

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضیات و کاربردها

عنوان پایان نامه

روش تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای برای مسائل مقدار اولیه

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

توسط

زینب حسن زاده

دانشگاه محقق اردبیلی

تابستان ۱۳۹۱

در هر چیز از جمله یک نظریه‌ی ریاضی زیبایی را می‌توان درک کرد ولی نمی‌توان توضیح داد.
«رنه دکارت»

تقدیم به پدر و مادرم
که از رفتارشان محبت
و از صبرشان ایستادگی را آموختم
و تمام تجربه‌های زیبای زندگی‌ام مدیون حضور سبز آنهاست.

و تقدیم به برادرم
که با محبت بی‌دریغش
در تمام دوران تحصیلم همراهی‌ام نموده است.

تقدیر و تشکر

شکر و سپاس خداوند را که در این دنیا چیزی بزرگتر از انسان نیافرید و در انسان چیزی بزرگتر از فکر او. سپاس خدای را به جای می آورم که لطف و عنایتش شامل حال من شد تا این مجموعه را کامل کنم.

از زحمات استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر داود خجسته سالکویه کمال سپاسگزاری را دارم، هر چند که این جملات قادر به اظهار تشکر من از زحمات بی شائبه‌ی این استاد فرزانه نیست. خدا را شاکرم که سعادت شاگردی ایشان را نصیب من کرد. درجات علمی بالا و موفقیت‌های بیش از پیش را برایشان از درگاه خداوند متعال خواستارم.

زینب حسن‌زاده

تابستان ۱۳۹۱

نام خانوادگی: حسن زاده	نام: زینب
عنوان پایان نامه:	
روش تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای برای مسائل مقدار اولیه	
استاد راهنما: دکتر داود خجسته سالکویه	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	رشته: ریاضی کاربردی
دانشگاه: محقق اردبیلی	دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۱/۴/۲۸	تعداد صفحه: ۱۰۰
کلید واژه‌ها:	
تخفیف موجی شکل، تکرار دومرحله‌ای، مسأله‌ی مقدار اولیه، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جبری، روش θ	
چکیده:	
<p>در این پایان‌نامه روش تکراری تخفیف موجی شکل و روش تکراری تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای را برای حل مسائل مقدار اولیه معرفی می‌کنیم، که هر دو روش بر پایه‌ی روش‌های تکراری ایستا می‌باشند. مسائل مقدار اولیه‌ی مطرح شده، شامل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری است. هدف از معرفی این روش‌های تکراری تبدیل دستگاه معادلات دیفرانسیل بزرگتر به زیردستگاه‌های کوچکتر است، که این کار با استفاده از شکافت ماتریس‌های ضرایب دستگاه صورت می‌گیرد. روش تکراری تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای از افزودن تکرار درونی به روش تکراری تخفیف موجی شکل حاصل می‌شود، که با این عمل سرعت همگرایی بیشتر می‌شود. در پایان چند مثال عددی برای بررسی کارایی این روش‌ها ارائه می‌کنیم و با استفاده از نتایج عددی حاصل، به مقایسه‌ی سرعت همگرایی و دقت این روش‌ها می‌پردازیم.</p>	

فهرست مندرجات

ز	مقدمه	
۱	مروری بر تعاریف و مفاهیم اولیه	۱
۴	۱.۱ ماتریس‌های نامنفی	۴
۱۱	۲.۱ ماتریس‌های معین مثبت هرمیتی	۱۱
۲۵	۳.۱ صورت کلی روش‌های تکراری ایستا	۲۵
۲۷	۱.۳.۱ روش تکراری ژاکوبی	۲۷
۲۷	۲.۳.۱ روش گاوس-سایدل	۲۷
۲۸	۲ روش موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی	۲۸
۲۹	۱.۲ نحوه‌ی شکل‌گیری روش تکراری موجی شکل دومرحله‌ای	۲۹
۳۲	۲.۲ الگوریتم روش تکراری موجی شکل دو مرحله‌ای با پارامتر θ	۳۲
۳۸	۳.۲ بررسی همگرایی روش تکراری موجی شکل دومرحله‌ای	۳۸
۴۳	۱.۳.۲ تأثیر افزایش تکرارهای درونی روی سرعت همگرایی	۴۳
۴۶	۲.۳.۲ تأثیر کاهش پارامتر $h\theta$ روی سرعت همگرایی	۴۶
۵۰	۳ روش موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری	۵۰
۵۱	۱.۳ روش تکراری موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه DAE	۵۱

۵۲	الگوریتم روش تکراری موجی شکل دو مرحله‌ای با پارامتر θ	۲.۳
۵۶	بررسی همگرایی روش تکراری موجی شکل دو مرحله‌ای	۳.۳
۶۱	تأثیر افزایش تکرارهای درونی روی سرعت همگرایی	۱.۳.۳
۶۵	تأثیر کاهش پارامتر θ روی سرعت همگرایی	۲.۳.۳
۶۸	نتایج عددی	۴
۹۱	مراجع	الف
۹۴	واژه نامه	ب

لیست اشکال

۷۹	خطای مطلق درایه‌ی سوم جواب تقریبی برای مثال ۳.۴	۱.۴
۷۹	خطای مطلق درایه‌ی چهارم جواب تقریبی برای مثال ۳.۴	۲.۴
۸۰	نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_2$ برای مثال ۳.۴	۳.۴
۸۰	نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_4$ برای مثال ۳.۴	۴.۴
۸۷	نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_2$ برای مثال ۵.۴	۵.۴
۸۷	نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_5$ برای مثال ۵.۴	۶.۴
۸۸	نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_3$ برای مثال ۶.۴	۷.۴
۸۸	نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_5$ برای مثال ۶.۴	۸.۴

لیست جداول

۷۲	مقادیر $\rho(T_s)$ برای مثال ۱.۴	۱.۴
۷۳	مقادیر $\rho(T_s)$ برای مثال ۲.۴	۲.۴
۷۸		نتایج عددی برای مدت زمان $TSWR - Theta$ و WR بر حسب ثانیه	۳.۴
۷۸		نتایج عددی تعداد تکرارهای بیرونی k برای WR و $TSWR - Theta$	۴.۴
۸۲	مقادیر $\rho(T_s)$ در روش $TSWR - Theta$ برای مثال ۴.۴	۵.۴

مقدمه

صورت کلی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای و معادلات دیفرانسیل جبری، از دستگاه‌های دینامیکی در مکانیک سیالات از جمله، انتشار امواج و در ترمودینامیک به خصوص، پخش گرما شکل گرفته‌اند. روش‌های عددی بسیاری برای حل اینگونه معادلات پیشنهاد و بررسی شده است. در سال ۱۹۸۰ روش تکراری تخفیف موجی شکل برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE^۱) مورد توجه قرار گرفت و بعد از آن بطور گسترده‌ای پیشرفت کرد.

مسئله‌ی مقدار اولیه از دستگاه ODE، $y'(t) + Qy(t) = f(t)$ را با شرط اولیه $y(t_0) = y_0$ در نظر بگیرید، که در آن $f(t)$ یک تابع پیوسته روی بازه‌ی $[t_0, T]$ باشد. با در نظر گرفتن شکافت $Q = D - N_1$ برای ماتریس Q ، روش تکراری تخفیف موجی شکل (WR^۲) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$y^{k+1}(t) + Dy^{k+1}(t) = N_1 y^k(t) + f(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن $y^0(t) = y_0$ مرحله‌ی شروع عملگر تکراری است و $y^k(t_0) = y_0$ نقطه‌ی آغازین هر تکرار را مشخص می‌کند. با در نظر گرفتن تقریبات تفاضلی برای مشتق مرتبه‌ی اول، می‌توانیم رابطه‌ی تکراری فوق را گسسته‌سازی کنیم و در نتیجه با توجه به یک معیار توقف مشخص، تقریب عددی جواب را بدست می‌آوریم. اگر قبل از عمل گسسته‌سازی مجدداً شکافت $D = M - N_2$ را برای ماتریس D در نظر بگیریم، در این صورت روش تکراری

Ordinary differential equations^۱
Waveform relaxation^۲

تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای (TSWR)^۱ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{z}^{v+1}(t) + Mz^{v+1}(t) = N_2 z^v(t) + N_1 y^k(t) + f(t), \\ z^{v+1}(t_0) = y^k(t_0) = y_0, \quad z^0(t) = y^k(t), \quad k = 0, 1, \dots, \quad v = 1, \dots, s-1, \end{cases}$$

که در آن k و v به ترتیب نشان‌دهنده‌ی تکرارهای بیرونی و درونی هستند و به همین دلیل این روش تکراری را دومرحله‌ای (بیرونی-درونی) می‌نامند. با ثابت در نظر گرفتن تعداد تکرارهای درونی ($v = s$)، روش TSWR ایستا خواهد بود، با توجه به این نکته فرض می‌کنیم $y^{k+1}(t) = z^s(t)$. فرض کنیم بازه‌ی $[t_0, T]$ به چند نقطه‌ی گرهی با طول گام h افراز شده باشد، برای گسسته‌سازی این عملگر تکراری، از روش θ ^۲ استفاده می‌کنیم، که در این صورت روش تکراری TSWR-Theta حاصل می‌شود. بنابراین می‌توانیم با توجه به یک شرط توقف مشخص، تقریب عددی جواب را بدست آوریم.

با توجه به نوع ماتریس Q و نوع شکافت‌های $Q = D - N_1$ ، $D = M - N_2$ و $Q = M - N_2 - N_1$ ، می‌توان همگرایی روش TSWR را بررسی کرد. در فصل دوم، فرض می‌کنیم که Q یک M -ماتریس است و شکافت‌های فوق M -شکافت هستند، همگرایی روش TSWR را نشان داده و وابستگی آنرا نسبت به دو پارامتر h و θ بررسی می‌کنیم.

فرض کنیم مسأله‌ی مقدار اولیه به شکل یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل جبری (DAE)^۳ به صورت $Ay + By(t) = f(t)$ ، $y(t_0) = y_0$ باشد که در آن $t \in [t_0, T]$ و $y(t_0) = y_0$ یک ماتریس منفرد است. با اعمال یک شکافت برای A و یک شکافت مرکب برای B ، می‌توانیم روش WR و TSWR را برای حل این مسأله بکار ببریم، که در فصل سوم به تفصیل به این موضوع می‌پردازیم. همچنین در این فصل فرض می‌کنیم که شکافت‌های بکار رفته P -منظم و P -منظم مرکب هرمیتی باشند. با توجه به این مفروضات روی همگرایی روش TSWR بحث می‌کنیم و رفتار سرعت همگرایی را نسبت به افزایش دو پارامتر h و θ بررسی می‌کنیم.

در پایان فصل دوم و سوم شرایط کلی همگرایی در خصوص روش TSWR برای ODE و DAE را ارائه می‌کنیم، که مستقل از تکرارهای درونی است، ولی در عمل جواب توسط همین

^۱Two-stage waveform relaxation method

^۲Theta method

^۳Differential algebraic equations

تکرارهای درونی محاسبه می‌شود. بنابراین اگر شکافت‌هایی را که برای ماتریس ضرایب دستگاه در نظر می‌گیریم، شکافت‌هایی با سرعت همگرایی بالا (مانند گاوس-سایدل) باشند، روش TSWR در تعداد تکرار بیرونی کمتری به جواب همگرا شده و در نتیجه بازدهی آن بالاتر می‌شود. همگرایی TSWR با این فرض که B یک H -ماتریس باشد، در [۱۷] و یک ماتریس معین مثبت هرمیتی باشد، در [۱۹] نشان داده شده است.

در فصل چهارم به نتایج عددی می‌پردازیم و با استفاده از قضایای مقایسه‌ای برای همگرایی که در فصل‌های ۲ و ۳ آورده شده است، با تغییر پارامترهای h و θ تغییر شاع طیفی ماتریس تکرار را بررسی کرده و رفتار سرعت همگرایی را مشخص می‌کنیم. همچنین در ادامه با ارائه چند مثال عددی به مقایسه‌ی روش WR و TSWR می‌پردازیم و در پایان یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل جبری با مشتقات جزئی آورده و روش WR و TSWR را برای حل آن اعمال می‌کنیم.

فصل ۱

مروری بر تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل به یادآوری تعاریف و مفاهیم مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. گوییم $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژهی متناظر با بردار ویژهی ناصفر x برای ماتریس A است، هرگاه

$$Ax = \lambda x.$$

تعریف ۲.۱ مجموعه مقادیر ویژهی ماتریس A را طیف A می‌نامند و با $\sigma(A)$ نشان می‌دهند و شعاع طیفی A را با $\rho(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|.$$

تعریف ۳.۱ فرض کنیم $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$. می‌گوییم A با B متشابه است و با علامت $A \sim B$ نشان می‌دهیم، هرگاه ماتریس نامنفردی مانند P وجود داشته باشد، به طوریکه $A = P^{-1}BP$.

لم ۱.۱ فرض کنیم دو ماتریس A و B متشابه باشند. در این صورت دارای مقادیر ویژهی یکسانی هستند.

Spectral radius^۱

برهان: به [۹] مراجعه شود. \square

تعریف ۴.۱ یک نرم بردای روی فضای بردای حقیقی یا مختلط V ، تابعای است از V به \mathbb{R} به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $x \in V$ ، $\|x\| \geq 0$ ، بعلاوه $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ ؛

(ب) به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in V$ ، $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ ؛

(ج) به ازای هر $x, y \in V$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلث).

فرض کنید $x \in \mathbb{C}^n$ ، به ازای هر $p \geq 1$ ، نرم p -نرم بردار $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ به صورت $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ تعریف می شود. به ازای $p = 2$ ، نرم فوق را نرم اقلیدسی^۲ و به ازای $p = 1$ ، نرم مجموع قدرمطلق^۳ نامند.

