T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DUAL 3-UZAYDA DUAL EĞRİLERİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

Servet UZUN

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKİM, 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MatematikAnabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

DUAL 3-UZAYDA DUAL EĞRİLERİN DİFERANSİYEL GEOMETRİSİ

Tez Yazarı
Servet UZUN

Danışman
Prof.Dr. Handan ÖZTEKİN

EKİM, 2022
ELAZIĞ

T.C.
FIRATÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı:	Dual 3-Uzayda Dual Eğrilerin Diferansiyel Geometrisi
Yazarı:	Servet UZUN
İlk Teslim Tarihi:	08.08.2022
Savunma Tarihi:	25.10.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Prof. Dr. Handan ÖZTEKİN — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Başkan: Doç. Dr. Selçuk BAŞ — Onayladım
Bandırma Onyedi Eylül Üniversitesi, Bandırma M.Y.O

Üye: Doç Dr. Mustafa YENEROĞLU — Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun ..../......../20....... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım "Dual-3-Uzayda Dual Eğrilerin Diferansiyel Geometrisi" yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

ELAZIĞ, 2022

Servet UZUN

ÖNSÖZ

"Dual-3-Uzayda Dual Eğrilerin Diferansiyel Geometrisi" adlı bu tez çalışması Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında "Yüksek Lisans Tezi" olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof.Dr. Handan ÖZTEKİN ne içten duygularımla teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca desteğini hiç eksik etmeyen sevgili eşime ve bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme üzerimdeki emeklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Servet UZUN

ELAZIĞ, 2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET

Dual-3-Uzayda Dual Eğrilerin Diferansiyel Geometrisi

Servet UZUN

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Ekim 2022, Sayfa viii+20

Öklid uzayında rektifyan eğrilerin torsiyonu ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Birçok bilim adamı rektifyan eğrinin torsiyonu ve eğriliğini yay parametresine göre ispatlamıştır.

Bu tez çalışmasında, ilk olarak çalışmanın temelini oluşturan dual uzay ile ilgili ayrıntılı bilgilere yer verilmiştir. Daha sonra oluşturulan bu içerik kullanılarak Dual Uzayda rektifyan eğriler tanımlandı. Bu eğrilerin dual eğrilik ve torsiyonu dual yay parametresine göre ifade edildi. Son olarak da Darboux vektörüne bağlı olarak dual küresel eğrilerin yeni bir karakterizasyonu yapıldı.

Anahtar Kelimeler: Dual Sayılar, Dual Darboux Vektörü, Rektifyan Eğri.

ABSTRACT

Focal Curves According to Ribbon Roof in Dual Space

Servet UZUN

Master’s Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
October 2022, Page viii+20

Many studies have been done on the theory of rektifying curves in Euclidean space. Many scientists have proven the torsion and curvature of there ctifying curve according to the arc lenght parameter.

In this thesis, first of all detailed information about the Dual space, which forms the basis of the study, is given. Using this created content later, rektifying curves in Dual Space were defined.The dual curvature and torsion of these curves were expressed according to the dual the arc lenght parameter.Finally, a new characterization of dual spherical curves based on the Darboux vector was made.

Keywords: Dual Numbers, Dual Darboux Vector, Rektifying Curve

SİMGELER

$\mathbb{D}$	: Dual sayılar halkası
$\mathbb{D}^3$	: 3- Boyutlu dual uzayı
$\mathbb{R}^3$	: 3- boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{E}$	: Öklit uzayı
$\mathcal{E}$	: Karesi ‘’0’’ olan dual sayı
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
Λ	: Dış çarpım
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
τ	: Burulma
κ	: Eğrilik
$T(s)$	: Teğet vektör alanı
$N(s)$	: Normal vektör alanı
$B(s)$	: Binormal vektör alanı
$\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$	: Dual frenet çatı
$D(s)$	: Darboux vektörü

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi, diferansiyel geometrinin temel bir yapısıdır. 3-boyutlu Öklid uzayında bir regüler eğrinin diferansiyel geometrisinde önemli problemlerinden biri eğrinin karakterizasyonudur. Uzay eğrilerinin bazı önemli tipleri helisler, küresel eğriler ve rektifyan eğrilerdir. Uzay eğrileri üzerindeki ilginç sorulardan biri rektifyan eğrilerinde küresel eğriler ve helisler gibi farklı karakterizasyonlarını bulmaktır. Öklid uzayın da küresel ve rektifyan eğrilerin bazı karakterizasyonları Chen ve Deshmukh tarafından incelenmiştir [1,2].

Son zamanlarda matematikçiler E.Study dönüşümü sayesinde 3-boyutlu dual uzayda eğrilerin teorisini çalışmışlardır. 1903'de Eduard Study kendi adını verdiği E.Study dönüşümünde birim dual küre üzerindeki her noktanın $\mathbb{R}^3$'deki yönlü doğrulara birebir karşılık geldiğini kanıtlamıştır. Diğer bir ifadeyle bu dönüşüm E^3 deki bir regle yüzeyle dual uzaydaki bir eğri arasında ilişki kurar [3]. Bu sayede $\mathbb{R}^3$'deki yönlü doğrular teorisinin dual sayılar yardımıyla incelenmesine imkan verilmiştir. Dual sayılara ait temel kavramlara Hacısalihoğlu'nun "Hareket Teorisi ve Kuaterniyonlar Teorisi" ve Müller'in "Kinematik Dersleri" adlı kitaplarında yer verilmiştir [4,5]. Ayrıca 3-boyutlu Dual uzayı, E^3 de içeren 6-boyutlu bir uzay olarak düşünebiliriz. Böylece $\mathbb{D}^3$deki uzay eğrisi, E^3deki eğrinin doğal uzantısıdır. Bununla birlikte rektifyan ve küresel eğriler ile ilgili $\mathbb{D}^3$de pek çok çalışma yapılmıştır ancak bunlar istenilen seviyede değildir.Abdel-Baky ve Saaddual uzayda dual eğrilerle ilgili çeşitli, karakterizsyonlar yapmışlardır [6]. Yücesan, Ayyıldız ve Çöken dual uzayda rektifyan eğrileri çalışmıştır [7]. Dual helisleri Yücesan ve Tükel de incelemişlerdir [8]

Biz bu tezde Dual Uzayda rektifyan eğriler için yeni bir karakterizasyon vererek onun dual eğrilik ve torsiyonunu hesapladık. Daha sonra üçüncü dereceden bir dual diferansiyel denklemi dual eğriler için inşa ettik. Son olarak da Dual Darboux vektörüne bağlı olarak küresel eğrileri verildi.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1: $\forall a, a^* \in \mathbb{R}$olmak üzere $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*)$ sıralı ikililerin kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin. $\mathbb{D} = \{(a, a^*): a, a^* \in \mathbb{R}\}$ kümesi üzerinde iki iç işlem aşağıdaki gibi tanımlanır [4]:

Toplama$\oplus$: $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ve $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*)$, $\hat{\mathcal{B}} = (b, b^*) \epsilon \mathbb{D}$ olmak üzere,

$\hat{\mathcal{A}} \oplus \hat{\mathcal{B}} = (a, a^*) \oplus (b, b^*) = (a + b, a^* + b^*)$

$\mathbb{D}$ deki toplama olarak adlandırılır.

Çarpma$\odot$: $\mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ iç işlemi $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*)$, $\hat{\mathcal{B}} = (b, b^*)\ \epsilon \mathbb{D}$ olmak üzere,

$\hat{\mathcal{A}} \odot \hat{\mathcal{B}} = (a, a^*) \odot (b, b^*) = (ab, a^*b + b^*a)$

$\mathbb{D}'$ deki çarpma olarak adlandırılır.

