



**T.C.**  
**TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ**  
**LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**  
**ANALİZ VE FONKSİYONLAR TEORİSİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**  
**FOURIER SERİLERİ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**HAYATİ KAYA**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. OKTAY MUHTAROĞLU**

**TOKAT- 2022**

## JÜRİ KABUL VE ONAY

Hayati KAYA tarafından hazırlanan “ Fourier Serileri ve Sınır Değer Problemleri” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 30/09/2022 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü MATEMATİK ANABİLİM DALI’nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmza

Danışman

.....

.....

Üye (Başkan)

.....

.....

Üye

.....

.....

Üye

.....

.....

Üye

.....

.....

**Yukardaki sonucu onaylarım**  
(İmza)

ONAY

.....

Prof. Dr. Mehmet GÜNEŞ  
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü  
.../.../2022

## **ETİK SÖZLEŐME**

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU danıŐmanlıđında hazırlamıŐ olduğum “Fourier Serileri ve Sınır Değer Problemleri” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

30/09/2022

**HAYATI KAYA**

## ÖZET

### FOURIER SERİLERİ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Kaya, Hayati

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Eylül 2022, vi + 84 sayfa

Bu tezde Fourier serileri ve Sturm-Liouville sınır değer problemleriyle ilgili bazı tanım ve teoremler üzerinde durulmuş, fizik ve mühendislikte kullanılan bir boyutlu dalga denkleminin Fourier yöntemi ve d'Alembert yöntemiyle çözümüne yer verilmiştir. Tez çalışması bir çok fizik problemlerinin çözümü açısından kaynak oluşturmayı hedeflemektedir. Tez aşağıdaki biçimde düzenlenmiştir. Tezin giriş bölümünde, Fourier serileri ve Sturm-Liouville sınır değer probleminin kullanıldığı bilim dalları ve alanlarına yer verilmiş, önemi üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde Fourier serileri ile ilgili tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Sınır Değer Problemleri ele alınarak Sturm-Liouville yöntemleri üzerinde durulmuş, özdeğer ve özfonksiyonlar, problemler üzerinde incelenmiştir. Son bölümde ise Fizik ve Mühendislikte kullanılan bir boyutlu dalga denkleminin çözümü ve akı süreksizliğine sahip ısı iletim denkleminin çözümü üzerinde durulmuştur.

**ANAHTAR KELİMELEER:** Fourier serileri, Sınır değer problemleri, Özdeğerler ve Özfonksiyonlar, Sturm-Liouville problemi, Bir boyutlu dalga denklemi, Akı süreksizliğine sahip ısı iletim denklemi

## ABSTRACT

### FOURIER SERIES AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Kaya, Hayati

Master's Thesis, Department of Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

September 2022, vi + 84 pages

In this thesis, Fourier series and some definitions and theorems related to Sturm Liouville boundary value problem, are emphasized, and the Fourier method and d'Alembert method which are used in the solution of one-dimensional wave equation are described. The thesis study aims to create a resource for the solution of many physics problems. The thesis is organized as follows. In the introductory part of the thesis, the branches and fields in which the Fourier series and the Sturm-Liouville boundary value problem are used are included and their importance is emphasized. In the second chapter, definitions, theorems and examples about Fourier series are given. In the third chapter, Boundary Value Problems are discussed and Sturm-Liouville methods are emphasized, eigenvalues and eigenfunctions are examined on problems. In the last chapter, the solution of the one-dimensional wave equation used in Physics and Engineering and the solution of the heat conduction equation in flux discontinuity are emphasized.

**KEYWORDS:** Fourier series, Boundary value problems, Eigenvalues and Eigenfunctions, Sturm-Liouville problem, One dimensional wave equation, Heat conduction equation in flux discontinuity

## ÖNSÖZ

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren değerli hocam sayın Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ' na minnettarlığımı sunarım.

Ayrıca, Yüksek lisans eğitim süresince bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, Doç. Dr. Serkan DEMİRİZ, Dr. Öğretim Üyesi Hayati OLGAR ve bütün hocalarıma teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen anne ve rahmetli babama, her zaman yanımda olan sevgili eşime ve çocuklarım Sevde Emine ve Yiğit Kağan'a sonsuz teşekkürler.

**Hayati KAYA**

Eylül 2022

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>ÖNSÖZ</b> .....	<b>ii</b>
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	<b>iv</b>
<b>ŞEKİL LİSTESİ</b> .....	<b>vi</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. GENEL BİLGİLER</b> .....	<b>7</b>
2.1. Periyodik Fonksiyon .....	7
2.2. Fourier Serisi.....	8
2.3. Fourier Serisi Yakınsaklığı .....	12
2.3.1. Dirichlet koşulları.....	13
2.4. Fourier Serisi Katsayıları .....	13
2.5. Keyfi Periyotlar ve Yarım Aralık Açılımları .....	17
2.6. Kompleks Fourier Serisi .....	28
2.7. Fourier İntegrali .....	30
2.8. Kompleks Fourier İntegrali .....	39
<b>3. MATERYAL ve YÖNTEM</b> .....	<b>43</b>
3.1. Sınır Değer Problemi .....	43
3.2. Sturm Liouville Problemleri .....	50
3.3. Sturm Liouville Probleminin Özdeğerleri .....	50
3.4. Özfonksiyonların Dikliği .....	53
3.5. Özfonksiyonların Açılımları .....	55
3.6. Özfonksiyonların Sıfırları .....	57
<b>4. BULGULAR</b> .....	<b>58</b>
4.1. Dalga Denklemi .....	58
4.1.1. Telin titreşimi.....	58
4.1.2. Dalga denklemi çözümü.....	61
4.2. Dalga Denkleminin D-Alembert yöntemiyle Çözümü .....	64

4.3. Ara Yüzeyde Isı Sıcaklığı ve Akı Süreksizliğine Sahip Isı İletim Denklemi Çözümü .....	69
4.4. Dalga Denkleminin Uygulaması .....	78
<b>5. SONUÇ ve ÖNERİLER .....</b>	<b>81</b>
<b>6. KAYNAKLAR .....</b>	<b>82</b>
<b>7. ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>84</b>



## ŞEKİL LİSTESİ

<b><u>Şekil</u></b>	<b><u>Sayfa</u></b>
Şekil 2.1 : $p$ periyodunun periyodik işlevi .....	7
Şekil 2.2 : $2\pi$ periyotlu kosinüs ve sinüs fonksiyonları .....	8
Şekil 2.3 : 3 terimli kare dalga fonksiyon grafiği .....	16
Şekil 2.4 : Örnek 2.5.1 'in grafiği .....	18
Şekil 2.5 : $f(x) = x$ , $-1 < x < 1$ , $f$ grafiği.....	22
Şekil 2.6 : $0 < x < a$ aralığında bir fonksiyon grafiği.....	25
Şekil 2.7 : $f(x) = x$ , $0 < x < 1$ in tek periyodik genişleme grafiği .....	27
Şekil 2.8 : $f(x) = x$ , $0 < x < 1$ in çift periyodik genişleme grafiği .....	27
Şekil 2.9 : Örnek 2.7.1' in grafiği .....	32
Şekil 2.10: $S_i(z)$ 'nin grafiği (Sinüs integrali) grafiği .....	34
Şekil 2.11 : Örnek 2.7.2'nin tek genişlemesi olan $F_T(x)$ ' in grafiği.....	38
Şekil 2.12 : Örnek 2.7.2'nin çift genişlemesi olan $F_C(x)$ grafiği .....	39
Şekil.4.1 : Uzatılmış bir tel grafiği .....	59
Şekil.4.2 : Yerinden edilmiş telin bir bölümünün grafiği .....	60
Şekil 4.3 : Örnek 4.4.1'in ( $t= 0$ anında ) çözüm grafiği .....	79
Şekil 4.4 : Örnek 4.4.1'in ( $t = 2\pi/30$ anında) çözüm grafiği.....	80

## 1.GİRİŞ

Klasik Fourier serileri periyodik fonksiyonlarla ilgilidir. Tanım gereği tüm  $x$  ler ve sabit bir  $p > 0$  için  $f(x+p) = f(x)$  eşitliği sağlanırsa  $f$  fonksiyonuna  $p$  periyodlu periyodik fonksiyon denir. O halde bir  $n$  tamsayısı için  $f(x + np) = f(x)$  eşitliği de sağlanır. Klasik Fourier serileri teorisinin esas konusu

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

biçiminde yazılan serilerin özelliklerini incelemekten ibarettir.

Fourier seri tekniği ile diferansiyel denklemlerin çözümü mekanik ve akustik titreşimlerin incelenmesinde, ısı transferinde, elastisite teorisinde, optikte, gezegenlerin hareketinde, sinyal işlemede vs. çok geniş uygulama alanları bulunmaktadır.

Fourier serileri, Joseph Fourier (1768-1830) tarafından metal çubuktaki ısı denklemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Bu yöntem başlangıçta ısı problemlerinin çözümü için daha sonra da çok geniş alanlarda kullanılmıştır.

Trigonometrik seriler, bu alandaki önemli çalışmaları olan Joseph Fourier ismiyle anılmış ve Fourier Serileri olarak adlandırılmıştır. Joseph Fourier'den sonra bu konuda Leonhard Euler, Jean le Rond d'Alembert ve Daniel Bernoulli araştırmalar yapmışlardır.

Fourier serisinin amacı genel periyodik fonksiyonları kosinüs ve sinüs fonksiyonlarının serisi ile temsil etmektir.

Adi diferansiyel denklem için sınır değer problemi olan Sturm-Liouville problemlerini incelerken trigonometrik serilerin yanısıra başka ortogonal fonksiyonlar sistemlerini de inceleme ihtiyacı ile karşılaşıyoruz.

Bu problemler özdeğer problemleridir ve fizikte frekanslar ve enerjilerle bağlantılı olan bir  $\lambda$  parametresi içerirler. Sturm Liouville problemlerinin çözümlerine bu problemin özfonksiyonları da denir.

Sturm-Liouville tipi sınır-değer problemleri, kimya, aerodinamik, karmaşık ortam veya polimer reolojisi alanlarındaki sistem ve süreçlerin matematiksel modellenmesi olarak birçok mühendislik ve bilimsel disiplinde ortaya çıkar. Örneğin, homojen yüklü bir ipin titreşimi, yerin serbest salınımları, atomik parçacıkların etkileşimi, ses ve yüzey dalgaları, uçlarda konsantre ısı kapasitesine sahip bir çubukta ısı transferi, elektromanyetik ve yerçekimi dalgaları ile ilgili matematiksel ve fizik problemlerinin çözümü Sturm-Liouville problemlerine indirgenebilir.

Sonlu boyutlu analizin en önemli sonuçlarından biri simetrik matrisin özdeğerlerinin reel olduğu ve maksimal sayıda lineer bağımsız özvektörler sisteminin baz oluşturduğu hakkındaki teoremdir. Fakat fizikte ve başka doğa bilimlerindeki süreçlerin matematiksel modelleri incelenirken sonsuz boyutlu vektör uzayları ile karşılaşılmaktadır. Simetrik matrislerin yukarıda ifade edilen özelliği sonsuz boyutlu Hilbert uzaylarında kendine eşlenik lineer operatörlerin spektral teorisinin esin kaynağı olmuştur. Lineer diferansiyel operatörler teorisinin ilk ve temel sonuçları, D. Bernoulli, J. d'Alembert L. Euler, J. Liouville ve Ch. Sturm'un araştırmalarında yer almaktadır. Özellikle Ch. Sturm ve J. Liouville ısı iletimi ve telin titreşimi problemlerini incelerken spektral analizin başlangıcını oluşturan bir çok kavram tanımlamışlar ve çok önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Örneğin özdeğerlerin asimptotik davranışlarını incelemişler, farklı katsayıları olan denklemlerin çözümleri için karşılaştırma özelliklerini elde etmişler, özfonksiyonların salınımı hakkında önemli sonuçlar bulmuşlardır.

Ch. Sturm ve J. Liouville'nin 19. yüzyılın ortalarında elde ettiği bu sonuçlar günümüze kadar bir çok matematikçi ve fizikçi tarafından daha da geliştirilmiş ve geliştirilmiştir.

Bu çalışmalardan da anlaşılmaktadır ki Ch. Sturm ve J. Liouville'nin çalışmaları tahminen 180 yıl önce yapılmasına rağmen Sturm - Liouville teorisi günümüze kadar güncelliğini ve önemini korumuş, bununla yetinmeyip önemini artırmış ve hâlâ arttırmaktadır.

Bu alanda bir çok önemli sonuçlar S.Y. Yakubov ve Y.Y. Yakubov'un çalışmalarında) elde edilmiştir (Yakubov, 1994; 1998 and Yakubov, Yakubov, 1999; 2000). Yakubov'un 1994' de yayımlanan kitabında reguler diferansiyel operatörlerin genel teorisi kurulmuş ve bu teoride yeni yöntemler bulunmuştur.

2000'li yılların başından günümüze kadar sınır değer problemleri farklı yönlerden geliştirilmiştir. Özellikle süreksiz katsayılı, çok aralıklı ve sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Sturm Liouville problemleri için önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Son yıllarda süreksiz Sturm Liouville problemleri konusunda, Mukhtarov ve arkadaşları (Mukhtarov, Kadakal, Altınışik, (2002), Mukhtarov, Aydemir, Olğar, (2019); Muhtaroglu, Çavuşoglu, Olğar, (2019); Mukhtarov, (1994); Mukhtarov, Kandemir, Kuruoglu, (2002); Mukhtarov ve Yakubov, (2002); Mukhtarov, Olğar, Aydemir, (2015); Mukhtarov, Kadakal, Mukhtarov, F.S., (2004); Olğar ve ark. (2018); Aydemir ve ark. (2019); Yücel ve Muhtaroglu, (2018).) bir çok çalışma yapmışlardır. Mukhtarov ve ark., (2002), tarafından yayınlanan çalışmada sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran süreksiz Sturm-Liouville probleminin bazı spectral özellikleri incelenmiştir. Sınır şartlarına süreksizlik noktasında çözümün sağ ve sol limit değerleri arasındaki bağıntı olarak verilen iki tane geçiş şartı da eklenmiştir. "Equiconvergence with Fourier Series for Non Classical Sturm Liouville Problems " 2019 yılında Muhtaroglu, Aydemir ve Olğar tarafından yapılan çalışmada bir süreksiz Sturm-Liouville Probleminin özfonksiyonlarının bazı özellikleri araştırılmış, incelenen sorunun temel çözümleri, Green fonksiyonu, resolvent operatörü ve kendine eşleniği ile ilgili bazı ön sonuçları kanıtlamışlardır. Aydemir ve ark., (2019), tarafından yayımlanan " The Principal Eigenvalue and The Principal Eigenfunction of A-Boundary Value Transmission Problem " başlıklı çalışmalarında Sturm-Liouville problemleri için özfonksiyon açılımı ve Parseval eşitliği gibi önemli spektral özellikleri genişletmek ve genelleştirmek, özfonksiyon açılımının yakınsama teorisinde ortaya çıkan bazı spektral problemleri araştırılmıştır.

Faydaoğlu ve Guseinov, (2010), "An Expansion Result for a Sturm-Liouville Eigenvalue Problem with Impulse" başlıklı çalışmalarında iki katmanlı kompozitin sayılabilir sonsuz sayıda özdeğer ve özfonksiyonlarının varlığı ispatlanmıştır. Abdyldeeva ve ark., (2019), "Generalized solution of boundary value problem with an inhomogeneous boundary condition" başlıklı çalışmalarında sınır değer probleminin genelleştirilmiş bir çözümünü oluşturmak için bir algoritma geliştirilmiştir. Andrew, (1989.), "Correction of finite difference eigenvalues of periodic Sturm-Liouville problems." adlı çalışmasında, periyodik veya regular Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerinin hesaplanması yapılmıştır. Maris ve Göktaş, (2019), "On the Spectral Properties of A Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter in the Boundary Condition" adlı çalışmalarında özdeğerlerin varlığı ve özdeğerler için asimptotik formüller üzerinde durulmuştur.

Son yıllarda bu teorinin ivme kazanmasının esas nedeni fizik ve mühendislikte ortaya çıkan yeni tipten problemlerin incelenme ihtiyacıdır.

Bu tür somut problemler Fourier yöntemi olarak da adlandırılan değişkenlere ayırma yöntemiyle incelendiğinde genel olarak Sturm Liouville problemleri elde edilir. Fizik probleminde verilen sınır ve başlangıç fonksiyonları uygun sınır değer probleminin özfonksiyonları serisine açılabilirdiği durumlarda problemin çözümü Fourier serileri biçiminde elde edilir.

Bu nedenle Sınır değer problemleri ve Fourier serileri bağımlı ve karşılıklı etkileşim biçiminde olan konulardır.

Sturm ve Liouville'in çalışmaları teorik ve uygulamalı matematikte bir çok yeni bilim dalının oluşumu ve gelişiminde önemli rol oynamıştır. Örneğin, İntegral denklem teorisi, Soyut Hilbert Uzaylarında kendine eşlenik operatörler teorisi, Spectral analiz, Fourier Analizi gibi teorilerdeki bir çok kavram tanımında ve bir çok özelliğin bulunmasında Sturm Liouville teorisinden yararlanılmıştır. Bilim ve teknolojinin gelişimi ile bir çok yeni matematiksel modellerin çözümü ihtiyacı doğmaktadır.

Böyle matematiksel modeller genel olarak kısmi diferansiyel denklemler için sınır ve başlangıç değer problemleri olarak ortaya çıkmaktadır. Fiziksel sürecin başlangıç durumu başlangıç şartlarıyla, sürecin oluşturduğu ortamın sınırındaki durum ise sınır şartları ile ifade edilmektedir. Böylece başlangıç ve sınır değer olarak adlandırılan problemler karşımıza çıkmaktadır. Bu tür problemlerin çözümü için uygulanan en etkili yöntemlerden biri değişkenlerine ayırma yöntemi veya Fourier yöntemidir. Bu yöntemin uygulanabilmesi için Sturm Liouville probleminin sonsuz sayıda özdeğerinin mevcut olduğu ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonların baz oluşturduğunu kanıtlamak gerekir. Örneğin, matematiksel fizikte incelenen bir çok somut sürecin matematiksel modeli,

$$y_{tt}(x,t) = a^2 y_{xx}(x,t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

kısmi diferansiyel denkleminde

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

sınır şartlarından ve

$$y_t(x,0) = 0, \quad y(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.3)$$

başlangıç şartlarından oluşan başlangıç sınır değer problemi biçiminde ifade edilir.

Bu probleme Fourier yöntemini uygulayarak çözümü,

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) \cos\left(\frac{\pi a}{L} nt\right) \right) \quad (1.4)$$

Fourier serisi biçiminde elde ediyoruz.