تعریف ۵.۱ یک نرم ماتریسی روی $\mathbb{C}^{m \times n}$ تابعای است از $\mathbb{C}^{m \times n}$ به \mathbb{R} به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

(الف) به ازای هر $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، $\|A\| \geq 0$ ، بعلاوه $\|A\| = 0$ اگر و تنها اگر $A = 0$ ؛

(ب) به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ و $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ ؛

(ج) به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

تعریف ۶.۱ نرم ماتریسی $\|\cdot\|$ روی $\mathbb{C}^{n \times n}$ خاصیت ضربی دارد هرگاه به ازای هر $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ داشته باشیم، $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Norm^۱
Euclidean norm^۲
Absolute sum norm^۳

لم ۲.۱ فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نرم ماتریسی باشد که خاصیت ضربی دارد. در این صورت

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k}.$$

برهان: به [۳] مراجعه شود. \square

تعریف ۷.۱ فرض کنید $\|\cdot\|$ یک نرم برداری روی \mathbb{C}^n باشد و $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. در این صورت نرم طبیعی (یا نرم القایی)^۱ متناظر به این نرم برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

با توجه به اینکه نرم، یک تابع به طور یکنواخت پیوسته است ([۹]) و همچنین ماکزیمم توابع پیوسته روی مجموعه‌های بسته و کراندار موجود هستند، لذا در تعریف فوق $\|A\|$ وجود دارد.

تعریف ۸.۱ نرم ماتریسی $\|\cdot\|$ را نسبت به نرم برداری $\|\cdot\|_v$ روی \mathbb{C}^n و $\|\cdot\|_w$ روی \mathbb{C}^m سازگار گویند، هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n$ و $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ داشته باشیم

$$\|Ax\|_w \leq \|A\| \|x\|_v.$$

لم ۳.۱ اگر $\|\cdot\|$ یک نرم برداری باشد و $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ، آنگاه $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

برهان:

$$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max_{\|x\|=1} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

فرض کردیم $x \neq 0$ ، بنابراین

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \max_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|.$$

در این صورت

$$\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|.$$

به این ترتیب حکم ثابت می‌شود. \square

قضیه ۱.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$. اگر $\|\cdot\|_2$ نرم طبیعی تولید شده توسط نرم برداری اقلیدسی باشد، آنگاه $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$.

برهان: به [۱] مراجعه شود. \square

قضیه ۲.۱ برای هر ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، و نرم طبیعی $\|\cdot\|_2$ ، داریم

$$\rho(A) \leq \|A\|_2.$$

برهان: به [۱] مراجعه شود. \square

قضیه ۳.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(الف) سری $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ همگراست (می‌دانیم که $A^0 = I$);

(ب) $\rho(A) < 1$;

(ج) $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

در هر کدام از حالت‌های فوق $I - A$ معکوس پذیر است و $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$.

برهان: به [۱] مراجعه شود. \square

۱.۱ ماتریس‌های نامنفی

تعریف ۹.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. ماتریس $A = (a_{ij})$ را نامنفی (مثبت) گوئیم و با $A \geq 0$ ($A > 0$) نشان می‌دهیم هرگاه برای هر i و j داشته باشیم $a_{ij} \geq 0$ ($a_{ij} > 0$) و A را معکوس پذیر نامنفی گوئیم هرگاه A^{-1} نامنفی باشد.

تعریف ۱۰.۱ ماتریس A را یک M -ماتریس می‌نامند، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند s و ماتریس نامنفی مانند B وجود داشته باشند به طوری که

$$A = sI - B, \quad \rho(B) < s,$$

که در آن I ماتریس همانی است.

قضیه ۴.۱ ماتریس $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک M -ماتریس است اگر و تنها اگر A نامنفرد باشد، $A^{-1} \geq 0$ ، $a_{ij} \leq 0$ ، $i \neq j$ و $a_{ii} > 0$ ، $i = 1, \dots, n$.

برهان: فرض کنید A یک M -ماتریس باشد. در این صورت به ازای s ای مثبت داریم

$$A = sI - B, \quad B \geq 0, \quad \rho(B) < s. \quad (1.1)$$

هر مقدار ویژه λ از A به صورت $\lambda = s - \mu$ است که در آن μ یک مقدار ویژه B است. از اینکه $\rho(B) < s$ ، نتیجه می‌گیریم که $|\mu| < s$. بنابراین $\lambda \neq 0$ و در نتیجه A نامنفرد است. قرار می‌دهیم $T = \frac{1}{s}B \geq 0$ داریم

$$\rho(T) = \frac{1}{s}\rho(B) < 1.$$

بنابراین با توجه به قضیه ۳.۱ داریم

$$A^{-1} = [s(I - T)]^{-1} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} T^k \geq 0.$$

با توجه به رابطه (۱.۱)، به وضوح برای هر i و j با شرط $i \neq j$ ، $a_{ij} \leq 0$. از طرفی فرض کنید $A^{-1} = C = (c_{ij})$. در این صورت $AC = I$ و در نتیجه به ازای هر i ، $i = 1, \dots, n$ داریم

$$(AC)_{ii} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{ji} = 1 \Rightarrow a_{ii}c_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}c_{ji}.$$

سمت راست این عبارت مثبت است و $c_{ii} \geq 0$. بنابراین $a_{ii} > 0$.

برعکس، فرض کنید که A نامنفرد باشد، $A^{-1} \geq 0$ ، $a_{ij} \leq 0$ ، $i \neq j$ و $a_{ii} > 0$ ،

$i = 1, \dots, n$. نشان می‌دهیم که A یک M -ماتریس است. قرار می‌دهیم $s = \max_i a_{ii}$ و

$$B = sI - A.$$

در این صورت داریم

$$A = sI - B, \quad B \geq 0, \quad s > 0.$$

ادعا می‌کنیم که $\rho(B) < s$. فرض کنید که (λ, x) یک زوج ویژه B باشد. در نتیجه

$$\begin{aligned} \lambda x = Bx &\Rightarrow |\lambda||x| = |Bx| \leq |B||x| \\ &\Rightarrow (sI - B)|x| \leq (s - |\lambda|)|x| \\ &\Rightarrow A|x| \leq (s - |\lambda|)|x| \\ &\Rightarrow 0 \leq |x| \leq (s - |\lambda|)A^{-1}|x|. \end{aligned} \quad (2.1)$$

از اینکه $A^{-1}|x| \geq 0$ ، نتیجه می‌گیریم که $s - |\lambda| \geq 0$. اما $s - |\lambda| \neq 0$ ، زیرا در غیر این صورت بنا به رابطه‌ی (۲.۱) داریم $x \neq 0$ که غیر ممکن است زیرا x یک بردار ویژه B است. بنابراین $s - |\lambda| > 0$ ، و این به این معنی است که $\rho(B) < s$. \square

قضیه‌ی زیر معروف به قضیه‌ی پرون-فروبنیوس^۱ است و یکی از قضایای مهم و اساسی برای ماتریس‌های مثبت است، که در این بخش به صورت خلاصه شده‌ای از آن اکتفا می‌کنیم.

قضیه ۵.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ و $A > 0$. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) $\rho(A)$ یک مقدار ویژه‌ی A است و بعلاوه بردار مثبتی مانند $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد بطوریکه $Ax = \rho(A)x$.

(ب) $\lim_{m \rightarrow \infty} (\rho(A)^{-1}A)^m = L$ که در آن $L = xy^T$ و $Ax = \rho(A)x$ و $A^T y = \rho(A)y$ و $x^T y = 1$ هستند به طوری که $x, y \in \mathbb{C}^n$.

برهان: به [۹] مراجعه شود. \square

لم ۴.۱ فرض کنید T یک ماتریس نامنفی باشد، در این صورت $\rho(T) < 1$ اگر و تنها اگر $(I - T)^{-1}$ موجود باشد و $(I - T)^{-1} \geq 0$.

^۱Perron-Frobenius

برهان: فرض کنید $\rho(T) < 1$. با فرض $s = 1$ داریم

$$I - T = sI - T, \quad \rho(T) < s, \quad T \geq 0.$$

لذا بنا به تعریف $(I - T)$ یک M -ماتریس است. در این صورت با توجه به قضیه ۴.۱ $I - T$ نامنفرد بوده و $(I - T)^{-1} \geq 0$. بنا بر قضیه‌ی پرون-فروبنیوس $\rho(T)$ یک مقدار ویژه‌ی T است و یک بردار ویژه‌ی نامنفی مانند x وابسته به $\rho(T)$ برای ماتریس T وجود دارد، به طوری که

$$Tx = \rho(T)x, \quad x \geq 0, \quad x \neq 0.$$

از اینکه $(I - T)^{-1}$ موجود است، داریم

$$(I - T)^{-1}x = \rho((I - T)^{-1})x = \frac{1}{\rho(I - T)}x = \frac{1}{1 - \rho(T)}x.$$

از طرفی x و $(I - T)^{-1}$ نامنفی هستند. بنابراین

$$1 - \rho(T) > 0 \Rightarrow \rho(T) < 1.$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌گردد. \square

لم ۵.۱ فرض کنید A ، یک M -ماتریس باشد و $\alpha \geq 0$. آنگاه $I + \alpha A$ نیز یک M -ماتریس است.

برهان: بنا بر تعریف چون A یک M -ماتریس است، می‌توان A را به صورت زیر نوشت:

$$A = sI - B, \quad B \geq 0, \quad s > 0, \quad \rho(B) \leq s.$$

بنابراین

$$I + \alpha A = I + \alpha(sI - B) = I + \alpha sI - \alpha B = (1 + \alpha s)I - \alpha B.$$

از $B \geq 0$ و $\alpha \geq 0$ ، نتیجه می‌گیریم $\alpha B \geq 0$ و

$$\alpha \geq 0, \quad s > 0 \Rightarrow 1 + \alpha s > 0.$$

از طرفی

$$\rho(\alpha B) = \alpha \rho(B) \leq \alpha s \Rightarrow \rho(\alpha B) \leq \alpha s \Rightarrow \rho(\alpha B) < 1 + \alpha s.$$

بنابراین $I + \alpha A$ یک M -ماتریس است. \square

قضیه ۶.۱ اگر $A \geq 0$ ، آنگاه برای هر بردار مثبت $x \in \mathbb{R}^n$ رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

برهان: به [۹] مراجعه شود. \square

قضیه ۷.۱ فرض کنید $A \geq 0$. در این صورت احکام زیر برقرارند.

(الف) فرض کنید $Ax \geq \alpha x$ که در آن x و α به ترتیب بردار نامنفی و اسکالر مثبت هستند.

در این صورت $\rho(A) \geq \alpha$.

(ب) فرض کنید $Ax \leq \alpha x$ که در آن x و α به ترتیب بردار نامنفی و اسکالر مثبت هستند.

در این صورت $\rho(A) \leq \alpha$.

(ج) A یک مقدار ویژه‌ی حقیقی نامنفی مانند $\lambda \geq 0$ ، متناظر با بردار ویژه‌ی نامنفی $x \geq 0$

دارد. به طوری که $\lambda = \rho(A)$.

(د) فرض کنیم $A \geq B \geq 0$ ، که در آن B یک ماتریس نامنفی است. در این صورت

$$\rho(A) \geq \rho(B)$$

برهان: (الف) فرض کنیم $Ax \geq \alpha x$. در این صورت می‌توان نوشت

$$\alpha \leq \min_{1 \leq i \leq n} x_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

با توجه به قضیه‌ی ۶.۱ داریم

$$\alpha \leq \min_{1 \leq i \leq n} x_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \rho(A) \Rightarrow \alpha \leq \rho(A).$$

(ب) اثبات مشابه قسمت (الف) است. فرض کنیم $Ax \leq \alpha x$. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۶.۱ داریم

$$\alpha \geq \max_{1 \leq i \leq n} x_i^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq \rho(A) \Rightarrow \alpha \geq \rho(A).$$

(ج) از اینکه x یک بردار ویژه‌ی مثبت و A یک ماتریس نامنفی است، از تساوی $Ax = \lambda x$ نتیجه می‌گیریم که $\lambda \geq 0$. تساوی فوق را می‌توان به صورت $\lambda x \leq Ax \leq \lambda x$ نوشت. حال با استفاده از قسمت (الف) و (ب) داریم

$$\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda \Rightarrow \lambda = \rho(A).$$

(د) طبق لم ۲.۱ برای هر نرم ماتریسی $\|\cdot\|$ که خاصیت ضربی دارد، می‌توان نوشت

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_1^{\frac{1}{k}}.$$

از طرفی فرض کردیم $A \geq B$ ، بنابراین به ازای هر $k \geq 0$ ، $A^k \geq B^k$. در این صورت برای نرم-۱ ماتریسی داریم

$$\|A^k\|_1 \geq \|B^k\|_1.$$

بنابراین

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_1^{\frac{1}{k}} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \|B^k\|_1^{\frac{1}{k}} = \rho(B) \Rightarrow \rho(A) \geq \rho(B).$$

و به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌گردد. \square

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$. در این صورت $A = M - N$ را یک «شکافت» از A گویند، هرگاه M نامنفرد باشد.

تعریف ۱۲.۱ فرض کنید $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$. در این صورت شکافت $A = M - N$

(الف) یک شکافت منظم ضعیف است، هرگاه $M^{-1} \geq 0$ و $M^{-1}N \geq 0$.

(ب) یک شکافت منظم است، هرگاه $M^{-1} \geq 0$ و $N \geq 0$.

(ج) یک M -شکافت است، هرگاه M یک M -ماتریس باشد و $N \geq 0$.