Tanım 2.2 (Eşitlik): $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*)$, $\hat{\mathcal{B}} = (b, b^*) \epsilon \mathbb{D}$ olmak üzere $\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{B}}$ olması için $\Leftrightarrow$

$a = b, a^* = b^*$olmasıdır [4].

Tanım 2.3: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ kümesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri yukarıdaki gibi tanımlanmış ise $\mathbb{D}$ kümesine dual sayılar sistemi denir.ve $\forall \hat{\mathcal{A}} = (a, a^*), \in \mathbb{D}$ elemanına bir dual sayı denir [4].

Teorem 2.4:($\mathbb{D}$,$\oplus$,$\odot$) üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır [4].

Not 2.4: ($\mathbb{D}$,$\oplus$,$\odot$) halkasını $\mathbb{D}$ ile gösterelim.

Tanım 2.5 (Sıfır eleman):$\hat{\mathcal{A}} \oplus \hat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathcal{A}}$ denkleminin çözümü olan $\hat{\mathcal{X}} = (0,0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin sıfırı denir ve $\hat{0} = (0,0)$ ile gösterilir [4].

Teorem 2.6: ($\mathbb{D}$,$\oplus$,$\odot$) üçlüsü bir cisim değildir [4].

Önerme 2.7 (Bölme):$\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*)$, $\hat{\mathcal{B}} = (b, b^*) \in \mathbb{D}$ ise $\hat{\mathcal{A}} \odot \hat{\mathcal{X}} = \hat{\mathcal{B}}$ denkleminin

$\widehat{\mathcal{X}} = (x, x^*)$ çözümü aşağıdaki durumlarda mevcuttur [4].

1) $a \neq 0$ ise $\hat{\mathcal{X}} = \left(\frac{b}{a}, \frac{b^*a - a^*b}{a^2}\right)$ dır.

2) $a = 0, b = 0, a^* \neq 0$ ise $\hat{\mathcal{X}} = \left(\frac{b^*}{a^*}, x^*\right)$ dır.

3) $a = 0, a^* = 0, b = 0, b^* = 0$ ise her $\widehat{\mathcal{X}} = (x, x^*) \in \mathbb{D}$ çözümdür.

Teorem 2.8: $\mathbb{D}$ halkası, $\mathbb{R}$ kümesine izomorf bir alt kümeyi alt cisim olarak kapsar [2].

Sonuç 2.9: Teorem 2.8 in bir sonucu olarak $(a, 0)$ dual sayısı, izomorfu olduğu 'a' ile gösterilecektir. Yani $(a, 0) = a$ alınacaktır [4].

Tanım 2.10: Bir $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısında a reel sayısına $\widehat{\mathcal{A}}$'nın reel kısmı"a^*"reel sayısına $\widehat{\mathcal{A}}$'nın dual kısmı denir ve $Re\ \hat{\mathcal{A}} = a$ ve $Du\hat{\mathcal{A}} = a^*$ şeklinde yazılır[4].

Tanım 2.11: $(1,0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ deki çarpma işleminin birim elemanı veya $\mathbb{D}$ deki reel birim denir.$(1,0)$ dual sayısı kısaca $\mathcal{E}$ ile gösterilmektedir. O halde $\mathcal{E} = (0,1)$ alınacak ve dual birim olarak adlandırılacaktır [4].

Sonuç 2.12: $\odot$ işleminin tanımı gereğince $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}.\mathcal{E} = (0,1)(0,1) = (0,0)$ dır. Yani $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}.\mathcal{E} = 0$ olduğu görülür [2].

Tanım 2.13: $(0,0)$ dual sayısına $\mathbb{D}$ nin toplama işlemine göre birim elemanı (Abel grubunun birim elemanı) denir ve $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ izomorfizminde karşılık geldiği "0" reel sayısı ile gösterilir [2].

Teorem 2.14: $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) \in \mathbb{D}$ dual sayısı $\widehat{\mathcal{A}} = a + \mathcal{E}a^*$ şeklinde tek türlü yazılabilir. Yani $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) = a + \mathcal{E}a^*$ dır [4].

Sonuç 2.15: $\mathbb{R}$ deki $(+)$ ve $(.)$işlemlerine ait kurallar $\mathbb{D}$ de aynen kullanılabilir. Bundan sonra $\odot$ ve $\oplus$ sembolleri yerine $(+)$ ve $(.)$ işaretlerini kullanacağız [4].

Önerme 2.16: $\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}$ ve $\widehat{\mathcal{A}}.\hat{\mathcal{B}} = 0$ ise $\hat{\mathcal{A}}$ ve $\hat{\mathcal{B}}$ den herhangi birinin $''0''$ olması gerekmez [4].

Önerme 2.17: $\hat{\mathcal{A}} = (a, a^*) = a + \mathcal{E}a^* \in \mathbb{D}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ ise λ ile $\hat{\mathcal{A}}$ nın çarpımı $\lambda.\hat{\mathcal{A}} = (\lambda a, \lambda a^*) = \lambda a + \mathcal{E}\lambda a^*$ dır [4].

Tanım 2.18: λ reel sayısı ile $\hat{\mathcal{A}}$ dual sayısının çarpımı $\mathbb{R} \times \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ şeklinde bir dış işlem olup bir dual sayının bir reel skalar ile çarpımı adını alır [4].

Önerme 2.19: $\hat{\mathcal{A}} = a + \mathcal{E}a^*$ ve $\hat{\mathcal{B}} = b + \mathcal{E}b^*$ iki dual sayı olsun.
Bu taktirde $\hat{\mathcal{A}}\hat{\mathcal{B}} = ab + \mathcal{E}(ab^* + a^*b)$ dir [4].

Önerme 2.20: $\hat{\mathcal{A}} = a + \mathcal{E}a^*, a \neq 0$ ve$\hat{\mathcal{B}} = b + \mathcal{E}b^*$ iki dual sayı olsun. Bu taktirde

$$\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\hat{\mathcal{A}}} = \frac{b + \mathcal{E}b^*}{a + \mathcal{E}a^*} = \frac{(b + \mathcal{E}b^*)(a - \mathcal{E}a^*)}{(a + \mathcal{E}a^*)(a - \mathcal{E}a^*)} = \frac{ba + \mathcal{E}(b^*a - ba^*) - \mathcal{E}^2 a^* b^*}{a^2 + \mathcal{E}(aa^* - aa^*) - \mathcal{E}^2 a^{*2}} \text{ ve } \mathcal{E}^2 = 0$$

olduğundan dolayı;

$$\frac{\hat{\mathcal{B}}}{\hat{\mathcal{A}}} = \frac{ba + \mathcal{E}(b^*a - ba^*)}{a^2} = \frac{b}{a} + \mathcal{E}\frac{(b^*a - ba^*)}{a^2}$$

bulunur [2].

Önerme 2.21: $\hat{\mathcal{A}} = a + \mathcal{E}a^*, a \neq 0$ bir dual sayı olsun. O halde;

$\frac{1}{\hat{\mathcal{A}}} = \frac{1}{a} - \mathcal{E}\frac{a^*}{a^2}$ dir [4].

Tanım 2.22: K birimli ve değişmeli bir halka olsun. $\varphi: K \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $\varphi(k, x) = kx$ biçiminde tanımlanan φ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{X}$, K halkasının üzerinde bir modüldür denir.

i) $k(x + y) = kx + ky, \forall x, y \in \mathcal{X}, k \in K$

ii) $(k_1 + k_2)x = k_1x + k_2x, \forall x \in \mathcal{X}, k_1, k_2 \in \mathrm{K}$

iii)$(k_1.k_2)x = k_1(k_2x), \forall x \in \mathcal{X}, k_1, k_2 \in \mathrm{K}$

iv)$1.x = x, x \in \mathrm{X}$

Eğer $K = \mathbb{D}$ ise $\mathbb{D}$ bir modül olarak adlandırılır [4].