(1.4) ifadesinin (1.3) ün ikinci şartında yerine yazarsak,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( c_n \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) \right), \quad 0 < x < L \quad (1.5)$$

biçiminde Fourier serisi elde edilir. Fourier analizinden yararlanılırsa,  $c_n$  fourier katsayılarının

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (1.6)$$

eşitlikleri ile hesaplandığını görürüz.

Sonuç olarak, (1.1)–(1.3) biçiminde ifade edilen fiziksel problemin çözümü,

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) dx \right) \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) \cos\left(\frac{\pi a}{L} nt\right) \quad (1.7)$$

serisi biçiminde elde edilir. Bu örnek bile Fourier serileri ve sınır değer problemleri teorilerinin teorik ve uygulama açısından önemini bariz bir biçimde ortaya koymaktadır.

Bu yüksek lisans tezinde Fourier serileri ve Sınır değer problemleri özellikleri ve çözümleri üzerinde durulmuş, Fizik ve Mühendislikte kullanılan bir boyutlu dalga denkleminin Fourier yöntemiyle ve d'Alembert yöntemiyle çözümüne ve ara yüzeyde ısı sıcaklığı akı süreksizliğine sahip ısı iletim denkleminin Fourier yöntemiyle çözümüne yer verilmiştir. Tez bu konuda kaynak oluşturma hedefi taşımaktadır.

## 2- GENEL BİLGİLER

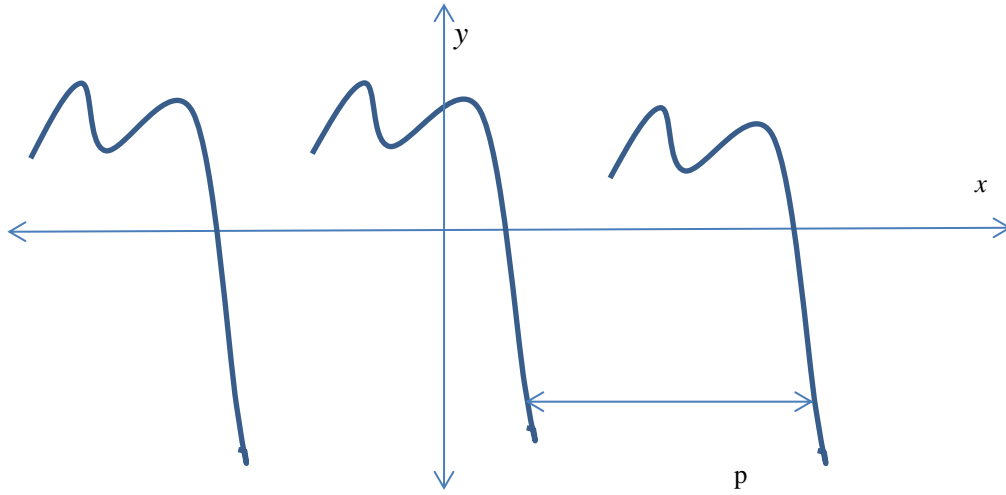
### 2.1 Periyodik Fonksiyon

Bütün  $x$ ' ler için  $f(x) = f(x + p)$  olacak şekilde pozitif bir  $p$  sayısının mevcut olması şartıyla, her  $x$  için tanımlı  $f(x)$  fonksiyonuna periyodik fonksiyon,  $p$  sayısına da fonksiyonun periyodu denir (Edwards & Penney,2011).

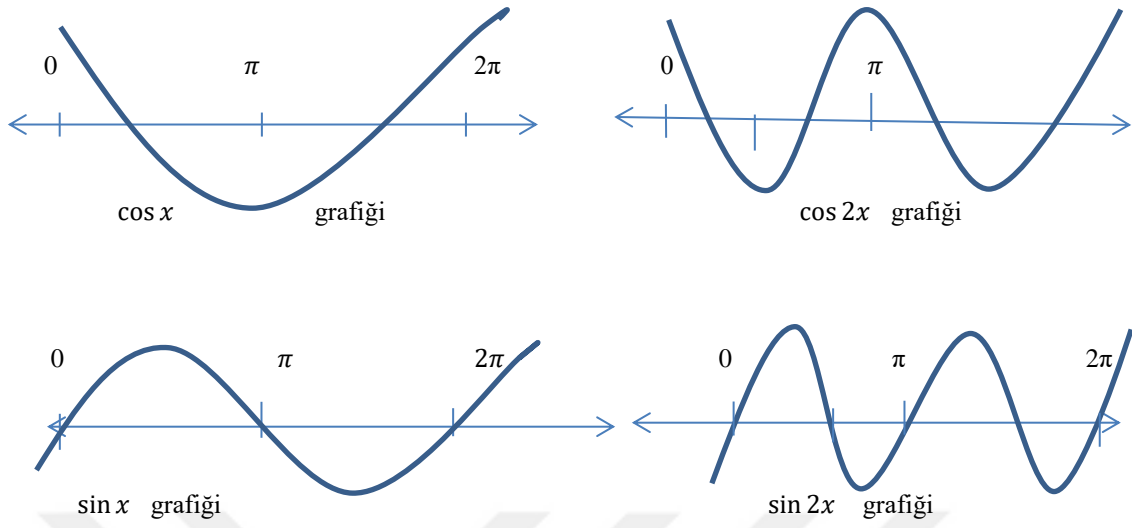
Periyodik fonksiyonun periyodu bir tane değildir. Örneğin,  $p$ ,  $f(x)$  nin bir periyodu ise  $2p$ ,  $3p$  sayıları da periyodudur. Örneğin her pozitif sayı herhangi bir sabit fonksiyonun periyodudur.

Periyodik fonksiyonun en küçük periyodu varsa, bu periyoda  $f$ ' nin esas periyodu denir. Örneğin,  $n$  pozitif bir tamsayı olmak üzere,  
 $g(x) = \cos nx$  ve  $h(x) = \sin nx$  fonksiyonlarının esas periyodu  $2\pi/n$  dir.

Periyodik bir fonksiyonun grafiğini çizmek için periyoda eşit olan uzunluk aralığında bir grafik çizilir ve ardından bu grafiğe  $x$  ekseninde sağa sola kopyalanır ( bkz. Şekil 2.1).



Şekil 2.1:  $p$  periyodunun periyodik işlevi



Şekil 2.2 :  $2\pi$  periyodlu kosinüs ve sinüs fonksiyonları

## 2.2. Fourier Serisi

Tanım 2.2.1.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanan bir seriye trigonometrik seri,  $a_0, a_n$  ve  $b_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sayılarına da trigonometrik serinin katsayıları denir.

(2.2.1) serisi bir  $f(x)$  fonksiyonuna yakınsıyor ise  $\cos nx$  ve  $\sin nx$  fonksiyonları  $2\pi$  periyodlu olduklarından  $f(x)$  fonksiyonu da  $2\pi$  periyodlu bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.2.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  bir fonksiyon verilsin ve  $[-\pi, \pi]$  aralığında  $f(x)\cos nx, f(x)\sin nx$  fonksiyonlarının integrallenebilir olduğunu kabul edelim.

$a_n$  ve  $b_n$  dizilerini,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

eşitlikleriyle tanımlayalım ve aşağıdaki trigonometrik seriyi oluşturalım.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

bu seriye  $f(x)$  fonksiyonunun Fourier serisi denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

biçiminde gösterilir. Bu seri yakınsak olabilir veya yakınsak olmayabilir.

$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  serisi yakınsak olduğu durumda  $f(x)$ 'e yakınsak olabilir veya yakınsak olmayabilir (Tolstov, 1962).

Tanım 2.2.3.  $a \leq x \leq b$  aralığında tanımlı  $f$  ve  $g$  fonksiyonları verilsin. O halde,

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x) \, dx = 0 \quad \text{ise}$$

$f(x)$  ve  $g(x)$  fonksiyonlarına birbirine dik (ortogonal) fonksiyonlar denir.

Teorem 2.2.4  $m$  ve  $n$  pozitif tamsayılar olmak üzere,  $\cos nx$  ve  $\sin nx$  fonksiyonları için,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad m \neq n \quad \text{ise}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \pi, \quad m = n \quad \text{ise}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad m \neq n \quad \text{ise}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx = \pi, \quad m = n \quad \text{ise}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx \, dx = 0, \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

eşitlikleri doğrudur (Tolstov, 1962).

*İspat.*

Bu formüllerin nasıl ortaya çıktığını inceleyelim. Bunun için aşağıdaki trigonometrik formüllerden yararlanacağız.

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\cos (a + b) + \cos (a - b))$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} (\cos (a - b) - \cos (a + b))$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} (\sin (a + b) + \sin (a - b))$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2} (\sin (a + b) - \sin (a - b))$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} ((\cos (mx + nx) + \cos (mx - nx))) dx$$

eşitliğinden yararlanırsak,

$m = n$  olmak şartıyla,

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos (mx + mx) + \cos (mx - mx)) \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(2mx) + (\cos 0)x) dx \\
&= \left[ \frac{1}{2} \frac{\sin 2mx}{2m} + \frac{1}{2} x \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

bulunur.  $m \neq n$  olmak şartıyla,

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} ((\cos(mx + nx) + \cos(mx - nx))) dx \\
&= \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(m+n)x}{(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{(m-n)} \right) \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)) dx$$

eşitliği gereği,

$m = n$  olmak şartıyla,

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} ((\cos 0)x - \cos 2mx)) \\
&= \left[ \left[ \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2mx}{2m} \right] \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi
\end{aligned}$$

bulunur.

$m \neq n$  olmak şartıyla,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cdot (\cos(mx - nx) - \cos(mx + nx)) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sin(m-n)x}{(m-n)} + \frac{\sin(m+n)x}{(m+n)} \right) \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

olur.

### 2.3. Fourier Serisinin Yakınsaklığı

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

Fourier serisini göz önüne alalım.

$$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

olmak üzere,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = f(x)$$

olması için hangi şartların sağlanması gerektiğini inceleyelim.

$f(x)$  fonksiyonu,

$$\lim_{x \rightarrow x_i^-} f(x) = f(x_i - 0) \quad \text{ve}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_i^+} f(x) = f(x_i + 0)$$

sonlu değere sahip ve

$$f(x_i) = \frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}$$

ise  $x_i = x$  noktasına  $f(x)$  fonksiyonunun düzgün süreksizlik noktası denir (Kandemir, 2015).

### 2.3.1. Dirichlet koşulları

$f(x)$  fonksiyonu  $2\pi$  periyotlu bir fonksiyon olsun.  $[-\pi, \pi]$  aralığında parçalı sürekli ve süreksiz olduğu noktalarda sağ ve sol limit değerleri mevcut ise bu takdirde  $f(x)$  fonksiyonu  $x$  ' in her değeri için yakınsak olan ve toplamı,  $x$  bir süreklilik noktası ise  $f(x)$  ' e eşit,  $x$  bir süreksizlik noktası ise  $\frac{f(x+) + f(x-)}{2}$  ye, aralığın uç noktalarında  $f(\pi) = f(-\pi)$  ye eşit olan Fourier serisine açılabilir (Kreyzszığ, 2015).

### 2.4. Fourier Serisi Katsayıları

$(-\pi, \pi)$  aralığında Dirichlet koşullarını gerçekleyen  $2\pi$  periyotlu periyodik bir fonksiyon süreklilik noktalarında

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

şeklinde Fourier serisine açılabilir. Dirichlet koşullarını sağlaması Fourier serisinin  $(-\pi, \pi)$  de düzgün yakınsadığını garanti eder (Tolstov, 1962). O halde Fourier serisi üzerinde  $[-\pi, \pi]$  aralığında terim terime integral alma işlemi yapılabilir. Fourier serisinin her iki tarafını  $-\pi$  den  $\pi$  ye kadar integralini alalım.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx \\ &= \left[ \frac{a_0}{2} x + a_n \frac{\sin nx}{n} - b_n \frac{\cos nx}{n} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Buradan  $a_0$  katsayısını elde ederiz;

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Şimdi,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Fourier serisinin her iki tarafını  $\cos mx$  ile çarpıp her iki tarafını  $-\pi$  den  $\pi$  ye kadar integralini alalım.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx) \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_n \pi \end{aligned}$$

Buradan  $a_n$  katsayısı bulunur.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

Fourier serisinin her iki tarafını  $\sin mx$  ile çarpıp her iki tarafını  $-\pi$  den  $\pi$  ye kadar integralini alalım.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx \sin mx + b_n \sin nx \sin mx) \, dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = b_n \pi \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \end{aligned}$$

$b_n$  katsayısı bulunur (Kandemir, 2015).

Örnek 2.4.1.

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0 \\ 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & t = -\pi, 0, \pi \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier serisini bulalım.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 -1 dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dt,$$

$$= \left[ \frac{1}{2\pi} (-t) \right]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{1}{2\pi} (t) \right]_0^{\pi} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\cos nt dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nt dt$$
$$= \left[ \frac{1}{n\pi} (-\sin nt) \right]_{-\pi}^0 + \left[ \frac{1}{n\pi} (\sin nt) \right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 -\sin nt dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt dt$$
$$= \left[ \frac{1}{n\pi} (\cos nt) \right]_{-\pi}^0 + \left[ -\frac{1}{n\pi} \cos nt \right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n)$$

Bunlar,

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

eşitliğinde yerine konulursa,

$$f(t) \sim \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin nt$$

Böylece bütün  $n \geq 0$  için  $a_n = 0$  dır ve

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & n \text{ tek} \\ 0, & n \text{ çift} \end{cases}$$

Son ifade  $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$  den görülür. Fourier katsayılarının bu değerleri ile

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{\text{tek}} \frac{\sin nt}{n} = \frac{4}{\pi} \left( \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \dots \right)$$

Fourier serisi elde ederiz.

Burada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{ yerine } \sum_{\text{tek}} A_n \text{ kısaltmasını kullandık.}$$

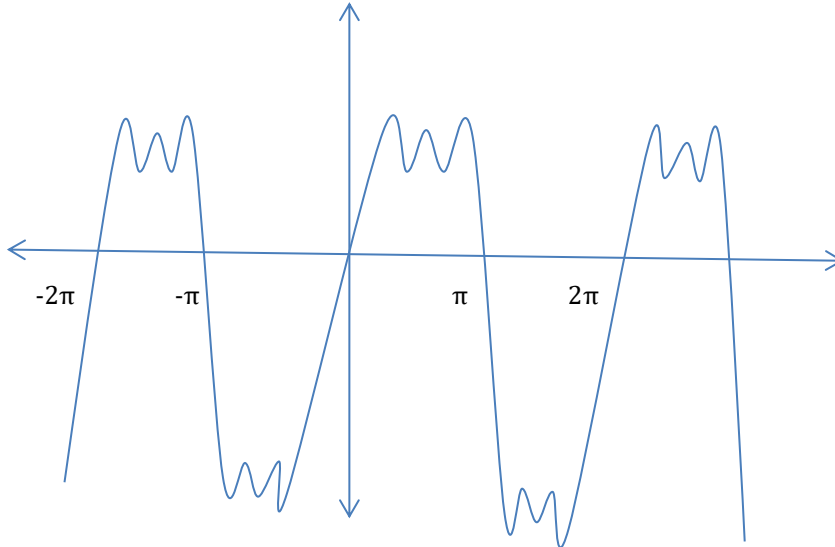
Örneğin,

$$\sum_{\text{tek}} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots$$

demektir. Böylece verilmiş  $f(x)$  fonksiyonunun Fourier serisinin

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

biçiminde olduğunu görürüz. Bu serinin 3 terimli kısmının grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.3 : 3 terimli kare dalga fonksiyon

## 2.5. Keyfi Periyotlar ve Yarım Aralık Açılımları

Fourier serisini, değişkenlerin yeniden ölçeklendirilmesiyle her periyodik fonksiyon için genelleştirebiliriz.  $f$  fonksiyonunun periyodunun  $2a$  olduğunu varsayalım. Örneğin;  $1, \sin(\pi x/a), \cos(\pi x/a), \sin(2\pi x/a), \cos(2\pi x/a), \dots$ , fonksiyonların hepsi  $2a$  periyoduna sahip fonksiyonlardır (Power, 2006). Bu durumda Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.5.1)$$

biçiminde tanımlanır.

Fourier serisinin katsayılarını benzer biçimde aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx,$$

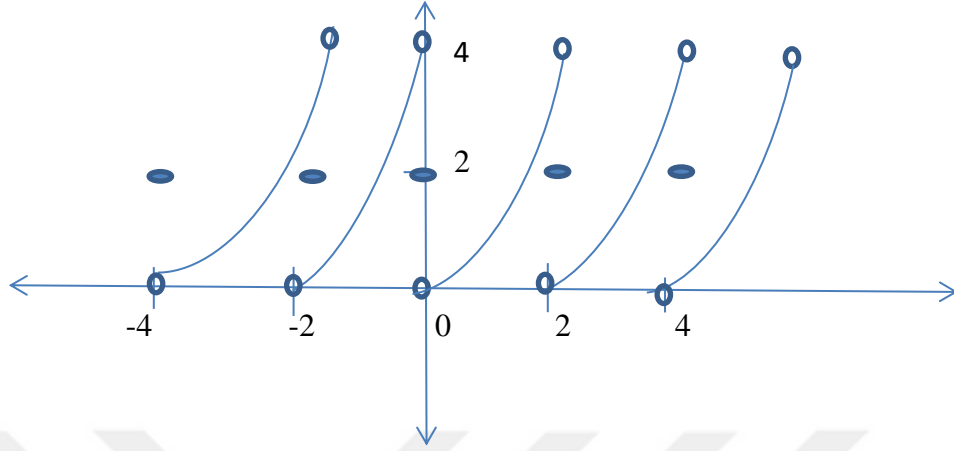
$$b_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx$$

*Örnek 2.5.1*  $f(t) = t^2$ ,  $0 < t < 2$  ve periyodu 2 olan fonksiyon olsun. Her bir çift tamsayı  $t$  için  $f(t)$  yi  $f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}$  ortalama değer şartı ile tanımlarız; yani,  $t$  bir çift tamsayı ise  $f(t) = 2$  dir.

Çünkü  $t = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$  için

$$f(t) = f(2k) = \frac{f(2k + 0) + f(2k - 0)}{2} = \frac{0 + 2^2}{2} = 2$$

$f$  fonksiyonunun grafiği aşağıdaki biçimdedir:



Şekil 2.4. Örnek'teki 2 periyotlu fonksiyon

Şimdi bu fonksiyonun Fourier serisini bulalım.