بوضوح هر M -شکافت، یک شکافت منظم است، همچنین هر شکافت منظم، یک شکافت منظم ضعیف است، ولی عکس گزاره‌های فوق همواره درست نیست. اگر $A = M - N_1 - N_2$ و $M_1 = M - N_2$ دو شکافت باشند، در این صورت $A = M - N_1 - N_2$ یک شکافت مرکب است.

تعریف ۱۳.۱ فرض کنید $A = M - N_1 - N_2$ و $M_1 = M - N_2$ ، M -شکافت باشند، در این صورت $A = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب است. همچنین اگر $A = M_1 - N_1$ و $M_1 = M - N_2$ ، دو شکافت منظم باشند، در این صورت $A = M - N_1 - N_2$ یک شکافت منظم مرکب است.

قضیه ۸.۱ فرض کنید $A = M - N$ یک شکافت منظم برای ماتریس A باشد، در این صورت $\rho(M^{-1}N) < 1$ ، اگر و تنها اگر A یک ماتریس نامنفرد بوده و $A^{-1} \geq 0$.

برهان: فرض کنید که $T = M^{-1}N$ و $\rho(T) < 1$. در این صورت بنا برلم ۴.۱، $(I - T)^{-1}$ موجود است و $(I - T)^{-1} \geq 0$ و از طرفی

$$A = M - N = M(I - M^{-1}N) = M(I - T).$$

لذا A نامنفرد بوده و داریم

$$A^{-1} = (I - T)^{-1}M^{-1} \geq 0.$$

برای اثبات عکس قضیه از $A = M(I - T)$ نتیجه می‌گیریم، $I - T$ نامنفرد است و

$$A^{-1}N = (M(I - T))^{-1}N = (I - T)^{-1}M^{-1}N = (I - T)^{-1}T.$$

از اینکه $A = M - N$ یک شکافت منظم است، می‌توان نتیجه گرفت ماتریس $T = M^{-1}N$ نامنفی است. در این صورت بنا بر قضیه‌ی پرون-فروبنیوس $\rho(T)$ یک مقدار ویژه‌ی T است

و برداری مانند x وابسته به مقدار ویژه $\rho(T)$ وجود دارد به طوری که

$$Tx = \rho(T)x, \quad x \geq 0, \quad x \neq 0.$$

در این صورت

$$A^{-1}Nx = \frac{\rho(T)}{1 - \rho(T)}x.$$

چون x و $A^{-1}N$ نامنفی هستند، نتیجه می‌گیریم

$$\frac{\rho(T)}{1 - \rho(T)} \geq 0.$$

و این رابطه زمانی برقرار است که $0 \leq \rho(T) < 1$. از طرفی $I - T$ نامنفرد است، پس تمام مقادیر ویژه آن ناصفر هستند. در این صورت $\rho(T) \neq 1$ و بنابراین نتیجه می‌گیریم $\rho(T) < 1$. \square

در ادامه قضیه‌ای بیان شده است، که از دسته‌ی قضایای مقایسه‌ای برای ماتریس‌های نامنفی است و جهت اثبات آن نیازمند به ذکر دو لم اولیه هستیم، که به دلیل حجم زیاد مطالب و عدم گنجایش آن در این پایان نامه از آوردن برهان آن پرهیز می‌کنیم.

قضیه ۹.۱ فرض کنید $A = M_1 - N_1$ و $A = M_2 - N_2$ دو شکافت منظم ضعیف برای ماتریس A باشند، به طوری که $M_2^{-1} \geq M_1^{-1}$ و فرض کنید x_1 و x_2 به ترتیب بردارهای ویژه نامنفی پرون-فروبنیوس ماتریس‌های $T_1 = M_1^{-1}N_1$ و $T_2 = M_2^{-1}N_2$ باشند. اگر $N_2 x_2 \geq 0$ یا $N_1 x_1 \geq 0$ ، آنگاه داریم $\rho(T_2) \leq \rho(T_1)$.

برهان: به [۲] مراجعه شود. \square

۲.۱ ماتریس‌های معین مثبت هرمیتی

فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، در این صورت ترانهاده‌ی هرمیتی آن را با A^H نشان می‌دهیم و درایه‌ی (i, j) -ام آن برابر است با مزدوج درایه‌ی (j, i) -ام ماتریس A ، یعنی $(A^H)_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

تعریف ۱۴.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را هرمیتی گوئیم، هرگاه $A^H = A$.

تعریف ۱۵.۱ ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ را معین مثبت هرمیتی گوئیم، هرگاه

(الف) A هرمیتی باشد، یعنی $A^H = A$ ؛

(ب) برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ ، $x^H A x > 0$ ، $x \neq 0$.

ماتریس A را نیمه معین مثبت هرمیتی گویند هرگاه (الف) برقرار باشد و برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ ، $x^H A x \geq 0$.

لازم به ذکر است که اگر ماتریس A هرمیتی و $x \in \mathbb{C}^n$ آنگاه $x^H A x$ عددی حقیقی است.

زیرا فرض کنید A هرمیتی، $x \in \mathbb{C}^n$ و $y = x^H A x$. در این صورت

$$\bar{y} = y^H = (x^H A x)^H = x^H A^H x = x^H A x = y.$$

بنابراین y یک مقدار حقیقی است.

فرض کنیم $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ معین مثبت هرمیتی (نیمه معین مثبت هرمیتی) باشد، نماد

$A \succ 0$ یا $A \succeq 0$ را برای آن بکار می‌بریم، که در آن 0 ماتریس صفر هم مرتبه با A می‌باشد.

همچنین $A \succ B$ ($A \succeq B$) نشان می‌دهد که $A - B$ معین مثبت هرمیتی (نیمه معین مثبت هرمیتی) است.

لم ۶.۱ فرض کنید $A, B, C, D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(الف) فرض کنید $A \succ B$ و $C \succ D$. در این صورت $A + C \succ B + D$.

(ب) اگر $A \succ B$ و $C \succ 0$ ، آنگاه داریم $AC \succ BC$.

(ج) فرض کنید $A \succ B \succ 0$ و $C \succ D \succ 0$. در این صورت $AC \succ BD \succ 0$.

(د) فرض کنید $A \succ B$ و $B \succ A$. در این صورت داریم $A = B$.

(ه) اگر $A \succ B$ ، آنگاه $A^k \succ B^k$ ، که در آن $k = 1, 2, \dots$.

برهان: به [۵] مراجعه شود. \square

تمام گزاره‌های بیان شده در لم فوق، برای حالتی که ماتریس‌های آن نیمه معین مثبت هرمیتی نیز باشند، برقرارند.

لم ۷.۱ فرض کنیم $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ دو ماتریس معین مثبت هرمیتی باشند. در این صورت هر ترکیب خطی نامنفی از این دو ماتریس، معین مثبت هرمیتی است.

برهان: فرض کنیم $A, B \succ \circ$. در این صورت به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n, x \neq \circ$ ، داریم $x^H Ax > \circ$ و $x^H Bx > \circ$. فرض کنیم $\alpha A + \beta B$ یک ترکیب خطی نامنفی باشد. در این صورت

$$x^H (\alpha A + \beta B)x = \alpha x^H Ax + \beta x^H Bx > \circ \rightarrow \alpha A + \beta B \succ \circ.$$

بنابراین $\alpha A + \beta B$ معین مثبت هرمیتی است. \square

ترکیب خطی بیان شده در این لم، قابل تعمیم به هر تعداد متناهی از ماتریس‌های معین مثبت هرمیتی است. همچنین اگر یکی از این ماتریس‌ها معین مثبت و بقیه نیمه معین مثبت باشند، باز هم حکم برقرار است.

قضیه ۱۰.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ هرمیتی باشد. در این صورت

(الف) A معین مثبت (نیمه معین مثبت) است، اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه‌ی آن مثبت (نامنفی) باشند.

(ب) ماتریس نامنفرد A معین مثبت است اگر و تنها اگر A^{-1} معین مثبت باشد.

(ج) A معین مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس نامنفرد $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ وجود داشته باشد، به طوری که $B^H AB$ معین مثبت باشد.

(د) فرض کنید A نیمه معین مثبت باشد، در این صورت A معین مثبت هرمیتی است اگر و تنها اگر $\text{rank}(A) = n$.

(ه) A معین مثبت است اگر و تنها اگر ماتریس نامنفردی مانند $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ موجود باشد به طوری که $A = B^H B$.

برهان: به [۹] مراجعه شود. \square

نتیجه ۱.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس نیمه معین مثبت هرمیتی است. در این صورت A معین مثبت هرمیتی است اگر و تنها اگر A نامنفرد باشد.

برهان: به وضوح از قضیه‌ی ۱۰.۱ قسمت (د)، نتیجه می‌شود. \square

نتیجه ۲.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی (نیمه معین مثبت هرمیتی) باشد. در این صورت A^k و $k = 1, 2, \dots$ معین مثبت هرمیتی (نیمه معین مثبت هرمیتی) است.

برهان: می‌دانیم که مقادیر ویژه‌ی A^k به صورت $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ می‌باشند که در آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی A هستند. در نتیجه حکم به راحتی از قضیه‌ی قبل قسمت (الف)، حاصل می‌شود. \square

تعریف ۱۶.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $A = M - N$ یک شکافت برای ماتریس A باشد. در این صورت

(الف) این شکافت را P -منظم می‌نامیم هرگاه $M^H + N \succ \circ$ ؛

(ب) این شکافت را P -منظم هرمیتی می‌نامیم هرگاه $M \succ \circ$ و $N \succeq \circ$.

تعریف ۱۷.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $A = M_2 - N_2 - N_1$ یک شکافت مرکب برای ماتریس A باشد. در این صورت

(الف) این شکافت را P -منظم مرکب می‌نامیم هرگاه $M_1 = M_2 - N_2$ و $M_1 - N_1 = A$

شکافت P -منظم باشند، یعنی $M_2^H + N_2 \succ \circ$ و $(M_2 - N_2)^H + N_1 \succ \circ$ ؛

(ب) این شکافت را P -منظم مرکب هرمیتی می‌نامیم هرگاه $M_2 \succ \circ$ و $N_i \succeq \circ$ و

$i = 1, 2$.

لم ۸.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. شکافت $A = M - N$ را برای ماتریس هرمیتی A در نظر می‌گیریم. در این صورت $A - H^H A H = (I - H^H)(M^H + N)(I - H)$ ، که در آن $H = M^{-1}N$.

برهان: داریم

$$AH = (M - N)M^{-1}N = N - NM^{-1}N = N(I - M^{-1}N) = N(I - H).$$

در این صورت

$$\begin{aligned} H^H A H &= H^H N(I - H) - AH + AH = H^H N(I - H) - N(I - H) + AH \\ &= -(I - H^H)N(I - H) + AH \\ &= -(I - H^H)(N - M^H + M^H)(I - H) + AH \\ &= -(I - H^H)(M^H + N)(I - H) + AH + (I - H^H)M^H(I - H), \\ (I - H^H)M^H &= M^H - (MH)^H = M^H - N^H = (M - N)^H = A^H. \end{aligned}$$

چون A هرمیتی است، بنابراین $H^H A H$ به صورت زیر ساده می‌شود،

$$\begin{aligned} H^H A H &= -(I - H^H)(M^H + N)(I - H) + AH + A^H(I - H) \\ &= -(I - H^H)(M^H + N)(I - H) + A. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} A - H^H A H &= A + (I - H^H)(M^H + N)(I - H) - A \\ &= (I - H^H)(M^H + N)(I - H). \end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود. \square

لم ۹.۱ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $A = M - N$ یک شکافت P -منظم برای ماتریس هرمیتی A باشد. در این صورت $\rho(M^{-1}N) < 1$ اگر و تنها اگر $A \succ \circ$.

برهان: فرض کنیم $A \succ 0$ و $A = M - N$ یک شکافت P -منظم باشد. در این صورت $M^H + N \succ 0$. قرار می‌دهیم $M^{-1}N = H$. فرض کنیم x بردار ویژه‌ی دلخواه H متناظر با مقدار ویژه‌ی λ باشد. توجه کنیم که $\lambda \neq 1$ ، زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت

$$Hx = x \Rightarrow M^{-1}Nx = x \Rightarrow Nx = Mx.$$

بنابراین $(M - N)x = 0$. از اینکه x یک بردار ویژه است، با معین مثبت بودن A در تناقض است. بنابراین ۸.۱ می‌توان نوشت،

$$A - H^H A H = (I - H^H)(M^H + N)(I - H).$$

بنابراین

$$\begin{aligned} x^H(A - H^H A H)x &= x^H(I - H^H)(M^H + N)(I - H)x \\ \Rightarrow x^H A x - (Ax)^H A(Hx) &= ((I - H)x)^H(M^H + N)((I - H)x) \\ \Rightarrow x^H A x - \lambda x^H A \lambda x &= |1 - \lambda|^2 x^H(M^H + N)x \\ \Rightarrow (1 - |\lambda|^2)x^H A x &= |1 - \lambda|^2 x^H(M^H + N)x. \end{aligned}$$

چون $A \succ 0$ و $M^H + N \succ 0$ ، بنابراین می‌توان نوشت

$$1 - |\lambda|^2 = |1 - \lambda|^2 \frac{x^H(M^H + N)x}{x^H A x} > 0 \Rightarrow |\lambda| < 1 \Rightarrow \rho(H) < 1.$$

برای اثبات عکس قضیه فرض کنیم $\rho(H) < 1$. در این صورت دنباله‌ی $x^{k+1} = Hx^k$ ، $k = 0, 1, \dots$ با هر x^0 ای به صفر همگراست. تمام جملات این دنباله متمایزند، زیرا اگر $x^{k+1} = x^k$ باشد، در این صورت $x^k = Hx^k$ و این نتیجه می‌دهد که $\lambda = 1$ ، که با فرض $\rho(H) < 1$ در تناقض است. می‌دانیم که $M^H + N \succ 0$. بنابراین

$$(x^k)^H A x^k - (x^{k+1})^H A x^{k+1} = (x^k - x^{k+1})^H(M^H + N)(x^k - x^{k+1}) > 0.$$