Teorem 2.23: $(\mathbb{D}^3, +)$ bir abel gruptur [4].

Teorem 2.24: $(\mathbb{D}^3, +)$ sistemi $\mathbb{D}$ üzerinde bir modüldür [4].

Tanım 2.25: $\mathbb{D}$- Modül'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir [4].

Teorem 2.26: $\overrightarrow{a}, \vec{a}^* \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere $\mathbb{D}$- modül'de herbir $\vec{\hat{\mathcal{A}}}$ dual vektör

$$\vec{\hat{\mathcal{A}}} = \vec{a} + \mathcal{E}\overrightarrow{a^*} \quad , \quad [\mathcal{E} = (0,1) \in \mathbb{D}]$$

Şeklinde yazılabilir [4].

İspat: $\vec{\hat{\mathcal{A}}} = \left(\hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2, \hat{\mathcal{A}}_3\right) \quad , \quad \hat{\mathcal{A}}_\mathrm{i} = a_i + \mathcal{E}a_i^* \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$ olmak üzere

$$\vec{\hat{\mathcal{A}}} = (a_1 + \mathcal{E}a_1^* \quad , \quad a_2 + \mathcal{E}a_2^* \quad , \quad a_3 + \mathcal{E}a_3^*)$$

yada;

$$\vec{\hat{\mathcal{A}}} = (a_1, a_2, a_3) + \mathcal{E}(a_1^*, a_2^*, a_3^*)$$

şeklinde yazılır. $a_i, a_i^* \in \mathbb{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq 3$ olduğundan $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{a}^* = (a_1^*, a_2^*, a_3^*)$ alınırsa;

$$\vec{\hat{\mathcal{A}}} = \vec{a} + \mathcal{E}\overrightarrow{a^*}$$

olur.

Tanım 2.27: ($\mathbb{D}$- modül üzerinde iç çarpım)

$\vec{\hat{\mathcal{A}}} = \vec{a} + \mathcal{E}\overrightarrow{a^*}$, $\vec{\hat{\mathcal{B}}} = \vec{b} + \mathcal{E}\overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}^3$ de iki vektör olsun.

$$f: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}$$

dönüşümü;

$$f\left(\vec{\hat{\mathcal{A}}}, \vec{\hat{\mathcal{B}}}\right) = \langle \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \vec{\hat{\mathcal{B}}} \rangle = \langle \vec{a} + \mathcal{E}\overrightarrow{a^*}, \vec{b} + \mathcal{E}\overrightarrow{b^*} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \mathcal{E}[\langle \vec{a}^*, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{b}^* \rangle]$$

olarak tanımlansın. Eğer bu dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa buna $\mathbb{D}^3$ de dual iç çarpım denir [4].

i. Simetri Özelliği

$$\langle \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \vec{\hat{\mathcal{B}}} \rangle = \langle \vec{\hat{\mathcal{B}}}, \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \rangle$$

ii. Bilineerlik özelliği;

$\hat{\alpha} = \alpha + \varepsilon\alpha^*, \hat{\beta} = \beta + \varepsilon\beta^* \in \mathbb{D}$ ve $\vec{\hat{\mathcal{A}}}, \overrightarrow{\hat{\mathcal{B}}}, \vec{\hat{\mathcal{C}}} \in \mathbb{D}$ olmak üzere

$$\langle \hat{\alpha}\vec{\hat{\mathcal{A}}} + \hat{\beta}\vec{\hat{\mathcal{C}}}, \vec{\hat{\mathcal{B}}} \rangle = \hat{\alpha}\, \langle \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \vec{\hat{\mathcal{B}}} \rangle + \hat{\beta} < \vec{\hat{\mathcal{C}}}, \vec{\hat{\mathcal{B}}} >$$

$$\langle \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \hat{\alpha}\vec{\hat{\mathcal{B}}} + \hat{\beta}\vec{\hat{\mathcal{C}}} \rangle = \hat{\alpha}\, \langle \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \vec{\hat{\mathcal{B}}} \rangle + \hat{\beta} < \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \vec{\hat{\mathcal{C}}} >$$

iii. Pozitif Tanımlılık;

$$\langle \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \vec{\hat{\mathcal{A}}} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{\hat{\mathcal{A}}} = 0$$

ve $\overrightarrow{\hat{\mathcal{A}}} \neq 0$ ise $\langle \vec{\hat{\mathcal{A}}}, \vec{\hat{\mathcal{A}}} \rangle > 0$ dır.

Bu aksiyomlar reel vektör uzayındaki iç çarpım aksiyomları ile aynıdır [4].

Tanım 2.28 (Dual Vektörlerin Normlanması): Bir $\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$ dual vektörün normu diye;

$$\left\|\vec{\mathcal{A}}\right\| = \langle\vec{\mathcal{A}},\vec{\mathcal{A}}\rangle^{1/2} = \left(\|\vec{a}\| + \varepsilon\frac{\langle\vec{a},\vec{a}^*\rangle}{\|\vec{a}\|}\right) \quad , \quad \vec{a} \neq \vec{0}$$

dual sayısına denir. Bundan sonra bu dual sayı;

$a = \|\vec{a}\|$ve $a^* = \frac{\langle\vec{a},\vec{a}^*\rangle}{\|\vec{a}\|}$

olmak üzere;

$$\left\|\vec{\mathcal{A}}\right\| = a + \varepsilon a^*$$

olarak yazılacaktır [9,14].

Tanım 2.29: Normu reel birime karşılık gelen dual vektöre birim dual vektör denir [9].

Teorem 2.30: $\overrightarrow{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$ birim dual vektör ise;

$$\|\vec{a}\| = 1 \quad , \quad \langle\vec{a},\vec{a}^*\rangle = 0$$

dır [9].

Tanım2.31(Dual Küre): $\left\{\vec{\mathcal{X}} = \vec{x} + \varepsilon\vec{x}^* \quad , \quad \left\|\vec{\mathcal{X}}\right\| = (1,0); \vec{x},\vec{x}^* \in \mathbb{R}^3\right\}$ kümesime $\mathbb{D}$- modül de birim dual küre denir [12].

Teorem 2.32: $\vec{\mathcal{A}} \neq (\vec{0},\vec{a}) \in \mathbb{D}$- modül olmak üzere $\mathbb{D}$- modül'de denklemi;

$$\left\|\vec{\mathcal{A}}\right\| = (1,0)$$

olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$'deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir [15].

Teorem 2.33: O başlangıç noktası yerine başka bir P noktası seçildiğinde $\mathbb{R}^3$' deki yönlü doğruyu belirten birim dual vektör;

$$\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon(\overline{\rho o}\Lambda\vec{a} + \vec{a}^*)$$

dır [4].

Tanım 2.34 (Dual Açı): $\vec{\mathcal{A}}$ ve $\vec{\mathcal{B}}$ iki birim dual vektör olsun. Eğer;

$$\langle\vec{\mathcal{A}},\vec{\mathcal{B}}\rangle = cos\hat{\theta} = \cos(\theta + \varepsilon\theta^*)$$

ise $\hat{\theta}$, $\vec{\mathcal{A}}$ ve $\vec{\mathcal{B}}$ vektörleri arasındaki dual açı denir. Burada θ ve θ^* sırasıyla, bu vektörlere karşılık gelen yönlü doğru parçaları arasındaki açı ve en kısa uzaklıktır [9,12].