$t = 0$  dan  $t = 2$  'ye kadar integrallersek,

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 t^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(t) \cos n\pi t dt \\ &= \int_0^2 t^2 \cos n\pi t dt = \left[ t^2 \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right]_0^2 - \int_0^2 2t \frac{\sin n\pi t}{n\pi} dt \\ &= \left[ \left[ t^2 \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right] - \left[ -2t \frac{\cos n\pi t}{n^2 \pi^2} \right] \right]_0^2 - \int_0^2 -2 \frac{\cos n\pi t}{n^2 \pi^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \left[ t^2 \frac{\sin n\pi t}{n\pi} \right] + \left[ 2t \frac{\cos n\pi t}{n^2 \pi^2} \right] + \left[ 2 \frac{\sin n\pi t}{n^3 \pi^3} \right] \right] \Bigg|_0^2 = \frac{4}{n^2 \pi^2} \\
b_n &= \int_0^2 f(t) \sin n\pi t dt \\
&= \int_0^2 t^2 \sin n\pi t dt = \left[ -t^2 \frac{\cos n\pi t}{n\pi} \right] \Bigg|_0^2 - \int_0^2 -2t \frac{\cos n\pi t}{n\pi} dt \\
&= \left[ -t^2 \frac{\cos n\pi t}{n\pi} - \left[ -2t \frac{\sin n\pi t}{n^2 \pi^2} \right] \right] \Bigg|_0^2 - \int_0^2 2 \frac{\sin n\pi t}{n^2 \pi^2} dt \\
&= \left[ \left[ -t^2 \frac{\cos n\pi t}{n\pi} + \left[ 2t \frac{\sin n\pi t}{n^2 \pi^2} \right] \right] + 2 \frac{\cos n\pi t}{n^3 \pi^3} \right] \Bigg|_0^2 = -\frac{4}{n\pi}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece  $f$ 'nin Fourier serisi,

$$f(t) \sim \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi t}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi t}{n}$$

dir. Yakınsaklık teoreminden bütün  $t$ 'ler için  $f(t)$ 'ye yakınsadığını anlarız. Fourier serisinden bazı değerler vererek sonuçlar çıkarabiliriz.  $t = 0$  koyarsak;

$$f(0) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$f(0) = 2$  olduğu için bu eşitlikten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6} \quad (2.5.2)$$

Euler formülü elde edilir.

$t = 1$  koyarsak;

$$f(1) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$f(1) = 1^2 = 1$  olduğu için Euler tarafından bulunan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad (2.5.3)$$

elde edilir. Örnekteki (2.5.2) ve (2.5.3) `den seriler taraf tarafa toplayıp sonra her tarafı ikiye bölersek

$$\sum_{n \text{ tek}}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$$

eşitliği elde edilir.

*Tanım 2.5.2.*  $f$  fonksiyonu  $-L < x < L$  aralığında tanımlanırsa,  $2L$  periyodunu periyodik olarak genişletebiliriz.

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= f(x), & -L < x < L \\ \bar{f}(x) &= f(x+2L), & -3L < x < -L \\ \bar{f}(x) &= f(x-2L), & L < x < 3L \end{aligned}$$

Sağ taraftaki  $f$  'in argümanının her zaman  $f$  'nin verildiği yer olan  $-L < x < L$  aralığında kaldığına dikkat edin. Grafik olarak, bu tür bir genişleme  $-L < x < L$  üzerinde  $f$  grafiğinin bir şablonunun yapılması ve ardından şablondan uzunluk  $2L$  `nin bitişik aralıklarla kopyalanması ile ilgilidir. Periyod  $2L$  olacak biçimde genişletilmiş fonksiyon için, Fourier katsayıları için aşağıdaki formüller elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L (\bar{f}(x)) dx, \\ a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \bar{f}(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \bar{f}(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \end{aligned}$$

Böylece  $f(x)$  fonksiyonunun

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

biçiminde Fourier serisini yazabiliriz (Powers, 2006).

Örnek 2.5.3.  $f(x) = x$ ,  $x \in (-1, 1)$  için Fourier katsayıları,

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = 0$$

$$a_n = \int_{-1}^1 x \cos(n\pi x) \, dx = \left[ \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \, dx$$

$$= \left[ \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} x + \frac{\cos(n\pi x)}{n^2 \pi^2} \right]_{-1}^1 = 0$$

$$b_n = \int_{-1}^1 x \sin(n\pi x) \, dx = \left[ -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} x \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} \, dx$$

$$= \left[ -\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi} x + \frac{\sin(n\pi x)}{n^2 \pi^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi}$$

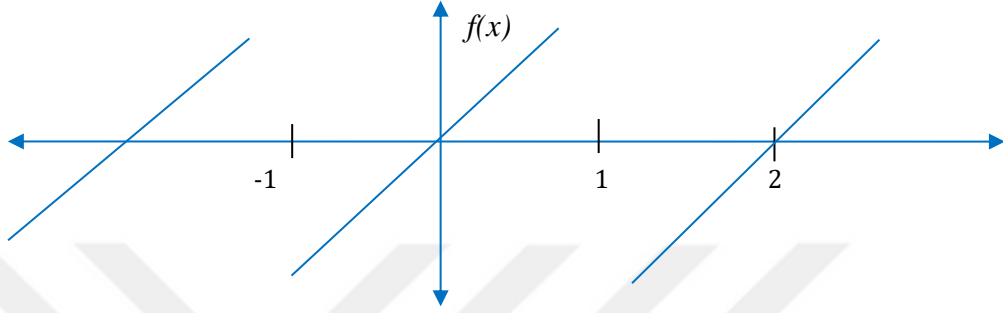
$$= \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu eşitlikten de

$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\pi x)$  Fourier serisi elde edilir.

$f(x) = x$  fonksiyonunun  $-1 < x < 1$  aralığında periyodik genişlemesinin grafiği (2 periyodu ile) aşağıdaki gibi çizeriz.



Şekil 2.5.:  $f(x) = x, -1 < x < 1$ ,  $f$ , periyot 2 ile periyodik.

**Tanım 2.5.4.** Simetrik aralıkta tanımlı olan  $g$  ve  $h$  fonksiyonları verilsin.  $g(x)$  fonksiyonu,  $g(-x) = g(x)$  ise çift fonksiyon;  $h(-x) = -h(x)$  ise  $h(x)$  fonksiyonu tek fonksiyondur. Çift veya tek olarak nitelenmek için  $-c < x < c$  aralığında ( $c$  ise  $\infty$  olabilir) almamız gerekir. Çift bir fonksiyon dikey eksene göre simetriktir ve tek bir fonksiyon orjine göre simetriktir. Örneğin,  $\sin(kx)$ ,  $x$ ,  $x^3$  ve diğer  $x$ 'in tek kuvvetleri tek fonksiyonlardır. Benzer şekilde,  $\cos(kx)$ ,  $|x|$ ,  $1 (=x^0)$ ,  $x^2$  ve  $x$ 'in diğer çift kuvvetleri çift fonksiyonlardır. Bazı fonksiyonlar ne çift ne de tektir, ancak simetrik bir aralıkta tanımlanan herhangi bir fonksiyon, bir çift ve tek bir fonksiyonun toplamı olarak yazılabilir,

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x)-f(-x)).$$

İlk terimin çift bir fonksiyon olduğunu ve ikincisinin tek olduğunu göstermek kolaydır. Çift ve tek fonksiyonlar, burada özetlendiği gibi bazı cebirsel işlemlerde simetrilerini korur. Simetri özellikleri, hesaplamalarımızda önemli basitleştirmelere yol açmaktadır (Power, 2006).

Teorem 2.5.5.  $g(x)$ 'in  $-L < x < L$  simetrik bir aralıkta tanımlanan çift bir fonksiyon olsun. O halde

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx$$

$h(x)$ , simetrik bir aralıkta  $-L < x < L$  olarak tanımlanan tek bir fonksiyon olsun.

O halde

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 0$$

eşitliği sağlanır (Power, 2006).

Tanım 2.5.6.  $g(x)$ 'in  $-L < x < L$  aralığında bir çift fonksiyon olduğunu varsayalım. O halde teorem 2.5.5 gereği

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Yani, tüm sinüs katsayıları sıfırdır. Ayrıca, kosinüs çift fonksiyon olduğu için,  $g(x) \cdot \cos(n\pi x / L)$  fonksiyonu da çift fonksiyondur. Teorem 2.5.5 gereği,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

eşitliği elde edilir.

Böylece kosinüs katsayıları,  $0$ ' dan  $L$ ' ye kadar olan bir integralden hesaplanabilir. Tek fonksiyonlar için paralel sonuçlar elde edilir. Kosinüs fonksiyonun katsayıları sıfırdır ve sinüs katsayıları basitleştirilebilir. Teorem 2.5.5` den direkt olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.5.7.  $g(x)$  fonksiyonu,  $(-L, L)$  simetrik aralığında tanımlı çift fonksiyon ise onun Fourier serisi

$$g(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L < x < L$$

biçimindedir; burada  $a_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) katsayıları

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L g(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

eşitlikleri ile tanımlıdır.

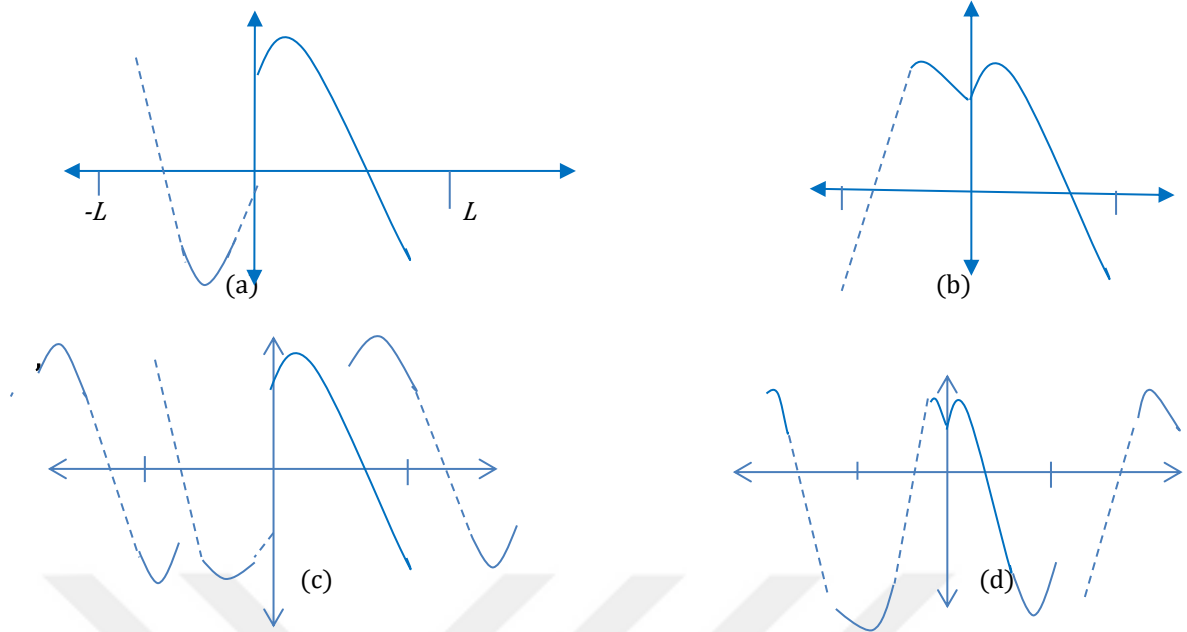
Eğer  $h(x)$  fonksiyonu  $(-L, L)$  simetrik aralığında tanımlı tek fonksiyon ise onun Fourier serisi

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L < x < L$$

biçimindedir; burada

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L h(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Çok sık olarak  $0 < x < L$  aralığında verilen bir fonksiyonun bir Fourier serisi şeklinde gösterilmesi gerekir. Bunu yapmanın pek çok yolu vardır, ancak iki yol özellikle basit ve kullanışlıdır; verilen fonksiyonu genişleterek tek veya çift hale getirerek simetrik bir aralıkta  $-L < x < L$  ile tanımlanmış olan bir duruma getirilir (Power, 2006).



Şekil 2.6.  $0 < x < L$  aralığında bir fonksiyon verilmiştir. Şekil şunları göstermektedir: (a) tek genişleme ; (b) çift genişleme; (c) tek periyodik genişleme; ve (d) çift periyodik genişleme.

Tanım 2.5.8.  $0 < x < L$  aralığında  $f(x)$  fonksiyonu verilsin. Bu  $f(x)$  fonksiyonu  $f_T(x)$  şeklinde genişletilirse  $f_T(x)$  tek fonksiyon eğrisi elde edilir.

$$f_T(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad 0 < x < L \\ -f(-x) & , \quad -L < x < 0 \end{cases}$$

Eğer bu  $f(x)$  fonksiyonu  $f_Ç(x)$  şeklinde genişletilirse  $f_Ç(x)$  çift fonksiyonun eğrisi elde edilir.

$$f_Ç(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad 0 < x < L \\ f(-x) & , \quad -L < x < 0 \end{cases}$$

(Kandemir, 2015).

Tanım 2.5.9.

$f_Ç$  çift ve  $f_T$  tek olduğundan, her iki genişlemenin Fourier serisi Teorem 2.5.7 'deki formüllerden hesaplanabilir.

$$f_Ç(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad -L < x < L$$

$$f_T(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad -L < x < L$$

$f(x)$  fonksiyonunu  $0 < x < L$  aralığında göstermek için, orjinal olarak verildiği yerde, Fourier sinüs serisi veya kosinüs serisi kullanabiliriz. Şöyle diyebiliriz: Eğer  $f(x)$   $0 < x < L$  için verilirse, o zaman bu fonksiyona iki tane Fourier serisi karşılık getirilebilir;

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 < x < L$$

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

ve

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 < x < L$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Bu iki gösterime yarı aralıklı genişlemeler denir ve seri sırasıyla Fourier kosinüs ve Fourier sinüs serisi olarak adlandırılır (Power, 2006).

*Örnek 2.5.9.*  $f$  fonksiyonu,  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 1$  aralığında olsun. Daha sonra,  $f$ 'nin tek periyodik genişlemesi, Şekil (2.7)'de gösterildiği gibidir ve  $f$ 'nin Fourier sinüs katsayısı,

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = 2 \left[ \frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi} \cdot x - \frac{\sin(n\pi x)}{n^2 \pi^2} \right] \Bigg|_0^1$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

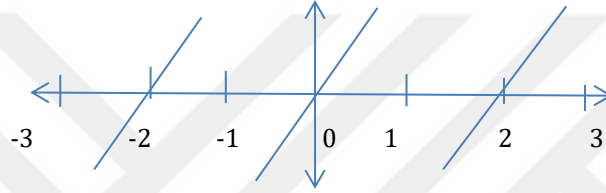
eşitliği ile tanımlanır.

$f$ 'nin çift periyot genişlemesi Şekil (2.8)'de gösterilmektedir. Fourier kosinüs katsayıları,

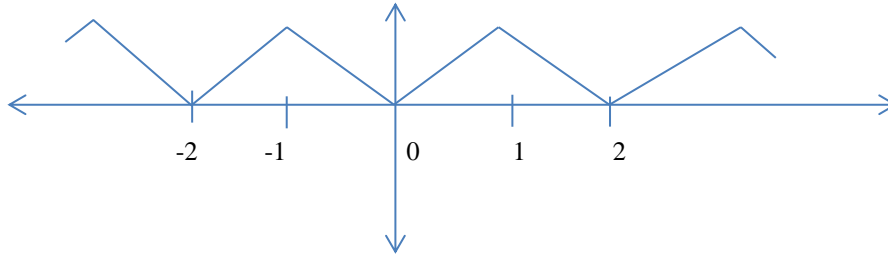
$$a_0 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx = -\frac{2}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\pi))$$

eşitlikleri ile tanımlanır.



Şekil 2.7.  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 1$ 'in tek periyodik genişlemesi (periyot 2).



Şekil 2.8.  $f(x) = x$ ,  $0 < x < 1$  in çift periyodik genişlemesi (periyot 2).

## 2.6.Kompleks Fourier Serisi

Bir  $f(x)$  fonksiyonunun kompleks Fourier serisi,

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx)$$

Fourier serisinden hareketle aşağıdaki şekilde elde edilir.

$\cos mx$  ve  $\sin mx$  yerine

$$\cos mx = \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2}, \quad \sin mx = \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i}$$

Euler formülleri kullanılırsa ,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( a_m \frac{e^{imx} + e^{-imx}}{2} + b_m \frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \right) \\ &= a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{a_m - ib_m}{2} e^{imx} + \frac{a_m + ib_m}{2} e^{-imx} \right) \\ &= c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m e^{imx} + c_{-m} e^{-imx}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx} \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada,

$$\begin{aligned} c_0 = a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ c_m &= \frac{(a_m - ib_m)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (\cos mx - i \sin mx) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx \end{aligned}$$

$$c_{-m} = \frac{(a_m + ib_m)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (\cos mx + i \sin mx) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{imx} dx$$

olurlar. Böylece  $f(x)$ ' in kompleks formda Fourier açılımı ve Fourier katsayıları,

$$f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx} \quad (2.6.1)$$

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx \quad m \in \mathbb{Z} \quad (2.6.2)$$

biçiminde elde edilir (Altın, 2011).

*Örnek 2.6.1.*  $f(t) = e^t$ ,  $-\pi < t < \pi$  olarak verilen fonksiyonun kompleks Fourier serisini bulalım,

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imt}$$

formunda bir kompleks serisi elde edilmelidir.  $c_m$  Fourier katsayıları,

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t e^{-imt} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(t-im)t} dt$$

$$= \left[ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(1-im)} e^{(1-im)t} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1+im}{1+m^2} [e^\pi e^{-im\pi} - e^{-\pi} e^{im\pi}]$$

olup

$$e^{\pm im\pi} = \cos m\pi \pm i \sin m\pi = (-1)^m$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$c_m = \frac{(-1)^m}{2\pi} \frac{1+im}{1+m^2} [e^\pi - e^{-\pi}] = (-1)^m \left( \frac{1+im}{1+m^2} \right) \sinh \pi$$

olur. O halde istenilen kompleks Fourier serisi,

$$f(t) = e^t = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imt} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \left( \frac{1+im}{1+m^2} \right) e^{imt}$$

biçiminde elde edilir.

## 2.7. Fourier İntegrali

Periyodu  $T = 2K$  olan periyodik bir  $f(x)$  fonksiyonunun Fourier serisinden hareket ederek periyodunun sonsuza götürülmesi halindeki durumunu inceleyelim.  $f(x)$ ,  $(-\infty, \infty)$  aralığında parçalı düzgün bir fonksiyon olsun.  $[-K, K]$  sonlu alt aralığında  $f(x)$ ' in Fourier serisi ve Fourier katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{K} + b_n \sin \frac{n\pi x}{K} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K f(u) du$$

$$a_n = \frac{1}{K} \int_{-K}^K f(u) \cos \frac{n\pi u}{K} du \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7.1)$$

$$b_n = \frac{1}{K} \int_{-K}^K f(u) \sin \frac{n\pi u}{K} du \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

(2.7.1) katsayıları, (2.5.1) 'de yerine konulursa,

$$f(x) = \frac{1}{2K} \int_{-K}^K f(u) du + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{K} \int_{-K}^K f(u) \cos \frac{n\pi u}{K} \right] \cos \frac{n\pi x}{K} du + \left[ \frac{1}{K} \int_{-K}^K f(u) \sin \frac{n\pi u}{K} \right] \sin \frac{n\pi x}{K} du \quad (2.7.2)$$

elde edilir.

