ise, bu fonksiyona bir "graf değişmezi" denir.

**Örnek 1.2**  $K^4$  tam grafini "içermek" bir graf özelliğidir: Eğer  $G$  herhangi ikisi birbirine komşu dört köşe içeriyor ve  $H \simeq G$  ise,  $H$  de böylesi dört köşe içerir.

Ayrıca, köşe sayıları, kenar sayıları, derecesi aynı olan köşelerin sayıları vs. en temel graf değişmezleridir.

**Tanım 1.12**  $G = (V, E)$  ve  $H = (W, F)$  iki graf olsun.

$G$  ve  $H$  graflarının "birleşimi":  $G \cup H := (V \cup W, E \cup F)$  grafidir.

$G$  ve  $H$  graflarının "kesişimi":  $G \cap H := (V \cap W, E \cap F)$  grafidir.

Eğer  $G \cap H = \emptyset$  ise,  $G$  ve  $H$  grafları "ayrıktır" denir.

**Tanım 1.13** Eğer  $W \subseteq V$  ve  $F \subseteq E$  ise,  $H$  grafına  $G$  grafinin "altgrafı" dır denir ve  $H \subseteq G$  biçiminde gösterilir.

Eğer  $H \subseteq G$  ve  $H \neq G$  ise,  $H$  ye  $G$  nin bir "özaltgrafı" denir.

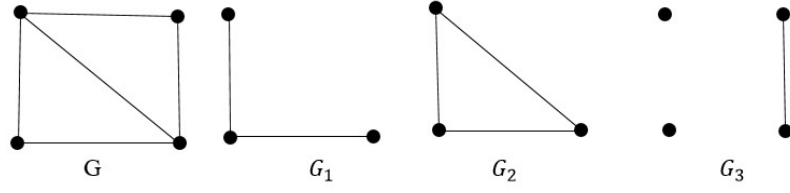
Eğer  $H \subseteq G$  ve  $H, G$  nin her iki ucu da  $V(H) = W$  da olan tüm kenarlarını içeriyor, yani  $\{x, y\} \in E$  ve  $x, y \in W$  iken,  $\{x, y\} \in F$  oluyor ise,  $H$  ye  $G$  nin bir "indüke altgrafı" denir.

Eğer  $H, G$  nin bir indüke altgrafı ise,  $W, G$  grafi içinde  $H$  yi "gerer" denir ve  $H = G[W]$  biçiminde gösterilir.

Eğer  $H \subseteq G$  ve  $W = V$  ise,  $H$  ye  $G$  nin bir "geren altgrafı" denir.

**Notasyon 1.4**  $H \subseteq G$ , indüke veya değil,  $G$  nin bir altgrafı olsun. Bu durumda,  $G[V(H)]$  yerine,  $G[H]$  gösterimini kullanırız.

**Örnek 1.3** Şekil 1.2 de verilen  $G_1, G_2, G_3$  graflarını ele alalım. Bu durumda,  $G_1, G_2, G_3$ ,  $G$  nin altgraflarıdır.  $G_1$  bir indüke altgraf değildir, fakat  $G_2$  bir indüke altgraftır.  $G_2$  bir geren altgraf değildir, fakat  $G_3$  bir geren altgraftır.



Şekil 1.2  $G, G_1, G_2, G_3$  grafları

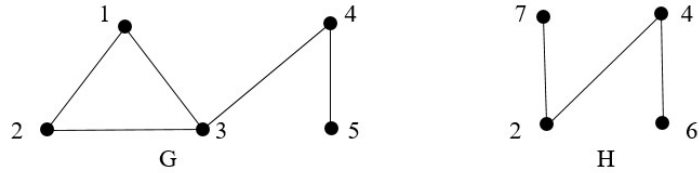
**Tanım 1.14**  $G = (V, E)$  bir graf,  $U$  bir köşeler kümesi ( $U \subseteq V$  veya değil) ve  $F \subseteq [V]^2$  olsun. Bu durumda,  $G - U := G[V \setminus U]$ , yani  $G - U, G$  grafindan,  $V \cap U$  kümesindeki köşelerinin ve bu köşelere bağlı tüm kenarların silinmesiyle elde edilen graftır. Ayrıca,  $G - F$  ve  $G + F$  grafları, sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$G - F := (V, E \setminus F) \quad \text{ve} \quad G + F := (V, E \cup F).$$

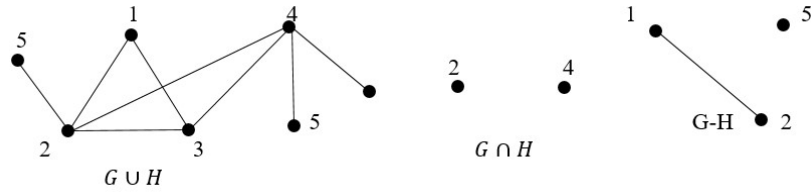
**Notasyon 1.5** Eğer  $U = \{v\}$  ise,  $G - \{v\}$  yerine,  $G - v$  yazılır. Ayrıca  $H$  herhangi bir altgraf olmak üzere,  $G - V(H)$  yerine,  $G - H$  yazılır.

Eğer  $F = \{e\}$  ise,  $G - \{e\}$  ve  $G + \{e\}$  yerine sırasıyla,  $G - e$  ve  $G + e$  yazılır.

**Örnek 1.4**  $G$  ve  $H$ , Şekil 1.3 de verilen graflar olsun.  $G$  ve  $H$  graflarının birleşimi, kesişimi ve farkı Şekil 1.4 de verilmiştir.



Şekil 1.3  $G$  ve  $H$  grafları



Şekil 1.4  $G$  ve  $H$  graflarının birleşimi, kesişimi ve farkı

**Tanım 1.15** Eğer bir  $G = (V, E)$  grafi bir graf özelliğini sağlıyor, fakat aynı özelliği sağlayan  $E \subsetneq F$  olacak şekilde başka bir  $H = (V, F)$  grafi yok ise;  $G$  grafi bu özelliğe göre "kenar-maksimal" dir denir. Genel olarak, eğer bir graf, (başka bir sıralama bağıntısı verilmemişse) altgraf bağıntısına göre, bir graf özelliğini sağlayan maksimal veya minimal graf ise, bu grafa bu özelliği göre "maksimal veya minimal" dir denir.

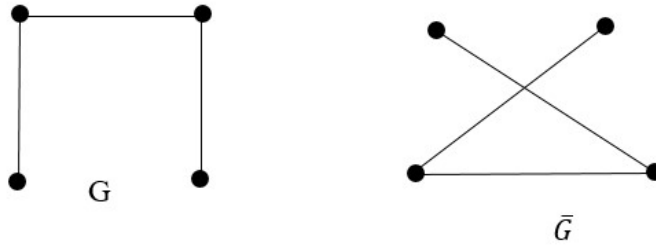
**Tanım 1.16**  $G$  ve  $H$  ayrık iki graf olsun. Bu durumda,  $G * H$  grafi:

$$G * H := (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{e = xy : x \in V(G), y \in V(H)\})$$

biçiminde tanımlanır.

**Tanım 1.17**  $G$  grafının "tümleyeni"  $\bar{G} := (V(G), [V]^2 - E(G))$  biçiminde tanımlanır.  $G$  grafının "çizgi grafi"  $L(G)$ , köşe kümesi  $W = E$  ve kenar kümesi  $F = \{xy : x, y \in W \text{ ve } xy \text{ kenarları } G \text{ grafi içinde komşudur}\}$ . Yani,  $G$  nin çizgi grafi  $L(G)$ ,  $G$  nin kenar kümesi  $E$  yi köşe kümesi olarak olan bir graftır öyle ki " $x, y \in E$  komşu iki köşedir  $\Leftrightarrow x, y, G$  içinde bağlı / komşu iki kenardır".

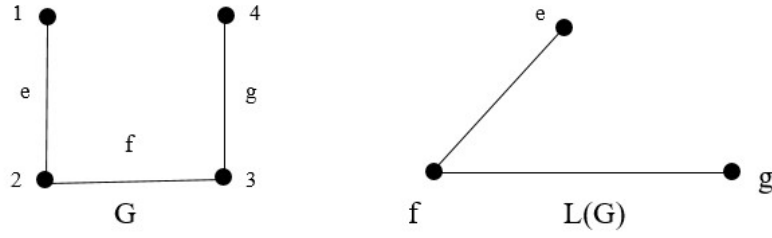
**Örnek 1.5** Şekil 1. 5 de  $G$  ve  $\bar{G}$  grafları verilmiştir. Dikkat edilirse,  $G \simeq \bar{G}$  dir.



**Şekil 1.5** Bir  $G$  grafi ve tümleyeni

**Örnek 1.6** Şekil 1. 6 da  $G$  grafi ve  $G$  nin çizgi grafi  $L(G)$  verilmiştir.

**Tanım 1.18**  $G = (V, E)$ , boştan farklı bir graf ve  $U \subseteq V$  olsun. Bir  $v \in V(G)$  köşesine komşu tüm köşelerin kümesi,  $N_G(v)$  veya daha basitçe  $N(v)$  biçiminde gösterilir. Genel olarak,  $V(U) = \{x \in V \setminus U : xy \in E \text{ olacak şekilde bir } y \in U \text{ vardır}\}$  kümesi,  $U$  nun "komşu" kümesi olarak adlandırılır.



**Şekil 1.6** Bir  $G$  grafi ve  $L(G)$  çizgi grafi

**Tanım 1.19** Bir  $v$  köşesinin "derecesi"  $d_G(v) = |E(v)|$ ,  $v$  köşesine bağlı kenar sayısıdır ve graflar için (multi graflar için değil)  $d_G(v) = |N(v)|$  dir. ( $d_G(v)$  yerine,  $d(v)$  de yazılır.)

Derecesi sıfır olan köşe, "izole" köşe olarak adlandırılır.

$\delta(G) := \min\{d(v) : v \in V\}$  sayısına,  $G$  grafinin "minimum derecesi" denir.

$\Delta(G) := \max\{d(v) : v \in V\}$  sayısına,  $G$  grafinin "maksimum derecesi" denir.

$k \in N$  olmak üzere, her  $v \in V$  için  $d(v) = k$  ise,  $G$  ye bir " $k$ -düzgün" graf denir. Özel olarak, 3-düğün grafa, "kübik" graf denir.

**Tanım 1.20**  $G$  nin "ortalama derecesi"  $d(G) := \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$  ve  $\epsilon := \frac{|E|}{|V|}$  olarak tanımlanır.

**Not 1.5**  $\delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$  dir:

Let  $|V| = n$  olsun. Her  $v \in V$  için, tanım gereği  $\delta(G) \leq d(v) \leq \Delta(G)$  dir.

$\Rightarrow \sum_{v \in V} \delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) \leq \sum_{v \in V} \Delta(G)$ .  $\Rightarrow n\delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) \leq n\Delta(G)$ .

$\Rightarrow \delta(G) \leq \frac{1}{n} \sum_{v \in V} d(v) \leq \Delta(G) \Rightarrow \delta(G) \leq d(G) \leq \Delta(G)$  dir.

**Önerme 1.1**  $|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} d(G) |V|$  dir. Bu sebeple,  $\epsilon(G) = \frac{1}{2} d(G)$  dir.

**İspat.**  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| \Rightarrow |E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} |V| \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v) = \frac{1}{2} |V| d(G)$ .

$\therefore |E| = \frac{1}{2} d(G) |V| \Rightarrow \frac{|E|}{|V|} = \frac{1}{2} d(G) \Rightarrow \epsilon(G) = \frac{1}{2} d(G)$ . ■

**Önerme 1.2** Bir grafta derecesi tek olan köşelerin sayısı çifttir.

**İspat.**  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$  bir çift sayıdır.  $\therefore$  Derecesi tek olan köşelerin sayısı çifttir. ■

## 1.2 Yollar ve Çevrimler

**Tanım 1.21** Köşe kumesi  $V = \{n_0, n_1, \dots, n_k\}$  ve kenar kümesi  $E = \{n_0n_1, n_1n_2, \dots, n_{k-1}n_k\}$  olan, boştan farklı  $P = (V, E)$  grafına,  $n_0$  köşesinden  $n_k$  köşesine veya  $n_0$  ile  $n_k$  arasında bir "yol / patika" denir.

Dikkat edilirse bir yol için tüm köşeler birbirinden farklıdır, yani herhangi bir köşe tekrar etmemektedir.  $P$  yolunun "uçları" olan  $n_0$  ve  $n_k$  köşeleri,  $P$  yolu ile birbirine "bağlıdır" denir.  $n_1, \dots, n_{k-1}$  köşelerine,  $P$  nin "iç köşeleri" denir.  $P$  yolundaki kenar sayısına,  $P$  yolunun "uzunluğu" denir.  $k$  uzunluğundaki yol  $P^k$  ile gösterilir. Dikkat edilirse,  $k = 0$  olabilir ve  $P^0 = K^1$  dir.

**Notasyon 1.6**  $P = (\{n_0, \dots, n_k\}, \{n_0n_1, \dots, n_{k-1}n_k\})$  bir yol olsun. Bu durumda,  $0 \leq i \leq j \leq k$  olmak üzere, aşağıdaki gösterimler kullanılır:

$$P := n_0n_1 \dots n_k \quad \text{ve} \quad \dot{P} := n_1 \dots n_{k-1};$$

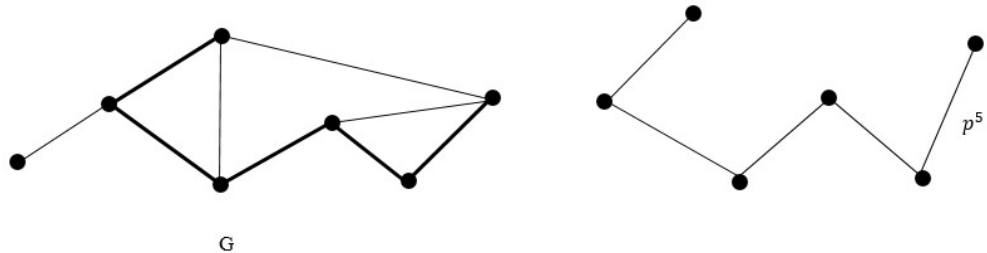
$$Pn_i := n_0 \dots n_i \quad \text{ve} \quad P\dot{n}_i := n_0 \dots n_{i-1};$$

$$n_iP := n_i \dots n_k \quad \text{ve} \quad \dot{n}_iP := n_{i+1} \dots n_k;$$

$$n_iPn_j := n_i \dots n_j \quad \text{ve} \quad \dot{n}_iP\dot{n}_j := n_{i+1} \dots n_{j-1}.$$

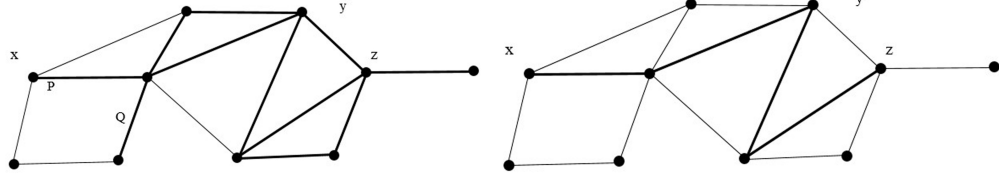
Yolların uç uca eklenmesi için de benzer gösterim kullanılır. Örneğin, eğer üç  $P, Q, R$  yolunun birleşimi  $Px \cup xQy \cup yR$  bir yol ise, bu yol kısaca  $PxQyR$  biçiminde gösterilir.

**Örnek 1.7** Şekil 1.7 de bir  $G$  grafı ve içindeki bir  $P^5$  yolu sağ tarafında verilmiştir.



Şekil 1.7 Bir  $G$  grafı içindeki  $P^5$  yolu

**Örnek 1.8** Şekil 1.8 de bir  $G$  grafi ve noktalı kenarlarla da içindeki  $P$  ve  $Q$  yolları gösterilmiştir. Ayrıca,  $nPyQz$  yolu sağ tarafta yine noktalı kenarlarla gösterilmiştir.



**Şekil 1.8**  $P, Q$  ve  $nPyQz$  yolları

**Tanım 1.22**  $G = (V, E)$  ve  $H$  graflar,  $A, B \subseteq V$  ve  $P = n_0 \dots n_k$  olsun.

Eğer  $V(P) \cap A = \{n_0\}$  ve  $V(P) \cap B = \{n_k\}$  ise,  $P$  yolu bir " $A - B$  yolu" olarak adlandırılır.  $\{a\} - B$  yolu, kısaca  $a - B$  biçiminde gösterilir.

Eğer iki veya daha çok yolun iç köşelerinin kümeleri ikişer ikişer ayrık kümeler ise, bu yollar "bağımsız" yollar olarak adlandırılır.

Eğer  $P$  yolu  $H$  grafini sadece uç köşelerinde kesiyor ise,  $P$  yolu bir " $H$ -yolu" olarak adlandırılır.

**Not 1.6** Dikkat edilirse:

- 1) İki  $a - b$  yolu  $P$  ve  $Q$  bağımsızdırlar  $\Leftrightarrow V(P) \cap V(Q) = \{a, b\}$  dir.
- 2) Eğer  $P$  yolu uzunluğu 1 olan bir  $H$ -yolu ise,  $P$  nin kenarı,  $H$  grafına ait bir kenar değildir.

**Tanım 1.23**  $k \geq 3$  ve  $P = n_0 \dots n_{k-1}$  uzunluğu  $k - 1$  olan bir yol olsun. Bu durumda,  $C := P + n_{k-1}n_0$  grafına bir "çevrim" veya "döngü" denir. Bir çevrim, köşelerinin listelemeyle gösterilebilir. Örneğin,  $C = P + n_{k-1}n_0$  çevrimi,  $C = n_0n_1 \dots n_{k-1}n_0$  biçimde gösterilir. Bir çevrimin kenar sayısına çevrimin "uzunluğu" denir. Uzunluğu  $k$  olan bir çevrim  $C^k$  biçiminde gösterilir ve " $k$ -çevrim" olarak adlandırılır.

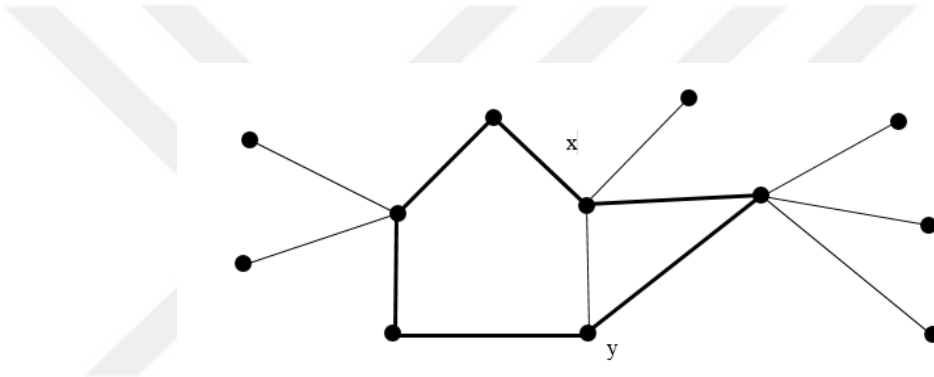
**Tanım 1.24** Bir  $G$  grafında, en kısa çevrimin uzunluğuna  $G$  nin "etrafi (girth)"; en uzun çevrimin uzunluğuna  $G$  nin "çevresi (circumfenence)" denir ve sırasıyla,  $g(G)$  ve  $c(G)$  biçiminde gösterilir.