در نتیجه می‌توان نوشت

$$\operatorname{Re}((x^k)^H A x^k - (x^{k+1})^H A x^{k+1}) > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}((x^{k+1})^H A x^{k+1}) < \operatorname{Re}((x^k)^H A x^k).$$

فرض کنیم A معین مثبت نباشد. در این صورت برداری مانند x° وجود دارد به طوری که $Re((x^\circ)^H Ax^\circ) \leq 0$. در این صورت می‌توان نوشت

$$Re((x^\circ)^H Ax^\circ) \leq 0 < Re((x^1)^H Ax^1) < Re((x^2)^H Ax^2) < 0.$$

و این با همگرا بودن دنباله‌ی $\{x^k\}$ به صفر در تناقض است. بنابراین A معین مثبت هرمیتی است. \square

لم ۱۰.۱ برای ماتریس نامنفرد K و ماتریس H با این شرط که $(I - H)^{-1}$ موجود است، دوزوج ماتریس منحصر بفرد E و Q به صورت $E = K(I - H)^{-1}$ و $Q = E - K$ وجود دارند که در آن نامنفرد بوده و $H = E^{-1}Q$ و $K = E - Q$.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم دو ماتریس E و Q وجود دارند. می‌توان برای ماتریس نامنفرد K شکافت $K = E - Q$ را در نظر گرفت، که در آن E یک ماتریس نامنفرد است. طبق فرض K و $(I - H)$ نامنفرد هستند. قرار می‌دهیم $E = K(I - H)^{-1}$ ، نشان می‌دهیم $H = E^{-1}Q$.

$$E^{-1}Q = E^{-1}(E - K) = I - E^{-1}K = I - (I - H)K^{-1}K = H.$$

حال نشان می‌دهیم که E و Q منحصر بفرد هستند. فرض کنیم \tilde{E} و \tilde{Q} دو ماتریس دیگری باشند که در شرایط فوق صدق می‌کنند، در این صورت $K = \tilde{E} - \tilde{Q}$ ، به طوری که $H = \tilde{E}^{-1}\tilde{Q}$.

$$K = \tilde{E} - \tilde{Q} \Rightarrow \tilde{Q} = \tilde{E} - K,$$

$$H = \tilde{E}^{-1}\tilde{Q} \Rightarrow \tilde{Q} = \tilde{E}H.$$

بنا بر روابط فوق می‌توان نوشت

$$\tilde{E}H = \tilde{E} - K \Rightarrow \tilde{E} - \tilde{E}H = K,$$

$$\tilde{E}(I - H) = K \Rightarrow \tilde{E} = K(I - H)^{-1} = E.$$

بنابراین $K = \tilde{E} - \tilde{Q} = E - \tilde{Q}$ در نتیجه $Q = \tilde{Q}$. \square

قضیه ۱۱.۱ فرض کنید $K \succ 0$ و $K = H - C$ یک شکافت P -منظم باشد. آنگاه شکافت منحصر بفرد $K = E - Q$ وجود دارد، به طوری که $(H^{-1}C)^s = E^{-1}Q$ و $s \geq 1$. بعلاوه این شکافت P -منظم است.

برهان: با توجه به اینکه K نامنفرد است، $(H - C)^{-1}$ موجود است. در این صورت طبق لم قبلی دو ماتریس منحصر بفرد E و Q وجود دارند، به طوری که $H^{-1}C = E^{-1}Q$ و شکافت P -منظم است. $K = E - Q$ ، حال به استقراء رابطه $(H^{-1}C)^s = E^{-1}Q$ را نشان می‌دهیم. به ازای $s = 1$ این رابطه درست است. فرض کنیم $(H^{-1}C)^{(s-1)} = E^{-1}Q$ ، چون شکافتهای $K = H - C$ و $K = E - Q$ P -منظم هستند، لذا ماتریس $T = E^{-1}QH^{-1}C$ شعاع طیفی کمتر از یک دارد و می‌دانیم که شکافت القایی $K = A - B$ توسط ماتریس T وجود دارد به طوری که این شکافت منحصر بفرد و P -منظم است، همچنین $T = A^{-1}B$. در این صورت با استفاده از فرض استقراء می‌توان نوشت

$$A^{-1}B = E^{-1}QH^{-1}C = (H^{-1}C)^{(s-1)}H^{-1}C = (H^{-1}C)^s.$$

از منحصر بفردی دو شکافت $K = H - C$ و $K = E - Q$ نتیجه می‌گیریم

$$A^{-1}B = (H^{-1}C)^s \Rightarrow E^{-1}Q = (H^{-1}C)^s.$$

بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌گردد. \square

قضیه ۱۲.۱ فرض کنیم $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. در این صورت $\rho(A) < 1$ ، اگر و تنها اگر ماتریس معین مثبت هرمیتی مانند B وجود داشته باشد، به طوری که $B - A^H B A$ معین مثبت هرمیتی باشد.

برهان: فرض کنیم ماتریس معین مثبت هرمیتی مانند B وجود داشته باشد به طوری که $B - A^H B A \succ 0$. قرار می‌دهیم $C = B^{-\frac{1}{2}}$ با استفاده از قسمت (ه) قضیه ۱۰.۱ می‌توان نوشت

$$B - A^H B A = C^H C - A^H C^H C H = C^H C - (CA)^H (CA) \succ 0.$$

بنابراین به ازای هر $x \in \mathbb{C}^n$ ، $x \neq 0$ ، داریم

$$\begin{aligned} x^H [C^H C - (CA)^H (CA)] x &= x^H C^H C x - x^H (CA)^H (CA) x, \\ &= (Cx)^H Cx - (CAx)^H (CAx) > 0. \end{aligned}$$

در این صورت

$$(Cx)^H Cx > (CAx)^H (CAx) \Rightarrow \|Cx\|_2 > \|CAx\|_2.$$

قرار می‌دهیم $y = Cx$ ، بنابراین

$$\|y\|_2 > \|CAC^{-1}y\|_2 \Rightarrow 1 > \frac{\|CAC^{-1}y\|_2}{\|y\|_2}.$$

با توجه به اینکه بردار x و در نتیجه بردار y ، دلخواه است می‌توان نوشت:

$$1 > \max \frac{\|CAC^{-1}y\|_2}{\|y\|_2} = \|CAC^{-1}\|_2.$$

در نتیجه با توجه به قضیه ۲.۱ داریم

$$\rho(A) = \rho(AC^{-1}C) = \rho(CAC^{-1}) \leq \|CAC^{-1}\|_2 < 1.$$

برای اثبات عکس قضیه فرض کنیم $\rho(A) < 1$. در این صورت ماتریس نامنفرد $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ وجود دارد به طوری که $\|CAC^{-1}\|_2 < 1$. با استفاده از قسمت (ه) قضیه ۱۰.۱ نتیجه می‌گیریم که $C^H C$ یک ماتریس معین مثبت هرمیتی است. قرار می‌دهیم $B = C^H C$. به ازای هر بردار $x \in \mathbb{C}^n$ ، $x \neq 0$ ، با استفاده از تعریف ۸.۱ داریم

$$\|CAC^{-1}\|_2 \|x\|_2 < \|x\|_2 \Rightarrow \|CAC^{-1}x\|_2 < \|x\|_2.$$

قرار می‌دهیم $C^{-1}x = y$. در این صورت

$$\begin{aligned} \|Cy\|_2 - \|CAy\|_2 > 0 &\Rightarrow (Cy)^H (Cy) - (CAy)^H (CAy) > 0, \\ y^H [C^H C - (CA)^H (CA)] y > 0 &\Rightarrow y^H [B - A^H B A] y > 0. \end{aligned}$$

بنابراین $B - A^H B A \succ 0$. \square

قضیه ۱۳.۱ (Courant-Fischer) فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ماتریس هرمیتی باشد. بعلاوه فرض کنید مقادیر ویژه‌ی آن به صورت صعودی $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ مرتب شده باشند. در این صورت برای عدد صحیح k که $1 \leq k \leq n$ و $x \in \mathbb{C}^n$ داریم

$$\min_{w_1, \dots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \max_{x \perp w_1, \dots, w_{n-k}} \frac{x^H A x}{x^H x} = \lambda_k.$$

برهان: به [۹] مراجعه شود. \square

قضیه ۱۴.۱ فرض کنید $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ هرمیتی باشند و $\lambda_i(A)$, $\lambda_i(B)$, $\lambda_i(A+B)$ به ترتیب مقادیر ویژه‌ی A , B , $A+B$ هستند که به صورت صعودی مرتب شده‌اند. در این صورت برای عدد صحیح k که $1 \leq k \leq n$ داریم

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

برهان: برای هر بردار $x \in \mathbb{C}^n$ رابطه‌ی زیر را داریم

$$\lambda_1(B) < \frac{x^H B x}{x^H x} < \lambda_n(B).$$

با استفاده از قضیه‌ی ۱۳.۱ می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \lambda_k(A+B) &= \min_{w_1, \dots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \max_{x \perp w_1, \dots, w_{n-k}} \frac{x^H (A+B)x}{x^H x} \\ &= \min_{w_1, \dots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \max_{x \perp w_1, \dots, w_{n-k}} \left(\frac{x^H A x}{x^H x} + \frac{x^H B x}{x^H x} \right) \\ &> \min_{w_1, \dots, w_{n-k} \in \mathbb{C}^n} \max_{x \perp w_1, \dots, w_{n-k}} \left(\frac{x^H A x}{x^H x} + \lambda_1(B) \right) = \lambda_k(A) + \lambda_1(B). \end{aligned}$$

به طریق مشابه می‌توان نشان داد $\lambda_k(A+B) < \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B).$$

بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌گردد. \square

نتیجه ۳.۱ فرض کنید $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ هرمیتی باشند و $B \succeq 0$. در این صورت

$$\lambda_k(A) \leq \lambda_k(A + B).$$

برهان: با استفاده از قضیه‌ی قبل و اینکه مقادیر ویژه‌ی B نامنفی است، می‌توان نوشت

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A + B) \Rightarrow \lambda_k(A) \leq \lambda_k(A + B).$$

و بدین ترتیب حکم حاصل می‌شود. \square

لم ۱۱.۱ فرض کنید $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $H, K \succeq 0$. همچنین $\lambda_k(H)$ و $\lambda_k(K)$ به ترتیب مقادیر ویژه‌ی H و K باشند، که به صورت صعودی مرتب شده‌اند. اگر $H \succeq K$ آنگاه $\lambda_k(H) \geq \lambda_k(K)$.

برهان: چون $H \succeq K$ ، بنابراین داریم $H - K \succeq 0$. در این صورت مقادیر ویژه‌ی $H - K$ نامنفی خواهد بود. قرار می‌دهیم $A = K$ و $B = H - K$ ، بنابراین با توجه به لم ۱۰.۱ می‌توان نوشت

$$\lambda_k(K) \leq \lambda_k(K + B) = \lambda_k(K + H - K) = \lambda_k(H).$$

\square

نتیجه ۴.۱ فرض کنید $H, K \succ 0$. اگر $H \succ K$ ، آنگاه $\lambda_k(H) > \lambda_k(K)$.

برهان: با توجه به اینکه $H \succ K$ بنابراین $H - K \succ 0$. در نتیجه مقادیر ویژه‌ی آن مثبت‌اند. بنابراین با استفاده از لم ۱۱.۱ حکم به وضوح حاصل می‌شود. \square

لم ۱۲.۱ فرض کنید $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ، $H \succ 0$ و K هرمیتی باشد. در این صورت ماتریس نامنفردی مانند $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ وجود دارد به طوری که $C^H K C = I$ و $C^H H C = I$.

برهان : به [۹] مراجعه شود. \square

قضیه ۱۵.۱ فرض کنید $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $H, K \succ \circ$. در این صورت $K \succ H$ اگر و تنها اگر $\rho(HK^{-1}) < 1$.

برهان : با توجه به لم ۱۲.۱ ماتریس نامنفردی مانند $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ وجود دارد به طوری که $S^H H S = D$ و $S^H K S = I$ ، که در آن ماتریس $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ، با اعضای قطری مثبت است. قرار می‌دهیم $C = S^{-1}$ ، در این صورت $K = C^H I C$ و $H = C^H D C$. از اینکه $K \succ H$ می‌توان نوشت

$$K \succ H \Leftrightarrow C^H I C \succ C^H D C \Leftrightarrow C^H (I - D) C \succ \circ.$$

با توجه به نامنفرد بودن C و با استفاده از قسمت (ج) قضیه ۱۰.۱ نتیجه می‌گیریم که $(I - D)$ معین مثبت هرمیتی است. بنابراین مقادیر ویژه‌ی آن مثبت اند و در نتیجه

$$1 - d_i > 0 \Rightarrow d_i < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

از طرفی

$$HK^{-1} = C^H D C (C^H I C)^{-1} = C^H D (C^H)^{-1} \Rightarrow HK^{-1} \sim D.$$

بنابراین HK^{-1} و D دارای مقادیر ویژه‌ی یکسانی هستند. فرض کنیم مقادیر ویژه‌ی HK^{-1} به صورت $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشند. با توجه به اینکه d_i ها مثبت هستند، نتیجه می‌گیریم که λ_i ها نیز مثبت می‌باشند. بنابراین می‌توان نوشت

$$d_i < 1 \Rightarrow \lambda_i < 1 \Rightarrow \rho(HK^{-1}) < 1.$$

\square

قضیه ۱۶.۱ فرض کنید $H, K \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $H, K \succ \circ$. در این صورت $K \succ H$ اگر و تنها اگر $K^{-1} \prec H^{-1}$.