$\alpha_n = \frac{n\pi}{K}$  denirse  $\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{K}$  olacağından, (2.7.2) eşitliği

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-K}^K f(u) du \right) \Delta\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-K}^K f(u) \cos (\alpha_n u) du \right] \cos (\alpha_n x) + \left[ \frac{1}{\pi} \int_{-K}^K f(u) \sin (\alpha_n u) du \right] \sin (\alpha_n x) \Delta\alpha \quad (2.7.3)$$

şekline dönüşür. Bu ifadenin  $\Delta\alpha \rightarrow 0$  için limitini alalım. Bu durumda  $K \rightarrow \infty$  olur ve  $[-K, K]$  aralığı reel eksene dönüşür.

Eğer,  $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) du$  nin yakınsak olduğunu kabul edersek,

$$\frac{1}{2\pi} \left( \int_{-K}^K f(u) du \right) \Delta\alpha \rightarrow 0$$

olur.

Böylece (2.7.3)'ün sağındaki Riemann toplamı  $\Delta\alpha \rightarrow 0$  için belirli integrale dönüşecek ve  $f$ 'nin sağladığı koşullar altında (2.7.3) ifadesi

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos (\alpha u) du \right) \cos \alpha x + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin (\alpha u) du \right) \sin \alpha x \right] d\alpha \quad (2.7.4)$$

şeklinde ifade edilecektir ( Altın, 2011).

Buradan görülmektedir ki belirli koşulları sağlayan bir  $f$  fonksiyonunun periyodik iken Fourier serisi ile temsil edilebilme, periyodun sonsuza gitmesi halinde ise tüm  $x$  ler için tanımlı olan (2.7.4) integral gösterimi ile temsil edilmektedir.

Tanım 2.7.1.  $f(x)$  fonksiyonu tüm reel  $x$  ler için tanımlı ve  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  integrali yakınsak olsun. O takdirde  $f$ 'nin Fourier integrali;

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} [A(\alpha) \cos(\alpha x) + B(\alpha) \sin(\alpha x)] d\alpha \quad (2.7.5)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $A(\alpha)$  ve  $B(\alpha)$  Fourier integral katsayıları,

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(\alpha u) du \text{ ve } B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(\alpha u) du \quad (2.7.6)$$

biçiminde ifade edilir (Kreyszig, 2015).

Teorem 2.7.2.

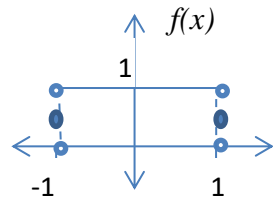
$f$  fonksiyonu  $(-\infty, \infty)$  aralığında parçalı sürekli ve  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  integrali yakınsak olsun. O takdirde  $f$ 'nin Fourier integrali her  $x$  noktasında  $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$ 'ye yakınsar. Özel halde eğer  $f$  fonksiyonu  $x$  noktasında sürekli ise Fourier integrali  $f(x)$  değerine yakınsar.

Bu teoremde anlaşılmaktadır ki  $(-\infty, \infty)$  aralığındaki Fourier serileri ile tüm reel eksendeki Fourier integrali benzer yakınsaklık özelliklerine sahiptir (Altın, 2011).

Örnek 2.7.3

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunun Fourier integralini bulalım,



Şekil 2.9.  $f(x)$  in grafiği

Şekilde grafiği verilen bu fonksiyonu Fourier integrali ile ifade edeceğiz.

$f(x)$  fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-1}^1 1 dx = 2 \text{ olup integral yakınsaktır.}$$

Fourier integral katsayılarını hesaplayalım.

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(\alpha u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(\alpha u) du = \frac{2 \sin \alpha}{\pi \alpha}$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin(\alpha u) du = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin(\alpha u) du = 0$$

olduğundan  $f(x)$ 'in Fourier integrali,

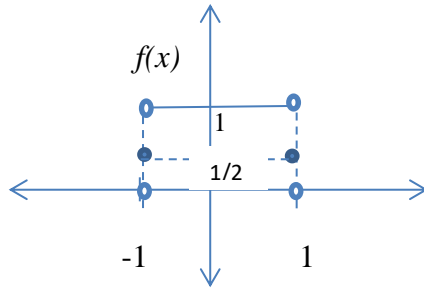
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha \cos(\alpha x)}{\alpha} d\alpha \quad (2.7.7)$$

Teorem 2.7.2'den dolayı bu integral  $x = -1$  ve  $x = 1$  düzgün süreksizlik noktasında aşağıda verilen değere yakınsar.

$$f(-1) = (f(-1^+) + f(-1^-))/2 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = (f(1^+) + f(1^-))/2 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

Buna göre (2.7.4) Fourier integralinin tanımlandığı  $f(x)$ 'in grafiği aşağıdaki gibi olacaktır.



Şekil 2.9.(b).  $f(x)$  in grafiği.

(2.7.7) ve Teorem 2.7.2 den dolayı  $x \geq 0$  için

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\alpha x) \sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} \pi/2, & 0 \leq x < 1 \\ \pi/4, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

yazılabilir ki bu integrale Dirichlet süreksiz çarpımı denir (Kreyszig, 2015).

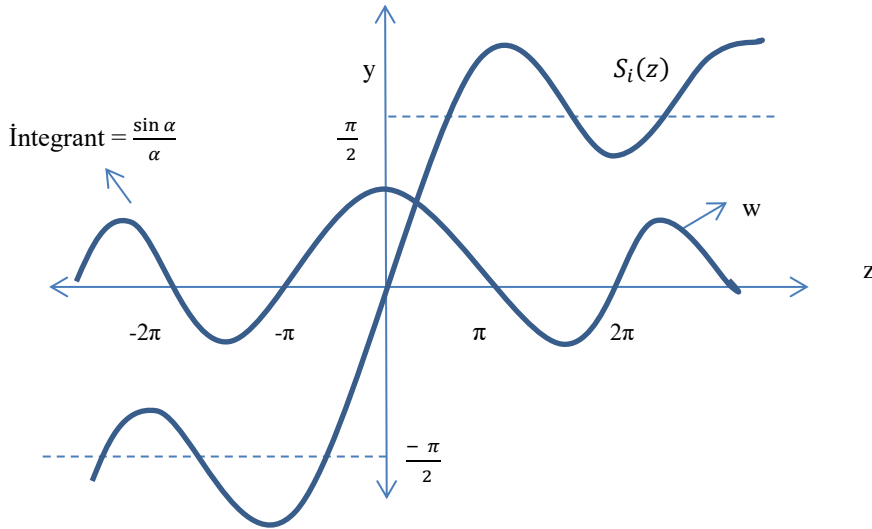
Özel halde,  $x = 0$  için

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2} \quad (2.7.8)$$

olur. (2.7.8) integrali sinüs integrali olarak bilinen

$$S_i(z) = \int_0^z \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha, \quad z \in \mathbb{R} \quad (2.7.9)$$

$z \rightarrow \infty$  için limitidir.  $S_i(z)$ 'nin grafiği



Şekil 2.10.  $S_i(z)$ 'nin grafiği

Bir  $f(x)$  fonksiyonuna ait  $A(\alpha)$  ve  $B(\alpha)$  Fourier integral katsayılarının (2.7.6) ifadeleri (2.7.5) de yerine konulursa

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(u) [\cos(\alpha u) \cos(\alpha x) + \sin(\alpha u) \sin(\alpha x)] du \right) d\alpha$$

ya da

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos(\alpha(u-x)) du d\alpha \quad (2.7.10)$$

Tanım 2.7.4. Kabul edelim ki  $x \geq 0$  için tanımlı olan  $f(x)$  fonksiyonu için ve

$\int_0^{\infty} |f(x)| dx$  integrali yakınsak olsun.  $f(x)$  fonksiyonu  $(-\infty, \infty)$  simetrik aralığına tek fonksiyon olarak genişletilir ve bu  $F_T(x)$  ile gösterilirse

$$F_T(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

olur.  $F_T(x)$  fonksiyonuna  $f(x)$ 'in tek fonksiyon olarak genişletilmesi denir.

Bu halde  $F_T(x) \cdot \cos(\alpha u)$  tek fonksiyon ve  $F_T(x) \cdot \sin(\alpha u)$  çift fonksiyon olduğundan  $F_T(x)$  fonksiyonunun Fourier integrali ya da  $f(x)$ 'in Fourier sinüs integrali için katsayılar

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_T(u) \cos(\alpha u) du = 0$$

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_T(u) \sin(\alpha u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_T(u) \sin(\alpha u) du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \sin(\alpha u) du \end{aligned}$$

biçiminde olurlar. Böylece  $[0, \infty)$  yarımlarında  $f(x)$ 'in Fourier sinüs integrali

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} B(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha \quad (2.7.11)$$

biçiminde yazılır.

Burada

$$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \sin(\alpha u) du \quad (2.7.12)$$

olur. Eğer  $f(x)$ , her sonlu  $[0, L]$  aralığında parçalı sürekli ve  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$  yakınsak ise o takdirde (2.7.11) integrali her  $x > 0$  için  $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$  değerine,  $x = 0$  da ise sıfıra yakınsar.

$f(x)$ ' in Fourier sinüs integralinin diğer bir gösterimi de (2.7.12)' nin (2.7.11) ' in yerine yazılması ile

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(u) \sin(\alpha x) \sin(\alpha u) du d\alpha \quad (2.7.13)$$

elde edilir. Eğer  $[0, \infty)$  yarı aralığında verilen  $f(x)$  fonksiyonu  $(-\infty, \infty)$  simetrik aralığına çift fonksiyon olarak genişletilir ve  $F_c(x)$  ile gösterilirse

$$F_c(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

olur.

Bu halde  $F_c(u) \cdot \cos(\alpha u)$  çift fonksiyon ve  $F_c(u) \cdot \sin(\alpha u)$  tek fonksiyon olduğundan  $F_c(x)$  'in Fourier integrali ya da  $f(x)$ ' in Fourier kosinüs integrali için katsayılar,

$$A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(u) \cos(\alpha u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_c(u) \cos(\alpha u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \cos(\alpha u) du$$

$$B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_c(u) \sin(\alpha u) du = 0$$

olur.  $[0, \infty)$  yarı aralığında  $f(x)$ ' in Fourier kosinüs integrali,

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha \quad (2.7.14)$$

ile verilir.

Burada,

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \cos(\alpha u) du \quad (2.7.15)$$

dir. Eğer  $f(x)$ , her sonlu  $[0, L]$  aralığında parçalı sürekli ve  $\int_0^{\infty} |f(x)| dx$  yakınsak ise o takdirde (2.7.14) integrali her  $x > 0$  için  $\frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$  değerine,  $x = 0$  için  $f(0^+)$ ' ya yakınsar.  $f(x)$ ' in kosinüs integralinin diğer bir gösterimi,

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} f(u) \cos(\alpha x) \cos(\alpha u) du d\alpha \quad (2.7.16)$$

formülüdür.

Örnek 2.7.2.  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$

fonksiyonunun Fourier sinüs ve kosinüs integral gösterimini bulalım,

Çözüm:  $f(x)$ ' in Fourier sinüs gösterimi

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} B(\alpha) \sin(\alpha x) d\alpha$$

formundadır.  $B(\alpha)$  katsayısı,

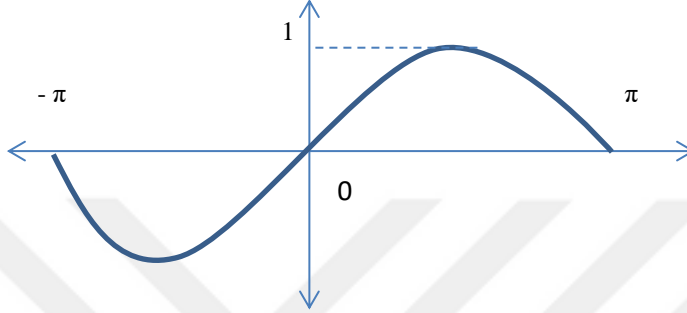
$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \sin(\alpha u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin u \sin(\alpha u) du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} [\cos(1 - \alpha) u - \cos(1 + \alpha) u] du \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(1 - \alpha) u}{1 - \alpha} - \frac{\sin(1 + \alpha) u}{1 + \alpha} \right] \Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin(1 - \alpha) \pi}{1 - \alpha} - \frac{\sin(1 + \alpha) \pi}{1 + \alpha} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\alpha \pi)}{1 - \alpha^2} \end{aligned}$$

olur.

Buradan, Fourier sinüs integrali,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha\pi)}{1-\alpha^2} \sin(\alpha x) d\alpha = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

olarak bulunur. Buradaki  $f(x)$  tek fonksiyon olarak genişletildiğinden sonuncu Fourier sinüs integrali, her  $x \in (-\infty, \infty)$  için  $f(x)$ 'in tek genişlemesi olan  $F_T(x)$ 'e yakınsar.



Şekil 2.11.  $f(x)$ 'in tek genişlemesi olan  $F_T(x)$ 'in grafiği

Şimdi  $f(x)$ 'in Fourier kosinüs integralini bulalım.  $f(x)$ 'in Fourier kosinüs integrali

$$f(x) \sim \int_0^{\infty} A(\alpha) \cos(\alpha x) d\alpha$$

formundadır.  $A(\alpha)$  katsayısı,

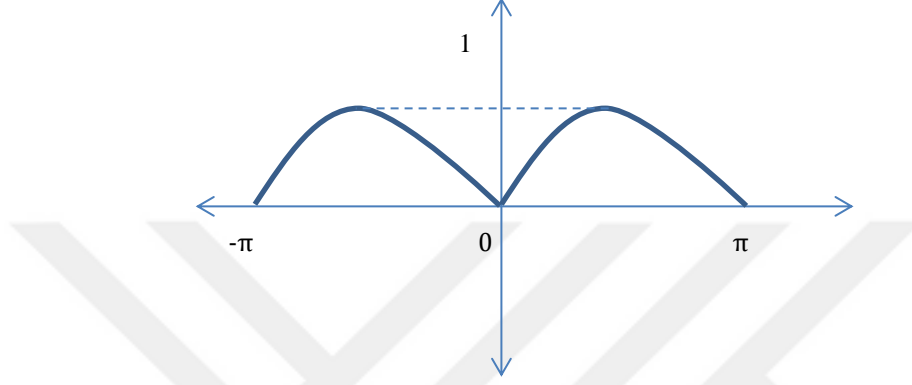
$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(u) \cos(\alpha u) du = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin u \cos(\alpha u) du \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\sin(1+\alpha)u + \sin(1-\alpha)u) du \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(1+\alpha)u}{1+\alpha} + \frac{\cos(1-\alpha)u}{1-\alpha} \right] \Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1+\cos(\alpha\pi)}{1+\alpha} + \frac{1+\cos(\alpha\pi)}{1-\alpha} \right] = \frac{2}{\pi} \frac{1+\cos(\alpha\pi)}{1-\alpha^2} \end{aligned}$$

olur.

Fourier kosinüs integrali,

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos(\alpha\pi)}{1 - \alpha^2} \cos(\alpha x) d\alpha = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

olarak bulunur. Bu integral her  $x \in (-\infty, \infty)$  için  $f(x)$  fonksiyonunun çift genişletmesi olan  $F_C(x)$ ' e yakınsar.



Şekil 2.12.  $f(x)$ 'in çift genişletmesi olan  $F_C(x)$  grafiği

## 2.8 Kompleks Fourier İntegralleri

Reel eksenin tüm noktalarında tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun Fourier integrali,

$$f(x) = \int_0^{\infty} [A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin(\alpha x)] d\alpha$$

formülü ile verilir (Altın, 2011).

Bu formülde,  $\cos(\alpha x)$  ve  $\sin(\alpha x)$  yerine kompleks üstel formları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \left[ A(\alpha) \frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{2} + B(\alpha) \frac{e^{i\alpha x} - e^{-i\alpha x}}{2i} \right] d\alpha \\ &= \int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (A(\alpha) - iB(\alpha)) e^{i\alpha x} + \frac{1}{2} (A(\alpha) + iB(\alpha)) e^{-i\alpha x} \right] d\alpha \\ &= \int_0^{\infty} [C(\alpha) e^{i\alpha x} + \overline{C(\alpha)} e^{-i\alpha x}] d\alpha \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

elde edilir.

Fourier integral katsayılarından,

$$\begin{aligned} C(\alpha) &= \frac{1}{2}(A(\alpha) - iB(\alpha)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\cos(\alpha u) - i \sin(\alpha u)] du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u} du \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

$$\begin{aligned} \overline{C(\alpha)} &= \frac{1}{2}(A(\alpha) + iB(\alpha)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)[\cos(\alpha u) + i \sin(\alpha u)] du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha u} du = C(-\alpha) \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \overline{C(\alpha)} e^{-i\alpha x} d\alpha &= \int_{-\infty}^0 C(-\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \\ &= \int_0^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} d(-\alpha) = \int_{-\infty}^0 C(\alpha) e^{i\alpha x} d(\alpha) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2.8.1) eşitliğinden aşağıdaki eşitlik yazılır.

$$f(x) = \int_0^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} d(\alpha) + \int_{-\infty}^0 C(\alpha) e^{i\alpha x} d(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} d(\alpha)$$

O halde  $f'$  nin kompleks Fourier integrali,

$$f(x) \sim \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha x} d(\alpha) \quad (2.8.4)$$

biçiminde elde edilir; burada  $C(\alpha)$  aşağıdaki formülle verilir.

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u} du \quad (2.8.5)$$

(2.8.5)' i (2.8.4) de yerine yazarsak

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u} e^{i\alpha x} du d\alpha \quad (2.8.6)$$

bulunur.

Yani  $f$  fonksiyonunun kompleks Fourier integrali,

$$f(x) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha(u-x)} du d\alpha$$

formülü ile ifade edilir.

*Örnek 2.8.1.*  $f(t) = e^{-|t|}$ ,  $-\infty < t < \infty$

fonksiyonunun kompleks Fourier integralini bulalım,

*Çözüm:* Verilen fonksiyon,

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0 \\ e^t, & t < 0 \end{cases}$$

şeklinde yazarak

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt + \int_{-\infty}^0 e^t dt = 2$$

elde ederiz. Bu nedenle  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$  integrali yakınsaktır.  $f(t)$ 'in kompleks Fourier integrali

$$f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} C(\alpha) e^{i\alpha t} d(\alpha)$$

formundadır.