**Not 1.7** Eğer  $G$  içinde hiçbir çevrim yoksa, etrafı  $\infty$  ve çevresi 0 olarak tanımlanır.

**Tanım 1.25**  $C$ ,  $G$  içinde bir çevrim ve  $xy \in E(G)$  olsun. Eğer  $x, y \in V(C)$  ve  $xy \notin E(C)$  ise,  $xy$  kenarına,  $C$  çevrimin bir "kirişi" denir.

**Not 1.8**  $C$ ,  $G$  grafının bir indüke çevrimi olsun. Bu durumda,  $C$  bir indüke altgraf ve bir çevrim olduğundan,  $C$  nin herhangi bir kirişi yoktur.

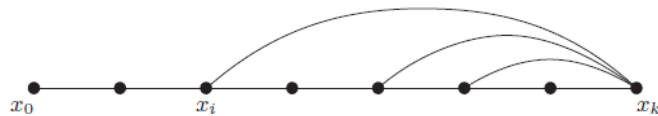
**Örnek 1.9** Şekil 1.9 de bir  $C^6$  çevrimi ve  $C^3$  ve  $C^5$  indüke çevrimleri verilmiştir. Dikkat edilirse,  $ny$  kenarı  $C^6$  nin bir kirişi olduğundan,  $C^6$ , bir indüke çevrim değildir.



**Şekil 1.9**  $ny$  kırışına sahip bir  $C^6$  çevrimi ve  $C^3$  ve  $C^5$  indüke çevrimleri

**Önerme 1.3** Eğer  $G$  minimum derecesi  $\delta(G) \geq 2$  olan bir graf ise,  $G$  içinde uzunluğu  $\delta(G)$  olan bir yol ve uzunluğu  $\geq \delta(G) + 1$  olan bir çevrim vardır.

**İspat.**  $P = n_0 \dots n_k$ ,  $G$  içinde uzunluğu maksimum olan bir yol olsun. Bu durumda,  $P$  nin maksimalliğinden,  $N_G(n_k) \subseteq V(P)$  dir. Bu sebeple,  $P$  nin uzunluğu  $= k \geq d_G(n_k) \geq \delta(G)$  dir. Şimdi  $i < k$ ,  $n_i n_k \in E(G)$  şartını sağlayan en küçük indis olsun. Bu durumda,  $n_i n_{i+1} \dots n_k n_i$ , uzunluğu  $\geq d_G(n_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$  olan bir çevrimdir. (Şekil 1.10) ■



**Şekil 1.10** Önerme 1.3 ün ispatında bahsedilen  $P$  yolu (Diestel 2017)

**Tanım 1.26**  $x$  ve  $y$ ,  $G$  grafının iki köşesi olsun.  $x$  ve  $y$  köşeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğuna,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasındaki "uzaklık" denir ve  $d_G(x, y)$  veya daha kısa olarak  $d(x, y)$  biçiminde gösterilir. Eğer  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında herhangi bir yol yok ise,  $d(x, y)$  uzaklığı  $\infty$  olarak tanımlanır.  $G$  deki uzaklıkların maksimumuna,  $G$  nin "çapı" denir ve " $diam(G)$ " biçiminde gösterilir. Yani:

$$diam(G) := \max\{d(x, y) : x, y \in V(G) \text{ ve } x \neq y\} = \max_{x \in G} \max_{y \in G} d(x, y) \text{ dir.}$$

Etraf ve çap değerleri alakalıdır:

**Önerme 1.4**  $G$ , çevrim içeren bir graf olsun. Bu durumda,  $g(G) \leq 2diam(G) + 1$  dir.

**İspat.** Bir  $C$  çevriminin ve bir  $P$  yolunun uzunluklarını sırasıyla,  $\ell(C)$  ve  $\ell(P)$  biçiminde gösterelim. Hükmün değilinin doğru olduğunu, yani  $g(G) > 2diam(G) + 1$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $g(G) \geq 2diam(G) + 2$  dir. Şimdi  $C, G$  içinde  $\ell(C) = g(G)$  olan bir çevrim olsun. Bu durumda,  $C$  üzerinde,  $d_C(u, v) \geq diam(G) + 1$  ( $d_C(u, v)$ ,  $C$  çevrimi/altgrafi içindeki uzaklığı göstermektedir) olacak şekilde  $u$  ve  $v$  köşeleri vardır. Fakat  $G$  içinde,  $d_G(u, v) \leq diam(G)$  dir. Bu sebeple,  $u$  ve  $v$  köşeleri arasında uzunluğu  $d_G(u, v)$  olan herhangi bir  $P$  yolu,  $C$  çevriminin bir altgrafi olamaz. Bu yüzden,  $xPy$  biçiminde bir  $C$ -yolu vardır. Şimdi,  $C$  içinde iki tane  $x - y$  yolu vardır.  $Q$ , bu  $x - y$  yollarından kısa olanı gösterebilir. Bu durumda,  $xPyQx$  çevriminin uzunluğu  $< \ell(C)$  dir:

$$\begin{aligned} \ell(xPyQx) &= C \text{ üzerindeki iki } x - y \text{ yolundan kısa olanın uzunluğu} + \ell(xPy) \\ &\leq \lfloor \ell(C)/2 \rfloor + \ell(P) \leq \lfloor \ell(C)/2 \rfloor + diam(G) \\ &\leq \lfloor \ell(C)/2 \rfloor + \frac{\ell(C)}{2} - 1 \quad [g(G) \geq 2diam(G) + 2 \Rightarrow diam(G) \leq \frac{g(G)}{2} - 1 \leq \frac{\ell(C)}{2} - 1.] \\ &\leq \frac{\ell(C)}{2} + \frac{\ell(C)}{2} - 1 = \ell(C) - 1. \end{aligned}$$

Bu bir çelişkidir ve bu çelişki bize  $g(G) \leq 2diam(G) + 1$  olduğunu gösterir. ■

**Tanım 1.27** Bir  $G$  grafının "yarıçapı",  $rad(G)$  biçiminde gösterilir ve

$$rad(G) := \min_{x \in G} \max_{y \in G} d_G(x, y)$$

biçiminde tanımlanır.  $rad(G) = \max_{y \in G} d_G(x, y)$  şartını sağlayan bir  $x$  köşesine bir "merkez köşe" denir. Yani  $x$  in diğer tüm köşelere uzaklıklarının maksimumu, diğer tüm köşeler için hesaplanan bu maksimumların minimumu ise,  $x$  bir merkez köşedir.

**Önerme 1.5** Bir  $G$  grafi için,  $rad(G) \leq diam(G) \leq 2rad(G)$ .

**İspat.**  $rad(G) \leq diam(G)$ : Bu eşitsizlik, yarıçap ve çap tanımlarından doğrudur.

$diam(G) \leq 2rad(G)$ :  $x$  ve  $y$ ,  $d(x, y) = diam(G)$  eşitliğini sağlayan iki köşe ve  $v$ ,  $G$  nin merkez köşelerinden birisi olsun. Bu durumda,  $rad(G) = \max_{w \in V} d(v, w)$  dir. Şimdi:  $diam(G) = d(x, y) \leq d(x, v) + d(v, y)$  [Üçgen eşitsizliği]  $\leq rad(G) + rad(G)$  [ $rad(G) = \max_{z \in V} d(v, z)$  dir.]  $\therefore diam(G) \leq 2rad(G)$  dir. ■

**Tanım 1.28** Bir  $G$  grafi içindeki köşelerin ve kenarların,  $e_i = \{n_i, n_{i+1}\}$  olmak üzere,  $W := n_0 e_0 n_1 e_1 \dots e_{k-1} n_k$  biçimdeki bir alterne dizisine,  $G$  içinde bir "yürüyüş" denir ve içerdiği kenar sayısı, bu yürüyüşün "uzunluğu" olarak adlandırılır. Eğer  $n_0 = n_k$  ise,  $W$ , bir "kapalı yürüyüş" olarak adlandırılır.

**Not 1.9** Eğer bir  $W$  yürüyüşünde bütün köşeler farklı ise,  $W$  aynı zamanda bir yoldur.

**Önerme 1.6**  $G$  bir graf,  $W, G$  içinde bir yürüyüş,  $x$  ve  $y$ ,  $W$  yürüyüşüne ait iki köşe olsun. Bu durumda  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında,  $P \subseteq W$  olacak şekilde bir  $P$  yolu vardır.

**İspat.**  $G$  bir graf ve  $W, G$  içinde,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir yürüyüş olsun. Ayrıca,  $P, W$  yürüyüşü içinde uzunluğu minimum olan bir  $x - y$  yürüyüşü olsun. Yani:  $P \subseteq W$  ve  $P, x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir yürüyüş öyle ki  $W$  içindeki  $x - y$  yürüyüşüleri arasında uzunluğu en küçük olanlardan birisidir.

$P$  yürüyüşü bir  $x - y$  yoludur:  $P = x = v_1 v_2 \dots v_n = y$  olsun. Aksini varsayarak,  $P$  nin bir yol olmadığını kabul edelim. Bu durumda,  $P$  içinde tekrar eden bir  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) köşesi vardır. Bu sebeple,  $P = x = v_1 v_2 \dots v_i \dots v_j \dots v_n = y$  ve  $v_i = v_j$  olacak şekilde bir  $j > i$  vardır. Fakat  $Q = x = v_1 v_2 \dots v_i v_{j+1} \dots v_n = y$  yürüyüşü de bir  $x - y$  yürüyüşüdür ve  $Q$  nun uzunluğu,  $P$  nin uzunluğundan daha küçüktür.

$\therefore P$  içinde tekrar eden herhangi bir köşe yoktur.  $\therefore P, W$  içinde bir  $x - y$  yoludur. ■

### 1.3 Bağlantılılık

**Tanım 1.29**  $G$ , boştan farklı bir graf olsun. Eğer  $G$  nin herhangi iki köşesi arasında bir yol var ise,  $G$  grafına "bağlantılı" dır denir.

$U \subseteq V(G)$  olsun. Eğer  $G[U]$  bağlantılı ise, " $U, G$  içinde bağlantılıdır" denir.

Eğer bir graf bağlantılı değil ise, "bağlantısız" olarak adlandırılır.

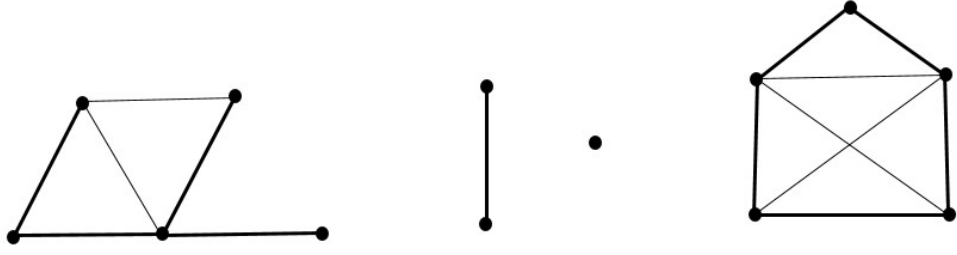
**Önerme 1.7**  $G$  bağlantılı bir graf ve  $|V(G)| = n$  olsun. Bu durumda,  $G$  nin köşeleri,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  olarak adlandırılabilir öyle ki her  $i = 1, \dots, n$  için,  $G_i = G[v_1, \dots, v_i]$  bağlantılıdır.

**İspat.**  $G$  nin herhangi bir köşesini alalım ve  $v_1$  olarak adlandıralım. Bu durumda,  $G_1 = G[v_1]$  in bağlantılı olduğu aşıkardır. İddiyanın,  $1 \leq i < |G|$  için doğru olduğunu kabul edelim. Şimdi,  $i + 1$  için,  $v \in G - G_i$  olacak şekilde bir  $v$  köşesi alalım.  $G$  bağlantılı olduğundan,  $G$  içinde,  $P = v = n_1 \dots n_m = v_1$  biçiminde bir  $v - v_1$  yolu vardır.  $1 \leq j \leq m$  indisi, " $n_j \notin G_i$  ve fakat  $n_{j+1} \in G_i$ " şartını sağlayan indis olsun.  $n_j$  köşesini  $v_{i+1}$  olarak adlandıralım, yani  $v_{i+1} := n_j$  olsun. Bu durumda,  $v_{i+1}$  köşesinin  $G_i$  içinde bir komşusu ( $n_{j+1}$ ) vardır. Bu yüzden,  $G_{i+1} := G_i[v_{i+1}]$  bağlantılıdır. Bu sebeple,  $n$  üzerinden tümevarımla, her  $i = 1, \dots, n$  için,  $G_i$  bağlantılıdır. ■

**Tanım 1.30**  $H, G$  nin bir altgrafı olsun.  $H$  bağlantılı ve  $G$  nin  $H$  yi içeren ve  $H$  den farklı bağlantılı bir altgrafı yok ise,  $H$  ye  $G$  nin bir "bileşeni" denir.

**Not 1.10** Bir grafın herhangi bir bileşeni, bir indüke altgraftır: Tanım gereği, bir  $G$  grafının bir bileşeni, bir maksimal bağlantılı altgraftır. Bu sebeple, eğer iki köşeyi, diyelim ki  $x, y \in V(G)$ , içeriyor ise ve eğer  $xy \in E(G)$  ise,  $xy$  kenarını da içermek zorundadır.

**Örnek 1.10** Şekil 1.11 de dört bileşenli bir  $G$  grafı verilmiştir. Her bir bileşenin bir minimal bağlantılı geren altgrafının kenarları kesikli olarak çizilmiştir. Ayrıca dikkat edilirse, bileşenlerin köşe kümeleri,  $V(G)$  nin bir parçalanışını verir.



**Şekil 1.11** Dört bileşenli bir  $G$  grafi

**Tanım 1.31**  $G = (V, E)$  bir graf,  $a, b \in V$ ,  $A, B \subseteq V$  ve  $X \subseteq V \cup E$  olsun. Eğer  $G$  deki her  $A - B$  yolu,  $X$  kümesinin bir elemanını (bir köşe veya bir kenar) içeriyorsa,  $X$  kümesi ( $G$  içinde),  $A$  ve  $B$  kümelerini "ayırır" denir. Eğer  $a, b \notin X$  ve  $X$ ,  $\{a\}$  ve  $\{b\}$  kümelerini ayırıyor ise,  $X$  kümesi  $a$  ve  $b$  köşelerini "ayırır" denir. Eğer  $X$ ,  $G$  nin iki köşesini ayırıyor ise,  $X$  kümesi  $G$  grafını "ayırır" denir. Eğer  $X \subseteq V(G)$  ve  $X$ ,  $G$  grafını ayırıyor ise,  $X$  kümesi bir "ayırıcı" olarak adlandırılır.

**Not 1.11** Eğer  $X$ ,  $A$  ve  $B$  kümelerini ayırıyor ise,  $A \cap B \subseteq X$  dir:

$v \in A \cap B$  olsun. Bu durumda, bir uç noktası  $v$  olan ve trivial olmayan bir  $A - B$  yolu yoktur: Aksine, olduğunu kabul edelim. Yani bir uç noktası  $v$  olan bir  $P = vn_1 \dots n_k$  (veya  $P = n_1 \dots n_kv$ )  $A - B$  yolunun var olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $V(P) \cap A = \{v\}$  ve  $V(P) \cap B = \{v, n_k\}$  (veya  $V(P) \cap A = \{n_1, v\}$  ve  $V(P) \cap B = \{v\}$ ) dir ve bu bir çelişkidir. Çünkü  $V(P) \cap B \neq \{n_k\}$  (veya  $V(P) \cap A \neq \{n_1\}$ ) dir. Bu sebeple, bir uç noktası  $v$  olan tek bir  $A - B$  yolu vardır, o da trivial  $P = v$  yoludur. Bu sebeple,  $X$ ,  $A$  ve  $B$  köşe kümelerini ayırdığından,  $v \in X$  dir. Sonuç olarak,  $A \cap B \subseteq X$  elde edilir.

**Tanım 1.32** Eğer bir  $v$  küşesi, kendi bulunduğu bileşen içindeki iki köşeyi ayırıyor ise,  $v$ , bir "ayırıcı köşe" olarak adlandırılır. Eğer  $e$  kenarı, iki uç köşesini ayırıyor ise,  $e$ , bir "köprü" olarak adlandırılır.

**Not 1.12** Bir  $e$  kenarı köprüdür  $\Leftrightarrow e$  kenarını içeren bir  $C$  çevrimi yoktur. Denk olarak, bir  $e$  kenarı köprü değildir  $\Leftrightarrow e$  kenarını içeren bir  $C$  çevrimi vardır:

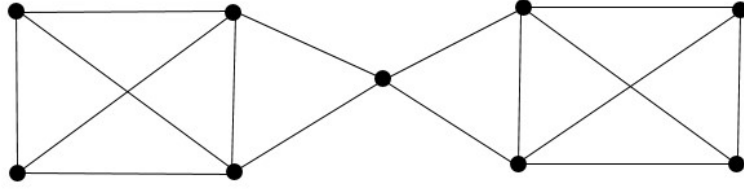
$e = xy$  bir köprü değildir  $\Leftrightarrow x$  ve  $y$  köşeleri arasında,  $e$  kenarını içermeyen bir  $P$  yolu vardır  $\Leftrightarrow C = P + e$ ,  $e$  kenarını içeren bir çevrimdir.



**Tanım 1.35**  $|G| > 1$  olmak üzere, mertebesi  $\ell$  den daha küçük olan her  $F$  kenar kümesi için  $G - F$  bağlantılı ise,  $G$  grafi " $\ell$ -kenar-bağlantılıdır" denir.  $G$  nin  $\ell$ -kenar-bağlantılı olduğu  $\ell$  sayılarının en büyüğüne,  $G$  nin "kenar bağlantılılığı" denir ve bu en büyük sayı  $\lambda(G)$  ile gösterilir.

**Not 1.15**  $G$  trivial olmayan bir graf olsun. Bu durumda,  $\lambda(G) = 0 \Leftrightarrow G$  bağlantısızdır. Ayrıca,  $\lambda(G) \geq 1$  dir  $\Leftrightarrow G$  bağlantılıdır.

**Örnek 1.12** Şekil 1.13 de verilen  $G$  grafi için,  $\kappa(G) = 1$ ,  $\lambda(G) = 2$ ,  $\delta(G) = 3$  tür.



**Şekil 1.13**  $\kappa(G) = 1$ ,  $\lambda(G) = 2$ ,  $\delta(G) = 3$  şartlarını sağlayan bir  $G$  grafi

**Önerme 1.8**  $G$  trivial olmayan bir graf olsun. Bu durumda,  $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$  dir.

**İspat.**  $\lambda(G) \leq \delta(G)$ : Her  $v \in V$  için,  $\lambda(G) \leq d_G(v)$  dir, çünkü bir  $v$  köşesine bağlı olan tüm kenarlar  $G$  yi ayırır.  $\therefore \lambda(G) \leq \min\{d_G(v) : v \in V\} = \delta(G)$ .

$\kappa(G) \leq \lambda(G)$ :  $F \subseteq E$  öyle ki  $|F| = \lambda(G)$  ve  $G - F$  bağlantısız olsun. Kenar-bağlantılılık tanımından, böylesi ayıran bir  $F$  kümesinin var olduğunu biliyoruz.

Şimdi  $\kappa(G) \leq |F| (= \lambda(G))$  olduğunu göstereceğiz.

**Durum 1.**  $F$  deki herhangi bir kenarın ucu olmayan bir  $v \in V(G)$  köşesinin var olduğunu kabul edelim.  $C, G - F$  grafında  $v$  yi içeren bileşen olsun.