برهان: فرض کنیم $K \succ H$ در این صورت با استفاده از قضیه ۱۵.۱ می توان نوشت

$$K \succ H \Leftrightarrow \rho(HK^{-1}) < 1.$$

از طرفی می دانیم $\rho(HK^{-1}) = \rho(K^{-1}H)$ ، در نتیجه $\rho(K^{-1}H) < 1$. با استفاده مجدد از قضیه ی قبل داریم

$$\rho(K^{-1}(H^{-1})^{-1}) < 1 \Leftrightarrow H^{-1} \succ K^{-1}.$$

□

قضیه ۱۷.۱ برای هر ماتریس معین مثبت هرمیتی $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس منحصر بفرد پایین مثلثی مانند $L = (l_{ij})$ با شرط $l_{ii} > 0$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ وجود دارد به طوری که $A = LL^H$. تجزیه ی ماتریس A به این صورت، تجزیه چولسکی^۱ نامیده می شود.

برهان: به [۱] مراجعه شود. □

قضیه ۱۸.۱ فرض کنید $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $A, B \succ 0$.

(الف) در این صورت $AB \succ 0$ اگر و تنها اگر A و B دارای خاصیت جابجایی نسبت به عمل ضرب باشند.

(ب) فرض کنیم A^{-1} موجود باشد آنگاه هر ماتریسی که با A دارای خاصیت جابجایی باشد، با A^{-1} نیز جابجا می شود.

(ج) هر ماتریسی که با A جابجا می شود، معکوسش نیز با A^{-1} جابجا می شود.

برهان: (الف) فرض کنیم $AB = BA$ ، نشان می دهیم $AB \succ 0$. ابتدا نشان می دهیم AB هرمیتی است. داریم

$$(AB)^H = B^H A^H = BA = AB.$$

تجزیه‌ی چولسکی $A = LL^H$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت داریم

$$AB = LL^H B \Rightarrow L^{-1}ABL = L^H BL.$$

بنابراین $L^H BL \sim AB$ ، در نتیجه مقادیر ویژه‌ی AB و $L^H BL$ برابرند. با توجه به اینکه $A \succ \circ$ ، واضح است که $L^H BL$ هرمیتی است. نشان می‌دهیم که معین مثبت است. برای هر $x \in \mathbb{C}^n$ ، داریم

$$x^H L^H BLx = (Lx)^H B(Lx) = y^H By > \circ.$$

که در آن $Lx = y$. با استفاده از قسمت (الف) قضیه‌ی ۱۰.۱ نتیجه می‌گیریم که مقادیر ویژه‌ی $L^H BL$ مثبت است. در این صورت مقادیر ویژه‌ی AB مثبت‌اند و چون هرمیتی است، با استفاده از قسمت (الف) قضیه‌ی ۱۰.۱ می‌توان نتیجه گرفت که معین مثبت هرمیتی است و بنابراین $AB \succ \circ$. حال فرض کنیم $AB \succ \circ$. نشان می‌دهیم $AB = BA$. با توجه به اینکه $A, B \succ \circ$ ، با استفاده از قسمت (ه) قضیه‌ی ۱۰.۱ دو ماتریس نامنفرد C_1 و C_2 موجودند، به طوری که $A = C_1^H C_1$ و $B = C_2^H C_2$ ، در این صورت داریم

$$\begin{aligned} BA &= C_2^H C_2 C_1^H C_1, \\ \Rightarrow (BA)^H &= C_1^H C_1 C_2^H C_2 = AB = (AB)^H, \\ \Rightarrow BA &= AB. \end{aligned}$$

(ب) فرض کنیم A^{-1} موجود و C ماتریسی باشد که با A جابجا می‌شود. در این صورت

$$AC = CA \Rightarrow C^{-1}AC = A \Rightarrow C^{-1}ACC^{-1} = AC^{-1} \Rightarrow C^{-1}A = AC^{-1}.$$

(ج) فرض کنیم C ماتریسی باشد که با A جابجا می‌شود، در این صورت با استفاده از قسمت (الف) نتیجه می‌گیریم $AC \succ \circ$. بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۱ قسمت (ج) داریم

$$(AC)^{-1} \succ \circ \Rightarrow C^{-1}A^{-1} \succ \circ.$$

با استفاده از قسمت (الف) می‌توان نتیجه گرفت، C^{-1} با A^{-1} دارای خاصیت جابجایی است.

□

۳.۱ صورت کلی روش‌های تکراری ایستا

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \quad (۳.۱)$$

را در نظر بگیرید که در آن $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ یک ماتریس نامنفرد و $x, b \in \mathbb{C}^n$. حال فرض کنید $A = M - N$ یک شکافت از A باشد. در این صورت دستگاه (۳.۱) را می‌توان به صورت

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b.$$

نوشت. با استفاده از این رابطه دنباله‌ی

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b,$$

را می‌سازیم که در آن $x^{(0)}$ یک بردار دلخواه است. قرار می‌دهیم $T = M^{-1}N$ و $f = M^{-1}b$. در این صورت رابطه‌ی اخیر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + f. \quad (۴.۱)$$

این رابطه صورت کلی یک روش تکراری است و چون در این رابطه ماتریس T در هر تکرار k ثابت است، بنابراین آن را روش تکراری ایستا می‌نامیم. ماتریس T ماتریس تکرار روش نامیده می‌شود. لم زیر شرط لازم و کافی برای همگرایی یک روش ایستا را بیان می‌کند.

لم ۱۳.۱ فرض کنید $A = M - N$ یک شکافت از A باشد، $T = M^{-1}N$ و $f = M^{-1}b$. شرط لازم و کافی برای همگرایی روند تکراری $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + f$ به ازای هر حدس اولیه‌ی $x^{(0)}$ به جواب دستگاه $Ax = b$ این است که $\rho(T) < 1$.

برهان: به [۱] مراجعه شود. \square

در صورت برقراری لم اخیر برای رابطه‌ی تکراری (۴.۱) شکافت $A = M - N$ را شکافت همگرا می‌نامیم. همچنین دنباله‌ی T^k به ماتریس صفر همگرا خواهد بود. از لم ۲.۱ می‌دانیم که

$$\rho(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

این رابطه نشان می‌دهد که هر چه $\rho(T)$ کوچکتر باشد، نسبت همگرایی کوچکتر و در نتیجه سرعت همگرایی بیشتر خواهد بود.

قضیه ۱۹.۱ روش تکراری $x^{k+1} = Hx^k + Sb + p_k$ را در نظر بگیرید، که در آن S نامنفرد بوده و $\rho(H) < 1$ و $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$. در این صورت ماتریس منحصربفردی مانند K و شکافت منحصربفرد $K = M - N$ وجود دارد، به طوری که $M = S^{-1}$ و $H = M^{-1}N$. و این روش تکراری به جواب دستگاه $Kx = C$ همگراست، که در آن $C = b + S^{-1}p$.

برهان: از اینکه S نامنفرد بوده و $\rho(H) < 1$ و $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = p$ ، طبق لم قبل می‌توان نتیجه گرفت که این روش تکراری همگراست. فرض کنیم به بردار ثابتی مانند x^* همگرا باشد. در این صورت $x^* = Hx^* + Sb + p$. نشان می‌دهیم که ماتریس منحصربفردی مانند K با شرایط فوق وجود دارد. قرار می‌دهیم $M = S^{-1}$ و $N = MH$. واضح است که ماتریس‌های M و N حاصل شده ثابت هستند. قرار می‌دهیم $K = M - N$ ، در این صورت روابط زیر برقرارند:

$$K = M - N = M - MH = M(I - H),$$

$$M^{-1}N = M^{-1}(M - K) = I - M^{-1}K = I - M^{-1}M(I - H) = H.$$

برای اثبات منحصربفردی فرض کنیم \tilde{K} و \tilde{N} دو ماتریس دیگری باشند، به طوری که $\tilde{K} = M - \tilde{N}$. در این صورت

$$\tilde{K} = M - \tilde{N} = M(I - M^{-1}\tilde{N}) = M(I - H) = K.$$

$$\tilde{N} = M - \tilde{K} = M - K = N.$$

حال نشان می‌دهیم که این روش تکراری به جواب دستگاه $Kx = C$ همگراست. از رابطه‌ی $x^* = Hx^* + Sb + p$ نتیجه می‌گیریم که $(I - H)x^* = Sb + p$. در این صورت

$$\begin{aligned} x^* &= (I - H)^{-1}Sb + (I - H)^{-1}p = K^{-1}MSb + K^{-1}Mp \\ &= K^{-1}(b + S^{-1}p). \end{aligned} \quad (5.1)$$

از اینکه $Kx = C$ ، می‌توان نوشت

$$x = K^{-1}C = K^{-1}(b + S^{-1}P). \quad (6.1)$$

از دو رابطه‌ی (۵.۱) و (۶.۱) نتیجه می‌گیریم که روش تکراری $x^{k+1} = Hx^k + Sb + p_k$ به جواب دستگاه $Kx = C$ همگراست، که در آن $C = b + S^{-1}p$. □

۱.۳.۱ روش تکراری ژاکوبی

فرض کنید $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ و $-E$ و $-F$ به ترتیب ماتریس‌های پایین مثلثی و بالا مثلثی با اعضای قطری صفر هستند، به طوری که درایه‌های زیر قطر اصلی $-E$ با درایه‌های زیر قطر اصلی A برابر است و همچنین درایه‌های بالای قطر اصلی $-F$ با درایه‌های بالای قطر اصلی A برابر است. قرار می‌دهیم $M = D$ و $N = E + F$. حال اگر $a_{ii} \neq 0$ و $i = 1, \dots, n$ ، آنگاه D نامنفرد است. بنابراین صورت برداری روش تکراری ژاکوبی^۱ به صورت زیر است:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + F)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

که در آن $x^{(0)}$ یک حدس اولیه است.

۲.۳.۱ روش گاوس-سایدل

همانند روش ژاکوبی فرض کنید $A = D - E - F$ و درایه‌های روی قطر D غیر صفر باشند. قرار می‌دهیم $M = D - E$ و $N = F$. واضح است که درایه‌های قطری M با درایه‌های قطری A یکی هستند. با توجه به اینکه M یک ماتریس پایین مثلثی است، نامنفرد نیز خواهد بود. بنابراین شکل برداری روش تکراری گاوس-سایدل^۲ به صورت زیر است:

$$x^{(k+1)} = (D - E)^{-1}Fx^{(k)} + (D - E)^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

در [۱] نشان داده شده است که اگر A معین مثبت هرمیتی باشد، آنگاه روش گاوس-سایدل همگرا خواهد بود، همچنین با یک مثال نقض نشان داده شده است که روش ژاکوبی برای ماتریس‌های معین مثبت هرمیتی لزوماً همگرا نیست.

^۱ Jacobi iterative method

^۲ Gauss-Seidel iterative method

فصل ۲

روش موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

فرض کنیم $y = f(t, y)$ ، $t \geq 0$ صورت کلی یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل معمولی باشد که در آن $y \in \mathbb{R}^n$ و تابع $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در شرط لیب‌شیتز^۱ صدق می‌کند. در این صورت با استفاده از [۶] می‌توان گفت که دستگاه معادلات دیفرانسیل $\dot{y} = f(t, y)$ دارای جواب منحصری‌فرد می‌باشد.

مسئله‌ی مقدار اولیه از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + Qy(t) = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.2)$$

را در نظر بگیرید، که در آن $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ یک ماتریس نامنفرد و $t \in [t_0, T]$ و تابع برداری $f(t) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ پیوسته است ([۸]). با توجه به توضیحات فوق و با استفاده از [۶] می‌توان گفت که مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۲) دارای جواب منحصری‌فرد است. یک روش برای حل این مسئله استفاده از ماتریس نمایی است. به این صورت که معادلات (۱.۲) را در e^{tQ} ضرب می‌کنیم. در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} e^{tQ}\dot{y} + e^{tQ}Qy(t) &= e^{tQ}f(t), \quad t \in [t_0, T], \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{tQ}y(t)) &= e^{tQ}f(t). \end{aligned}$$

^۱Lipschitz condition

با انتگرال‌گیری روی بازه‌ی $[t_0, t]$ داریم:

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{ds}(e^{sQ}y(s))ds = \int_{t_0}^t e^{sQ}f(s)ds,$$

$$e^{tQ}y(t) - e^{t_0Q}y(t_0) = \int_{t_0}^t e^{sQ}f(s)ds.$$

در نتیجه جواب به صورت زیر خواهد بود:

$$y(t) = e^{(t_0-t)Q}y_0 + \int_{t_0}^t e^{(s-t)Q}f(s)ds.$$

برای هر ماتریس دلخواه Q محاسبه‌ی e^{tQ} ، از نظر حجم و زمان محاسبات به صرفه نیست، در نتیجه بدست آوردن جواب نهایی دشوار خواهد بود. برای حل اینگونه مسائل روش تکراری موجی شکل دو مرحله‌ای در طول چند سال اخیر معرفی شده است و همچنین با توجه به نوع ماتریس Q همگرایی این روش بررسی شده است. در این فصل همگرایی این روش را زمانی که Q یک M -ماتریس باشد، بررسی خواهیم کرد. در ابتدا به نحوه‌ی ساختن این روش تکراری می‌پردازیم.