$C(\alpha)$  katsayısı,

$$C(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-u} e^{-i\alpha u} du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^u e^{-i\alpha u} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-(1+i\alpha)u} du + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 e^{(1-i\alpha)u} du$$

$$= \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{-1}{1+i\alpha} e^{-(1+i\alpha)u} \right) \right]_0^{\infty} + \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1-i\alpha} e^{(1-i\alpha)u} \right) \right]_{-\infty}^0$$

$$0 \quad -\infty$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{1+i\alpha} + \frac{1}{1-i\alpha} \right] = \frac{1}{\pi(1+\alpha^2)}$$

olduğundan ve  $f(t) = e^{-|t|}$  fonksiyonu her  $t \in \mathbb{R}$  için sürekli olduğundan Fourier integrali her yerde  $f(t)$ 'ye yakınsar ve böylece verilmiş  $f(t) = e^{-|t|}$  fonksiyonunun kompleks Fourier integrali,

$$f(t) = e^{-|t|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{i\alpha t} d(\alpha)$$

olarak bulunur.



### 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Tez çalışmamızda literatürde bilinen aşağıdaki materyal ve yöntemlerden yararlanılmıştır. Sınır Değer Problemleri ele alınarak Sturm-Liouville yöntemi üzerinde durulmuş, özdeğer ve özfonksiyonlar problemler üzerinde incelenmiştir. Özfonksiyonların dikliği ve açılım özellikleri üzerinde durulmuştur ve kaynaklar kısmında yer alan çalışmalardan yararlanılmıştır.

#### 3.1.Sınır Değer Problemi

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  ( $\varphi_n \neq 0$ ) sabit reel sayılar olmak üzere bir  $[c, d]$  aralığında tanımlı,

$$L(y) = \varphi_n y^{(n)} + \dots + \varphi_2 y'' + \varphi_1 y' + \varphi_0 y = 0 \quad (3.1.1)$$

sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada,  $y$  fonksiyonu  $[c, d]$  aralığında  $n$ -yinci mertebeye kadar sürekli türevlenebilen ( $y \in C^{(n)}$ ) bir fonksiyondur.

Bu  $y$  fonksiyonu ve  $(n-1)$  inci mertebeye kadar türevlerinin  $c \leq x \leq d$  aralığının sınır noktalarında ki değerleri,

$$y(c), y'(c), \dots, y^{(n-1)}(c); y(d), y'(d), \dots, y^{(n-1)}(d)$$

olmak üzere bu ifadelerin lineer birleşiminden oluşan, bu sistemi sade olarak yazarsak,

$$L_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, m \quad (3.1.2)$$

(3.1.2) sistemine (3.1.1) diferansiyel denkleminin sınır şartları denir.

$$L(y) = \varphi_n y^{(n)} + \dots + \varphi_2 y'' + \varphi_1 y' + \varphi_0 y = 0$$

$$L_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, \dots, m \quad (3.1.3)$$

şeklinde ifade edilen probleme homojen sınır değer problemi denir (Kandemir, 2015).

Tanım 3.1.1.

$f(x)$ ,  $[c, d]$  aralığında sürekli bir fonksiyon ve  $f_v$  sabit sayılar olmak üzere,

$$L(y) = f(x)$$

$$L_v(y) = f_v, \quad v = 1, 2, \dots, m$$

sistemine homojen olmayan sınır değer problemi denir (Kandemir, 2015).

Tanım 3.1.2. Homojen sınır değer probleminin daima bir  $y = 0$  çözümü vardır. Bu çözüme problemin aşıkâr çözümü denir. Problemin sıfırdan farklı çözümlerine de aşıkâr olmayan çözümleri adı verilir.

(3.1.1) denkleminin genel çözümünün

$$y = k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + \dots + k_n y_n$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz. Bu genel çözümü, (3.1.1) denkleminin (3.1.2) sınır şartlarında yerine yazarsak,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  bulunması gereken sabitler olmak üzere  $m$ -tane denklemden oluşan,

$$k_1 L_1(y_1) + k_2 L_1(y_2) + \dots + k_n L_1(y_n) = 0$$

$$k_1 L_2(y_1) + k_2 L_2(y_2) + \dots + k_n L_2(y_n) = 0 \quad (3.1.4)$$

.....

$$k_1 L_m(y_1) + k_2 L_m(y_2) + \dots + k_n L_m(y_n) = 0$$

homojen denklem sistemi elde edilir.

(3.1.4) sisteminin katsayılar matrisinin olduğu,

$$\Delta = \begin{pmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & \dots & L_1(y_n) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & \dots & L_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_m(y_1) & L_m(y_2) & \dots & L_m(y_n) \end{pmatrix} \quad (3.1.5)$$

görülür.

Tanım 3.1.3. (3.1.5) ile verilen  $\Delta$  matrisinin rankına (3.1.3) sınır değer probleminin rankı denir. Burada rank  $\Delta = r$  ve  $L(y)$  diferansiyel denkleminin mertebesi  $n$  olmak üzere,

i) (3.1.3) sınır değer probleminin  $(n-r)$  tane lineer bağımsız çözümü vardır. Yani çözüm uzayının boyutu  $(n-r)$  dir.

ii) (3.1.3) sınır değer probleminin aşıkâr olmayan çözümünün olması için gerek yeter şart  $r < n$  ( $n-r > 0$ ) olmasıdır.

iii)  $m < n$  ise (3.1.3) sınır değer probleminin aşıkâr olmayan çözümü vardır. O halde denklem sayısının bilinmeyen sayısından az olması durumunda problemlerin daima aşıkâr olmayan çözümlere sahiptir.

iv)  $m > n$  ise (3.1.3) sınır değer probleminin aşıkâr olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart  $r < n$  olmasıdır.

v)  $m = n$  olması halinde problemin sıfırdan farklı çözümünün olması için gerek ve yeter şart  $\det \Delta \neq 0$  olmasıdır. Eğer  $\det \Delta \neq 0$  ise sistemin sadece aşıkâr çözümü vardır. Çünkü  $\det \Delta \neq 0$  ise  $\Delta$  matrisinin tersi vardır, bu nedenle  $\Delta Y = 0$  denkleminde sadece bir tek  $Y = 0$  çözümü elde edilir.

Buna göre,  $m = n$  olması halinde (3.1.3) sınır değer probleminin ya aşıkâr çözümü vardır ya da sonsuz sayıda aşıkâr olmayan çözümü vardır (Kandemir, 2015).

Örnek 3.1.4

$$y'' + 3y' - 4y = 0 \quad (3.1.6)$$

$$L_1(y) = y(0) = 0$$

$$L_2(y) = y'(1) = 0 \quad (3.1.7)$$

sınır değer probleminin çözümünü bulalım. (3.1.6) denkleminin lineer bağımsız çözümleri,

$$y_1 = e^{-4x} \text{ ve } y_2 = e^x$$

olduğundan genel çözümü

$$y = c_1 \cdot e^{-4x} + c_2 \cdot e^x$$

ve türevi

$$y' = -4c_1 \cdot e^{-4x} + c_2 \cdot e^x$$

şeklinde bulunur. Sınır şartları yerine yazılırsa,

$$c_1 L_1(y_1) + c_2 L_1(y_2) = 0 \quad c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 L_2(y_1) + c_2 L_2(y_2) = 0 \quad -4c_1 e^{-4} + c_2 e = 0$$

olacağından  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerine göre,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4e^{-4} & e \end{vmatrix} = e + 4e^{-4} \neq 0$$

olduğu için (3.1.6) ve (3.1.7) sınır değer probleminin  $y = 0$  aşıkâr çözümü vardır.

Tanım 3.1.5.  $[a, b]$  aralığında,

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (3.1.8)$$

İkinci mertebeden diferansiyel denkleminin

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = \varphi_1$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = \varphi_2 \quad (3.1.9)$$

koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine homojen olmayan Sturm-Liouville problemi denir.

Burada,  $p(x)$ ,  $q(x)$  ve  $f(x)$ ,  $[a, b]$  aralığında gereken özelliklere sahip, belli fonksiyonlar  $a_1$  ve  $a_2$  ( $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$ ),  $b_1$  ve  $b_2$  ( $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ ),  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  belli gerçel sabitler,  $y(x)$  ise aranan fonksiyondur. (3.1.9) koşullarına ikinci mertebeden denklem için sınır koşulları, (3.1.8) denkleminin (3.1.9) çözümünün bulunmasına ise sözü edilen denklemin sınır değer problemi denir (Halilov, 2003).

(3.1.9) koşulları, özel  $a_2 = b_2 = 0$  durumunda, birinci sınır koşulları diye adlandırılan

$$y(a) = \varphi_1/a_1, \quad y(b) = \varphi_2/b_1 \quad \text{veya} \quad y(a) = \beta_1, \quad y(b) = \beta_2 \quad (3.1.10)$$

koşullara  $a_1 = b_1 = 0$  durumunda ise ikinci sınır koşulları diye adlandırılan,

$$y'(a) = \varphi_1/a_2, \quad y'(b) = \varphi_2/b_2 \quad \text{veya} \quad y'(a) = \gamma_1, \quad y'(b) = \gamma_2 \quad (3.1.11)$$

koşullara dönüşür. Bu yüzden (3.1.9) sınır koşullarına üçüncü sınır koşulları denir.

Bilindiği gibi (3.1.8) denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = y_T(x) + \tilde{y}(x) \quad \text{yani} \quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \tilde{y}(x) \quad (3.1.12)$$

şeklindedir; burada  $\tilde{y}(x)$ , ele alınan denklemin özel çözümü,  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  ise uygun

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (3.1.13)$$

homojen denkleminin lineer bağımsız çözümleridir.

(3.1.13) eşitliğinde  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerini belirlemek için (3.1.10) sınır koşullarını kullanalım.

$$c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = \beta_1 - \tilde{y}(a)$$

$$c_1 y_1(b) + c_2 y_2(b) = \beta_2 - \tilde{y}(b) \quad (3.1.14)$$

Bu halde elde edilen doğrusal cebirsel denklem sisteminin çözümü için,

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} \beta_1 - \tilde{y}(a) & y_2(a) \\ \beta_2 - \tilde{y}(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y_1(a) & \beta_1 - \tilde{y}(a) \\ y_1(b) & \beta_2 - \tilde{y}(b) \end{vmatrix}$$

determinantına bağlı olarak, iki durum söz konusudur.

1.Esas Durum;  $\Delta \neq 0$  ise (3.1.14) sisteminin

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

olmak üzere tek çözüm vardır. O halde (3.1.8), (3.1.9) sınır değer probleminin (3.1.12) biçiminde olmak üzere tek çözümü vardır. Esas durumda,

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0$  homojen probleminin yalnız  $y(x) = 0$  çözümü vardır.

2.Tekil durum:  $\Delta = 0$  ise  $\tilde{y}(x)$  özel çözümü,  $f(x)$ 'e bağlıdır ve  $\beta_1, \beta_2$ 'ye bağlı olarak,  $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0$  ve  $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = 0$  biçiminde iki durum vardır,

i)  $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0$  olduğundan, (3.1.14) sisteminin, aynı zamanda (3.1.8), (3.1.9) sınır değer probleminin çözümü yoktur.

ii)  $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = 0$  ( $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ ) olduğundan (3.1.14) sisteminin, aynı zamanda (3.1.8), (3.1.9) sınır değer probleminin sonsuz sayıda çözümü vardır (Halilov, 2003).

*Örnek 3.1.6.*  $y'' + 4y = 3 \sin x$  denkleminin

a)  $y(0) = 1, y(\frac{\pi}{4}) = -2$  ve b)  $y(0) = 1, y(\pi) = 1$

sınır koşullarını sağlayan çözümlerini bulalım.

$$y'' + 4y = 0 \text{ ise } k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k = \pm 2i$$

$$y_1(x) = \cos 2x, \quad y_2(x) = \sin 2x$$

$$y_T(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

homojen çözümün yanında verilen denklemin özel çözümünün,

$$\tilde{y}(x) = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x$$

şeklinde aranacağı açıktır.

Burada  $A=0$  olacağı karakteristik denklemin köklerinin biçiminden gelmektedir. Bu nedenle,

$$\tilde{y}(x) = B \cdot \sin x, \quad \tilde{y}''(x) = -B \sin x$$

olur.

Son ifadeleri denklemde yazıp  $B$ 'yi belirleyelim.

$$-B \sin x + 4B \sin x = 3B \sin x \Rightarrow B = 1$$

böylece

$$\tilde{y}(x) = \sin x,$$

özel çözümü elde edilir.

Genel çözümü ise,

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \sin x$$

olur.

Şimdi sınır şartlarını, göz önüne alıp  $c_1, c_2$ 'nin varlığını inceleyelim.

$$a) \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$$

sınır şartlarından,

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + \sin 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$$

$$c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$$

Yani sistemin tek bir çözümü vardır. O zaman verilen sınır değer probleminin de

$$y(x) = \cos 2x - \left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right) \sin 2x + \sin x$$

olmak üzere tek çözümü vardır.

b) Sınır koşulları göz önüne alırsak,

$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 1$$

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 1$$

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + 0 = 1 \quad c_2 \text{ keyfi}$$

$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$  olur. Yani sistemin  $(1, c_2)$  olmak üzere sonsuz sayıda çözümü vardır. Bu durumda verilmiş sınır değer probleminin

$$y(x) = c_2 \cdot \sin 2x + \sin x$$

biçiminde yazılabilen sonsuz sayıda çözümü vardır.

### 3.2. Sturm- Liouville Problemleri

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \quad (c < x < d) \quad (3.2.1)$$

$$A_1 y(c) - A_2 y'(c) = 0, \quad B_1 y(d) + B_2 y'(d) = 0 \quad (3.2.2)$$

şeklindeki sınır değer problemine Sturm-Liouville problemi denir. Burada hem  $A_1$  ve  $A_2$  sayılarından en az biri, hem de  $B_1, B_2$  sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. (3.2.1) denkleminin (3.2.2) sınır koşullarında sıfırdan farklı çözümünün olmasını sağlayan  $\lambda$  parametresinin alabileceği değerlere özdeğer, bu özdeğere karşılık gelen sıfırdan farklı çözüm fonksiyonlarına özfonksiyon denir (Edwards & Penney, 2011).

### 3.3. Sturm-Liouville Probleminin Özdeğerleri

Teorem 3.3.1 (3.2.1) denklemindeki  $p(x), p'(x), q(x)$  ve  $r(x)$  fonksiyonları  $[c, d]$  aralığında sürekli ve  $[c, d]$  aralığının her noktasında  $p(x) > 0$  ve  $r(x) > 0$  olsun. Bu durumda (3.2.1) Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri, artan

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \dots \quad (3.3.1)$$

reel sayı dizisini oluşturmaktadır.

Ayrıca,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty \quad (3.3.2)$$

eşitliği sağlanır.

Her  $\lambda_n$  özdeğerine, sabit katlar hariç, yalnız bir  $y_n(x)$  özfonksiyonu karşılık gelir. Ayrıca her  $x \in [c, d]$  için  $q(x) \geq 0$  ve (3.2.2) koşullarındaki  $A_1, A_2, B_1$  ve  $B_2$  katsayıları negatif değilse tüm özdeğerler de negatif değildir. Teorem 3.3.1' in şartlarını sağladığında (3.2.1) ve (3.2.2) problemlerine Regüler Sturm - Liouville problemi, aksi takdirde singüler Sturm - Liouville problemi denir (Edwards& Penney, 2011).

*Örnek 3.3.2.*  $y'' + \lambda y = 0,$

$$y(0) = 0 \quad \text{ve} \quad y(l) = 0$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının varlığını inceleyelim,

$p(x) = 1, q(x) = 0, r(x) = 1, a = 0, b = l, a_1 = b_1 = 1, a_2 = b_2 = 0$  dir. Ele alınan denklemin çözümünü  $y = e^{kx}$  şeklinde arayıp karakteristik denklemini  $k^2 + \lambda = 0$  olarak buluruz. Şimdi  $\lambda < 0, \lambda = 0$  ve  $\lambda > 0$  olmak üzere üç alternatif durumu ayrı ayrı inceleyelim.

a)  $\lambda < 0$  durumu : Bu durumda,  $k_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda}$  (gerçek kökler) olduğundan, ele alınan denklemin özel ve genel çözümleri sırasıyla,

$$y_1(x) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad y_2(x) = e^{\sqrt{-\lambda}x}, \quad y(x) = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

olarak yazılabilir. Burada sınır koşullarını göz önüne alarak,  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri için

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}l} = 0$$

sistemini, sonuçta ise  $c_1 = c_2 = 0$  değerlerini buluruz. Demek ki,  $\lambda < 0$  durumunda, ele alınan problemin yalnız  $y(x) = 0$  aşıkâr çözümü vardır, yani özdeğeri yoktur;

b)  $\lambda = 0$  durumu: Bu durumda,

$$y'' = 0 \Rightarrow y(x) = c_1 x + c_2$$

olur ve sınır koşulları göz önüne alındığında yine  $c_1 = c_2 = 0$  olarak bulunur.

Demek ki,  $\lambda = 0$  özdeğer değildir.

c)  $\lambda > 0$  durumu : Bu durumda,  $k_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda} = \pm i\sqrt{\lambda}$  (sanal kökler) olduğundan, ele alınan denklemin özel ve genel çözümleri sırasıyla,

$$y_1(x) = \cos \sqrt{\lambda} x, \quad y_2(x) = \sin \sqrt{\lambda} x, \quad y(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

olarak yazılabilir. Burada sınır koşullarını göz önüne alırsak,  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri için

$$c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = 0$$

$$c_1 \cos \sqrt{\lambda} l + c_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

olur.

Buradan da  $c_1 = 0$  ve  $c_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0$  elde edilir. Son eşitlikte  $c_2 = 0$  olamaz ( aksi takdirde, yine  $y(x) = 0$  aşıkâr çözüm elde edilir.)

Bu yüzden,

$$\sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

olması gerekir (  $c_2 \neq 0$ ).

Son eşitlikten,

$$\sqrt{\lambda} l = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olarak bulunur. Demek ki,  $\lambda > 0$  durumunda, ele alınan problemin  $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$  biçiminde sonsuz sayıda özdeğeri vardır. Bu özdeğerlere karşılık özfonksiyonları  $y_n(x)$  ile gösterirsek,

$$y_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

biçiminde sonsuz sayıda özfonksiyonu elde ederiz.

### 3.4. Özfonksiyonların Dikliği

Teorem 3.4.1. (3.2.1) ve (3.2.2) Sturm - Liouville problemindeki  $p$ ,  $q$  ve  $r$  fonksiyonlarının Teorem 3.3.1' i hipotezlerini sağladığını, yani regüler Sturm-Liouville problemi olduğunu varsayalım.  $y_m(x)$  ve  $y_n(x)$  farklı  $\lambda_m$  ve  $\lambda_n$  özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. O zaman,

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x) dx = 0 \quad (3.4.1)$$

eşitliği sağlanır (Kreyzsis, 2015).