Tanım 2.35 ($\mathbb{D}$- Modül Üzerinde Dış Çarpım): $\vec{\mathcal{A}} = \vec{a} + \varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\vec{\mathcal{B}} = \vec{b} + \varepsilon\overrightarrow{b^*} \in \mathbb{D}^3$ olmak üzere bu dual vektörlerin dış çarpımı;

$$\Lambda: \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \to \mathbb{D}^3$$

biçiminde bir işlemdir ve;

$$\vec{\mathcal{A}} \wedge \vec{\mathcal{B}} = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon\left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{b^*} + \overrightarrow{a^*} \wedge \vec{b}\right)$$

olarak tanımlanır[9].

Tanım 2.36: $\hat{\gamma} \quad : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^3$

$$s \rightarrow \hat{\gamma}(s) = \gamma(s) + \varepsilon\gamma^*(s)$$

$\mathbb{D}^3$ Dual uzayda diferansiyellenebilir birim hızlı dual eğri denir. $\mathbb{D}^3$dual uzayında $\hat{\gamma}(s)$ dual uzay eğrisi boyunca hareket eden Dual Frenet Çatısı $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ ile belirtelim. Sonra dual ana normal ve dual binormal vektör alanları, sırasıyla $\hat{T}, \widehat{N}, \hat{B}$ ye dual teğettir. O halde dual eğri için frenet formülleri şu şekilde verilir [7,11].

$$\hat{T}' = \kappa N + \varepsilon(\kappa^* N + \kappa N^*)$$

$$\hat{N}' = -\kappa T + \tau B + \varepsilon(-\kappa^* T - \kappa T^* + \tau^* B + \tau B^*)$$

$$\hat{B}' = -\tau N - \varepsilon(\tau^* N + \tau N^*)$$

Tanım 2.37 (Dual Darboux vektörü): $\hat{\gamma} : \mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}^3$ bir dual eğri ve $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ de $\hat{\gamma}$ nın Dual Frenet Çatısı olsun. $\widehat{\kappa}$ ve $\hat{\tau}$ bu eğrinin dual eğrilik ve torsiyonu olmak üzere Dual Darboux vektörü $\widehat{W}$ ile gösterilir ve;

$$\widehat{W} = \hat{\tau}\hat{T} + \hat{\kappa}\hat{B}$$

şeklinde tanımlanır [10,13].

Tanm 2.38: $\boldsymbol{\gamma}$: $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, dif-bilir bir eğri ve {T,N,B} de eğrinin Frenet çatsı olsun. T ve B vektörlerinin gerdiği düzleme rektifyan düzlem denir [1,15].

Tanm 2.39: $\boldsymbol{\gamma}$: $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, dif-bilir bir eğri ve {T,N,B} de eğrinin Frenet çatsı olsun. $\lambda(s)$, $\mu(s)$ iki fonksiyon olmak üzere

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{s}) = \lambda(s)T + \mu(s)B$$

Eğrisine rektifyan eğri denir[1].

Teorem 2.40: $\boldsymbol{\gamma}$: $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ bir rektifyan eğri, κ >0 ve s yay parametresi olsun.

i) $\|\boldsymbol{\gamma}\| = \rho$ fonksiyonu için $\rho^2 = s^2 + c_1 s + c_2$ denklemi sağlanır. Burada c_1, c_2 sabitlerdir.

ii) Eğrinin konum vektörünün teğet bileşeni $<\boldsymbol{\gamma}$,T >= s+b ile verilir. Burada b sabittir.

iii) Eğrinin konum vektörünün normal bileşeni sabit bir uzunluğa sahiptir ve ρ sabit değildir.

iv) τ sıfırdan farklıdır ve eğrinin binormal bileşeni sabittir yani $<\boldsymbol{\gamma}$,B> sabittir.

Sonuç olarak, $\boldsymbol{\gamma}$: $\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, κ >0 eğrili bir eğri ve (i), (ii), (iii) ve (iv) özelliklerinden birini sağlıyorsa bu eğri rektifyan eğridir [1].

3. DUAL REKTİFYAN EĞRİLER

Bu bölümde, her dual rektifyan eğrinin eğrilik ve torsiyon oranın $\hat{s}$ dual yay parametresinin sabit olmayan bir lineer fonksiyon olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.1: $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}(\hat{s})$, $\hat{\kappa} \neq 0$ eğrilikli birim dual eğri olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir.

i) $\hat{\alpha}(\hat{s})$ eğrisinin her rektifyan düzlemi $\widehat{m}$ den geçen bir $\widehat{m} \in \mathbb{D}^3$ noktası vardır.

ii) $\hat{\tau}/\hat{\kappa}$, $\hat{a}\hat{s} + \hat{b}$ sabit olmayan bir lineer dual fonksiyondur.

iii) $\|\hat{\alpha}(\hat{s}) - \widehat{m}_0\|^2 = (\hat{s} - \hat{c})^2 + \hat{d}^2$ olacak şekilde bir $\widehat{m}_0 \in \mathbb{D}^3$ noktası vardır. Burada

$$\hat{a} = \pm\frac{1}{\hat{d}}\ ,\hat{c} = -\frac{\hat{b}}{\hat{a}}, \hat{d} \neq 0$$

ve $\widehat{m}$ tek olduğundan, $\widehat{m}$=$\widehat{m}_0$ [16.]

İspat: i) Kabul edelim ki $\hat{\alpha}(\hat{s})$ nin her rektifyan düzlemi bir $\widehat{m} \in \mathbb{D}^3$ sabit noktası içersin. O zaman,

$$<\hat{\alpha}(\hat{s}) - \widehat{m}, N(\hat{s}) >= 0$$

$$<\hat{\alpha}(\hat{s}) - \widehat{m}, \hat{\kappa}T + \hat{\tau}B >= 0 \tag{3.1}$$

elde edilir. Son iki denklemden, rektifyan düzlem hem N hem de $-\hat{\kappa}T + \hat{\tau}B$ ortogonaldir. Böylece

$$\hat{\alpha}(\hat{s}) - \widehat{m}=\hat{\eta}(\hat{s})(\hat{\tau}T + \hat{\kappa}B) \tag{3.2}$$

yazılabilir. Burada $\hat{\eta} = \hat{\eta}(\hat{s})$ dual fonksiyondur. (3.1) ifadesinin diferansiyeli alınırsa

$$-\hat{\kappa}+< \hat{\alpha}(\hat{s}) - \widehat{m}, -\hat{\kappa}T + \hat{\tau}B >= 0 \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.2) ve (3.3) den

$$\eta = \frac{\hat{\kappa}}{\hat{\tau}'\hat{\kappa} - \hat{\kappa}'\hat{\tau}}. \tag{3.4}$$

bulunur.

(3.4) ifadesi (3.2) de yazılırsa

$$\tilde{\alpha}(\tilde{s}) - \tilde{m} = \frac{\tilde{\kappa}\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}'\tilde{\kappa} - \tilde{\kappa}'.\tilde{\tau}}T + \frac{\tilde{\kappa}^2}{\tilde{\tau}'\tilde{\kappa} - \tilde{\kappa}'.\tilde{\tau}}B. \tag{3.5}$$

ifadesinde

$$\frac{d\tilde{m}}{d\tilde{s}} = (1+\left(\frac{\tilde{\kappa}\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}.\tilde{\kappa}-\tilde{\kappa}.\tilde{\tau}}\right)')T + \left(\frac{\tilde{\kappa}^2}{\tilde{\tau}'\tilde{\kappa}-\tilde{\kappa}'\tilde{\tau}}\right)' B$$

böylece katsayılar sıfıra eşittir.

yani

$$1+\left(\frac{\tilde{\kappa}\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}'\tilde{\kappa}-\tilde{\kappa}\tilde{\tau}}\right)' = 0, \left(\frac{\tilde{\kappa}^2 \in_0}{\tilde{\tau}'\tilde{\kappa}-\tilde{\kappa}'\tilde{\tau}}\right) = 0,$$

burada

$$\frac{\tilde{\kappa}\tilde{\tau}}{\tilde{\tau}'\tilde{\kappa}-\tilde{\kappa}'\tilde{\tau}}\tilde{s}-\tilde{c}, \frac{\tilde{\kappa}^2}{\tilde{\tau}'\tilde{\kappa}-\tilde{\kappa}'\tilde{\tau}} = \tilde{d}, \tilde{c} \in D. \tag{3.6}$$

yazılır.