$W = \{w \in V(G) : v, F$  deki bir kenarın uç köşesidir} olarak tamamlayalım. Bu durumda,  $W$  köşe kümesi,  $v$  ve  $G - C$  yi ayırır. Diğer yandan,  $F$  içindeki herhangi bir  $e$  kenarının, en fazla tek bir uç köşesi  $C$  içinde olabilir: Aksine,  $F$  kümesi içinde, her iki uç köşesi de  $V(C)$  de olan bir  $e = xy$  kenarının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $F - e$ ,  $\lambda(G) - 1$  tane kenar içeren bir kümedir öyle ki  $G - (F - e)$  bağlantısızdır. Fakat

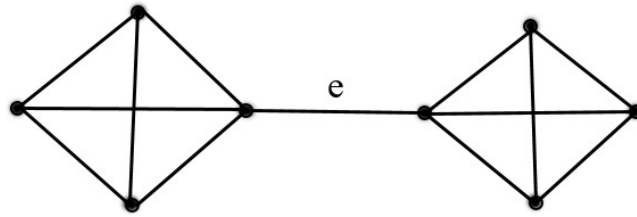
bu  $F$  nin minimalliği ile çelişir.  $\therefore |W| \leq |F|$ .  $\therefore \kappa(G) \leq |F|$ .

**Durum 2.**  $G$  deki her köşenin,  $F$  içindeki bir kenarın bir uç köşesi olduğunu kabul edelim.  $v \in V(G)$  herhangi bir köşe olsun.  $C$ ,  $G - F$  grafından  $v$  yi içeren bileşen olsun.  $W = \{w \in N_G(v) : vw \notin F\}$  olarak tamamlayalım. Bu durumda,  $W \subseteq V(C)$  dir, çünkü  $v \in C$  dir ve  $C$  bir bileşendir. Durum 1'de ki gibi,  $F$  deki bir  $e$  kenarının en fazla bir uç köşesi  $C$  içinde olabildiğinden,  $W$  kümesindeki iki köşe,  $F$  içindeki bir kenarın uçları olamaz.  $\therefore d_G(v) \leq |F|$ .

$\therefore$  Eğer  $G - N_G(v) \neq \{v\}$  ise,  $N_G(v)$ ,  $v$  ve  $G - N_G(v)$  yi ayırdığından,  $\kappa(G) \leq |F|$  dir. Eğer  $G - N_G(v) = \{v\}$ , yani,  $\{v\} \cup N_G(v) = V(G)$  ise;  $v$ , rastgele seçilmiş bir köşe olduğundan,  $n = |G|$  olmak üzere,  $G = K^n$  olduğunu kabul edebiliriz. Fakat bu durumda,  $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G) = |G| - 1$  dir. Yani eşitsizlikler yine sağlanır. ■

**Not 1.16** Önceki önermeden, yüksek bağlantılılık, yüksek minimum dereceye ihtiyaç duyar. Karşıt olarak, yüksek minimum derece, yüksek bağlantılılığı garanti etmez.

**Örnek 1.13** Şekil 1.14 de,  $K^4$  un iki kopyası, her bir ucu bir kopyada olan bir  $e$  kenarı ile bağlanmıştır. Dikkat edilirse,  $\delta(G) = 3$  tür, fakat  $\kappa(G) = \delta(G) = 1$  dir. Genel olarak, eğer  $K^n$  tam grafının iki kopyasının iki köşesini bir  $e$  kenarı ile bağlarsak, bu durumda elde edilen  $G$  grafi için,  $\delta(G) = n - 1$  dir, fakat  $\kappa(G) = \delta(G) = 1$  dir.



**Şekil 1.14**  $K^4$  ün iki kopyası ve bir  $e$  kenarından elde edilen bir  $G$  grafi

#### 1.4 Ağaçlar ve Ormanlar

**Tanım 1.36** Hiçbir çevrim içermeyen bir grafa, "çevrimsiz graf" denir. Çevrimsiz bir graf "orman" olarak adlandırılır. Bağlantılı bir orman ise, "ağaç" olarak adlandırılır.

Bir ağacın, derecesi bir olan bir köşesine "yaprak" ve yaprak olmayan bir köşesine "iç köşe" denir.

**Not 1.17**  $T$ , trivial olmayan bir ağaç olsun.  $T$  ağacında en az bir yaprak vardır:

$P$ ,  $T$  içindeki en uzun yollardan birisi olsun. Bu durumda,  $P$  nin her iki uç köşesinin derecesi de 1 olmak zorundadır. Aksi takdirde,  $P$  yi uzatabiliriz ve bu  $P$  nin en uzun yollardan birisi olmasıyla çelişir.  $\therefore T$  ağacının en az iki yaprağı vardır.

**Not 1.18**  $v$ ,  $T$  ağacının bir yaprağı olsun. Bu durumda,  $T' = T - v$  grafi da bir ağaçtır: Birincisi,  $T$  bir çevrim içermediğinden,  $T' = T - v$  grafi da bir çevrim içermez. ikincisi,  $v$ ,  $T$  nin bir yaprağı olduğundan, sadece tek bir komşusu vardır ve bu sebeple,  $T' = T - v$  bağlantılıdır.  $\therefore T'$  bir ağaçtır.

**Teorem 1.1**  $T$  bir graf olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i)  $T$  bir ağaçtır.
- (ii)  $T$  nin herhangi iki köşesi  $x$  ve  $y$  arasında, bir ve yalnız bir yol vardır.
- (iii)  $T$  minimal bağlantılıdır. Yani  $T$  bağlantılıdır ve fakat her  $e \in E(T)$  kenarı için,  $T - e$  bağlantısızdır.
- (iv)  $T$  maksimal çevrimsizdir. Yani  $T$  herhangi bir çevrim içermez ve fakat birbirine komşu olmayan herhangi iki  $x$  ve  $y$  köşesi için,  $T + xy$  grafi bir çevrim içerir.

**İspat.** (i)  $\Rightarrow$  (ii): Öncelikle,  $T$  bağlantılıdır.  $\therefore T$  nin herhangi iki  $x$  ve  $y$  köşesi arasında bir  $P$  yolu vardır. Böylesi bir  $P$  yolu tektir: Tersinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $x$  ve  $y$  gibi iki köşe vardır öyle ki bu iki köşe arasında  $P = x = z_1 \dots z_n = y$  ve  $Q = x = w_1 \dots w_m = y$  gibi iki farklı yol vardır.  $A = V(P) \cap V(Q)$  olsun. Bu durumda,  $x, y \in A$  olduğundan  $A \neq \emptyset$  dir ve  $P \neq Q$  olduğundan,  $A \subsetneq V(P)$  veya  $A \subsetneq V(Q)$  dir. Diyelim ki  $A \subsetneq V(P)$  olsun. Şimdi  $z_{s+1}$  (indislerin sıralamasına göre)  $V(P) - V(A)$  kümesindeki ilk köşe ve  $z_t$ ,  $A$  kümesinde  $z_s$  den sonra gelen ilk köşe olsun. Bu durumda,  $z_s, z_t \in A$  ve  $C = z_s P z_t Q z_s$ ,  $T$  içinde bir çevrimdir. Fakat bu  $T$  nin hiçbir çevrim içermediği gerçeğiyle çelişir.  $\therefore$  Böylesi bir yol tek olmalıdır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :  $T$  nin herhangi iki köşesi arasında bir yol olduğundan,  $T$  bağlantılıdır.  $e = xy$ ,  $T$  içinde bir kenar olsun. Bu durumda  $T' = T - e$  bağlantısızdır: Tersinin doğru

olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $T'$  içinde,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir  $P$  yolu vardır.  $T' \subseteq T$  olduğundan,  $P \subseteq T$  dir. Diğer yandan,  $Q = xy$ ,  $T$  içinde,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir başka yoldur. Fakat bu, böylesi bir yolun tek olduğuyula çelişir.

$\therefore T' = T - e$  bağlantısızdır.

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) : Öncelikle, tersinin doğru olduğunu, yani  $T$  nin içinde bir  $C = z_1 \dots z_n z_1$  çevriminin var olduğunu kabul edelim.  $e = z_1 z_2$  olsun. Bu durumda  $T' = T - e$  bağlantılıdır:  $x, y \in V(T')$  olsun. Bu durumda,  $T$  bağlantılı olduğundan,  $T$  içinde  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir  $P = x = w_1 \dots w_m = y$  yolu vardır. Eğer  $e \notin E(P)$  ise,  $P \subseteq T'$  dir. Eğer  $e \in E(P)$  ise, bir  $1 \leq i < m$  için,  $e = w_i w_{i+1}$  dir. Bu durumda,  $Q = P w_i = z_1 z_n z_{n-1} \dots z_2 = w_{i+1} P$ ,  $T'$  içinde,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir yürüyüşür. Her  $x - y$  yürüyüşü, bir  $x - y$  yolu içerdiğinden,  $T'$  içinde,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir yol vardır.

$\therefore T' = T - e$  bağlantılıdır. Fakat bu hipotezle çelişir.  $\therefore T$  hiçbir çevrim içermez.

Şimdi,  $x$  ve  $y$ ,  $T$  içinde komşu olmayan iki köşe olsun. Bu durumda,  $T'' = T + xy$  bir çevrim içerir:  $P$ ,  $T$  içinde,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir yol olsun. Bu durumda,  $Q = P + xy$ ,  $T''$  içinde bir çevrimdir.

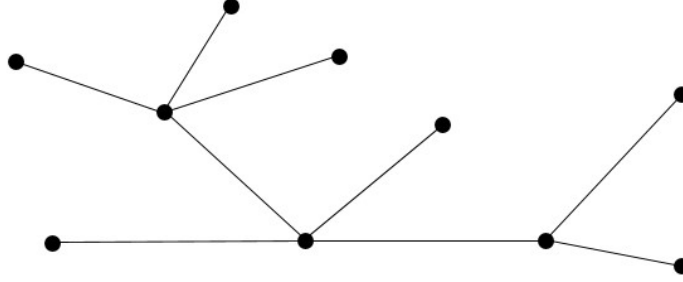
(iv)  $\Rightarrow$  (i) Öncelikle, hipotezden,  $T$  hiçbir çevrim içermez. Bu sebeple,  $T$  nin bağlantılı olduğunu ispat etmemiz gerekmektedir:  $x, y \in V(T)$  olsun. Eğer  $e = xy \in E(T)$  ise,  $P = xy$ ,  $T$  içinde,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir yoldur. Eğer  $e = xy \notin E(T)$  ise, bu durumda hipotezden,  $T + xy$  grafi, bir  $C$  cevrimi içerir. Fakat  $T$  hiçbir çevrim içermediğinden,  $e = xy \in E(C)$  dir. Bu durumda  $P = C - e$ ,  $T$  içinde,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir yoldur.  $\therefore T$  bağlantılıdır. ■

**Notasyon 1.7**  $T$  bir ağaç ve  $x, y \in V(T)$  olsun.  $x$  ve  $y$  köşelerini birleştiren  $P \subseteq T$  yolu,  $xTy$  biçiminde gösterilir.

**Not 1.19**  $G$ , bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda,  $G$  bir geren ağaç içerir:  $T$ ,  $G$  grafının minimal bağlantılı ve geren bir altgrafı olsun. Bu durumda, önceki teoremin (iii) şikkından,  $T$  bir ağaçtır. Veya:  $T$ ,  $G$  grafının maksimal çevrimsiz bir altgrafı olsun. Bu durumda, önceki teoremin (iv) şikkından,  $T$  bir ağaçtır. Ayrıca,  $T$  bir geren altgrafıdır: Aksinin doğru olduğunu kabul edelim. Bu durumda, bir  $v \in V(G) - V(T)$  vardır. Şimdi  $T \subseteq G$  ve  $G$

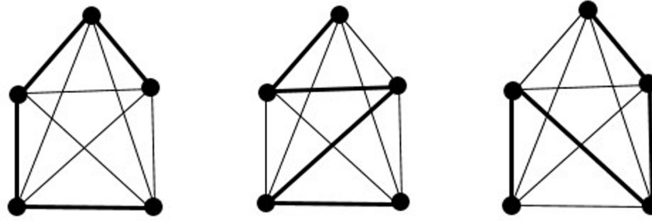
bağlantılı olduğundan,  $vw \in E(G)$  olacak şekilde bir  $w \in V(T)$  vardır. Bu durumda,  $T + vw$  hala çevrimsizdir, çünkü  $T$  çevrimsizdir ve  $v \notin V(T)$  dir. Fakat bu,  $T \subsetneq T + vw$  olduğundan,  $T$  nin maksimalliğiyle çelişir.

**Örnek 1.14** Şekil 1.15 de verilen graf bir ağaç örneğidir.



**Şekil 1.15** Bir  $T$  ağacı

**Örnek 1.15** Şekil 1.16 de,  $G = K^5$  grafının üç geren ağacı koyu kenarlarla gösterilmiştir.



**Şekil 1.16**  $G = K^5$  tam grafi ve üç geren ağacı (Diestel 2017)

**Tanım 1.37**  $G$ , bir graf ve  $T$ ,  $G$  nin bir geren ağacı olsun. Bir  $e \in E(G) \setminus E(T)$  kenarına,  $T$  ağacının,  $G$  grafi içindeki bir "kirişi" denir.

**Sonuç 1.1**  $T$ ,  $n$  köşeli bir ağaç olsun. Bu durumda,  $T$  ağacının köşeleri,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  biçiminde adlandırılabilir öyle ki her  $i \geq 2$  için,  $v_i$  köşesinin  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  köşe kümesi içinde tek bir komşusu vardır.

**İspat.** Bir önceki alt bölümün ilk önermesinden,  $T$  ağacının köşelerinin her  $i \geq 2$  için,  $T_i := T[v_1, \dots, v_i]$  bağlantılı olacak şekilde,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  olarak adlandırılabilceğini

biliyoruz. Bu sebeple  $v_i$  köşesinin,  $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$  köşe kümesi içerisinde bir komşusu vardır. Ayrıca,  $T_i$  bir ağaç olduğundan, bu komşu tek bir tanedir: Aksine  $v_i$  nin,  $1 \leq k < l \leq i - 1$  olmak üzere,  $v_k$  ve  $v_l$  gibi iki tane komşusunun olduğunu kabul edelim. Şimdi,  $T_{i-1}$  bir ağaç olduğundan, bağlantılıdır ve bu sebeple,  $v_k$  ve  $v_l$  köşelerini birleştiren (tek) bir  $P$  yolu vardır. Fakat bu durumda,  $v_i v_k + P + v_l v_i$ ,  $T_i$  ağacı içerisinde bir çevrimdir. Bu bir çelişkidir, çünkü  $T_i$  bir ağaç olduğundan, hiçbir çevrim içermez. ■

**Sonuç 1.2**  $G$ ,  $n$  köşeli ve bağlantılı bir graf olsun. Bu durumda:

$G$  ağaçtır  $\Leftrightarrow |E(G)| = n - 1$  dir.

**İspat.**

( $\Rightarrow$ ) İspat,  $G$  nin köşe sayısı olan  $n$  üzerinden tümevarımla yapılabilir.

$i = 1$  :  $G$  bir graf olduğundan,  $G$  içinde, iki uç köşesi de aynı olan bir kenar yoktur.

$\therefore |E(G)| = 0 = 1 - 1$  dir.

İddianın  $i < n$  için doğru olduğunu kabul edelim.

Şimdi  $j = i + 1$  için, bir önceki sonucu kullanabiliriz. Tümevarın hipotezinden,  $G_i$  ağacının  $i - 1$  kenarı vardır.  $\therefore v_{i+1}$  köşesinin,  $G_i$  ağacında tek bir komşu köşesi olduğundan,

$G_{i+1}$  ağacındaki kenar sayısı:  $(i - 1) + 1 = i$  dir.

$\therefore$  Tümevarımdan,  $G = G_n$  ağacının kenar sayısı  $n - 1$  dir.

( $\Leftarrow$ )  $|E(G)| = n - 1$  olsun.  $T$ ,  $G$  grafının bir geren ağacı olsun. Bu durumda, birinci kısımdan,  $|E(T)| = n - 1$  dir.  $\therefore G = T$  dir, yani  $G$  bir ağaçtır ■

**Sonuç 1.3**  $T$  bir ağaç,  $G$  bir graf öyle ki  $\delta(G) \geq |T| - 1$  olsun. Bu durumda,  $T \subseteq G$  dir, yani  $G$  nin öyle bir  $H$  altgrafı vardır öyle ki  $H \simeq T$  dir.

**İspat.**  $T$  nin köşelerinin, iki önceki sonuçta verilen,  $v_1, v_2, \dots, v_n$  biçimindeki etiketlemesini kullanarak,  $T$  nin köşe sayısı üzerinden tümevarımla,  $T$  nin  $G$  grafı içinde bir kopyasını bulabiliriz: Tümevarım hipotezinden,  $1 \leq i < |T| = n$  olmak üzere,  $v_1, \dots, v_i \in G$  köşeleri seçilmiş olsun. Şimdi,  $v \in G - \{v_1, \dots, v_i\}$  köşesini  $v_{i+1}$  olarak seçelim öyle ki  $v_k$ ,  $v$  nin  $T$  içinde tek olduğunu bildiğimiz komşusu olmak üzere,  $v_k v \in E(G)$  olsun. Böylesi bir  $v$  köşesi vardır, çünkü  $d(v_k) \geq \delta(G) \geq |T| - 1$  dir.

$\therefore$  Tümevarımdan,  $G$  içinde  $T$  nin bir izomorf kopyasını buluruz. ■

**Tanım 1.38** Eğer bir ağacın bir köşesini diğer köşelerinden farklı ve özel bir köşe olarak alırsak, bu köşeye bu ağacın bir "kökü" denir. Bir köşesi kök olarak seçilmiş bir ağaca, "köklü ağaç" denir.

**Not 1.20** Bir köklü  $T$  ağacının köşeler kümesi üzerinde bir bağıntıyı şöyle tanımlıyalım:  $r$ ,  $T$  nin kökü ve  $x, y$ ,  $T$  nin iki köşesi olsun ve " $x \leq y \Leftrightarrow x \in rTy$ " olarak tanımlıyalım. Bu durumda,  $\leq$  bağıntısına göre,  $V(T)$  kümesi bir kısmi sıralı küme olur. Yani  $\leq$  bağıntısı,  $V(T)$  köşe kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır:

(i)  $\leq$  yansıyandır:  $x \in V(T)$  olsun. Bu durumda,  $x \in rTx$  olduğundan,  $x \leq x$  dir.

(ii)  $\leq$  ters-simetriktir:  $x, y \in V(T)$  olsun.  $x \leq y$  ve  $y \leq x$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $x \in rTy$  ve  $y \in rTx$  dir. Bu sebeple,  $rTx \subseteq rTy$  ve  $rTy \subseteq rTx$  dir. Çünkü bir ağacın herhangi iki köşesi arasında bir ve yalnız bir yol vardır. (Örneğin, eğer  $rTx \not\subseteq rTy$  ise, bu durumda  $r$  ve  $x$  köşeleri arasında birbirinden farklı en az iki yol vardır: Birisi  $rTx$ , diğeri  $rTy$  yolunun  $r$  den  $x$  e kadar olan kısmıdır.)

$\therefore rTx \subseteq rTy \subseteq rTx$  olduğundan,  $rTx = rTy$  dir.  $\therefore x = y$  dir.

(iii)  $\leq$  geçişkendir:  $x, y, z \in V(T)$  olsun.  $x \leq y$  ve  $y \leq z$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $x \in rTy$  ve  $y \in rTz$  olur. Bu durumda,  $y \in rTz$  olduğundan,  $rTy \subseteq rTz$  dir. Bu nedenle,  $x \in rTy$  olduğundan,  $x \in rTz$  dir.  $\therefore x \leq z$  elde edilir.