*İspat:* (3.2.1) ve (3.2.2) probleminin  $\lambda_m$  ve  $\lambda_n$  özdeğerlerinin ilgili özfonksiyonları  $y_m(x)$  ve  $y_n(x)$  sırası ile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] - q(x)y_m + \lambda_m r(x)y_m &= 0 \\ \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] - q(x)y_n + \lambda_n r(x)y_n &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

denklemini sağlayacaktır.

Eğer birinci denklemi  $y_n(x)$  ile ikinci denklemi  $y_m(x)$  ile çarparsak ve daha sonra elde edilecek eşitlikleri birbirinden çıkarırsak,

$$y_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] - y_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + (\lambda_m - \lambda_n) r(x) y_m y_n = 0$$

bulunur.

Böylece,

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) y_m y_n r(x) &= y_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] - y_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[ p(x) \left( y_m \frac{dy_n}{dx} - y_n \frac{dy_m}{dx} \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Son iki eşitlik basit türev alma kurallarından kolayca görülür.

Bu eşitliğin her iki tarafının a'dan b'ye kadar integralini alırsak

$$\begin{aligned}
 (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x) dx &= \int_a^b \left[ \frac{d}{dx} \left[ p(x) \left( y_m \frac{dy_n}{dx} - y_n \frac{dy_m}{dx} \right) \right] \right] dx \\
 &= \left[ p(x) (y_m(x) y_n'(x) - y_n(x) y_m'(x)) \right] \Big|_a^b \quad (3.4.3)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Diğer taraftan (3.2.2) sınır koşullarının birincisine göre

$$\alpha_1 y_m(a) - \alpha_2 y_m'(a) = 0, \quad \alpha_1 y_n(a) - \alpha_2 y_n'(a) = 0$$

elde edilir.

Bu eşitlikleri  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  bilinmeyenlerine göre lineer denklem sistemi olarak düşünelim.  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  nin aynı anda sıfır olmayacaklarını hatırlarsak bu denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün mevcut olduğunu söyleyebiliriz. Bu da  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  nin katsayılarından oluşan determinantın sıfıra eşit olmasını gerektirir. Yani,

$$y_m(a) y_n'(a) - y_n(a) y_m'(a) = 0$$

dır.

Benzer şekilde (3.2.2) koşulları

$$y_m(a) y_n'(a) - y_n(a) y_m'(a) = 0$$

olmasını gerektirir.

Bunları (3.4.3) eşitliğinin sağ tarafında dikkate alırsak,

$$\left[ p(x) (y_m(x) y_n'(x) - y_n(x) y_m'(x)) \right] \Big|_a^b = 0$$

elde ederiz.  $\lambda_m \neq \lambda_n$  olduğundan (3.4.1) sağlanır. Teorem ispatlanmış olur.

### 3.5. Özfonksiyonların Açılımları

Tanım 3.5.1.  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  fonksiyonları (3.2.1) ve (3.2.2) regüler Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları olmak üzere,  $f(x)$  fonksiyonunun  $[a, b]$  aralığında,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \varphi_m(x) \quad (3.5.1)$$

özfonksiyon serisi biçiminde gösterilebilir olduğunu varsayalım.  $k_1, k_2, k_3, \dots$  katsayıları belirlemek için önce (3.5.1) eşitliğinin her iki tarafını  $\varphi_n(x) r(x)$  ile çarpalım, daha sonra elde edilen eşitliğin  $a$ 'dan  $b$ 'ye kadar integralini alalım.

O halde, (3.5.1)'in sağ tarafındaki serinin terim terim integrallenebilir olması durumunda,

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) r(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} k_m \int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) r(x) dx \quad (3.5.2)$$

eşitliğini elde ederiz. Özfonksiyonların (3.4.1) diklik özelliğinden yararlanarak (3.5.2)'nin sağ tarafındaki serinin  $m = n$  için hesaplanan terimi hariç diğer tüm terimlerinin sıfır olduğunu görürüz. Bu nedenle (3.5.2) eşitliği

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) r(x) dx = k_n \int_a^b [\varphi_n(x)]^2 r(x) dx$$

şeklini alır.

Buradan da;

$$k_n = \frac{\int_a^b f(x) \varphi_n(x) r(x) dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2 r(x) dx} \quad (3.5.3)$$

elde edilir. Böylece,  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$  katsayılarının (3.5.3) ile tanımlanması şartı ile  $f(x)$  fonksiyonu (3.5.1) özfonksiyonlar serisine açılmış olur.

Örnek 3.5.2.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (0 < x < \pi)$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

Sturm – Liouville problemini göz önüne alalım. Bu problem için  $r(x) = 1$  ve özfonksiyonlar  $\varphi_n(x) = \sin nx$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) dir. Bu durumda, (3.5.3) formülünden,

$$k_n = \frac{\int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx}{\int_0^\pi \sin^2 nx \, dx}$$

bulunur.

$$\int_0^\pi \sin^2 nx \, dx = \frac{\pi}{2},$$

olduğundan

$$k_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx \, dx$$

elde edilir. Bu son ifade sinüs katsayıları formülüdür ve buna göre, (3.5.1) özfonksiyon serisi,  $f(x)$  fonksiyonunun  $[0, \pi]$  aralığı üzerinde bilinen

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin nx$$

Fourier sinüs serisidir.

**Teorem 3.5.3.**  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$   $[a, b]$  aralığında Regüler Sturm - Liouville probleminin özfonksiyonları olsun. Eğer  $f(x)$ ,  $[a, b]$ ' de parçalı düzgün bir fonksiyon ise  $a < x < b$  için,

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} k_m \varphi_m(x)$$

(3.5.1) özfonksiyon serisi  $f'$  nin sürekli olduğu her  $x$  noktasında  $f(x)$  fonksiyonuna,  $f'$  nin süreksiz olduğu her  $x = x_i$  noktasında ise sol ve sağ limitlerinin

$$\frac{f(x_i - 0) + f(x_i + 0)}{2}$$

ortalama değerine yakınsar (Edwards & Penney, 2011).

### 3.6. Özfonksiyonların Sıfırları

Tanım 3.6.1. Regüler Sturm - Liouville probleminin  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  özdeğerlerine karşılık gelen her bir  $\varphi_n$  özfonksiyonunun  $a < x < b$  aralığında  $(n-1)$  tane sıfırı (özfonksiyonu sıfır yapan noktası) vardır (Kandemir, 2015).

Örnek 3.6.2. Örnek (3.3.2) de verilen probleme göre,  $[0, l]$  aralığında elde edilen

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

özdeğerine karşılık gelen

$$\varphi_n(x) = k_n \sin \frac{n\pi}{l}x$$

özfonksiyonlarını göz önüne alalım. Sinüs fonksiyonu  $\pi$  nin tamsayı katlarında sıfır olduğundan,

$$\frac{n\pi}{l}x = \pi m, \quad m = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$$

$$0 < \frac{ml}{n} < l \quad \text{olduğundan}$$

$m = 1, 2, 3, \dots$  şeklinde  $(n-1)$  tane  $m$  değeri elde edilir.

## 4. BULGULAR

Tezin bu kısmında fizik ve mühendislikte kullanılan kısmi diferansiyel denklem olan bir boyutlu dalga denkleminin çözümü aranacak ve ara yüzeyde ısı sıcaklığı ve akı süreksizliğine sahip uç uca eklenmiş iki parçalı kompozitte ısı iletim denkleminin çözümü üzerinde durulacaktır. Değişkenleri ayırma yöntemi ile çözümü ve d' Alembert yöntemiyle çözüm aranacaktır. Ayrıca dalga denkleminin uygulaması üzerinde durulacaktır.

### 4.1. Dalga Denklemi

Bu kısımda aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemini inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} , & 0 < x < L , & & t > 0 \\ u(0, t) &= 0 , & u(L, t) &= 0 , & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) , & u_t(x, 0) &= g(x) , & 0 \leq x \leq L , \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

burada  $a$  sabittir ve  $f(x)$  ve  $g(x)$  verilmiş fonksiyonlardır.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

kısmi diferansiyel denklemine dalga denklemi denir. Bu denklem ve

$$u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy}) \quad \text{ve} \quad u_{tt} = a^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

biçimindeki iki boyutlu ve üç boyutlu genellemelerinin elektromanyetik yayılım, ses ve su dalgaları gibi fiziksel problemlere uygulanabilir.

#### 4.1.1. Telin titreşimi

Dalga denkleminin bir telin titreşimlerinin uygulanmasını matematiksel modeli olarak elde edeceğiz. Tel bir keman teli gibi  $xu$ - düzleminde  $x$  eksenini boyunca  $(0,0)$  noktası ile  $(L,0)$  arasında olacak şekilde dengede sıkıca gerilir. ( Şekil 4.1).

Tel,  $xu$ - düzleminde dikey yönde çekilip ve  $t = 0$  zamanında serbest bırakılırsa,  $xu$ - düzleminde salınacaktır.  $u(x, t)$  ile  $t$  noktasındaki apsisin üstündeki veya altındaki noktanın yer değiştirmesini gösterelim.



Şekil.4.1. Uzatılmış bir tel

- 1- Telin kütle yoğunluğu (birim uzunluk başına kütle)  $p$ , tel boyunca sabittir.
- 2- Telin  $x$  eksenini boyunca sıkıca gerilmesiyle indüklenen gerilimi  $T$  ile göstereceğiz, diğer tüm yerçekimi ve hava direnci kuvvetler ihmal edilebilir olduğunu kabul edeceğiz.
- 3- Telin üstündeki herhangi bir noktadaki gerginlik, o noktadaki telin teğeti boyunca hareket eder ve yatay bileşenin büyüklüğü daima  $T'$  ye eşittir. Teldeki gerilim dengededir.
- 4- Telin her bir noktadaki eğimi, yaklaşık olarak  $\sqrt{1 + u_x^2} \approx 1$  (4.1.2)

Şekil (4.2) yer değiştirmiş telin  $t > 0$  zamanında bir bölümünü göstermektedir.

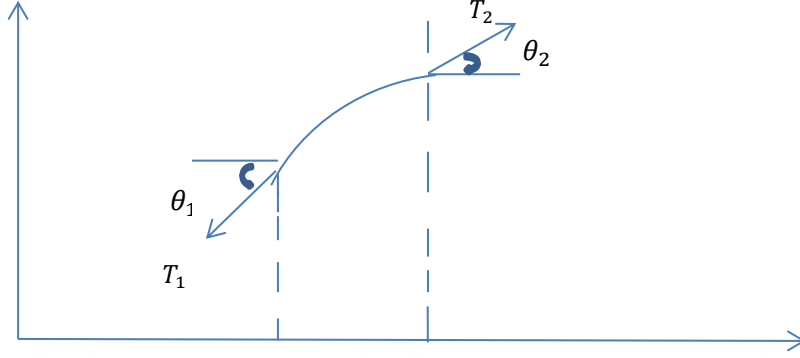
$T_1$  ve  $T_2$  vektörleri gerilime bağlı kuvvetler olup, segmentlere bitiş noktası boyunca, teğet olarak hareket eder, Newton'un hareket yasasından  $T_1 - T_2$ , segmentin kütle merkezidir.

$$|T_2| \cos \theta_2 = |T_1| \cos \theta_1 = T \quad (4.1.3)$$

kabul edersek, net yatay kuvvet sıfır olur ve bu nedenle yatay ivme yoktur. Başlangıçtan beri yatay hız sıfır, yatay hareket yoktur.

Newton` un ikinci hareket yavasını dikey yönde uygularsak,

$$|T_2| \sin \theta_2 - |T_1| \sin \theta_1 = p \cdot \Delta_s \cdot u_{tt}(\bar{x}, t) \quad (4.1.4)$$



Şekil.4.2.(Yerinden edilmiş telin bir bölümü.)

elde edilir. Burada  $\Delta_s$ , segmentin uzunluğu ve  $x$  kütle merkezinin apsisisdir, dolayısıyla;

$$x < \bar{x} < x + \Delta_x$$

Biliyoruz ki,

$$\Delta_s = \int_x^{x + \Delta_x} \sqrt{1 + u_x^2(\theta, t)} d\theta$$

Ancak biz yaklaşık olarak alırsak,

$$\Delta_s = \int_x^{x + \Delta_x} 1 d\theta = \Delta_x ,$$

bu eşitliği (4.1.4)' de dikkate alırsak

$$|T_2| \sin \theta_2 - |T_1| \sin \theta_1 = p \cdot \Delta_x \cdot u_{tt}(\bar{x}, t)$$

elde ederiz.

Buradan da;

$$\frac{|T_2| \sin \theta_2 - |T_1| \sin \theta_1}{\Delta_x} = p \cdot u_{tt}(\bar{x}, t) \quad (4.1.5)$$

şeklinde yazarız.

(4.1.5)' i (4.1.3)' e bölersek;

$$\frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{\Delta_x} = \frac{p}{T} \cdot u_{tt}(\bar{x}, t) \quad (4.1.6)$$

Buna göre,

$\tan\theta_1 = u_x(x, t)$  ve  $\tan\theta_2 = u_x(x + \Delta_x, t)$  yazarsak,

$$\frac{u_x(x + \Delta_x, t) - u_x(x, t)}{\Delta_x} = \frac{p}{T} \cdot u_{tt}(\bar{x}, t)$$

elde edilir.

$\Delta_x \rightarrow 0$  iken limit alınır,

$u_{xx}(x, t) = \frac{p}{T} \cdot u_{tt}(x, t)$  elde edilir. Buradan da tekrar;

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{ile} \quad a^2 = \frac{T}{p} \quad \text{yazılır.}$$

#### 4.1.2. Dalga denklemi çözümü

Dalga denklemini çözmek için Değişkenleri ayırma yöntemini kullanacağız, yani çözümü,

$$v(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

biçiminde arıyoruz. Aşağıdaki problemi inceleyeceğiz.

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad v(0, t) = 0, \quad v(L, t) = 0$$

bütün  $(x, t)$  için. Değişkenlerine ayırma yöntemini uygularsak;

$$v_{tt} = XT'' \quad \text{ve} \quad v_{xx} = X''T,$$

elde edilir. Bu eşitlikleri verilen

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

denkleminde yerine yazarsak

$$XT'' = a^2 X''T$$

elde edilir.

Buradan,

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X}$$

elde edilir.

Bütün  $(x,t)$  için geçerli olması için iki taraf da sabit fonksiyona eşit olması gerekir. Bu sabit fonksiyonu  $-\lambda$  ile gösterirsek

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda ,$$

elde edilir. Buradan

$$X'' + \lambda X = 0$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0$$

$$V(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \quad \text{ve} \quad V(L,t) = X(L) \cdot T(t) = 0$$

(4.1.7)

bulunur.  $T$ 'nin sıfır olmasını istemiyoruz. Bu durumda

$$X(0) = 0 \quad \text{ve} \quad X(L) = 0$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki basit Sturm-Liouville problemi elde edilir.

$$X'' + \lambda X = 0 , \quad X(0) = 0 , \quad X(L) = 0 \quad (4.1.8)$$

Bu problemin özdeğerlerinin

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} , \quad n = 1, 2, \dots$$

olduğu, uygun özfonksiyonlarının ise

$$X_n = \sin \frac{n\pi x}{L} , \quad n = 1, 2, \dots$$

olduğunu kolayca elde edebiliriz.

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

parametresinin değerleri için (yani (4.1.8) Sturm-Liouville problemin özdeğeri için)

$$T'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} T = 0$$

genel çözüümü olan,

$$T_n = a_n \cos \frac{n\pi at}{L} + \frac{b_n L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{L},$$

burada  $a_n$  ve  $b_n$  keyfi sabitlerdir. Buradan

$$\begin{aligned} v_n(x, t) &= X_n(x) \cdot T_n(t) \\ &= \left( a_n \cos \frac{n\pi at}{L} + \frac{b_n L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \\ \frac{\partial v_n}{\partial t}(x, t) &= \left( -\frac{n\pi a}{L} a_n \sin \frac{n\pi at}{L} + b_n \cos \frac{n\pi at}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \\ v_n(x, 0) &= a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial v_n}{\partial t}(x, 0) = b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \end{aligned}$$

elde edilir. Bunlar (4.1.1)'de yerine yazılırsa

$$f(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ve} \quad g(x) = b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

bulunur. Şimdi çözüümü

$$u_m(x, t) = \sum_{n=1}^m \left( a_n \cos \frac{n\pi at}{L} + \frac{b_n L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

biçiminde arayacağız. Bunlar (4.1.1)'de yerine yazılırsa

$$f(x) = \sum_{n=1}^m a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad \text{ve} \quad g(x) = \sum_{n=1}^m b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

bulunur.

$f$  ve  $g$ ,  $[0, L]$  aralığında parçalı düzgünse, (4.1.1) den

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi at}{L} + \frac{b_n L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (4.1.9)$$

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^m a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \quad S_g(x) = \sum_{n=1}^m b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

elde edilir. Sonuncu iki eşitlik

$[0, L]$  aralığında,  $f$  ve  $g$  nin sinüs serisidir.

Katsayıları;

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

eşitlikleriyle buluruz.

## 4.2. Dalga Denkleminin D'Alembert Yöntemiyle Çözümü

Teorem 4.2.1.  $f$  ve  $g$ ,  $[0, L]$  üzerinde parçalı düzgün fonksiyonlar ise  $u$ , (4.1.1)

başlangıç sınır değer probleminin çözümü için

$$u(x, t) = \frac{1}{2} ( S_f(x + at) + S_f(x - at) ) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} S_g(T) dt \quad (4.2.1)$$

eşitliği geçerlidir (Trench, 2013).

*İspat.*  $A = \frac{n\pi x}{L}$  ve  $B = \frac{n\pi at}{L}$  eşitliği için ,

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)]$$

$$\sin A \cdot \sin B = -\frac{1}{2} [\cos(A + B) - \cos(A - B)]$$

formüllerini yazılırsa

$$\cos \frac{n\pi at}{L} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} = \frac{1}{2} \left[ \sin \frac{n\pi(x + at)}{L} + \sin \frac{n\pi(x - at)}{L} \right] \quad (4.2.2)$$

ve

$$\begin{aligned} \sin \frac{n\pi at}{L} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} &= -\frac{1}{2} \left[ \cos \frac{n\pi(x + at)}{L} - \cos \frac{n\pi(x - at)}{L} \right] \\ &= \frac{n\pi}{2L} \int_{x-at}^{x+at} \sin \frac{n\pi t}{L} dt \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

elde edilir. (4.2.2)' den

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi at}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \sin \frac{n\pi(x + at)}{L} + \sin \frac{n\pi(x - at)}{L} \right) \\ &= \frac{1}{2} ( S_f(x + at) + S_f(x - at) ) \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

bulunur. Fourier sinüs serisi iki sınır arasında integrali alınır

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} &= \frac{1}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{x-at}^{x+at} \sin \frac{n\pi t}{L} dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) dt \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} S_g(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (4.2.2) ve (4.2.4)'ün ispatıdır.