$\tilde{\kappa} \neq 0$ olduğundan $\tilde{d} \neq 0$ ’dır (3.5) ve (3.6)’dan

$$\left.\begin{aligned} &\alpha(\tilde{s}) - \tilde{m} = (s-\tilde{c})T - \tilde{d}\,B, \\ &\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} = \tilde{a}\,\tilde{s}+\tilde{b}; \tilde{a} = -\frac{1}{\tilde{d}}\,\tilde{b} = \frac{\tilde{c}}{\tilde{d}}, \tilde{d} \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

elde edilir.

Böylece

$$\left\|\alpha(\tilde{s}) - \tilde{m}_0\right\|^2 = (s-\tilde{c})^2 + \tilde{d}^2$$

yazılır.Eğer her rektifyan doğal düzlem başka bir $\tilde{m}_0$ doğal noktasından geçiyorsa o zaman $\tilde{\gamma}(\tilde{t})$ $\tilde{m}_0$ ve $\tilde{m}$ birim hızlı dual geodezik çizgidir. O zaman her $\tilde{t} \in D$ için $\tilde{c}(\tilde{t})$ ve $\tilde{d}(\tilde{t}) \neq 0$ dual sabitleri vardır. Öyleki

$$\alpha(\tilde{s}) - \tilde{\gamma}(\tilde{t}) = (s-\tilde{c}\left(\tilde{t}\right))T(\tilde{s}) - \tilde{d}(\tilde{t})B(\tilde{s}) \tag{3.8}$$

dir.Eğer nokta $\tilde{t}$ ya göre türevi tanımlarsa o zaman (3.8) den $\dot{\gamma}(\tilde{t}) = (\dot{\tilde{c}})\left(\tilde{t}\right)T(\tilde{s}) - \dot{\tilde{d}}(\tilde{t})B(\tilde{s})$ yazılabilir.Dikkat edilirse

$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} = \tilde{a}(\tilde{t})\tilde{s} + \tilde{b}(\tilde{t}); \tilde{a}(\tilde{t}) = -\frac{1}{\tilde{d}(\tilde{t})}, \tilde{b}(\tilde{t}) = -\frac{\tilde{c}(\tilde{t})}{\tilde{d}(\tilde{t})}$. $(\tilde{t})$ göre türev alınırsa $\dot{\tilde{a}}(\tilde{t})\tilde{s} + \dot{\tilde{b}}(\tilde{t}) = 0$ olduğu görülür, böylece $\dot{\tilde{a}}(\tilde{t}) = \dot{\tilde{b}}(\tilde{t}) = 0$'dır. Bu da $\dot{\tilde{\gamma}}(\tilde{t}) = 0$ olduğu gösterir. Bundan dolayı $\tilde{m} = \tilde{m}_0$ böylece $\tilde{m}_0$ tektir. Bundan (ii) ve (iii) sayesinde (i) gösterildi.

$ii)$ Kabuledelimki $\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} = \tilde{a}\tilde{s} + \tilde{b}; a \neq 0$ eğer $\tilde{m} = \tilde{\alpha}(\tilde{s}) - (\tilde{s} + \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}})T - \frac{1}{\tilde{a}}B$ alınır ise o zaman kabülümüzden $\tilde{m} = 0$ olduğu görülür. Buradan $\tilde{m}, D^3$ de sabit bir noktadır ve

$$\alpha\left(\tilde{s}\right) - \tilde{m} = (s - \tilde{c})T - \tilde{d}\,B,\ \tilde{c} = -\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}},\quad \tilde{a} = \frac{1}{\tilde{d}}, \tilde{d} \neq 0$$

Olur bu da (i) ve (iii) sayesinde (ii) gösterir.

Şimdi (iii) ifadesinin varolduğu kabul edilirse o zaman

$$< \alpha(\tilde{s}) - \tilde{m}, T >= (\tilde{s} - c) \tag{3.9}$$

yazlabilir (3.9)'un türevi alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanılırsa

$$\tilde{\kappa}(\tilde{s}) < -\alpha(\tilde{s}) - \tilde{m}, N >= 0; \tilde{\kappa}(\tilde{s}) \neq 0 \Rightarrow < \alpha(\tilde{s}) - \tilde{m}, N >= 0$$

elde edilir.Bu da $\tilde{\alpha}(\tilde{s})$nin her rektifiyan dual düzleminin bir sabit $\tilde{m} \in D^3$ dual noktasından geçtiğini ifade eder bu da (i) sayesinde (iii)'ü gösterir.

$\hat{\alpha}, D^3$ de birim hızlı eğri olsun. O zaman teorem 3.1 den aşağıdaki sonucu verebiliriz:

$$\tilde{\beta}(\tilde{s}) = \frac{1}{\tilde{r}}\left(\alpha\left(\tilde{s}\right) - m\right); \tilde{r}\left(\tilde{s}\right) = \left\|\alpha\left(\tilde{s}\right) - m\right\| = \sqrt{\left(\tilde{s} - \tilde{c}\right)^2 + d^2} \tag{3.10}$$

bu ise dual birim kürede $\alpha\left(\tilde{s}\right)$ nin

radyal izdüşümüdür.

Teorem 3.2. $\alpha = \alpha(\tilde{s}), \kappa(\tilde{s})$ hiçbir yerde pür dual olmayan dual eğirilikli bir dual eğri ve $\tilde{\tau} \neq 0$ olsun, eğer $\tilde{m} \in D^3$ bir dual sabit nokta ise o zaman $\alpha(\tilde{s}_\beta) - \tilde{m}$ dual rektifiyen düzlemde bulunan bir konum vektörü olması için gerek ve yeter şart

$$\tilde{\alpha}(\tilde{s}_\beta)-\tilde{m}=\frac{d}{\cos\tilde{s}_\beta}\tilde{\beta}(\tilde{s}_\beta) \quad (3.11)$$

dır. Burada $\tilde{\beta}(\tilde{s}_\beta)$ K da bulunan birim hızlı dual eğridir.

İspat: İlk olarak kabul edelimki $\tilde{\beta}(\tilde{s})$ birim hızlı dual küresel eğri olsun, basit bir hesaplama ile $\left\|\tilde{\beta}'(\tilde{s})\right\|=\frac{\tilde{d}}{\tilde{r}^2}$. olduğu gösterilir.

O zaman $\tilde{\beta}(\tilde{s})$ nin dual yay uzunluğu

$$\tilde{s}_\beta:=\int\left\|\tilde{\beta}`(\tilde{s})\right\|d\tilde{s}=\tan^{-1}\left\{\frac{\tilde{s}-\tilde{c}}{\tilde{d}}\right\}. \quad (3.12)$$

(3.12) de $\tilde{s}-\tilde{c}=\tilde{d}\tan\tilde{s}_\beta$ yazılabileceğinden bir $\tilde{r}=\tilde{d}\sec\tilde{s}_\beta$ bulunur.

Denklem (3.10)'un birincisinde bu son ifade yerine yazılırsa (3.11) ifadesi elde edilir.