۱.۲ نحوه‌ی شکل‌گیری روش تکراری موجی شکل دومرحله‌ای

در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۲)، فرض کنید ماتریس Q به صورت بلوکی

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1q} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{q1} & Q_{q2} & \cdots & Q_{qq} \end{pmatrix},$$

افراز شده باشد که در آن $i = 1, 2, \dots, q$ ، Q_{ii} قطری مربعی هستند. فرض کنید $Q = D - N_1$ یک M -شکافت برای ماتریس Q باشد، که در آن ماتریس D قطری بلوکی به صورت $D = \text{diag}(D_1, D_2, \dots, D_q)$ است و D_i و $i = 1, 2, \dots, q$ ماتریس‌های نامنفرد هم‌مرتبه با Q_{ii} هستند و N_1 مانند Q به صورت بلوکی افراز شده است. تکرارهای بیرونی روش TSWR به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{y}^{k+1}(t) + Dy^{k+1}(t) = N_1y^k(t) + f(t), \\ y^{k+1}(t_0) = y_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad t \in [t_0, T], \quad y^0(t) = y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

لازم به ذکر است که با جایگذاری $y^{(k+1)}(t)$ بر حسب تقریب تفاضلی پیشرو، می‌توان رابطه‌ی تکراری (۲.۲) را گسسته‌سازی کرد. در این صورت رابطه‌ی تکراری حاصل، روش تکراری موجی شکل WR نامیده می‌شود که تک‌مرحله‌ای است. ولی در این فصل بیشتر از روش TSWR استفاده خواهیم کرد.

حال برای محاسبه‌ی $y^{(k+1)}(t)$ ، آنرا برحسب یک رابطه‌ی تکراری بیان می‌کنیم، فرض کنید $D = M - N_2$ یک M -شکافت برای ماتریس D باشد، که در آن M و N_2 به صورت قطری بلوکی هستند. در این صورت به ازای هر تکرار بیرونی چندین تکرار درونی به طور مستقل ساخته می‌شود. در نتیجه روش تکراری TSWR به صورت زیر ظاهر می‌شود:

$$\begin{cases} z^{v+1}(t) + Mz^{v+1}(t) = N_2 z^v(t) + N_1 y^k(t) + f(t), \\ z^{v+1}(t_0) = y^k(t_0), \quad z^0(t) = y^k(t), \quad t \in [t_0, T]. \end{cases} \quad (3.2)$$

که در آن $v = 0, 1, \dots$ و $k = 0, 1, \dots$ برابر با جمله‌ی آخر دنباله‌ی موجی شکل $\{z^v(t)\}_{v=0,1,\dots}$ در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه این روش را دومرحله‌ای (بیرونی-درونی) می‌نامیم. در حالت خاص $N_2 = 0$ ، مجدداً روش WR حاصل خواهد شد.

برای i -مین مؤلفه‌ی بردار $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_q(t))^T$ رابطه‌ی تکراری (۳.۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{cases} z_{(i)}^{v+1}(t) + Mz_{(i)}^{v+1}(t) = (N_2 z^v(t) + N_1 y^k(t) + f(t))_{(i)}, \\ z_{(i)}^{v+1}(t_0) = y_{(i)}^k(t_0), \quad z_{(i)}^0(t) = y_{(i)}^k(t), \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, 2, \dots, q. \end{cases}$$

در این روش تکراری ممکن است، برای بلوکهای متمایز i ، و تکرارهای مختلف بیرونی k تعداد تکرارهای درونی اختلاف داشته باشد. در این صورت روش تکراری غیر ایستا خواهد بود. لذا برای سادگی فرض می‌کنیم که در هر تکرار بیرونی تعداد تکرارهای درونی ثابت و برابر با s باشد، بنابراین روش TSWR از دسته‌ی روش‌های تکراری ایستا می‌باشد. به منظور همگرایی این روش تکراری یک معیار توقف برای تکرارهای بیرونی در نظر می‌گیریم. به این صورت که اختلاف دو تکرار متوالی برای بعضی نرمها کمتر از خطای داده شده‌ی ϵ باشد، یا اینکه تکرارهای بیرونی، تا یک حد تعیین شده ادامه یابند.

هدف از معرفی روش دومرحله‌ای TSWR و اضافه کردن تکرار درونی برای روش WR این است که کارایی الگوریتم‌ها را زمانی که بطور موازی در کامپیوتر اجرا می‌شوند بالا ببریم.

بطور مثال با بکارگیری شکافت‌های موازی محض در بلوکها، تمام دستگاه شکافته می‌شود. بنابراین برای حل هر زیردستگاه توسط پردازشگر، بهتر است شکافت‌هایی با سرعت همگرایی بالاتر در روش‌های تکراری در نظر بگیریم (مانند روش تکراری گاوس - سایدل). با توجه به توضیحات فوق و رابطه‌ی (۳.۲)، روش تکراری TSWR را می‌توان در قالب الگوریتم زیر بیان کرد.

الگوریتم ۱.۲: الگوریتم روش تکراری تخفیف موجی شکل دو مرحله‌ای پیوسته (TSWR)

1. For $k = 0, 1, \dots$
2. $z^0(t) = y^k(t)$
3. For $v = 0, 1, \dots, s - 1$
4. $z^{v+1}(t) + Mz^{v+1}(t) = N_1 z^v(t) + N_2 y^k(t) + f(t)$
5. $z^{v+1}(t_0) = y^k(t_0) = y_0$
6. EndFor
7. $y^{k+1}(t) = z^s(t)$
8. EndFor

رابطه‌ی تکراری این الگوریتم به صورت پیوسته بیان شده است. توسط روش θ این رابطه‌ی تکراری را گسسته‌سازی شده، در نتیجه جواب مسأله به صورت عددی تقریب زده می‌شود. در ابتدا به تعریف روش θ می‌پردازیم.

تعریف ۱.۲ فرض کنیم $\dot{y} = f(t, y)$ با $t \geq 0$ یک دستگاه دیفرانسیل معمولی باشد به طوری که تابع برداری $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ در شرط لیبشیتز صدق کند. روش θ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_{n+1} - y_n = h[\theta f(t_{n+1}, y_{n+1}) + (1 - \theta)f(t_n, y_n)], \quad n = 0, 1, \dots,$$

که در آن $\theta \in [0, 1]$ یک پارامتر است.

فرض کنیم بازه‌ی $[t_0, T]$ به نقاط متساوی‌فاصله‌ی $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ افراز شده باشد، برای طول گام h روش θ را برای رابطه‌ی تکراری

$$z^{v+1}(t) = -Mz^{v+1}(t) + N_1 z^v(t) + N_2 y^k(t) + f(t), \quad (4.2)$$

به کار می‌بریم. در این صورت برای $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ داریم.

$$z^{v+1}(t_{n+1}) - z^{v+1}(t_n) = h\theta(-Mz^{v+1}(t_{n+1}) + N_{\uparrow}z^v(t_{n+1}) + N_{\downarrow}y^k(t_{n+1}) + f(t_{n+1})) \\ + h(1-\theta)(-Mz^{v+1}(t_n) + N_{\uparrow}z^v(t_n) + N_{\downarrow}y^k(t_n) + f(t_n)).$$

$z^v(t_n)$ و $y^k(t_n)$ را به ترتیب با z_n^v و y_n^k نشان می‌دهیم. در این صورت می‌توان نوشت:

$$(I + h\theta M)z_{n+1}^{v+1} = (I - h(1-\theta)M)z_n^{v+1} + h(1-\theta)[N_{\uparrow}z_n^v + N_{\downarrow}y_n^k + f(t_n)] \\ + h\theta[N_{\uparrow}z_{n+1}^v + N_{\downarrow}y_{n+1}^k + f(t_{n+1})], \\ z_{n+1}^{v+1} = (I + h\theta M)^{-1}(I - h(1-\theta)M)z_n^{v+1} \\ + h(1-\theta)(I + h\theta M)^{-1}[N_{\uparrow}z_n^v + N_{\downarrow}y_n^k + f(t_n)] \\ + h\theta(I + h\theta M)^{-1}[N_{\uparrow}z_{n+1}^v + N_{\downarrow}y_{n+1}^k + f(t_{n+1})]. \quad (5.2)$$

قرار می‌دهیم

$$B_M = (I + h\theta M)^{-1}(I - h(1-\theta)M), \\ b_n(v, k) = (I + h\theta M)^{-1}[N_{\uparrow}z_n^v + N_{\downarrow}y_n^k + f_n].$$

در این صورت رابطه‌ی (۵.۲) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$z_{n+1}^{v+1} = B_M z_n^{v+1} + h(1-\theta)b_n(v, k) + h\theta b_{n+1}(v, k). \quad (6.2)$$

هدف از اعمال جبری فوق و بدست آوردن رابطه‌ی (۶.۲) این است که به جای محاسبه‌ی تقریبهای متمایز $\{y_0^{k+1}, y_1^{k+1}, \dots, y_N^{k+1}\}$ در موجی شکل پیوسته‌ی $y^{k+1}(t)$ ، تقریب عددی $y^k(t)$ را در نقاط گره‌ی $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ بطور گسسته محاسبه کنیم و این موجب تبدیل الگوریتم تکراری روی بازه‌ی زمانی پیوسته به الگوریتم تکراری روی نقاط متمایز در این بازه می‌شود و در نتیجه محاسبات عددی ساده‌تر می‌گردد. بنابراین روش TSWR با پارامتر θ را می‌توان در قالب یک الگوریتم بیان کرد.

۲.۲ الگوریتم روش تکراری موجی شکل دو مرحله‌ای با پارامتر θ

الگوریتم ۲.۲ : الگوریتم روش تکراری تخفیف موجی شکل دو مرحله‌ای (TSWR - Theta)

1. For $k = 0, 1, \dots$
2. $z_n^0 = y_n^k, \quad n = 0, 1, \dots, N$
3. For $v = 0, 1, \dots, s - 1$
4. $z_0^{v+1} = y_0^k = y_0$
5. For $n = 0, 1, \dots, N - 1$
6. $z_{n+1}^{v+1} = B_M z_n^{v+1} + h(1 - \theta)b_n(v, k) + h\theta b_{n+1}(v, k)$
7. EndFor
8. EndFor
9. $y_n^{k+1} = z_n^s, \quad n = 0, 1, \dots, N$
10. EndFor

در این الگوریتم دنباله‌ی $\{z_i^{v+1}\}_{i=0}^N$ تقریب‌هایی در نقاط گره‌ی $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ هستند. برای جملات این دنباله به ازای هر تکرار k و v همچنین گره n می‌توان لم زیر را بکار برد. لم ۱.۲ فرض کنید $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ دنباله‌ی بردارهایی در \mathbb{C}^n باشد. برای هر $\theta, h \geq 0$ رابطه‌ی بازگشتی $a_{n+1} = Ba_n + h(1 - \theta)b_n + h\theta b_{n+1}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$a_n = B^n a_0 + h(1 - \theta)B^{n-1}b_0 + h \sum_{j=1}^{n-1} B^{j-1} P b_{n-j} + h\theta b_n,$$

که در آن $P = (1 - \theta)I + \theta B$.

برهان : داریم

$$\begin{aligned} a_n &= Ba_{n-1} + h(1 - \theta)b_{n-1} + h\theta b_n = B(Ba_{n-2} + h(1 - \theta)b_{n-2} + h\theta b_{n-1}) \\ &+ h(1 - \theta)b_{n-1} + h\theta b_n = B^\forall a_{n-2} + Bh(1 - \theta)b_{n-2} + B^\circ h(1 - \theta)b_{n-1} \\ &+ B^\circ h\theta b_n + Bh\theta b_{n-1} = B^\forall (Ba_{n-2} + h(1 - \theta)b_{n-2} + h\theta b_{n-2}) \\ &+ B^\circ h(1 - \theta)b_{n-1} + Bh(1 - \theta)b_{n-2} + B^\circ h\theta b_n + Bh\theta b_{n-1} = B^\forall a_{n-2} \end{aligned}$$

$$+B^\circ h(\lambda - \theta)b_{n-1} + Bh(\lambda - \theta)b_{n-2} + B^\sphericalangle h(\lambda - \theta)b_{n-2} + B^\circ h\theta b_n \\ + Bh\theta b_{n-1} + B^\sphericalangle h\theta b_{n-2}.$$

با ادامه‌ی همین روند به استقراء داریم:

$$a_n = B^n a_\circ + B^\circ h(\lambda - \theta)b_{n-1} + Bh(\lambda - \theta)b_{n-2} + \dots + B^{n-2} h(\lambda - \theta)b_1 \\ + B^{n-1} h(\lambda - \theta)b_\circ + h\theta B^\circ b_n + h\theta Bb_{n-1} + h\theta B^\sphericalangle b_{n-2} \\ + h\theta B^\sphericalangle b_{n-2} + \dots + h\theta B^{n-1} b_1 = B^n a_\circ + h(\lambda - \theta)B^{n-1} b_\circ \\ + h(\lambda - \theta) \sum_{j=1}^{n-1} B^{j-1} b_{n-j} + h\theta \sum_{j=1}^{n-1} B^j b_{n-j} + h\theta B^\circ b_n, \\ a_n = B^n a_\circ + h(\lambda - \theta)B^{n-1} b_\circ + h \sum_{j=1}^{n-1} B^{j-1} [(\lambda - \theta)I + \theta B] b_{n-j} + h\theta B^\circ b_n \\ = B^n a_\circ + h(\lambda - \theta)B^{n-1} b_\circ + h \sum_{j=1}^{n-1} B^{j-1} P b_{n-j} + h\theta b_n.$$

که در آن $P = (\lambda - \theta)I + \theta B$. □

قرار می‌دهیم $P_M = (\lambda - \theta)I + \theta B_M$ ، در این صورت می‌توان نوشت:

$$P_M = (\lambda - \theta)I + \theta B_M = (\lambda - \theta)I + \theta(I + h\theta M)^{-1}(I - h(\lambda - \theta)M) \\ = (I + h\theta M)^{-1}[(I + h\theta M)(\lambda - \theta)I + \theta(I - h(\lambda - \theta)M)] \\ = (I + h\theta M)^{-1}[I - \theta I + h\theta M(\lambda - \theta) + \theta I - h\theta M(\lambda - \theta)], \\ \Rightarrow P_M = (I + h\theta M)^{-1}. \quad (7.2)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۷.۲) و لم ۱.۲، رابطه‌ی (۶.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$z_n^{v+1} = B_M z_{n-1}^{v+1} + h(\lambda - \theta)b_{n-1}(v, k) + h\theta b_n(v, k) \\ = B_M^n z_\circ^{v+1} + h(\lambda - \theta)B_M^{n-1} b_\circ(v, k) + h \sum_{j=1}^{n-1} B_M^{j-1} P_M b_{n-j}(v, k) + h\theta b_n(v, k).$$