**Tanım 1.39** Bir önceki notta tanımlanan kısmi sıralama bağıntısına,  $T$  ve  $r$  ye göre bir "ağaç-sıralaması" denir. Eğer bu ağaç-sıralamasına göre  $x < y$ , yani  $x \leq y$  ve  $x \neq y$  ise,  $x$  köşesi  $y$  köşesinin "aşağısındadır" denir.  $z \in V(T)$  olmak üzere:

$$\lceil z \rceil := \{w \mid w \leq z\} \quad \text{ve} \quad \lfloor z \rfloor := \{w \mid w \geq z\}$$

kümelerine sırasıyla,  $z$  nin "alt-kapanışı" ve "üst-kapanışı" denir.

$Z \subseteq V(T)$  olsun.  $Z$ , üst-kapanışına (karşılık olarak, alt-kapanışına) eşit ise, yani  $Z = \lfloor Z \rfloor := \bigcup_{z \in Z} \lfloor z \rfloor$  (karşılık olarak,  $Z = \lceil Z \rceil := \bigcup_{z \in Z} \lceil z \rceil$ ) ise,  $Z$  kümesi  $T$  içinde "üst-kapalıdır" (karşılık olarak, "alt-kapalıdır") veya "yukarı-kümedir" (karşılık olarak, "aşağı-kümedir") denir.

**Not 1.21** Ağaç sıralamasına göre,  $T$  nin kökü en küçük elemandır ve  $T$  nin yaprakları maksimal elemanlardır. Ayrıca, bir kenarın uç köşeleri karşılaştırılabilirlerdir.

**Not 1.22**  $v \in T$  olsun. Bu durumda,  $v$  nin alt-kapanışı bir zincirdir, yani bu kümedeki herhangi iki eleman karşılaştırılabilirlerdir:

$x, y \in [v]$  olsun. Bu durumda,  $x \leq v$  ve  $y \leq v$  dir. Bu nedenle,  $x \in rTv$  ve  $y \in rTv$  dir. Bu sebeple,  $T$  nin herhangi iki köşesi arasında tek bir yol olduğundan ve ayrıca  $x, y \in rTv$  olduğundan,  $x \in rTy$  veya  $y \in rTx$  dir.  $\therefore x \leq y$  veya  $y \leq x$  dir.

**Tanım 1.40** Bir  $x$  köşesinin "yüksekliği"  $rTx$  yolunun uzunluğudur.  $T$  ağacının " $k$ . seviyesi", yüksekliği  $k$  olan tüm köşelerin kümesidir.

**Tanım 1.41**  $G$  bir graf,  $T \subseteq G$  bir köklü ağaç olsun.  $P$ ,  $G$  içindeki herhangi bir  $T$ -yolu, ayrıca  $x$  ve  $y$ , bu yolun uç köşeleri olsun. Eğer (ağaç sıralamasına göre)  $x \leq y$  veya  $y \leq x$  ise,  $T$  ağacına  $G$  içinde "normal"dir denir.

**Not 1.23**  $T$ ,  $G$  içinde geren bir ağaç olsun. Bu durumda,  $T$  ağacı  $G$  içinde normaldir  $\Leftrightarrow$  "Eğer  $xy \in E(G)$  ise,  $T$  içinde  $x \leq y$  veya  $y \leq x$  dir":

Öncelikle,  $T$  nin normal bir ağaç olması için gerek ve yeter şart  $G$  içindeki herhangi bir  $T$ -yolunun uç köşelerinin,  $T$  içindeki ağaç sıralamasına göre karşılaştırılabilir olmasıdır. İkincisi,  $T$  nin  $G$  grafını girmesi için gerek ve yeter şart  $V(T) = V(G)$  olmasıdır.

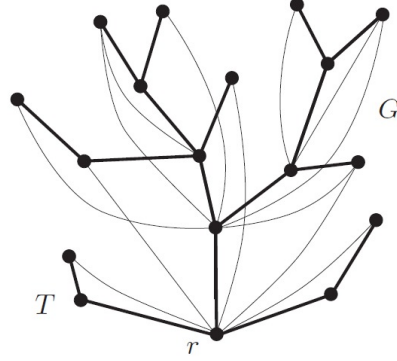
( $\Rightarrow$ )  $T$  nin  $G$  içinde normal olduğunu kabul edelim.  $xy \in E(G)$  olsun.

**Durum 1:** Eğer  $xy \in E(T)$  ise,  $x \leq y$  veya  $y \leq x$  dir.

**Durum 2:** Eğer  $xy \notin E(T)$  ise,  $xy$  kenarı  $G$  içinde bir  $T$ -yoludur. Bu nedenle,  $T$  ağacı  $G$  grafi içinde normal olduğundan,  $x \leq y$  veya  $y \leq x$  dir.

( $\Leftarrow$ ) Eğer  $xy \in E(G)$  ise,  $T$  içinde  $x \leq y$  veya  $y \leq x$  olduğunu kabul edelim.  $T$  ağacı  $G$  grafını gerdiğinden,  $G$  içindeki herhangi bir  $T$ -yolu, bir  $e \in E(G) - E(T)$  kenarıdır. Bu sebeple,  $T$  nin normal olduğunu göstermek için, herhangi bir  $e = xy \in E(G) - E(T)$  kenarının uç noktalarının karşılaştırılabilir olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi,  $e = xy \in E(G) - E(T)$  olsun. Bu durumda,  $e = xy \in E(G)$  olduğundan, hipotezden,  $T$  içinde  $x \leq y$  veya  $y \leq x$  dir.  $\therefore T$ ,  $G$  içinde normaldir.

**Örnek 1.16** Şekil 1.17 de, bir  $G$  grafi ve bu grafin kökü  $r$  olan bir  $T$  normal geren ağacı gösterilmiştir. ( $T$  ağacının kenarları koyu çizilmiştir.)



**Şekil 1.17** Bir  $G$  grafi ve  $G$  nin kökü  $r$  olan bir  $T$  normal geren ağacı (Diestel 2017)

Bir  $G$  grafinin yapısını, içindeki bir  $T$  normal ağacını kullanarak anlayabiliriz, çünkü  $G$  grafi,  $T$  ağacının ayırma özelliklerini yansıtır:

**Lemma 1.1**  $G$  bir graf,  $T \subseteq G$  bir ağaç olsun.  $T$  nin  $G$  içinde normal olduğunu ve  $x, y$  nin  $T$  nin herhangi iki köşesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda:

(i)  $[x] \cap [y]$  kümesi,  $G$  içinde  $x$  ve  $y$  köşelerini ayırır.

(ii)  $S \subseteq V(T)$  olsun. Ayrıca,  $T$  nin bir geren ağaç olduğunu ve  $S$  nin alt-kapalı olduğunu kabul edelim. Ayrıca,  $U := \{z : z, T - S$  içinde bir minimal elemandır} olsun. Bu durumda,  $z \in U$  olmak üzere,  $[z]$  kümeleri,  $G - S$  grafinin bileşenlerini gerer. ■

Bu alt bölümü, bir bağlantılı  $G$  grafinde bir normal geren ağacın var olduğunu garanti eden bir önerme ile bitirelim:

**Önerme 1.9**  $G$  bir bağlantılı graf ve  $r$ ,  $G$  nin bir köşesi olsun. Bu durumda,  $G$  nin kökü  $r$  olan bir  $T$  normal geren ağacı vardır. ■

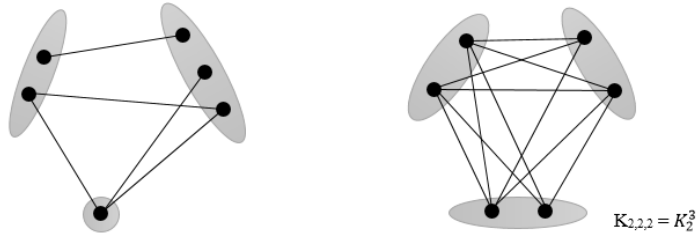
## 1.5 İki Parçalı Graflar

**Tanım 1.42**  $r \geq 2$  bir tamsayı ve  $G = (V, E)$  bir graf olsun. Eğer  $G$  nin köşe kümesi olan  $V$  nin  $r$  sınıf içeren bir ayrışımı varsa öyle ki aynı sınıftaki iki köşe arasında kenar yok ise, yani herhangi bir kenarın iki ucu farklı sınıflarda ise; bu durumda  $G$ , " $r$ -parçalı graf" olarak adlandırılır. Böyle bir ayrışımındaki kümelerin / sınıfların her birine, bir "parça küme" denir. Bir 2-parçalı graf, "iki-parçalı" graf olarak adlandırılır.

**Tanım 1.43**  $G$  bir  $r$ -parçalı graf olsun. Eğer farklı parçalardaki her iki köşe arasında bir kenar var ise,  $G$  ye bir " $r$ -parçalı tam graf" denir. Eğer  $r$  yi zikretmezsek,  $G$  grafı bir "çoklu-parçalı tam graf" olarak adlandırılır.

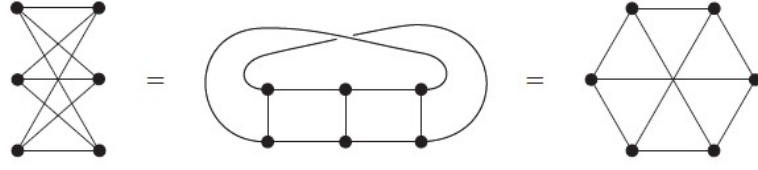
**Notasyon 1.8**  $K_{n_1, \dots, n_r}$   $r$ -parçalı tam graf olan  $\overline{K}^{n_1} * \dots * \overline{K}^{n_r}$  grafını göstermektedir. Eğer  $n_1 = \dots = n_r = s$  ise, bu durumda,  $K_{n_1, \dots, n_r}$  grafı basitçe  $K_s^r$  biçiminde gösterilir. Dikkat edilirse, eğer bir  $K^r$  tam grafının her bir köşesi,  $s$  tane köşe içeren bağımsız bir küme, yani herhangi bir kenar içermeyen ve sadece  $s$  tane köşe içeren bir küme ile değiştirilirse,  $K_s^r$  grafı elde edilir.

**Örnek 1.17** Şekil 1.18 de iki tane 3-parçalı graf verilmiştir. Dikkat edilirse, sağdaki graf, düzgün sekizyüzlü  $K_2^3$  nin bir çizimidir.



**Şekil 1.18** 3-parçalı iki graf örneği (Diestel 2017)

**Örnek 1.18** Şekil 1.19 da,  $K_{3,3} = K_3^2$  iki parçalı tam grafının üç farklı çizimi verilmiştir.



**Şekil 1.19**  $K_{3,3} = K_3^2$  iki parçalı tam grafinin üç farklı çizimi (Diestel 2017)

**Tanım 1.44** Bir  $K_{1,n}$  grafi "yıldız" olarak isimlendirilir. Tek köşe içeren parçalı küme-  
deki köşeye de yıldız grafin "merkezi" denir.

Şimdi, bir iki parçalı grafi tam olarak karakterize eden bir önerme verelim:

**Önerme 1.10**  $G = (V, E)$ , en az iki köşe içeren bir graf olsun. Bu durumda: " $G$  iki  
parçalıdır  $\Leftrightarrow G$ , herhangi bir tek çevrim, yani uzunluğu tek olan bir çevrim içermez".

**İspat.**

( $\Rightarrow$ )  $G$  iki parçalı bir graf olsun. Bu durumda,  $G$  herhangi bir tek çevrim içermez, çünkü  
herhangi bir çevrimin komşu köşeleri farklı parça kümelerinde olmak zorundadır.

$\therefore$  Bir çevrimin uzunluğu çift olmalıdır.

( $\Leftarrow$ )  $G$  nin herhangi bir tek çevrim içermediğini kabul edelim. Öncelikle, genellemeyi  
bozmaksızın,  $G$  nin bağlantılı olduğunu kabul edebiliriz, çünkü  $G$  iki parçalıdır ancak ve  
ancak  $G$  nin bileşenlerinin her biri iki parçalıdır veya tek bir köşeden ibarettir.

$T$ ,  $G$  nin kökü  $r$  olan bir geren ağacı olsun.  $\leq_T$ ,  $V = V(G)$  üzerindeki karşılık gelen  
ağaç-sıralaması olsun. Şimdi, her bir  $n \in V$  için, tek bir  $rTn$  yolu vardır ve bu yolun  
uzunluğu ya tektir ya da çifttir.

$A = \{n \in V : rTn \text{ yolunun uzunluğu tektir}\}$  ve

$B = \{n \in V : rTn \text{ yolunun uzunluğu çifttir}\}$  olsun.

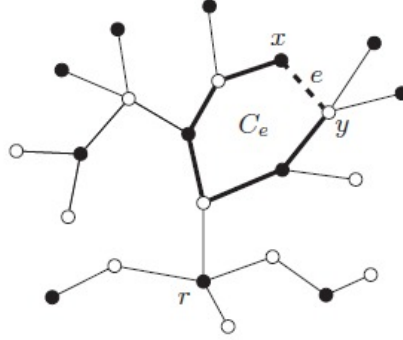
Bu durumda,  $A$  ve  $B$  kümeleri boştan farklıdır: Eğer  $n$ ,  $r$  kökünün bir komşusu ise,  $n \in A$   
dır;  $r \in B$  dir. Ayrıca,  $A \cap B = \emptyset$  olduğu aşikardır.  $G$  nin, parça kümeleri  $A$  ve  $B$  olan  
bir iki-parçalı küme olduğunu ispat edeceğiz.  $e = ny \in E(G)$  olsun.

**Durum 1.**  $e \in T$  olduğunu kabul edelim ve diyelim ki  $n <_T y$  olsun. Bu durumda,  
 $rTy = rTny$  dir.

$\therefore n$  ve  $y$  köşeleri farklı parça kümelerindedir, çünkü  $rTn$  yolunun uzunluğu tektir (kar-

şılık olarak, çifttir)  $\Leftrightarrow rTny = rTy$  yolunun uzunluğu çifttir (karşılık olarak, tektir).

**Durum 2.**  $e \notin T$  olduğunu kabul edelim. Bu durumda,  $C_e := nTy + e$  bir çevrimdir (ve hipotezden uzunluğu çifttir) (Şekil 1.20 yi inceleyiniz).



**Şekil 1.20**  $T + e$  grafi ve içindeki  $C$  çevrimi (Diestel 2017)

Şimdi, Durum 1'den,  $nTy$  yolu üzerindeki köşeler sıra ile değişmeli olarak  $A$  ve  $B$  parça kümelerine aittirler.

$\therefore C_e$  nin uzunluğu hipotez gereği çift olduğundan,  $nTy = C_e - e$  yolunun uzunluğu tektir, yani  $nTy$  yolunun çift sayıda köşesi vardır.

$\therefore n$  ve  $y$  köşeleri farklı parça kümelerine aittirler. ■

## 2. DÜZLEMSEL GRAFLAR

Bir grafi bir düzleme, herhangi iki kenarı, ortak uç noktaları haricinde, herhangi bir diğer noktada kesişmeyecek şekilde çizebilir miyiz?

**Tanım 2.1** Düzleme, kenarlarının kesişim kümesi sadece uç noktaları olacak şekilde çizilebilen graflara "düzlemsel graflar"; böylesi bir grafin düzlemdeki bir çizimine de "düzlem graf" denir .

Bu bölümde de, hem düzlem ve hem de düzlemsel grafları ve bu ikisi arasındaki ilişkiyi çalışacağız: Bir soyut düzlemsel graf düzleme esas itibariyle kaç farklı şekilde çizilebilir?

Alt Bölüm 2.1'de, bazı temel topolojik kavramları ve teoremleri bir araya getirdikten sonra, Alt Bölüm 2.2'de, düzlem grafların yapısal özelliklerini çalışmaya başlayacağız. Alt Bölüm 2.3'de, aynı grafin iki çiziminin nasıl birbirinden farklı olabileceğini inceleyeceğiz. Bu alt bölümün başlıca sonucu, topolojik açıdan, 3-bağlantılı düzlemsel grafların, esas itibariyle tek bir çizimlerinin olduğu gerçeğidir. Sonraki iki alt bölüm, bir soyut grafin hangi şartlar altında düzlemsel olduğu ile ilgili klasik düzlemsellik kriterlerinin ispatlarına ayrılmıştır. Bu bölümü, grafların cebirsel, renklendirme ve akış özellikleri ile çok ilginç bağlantıları olan "düzlem dualitesi" üzerine bir alt bölümle tamamlayacağız.

Bir graf çizilirken geleneksel olarak, köşeleri, Öklid düzlemindeki noktalarla ve kenarları, bu noktaları birleştiren eğrilerle temsil edilir öyle ki iki farklı eğri sadece ortak uç noktalarından birleşebilirler. Bununla birlikte, gereksiz bazı topolojik karışıklıklardan kaçınmak için, biz sadece, parçalı lineer olan eğrilerle çalışacağız. Ki herhangi bir çizimdeki eğrilerin bu şekilde doğrusal hale getirilebileceğini göstermek zor değildir ve bu sebeple, iki yaklaşım da aynı yere varır.

## 2.1 Temel Topolojik Kavramlar

Bu alt bölümde, daha sonra ihtiyaç duyacağımız bazı temel topolojik tanım ve gerçekleri kısaca gözden geçireceğiz. Bütün bu gerçeklerin kolay ve iyi bilinen ispatları birçok kaynakta bulunabileceğinden ve bu ispatlar graf teori içermediğinden, burada mevzubahis ispatlar verilmeyecektir. Tam olarak bizim amacımız, ihtiyacımız olan ve fakat bilinen ispatlarını yapmak istemediğimiz topolojik gerçekleri, derli toplu bir şekilde bir araya toplamaktır. Bunun sonrasında, diğer alt bölümlerde göreceğimiz tüm ispatlar, burada ifade edeceğimiz tanım ve teoremlerden doğrudan elde edilecektir. Bu sebeple, bu alt bölümde sunulan içerik, sonraki alt bölümlerde verilecek ispatlardaki elementer topolojik argümanların mümkün olduğunca minimum seviyede tutulmasına yardımcı olacaktır. Bir topolojik uzayın herhangi bir alt kümesi üzerindeki topoloji, her zaman "alt uzay topolojisi" olarak alınacaktır.

**Tanım 2.2** Öklid düzleminde bir "doğru parçası",  $\mathbb{R}^2$  nin,  $p, q \in \mathbb{R}^2$  farklı noktalar olmak üzere,  $\{p + \lambda(q - p) \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$  formundeki bir alt kümesidir. Sonlu sayıda doğru parçasının bir birleşimi olan ve  $\mathbb{R}^2$ 'de orijinden bir birim uzaklıktaki noktaların oluşturduğu  $S^1$  birim çemberine homeomorfik olan,  $\mathbb{R}^2$  nin bir alt kümesine bir "poligon" denir. Sonlu sayıda doğru parçasının bir birleşimi olan ve  $[0, 1]$  kapalı birim aralığa homeomorfik olan,  $\mathbb{R}^2$  nin bir alt kümesine, bir "poligonal yay" denir. Böylesi bir homeomorfizm altında, 0 ve 1 noktalarının görüntüleri, bu poligonal yayın "uç noktaları" olarak adlandırılır ve bir poligonal yay uç noktalarını "(birbirine) bağlar" veya "birleştirir". Genellikle, kolaylık olması açısından, "poligonal yay" yerine, sadece "yay" kelimesini kullanacağız. Eğer  $P$ ,  $x$  ve  $y$  köşeleri arasında bir yay ise,  $P \setminus \{x, y\}$  nokta kümesi,  $P$  nin "içi" olarak adlandırılır ve  $\overset{\circ}{P}$  biçiminde gösterilir.