Teorem 4.2.2.  $h'$  ın  $(0, L)$  üzerinde türevlenebilir olduğunu varsayalım; Ayrıca

$$h'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} \quad \text{ve} \quad h'_-(L) = \lim_{x \rightarrow L^-} \frac{h(x) - h(L)}{x - L}$$

mevcut olduğunu kabul edelim.

a) O halde  $h'$  ın  $(-\infty, \infty)$  da tek periyodik genişlemesi olan

$$p(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq L \\ -h(-x), & -L < x < 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad p(x + 2L) = p(x) \quad -\infty \leq x \leq \infty,$$

Fonksiyonu yalnızca  $h(0) = h(L) = 0$  olduğunda  $(-\infty, \infty)$  da türevlenebilir

b)  $h'$  ın  $(-\infty, \infty)$  da çift periyodik genişlemesi olan

$$q(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq L \\ h(-x), & -L < x < 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad q(x + 2L) = q(x) \quad -\infty \leq x \leq \infty,$$

fonksiyonu yalnızca  $h'_+(0) = h'_-(L) = 0$  olduğunda  $(-\infty, \infty)$  da türevlenebilir (Trench, 2013).

Teorem 4.2.3. Kabul edelim ki,  $g$  fonksiyonu  $[0, L]$  aralığında diferansiyellenebilir ve

$$g(0) = g(L) = 0 \quad (4.2.5)$$

şartını sağlıyor ve ayrıca kabul edelim ki,  $f$  fonksiyonu  $[0, L]$  aralığında ikinci mertebeden diferansiyellenebilir ve

$$f(0) = f(L) = 0 \quad (4.2.6)$$

$$f''_+(0) = f''_-(L) = 0 \quad (4.2.7)$$

şartını sağlıyor. O halde (4.1.1) probleminin (4.1.9) eşitliği ile verilmiş formal çözümü bu problemin gerçek çözümüdür (Trench, 2013).

*İspat.* İlk olarak,  $S_g$ 'nin türevlenebilir ve  $S_f$ 'nin iki kez türevlenebilir olduğunu göstereceğiz.

$f$  ve  $g$   $(0, L)$  üzerinde sürekli fonksiyonlar olduğundan;  $f$ ,  $[0, L]$  üzerinde parçalı sürekli düzgün fonksiyon ise Fourier sinüs serisi,

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

biçiminde yazılabilir.

$[0, L]$  üzerinde tüm  $x$ 'ler için

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ise} \\ f(x), & 0 < x < L \text{ ve } f, x \text{ de sürekli ise} \\ \frac{f(x+) + f(x-)}{2}, & 0 < x < L \text{ ve } f, x \text{ de sürekli değilse} \end{cases}$$

eşitliği sağlandığı için,  $[0, L]$  üzerinde  $S_f(x) = f(x)$ ,  $S_g(x) = g(x)$  dir.

$f$  ve  $g$ 'nin  $S_f$  ve  $S_g$  tek periyodik genişlemesidir.  $f$  ve  $g$ ,  $[0, L]$  üzerinde türevlenebilir ve teorem 4.2.2 (a)'da  $S_f$  ve  $S_g$   $(-\infty, \infty)$  üzerinde türevlenebilir.

$[0, L]$  üzerinde  $S'_f(x) = f'(x)$  ve  $S'_f$  çift ve  $S'_f$ ,  $f'$ 'nin çift periyodik genişlemesidir.  $f'$ ,  $[0, L]$  üzerinde türevlenebilir.

Şimdi, 4.2.1'den  $x$  ve  $t$ 'ye göre, iki kez türev alalım.

$$u_x(x, t) = \frac{1}{2} ( S'_f(x + at) + S'_f(x - at) ) + \frac{1}{2a} ( S_g(x + at) - S_g(x - at) )$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{2} ( S''_f(x + at) + S''_f(x - at) ) + \frac{1}{2a} ( S'_g(x + at) - S'_g(x - at) ) \quad (4.2.8)$$

$$u_t(x, t) = \frac{a}{2} ( S'_f(x + at) - S'_f(x - at) ) + \frac{1}{2} ( S_g(x + at) + S_g(x - at) ) \quad (4.2.9)$$

$$u_{tt}(x, t) = \frac{a^2}{2} ( S''_f(x + at) + S''_f(x - at) ) + \frac{a}{2} ( S'_g(x + at) - S'_g(x - at) ) \quad (4.2.10)$$

Böylece aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad \text{tüm } (x, t) \text{ için,}$$

$$4.1.9' \text{ dan } u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{tüm } t' \text{ ler için.}$$

$$4.2.1' \text{ den } u(x, 0) = S_f(x), \quad \text{tüm } x' \text{ ler için ve özellikle}$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

$$4.2.9' \text{ dan } u_t(x, 0) = S_g(x), \quad \text{tüm } x' \text{ ler için ve özellikle}$$

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

Burada ispat bitti.

*Örnek 4.2.4.*  $f(x) = x(x^3 - 2Lx^2 + L^2)$  ve  $g(x) = x(L-x)$  özel durumu için (4.1.1) probleminin çözümünü bulalım.

Çözüm :

$$S_f(x) = \frac{96L^4}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}$$

$$S_g(x) = \frac{8L^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}$$

$$u(x, t) = \frac{96L^4}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^5} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{L} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \\ + \frac{8L^3}{a\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi at}{L} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L}$$

Buradan

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{ve} \quad \text{tüm } (x, t) \text{ için;}$$

elde edilir.

$$S_f(x) = f(x) \quad \text{ve} \quad S_g(x) = g(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq L \quad \text{olduğundan,}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{ve} \quad u_t(x,0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

elde edilir. Böylece başlangıç-sınır değer probleminin gerçek çözümünü elde ettik.

### 4.3. Ara Yüzeyde Isı Sıcaklığı ve Akı Süreksizliğine Sahip Isı İletim Denklemine Çözümü

Ara yüzeyde ısı sıcaklığı ve akı süreksizliğine sahip uç uca eklenmiş iki parçalı kompozitin ısı iletim denklemi olan sınır değer problemini Fourier yöntemi ile çözümlenmesini inceleyeceğiz.

$$\frac{Q(x) \partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad x \in [0, a) \cup (a, 1], \quad t > 0 \quad (4.3.1)$$

diferansiyel denkleminin,

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad (4.3.2)$$

sınır koşulları ve

$$u(a-0,t) = \alpha u(a+0,t) \quad (4.3.3)$$

$$u_x(a-0,t) = \beta u_x(a+0,t) \quad (4.3.4)$$

geçiş koşulları ve

$$u(x,0) = f(x) \quad x \in [0, a) \cup (a, 1], \quad (4.3.5)$$

başlangıç koşulunu sağlayan çözümünü araştıracağız.

Burada  $0 < a < 1$ ,  $Q(x)$  ise

$$Q(x) = \begin{cases} Q_1^2 & , x \in [0, a) \\ Q_2^2 & , x \in (a, 1], \end{cases} \quad (4.3.6)$$

ile tanımlı parçalı sabit fonksiyondur;  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 > 0$ ,  $\alpha, \beta$  reel sayılardır.  $f(x)$  ise verilmiş fonksiyondur.

Çözüm :

$$Q(x). u_t = u_{xx} , \quad x \in [0, a) \cup (a, 1], \quad t > 0 \quad (4.3.7)$$

kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümünü

$$u(x,t) = X(x)T(t) \quad (4.3.8)$$

biçiminde arayacağız.

Bu ifadeyi (4.3.7) de yerine yazarsak

$$Q(x). XT' = X''T \quad (4.3.9)$$

eşitliği elde edilir.

Biz  $X(x) \neq 0$  ve  $T(t) \neq 0$  olduğu durumu inceleyeceğiz. Bu eşitliği

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{Q(x)X} = -\lambda \quad (4.3.10)$$

biçiminde yazabiliriz.

(4.3.10)' un sol tarafı yalnız  $t$  değişkenine ve sağ tarafı yalnız  $x$  değişkenine bağlı olduğu için (4.3.10) eşitliği ancak ve ancak her iki taraf sabit fonksiyon ise doğru olabilir. Bu nedenle bu sabit sayıyı bir  $-\lambda$  ile gösterebiliriz. O halde (4.3.10) denklemini iki tane adi diferansiyel denklem biçiminde yazabiliriz.

$$X'' + \lambda Q(x)X = 0 \quad x \in [0, a) \cup (a, 1] \quad (4.3.11)$$

$$T' + \lambda T = 0 \quad (4.3.12)$$

(4.3.12) denkleminin genel çözümünü

$$T(t) = c. e^{-\lambda t} \quad (4.3.13)$$

biçimindedir. Burada  $c$  keyfi reel sayıdır.

Eğer, (4.3.8) ifadesini (4.3.2) sınır şartlarında yazarsak,  $X(x)$  fonksiyonu için

$$X(0) = 0, \quad X(1) = 0 \quad (4.3.14)$$

sınır koşulları elde edilir.

Şimdi (4.3.8) ifadesini (4.3.3) ve (4.3.4) geçiş şartlarında yerine yazalım.

O halde

$$X(a-0) = \alpha X(a+0) \quad (4.3.15)$$

$$X'(a-0) = \beta X'(a+0) \quad (4.3.16)$$

geçiş koşulları elde edilir.

Böylece  $X(x)$  fonksiyonunu bulmak için aşağıdaki sınır – değer – geçiş problemini (SDGP) elde ettik.

$$X(x)'' + \lambda Q(x) X(x) = 0 \quad x \in [0, a) \cup (a, 1] \quad (4.3.17)$$

$$X(0) = 0 \quad (4.3.18)$$

$$X(1) = 0 \quad (4.3.19)$$

$$X(a-0) = \alpha X(a+0) \quad (4.3.20)$$

$$X'(a-0) = \beta X'(a+0) \quad (4.3.21)$$

Böylece  $X(x)$  fonksiyonu için iki aralıklı Sturm-Liouville sınır değer geçiş problemi elde edildi.  $X(x)$  fonksiyonu  $[0, a)$  aralığında

$$X(x)'' + \lambda Q_1^2 X(x) = 0 \quad x \in [0, a) \quad (4.3.22)$$

diferansiyel denklemini sağlar. Bu fonksiyon  $(a, 1]$  aralığında ise

$$X(x)'' + \lambda Q_2^2 X(x) = 0 \quad x \in (a, 1] \quad (4.3.23)$$

diferansiyel denklemini sağlar.

$\lambda = 0$ ,  $\lambda < 0$  ve  $\lambda > 0$  durumlarını ayrı ayrı araştıralım.

1.Durum:  $\lambda = 0$  olsun. O halde (4.3.23) diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$X(x) = C_1 x + C_2, \quad x \in [0, a) \quad (4.3.24)$$

biçimindedir.

Burada  $C_1$  ve  $C_2$  keyfi sabitlerdir. (4.3.23) diferansiyel denkleminin genel çözümü ise

$$X(x) = D_1 x + D_2, \quad x \in (a, 1] \quad (4.3.25)$$

biçiminde elde edilir, burada  $D_1$  ve  $D_2$  keyfi sabitlerdir.

Böylece  $\lambda = 0$  durumu için (4.4.17) diferansiyel denkleminin genel çözümünü

$$X(x) = \begin{cases} C_1 x + C_2, & x \in [0, a) \\ D_1 x + D_2, & x \in (a, 1] \end{cases} \quad (4.3.26)$$

biçiminde elde edilir.

(4.3.26) ifadelerini (4.3.18) ve (4.3.19) sınır koşullarında yerine yazarsak,

$$C_2 = 0 \quad (4.3.27)$$

$$D_1 + D_2 = 0 \quad (4.3.28)$$

eşitliğini buluruz. O halde (4.3.17) diferansiyel denkleminin (4.3.18) ve (4.3.19) sınır koşullarını sağlayan çözümü

$$X(x) = \begin{cases} C_1 x, & x \in [0, a) \\ D_1 x - D_1, & x \in (a, 1] \end{cases} \quad (4.3.29)$$

biçiminde elde ettik.

$C_1$  ve  $D_1$  sabitlerini bulmak için (4.3.28) eşitliğini (4.3.20) ve (4.3.21) geçiş şartlarında yerine koyacağız. Bu durumda,

$$C_1 a = \alpha (D_1 a - D_1) \quad (4.3.30)$$

$$C_1 = \beta D_1 \quad (4.3.31)$$

lineer denklem sistemini elde ederiz. (4.3.30) da  $C_1$  yerine  $\beta D_1$  yazarsak,

$$\beta D_1 = \alpha (D_1 a - D_1) \quad (4.3.32)$$

eşitliği bulunur. Burada

$$(\beta a - \alpha a + \alpha) D_1 = 0 \quad (4.3.33)$$

eşitliği elde edilir.

Eğer

$\beta a - \alpha a + \alpha \neq 0$  ise (4.4.33)' ten

$$D_1 = 0 \quad (4.3.34)$$

elde edilir. Bu durumda (4.3.31) 'den

$$C_1 = 0 \quad (4.3.35)$$

elde edilir. Yani aşağıdaki sonucu elde ettik.

Sonuç: Eğer ( $\beta a \neq \alpha(a-1)$  ise  $\lambda = 0$  sayısı (4.3.17) – (4.3.21) iki aralıklı Sturm-Liouville SDGP 'nin özdeğeri değildir. Eğer  $\beta a = \alpha(a-1)$  ise  $\lambda = 0$  sayısı (4.3.18) – (4.3.21) iki aralıklı Sturm-Liouville SDGP 'nin özdeğeridir.

Bu özdeğere uygun olan özfonksiyonlar

$$\begin{aligned} X(x) &= \begin{cases} \beta D_1 x, & x \in [0, a) \quad \text{ise} \\ D_1 x - D_1, & x \in (a, 1] \quad \text{ise} \end{cases} \\ &= D_1 \begin{cases} \beta x, & x \in [0, a) \quad \text{ise} \\ x - 1, & x \in (a, 1] \quad \text{ise} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3.36)$$

biçiminde elde edilir. Burada  $D_1 \neq 0$  keyfi sayıdır.

Şimdi  $\lambda < 0$  durumunu araştıralım.  $\lambda = -\mu^2$  ile gösterelim. O halde (4.3.17) denkleminin genel çözümü

$$X(x) = \begin{cases} C_1 e^{-\mu Q_1 x} + C_2 e^{\mu Q_1 x}, & x \in [0, a) \\ D_1 e^{-\mu Q_2 x} + D_2 e^{\mu Q_2 x}, & x \in (a, 1] \end{cases} \quad (4.3.37)$$

biçiminde yazılabilir.

Bu genel çözümü (4.3.18) ve (4.3.19) sınır koşullarında yerine yazarsak, sırası ile

$$C_1 + C_2 = 0 \quad (4.3.38)$$

$$D_1 e^{-\mu Q_2} + D_2 e^{\mu Q_2} = 0 \quad (4.3.39)$$

eşitlikleri bulunur.

(4.3.38) ve (4.3.39) eşitliklerini (4.3.37) genel çözümünde dikkate alırsak (4.3.17) diferansiyel denkleminin (4.3.18) ve (4.3.19) sınır koşullarını sağlayan çözümünü,

$$X(x) = \begin{cases} C_1( e^{-\mu Q_1 x} - e^{\mu Q_1 x} ) & , x \in [0, a) \\ D_1( e^{-\mu Q_2 x} - e^{-2\mu Q_2} e^{\mu Q_2 x} ) & , x \in (a, 1] \end{cases} \quad (4.3.40)$$

biçiminde buluruz.  $C_1$  ve  $D_1$  sabitlerini bulmak için (4.3.37) eşitliğini (4.3.20) ve (4.3.21) geçiş şartlarında yerine yazalım. O halde aşağıdaki eşitlikler bulunur.

$$C_1( e^{-\mu Q_1 a} - e^{\mu Q_1 a} ) = \alpha D_1( e^{-\mu Q_2 a} - e^{-2\mu Q_2} e^{\mu Q_2 a} ) \quad (4.3.41)$$

$$\mu Q_1 C_1( -e^{-\mu Q_1 a} - e^{\mu Q_1 a} ) = \beta \mu Q_2 D_1( e^{-\mu Q_2 a} - e^{-2\mu Q_2} e^{\mu Q_2 a} ) \quad (4.3.42)$$

(4.3.41) ve (4.3.42) eşitlikleri  $C_1$  ve  $D_1$  değişkenlerine göre homojen lineer cebirsel denklem sistemidir. Bu sistemin determinantını  $\omega(\mu)$  ile gösterelim.

$$\omega(\mu) = \begin{vmatrix} ( e^{-\mu Q_1 a} - e^{\mu Q_1 a} ) & - \alpha ( e^{-\mu Q_2 a} - e^{-2\mu Q_2} e^{\mu Q_2 a} ) \\ \mu Q_1 ( -e^{-\mu Q_1 a} - e^{\mu Q_1 a} ) & - \beta \mu Q_2 ( e^{-\mu Q_2 a} - e^{-2\mu Q_2} e^{\mu Q_2 a} ) \end{vmatrix}$$

gösterelim. Determinantı açarsak

$$\omega(\mu) = ( e^{-\mu Q_1 a} - e^{\mu Q_1 a} ) \cdot ( -\beta \mu Q_2 ( e^{-\mu Q_2 a} - e^{-2\mu Q_2} e^{\mu Q_2 a} ) ) -$$

$$(( -\alpha ( e^{-\mu Q_2 a} - e^{-2\mu Q_2} e^{\mu Q_2 a} ) ) \cdot \mu Q_1 ( -e^{-\mu Q_1 a} - e^{\mu Q_1 a} ))$$

bulunur. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 4.3.1.**  $\lambda = -\mu^2$ ,  $\mu \neq 0$  olmak üzere, eğer  $\omega(\mu_0) \neq 0$  ise o halde  $\lambda = -\mu_0^2$  sayısı özdeğer değildir. Eğer  $\omega(\mu_0) = 0$  ise  $\lambda = -\mu_0^2$  sayısı özdeğerdir ve bu özdeğere uygun fonksiyon

$$X(x) = \begin{cases} C_1( e^{-\mu_0 Q_1 x} - e^{\mu_0 Q_1 x} ) & x \in [0, a) \\ C_1 \left( \frac{(1 - \mu_0 Q_1) e^{-\mu_0 Q_1 a} - ((1 + \mu_0 Q_1) e^{\mu_0 Q_1 a})}{(\alpha - \beta \mu_0 Q_2) (e^{-\mu_0 Q_2 a} - e^{-2\mu_0 Q_2} e^{\mu_0 Q_2 a})} e^{-\mu_0 Q_2 x} - e^{-2\mu_0 Q_2} e^{\mu_0 Q_2 x} \right) & , x \in (a, 1] \end{cases} \quad (4.3.43)$$

biçiminde ifade edilir. Burada  $C_1 \neq 0$  keyfi sayıdır.