از طرفی می‌دانیم که $z_\circ^{v+1} = y_\circ^k = y_\circ$. بنابراین با جایگذاری مقادیر $b_l(v, k)$ و y_\circ^k و z_\circ^{v+1} می‌توان z_n^{v+1} را بر حسب جملات قبلی به صورت زیر محاسبه کرد:

$$z_n^{v+1} = B_M^n y_\circ + h(\lambda - \theta)B_M^{n-1} P_M (N_2 y_\circ + N_1 y_\circ + f(t_\circ))$$

$$\begin{aligned}
 &+h\left[\sum_{j=1}^{n-1} B_M^{j-1} P_M (I + h\theta M)^{-1} (N_\Upsilon z_{n-j}^v + N_\Delta y_{n-j}^k + f(t_{n-j}))\right] \\
 &+h\theta(I + h\theta M)^{-1} (N_\Upsilon z_n^v + N_\Delta y_n^k + f(t_n)). \quad (۸.۲)
 \end{aligned}$$

با جایگذاری مقدار P_M ، $b_n(v, k)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$b_n(v, k) = (I + h\theta M)^{-1} (N_\Upsilon z_n^v + N_\Delta y_n^k + f(t_n)) = P_M (N_\Upsilon z_n^v + N_\Delta y_n^k + f(t_n)).$$

بنابراین رابطه‌ی (۸.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 z_n^{v+1} &= B_M^n y_\circ + h(1 - \theta)[B_M^{n-1} P_M (N_\Delta + N_\Upsilon) y_\circ + B_M^{n-1} P_M f(t_\circ)] \\
 &+h\left[\sum_{j=1}^{n-1} (B_M^{j-1} P_M^\Upsilon N_\Upsilon z_{n-j}^v + B_M^{j-1} P_M^\Upsilon N_\Delta y_{n-j}^k + B_M^{j-1} P_M^\Upsilon f(t_{n-j}))\right] \\
 &+h\theta[(I + h\theta M)^{-1} N_\Upsilon z_n^v + (I + h\theta M)^{-1} N_\Delta y_n^k + P_M f(t_n)]. \\
 z_n^{v+1} &= (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_\Upsilon z_n^v + (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_\Delta y_n^k \\
 &+h\sum_{j=1}^{n-1} (B_M^{j-1} P_M^\Upsilon N_\Upsilon z_{n-j}^v + B_M^{j-1} P_M^\Upsilon N_\Delta y_{n-j}^k) \\
 &+(B_M^n + h(1 - \theta)B_M^{n-1} P_M (N_\Delta + N_\Upsilon)) y_\circ + h\sum_{j=1}^{n-1} B_M^{j-1} P_M^\Upsilon f(t_{n-j}) \\
 &+h(1 - \theta)B_M^{n-1} P_M f(t_\circ) + h\theta P_M f(t_n). \quad (۹.۲)
 \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم

$$L = (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_\Delta, \quad G = (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_\Upsilon. \quad (۱۰.۲)$$

همچنین فرض کنیم،

$$\begin{aligned}
 g_n &= (B_M^n + h(1 - \theta)B_M^{n-1} P_M (N_\Delta + N_\Upsilon)) y_\circ + h\sum_{j=1}^{n-1} B_M^{j-1} P_M^\Upsilon f(t_{n-j}) \\
 &+h(1 - \theta)B_M^{n-1} P_M f(t_\circ) + h\theta P_M f(t_n).
 \end{aligned}$$

در این صورت رابطه‌ی (۹.۲) را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$z_n^{v+1} = G z_n^v + L y_n^k + h\sum_{j=1}^{n-1} B_M^{j-1} P_M^\Upsilon (N_\Upsilon z_{n-j}^v + N_\Delta y_{n-j}^k) + g_n. \quad (۱۱.۲)$$

بردارهای \bar{z}_n^v ، \bar{y}_n^k و \bar{g}_n را به صورت

$$\bar{z}_n^v = (z_1^{vT}, z_2^{vT}, \dots, z_n^{vT})^T,$$

$$\bar{y}_n^k = (y_1^{kT}, y_2^{kT}, \dots, y_n^{kT})^T,$$

$$\bar{g}_n = (g_1^T, g_2^T, \dots, g_n^T)^T.$$

و ماتریس‌های ψ_n و φ_n را به صورت

$$\psi_n = \begin{pmatrix} G & & & & \\ hP_M^Y N_Y & G & & & \\ hB_M^Y P_M^Y N_Y & hP_M^Y N_Y & G & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ hB_M^{n-Y} P_M^Y N_Y & hB_M^{n-1} P_M^Y N_Y & \dots & hP_M^Y N_Y & G \end{pmatrix},$$

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} L & & & & \\ hP_M^Y N_Y & L & & & \\ hB_M^Y P_M^Y N_Y & hP_M^Y N_Y & L & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ hB_M^{n-Y} P_M^Y N_Y & hB_M^{n-1} P_M^Y N_Y & \dots & hP_M^Y N_Y & L \end{pmatrix},$$

در نظر می‌گیریم. در این صورت رابطه‌ی (۱۱.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\bar{z}_n^{v+1} = \psi_n \bar{z}_n^v + \varphi_n \bar{y}_n^k + \bar{g}_n. \quad (12.2)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۲.۲) داریم،

$$\bar{z}_n^v = \psi_n \bar{z}_n^{v-1} + \varphi_n \bar{y}_n^k + \bar{g}_n. \quad (13.2)$$

فرض کنیم تکرار داخلی v ثابت و برابر با s باشد. در این صورت رابطه‌ی (۱۳.۲) را می‌توان

به صورت

$$\begin{aligned} \bar{z}_n^s &= \psi_n (\psi_n \bar{z}_n^{(s-2)}) + \varphi_n \bar{y}_n^k + \bar{g}_n + \varphi_n \bar{y}_n^k + \bar{g}_n \\ &= \psi_n^2 (\psi_n \bar{z}_n^{(s-3)}) + \varphi_n \bar{y}_n^k + \bar{g}_n + \psi_n \varphi_n \bar{y}_n^k + \varphi_n \bar{y}_n^k + \psi_n \bar{g}_n + \bar{g}_n \\ &= \psi_n^3 \bar{z}_n^{(s-3)} + \psi_n^2 \varphi_n \bar{y}_n^k + \psi_n \varphi_n \bar{y}_n^k + \varphi_n \bar{y}_n^k + \psi_n^2 \bar{g}_n + \psi_n \bar{g}_n + \bar{g}_n, \end{aligned}$$

نوشت. با ادامه‌ی همین روند به استقراء داریم

$$\begin{aligned} \bar{z}_n^s &= \psi_n^s \bar{z}_n^0 + \psi_n^{s-1} \varphi_n \bar{y}_n^k + \psi_n^{s-2} \varphi_n \bar{y}_n^k + \dots + \psi_n^{s-(s-1)} \varphi_n \bar{y}_n^k \\ &\quad + \psi_n^{s-s} \varphi_n \bar{y}_n^k + \psi_n^{s-1} \bar{g}_n + \psi_n^{s-2} \bar{g}_n + \dots + \psi_n^2 \bar{g}_n + \psi_n \bar{g}_n + \bar{g}_n \\ \Rightarrow \bar{z}_n^s &= \psi_n^s \bar{z}_n^0 + \sum_{v=0}^{s-1} \psi_n^v \varphi_n \bar{y}_n^k + \sum_{v=0}^{s-1} \psi_n^v \bar{g}_n. \end{aligned}$$

با استخراج آخرین مؤلفه‌ی \bar{z}_n^s به صورت

$$\bar{z}_n^s = \begin{pmatrix} z_1^s \\ z_2^s \\ \vdots \\ z_n^s \end{pmatrix} = \psi_n^s \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \\ \vdots \\ z_n^0 \end{pmatrix} + \sum_{v=0}^{s-1} \psi_n^v \varphi_n \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix} + \sum_{v=0}^{s-1} \psi_n^v \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},$$

جمله‌ی عمومی z_n^s در نقطه‌ی t_n به صورت

$$\begin{aligned} z_n^s &= G^s z_n^0 + \psi_{n,1}^s z_1^0 + \psi_{n,2}^s z_2^0 + \psi_{n,3}^s z_3^0 + \cdots + \psi_{n,n-1}^s z_{n-1}^0 + G^0 L y_n^k + G^1 L y_n^k \\ &+ \cdots + G^{s-1} L y_n^k + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \psi_n^v \varphi_n \right)_1 y_1^k + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \psi_n^v \varphi_n \right)_2 y_2^k + \cdots + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \psi_n^v \varphi_n \right)_{n-1} y_{n-1}^k \\ &+ G^0 g_n + G^1 g_n + \cdots + G^{s-1} g_n + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \psi_{n,1}^v g_1 \right) + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \psi_{n,2}^v g_2 \right) + \cdots \\ &+ \left(\sum_{v=0}^{s-1} \psi_{n,n-1}^v g_{n-1} \right) \\ &= G^s z_n^0 + \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{n,j}^s z_j^0 + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L y_n^k + \left(\sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{s-1} \psi_{n,l}^v \varphi_{l,1} \right) y_1^k + \left(\sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{s-1} \psi_{n,l}^v \varphi_{l,2} \right) y_2^k \\ &+ \cdots + \left(\sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{s-1} \psi_{n,l}^v \varphi_{l,n-1} \right) y_{n-1}^k + \sum_{v=0}^{s-1} G^v g_n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{v=0}^{s-1} \psi_{n,j}^v g_j \\ &= G^s z_n^0 + \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{n,j}^s z_j^0 + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L y_n^k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{s-1} \psi_{n,l}^v \varphi_{l,j} y_j^k + \sum_{v=0}^{s-1} G^v g_n \\ &+ \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{n,j}^v g_j, \end{aligned}$$

محاسبه می‌شود که در تمام روابط فوق $\psi_{n,j}^{(v)}$ و $\varphi_{n,j}$ به ترتیب (n, j) -امین بلوک ψ_n^v و φ_n را نشان می‌دهد. قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} T_s &= G^s + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L, \quad S_s = \sum_{v=0}^{s-1} G^v, \\ p_{s,n}(k) &= \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{n,j}^{(s)} y_j^k + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \psi_{n,l}^{(v)} \varphi_{l,j} y_j^k + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{n-1} \psi_{n,j}^{(v)} g_j. \end{aligned} \quad (۱۴.۲)$$

از طرفی می‌دانیم که $z_n^0 = y_n^k$ و $z_n^s = y_n^{k+1}$ ، همچنین $p_{s,n}(k)$ فقط به مقدار y_j^k در نقاط گره‌ی $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ وابسته است. در این صورت با جایگذاری روابط (۱۴.۲) در z_n^s داریم،

$$y_n^{k+1} = T_s y_n^k + S_s g_n + p_{s,n}(k). \quad (۱۵.۲)$$

نمایش روش TSWR-Theta بصورت رابطه‌ی (۱۵.۲) که با رابطه‌ی (۶.۲) معادل است، برای محاسبه‌ی نقطه‌ای مقرون به صرفه نخواهد بود، ولی از این جهت مفید است که بررسی همگرایی آن در هر نقطه‌ی گرهی t_n ، به بررسی همگرایی ماتریس تکرار T_s محدود می‌شود، که در بخش بعدی به تفصیل به این موضوع خواهیم پرداخت.

۳.۲ بررسی همگرایی روش تکراری موجی شکل دومرحله‌ای

در رابطه‌ی (۱۵.۲) فرض کنیم $\rho(T_s) < 1$ و S_s نامنفرد باشد. با استفاده از قضیه‌ی ۱۹.۱ و استقراء روی n می‌توان نتیجه گرفت این رابطه‌ی تکراری همگراست. قرار می‌دهیم

$$M_s = S_s^{-1}, \quad N_s = S_s^{-1}T_s.$$

در روش TSWR-Theta، برای بدست آوردن $y(t)$ در هر نقطه‌ی گرهی t_n ، تقریب‌های $\{y_n^k\}_{k=0,1,\dots}$ را بازنویسی می‌کنیم. به این صورت که رابطه‌ی (۱۵.۲) را در M_s ضرب می‌کنیم،

$$M_s y_n^{k+1} = S_s^{-1}T_s y_n^k + S_s^{-1}S_s g_n + M_s p_{s,n}(k),$$

$$M_s y_n^{k+1} = N_s y_n^k + g_n + M_s p_{s,n}(k),$$

که این رابطه‌ی تکراری متناظر با شکافت $\mathcal{L} = M_s - N_s$ است. به منظور فراهم کردن همگرایی، می‌توان از قضیه‌ی ۸.۱، تحت این فرض که $\mathcal{L}^{-1} \geq 0$ و $M_s - N_s$ یک شکافت منظم باشد، استفاده کرد.

اگر $\theta = 0$ ، در این صورت L, G, T_s و S_s ماتریس‌های نامنفی خواهند بود. بنابراین $\{y_n^k\}_{k=0,1,\dots}$ به ازای هر k ثابت و بررسی همگرایی بی‌معنی خواهد بود. بنابراین فرض می‌کنیم $0 < \theta \leq 1$ ، که روش θ -ضمنی^۱ نامیده می‌شود. برای بدست آوردن شرایط لازم جهت همگرایی روش TSWR-Theta، نیازمند به ذکر دو قضیه‌ی اولیه هستیم.