Tersine kabul edelimki $\tilde{\alpha}\left(\tilde{s}_\beta\right)-\tilde{m}$ (3.12) denkleminden verilsin, buradan $\tilde{\beta}\left(\tilde{s}_\beta\right)$ K da birim hızlı bir dual eğridi. Eğer (3.11)'in türevi alınır ise o zaman

$$(\alpha-\tilde{m})`=\frac{d}{\cos^2\tilde{s}_\beta}\left(\tilde{\beta}(\tilde{s}_\beta)\sin\tilde{s}_\beta+\frac{d\,\tilde{\beta}(s_\beta)}{ds_\beta}\cos(s_\beta)\right). \quad (3.13)$$

olur. Var sayalım ki

$<\tilde{\beta},\tilde{\beta}>=<\tilde{\beta}',\tilde{\beta}'>=1,\ <\tilde{\beta},\tilde{\beta}',>=0$ olsun böylece

$$<(\alpha-\tilde{m})',\ \alpha-\tilde{m}>=\frac{\tilde{d}^2\sin\tilde{s}_\beta}{\cos^3 s_\beta},\left\|(\alpha-\tilde{m})'\right\|=\frac{\tilde{d}}{\cos^2 s_\beta}. \quad (3.14)$$

elde edilir.

Buradan $\tilde{\alpha}-\tilde{m}=\tilde{\mu}(\tilde{s}_\beta)(\tilde{\alpha}-\tilde{m})'+(\tilde{\alpha}-\tilde{m})^\perp$ yazılabilir. Buradan $\tilde{\mu}(\tilde{s}_\beta)$ doğal fonksiyon, $(\tilde{\alpha}-\tilde{m})^\perp$, $\tilde{\alpha}(\tilde{s}_\beta)-\tilde{m}$ vektörünün dik tümleyenidir.

O zaman son denklemlerden

$$\tilde{\mu}(\tilde{s}_\beta) = \frac{<(\tilde{\alpha}-\tilde{m})', \tilde{\alpha}-\tilde{m})}{\left\|(\tilde{\alpha}-\tilde{m})'\right\|^2} = \frac{\tilde{d}}{\cos \tilde{s}_\beta}.$$

bulunur. Böylece

$$\left\|(\tilde{\alpha}-\tilde{m})^{\perp}\right\|^2 = \left\|(\alpha-\tilde{m})\right\|^2 - \tilde{\mu}(s)\left\|(\alpha-\tilde{m})'\right\|^2 = d^2 = sabit,$$

yazılır. Bu da $\alpha(s_\beta) - \tilde{m}$ nın D^3 de bir rektifiyan düzlemde bulunduğunu gösterir. Bir sonuç olarak aşağıdaki hatırlatmayı verebiliriz.

Hatırlatma 3.1. K'da $\tilde{\beta}(\tilde{s}_\beta)$ dual eğrisi için κ_β dual eğriliği 1 den büyük olsun açıkça

$$\tilde{\kappa}_\beta^{\ 2} = \frac{r^6}{d^4}\tilde{\kappa}^2 + 1, \tag{3.15}$$

olur.

İspat: Aşağıdaki denklemlerden direk hesaplayabiliriz.

$$\left.\begin{aligned} \alpha'(\tilde{s}) &= \tilde{r}'(\tilde{s})\tilde{\beta}(\tilde{s}) + \tilde{r}(\tilde{s})\tilde{\beta}'(\tilde{s}), \\ \alpha'' &= \tilde{r}''(\tilde{s})\tilde{\beta}(\tilde{s}) + 2\tilde{r}'(\tilde{s})\tilde{\beta}'(\tilde{s}) + \tilde{r}(\tilde{s})\tilde{\beta}''(\tilde{s}). \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

Böylece buradan

$$<\tilde{\beta}(\tilde{s})\tilde{\beta}''(\tilde{s})> = -\frac{\tilde{d}^2}{\tilde{r}4} < \tilde{\beta}(\tilde{s})\tilde{\beta}''(\tilde{s})> = -\frac{2\tilde{d}^2}{\tilde{r}5}\tilde{r}', \left\|\tilde{\beta}''(\tilde{s})\right\|^2 = \frac{4\tilde{d}^2 r'^2}{r^6} - \frac{d^4}{r^8}\tilde{\kappa}_{\beta'}^2$$

yazabiliriz. O halde yukarıdaki denklem kullanılırsa

$$\tilde{\kappa}_\beta^{\ 2} := \left\|\alpha''(\tilde{s})\right\|^2 = \frac{d^4}{r^6}(1+\tilde{\kappa}_\beta^2).$$

elde edilir.

4. BİR DUAL EĞRİNİN KAREKTERİZASYONLARI

4.1. Dual Küresel Eğrilerin Karekterizasyonu

D^3 'de $\tilde{\alpha}(\tilde{s})$ için bir diferansiyel denklem $\tilde{\kappa}$ hiçbir yerde pür doğal olmamak üzere gelecek önermede D^3 de her uzay eğrisi için 3.dereceden bir diferansiyel denklem tanımlayacağız, bu amaçla

$$\tilde{h}(\tilde{s}) := h(\tilde{s}) + \in h^*(\tilde{s}) = < \tilde{\alpha}(\tilde{s}), T(\tilde{s}) > \quad (4.1)$$

Buradan $\tilde{h}(\tilde{s})$ teğet dual yönlü uzaklık fonksiyonudur. Biz genelde $(\tilde{s})$ parametresini kullanacağız.

önerme 4.1: $\tilde{K}$ pür doğal değil ve $\tilde{\tau} \neq 0$ olmak üzere $\tilde{\alpha}$ D^3 'de birim hızlı dual eğri olsun o zaman biz aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\tilde{\rho}\tilde{\sigma}\tilde{h}''' + (2\tilde{\rho}'\tilde{\sigma} + \tilde{\rho}\tilde{\sigma})\tilde{h}' + \left|(\tilde{\sigma}\tilde{\rho}')' + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)\right|\tilde{h}' + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}\right)\tilde{h} = (\tilde{\sigma}\tilde{\rho}')' + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}, \quad (4.2)$$

burada $\tilde{\rho}(\tilde{s}) := \rho(\tilde{s}) + \varepsilon\rho^*(\tilde{s}) = \frac{1}{\tilde{K}}$, $ve\, \tilde{\sigma} := \sigma(\tilde{s}) + \varepsilon\sigma^*(\tilde{s}) = \frac{1}{\tilde{\tau}}$.dır.

İspat: Kabul edilmeliki $\tilde{\alpha}$, D^3 ,'de birim hızlı eğri olsun (4.1) denkleminden biz

$$\tilde{\rho}(\tilde{h}' - 1) = < \tilde{\alpha}, N >, \quad (4.3)$$

yazabiliriz. Bu son ifadenin tekrardan türevi alınırsa

$$\tilde{\rho}\tilde{\sigma}\tilde{h}'' + \tilde{\sigma}\tilde{\rho}\tilde{h}' - \tilde{\sigma}\tilde{\rho}' + \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}\tilde{h} = < \tilde{\alpha}, B > . \quad (4.4)$$

elde edilir.

(4.4.) diferansiyel (4.3) uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\tilde{\rho}\tilde{\sigma}\tilde{h}'' + (2\tilde{\rho}'\tilde{\sigma} + \tilde{\rho}\tilde{\sigma}')\tilde{h}''' + \left|(\tilde{\sigma}\tilde{\rho}')' + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)\right|\tilde{h}' + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}\right)'\tilde{h} = (\tilde{\sigma}\tilde{p}')' + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}},$$

bu da ispatı tamamlar.

Sonuç (4.1): $\tilde{\kappa}(\tilde{s})$ pür doğal olmamak üzere $\tilde{\alpha}$ birim dual eğrisi küreseldir, gerek ve yeter şart

$$(\tilde{\rho}\tilde{\sigma}^{'})^2+\tilde{\rho}^2=\tilde{r}^2 \tag{4.5}$$

denklemini sağlamasıdır.

Burada $\tilde{r}=r+\in r^{*}\varepsilon D$ dual sabit sayıdır.