Şimdi  $\lambda > 0$  durumunu inceleyelim. Bu durumda  $\lambda = s^2$  gösterelim. O halde (4.3.17) denkleminin genel çözümünü aşağıdaki biçimde elde ederiz.

$$X(x) = \begin{cases} C_1 \cos(s Q_1 x) + C_2 \sin(s Q_1 x) , & x \in [0, a] \text{ için} \\ D_1 \cos(s Q_2 x) + D_2 \sin(s Q_2 x) , & x \in (a, 1] \text{ için} \end{cases} \quad (4.3.44)$$

Bu genel çözümü (4.3.18) ve (4.3.19) sınır koşullarında yerine yazarsak, sırası ile

$$C_1 = 0 \quad (4.3.45)$$

$$D_1 \cos(s Q_2) + D_2 \sin(s Q_2) = 0 \quad (4.3.46)$$

elde edilir.

(4.3.17) diferansiyel denkleminin (4.3.18) ve (4.3.19) sınır koşullarını sağlayan çözümü

$$X(x) = \begin{cases} C_2 \sin(s Q_1 x) , & x \in [0, a] \text{ için} \\ D_1 \cos(s Q_2 x) - D_1 \frac{\cos(s Q_2)}{\sin(s Q_2)} \sin(s Q_2 x) , & x \in (a, 1] \text{ için} \end{cases} \quad (4.3.47)$$

biçiminde buluruz.  $C_2$  ve  $D_1$  sabitlerini bulmak için (4.3.47) eşitliğini (4.3.20) ve (4.3.21) geçiş şartlarında yerine yazalım. O halde

$$C_2 \sin(s Q_1 a) = \alpha D_1 \left( \cos(s Q_2 a) - \frac{\cos(s Q_2)}{\sin(s Q_2)} \sin(s Q_2 a) \right) , x \in [0, a] \quad (4.3.48)$$

$$s Q_1 C_2 \cos(s Q_1 a) = \beta D_1 s Q_2 \left( -\sin(s Q_2 a) - \frac{\cos(s Q_2)}{\sin(s Q_2)} \cos(s Q_2 a) \right) , x \in (a, 1] \quad (4.3.49)$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.3.48) ve (4.3.49) sisteminin determinantı  $\Delta(s)$  ile gösterelim;

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} \sin(s Q_1 a) & - \alpha \left( \cos(s Q_2 a) - \frac{\cos(s Q_2)}{\sin(s Q_2)} \sin(s Q_2 a) \right) \\ s Q_1 \cos(s Q_1 a) & - \beta s Q_2 \left( -\sin(s Q_2 a) - \frac{\cos(s Q_2)}{\sin(s Q_2)} \cos(s Q_2 a) \right) \end{vmatrix}.$$

Buradan

$$\Delta(s) = \sin(s Q_1 a) \cdot \left( - \beta s Q_2 \left( -\sin(s Q_2 a) - \frac{\cos(s Q_2)}{\sin(s Q_2)} \cos(s Q_2 a) \right) - \right.$$

$$\left. \left( s Q_1 \cos(s Q_1 a) \right) \cdot \left( - \alpha \left( \cos(s Q_2 a) - \frac{\cos(s Q_2)}{\sin(s Q_2)} \sin(s Q_2 a) \right) \right) \right)$$

Teorem 4.3.1 den  $\lambda = s^2$   $s \neq 0$  olmak üzere,  $\Delta(s) \neq 0$  ise özdeğer yoktur. Eğer  $\Delta(s) = 0$  ise özdeğeri vardır. Bu özdeğere uygun özfonksiyonu bulmak için (4.3.48) eşitliğini  $C_2 \sin(sQ_1 a) = \alpha D_1 \frac{\sin(sQ_2(1-a))}{\sin((sQ_2))}$  şeklinde yazabiliriz.

Buradan,

$$C_2 \sin(sQ_1 a) = \alpha D_1 \frac{\sin(sQ_2(1-a))}{\sin((sQ_2))}$$

bulunur. Buradan da

$$\frac{C_2 \sin(sQ_1 a) \sin((sQ_2))}{\alpha \sin(sQ_2(1-a))} = D_1 \quad (4.3.50)$$

elde edilir.

(4.3.49) eşitliğini  $sQ_1 C_2 \cos(sQ_1 a) = -sQ_2 \beta D_1 \left( \frac{\cos(sQ_2(1-a))}{\sin((sQ_2))} \right)$  şeklinde yazabiliriz.

Buradan,

$$\frac{Q_1 C_2 \cos(sQ_1 a) \sin((sQ_2))}{Q_2 \beta \cos(sQ_2(1-a))} = -D_1 \quad (4.3.51)$$

(4.3.50) ile (4.3.51) taraf tarafa çıkarılırsa,

$$C_2 \left( \frac{\sin(sQ_1 a) \sin((sQ_2))}{2\alpha \sin(sQ_2(1-a))} - \frac{Q_1 \cos(sQ_1 a) \sin((sQ_2))}{2Q_2 \beta \cos(sQ_2(1-a))} \right) = D_1$$

eşitliği bulunur.

Buradan özfonksiyonu,

$$X(x) = \begin{cases} C_2 \sin(sQ_1 x) & , x \in [0, a) \\ C_2 \left( \frac{\sin(sQ_1 a)}{2\alpha \sin(sQ_2(1-a))} - \frac{Q_1 \cos(sQ_1 a)}{2Q_2 \beta \cos(sQ_2(1-a))} \right) \sin(sQ_2(1-x)) & , x \in (a, 1] \end{cases} \quad (4.3.52)$$

biçiminde buluruz. Burada  $C_2 \neq 0$  keyfi bir sayıdır.

(4.3.11) diferansiyel denkleminde  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları  $X_1(x), X_2(x), X_3, \dots, X_n(x)$  olacaktır.

Araştırılan problemin çözümünü

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \quad (4.3.53)$$

biçimde yazabiliriz.

Buradan da

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} X_n(x) \quad (4.3.54)$$

bulunur.

(4.3.53) çözümünü (4.3.2) sınır şartlarından yerine yazarsak,

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x) \quad (4.3.55)$$

çözümünü elde ederiz. Burada  $c_n$  keyfi sabit sayıdır. ( $n = 1, 2, \dots$ )

#### 4.4. Dalga Denkleminin Uygulaması

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi at}{L} + \frac{b_n L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at}{L} \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

fonksiyonu tüm  $(x, t)$  için (4.1.1) probleminin çözümü olsa da,  $0 \leq x \leq L$  aralığında ve  $t \geq 0$  için sağlanır; aslında sadece  $0 \leq t \leq 2L$  aralığında  $t$  değerlerini dikkate almak yeterlidir. Çünkü;

$$u\left(x, t + \frac{2kL}{a}\right) = u(x, t) \text{ eşitliği } (k \text{ bir tamsayı ise}) \text{ tüm } (x, t) \text{ için sağlanır}$$

(Trench, 2013).

Aşağıdaki sayısal denemeleri gerçekleştirerek telin hareketinin grafiğini oluşturabiliriz.

Şimdi;  $m$  ve  $k$  pozitif tamsayı olsun.

$$t_j = \frac{2Lj}{ka}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k;$$

gösterelim. Böylece;  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k$   $(0, L/2a)$  içinde eşit aralıklı noktalardır.

Her  $j = 0, 1, 2, \dots, k$  için kısmi toplam grafiği;

$$u_m(x, t_j) = \sum_{n=1}^m \left( a_n \cos \frac{n\pi at_j}{L} + \frac{b_n L}{n\pi a} \sin \frac{n\pi at_j}{L} \right) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$[0, L]$  üzerinde  $x$ ' in bir fonksiyonudur.

Bu işlemi  $m$  ve  $k$ ' nın çeşitli değerleri için tekrarlarız.

Şimdi bunu bir dalga denklemi örneğinde, Mathematica programı ile grafiğinin nasıl çizileceğini gösterelim.

Örnek 4.4.1.

$$y_{tt} = 100 y_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad y(0, t) = y(\pi, t) = 0$$
$$y(x, 0) = x(\pi - x), \quad y_t(x, 0) = 0$$

dalga denkleminin çözümü,

$$y(x, t) = \sum_{n \text{ tek}} \frac{8}{\pi n^3} \cos 10nt \sin nx \quad (4.4.1)$$

olduğundan Mathematica programı ile  $t$  farklı zamanlarında grafiğinin nasıl çizildiğini gösterelim,

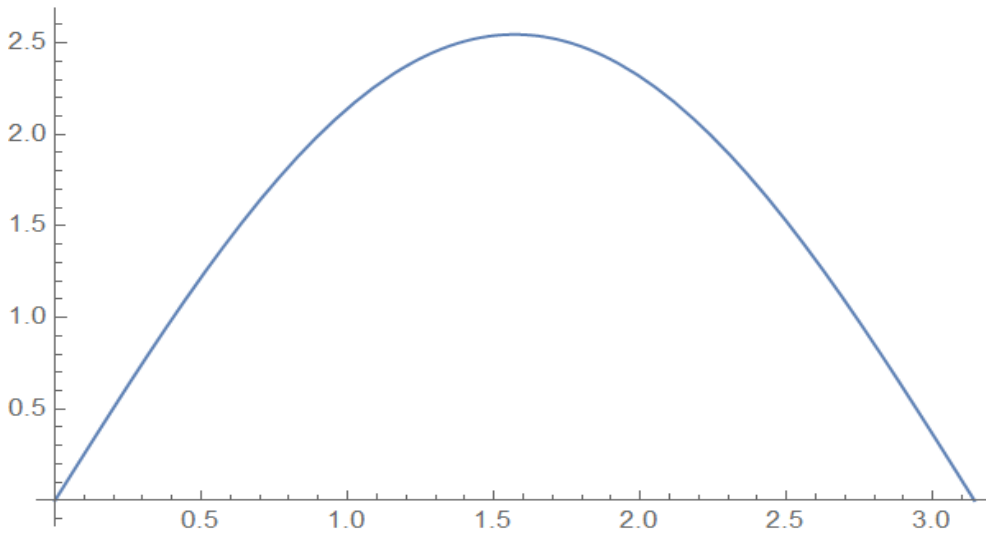
$t = 0$  anında ve  $n = 1$  iken,

$$y(x, 0) = \frac{8}{\pi} \cos 0 \sin x \quad \text{veya} \quad y(x, 0) = x(\pi - x)$$

Grafiğini çizmek için Mathematica programında,

$$\text{plot}[[8/\pi * \cos 0 * \sin x](x, 0, \pi)]$$

yazdığımızda,



Şekil 4.3.  $t = 0$  anında 4.4.1 grafiği

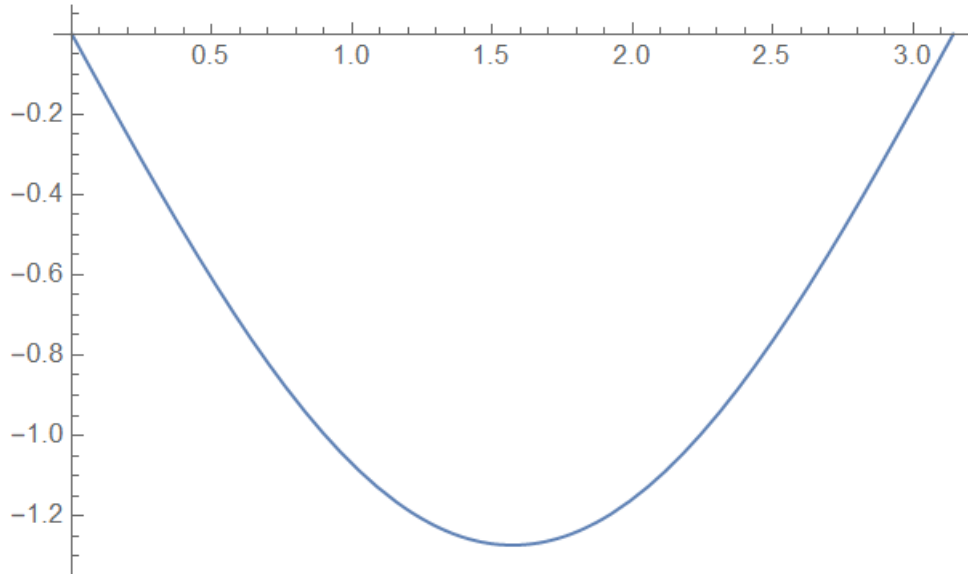
grafiki çizilir.

$t_j = 2Lj/ka$  olmak üzere, problemde  $L = \pi$  ve  $a = 10$  olduğunu biliyoruz,  $n=1$  ve  $k=3$  için  $t_1 = 2\pi/30$  olur.

Grafiğini çizmek için Mathematica programında,

```
plot[[8/π * cos2 π/3 * sinx](x, 0, π)]
```

yazılırsa,



Şekil 4.4.  $t = 2\pi/30$  anında 4.4.1 grafiği

grafiki çizilir.

Mathematica programı ile dalga denkleminin farklı  $n$  ve  $k$  değerleri için farklı  $t$  zamanlarda grafiğini çizebiliriz.

## 5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında Fourier serileri ve Sınır değer problemlerinin bazı kavramlarının tanımları verilerek, Fourier yöntemi olarak adlandırılan Değişkenlerine ayırma yöntemi ve d'Alembert yöntemi kullanılarak fizik ve mühendislikte kullanılan bir boyutlu dalga denkleminin çözümü ve ara yüzeyde ısı sıcaklığı ve akı süreksizliğine sahip uç uca eklenmiş iki parçalı kompozitin ısı iletim denkleminin çözümü üzerinde durulmuştur.

Fizik ve mühendislikte kullanılan sınır değer probleminin, özfonksiyon serisine açılabilirdiği gösterilip, çözümünün Fourier serisi olarak elde edilişi incelenmiştir. Bu da Fourier serisi ve Sınır değer probleminin teorik ve uygulama açısından önemini bariz bir biçimde ortaya koymaktadır.

Tez çalışmamızın esas konusu Fourier serileri ve Sınır değer problemi olduğu için çalışmamızın çıktılarını bir çok fizik probleminin çözümü açısından önem arz etmektedir.

Tez çalışmamız, uygulama açısından bilim ve teknolojiye yarar sağlayacaktır.

## KAYNAKLAR

- Abdyleva, E., Taalaibek Kyzy, G., Anarkulova, .B., 2019. Generalized solution of boundary value problem with an inhomogeneous boundary condition. *MANAS Journal of Engineering*, Cilt 7, Sayı 2, 157 – 165.
- Altın, A., 2011. *Fourier Analizi*. Gazi Kitabevi,123 s, Ankara.
- Andrew, Alan L., 1989. Correction of finite difference eigenvalues of periodic Sturm-Liouville problems. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics* ,460-469.
- Aydemir , K. and Muhtaroglu, O. ,2016. Some Asymptotic Approximation Properties of One Boundary Value Problem with Singular Interior Point. *Applied Mathematics Information Sciences*, vol. 10, no. 4, pp. 1369–1374.
- Aydemir, K. , Olğar,H. and Muhtaroglu, O., 2019. The Principal Eigenvalue and The Principal Eigenfunction of A Boundary Value Transmission Problem, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 11, no. 2, pp. 97–100.
- Edwards & Penney, Ömer AKIN Çeviri , 2007. *Elementer Diferansiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri*. Palme Yayıncılık, 816 s, Ankara.
- Faydaoğlu, Ş. and G. S. Guseinov, 2010. An Expansion Result for a Sturm-Liouville Eigenvalue Problem with Impulse. *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 34, no. 3, pp. 355–366.
- Halilov, H., 2011. *Diferansiyel Denklemler ve Lineer Cebir Elemanları*. Literatür Yayıncılık, 448 s, İstanbul.
- Kandemir, M.,2015. *Diferansiyel Denklemler*,Pegem Yayınevi,728 s, Ankara.
- Kreyszig, E., 2015. *İleri Mühendislik Matematiği*.Palme Yayıncılık,1112 s, Ankara.
- Maris ,E.A., Göktaş , S., 2019. On the Spectral Properties of A Sturm-Liouville Problem with Eigenparameter in the Boundary Condition. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 1 – 10.
- Muhtaroglu, O., Aydemir,K. and Olğar,H., 2019. Equiconvergence with Fourier Series for Non Classical Sturm Liouville Problems, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 11, no. 2, pp. 107–111.
- Muhtaroglu, O., Çavuşoğlu, S. and Olğar,H. , 2019. Numerical solution of one boundary value problem using finite difference method, *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, vol. 11, pp.85–89.
- Mukhtarov, O.Sh., 1994. Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition, *Tr.J. of Mathematics*,18,183-192.
- Mukhtarov, O. Sh., Kandemir, Kadakal, M ve Altınışık, N., 2002. Sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran süreksiz Sturm-Liouville probleminin bazı spectral özellikleri, *SAU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*,6 (1), 90-96.

- Mukhtarov, O.Sh., Yakubov, S., 2002. Problems for Ordinary Differential Equations with Transmission Conditions. *Applicable Analysis*, Vol 81, 1033-1064.
- Mukhtarov, O.Sh., Kadakal M., Muhtarov, F.S., 2004. On Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions. *J. Math. Kyoto Univ.*, Vol.44, Number 4, 779-798.
- Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. and Aydemir, K., 2015. Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems. *Filomat*, 29:7, 1671-1680.
- Olğar, H., Muhtaroglu, O. and Aydemir, K., 2018. Some Properties of Eigenvalues and Generalized Eigenvectors of One Boundary Value Problem, *Filomat*, vol. 32, no. 3, pp. 910–920.
- Powers, D.L ,2006. *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*, Elsevier Akademik Yayınları, 500 s, Burlington, USA.
- Tolstov, P.G,1962. *Fourier Series Translated from the Russian by Richard A Silverman*. Dover Publications,349 p, New York, USA.
- Trench ,William F. ,2013. *Elementary Differential Equations and Boundary Value problems*, Andrew G. Cowles Distinguished Professor Emeritus Department of Mathematics Trinity University,801 p ,San Antonio, Texas, USA.
- Yücel, M. and Muhtaroglu, O. ,2018. “A New Treatment of the Decomposition Method for Nonclassical Boundary Value Problems,” *Journal of Advanced Physics*, vol. 7, no. 2, pp. 161–166.
- Yakubov, S., 1994. *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators*. Logman, Scientific & Technical, 243 p, New York, USA.