**Not 2.1** Yaylar ve yayların sonlu birleşimleri,  $[0, 1]$  kapalı aralığının sürekli bir fonksiyon altındaki görüntü kümeleri olduklarından, "kompakt" kümelerdir. Bu sebeple,  $\mathbb{R}^2$  içinde "kapalı" dırlar ve dolayısıyla  $\mathbb{R}^2$  içindeki tümleyenleri "açık" tır.

**Tanım 2.3**  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$  herhangi bir açık küme olsun.  $\mathcal{O}$  içinde bir yay ile birleştirilebiliyor

olmak,  $\mathcal{O}$  üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. Karşılık gelen denklik sınıfları yine açık kümelerdir ve  $\mathcal{O}$  nun "bölgeleri" olarak adlandırılırlar.

**Tanım 2.4**  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  bir kapalı küme,  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$  bir açık küme ve  $\mathcal{O}'$ ,  $\mathcal{O}$  nun bir bölgesi olsun. Eğer  $\mathcal{O}' \setminus X$  birden çok bölgeye sahip ise,  $X$  kümesi  $\mathcal{O}'$  kümesini "ayırıyor" denir.

**Tanım 2.5**  $X \subseteq \mathbb{R}^2$  bir küme olsun. Her komşuluğu hem  $X$  kümesini ve hem de  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  tümleyen kümesini kesen, tüm  $y \in \mathbb{R}^2$  noktalarının kümesine,  $X$  in "sınırı" denir. Dikkat edilirse, eğer  $X$  açık ise, sınırı  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  tümleyeninin alt kümesidir.

$X$  sonlu sayıda noktanın ve sonlu sayıda yayın birleşimi olmak üzere,  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  açık kümesinin alt kümesi olan bir  $\mathcal{O}$  bölgesinin iki önemli özelliği vardır. Birincisi erişilebilirlik: Eğer  $x \in X$  noktası,  $\mathcal{O}$  kümesinin bir sınır noktası ise,  $x$  noktası,  $\mathcal{O}$  içindeki bir noktaya tüm iç noktaları  $\mathcal{O}$  içinde kalan bir doğru parçası ile bağlanabilir. Bunun sonucu olarak,  $\mathcal{O}$  nun sınırındaki herhangi iki nokta, tüm iç noktaları  $\mathcal{O}$  içindeki kalan bir yay ile birbirine bağlanabilir.  $\mathcal{O}$  nun sınırının ikinci önemli özelliği ise,  $\mathcal{O}$  açık kümesini,  $\mathbb{R}^2$  nin kalanından ayırıyor olmasıdır. Gerçekten de eğer  $\varphi : [0, 1] \rightarrow P \subseteq \mathbb{R}^2$  herhangi bir sürekli fonksiyon öyle ki  $\varphi(1) \notin \mathcal{O}$  ise, bu durumda,  $y := \inf\{x \mid \varphi(x) \notin \mathcal{O}\}$  olmak üzere,  $P$  yayı,  $\mathcal{O}$  nun sınırını en azından  $\varphi(y)$  noktasında keser, ki bu nokta  $P$  nin,  $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{O}$  daki "ilk noktasıdır".

**Teorem 2.1 (Poligonlar için Jordan Eğri Teoremi)** Her  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  poligonu için,  $\mathbb{R}^2 \setminus P$  kümesi tam olarak iki bölgeye sahiptir. Bu iki bölgenin de sınırı  $P$  poligonudur.

Jordan Eğri Teoremini kullanılarak, şimdi ifadesini vereceğimiz lemmanın ispatını yapmak zor değildir.

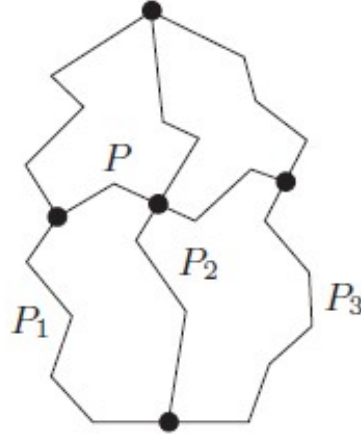
**Lemma 2.1**  $P_1, P_2, P_3$ , aynı uç noktaları birleştiren ve uç noktaları haricinde ayrık olan üç yay olsun. Bu durumda:

(i)  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_2 \cup P_3)$  tam olarak üç bölgeye sahiptir ve bu bölgelerin sınırları,  $P_1 \cup P_2$ ,  $P_2 \cup P_3$  ve  $P_1 \cup P_3$  dir.

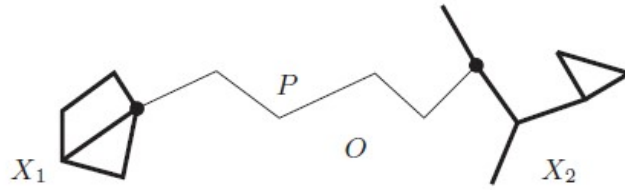
(ii) Eğer  $P, \mathring{P}_1$  bölgesindeki bir nokta ile  $\mathring{P}_2$  bölgesindeki bir noktayı birleştiren ve içi,  $\mathbb{R}^2 \setminus (P_1 \cup P_3)$  bölgesinin alt kümesi olan bir yay ise,  $\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 \neq \emptyset$  dir (Şekil 2.1).

Bir sonraki lemma, bir yayın düzlemi ayırmadığını söyleyerek Jordan Eğri Teoremini tamamlamaktadır. Sonradan daha kolay uygulanabilmesi amacıyla, bu gerçeği biraz daha genel bir biçimde ifade edeceğiz:

**Lemma 2.2**  $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ , her ikisi de sonlu sayıda nokta ve sonlu sayıda yaydan oluşan iki ayrık küme;  $P$ ,  $X_1$  içindeki bir nokta ile  $X_2$  içindeki bir noktayı birbirine bağlayan ve içi,  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$  nin alt kümesi olan bir  $\mathcal{O}$  bölgesinde uzanan bir yay olsun. Bu durumda,  $\mathcal{O} \setminus P$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup P \cup X_2)$  nin bir bölgesidir (Şekil 2.2).



Şekil 2.1 Lemma(ii) de verilen yaylar (Diestel 2017)



Şekil 2.2 P yayı,  $\mathbb{R}^2 \setminus (X_1 \cup X_2)$  nin  $\mathcal{O}$  bölgesini ayırmaz (Diestel 2017)

Son olarak, Alt Bölüm 2.3 de graf çizimlerinin denklik kavramı ele alınırken tek bir sefer kullanılacak olan bazı terim ve gerçekleri vereceğiz.

Her zaman olduğu gibi ,  $S^n, \mathbb{R}^{n+1}$  içinde, orijinden uzaklığı 1 birim olan noktaların kümesini, yani  $n$ -boyutlu küreyi gösterebiliriz. 2-küreden, "kuzey kutbunun", yani  $(0,0,1)$  noktasının çıkarılmış hali düzleme homeomorfiktir. Böylesi belirli bir homeomorfizm (örneğin, stereografik izdüşüm)  $\pi : S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  seçelim.

**Tanım 2.6**  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  bir poligon ve  $\mathcal{O}, \mathbb{R}^2 \setminus P$  nin sınırlı olan bölgesi olsun.  $C := \pi^{-1}(P), S^2$  üzerinde bir "çember";  $\pi^{-1}(\mathcal{O})$  ve  $S^2 \setminus \pi^{-1}(P \cup \mathcal{O}), S^2 \setminus C$  nin "bölgeleri" olarak adlandırılır.

Bu alt bölümün son sonucu, amaçlarımız doğrultusunda uyarlanmış, Jordan ve Schoenflies'e ait olan teoremdir:

**Teorem 2.2**  $\varphi : C_1 \rightarrow C_2, S^2$  üzerindeki iki çevrim arasında bir homeomorfizm;  $\mathcal{O}_1, S^2 \setminus C_1$  in bir bölgesi ve  $\mathcal{O}_2, S^2 \setminus C_2$  nin bir bölgesi olsun. Bu durumda ,  $\varphi$  , bir  $C_1 \cup \mathcal{O}_1 \rightarrow C_2 \cup \mathcal{O}_2$  homeomorfizmine genişletilebilir.

## 2.2 Düzlem Graflar

**Tanım 2.7**  $(V, E)$ , sonlu kümelerin bir çifti olsun. Yine  $V$  nin elemanları "köşeler" ve  $E$  nin elemanları "kenarlar" olarak adlandırılır. Eğer :

- (i)  $V \subseteq \mathbb{R}^2$ ;
- (ii) Her kenar köşeler arasında bir yay;
- (iii) Farklı kenarlar farklı uç nokta kümelerine sahip;
- (iv) Bir kenarın içi, bir diğer kenarın herhangi bir köşesini ve noktasını içermiyor ise,  $(V, E)$  çiftine bir "düzlem graf" denir.

Bir düzlem graf  $(V, E)$ , doğal bir şekilde,  $V$  üzerinde bir  $G$  grafi tanımlar. Herhangi bir karışıklık olmadığı müddetçe, bu soyut grafın ismi olan  $G$  yi,  $(V, E)$  düzlem grafi veya  $V \cup E$  nokta kümesi için de kullanacağız. Aynı şekilde, soyut kenarlar ve düzlem kenarlar, altgraflar vesaire için de benzer gösterimler kullanmaya devam edeceğiz.

**Tanım 2.8**  $G$ , bir düzlem graf olsun.  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  nin bölgelerine,  $G$  nin "yüz"leri denir. Bir grafın yüzleri,  $\mathbb{R}^2$  nin açık kümeleridir. Bu sebeple, herhangi bir yüzün sınırı  $G$  nin alt kümesidir.  $G$  grafi sınırlı olduğundan, yani yeterince büyük bir  $D$  diskinin içinde uzandığından; yüzlerinden tek bir tanesi sınırsızdır ve o da  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  yi içeren yüzdür. Bu yüz,  $G$  nin "dış yüzü", diğer yüzler ise  $G$  nin "iç yüzleri " olarak adlandırılır.  $G$  nin yüzlerinin kümesini  $F(G)$  ile göstereceğiz.

Düzlem grafların yüzleri ve altgrafları arasında aşikar bir bağlantı vardır:

**Lemma 2.3**  $G$ , bir düzlem graf,  $f \in F(G)$  bir yüz ve  $H \subseteq G$  bir altgraf olsun.

- (i)  $H$  altgrafının  $f$  yi içeren bir  $f'$  yüzü vardır.
- (ii) Eğer  $f$  nin sınırı  $H$  grafi içinde kalıyor ise ,  $f' = f$  dir.

**İspat.**

(i) Aşikar bir şekilde,  $f \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus G$  yüzündeki noktalar,  $\mathbb{R}^2 \setminus H$  içinde de denktirler.  $(x, y \in f \Leftrightarrow x$  ve  $y$  noktaları  $f$  içinde kalan bir yay ile birleştirilebilirler.  $\Rightarrow H \subseteq G$  olduğunda,  $x$  ve  $y$  noktaları,  $\mathbb{R}^2 \setminus H$  içinde kalan bir yay ile birleştirilebilir.  $\Rightarrow x$  ve  $y$ ,  $H$  nin aynı yüzüne aittirler.)  $f'$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus H$  nin,  $f$  yüzündeki noktaları içeren denklik sınıfı olsun.

(ii) Karşıt tersini ispat edelim.  $f' \neq f$  olsun. Bu durumda,  $f \not\subseteq f'$  olduğundan,  $f' \not\subseteq f$ , yani  $f' \setminus f \neq \emptyset$  dir. Bu sebeple,  $f$  ve  $f' \setminus f$  arasındaki her yay,  $f$  nin sınırı  $X$  i keser. Bu nedenle,  $f'$  içindeki böyle bir yay üzerinde bulunan  $X$  in sınırına ait nokta(lar),  $H$  grafına ait olamaz (çünkü  $\mathbb{R}^2 \setminus H$  nin içindedir(ler)). Bu yüzden ,  $X \not\subseteq H$  dir. ■

Bu alt bölümün sağlamayı amaçladığı, düzlem graflara (basit fakat) özenli bir girişin temellerini atmak için; şimdi bir kez daha, tamamıyla düzlemin elementer topolojisi ile alakalı aşikar bir gerçeği ifade edelim: Bir düzlem grafın bir yüzünün sınırı, her zaman  $G$  nin bir ait grafidir; örneğin, bir yarım kenar değildir.

Bir sonraki lemma, bu gerçeği ve düzlem grafların benzer biçimde aşikar olan iki özelliğini ifade etmektedir:

**Lemma 2.4**  $G$  bir düzlem graf ve  $e$ ,  $G$  nin bir kenarı olsun. Bu durumda :

- (i) Eğer  $X$ ,  $G$  nin bir yüzünün sınırı ise, ya  $e \subseteq X$  dir ya da  $X \cap e = \emptyset$  dir.
- (ii) Eğer  $e$ , bir  $C \subseteq G$  çevriminin üzerinde ise; bu durumda  $e$ ,  $G$  nin tam olarak iki yüzünün sınırındadır ve bu iki yüz,  $C$  nin farklı yüzlerinin içinde uzanmaktadır.
- (iii) Eğer  $e$  kenarını içeren hiçbir çevrim yok ise; bu durumda  $e$ ,  $G$  nin tam olarak bir yüzünün sınırındadır

**Sonuç 2.1** Bir yüzün sınırı, her zaman bir altgrafın nokta kümesidir.

**Tanım 2.9** Nokta kümesi, bir  $f$  yüzünün sınırı olan  $G$  nin altgrafına,  $f$  nin "sınırı" adı verilir ve bu altgraf  $f$  yi "sınırlandırıyor" denir,  $G[f]$  biçiminde gösterilir. Bir yüz, sınırının kenarları ve köşeleri ile "bağlıdır" denir.

**Not 2.2** İki önceki lemmanın (ii) kısmından,  $G$  nin her yüzü aynı zamanda sınırının bir yüzüdür. Bu gerçeği, ilgili ispatlarda sıklıkla kullanacağız.

**Teorem 2.3** Bir düzlem ormanının tam olarak tek bir yüzü vardır.

Tek bir istisnaıyla, bir düzlem grafın farklı yüzleri farklı sınırlara sahiptirler:

**Lemma 2.5** Eğer bir düzlem grafın sınırları aynı olan iki yüzü var ise, bu graf bir çevrimdir.

**İspat.**  $G$ , bir düzlem graf ve  $H \subseteq G$ ,  $G$  nin birbirinden farklı  $f_1$  ve  $f_2$  yüzlerinin sınırı olsun.  $f_1$  ve  $f_2$ ,  $H$  nin de yüzleridir; bu sebeple, bir önceki teoremden,  $H$  bir  $C$  çevrimi içerir. (Eğer  $H$  hiçbir çevrim içermeseydi, bir orman olurdu. Fakat önceki teoremden, bir ormanın tek bir yüzü olduğunu biliyoruz.) Bir önceki lemmanın (ii) kısmından,  $f_1$  ve  $f_2$  yüzleri  $C$  nin farklı yüzleri içinde uzanırlar.  $H$  altgrafının tamamı  $f_1$  ve  $f_2$  yüzlerinin sınırı olduğundan,  $H = C$  dir:

Diyelim ki  $H \neq C$ , yani  $C \subsetneq H$  olsun. Bu durumda,  $H$  nin  $C$  çevriminde olmayan bir köşe veya bir kenarı vardır. Fakat bu durumda, bu köşe veya kenar,  $C$  nin iki yüzünden birisinde olacağından ve  $f_1, f_2$  yüzleri  $C$  nin farklı yüzleri içinde bulduklarından, bu

köşe veya kenar, kendisiyle aynı tarafta olmayan yüzün sınırı üzerinde olmayacaktır. Ki bu bir çelişki verir. Bu sebeple,  $H = C$  dir ve  $f_1, f_2, C$  nin farklı yüzleridir.  $C$  nin sadece iki yüzü olduğundan,  $f_1 \cup C \cup f_2 = \mathbb{R}^2$  dir ve bu nedenle,  $G = C$  dir. ■

**Teorem 2.4** *Bir 2-bağlantılı düzlem grafta, her yüz bir çevrim tarafından sınırlandırılır.*

Bir 3-bağlantılı düzlem grafta, yüz sınırları olan çevrimleri, tamamen kombiratorik terimlerle tanımlayabiliriz:

**Teorem 2.5** *Bir 3-bağlantılı düzlem grafin yüz sınırları tam olarak, bu grafin ayrılma-yan indüke çevrimleridir.*

**Tanım 2.10**  $G$ , bir düzlem graf olsun. Eğer  $G$  grafına yeni bir kenar ekleyerek,  $V(G') = V(G)$  olmak şartıyla (yani yeni bir köşe eklemeksizin),  $G' \not\supseteq G$  olacak şekilde bir düzlem graf elde edilemiyor ise;  $G$ , bir "maksimal (düzlem)" graftır denir. Eğer  $G$  nin (dış yüzü dahil) her yüzü bir üçgen tarafından sınırlandırılmış ise,  $G$  grafi bir "düzlem üçgenleme" olarak adlandırılır.

**Teorem 2.6**  $G$ , en az üç köşe içeren bir düzlem graf olsun. Bu durumda:  
 $G$  bir maksimal düzlem graftır  $\Leftrightarrow G$  bir düzlem üçgenlemesidir.

Bir sonraki teoremde düzlem için en basit formunda ifade edeceğimiz Euler'in klasik sonucu, graf teori ve topolojinin ortak kökenlerinden birisini göstermektedir. Teorem, bir düzlem grafta, köşe, kenar ve yüz sayılarını ilişkilendirmektedir: Doğru işaretlerle alınrsa, bu sayıların toplamı her zaman 2 dir. Euler teoreminin genel hali, diğer yüzeyler üzerinde alınmış (yani diğer yüzeylere katıştırılmış) graflar için de aynı gerçeği ifade eder: Elde edilen toplam her zaman bir sabit sayıdır ve bu sabit sayı sadece yüzeye bağlıdır, grafa bağlı değildir. Ayrıca bu sayı, farklı (yönlendirilebilir kapalı) yüzeyler için farklıdır. Bu sebeple, böylesi iki yüzey, üzerlerine katıştırılmış grafların bir basit aritmetik değişmeziyle ayırt edilebilirler.

**Teorem 2.7 (Euler Formülü)**  $G$ ,  $n$  köşesi,  $m$  kenarı ve  $\ell$  yüzü olan bir bağlantılı düzlem graf olsun. Bu durumda:

$$n - m + \ell = 2$$

eşitliği sağlanır.

**İspat.**  $n$  yi sabit tutalım ve  $m$  üzerinden tümevarım uygulayalım.  $m \leq n - 1$  için,  $G$  bağlantılı olduğundan  $m = n - 1$  dir, yani  $G$  bir ağaçtır. Bu sebeple, bir ağacın tek bir yüzü olduğundan, iddia ispatlanmış olur.