İspat: $\tilde{\alpha},\tilde{r}$ yarıçaplı dual küresinin üzerinde bulunan bir küresel dual eğri olsun. O zaman

$$<\tilde{\alpha}(\tilde{s}),\tilde{\alpha}(\tilde{s})>=\tilde{r},\, ve\, h(\tilde{s})=<\tilde{\alpha}(\tilde{s}),\tilde{T}(\tilde{s})>=0 \tag{4.6}$$

yazılabilir. Buradan (4.2) diferansiyeli $(\tilde{\rho}\tilde{\sigma})'+\dfrac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}=0$ ve gerekli işlemler yapılırsa

$$(\tilde{\rho}\tilde{\sigma})^2+\tilde{\rho}^2=\tilde{r}^2\ . \tag{4.7}$$

elde edilir. Böylece $\tilde{\alpha}$, D^3 'de bir küresel eğridir.

Kabul edelim ki $\tilde{\alpha}$ (4.5)'i sağlayan birim hızlı dual eğri olsun o zaman $\tilde{m}=\tilde{m}(\tilde{s})$ parametrelendirilmiş dual eğrisi için

$$\tilde{\alpha}(\tilde{s})-\tilde{m}(\tilde{s})=\tilde{\rho}N+\tilde{\sigma}\tilde{\rho}B, \tag{4.8}$$

yazılabilir. Böylece

$$\tilde{r}^2(\tilde{s})=\left\|\tilde{\alpha}-\tilde{m}\right\|^2=(\tilde{\sigma}\tilde{\rho})^2+\tilde{\rho}^{\ 2} \tag{4.9}$$

elde edilir.

Eğer (4.8) ve (4.9)'un diferansiyeli alınır ve Serret-Frenet formülleri kullanırsa $\tilde{m}^{'}=0$ ve $\tilde{r}^{'}=0$ elde edilir.

Böylece $\tilde{m}, D^3$ 'de sabit bir dual noktadır ve $\tilde{r}$ bir dual sabittir. O halde (4.8) denkleminden $\tilde{\alpha}, \tilde{r}$ yarıçaplı ve $\tilde{m}$ merkezli $K(\tilde{r})$ 'da bulunur. Önerme (4.1)'in diğer bir sonucu aşağıdaki gibidir.

$\tilde{\alpha}, (s), \tilde{\kappa}(s), \tilde{N}(s), \tilde{B}(s)$ 'nın bir lineer kombinasyonu olduğundan bir

$$\tilde{\alpha}(\tilde{s}) =< \tilde{\alpha}, T > T + < \tilde{\alpha}, N > N + < \tilde{\alpha}, B > B. \tag{4.10}$$

yazabiliriz.

Sonuç 4.2: $\tilde{\tau} \neq 0$ ve $\tilde{K}$ hiçbir yerde pür doğal olmamak üzere $\tilde{\alpha}, D^3$ 'de birim hızlı doğal eğrisi olsun o zaman

$$< \tilde{\alpha}, N >^2 N + < \tilde{\alpha}, B >^2 = \tilde{r}^2 \tag{4.11}$$

$\tilde{r}$ bir doğal sabit olması için gerek ve yeter şart $\tilde{\alpha}$ 'nın D^3 'de ya küresel ya da normal eğri olması gerekir.

İspat: Kabul edelim ki $\tilde{\alpha}$ (4.11) sağlayan birim hızlı bir dual eğri olsun o zaman (4.1), (4.10) ve (4.11)'den

$$\left\| \tilde{\alpha}(\tilde{s}) \right\|^2 = \tilde{h}^2 + \tilde{r}^2. \tag{4.12}$$

elde edilir. (4.12)'nin diferansiyeli ve (4.1) kullanırsa

$$< \tilde{\alpha}(\tilde{s}), T >= \tilde{h}\tilde{h}' + 0 \Rightarrow \tilde{h} = \tilde{h}\tilde{h}' \Rightarrow \tilde{h}(\tilde{h}' - 1) = 0. \tag{4.13}$$

bulunur.

Böylece ya $\tilde{h} = 0$ ya da $\tilde{h}' - 1 = 0$ elde edilir. Böylece ya $\tilde{h} = 0$ ya da $\tilde{h} = \tilde{s} + \tilde{c}$ dır. Burada $\tilde{c}$ dual sabittir. Böylece $\tilde{\alpha}$ ya küresel veya normal eğridir. Teoremin yeter şartının ispatı açıktır.

Sonuç 4.3: $\tilde{\kappa}$ pür doğal olmayan ve $\tilde{\tau} \neq 0$ olmak üzere D^3de birim hızlı bir dual eğirinin rektifiyen eğri olması için gerek ve yeter şartı

$$\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}}+(\tilde{s}+\tilde{c})\left(\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}}\right)=0, \tag{4.14}$$

denklemini sağlamasıdır. Burada $\tilde{c}$ dual sabittir.

İspat: Kabul edelim ki $\tilde{\alpha}$, D^3'de bir rektifiyen eğri olsun o zaman $\tilde{h}=\tilde{s}+\tilde{c}$ dır. Buradan (4.2) denklemi göz önüne alınırsa

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}+(\tilde{s}+\tilde{c})\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}\right)'=0 \tag{4.15}$$

Sonuç olarak (4.15) komşulu (4.15)'in integrali alınarak düzenlenirse $\tilde{\tau}\tilde{c}=(\tilde{s}+\tilde{c})\tilde{\kappa},\tilde{c}\in D$ için bulunur ki $\alpha(\tilde{s})$ in bir rektifiyen eğri olduğunu gösterir.

4.2. Dual Helislerin Karekterizasyonu

Doğal helislerin dual eğrilik ve dual torsiyon tarafından karekterizasyonu gibidir.

Tanım: $\tilde{\alpha}$, birim dual hızlı eğrisine bir dual helis denir. Eğer onun dual birim tanjant vektörü bir dual birim u vektörü ile $\tilde{\Theta}=\tilde{\vartheta}+\varepsilon\tilde{\vartheta}$ bir sabit dual açı yapar yani

$$<U,T>=\cos\Theta=con\tilde{s}t.,ile<U,U>=1. \tag{4.16}$$

Teorem 4.1: $\tilde{\kappa}$ pür dual değil ve $\tilde{\tau}\neq 0$ olmak üzere $\tilde{\alpha}$, D^3'de bir birim hızlı eğri olsun o zaman $\tilde{\alpha}$ bir helistir gerek ve yeter şartı $\tilde{s}$, yay parametresi olmak üzere $\tilde{h}$ fonksiyonu

$$(\tilde{\rho}\tilde{h}')'+\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}+\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)\tilde{\tau}\tilde{h}-\tilde{\rho}-\frac{\tilde{s}\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}^2}=0, \tag{4.17}$$

denklemini sağlar.

İspat: Kabul edelim ki $\tilde{\alpha}$ ekseni ve dual birim vektörüne paralel olan bir helis olsun o zaman

$$\left.\begin{array}{l} U=\cos\Theta T+\sin\Theta B, \\ \tilde{\kappa}\cos\Theta-\tilde{\tau}\sin\Theta=0 \end{array}\right\} \tag{4.18}$$

yazabiliriz.

$$<U,\tilde{\alpha}>'=\cos\Theta$$

olduğu için

$$<U,\tilde{\alpha}>=\tilde{s}\cos\Theta+\tilde{c} \tag{4.19}$$

elde edilir. Burada $\tilde{c}$ bir dual sabittir. Şimdi (4.18) ve (4.19) denklemlerinden

$$<T,\tilde{\alpha}>=\tilde{s}+C-<\tilde{\alpha},B>\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} ile C=\frac{\tilde{c}}{\cos\Theta}. \tag{4.20}$$

de buluruz.

Bu denklemler (4.1) ile birleştirilirse

$$\tilde{h}=\tilde{s}+C-<\tilde{\alpha},B>\frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\tau}} \tag{4.21}$$

elde edilir.

(4.21)'in diferansiyeli ve (4.1) kullanırsa

$$\tilde{\rho}(\tilde{h}'-1)+<\tilde{\alpha},N>=0 \tag{4.22}$$

bulunur. (4.22)'nin türevi alınırsa

$$\tilde{\rho}\tilde{h}''+\tilde{\rho}'(\tilde{h}'-1)-\tilde{\kappa}<T,\tilde{\alpha}>+\tilde{\tau}<\tilde{\alpha},B>=0. \tag{4.23}$$

elde edilir. (4.2)ve (4.21), (4.23) de uygulandığında

$$(\tilde{\rho}\tilde{h}')'+\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}+\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)\tilde{\tau}\tilde{h}-\tilde{\rho}+\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}^2}(\tilde{s}+C)=0, \tag{4.24}$$

bulunur. Sonuç olarak $\tilde{\alpha}$ (4.17) sağlayan bir birim hızlı helisdir. (4.24)'ün türevinden

$$\tilde{\rho}\tilde{\sigma}\tilde{h}'' + \left(2\tilde{\rho}'\tilde{\sigma}+\tilde{\rho}\tilde{\sigma}'\right)\tilde{h}' + \left[(\tilde{\sigma}\tilde{\rho})' + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}+\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)\right]\tilde{h}' + \left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}+\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)'\tilde{h} = (\tilde{\sigma}\tilde{\rho})' + \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)'(\tilde{s}+C) + \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}. \qquad (4.25)$$

elde edilir. Önerme (4.1) ve (4.22) ile (4.25) de göz önüne alındığında

$$\left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)'(\tilde{s}+C-\tilde{h}) = 0. \qquad (4.26)$$

elde edilir.

Eğer $\tilde{s}+c=\tilde{h}$ sağlanır ise o zaman (4.26)'dan

$$\left(\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\rho}}+\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}\right)(\tilde{s}+C) - \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\sigma}}(\tilde{s}+C) = 0, \qquad (4.27)$$

elde edilir.

4.3. Dual Küresel Eğri ve Helisin Karekterizasyonları

Bu bölümde $\tilde{\alpha}$'nın dual darboux vektörüne bağlı olarak dual küresel eğriler ve dual helislerin yeni bir karekterizasyonunu vereceğiz.

$\Omega^{\perp}(\tilde{s}) = -\tilde{\kappa}'\, T + \tilde{\tau}\, B$ olarak tanımlanan co-Darboux vektörü olsun. Buradan görülür ki

$$<\Omega', \Omega^{\perp}> = -\tilde{\kappa}\tilde{\tau}' + \tilde{\tau}\tilde{\kappa}'. \qquad (4.28)$$

dir. Böylece $\tilde{\alpha}$ bir helistir, gerek şart $\Omega', \Omega^{\perp}$ ortogonal olmasıdır.

Teorem 4.2: $\tilde{\kappa}$ pür doğal değil ve $\tilde{\tau} \neq 0$ olmak üzere $\tilde{\alpha}$, D^3'de bir birim hızlı eğri olsun ozaman $\tilde{\alpha}$ küreseldir, gerek ve yeter şartı

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}} = \frac{<\tilde{\alpha}, \Omega>}{<\tilde{\alpha}, \Omega^{\perp}>}, \qquad (4.29)$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $\tilde{\alpha}\, D^3$'de birim eğrisi olsun o zaman,

$$\left.\begin{array}{l} <\tilde{\alpha},\Omega>=\tilde{\tau}\,\tilde{h}+\tilde{\kappa}<\tilde{\alpha},B> \\ <\tilde{\alpha},\Omega^{\perp}>=-\tilde{\kappa}\,\tilde{h}+\tilde{\tau}<\tilde{\alpha},B>. \end{array}\right\} \tag{4.30}$$

yazılabilir. $\tilde{\kappa}$ hiçbir yerde pür doğal değil ve $\tilde{\tau}\neq 0$ için

$$\left.\begin{array}{l} <\tilde{\alpha},\Omega>\tilde{\tau}=\tilde{\tau}^2<\tilde{\alpha},B>, \\ <\tilde{\alpha},\Omega^{\perp}>\tilde{\kappa}=\tilde{\kappa}^2<\tilde{\alpha},B>. \end{array}\right\} \tag{4.31}$$

olur. Böylece

$$\frac{<\tilde{\alpha}(\tilde{s}),\Omega>}{<\tilde{\alpha}(\tilde{s}),\Omega^{\perp}>}=\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{\kappa}'} \tag{4.32}$$

elde edilir ki bu da $\tilde{\alpha}$ nın bir küresel olması için gerek ve yeter koşulu sağlar.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada Dual sayılarda eğri kavramı detaylı bir şekilde tanım ve teoremlerle ele alınmıştır.Bu dual eğrinin Frenet Çatısına göre eğrilik ve burulması tanımlanmıştır. Dual uzayda Frenet Çatıya göre dual rektifyan eğri ifade edilerek çeşitli karakterizasyonlar yapılmıştır.

Son olarak Dual Frenet Çatıya göre Dual rektifyan eğriler, Dual Kuaterniyonlarda tanımlanarak yeni karakterizasyonlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Chen, B.Y., (2003). When does the position vector of a space curveal wayslie in its rectifying plane? Am. Math. Mon., 110, 147-152.

[2] Deshmukh, S., Chen, B.Y., Turki, N.B., (2018). A differential equations for Frenet curves in Euclidean 3-space and its applications. Rom.J. Math. Comput. Sci., 8, 1-6.

[3] Study, E. (1903) Geometrie der Dynamen, Leipzig.

[4] Hacısalihoğlu, H. H. (1983). Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Matematik 2, Ankara.

[5] Müller, H.R., (1963). Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara.

[6] Abdel-Baky, R., SaadM.K.(2021). Some characterizations of dual curves in dual 3-space D^3, AIMS Mathematics, 6(4), 3339-3351.

[7] Yücesan, A., Ayyıldız, N., Çöken, A.C. (2007). On rectifying dual space curves, Rev. Mat. Complut., 20, 497-506

[8] Yücesan, A., Tükel, G.Ö. (2020). A new characterization of dual general helices, ICOM 2020 Conference Proceedings Book, Available from: http://raims.org/files/final.proceedings.pdf.

[9] Veldkamp, G.R., (1976). On theuse of dual numbers, vectors and matrices in instant an eous, spatial kinematics, Mech. Mach. Theory, 11, 141-156.

[10] Şahiner, B., Önder M., (2016). Slant Helices, Darboux Helices and Similar Curves in Dual Space D^3, Mathematica Moravica, 20(1), 89-103.

[11] Güngör, M.A.,Tosun, M.(2010), A study on dual Mannheim partner curves, Int. Math. Forum, 5, 2319-2330.

[12] Li, Y., Pei, D. (2016), Evolutes of dual spherical curves for ruled surfaces. Mathematical Methods in the Applied Science 39 (11): 3005-3015.

[13] Önder, M., Ugurlu, H.H. (2013), Normal and spherical curves in dual space D^3, Mediterranean Journal of Mathematics, 10, 1527-1537.

[14] Durmaz, O., Aktaş, B. (2020), Gündogan. H., New approaches on dual space. Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics 35 (2): 437-458.

[15] Carmo M.P. (1976): Differential Geometry of Curvesand Surfaces, Pearson Education.

ÖZGEÇMİŞ

Servet UZUN

[redacted]

[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]

[redacted]

[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]

[redacted]

[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]

[redacted]

[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]
[redacted]	[redacted]