Şimdi  $m \geq n$  olsun. Bu durumda,  $G$  nin bir çevrim üzerinde olan bir  $e$  kenarı vardır.  $G' := G - e$  olsun.  $e$  kenarı,  $G$  grafının tam olarak iki  $f_1, f_2$  yüzünün sınırı üzerinde bulunduğu ve  $\dot{e}$  içindeki tüm noktalar,  $\mathbb{R}^2 \setminus G'$  de birbirine denk olduklarından,  $G'$  grafının  $\dot{e}$  nokta kümesini içeren bir  $f_e$  yüzü vardır. Şimdi:

$$F(G) \setminus \{f_1, f_2\} = F(G') \setminus \{f_e\} \quad (*)$$

olduğunu gösterelim. Bu durumda,  $G'$  grafi,  $G$  grafından tam olarak bir eksik yüz ve bir eksik kenar içerdiğinden,  $G'$  grafi için tümevarım hipotezi iddianın doğruluğunu ortaya koyar.

(\*) in bir ispatı için, önce  $f \in F(G) \setminus \{f_1, f_2\}$  verilsin. Bu alt bölümün ikinci lemmasının (i) kısmından,  $e$  bir yüzün sınırına ait veya ait olmadığı bir sınırla içinin kesişimi boş küme olduğundan,  $f$  yüzünün sınırı  $G[f] \subseteq G \setminus \dot{e} = G'$  dir. Bu sebeple, bu alt bölümün ilk lemmasının (ii) kısmından,  $f \in F(G')$  dir. Aşık bir şekilde  $f \neq f_e$  olduğundan, (\*) eşitliğinde, ( $\subseteq$ ) bağıntısı gösterilmiş olur.

Karşıt olarak,  $f' \in F(G') \setminus \{f_e\}$  verilsin. Aşık bir şekilde,  $f' \neq f_1, f_2$  ve  $f' \cap \dot{e} = \emptyset$  dir. (Çünkü  $e, f_1$  ve  $f_2$  nin sınırı üzerindedir ve  $\dot{e} \subseteq f_e$  dir.) Bu sebeple, ( $f', G' = G - e$  nin bir yüzü ve  $f' \cap \dot{e} = \emptyset$  olduğundan,)  $f'$  yüzü içindeki herhangi iki nokta,  $\mathbb{R}^2 \setminus G$  kümesi içindedir ve birbirlerine denktirler. Bu sebeple,  $G$  grafının  $f'$  yüzünü içeren bir  $f$  yüzü vardır. Bununla birlikte, bu alt bölümün ilk lemmasının (i) kısmından,  $f, G'$  grafının bir  $f''$  yüzünün içinde uzanır. Bu nedenle,  $f' \subseteq f \subseteq f''$  dir. Diğer yandan,  $f'$  ve  $f''$ ,  $G'$  grafının iki yüzü olduklarından,  $f' = f = f''$  elde edilir. Bu sebeple,  $f' \in F(G)$  dir, yani (\*) eşitliğinde, ( $\supseteq$ ) bağıntısı da gösterilmiş olur. ■

**Sonuç 2.2** Köşe sayısı  $n \geq 3$  olan bir düzlem graf en fazla  $3n - 6$  tane kenar içerir.  $n$  köşe içeren her düzlem üçgenlemesinde tam olarak  $3n - 6$  tane kenar vardır.

**İspat.** İki önceki teoremden, ikinci iddianın doğruluğunu göstermek yeterlidir. Bir düzlem üçgenlemesi  $G$  de, her yüzün sınırı tam olarak üç kenar içerir ve bu alt bölümünün ikinci lemmasının (ii) kısmından, her kenar tam olarak iki yüzün sınırına aittir. Bu sebeple, kenar kümesi  $\{ef \mid e \subseteq G[f]\}$  olan,  $E(G) \cup F(G)$  üzerindeki iki parçalı grafın tam olarak  $2|E(G)| = 3|F(G)|$  kenarı vardır. (Çünkü her bir kenar iki yüzün sınırına aittir ve her bir yüzün sınırı bir üçgendir.) Şimdi bu eşitliğe göre, Euler formülünde,  $\ell$  yerine  $2m/3$  yazarsak, istenilen sonucu elde ederiz:

$$n - m + \frac{2m}{3} = 2 \Leftrightarrow 3n - 3m + 2m = 6 \Leftrightarrow m = 3n - 6. \blacksquare$$

Euler formülü, bazı grafların düzlem graf olamayacağını göstermek için kullanılabilir:

**Örnek 2.1**  $K^5$  tam grafi bir düzlem graf değildir:

$K^5$  in kenar sayısı  $m = \binom{5}{2} = 10$  ve  $10 > 3 \cdot 5 - 6$  dir. Yani  $K^5$  in kenar sayısı, önceki sonuçta verilen sınırı aşmaktadır. Bu sebeple,  $K^5$  bir düzlem graf olamaz.

**Örnek 2.2**  $K_{3,3}$  iki parçalı tam grafi da bir düzlem graf değildir:

Diyelim ki  $K_{3,3}$  bir düzlem graf olsun.  $K_{3,3}$ , 2-bağlantılı olduğundan ve fakat üçgen içermediğinden,  $K_{3,3}$  grafının her yüzü, uzunluğu  $\geq 4$  olan bir çevrim ile sınırlıdır. Bu sebeple, her bir kenar tam olarak iki tane yüzün sınırında uzandığından,  $2m \geq 4\ell$  dir. (Her sınır, uzunluğu  $\geq 4$  olan bir çevrim olduğundan sınırlardaki kenarların toplam sayısı  $\geq 4\ell$  dir.) Bu nedenle, Euler formülünde,  $m = n + \ell - 2$  olduğundan,  $2m = 2n + 2\ell - 4 \leq 2n + m - 4$ , yani  $m \leq 2n - 4$  eşitsizliği elde edilir. Fakat  $K_{3,3}$  de,  $m = 9 > 2 \cdot 6 - 4$  dir. Bu sebeple,  $K_{3,3}$  bir düzlem graf olamaz.

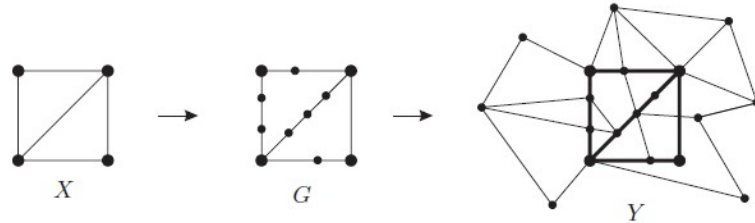
Aşık bir şekilde,  $K^5$  ve  $K_{3,3}$  birer düzlem graf olmadıklarından, bu iki grafın alt-bölümlenmeleri de bir düzlem graf olamaz:

**Sonuç 2.3** Bir düzlem graf, ne  $K^5$  tam grafini ve ne de  $K_{3,3}$  iki parçalı tam grafini bir topolojik minörü olarak içeremez.

Şaşırtıcı bir şekilde, düzlem grafların bu basit özelliği, diğer tüm graflar arasında onları tanımlamaktadır: Alt bölüm 4.4 de açıklandığı gibi, "herhangi bir graf düzleme (kenarları kesişmeyecek biçimde) çizilebilir ancak ve ancak bu graf (topolojik)  $K^5$  veya  $K_{3,3}$  minörü içermez".

**Not 2.3** Bir  $X$  grafının bir "alt-bölümlemesi", bu grafın bazı veya tüm kenarlarına yeni köşelerin yerleştirilmesiyle alt-bölümlemesinden elde edilen graftır. Diğer bir ifadeyle,  $X$  grafının bazı kenarları, uç noktaları bu kenarların uç noktaları olan ve iç köşelerinin hiçbirisi  $V(X)$  içinde veya bir diğer yeni yol üzerinde olmayan yollarla değiştirilirse, elde edilen yeni graf  $X$  in bir "alt-bölümlemesidir".

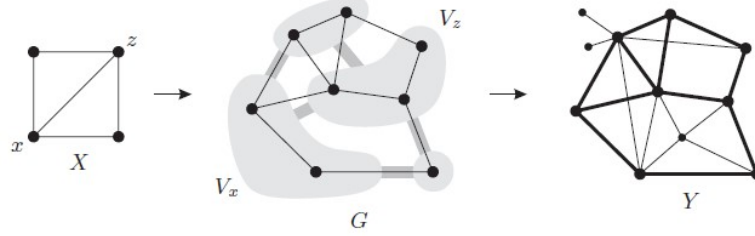
$G$ ,  $X$  in bir alt-bölümlemesi olsun.  $G$  içindeki,  $X$  in orijinal köşelerine, "dal köşeleri"; diğer köşelere, "alt-bölümleme köşeleri" denir. Dikkat edilirse, alt-bölümleme köşelerinin her birinin derecesi 2; dal köşelerinin dereceleri ise,  $X$  deki dereceleri ile aynıdır. Eğer bir  $Y$  grafi,  $X$  grafının bir alt-bölümlemesi olan bir  $G$  grafını bir altgrafi olarak içeryor ise;  $X$ ,  $Y$  nin bir "topolojik minörüdür" denir (Şekil 2.3).



**Şekil 2.3**  $G$ ,  $X$  in bir alt-böl. ve  $X$ ,  $Y$  nin bir top. minörüdür (Distel 2017)

Benzer şekilde,  $X$  grafının  $x$  köşelerini, ayrıık bağlantılı  $G_x$  graflarıyla ve  $X$  grafının  $xy$  kenarlarını,  $G_x - G_y$  kenarlarının boştan farklı alt kümeleriyle yer değiştirirsek, bir  $G$  grafi elde ederiz. Daha kesin ve net bir şekilde ifade edersek:  $G$  grafının köşeler kümesinin bir  $\{V_x \mid x \in V(X)\}$  ayrışımı vardır öyle ki  $V_x$  kümelerinin her biri bağlantılıdır ve birbirinden farklı  $x, y \in X$  köşeleri,  $X$  içinde komşudur ancak ve ancak  $G$  grafi bir  $V_x - V_y$  kenarı içerir. Bu durumda,  $V_x$  kümelerine,  $G$  nin "dal kümeleri" denir. Karşıt olarak,  $X$  grafi,  $G$  grafindan,  $G_x$  altgraflarının "büzülmesiyle" elde edilir denir ve  $X$  grafi,  $G$  nin bir "büzülme minörü" olarak adlandırılır. Eğer bir  $Y$  grafi,  $X$  grafının bir büzülme

minörü olduğu bir  $G$  grafını bir altgrafı olarak içeriyor ise;  $X, Y$  nin bir "minörüdür" denir ve  $X \preceq Y$  biçiminde gösterilir. Ayrıca  $G$  grafı,  $X$  in  $Y$  içinde bir "modeli" olarak adlandırılır.



**Şekil 2.4**  $G, X$  in  $Y$  içinde bir modelidir;  $X, Y$  nin bir minörüdür (Distel 2017)

### 2.3 Çizimler

**Tanım 2.11** Bir (soyut)  $G$  grafı ile bir  $H$  düzlem grafı arasındaki bir izomorfizmaya,  $G$  nin düzleme bir "karıştırılması" veya bir "düzlemsel katıştırma" ve  $H$  ye  $G$  grafının bir "çizimi" denir. ( $G$  ve  $H$  graflarının köşelerini ve kenarlarını gösterimsel olarak ayırt etmeyeceğiz).

Bu alt bölümde, bir grafın iki düzlemsel katıştırmasının nasıl birbirinden farklı olabileceğini inceleyeceğiz: Bir düzlem graf  $G$  nin,  $\rho : G \rightarrow H$  ve  $\rho' : G \rightarrow H'$  gibi iki katıştırmasının benzerliğini nasıl ölçmeliyiz? Bunu yapmanın bir aşıkâr yolu, soyut graflar olarak  $H$  ve  $H'$  grafları arasındaki  $\sigma := \rho' \circ \rho^{-1}$  kanonik izomorfizmasını ele almak ve bu izomorfizmanın, bu iki grafın düzlemdeki konumlarını ne kadar koruduğunu sorgulamaktır. Örneğin,  $\sigma$  izomorfizması düzlemin basit bir dönmesine karşılık geliyorsa, bu durumda  $\rho$  ve  $\rho'$  katıştırılmaları,  $G$  nin gerçekten de farklı çizimleri olarak değerlendirmek çok da makul değildir.

Yüz kümeleri  $F(H) =: F$  ve  $F(H') =: F'$  olan,  $H = (V, E)$  ve  $H' = (V', E')$  düzlem grafları arasındaki herhangi bir soyut  $\sigma : V \rightarrow V'$  izomorfizmasını ele alarak başlayalım ve  $\sigma$  nın,  $H$  ve  $H'$  nün düzlem graflar olarak özelliklerini ne derece koruduğunu ölçmeye çalışalım. Bunun için aşağıdaki üç değerlendirme ölçütü önerilecek ve ardından birçok

graf için bu ölçütlerin uygun olduğu gösterilecektir. Özel olarak, bir önceki paragrafta ele aldığımız  $\sigma := \rho' \circ \rho^{-1}$  izomorfizmasına uygulandığında, üç ölçütün hepsi birden, bir 3–bağlantılı grafi çizmenin esas itibariyle tek bir yolu olduğunu söylemektedir.

$\sigma$  (soyut) izomorfizmasının,  $H$  ve  $H'$  graflarının düzlem özelliklerini ne kadar iyi kounduğunu ölçmek için ilk ölçütümüz, belki de en doğal olanıdır. Sezgisel olarak, eğer  $\sigma$ ,  $\mathbb{R}^2$  düzlemesinden  $\mathbb{R}^2$  düzlemine bir homeomorfizmden geliyorsa,  $\sigma$  yı "topolojik" olarak adlandırmak isteyebiliriz. Bununla birlikte,  $H$  ve  $H'$  düzlem graflarının dış yüzlerine özel bir statü vermekten kaçınmak için, Alt Bölüm 4.1 de verilmiş olan,  $\pi : S^2 \setminus \{(0.0.1)\} \rightarrow S^2$  homeomorfizmasını kullanarak dolaylı yoldan gideceğiz:

**Tanım 2.12** Eğer bir  $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$  homeomorfizması varsa öyle ki  $\psi := \pi \circ \varphi \circ \pi^{-1}$  homeomorfizması,  $V \cup E$  kümesi üzerinde  $\sigma$  izomorfizmasına sebep oluyor ise,  $\sigma$ ,  $H$  ve  $H'$  düzlem grafları arasında bir "topolojik izomorfizma" olarak adlandırılır. Daha açık ve net bir şekilde ifade edersek:  $\psi$  homeomorfizmasının ve  $\sigma$  izomorfizmasının,  $V$  kümesi üzerinde aynı fonksiyonlar olmasını ve  $\psi$  nin, her  $xy \in H$  düzlem kenarını,  $\sigma(x)\sigma(y) \in H'$  düzlem kenarı üzerine taşımasını istiyoruz.

( $\varphi$  homeomorfizması, (0.0.1) noktasını kendisine götürmüyor ise,  $\psi$  homeomorfizması,  $\pi(\varphi^{-1}(0.0.1))$  noktasında tanımsız olacaktır.)

**Not 2.4** Eğer  $\sigma$  bir topolojik izomorfizma ise; bu durumda,  $\psi$  veya  $\psi^{-1}$  homeomorfizmalarının tanımsız olması muhtemelen nokta çifti hariç,  $\psi$  homeomorfizması,  $H$  nin yüzlerini  $H'$  nün yüzleri üzerine taşır. Böylece  $\sigma$  topolojik izomorfizması doğal olarak; köşelerin, kenarların ve yüzlerin ilişkilerini koruyan bir  $\sigma : V \cup E \cup F \rightarrow V' \cup E' \cup F'$  bire-bir ve örten fonksiyona genişler.

Bir topolojik izomorfizmanın bir önceki nokta verilen özelliğini, düzlem graflar arasındaki bir soyut izomorfizmanın, düzlem grafların düzlemdeki konumlarını ne kadar iyi koruduğuna dair ikinci ölçütümüz olarak seçip ayıralım :

**Tanım 2.13** Eğer  $H$  ve  $H'$  düzlem grafları arasındaki bir  $\sigma$  izomorfizması, sadece köşele-

rin kenarlara olan bağılıklarını değil, fakat aynı zamanda köşelerin ve kenarların yüzlerle olan bağılıklarını da koruyan, birebir ve örten  $\sigma : V \cup E \cup F \rightarrow V' \cup E' \cup F'$  fonksiyonuna genişletilebiliyor ise;  $\sigma$ , bir "kombinasyonel izomorfizma" olarak adlandırılır. Daha açık ve net bir şekilde ifade edersek: "Bir  $x \in H$  köşesi veya kenarı, bir  $f \in F$  yüzünün sınırı üzerindedir ancak ve ancak  $\sigma(x)$ ,  $\sigma(f) \in F'$  yüzünün sınırı üzerindedir" şartının sağlanmasını istiyoruz.

**Not 2.5** Eğer  $\sigma$ ,  $H$  ve  $H'$  düzlem grafları arasında bir kombinasyonel izomorfizma ise,  $H$  nin yüz sınırları  $H'$  nün yüz sınırlarına taşır.

Bir kombinasyonel izomorfizmanın bir önceki nokta verilen özelliğini, üçüncü ölçütümüz olarak belirleyelim:

**Tanım 2.14** Eğer  $H$  ve  $H'$  düzlem grafları arasındaki bir  $\sigma$  izomorfizması:

$$\{\sigma(H[F]) \mid f \in F\} = \{H'[F'] \mid f' \in F'\}$$

şartını sağlıyor ise;  $\sigma$ , bir "graf-teorik izomorfizme" olarak adlandırılır.

Tanımları gereği, iki düzlem graf arasındaki her topolojik izomorfizma, aynı zamanda kombinasyoneldir ve her kombinasyonel izomorfizma, aynı zamanda graf-teoriktir. Şimdi ifade edeceğimiz teorem, birçok graf için bu gerektirmelerin karşılıklarının da doğru olduğunu göstermektedir:

**Teorem 2.8** (i) İki düzlem graf arasında her graf-teorik izomorfizma kombinasyoneldir. Bir bire-bir ve örten yüzey genişlemesi tektir ancak ve ancak graf bir çevrim değildir.  
(ii) 2-bağılantılı düzlem graflar arasındaki her kombinasyonel izomorfizma topolojiktir.

Şimdi asıl amacımız olan, düzlemsel katıştırma denkleminin tanımına dönelim:

**Tanım 2.15**  $G$  bir düzlemsel graf ve  $\rho$ ,  $\rho'$ ,  $G$  nin iki düzlemsel katıştırması olsun. Eğer  $\rho' \circ \rho^{-1}$ ,  $\rho(G)$  ve  $\rho'(G)$  arasında bir topolojik (sırasıyla, kombinasyonel) izomorfizma ise;  $\rho$ ,  $\rho'$  katıştırma "topolojik olarak (sırasıyla, kombinasyonel olarak) denktirler" denir.

Dikkat edilirse, bir önceki teoremden, eğer  $G$  2–bağlantılı ise, bu iki tanım örtüşmektedir ve dolayısıyla, basitçe katıştırmaların "denkliğinden" bahsederiz.

**Not 2.6** Aşık bir şekilde, bir önceki tanımda verilen bağlantı, gerçekten de verilen bir grafın düzlemsel katıştırmalarının kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Dikkat edilirse,  $G$  nin birbirine denk olmayan katıştırmalarından elde edilen iki çizimi topolojik olarak izomorf olabilir: Çünkü iki katıştırmaların denk olabilmesi için, bu katıştırmaların görüntüleri arasında, sadece herhangi bir (topolojik veya kombinasyonel) izomorfizmanın olmasını değil, kanonik  $\rho' \circ \rho^{-1}$  izomorfizmasının topolojik veya kombinasyonel olmasını istiyoruz. Fakat bu şart altında dahi, 3–bağlantılı grafların (denklik hariç) tek bir katıştırmaları vardır:

**Teorem 2.9** (*Whitney 1933*)

*Bir 3–bağlantılı grafın herhangi iki düzlemsel katıştırmaları birbirine denktir.*

**İspat.**  $G$  bir 3–bağlantılı graf,  $\rho : G \rightarrow H$  ve  $\rho' : G \rightarrow H'$ ,  $G$  nin iki düzlemsel katıştırmaları olsun. Bir önceki teoremden,  $\rho' \circ \rho^{-1}$  nin bir graf-teorik izomorfizma olduğunu göstermek, yani : "Her  $C \subseteq G$  altgrafı için,  $\rho(C)$ ,  $H$  nin bir yüzünü sınırlar ancak ve ancak  $\rho'(C)$ ,  $H'$  nin bir yüzünü sınırlar" şartının sağladığını göstermek yeterlidir. Fakat bir önceki ait bölümden, bir 3–bağlantılı düzlem grafın yüz sınırlarının, tam olarak bu grafın ayrılmayan indüke çevrimleri olduğunu bildiğimizden, gösterilmek istenen bu sonuç doğrudan gösterilmiş olur. ■

## 2.4 Düzlemsel graflar: Kuratowski Teoremi

**Tanım 2.16** Bir graf düzleme karşıtlarlıbiliyor ise, yani bir düzlem grafa izomorf ise, bu graf düzlemsel olarak adlandırılır. Eğer bir graf düzlemsel ve fakat (köşe eklemeksizin) herhangi bir kenar eklenerek daha büyük bir düzlemsel grafa genişletilemiyor ise, bu grafa "maksimal (olarak) düzlemsel" denir.

Maksimal düzlemsel grafların çizimleri, aşık bir şekilde maksimal düzlem graflardır. Bununla birlikte, bu önermenin karşıtının doğru olup olmadığı açık değildir: Bir düzlem-

sel grafi çizmeye koyduğumuzda, halihazırda maksimal düzlem olan bir has altgrafa denk gelerek yarı yolda kalmamız mümkün müdür? Şimdi ifade edeceğimiz ilk teorem, bunun hiçbir zaman mümkün olmadığını söylemektedir; yani bir düzlem graf, hiçbir zaman yalnızca kötü bir çizim sebebiyle maksimal olarak düzlem olmaz.

**Teorem 2.10** (i) *Her maksimal düzlem graf, maksimal olarak düzlemseldir.*

(ii) *Köşe sayısı  $n \geq 3$  olan bir düzlemsel graf, maksimal olarak düzlemseldir ancak ve ancak tam olarak  $3n - 6$  tane kenara sahiptir.*

Hangi graflar düzlemseldir? Bir önceki alt bölümden,  $K^5$  veya  $K_{3,3}$  graflarından herhangi birisini bir topolojik minörü olarak içeren hiçbir düzlemsel graf olmadığını biliyoruz. Bu alt bölümdeki amacımız, bunun karıştının, şaşırtıcı bir şekilde doğrunu göstermek, yani Kuratowski'nin klasik teoremini ispat etmektir:  $K^5$  veya  $K_{3,3}$  graflarını bir topolojik minör olarak içermeyen herhangi bir graf düzlemseldir.

Kuratowski teoremini vermeden önce, topolojik minörleri ele almaktansa, normal minörlerle çalışmanın yeterli olduğunu not edelim:

**Lemma 2.6** *Bir graf  $K^5$  veya  $K_{3,3}$  graflarını bir minör olarak içerir  $\Leftrightarrow$  Bu graf  $K^5$  veya  $K_{3,3}$  graflarını bir topolojik minör olarak içerir*

Kuratowski teoremini önce 3-bağlantılı graflar için ifade edelim. Ki şimdi vereceğimiz lemmanın ispatı, genel durumun ispatının en önemli kısmıdır; yani Kuratowski teoremi bu lemmadan kolaylıkla elde edilir:

**Lemma 2.7** *Bir  $K^5$  veya  $K_{3,3}$  minör içermeyen her 3-bağlantılı  $G$  grafi düzlemseldir.*

Kuratowski teoreminin ispatı için son bir lemmaya ihtiyacımız vardır:

**Lemma 2.8**  *$G$ , köşe sayısı  $\geq 4$  olan, kenar-maksimal ve  $K^5$  veya  $K_{3,3}$  graflarını topolojik minör olarak içermeyen bir graf olsun. Bu durumda,  $G$  grafi 3-bağlantılıdır.*

**Teorem 2.11** (Kuratowski 1930, Wagner 1937)

Bir  $G$  grafi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i)  $G$  düzlemseldir.

(ii)  $G$ , ne  $K^5$  tam grafini ve ne de  $K_{3,3}$  iki parçalı tam grafini bir minör olarak içermez.

(iii)  $G$ , ne  $K^5$  tam grafini ve ne de  $K_{3,3}$  iki parçalı tam grafini bir topolojik minör olarak içermez.

**Sonuç 2.4** Köşe sayısı en az dört olan her maksimal düzlemsel graf 3–bağlantılıdır.

## 2.5 Cebirsel Düzlemsellik Ölçütleri

Bir  $G$  düzlem grafinin en dikkat çeken özelliklerinden birisi "yüz çevrimleridir".

**Tanım 2.17** Bir düzlem grafin herhangi bir yüzünü sınırlayan çevrime, bu grafin bir "yüz çevrimi" denir.

Eğer  $G$  grafi 2–bağlantılı ise, bu graf yüz çevirmeleri tarafından örtülür, bu nedenle bir anlamda, yüz çevrimleri "büyük" bir küme oluşturur. Gerçekten de yüz çevirmelerinin kümesi, tüm "çevrim uzayını" geriyor olmaları bakımından da büyüktür:  $G$  grafindeki her çevrim yüz çevrimlerinin toplamı olarak yazılabilir. Diğer yandan, yüz çevrimleri,  $G$  grafini "seyrek bir biçimde" örterler; çünkü her bir kenar en fazla iki yüz çevrimi üzerinde uzanır.

Şimdi öncelikle, gerekli tanım ve teoremleri verelim. Ardından bu alt bölümdeki amacımıza geri döneceğiz.

**Tanım 2.18**  $G = (V, E)$ ,  $m$  kenarlı ve kenar kümesi  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  olan bir graf olsun.  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ , 2-elemenlı cisim olmak üzere,  $E$  den  $\mathbb{F}_2$  ye giden tüm fonksiyonların kümesi;  $\mathbb{F}_2$  cismi üzerinde bir vektör uzayıdır ve bu vektör uzayı,  $G$  nin "kenar uzayı" olarak adlandırılır,  $\mathcal{E}(G)$  biçiminde gösterilir.  $\mathcal{E}(G)$  vektör uzayının elemanları,  $E$  kenar kümesinin altkümeleri ile bire-bir eşleştirilebilir:  $\mathcal{E}(G)$  nin her bir elemanına, bu elemanın

1 e götürdüğü kenarların kümesi eşleştirilir (ve tabi ki  $E$  nin her bir alt kümesine, bu alt kümedeki kenarları 1 e ve diğer tüm kenarları 0 a götüren fonksiyon karşılık gelir). Bu sebeple,  $\mathcal{E}(G)$  vektör uzayı,  $E$  nin kuvvet kümesi olarak değerlendirilir. Bu durumda,  $F, F' \subseteq E$  vektörlerinin toplamı,  $F, F'$  alt kümelerinin simetrik farkıdır;  $\emptyset \subseteq E$  sıfır vektördür ve her  $F \subseteq E$  için,  $F = -F$  dir. Ayrıca  $\{\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_m\}\}$  kümesi,  $\mathcal{E}(G)$  nin "standart tabanıdır" ve bu nedenle,  $\dim \mathcal{E}(G) = m$  dir.

**Tanım 2.19**  $G$  grafının tüm çevrimlerinin (daha doğrusu tüm çevrimlerin kenar kümelerinin) gerdiği,  $\mathcal{E}(G)$  uzayının alt uzayına,  $G$  nin "çevrim uzayı" denir ve  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(G)$  biçiminde gösterilir.

$\mathcal{C}$  çevrim uzayındaki vektörler, oluşturdukları altgrafların dereceleri ile kolaylıkla ayırt edilirler. Ayrıca, çevrim uzayını çevrimlerden üretmek için simetrik farklar yerine ayrık birleşimler almak yeterlidir:

**Teorem 2.12**  $\emptyset \neq D \subseteq E$  kenar kümeleri için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i)  $D \in \mathcal{C}(G)$ ;
- (ii)  $D$ ,  $G$  grafindaki bazı çevrimlerin kenar kümelerinin ayrık birleşimidir;
- (iii)  $(V, D)$  grafının tüm köşe dereceleri çifttir.

**Tanım 2.20**  $F \subseteq E$  bir kenar kümesi olsun. Eğer  $G$  grafının köşe kümesi  $V$  nin  $\{V_1, V_2$  biçiminde bir ayrışımı var öyle ki  $F = E(V_1, V_2)$  ise,  $F$  ye  $G$  grafının içinde bir "kesim" denir. Ayrıca  $F$  deki kenarların, bu ayrışımı "çaprazladığı" söylenir. Ayrışımın  $V_1, V_2$  köşe kümeleri, bu kesimin " taraflarıdır". Eğer  $V_1 = \{v\}$  ise, bu kesim  $E(v)$  biçiminde gösterilir.  $G$  içindeki boştan farklı bir minimal kesim, bir "bağ" olarak adlandırılır.

**Teorem 2.13**  $\emptyset$  ile birlikte,  $G$  deki tüm kesimlerin kümesi,  $\mathcal{E}(G)$  vektör uzayının bir  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G)$  alt uzayını oluşturur. Bu uzay,  $E(v)$  biçimindeki kesimler tarafından gerilir.

**İspat.**  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{E}(G)$  uzayının,  $E(v)$  biçimindeki tüm kesimlerinin gerdiği alt uzay olsun. Köşe ayrışımı, diyelim ki  $\{V_1, V_2\}$  biçiminde olan  $G$  nin bir kesimi,  $\sum_{v \in V_1} E(v)$  dir. ( $\mathcal{E}(G)$  uzayındaki toplamının, simetrik farka karşılık geldiğini biliyoruz. Diğer yandan,  $v \neq w$

ise,  $E(v) \cap E(w) = \emptyset$  dir. Bu sebeple, buradaki toplama, doğrudan kümelerin birleşimine karşılık gelmektedir.) Bu nedenle, her bir kesim,  $\mathcal{B}$  uzayındadır . Diğer yandan, her  $\sum_{u \in U} E(u) \in \mathcal{B}$  kümesi (vektörü) ya boş kümedir (örneğin,  $U \in \{\emptyset, V\} \Rightarrow \sum_{u \in U} E(u) = \emptyset$ :  $U = \emptyset$  ise, bu kümenin boş küme olduğu aşikardır;  $U = V$  ise, her  $xy$  kenarı toplamda,  $E(x)$  ve  $E(y)$  kümelerinde olmak üzere, tam olarak iki sefer bulunduğundan, simetrik fark işlemi sırasında alınmaz ve bu sebeple, bu küme yine bir boş küme olur) ya da  $E(U, V \setminus U)$  kesimidir. ■

**Tanım 2.21** Önceki teoremdeki  $\mathcal{B}$  uzayı,  $G$  grafinin "kesim uzayı" veya "bağ uzayı" olarak adlandırılır.

Alt bölümün ilk teoremine benzer bir şekilde, kesim uzayını üretmek için, bağlar ve ayrık birleşimler yeterlidir:

**Teorem 2.14** Her kesim, bağların bir ayrık birleşimidir.

**İspat.** İspatı, elde aldığımız  $F$  kesiminin eleman sayısı üzerinden tümevarım ile yapalım.  $F = \emptyset$  ise, (boş birleşim ile) iddia aşikar bir şekilde doğrudur. Eğer  $F \neq \emptyset$  kesimi bir bağ değil ise, bu durumda boştan farklı bir  $F'$  kesimini öz alt kümesi olarak içerir: Önceki teoremden,  $F \setminus F' = F + F'$  ( $F + F' = (F \setminus F') \cup (F' \setminus F) = F \setminus F'$  dir, çünkü  $F' \subseteq F$  olduğundan,  $F' \setminus F = \emptyset$  dir.), boştan farklı olan daha küçük bir kesimdir. Tümevarım hipotezinden, hem  $F'$  ve hem de  $F \setminus F'$ , bağların birer ayrık birleşimleridir. Bu sebeple,  $F$  de bağların bir ayrık birleşimidir. ■

**Teorem 2.15** Herhangi bir grafin  $\mathcal{C}$  çevrim uzayı ve  $\mathcal{B}$  kesim uzayı için:

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}^\perp \quad \text{ve} \quad \mathcal{B} = \mathcal{C}^\perp$$

eşitlikleri sağlanır.

**Not 2.7**  $\mathcal{E}(G)$  uzayındaki iç çarpım:  $F, F' \subseteq E$  olmak üzere:

$$\langle F, F' \rangle := \sum_{e \in E} F(e)F'(e) \in \mathbb{F}_2$$

biçiminde tanımlanır.

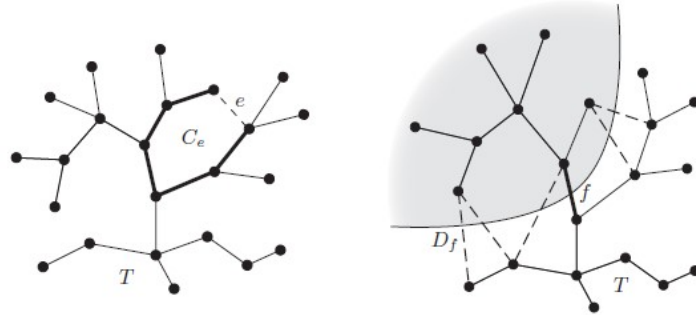
Dikkat edilirse  $\langle F, F' \rangle = 0$  dir ancak ve ancak  $F$  ve  $F'$  alt kümelerinin çift sayıda ortak elemanları vardır. Bu sebeple,  $F \neq \emptyset$  olmasına rağmen, eğer  $F$  çift sayıda eleman içeriyorsa,  $\langle F, F \rangle = 0$  dir.

$\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{E}(G)$  nin herhangi bir alt uzay olmak üzere:

$$\mathcal{F}^\perp := \{D \in \mathcal{E}(G) \mid \text{Her } F \in \mathcal{F} \text{ için, } \langle F, D \rangle = 0 \text{ dir.}\}$$

olarak tanımlanır ve  $\mathcal{F}^\perp$  de  $\mathcal{E}(G)$  nin bir alt uzayıdır.

**Tanım 2.22**  $G = (V, E)$  bağlantılı bir graf ve  $T \subseteq G$  bir geren ağaç olsun. Her bir  $e \in E \setminus E(T)$  kirişi için,  $T + e$  grafında tek bir  $C_e$  çevrimi vardır ve bu çevrim,  $e$  kenarının  $T$  ağacına göre "esas çevrimi" olarak adlandırılır. Benzer şekilde, her  $f \in T$  kenarı için,  $T - f$  ormanının tam olarak iki bileşeni vardır.  $G$  nin bu iki bileşen arasındaki kenarlarının oluşturduğu  $D_f \subseteq E$  kümesi,  $G$  nin bir bağıdır ve bu bağ,  $f$  kenarının  $T$  ağacına göre "esas kesimi" olarak adlandırılır (Şekil 2.5).



**Şekil 2.5**  $C_e$  esas çevrimi ve  $D_f$  esas kesimi (Distel 2017)

Dikkat edilirse,  $G$  grafının her  $e \notin T$  ve  $f \in T$  kenarları için,  $f \in C_e$  ancak ve ancak  $e \in D_f$  dir. Bu, bir sonraki teoremin ortaya koyduğu daha bir dualitenin belirtisidir:

**Teorem 2.16**  $G$ ,  $n$  köşeli ve  $m$  kenarlı, bağlantılı bir graf ve  $T \subseteq G$ ,  $G$  nin bir geren ağacı olsun. Bu durumda:

(i)  $G$  nin  $T$  geren ağacına göre esas kesimleri ve esas çevrimleri, sırasıyla  $\mathcal{B}(G)$  ve  $\mathcal{C}(G)$  uzaylarının birer tabanını verir.

(ii) Bu sebeple,  $\dim \mathcal{B}(G) = n - 1$  ve  $\dim \mathcal{C}(G) = m - n + 1$  dir.

İhtiyaç duyduğumuz bu tanım ve teoremleri verdikten sonra, artık bu alt bölümdeki amacımıza dönebiliriz.

Bu alt bölümünün başında yüz çevrimlerin tanımını verdik ve yüz çevrimlerinin kümesinin, tüm çevrim uzayını gerecek kadar "büyük" olmasına rağmen; herhangi bir kenar böylesi en fazla iki çevrim üzerinde bulunduğundan,  $G$  yi "seyrek" bir biçimde örtüğünü belirttik. Bu alt bölümdeki ilk amacımız, böylesine büyük lakin seyrek bir çevrimler ailesinin varlığının, sadece düzlemselliğin dikkat çekici bir özelliği değil, aynı zamanda meselenin esası olduğunu göstermektir: Bu özellik düzlemselliği karakterize eder.

$G = (V, E)$  herhangi bir graf olsun.

**Tanım 2.23**  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}(G)$  olsun. Eğer  $G$  grafının her bir kenarı,  $\mathcal{F}$  deki en fazla iki kümeye ait ise;  $\mathcal{F}$ , bir "seyrek" küme olarak adlandırılır.

**Örnek 2.3**  $\mathcal{B}(G)$  kesim uzayının seyrek bir tabanı vardır. Çünkü bu uzay, bir  $v$  köşesine bağlı tüm kenarların oluşturduğu  $E(v)$  kesimleri tarafından üretilir. Dikkat edilirse, herhangi bir  $e = xy \in G$  kenarı  $E(v)$  içindedir ancak ve ancak  $v = x$  veya  $v = y$  dir. Bu sebeple, her bir kenar (en fazla) iki kümeye aittir, yani  $\mathcal{F} = \{E(v) \mid v \in V\}$  kümesi seyrektiler.

**Teorem 2.17 (MacLane 1937)** *Bir graf düzlemseldir  $\Leftrightarrow$  Çevrim uzayının bir seyrek tabanı vardır.*

Düzlemsellik teorisinin saklı güzelliklerinden birisi, soyut ve görünüşte sezgisel olmayan iki sonucun; örneğin, MacLane'in çevrim uzayındaki üreteç kümeleri ile ilgili bu teoremi ve Tutte'nin bir 3-bağlantılı grafın çevrim uzayının, ayrılmayan indüke çevrimler tarafından üretildiğini ifade eden teoreminin bir araya gelerek, 3-bağlantılı graflar için çok somut bir düzlemsellik kriteri ortaya koymasındır:

**Teorem 2.18 (Kelmans 1978)** *Bir 3-bağlantılı graf düzlemseldir  $\Leftrightarrow$  Her bir kenarı en fazla (denk olarak: tam) iki ayrılmayan indüke çevrim üzerinde bulunur.*

Bu alt bölümü, düzlemselliğin çok farklı karakterdeki bir diğer tanımlaması ile bitirelim:

**Tanım 2.24**  $P$ , bir küme ve  $\leq$ ,  $P$  üzerinde bir kısmi sıralama olsun.  $\leq$  kısmi sıralamasını ( $P^2$  nin bir alt kümesi olarak) içeren bir  $\leq'$  tam sıralamasına,  $\leq$  kısmi sıralamasının bir "liner genişlemesi" denir. Bu sebeple,  $P$  içindeki her  $p \leq q$  için, hala  $p \leq' q$  dir ve buna ek olarak,  $\leq$  kısmi sıralamasına göre kıyaslanamayan herhangi iki  $p, q \in P$  için, ya  $p <' q$  ya da  $p >' q$  dir.

**Tanım 2.25**  $(P, \leq)$ , bir kısmi sıralı küme olsun.  $\mathcal{S}$ , ( $P^2$  nin alt kümeleri olarak,) kesişimleri tam olarak  $\leq$  kısmi sıralamasını veren,  $\leq$  kısmi sıralamasının  $P$  üzerindeki liner genişlemelerinin bir kümesi olsun öyle ki " $\leq$  kısmi sıralanmasına göre kıyaslanamayan herhangi iki  $p, q \in P$  için,  $\mathcal{S}$  kümesinde,  $p <' q$  şartını sağlayan bir  $\leq'$  liner genişlemesi ve  $p >' q$  şartını sağlayan bir diğer  $\leq''$  liner genişlemesi olsun". Böylesi  $\mathcal{S}$  kümelerinin eleman sayılarının en küçüğüne,  $(P, \leq)$  kısmi sıralı kümesinin "boyutu" denir.

**Tanım 2.26**  $G = (V, E)$  bir graf olsun.  $G$  grafiyle eşleştirilen "bağlılık poseti (kısmi sıralı kümesi)" ( $P = V \cup E, \leq$ ) şöyle tanımlanır:  $v < e$  dir ancak ve ancak  $v \in V$  bir köşedir,  $e \in E$  bir kenardır ve  $e, v$  ye bağlıdır, yani  $v, e$  nin uç köşelerinden birisidir. (Bu sebeple, bir bağıntı olarak, " $<$ " küçüktür bağıntısı " $\in$ " elemanıdır bağıntısı ile aynıdır.)

**Teorem 2.19** (Schnyder 1989)

*Bir graf düzlemseldir  $\Leftrightarrow$  Bu grafın bağlılık posetinin boyutu  $\leq 3$  dir.*

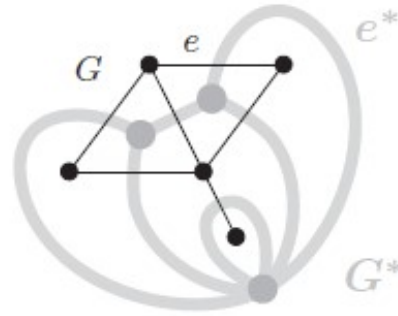
## 2.6 Düzlem Dualitesi

Bu alt bölümde MacLane teoremini kullanarak, düzlemsellik ve cebirsel yapı arasındaki bir diğer bağlantıyı ortaya çıkaracağız: Aşağıda tanımlayacağımız düzlem grafların dualitesi ve çevrim ile kesim uzaylılarının dualitesi.

**Tanım 2.27** Bir "düzlem multi-grafi", sonlu kümelerin (sırasıyla, köşe ve kenar kümelerinin) bir  $G = (V, E)$  ikilisidir öyle ki aşağıdaki şartlar sağlanır:

- (i)  $V \subseteq \mathbb{R}^2$  dir;
- (ii) Her kenar, ya iki köşe arasında bir yaydır ya da tek bir köşe (kendisinin uç köşesi) içeren bir yaydır;
- (iii) Bir kenar kendisinin uç köşesi / köşeleri dışında, bir başka kenarın bir köşesini veya bir noktasını içermez.

**Not 2.8** Düzlem graflar için kullandığımız terimler, düzlem multi-graflar için de kullanılır. Ayrıca, soyut multi-graflarda olduğu gibi, hem ilmekler ve hem de çift kenarlar çevrim olarak sayılır. Düzlem dualin tanımını vermeden önce, Şekil 2.6 de verilen  $G$  düzlem multi-grafını ele alalım.  $G$  nin her bir yüzünün içine yeni bir köşe yerleştirelim ve bu yeni köşeler üzerindeki  $G^*$  düzlem multi-grafının kenarlarını şöyle tanımlayalım:  $G$  nin her bir  $e$  kenarı için,  $e$  kenarının komşu olduğu iki yüzün içindeki iki köşeyi,  $e$  kenarını kesecek biçimde bir  $e^*$  kenarıyla birleştirelim; eğer  $e$  kenarı tek bir yüze komşuysa, bu durumda, bu yüzdeki yeni köşeye, yine  $e$  kenarını kesecek biçimde bir  $e^*$  ilmeği bağlayalım. Bu durumda elde edilen  $G^*$  düzlem multi-grafı,  $G$  nin "dualidir". Aynı yöntemi  $G^*$  grafına uygularsak,  $G$  grafına çok benzer bir düzlem multi-grafı elde ederiz; hatta bu yolla,  $G$  grafının kendisi de tekrardan elde edebilir.



**Şekil 2.6** Bir  $G$  düzlem grafi ve duali  $G^*$  (Distel 2017)

**Tanım 2.28**  $G = (V, E)$  ve  $G = (V^*, E^*)$  herhangi iki düzlem multi-grafı,  $F(G) =: F$  ve  $F((V^*, E^*)) =: F^*$  olsun. Eğer:

$$\begin{array}{lll}
 F \rightarrow V^* & E \rightarrow E^* & V \rightarrow F^* \\
 f \mapsto v^*(f) & e \mapsto e^* & v \mapsto f^*(v)
 \end{array}$$

bire-bir ve örten fonksiyonları varsa öyle ki

(i) Her  $f \in F$  için,  $v^*(f) \in f$ ;

(ii) Her  $e \in V$  için,  $|e^* \cap G| = |e^{o^*} \cap e^o| = |e \cap G^*| = 1$ , ayrıca  $e$  ve  $e^*$  kenarlarının her birisi için, bu nokta bir doğru parçasının bir iç noktası;

(iii) Her  $v \in V$  için,  $v \in f^*(v)$  şartları sağlamıyor ise,  $(V^*, E^*) =: G^*$  grafinin bir " düzlem duali " denir.

**Not 2.9** 1) Her bağlantılı düzlem multi-grafın bir düzlem duali vardır: (i) şartını sağlamak için,  $G$  grafinin her bir  $f$  yüzünden,  $G^*$  grafini bir köşesi olarak bir  $v^*(f)$  noktası seçerek başlarız. Ardından bu köşeleri, (ii) şartında istenildiği şekilde bağımsız yaylarla birleştiririz. Bu durumda,  $G$  grafinin bağlantılılığı, (iii) şartını sağlayan bir  $V \rightarrow F^*$  bire-bir ve örten fonksiyonunun olduğunu garanti eder.

2)  $G_1^*$  ve  $G_2^*$ ,  $G$  grafinin iki düzlem duali ise, bu durumda aşikar bir şekilde,  $G_1^* \simeq G_2^*$  dir: Gerçekten de  $v_1^*(f) \mapsto v_2^*(f)$  doğal bire-bir ve örten fonksiyonu,  $G_1^*$  ve  $G_2^*$  arasında bir topolojik izomorfizmadır. Bu anlamda,  $G$  nin tek bir  $G^*$  düzlem duali olduğunu söyleyebiliriz.

3)  $G$  grafi da  $G^*$  grafinin bir düzlem dualidir. Gerçekten de  $G^*$  multi-grafının tanımdeki bire-bir ve örten fonksiyonların tersleri bunu göstermektedir:  $f^*(v) \in F^*$  ve  $v^*(f) \in V^*$  için,  $v^*(f^*(v)) := v$  ve  $f^*(v^*(f)) := f$  olarak tanımlarsak;  $G^*$  in tanımındaki (i) ve (iii) şartları,  $G$  için sırasıyla, (iii) ve (i) şartlarına dönüşür. (ii) şartı ise,  $G$  ve  $G^*$  grafları için simetriktir. Dualler bağlantılı olduğundan, bu simetri,  $G$  nin bir dualinin olması için, bağlantılı olmasının bir gerek şart olduğunu da göstermektedir.

Belki de düzlem dualitesinin en ilginç tarafı, iki çeşit kenar kümesini (çevrimler ve bağlar) geometrik olarak ilişkilendirmesidir:

**Teorem 2.20**  $G$ , bir bağlantılı düzlem multi-grafi olsun. Bu durumda:

Bir  $E \subseteq E(G)$  kenar kümesi,  $G$  deki bir çevrimin kenar kümesidir ancak ve ancak  $E^* := \{e^* \mid e \in E\}$ ,  $G^*$  içinde bir bağıdır.

Bu teoremi kullanarak, düzlem dualitesini soyut multi-graflara genelleştirebiliriz:

**Tanım 2.29**  $G$  ve  $G^*$  birer multi-graf olsun. Eğer  $E(G^*) = E(G)$  ve  $G^*$  içindeki bağlar, tam olarak  $G$  içindeki çevrimlerin kenar kümeleri ise,  $G^*$  multi-grafına  $G$  multi-grafının bir "soyut duali" denir. (Bu tanımda, ne  $G$  ve ne de  $G^*$  multi-grafının bağlantılı olması gerekli değildir.)

Çevrimler ve bağlar arasındaki bu karşılıklık, ürettikleri uzaylara genişler:

**Teorem 2.21** Eğer  $G^*$ ,  $G$  nin bir soyut duali ise, bu durumda  $G^*$  grafının kesim uzayı,  $G$  grafının çevrim uzayıdır. Yani:

$$\mathcal{B}(G^*) = \mathcal{C}(G)$$

eşitliği doğrudur.

**İspat.**  $G$  nin çevrimleri, tam olarak  $G^*$  in bağları olduğundan;  $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(G^*)$  uzayında, bu çevrimlerin ürettiği  $\mathcal{C}$  çevrim alt uzayı,  $G^*$  deki bağların ürettiği uzay ile aynıdır. Diğer yandan her kesim, bağların bir ayrık birleşimi olduğundan,  $G^*$  deki bağların ürettiği alt uzay,  $\mathcal{B}(G^*)$  kesim uzayıdır. ■

**Not 2.10**  $\mathcal{C} = \mathcal{B}^\perp$  ve  $\mathcal{B} = \mathcal{C}^\perp$  olduğundan, önceki teoremden; eğer  $G^*$ ,  $G$  nin bir soyut duali ise,  $G$  de  $G^*$  in bir soyut dualidir.

Bu alt bölümü, düzlemselliğin bir diğer denk tanımıyla noktıyoruz:

**Teorem 2.22** (Whitney 1932)

*Bir graf düzlemseldir  $\Leftrightarrow$  Bir soyut duali vardır.*

**İspat.**

( $\Rightarrow$ )  $G$  bir düzlemsel graf olsun ve  $G$  nin herhangi bir düzlem çizimini ele alalım. Bu çizimin her bir  $C$  bileşeninin bir  $C^*$  düzlem duali vardır. Bu  $C^*$  multi-graflarını soyut multi-graflar olarak değerlendirelim ve  $G^*$ , bu multi-grafların ayrık birleşimi olsun. Bu durumda,  $G^*$  grafının bağları, tam olarak  $C^*$  bileşenlerinin bağlarıdır ve iki önceki teoremden, bu bağlar  $G$  deki çevrimlere karşılık gelir. Bu sebeple tanımdan,  $G^*$ ,  $G$  nin bir

soyut dualidir.

( $\Leftarrow$ ) Karşıt olarak,  $G$  nin bir  $G^*$  soyut duali olsun. MacLane teoreminden,  $G$  nin düzlemsel olduğunu göstermek için, çevrim uzayının bir seyrek tabana sahip olduğunu göstermek yeterlidir: Öncelikle,  $G^*$  multi-grafının kesim uzayı  $\mathcal{B}(G^*)$  uzayının bir seyrek tabanı olduğunu biliyoruz. Bu sebeple, önceki teoremden,  $\mathcal{B}(G^*) = \mathcal{C}(G)$  olduğundan,  $G$  nin çevrim uzayı  $\mathcal{C}(G)$  uzayının da bir seyrek tabanı vardır. ■



### 3. LİTERATÜR TARAMASI

Düzlem de dahil olmak üzere, yüzeyler üzerine grafların yerleştirilmesiyle ilgili çok kapsamlı bir monograf vardır: Mohar ve Thomassen (2001). Tezin ana bölümünde verilen sonuçların ispatları ve bu bölüm için tüm referanslar bu kaynakta bulunabilir. Hem çokgen hem de genel durumlar için Jordan eğri teoreminin kapsamlı bir çalışması, Stillwell'de (1993) de verilmiştir.

Sonuç 2.2'nin kısa ispatı, özel olarak anılmayı hak eden bir incelik kullanmaktadır ve bu teknik, çiftlerin çift sayımı olarak adlandırılır. Bu teknik, iki parçalı bir grafin kenarlarını hem sol ve hem de sağ taraftaki parça kümeleri kullanılarak sayılırken kullanılmıştır. Çift sayma, kombinatorikte yaygın olarak kullanılan bir tekniktir.

Alt bölüm 2.3'ün materyali normalde bir graf teoriye giriş dersi için standart değildir ve ana bölümün geri kalanı bu bölümden bağımsız olarak okunabilir. Ancak, alt bölüm 2.3'ün sonuçları hiçbir şekilde önemsiz değildir. Çünkü düzlemsellik problemleri için topolojik bir ortamdan kombinatoriyal bir ortama geçiş, orada geliştirilen topolojik teknikleri, düzlemsellik teorisinin çoğu için vazgeçilmez hale getirmiştir.

Kuratowski teoremi, orijinal hali olan Kuratowski'de (1930) sadece topolojik minörler için ifade edilmiştir; genel minörler için olan hali Wagner (1937) tarafından ortaya konulmuştur. 3-bağlantılı graflar ile ilgili verilen Lemma 2.7'nin bir ispatı, iç yüzlerin tümünün dışbükey olduğu bir çizim veren Thomassen'ın (1980) ispatının bir sonucu olarak yapılabilir. 3-bağlantılı düzlemsel graflar için bu tür "dışbükey" çizimlerin varlığı zaten, bu grafların tam olarak 3-boyutlu dışbükey çokyüzlülerin 1-iskeleti olduğu gerçeğini ortaya koyan Steinitz'in (1922) teoreminden elde edilir. Ayrıca, Tutte (1963)'e de bakınız.

Kolaylıkla gözlemlendiği gibi, (mertebesi en az 6 olan) bir maksimal düzlemsel grafa bir kenar eklemek, yalnızca bir topolojik  $K^5$  veya  $K_{3,3}$  değil, her ikisini de üretir. Daha genel olarak,  $n$  köşesi ve  $3n - 6$ 'dan fazla kenarı olan her graf bir  $TK^5$  içerir ve kolayca tanımlanılabilen bir istisna sınıfıyla birlikte bir  $TK_{3,3}$  içerir.

Teorem 2.18, yaygın olarak 'Tutte'nin düzlemsellik kriteri' olarak bilinir, çünkü aynı anda Tutte'nin (1963) maklesinde verilen teoremden ve hatta MacLane'in daha önceki düzlemsellik kriteri olan Teorem 2.17'den de elde edilebilir. Ancak kuvvetle muhtemeldir ki Tutte bundan habersizdir. Teorem 2.18, ilk olarak 1970'lerin sonlarında fark edilmiş ve Kelmans (1981) tarafından, hem Tutte'den (1963) hem de MacLane 'den (1937) bağımsız olarak ispatlanmıştır.

Teorem 2.19, Schnyder'e (1989) dayanmaktadır. Alternatif bir ispat ve daha fazla referans için Barrera-Cruz ve Haxell'e (2011) bakınız.

Soyut sonlu graflarda (ve ötesinde), çevrim-bağ dualitesi için uygun ortam, matroidler teorisidir; bkz. Oxley (2011) ve Bruhn ve Diestel (2011). Sonsuz matroidlerin aksiyomları Bruhn *et al.* (2013)'de verilmiştir. Sonsuz graflardaki dualite, Bruhn ve Diestel'de (2006) ve Diestel ve Pott'ta (2011) matroidler olmadan ele alınmıştır.

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Düzlemsel graflar, graf teorisinin önemli ve temel konularından birisidir ve hala bu alan ile ilgili birçok açık problem mevcuttur. Bu sebeple, düzlemsel graflar ve ilgili problemler, aktif araştırma alanlarından birisidir.

Bu tezin amacı, bu zengin ve aktif araştırma alanını temel bir düzeyde tanıtmak, son dönemde elde edilmiş olan bazı sonuçları ve gelişmeleri bir araya getirmek ve derli toplu bir şekilde sunmaktır. Dolayısıyla, bu konularda uzman olmayanlar için bir derleme çalışma / bir öğretici kaynak ortaya koymaktır.

Bu sebeple bu tezin, literatürde çok önemli bir yeri olan bu alan ile ilgili temel düzeyde bilgi sahibi olmak isteyen öğrenciler ve araştırmacılar için yararlı olacağını ümit ediyoruz.

## KAYNAKLAR

- Barrera-Cruz, F. and Haxell, P. 2011. A note on Schnyder's theorem. *Order* 28: 221–226.
- Bruhn, H. and Diestel, R. 2006. Duality in infinite graphs. *Comb. Probab. Comput.*, 15: 75–90.
- Bruhn, H. and Diestel, R. 2011. Infinite matroids in graphs. *Discrete Math.*, 311: 1461–1471.
- Bruhn, H., Diestel, R., Kriesell, M., Pendavingh, R. and Wollan, P. 2013. Axioms for infinite matroids. *Adv. Math.*, 239:18–46.
- Diestel, R. 2017. *Graph Theory, Fifth Edition (Graduate Texts in Mathematics, 173)*. Springer, 448 pages, Berlin.
- Diestel, R. and Pott, J. 2011. Dual trees must share their ends. arXiv:1106.1324v1 [math.CO].
- Kelmans, A.K. 1981. The concept of a vertex in a matroid, the non-separating cycles in a graph and a new criterion for graph planarity. In: *Algebraic Methods in Graph Theory, Issue 25, Vol. 1*. Lovasz, L. and Sos, V. T. (eds.). North-Holland, pp. 345–388, Amsterdam.
- Kuratowski, K. 1930. Sur le probleme des courbes gauches en Topologie. *Fundamenta Mathematicae*, 15(1): 271-283.
- MacLane, S. 1937. A combinatorial condition for planar graphs. *Fundamenta Mathematicae*, 28: 22–32.
- Mohar, B. and Thomassen, C. 2001. *Graphs on Surfaces*. Johns Hopkins University Press, 291 pages, Baltimore, Maryland.
- Oxley, J.G. 2011. *Matroid Theory (2nd ed.)*. Oxford University Press, 684 pages, Oxford.
- Schnyder, W. 1989. Planar graphs and poset dimension. *Order* 5: 323–343.
- Steinitz, E. 1922. IIIAB12: Polyeder und Raumeinteilungen. *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften (in German), Vol. Band 3 (Geometries)*, pp. 1–139.
- Stillwell, J. 1993. *Classical topology and combinatorial group theory (2nd ed.)*. Springer, 348 pages, Berlin.
- Thomassen, C. 1980. Planarity and duality of finite and infinite graphs. *J. Comb. Theory B*, 29: 244–271.

Tutte, W.T. 1963. How to draw a graph. Proc. Lond. Math. Soc., 13: 743–767.

Wagner, K. 1937. Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe. Math. Ann., 114:  
570–590.



## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı ve Soyadı: Saad Mohammed Abdullah ABDULLAH

### Eğitim

Yüksek Lisans Çankırı Karatekin Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü 2020–2022  
Matematik Anabilim Dalı

Lisans Musul Üniversitesi  
Temel Eğitim Fakültesi 2012–2016  
Matematik Bölümü