لم ۲.۲ فرض کنید $Q = M - N_1 - N_2$ یک M-شکافت مرکب برای ماتریس Q باشد که در آن $M_1 = M - N_2$ یک M-شکافت برای ماتریس M_1 است. در این صورت

^۱Implicit theta method

ماتریس‌های G و L معرفی شده در رابطه‌ی (۱۰.۲) با فرض $h\theta > 0$ نامنفی هستند و $\rho(G) < 1$.

برهان : از اینکه $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب است، نتیجه می‌گیریم که M و $M - N_2$ ماتریس هستند، در این صورت $(I + h\theta M)$ و $(I + h\theta(M - N_2))^{-1}$ نیز، M -ماتریس هستند. بنابراین $(I + h\theta M)^{-1} \geq 0$ و $(I + h\theta(M - N_2))^{-1} \geq 0$. از طرفی $N_1, N_2 \geq 0$ بنابراین

$$G = (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_2 \geq 0,$$

$$L = (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_1 \geq 0.$$

در این صورت شکافت $(I + h\theta M) - (h\theta N_2)$ ، برای $I + h\theta(M - N_2)$ یک شکافت منظم است. در نتیجه با استفاده از قضیه‌ی ۸.۱ داریم:

$$\rho(G) = \rho((I + h\theta M)^{-1} h\theta N_2) < 1.$$

□

از رابطه‌ی (۱۴.۲) می‌دانیم که $S_s = \sum_{j=0}^{s-1} G^j$. فرض کنید S_s نامنفرد باشد، همچنین فرض کنید $\rho(G) < 1$ ، در این صورت داریم $(I - G)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} G^j$. بنابراین می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} G^j &= (I - G)^{-1} \Rightarrow \sum_{j=0}^{s-1} G^j + \sum_{j=s}^{\infty} G^j = (I - G)^{-1}, \\ \sum_{j=0}^{s-1} G^j &= (I - G)^{-1} - \sum_{j=s}^{\infty} G^j = (I - G)^{-1} - \sum_{j=0}^{\infty} G^{j+s} = (I - G)^{-1} - G^s \sum_{j=0}^{\infty} G^j \\ &= (I - G)^{-1} - G^s (I - G)^{-1} = (I - G)^{-1} (I - G^s), \\ S_s &= \sum_{j=0}^{s-1} G^j = (I - G^s)(I - G)^{-1}. \end{aligned}$$

مجدداً با استفاده از رابطه‌ی (۱۴.۲) داریم $T_s = G^s + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L$ بنابراین T_s را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$T_s = G^s + \left(\sum_{j=0}^{s-1} G^j \right) L = G^s + S_s L = G^s + (I - G^s)(I - G)^{-1} L.$$

فصل ۲: روش موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی — ۴۰

به طریق مشابه M_s و N_s را هم بر حسب G و L محاسبه می‌کنیم:

$$M_s = S_s^{-1} = ((I - G^s)(I - G)^{-1})^{-1} = (I - G)(I - G^s)^{-1},$$

$$\begin{aligned} N_s &= S_s^{-1}T_s = (I - G)(I - G^s)^{-1}G^s + (I - G)(I - G^s)^{-1}(I - G^s)(I - G)^{-1}L \\ &= (I - G)(I - G^s)^{-1}G^s + L. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M_s = (I - G)(I - G^s)^{-1}, \quad N_s = (I - G)(I - G^s)^{-1}G^s + L. \quad (۱۶.۲)$$

در این صورت \mathcal{L} را می‌توانیم به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\mathcal{L} = M_s - N_s = (I - G)(I - G^s)^{-1} - (I - G)(I - G^s)^{-1}G^s - L$$

$$= (I - G)(I - G^s)^{-1}(I - G^s) - L = S_s^{-1}S_s(I - G) - L = I - G - L,$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = I - G - L. \quad (۱۷.۲)$$

همانطور که مشاهده می‌کنیم \mathcal{L} مستقل از تعداد تکرارهای درونی s است. حال به دو قضیه‌ی زیر در رابطه با شکافت $\mathcal{L} = M_s - N_s$ می‌پردازیم.

قضیه ۱۰.۲ اگر Q یک M -ماتریس باشد و $Q = M - N_1 - N_2$ ، یک M -شکافت مرکب باشد و $h\theta > 0$ ، آنگاه $\mathcal{L} = I - G - L$ دارای معکوس نامنفی است.

برهان: از رابطه‌ی (۱۰.۲) می‌دانیم که

$$L = (I + h\theta M)^{-1}h\theta N_1,$$

$$G = (I + h\theta M)^{-1}h\theta N_2.$$

طبق لم ۲.۲ می‌دانیم که $G, L \geq 0$ و $G + L \geq 0$. از اینکه Q یک M -ماتریس و $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب است، نتیجه می‌گیریم که M یک M -ماتریس است، در این صورت بنا بر لم ۵.۱ می‌توان نتیجه گرفت که $I + h\theta Q$ و $I + h\theta M$ ، M -ماتریس هستند و بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۴.۱ نتیجه می‌گیریم که هر دو دارای وارون نامنفی هستند. چون $(I + h\theta M)^{-1} \geq 0$ و $h\theta(N_1 + N_2) \geq 0$ پس می‌توان گفت که $(I + h\theta M) - h\theta(N_1 + N_2)$ یک شکافت منظم برای $I + h\theta Q$ می‌باشد، با استفاده از قضیه‌ی ۸.۱، نتیجه می‌گیریم،

$$\rho((I + h\theta M)^{-1}h\theta(N_1 + N_2)) = \rho(G + L) < 1.$$

فصل ۲ : روش موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی — ۴۱

پس $G + L$ یک ماتریس نامنفی است که $\rho(G + L) < 1$ ، بنابراین طبق لم ۴.۱ نتیجه می‌گیریم $(I - G - L)^{-1} \geq 0$ و موجود بوده و $(I - G - L)^{-1} \geq 0$ با استفاده از رابطه‌ی (۱۷.۲) می‌توان نتیجه گرفت که L^{-1} موجود بوده و نامنفی است. \square

قضیه ۲.۲ فرض کنید $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب باشد، آنگاه به ازای هر $s \geq 1$ شکافت $L = M_s - N_s$ ، یک شکافت منظم ضعیف است.

برهان : طبق لم ۲.۲ می‌دانیم که $G, L \geq 0$ و $\rho(G) < 1$ ، بنابراین $G + L \geq 0$. از طرفی داریم،

$$M_s^{-1} = S_s = \sum_{j=0}^{s-1} G^j. \quad (18.2)$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{G} = (I - G)(I - G^s)^{-1}G^s$ ، در این صورت با استفاده از روابط (۱۶.۲) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} N_s &= (I - G)(I - G^s)^{-1}G^s + L = \mathcal{G}_s + L, \\ M_s &= (I - G)(I - G^s)^{-1} \Rightarrow M_s^{-1} = (I - G^s)(I - G)^{-1}, \\ M_s^{-1}\mathcal{G}_s &= (I - G^s)(I - G)^{-1}(I - G)(I - G^s)^{-1}G^s = G^s, \\ M_s^{-1}N_s &= M_s^{-1}(\mathcal{G}_s + L) = M_s^{-1}\mathcal{G}_s + M_s^{-1}L = G^s + M_s^{-1}L. \end{aligned}$$

چون G ، یک ماتریس نامنفی است، پس $G^s \geq 0$. با استفاده از رابطه‌ی (۱۸.۲) و $L \geq 0$ نتیجه می‌گیریم که $M_s^{-1}L \geq 0$. در این صورت داریم،

$$M_s^{-1}N_s = G^s + M_s^{-1}L \geq 0. \quad (19.2)$$

از رابطه‌های (۱۸.۲) و (۱۹.۲) نتیجه می‌گیریم که $L = M_s - N_s$ ، یک شکافت منظم ضعیف برای L است. \square

قضیه‌های ۲.۲ و ۱.۲، همراه با قضیه‌ی ۸.۱، شرایطی را فراهم می‌کنند که $L = M_\nu - N_\nu$ یک شکافت همگرا برای L باشد، که به موجب آن، با استفاده از قضیه‌ی ۱۹.۱ می‌توان نتیجه گرفت که عملگر تکراری $y_n^{k+1} = T_\nu y_n^k + S_\nu g_n + p_{\nu,n}(k)$ همگراست.

با توجه به مطالب اخیر، با فرض اینکه Q یک M -ماتریس باشد و $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب برای Q باشد، می‌توان نتیجه گرفت که روش TSWR-Theta بطور مستقل از تعداد تکرارهای درونی s همگراست، که قضیه‌ی زیر به بیان این مطلب می‌پردازد.

قضیه ۳.۲ فرض کنید Q یک M -ماتریس و $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب برای ماتریس Q باشد. اگر $h\theta > 0$ و $s \geq 1$ ، آنگاه $\rho(T_s) < 1$ و روش TSWR-Theta همگراست.

برهان : با استفاده از رابطه‌ی (۱۵.۲) می‌دانیم که رابطه‌ی تکراری روش TSWR-Theta به صورت زیر است:

$$y_n^{k+1} = T_s y_n^k + S_s g_n + p_{s,n}(k).$$

در ابتدای این بخش نشان دادیم که این رابطه‌ی تکراری معادل با رابطه‌ی تکراری

$$\mathcal{M}_s y_n^{k+1} = \mathcal{N}_s y_n^k + g_n + \mathcal{M}_s p_{s,n}(k).$$

است، که در آن $\mathcal{M}_s = S_s^{-1}$ و $\mathcal{N}_s = S_s^{-1} T_s$. می‌دانیم که این رابطه‌ی تکراری متناظر با شکافت $\mathcal{L} = \mathcal{M}_s - \mathcal{N}_s$ می‌باشد. با توجه به فرضیات قضیه و همچنین با استفاده از قضیه‌ی ۱.۲ نتیجه می‌گیریم که \mathcal{L} دارای معکوس نامنفی است. بنابراین طبق قضیه‌ی ۸.۱، می‌توان نتیجه گرفت که $\rho(\mathcal{M}_s^{-1} \mathcal{N}_s) < 1$. در این صورت می‌توان نوشت

$$\mathcal{M}_s^{-1} \mathcal{N}_s = S_s S_s^{-1} T_s = T_s,$$

$$\rho(T_s) = \rho(\mathcal{M}_s^{-1} \mathcal{N}_s) < 1.$$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۱۹.۱، می‌توان نتیجه گرفت که روش تکراری

$$y_n^{k+1} = T_s y_n^k + S_s g_n + p_{s,n}(k),$$

همگراست، و این اثبات قضیه را کامل می‌کند. \square

۱.۳.۲ تأثیر افزایش تکرارهای درونی روی سرعت همگرایی

قضیه‌ی ۳.۲ همگرایی روش TSWR-Theta را بطور مستقل از s (تعداد تکرارهای درونی) تضمین می‌کند، بهر حال این نتیجه منطقی به نظر می‌رسد که با افزایش تکرارهای درونی، تعداد تکرارهای بیرونی کاهش یافته و این باعث کمتر شدن خطای همگرایی می‌گردد، بنابراین دقت جواب بدست آمده از حلقه‌ی تکرارهای درونی بیشتر می‌شود. به عبارت دیگر شعاع طیفی همگرایی ماتریس تکرار T_s ، با افزایش s کمتر شده و سرعت همگرایی بیشتر می‌شود. قضیه‌ای که در ادامه بیان شده است، درستی این مطلب را اثبات می‌کند، ابتدا به بیان یک لم اولیه در رابطه با این قضیه می‌پردازیم.

لم ۳.۲ فرض کنید $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب باشد. به ازای $s \geq 1$ ، ماتریس تکرار $T_s = M_s^{-1}N_s$ متناظر با شکافت منظم ضعیف $\mathcal{L} = M_s - N_s$ را در نظر بگیرید که در آن $h\theta > 0$. اگر بردار ویژه‌ی پرون-فروبنیوس $T_s = M_s^{-1}N_s$ باشد، آنگاه $N_s x \geq 0$.

برهان : طبق رابطه‌های (۱۶.۲) و (۱۷.۲) می‌دانیم که

$$\begin{aligned} M_s &= (I - G)(I - G^s)^{-1}, \\ N_s &= (I - G)(I - G^s)^{-1}G^s + L, \\ \mathcal{L} &= M_s - N_s = I - G - L. \end{aligned}$$

فرض کنید $x > 0$ بردار ویژه‌ی پرون-فروبنیوس T_s ، متناظر با مقدار ویژه‌ی α باشد، بنابراین $T_s x = \alpha x$. از طرفی چون $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب است، بنابراین

$$G = (I + h\theta M)^{-1}h\theta N_2 \geq 0 \Rightarrow G^s \geq 0.$$

با استفاده از رابطه‌ی (۱۴.۲) می‌توان نوشت:

$$T_s = G^s + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L \Rightarrow 0 \leq G^s \leq T_s.$$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۷.۱ نتیجه می‌گیریم $\rho(G^s) \leq \rho(T_s) = \alpha$. حال اگر $\alpha = 0$ آنگاه $T_s x = 0$ ، بنابراین $M_s^{-1}(N_s x) = 0$ لذا می‌توان گفت $N_s x = 0$ و حکم ثابت می‌شود.

فرض کنیم $\alpha \neq 0$ در این صورت

$$T_s x = \alpha x \Rightarrow M_s^{-1} N_s x = \alpha x \Rightarrow N_s x = \alpha M_s x \Rightarrow M_s x = \frac{1}{\alpha} N_s x.$$

از طرفی طبق رابطه‌ی (۱۶.۲) می‌توان نوشت:

$$N_s x = (I - G)(I - G^s)^{-1} G^s x + Lx = M_s G^s x + Lx.$$

G^s با M_s جابجا می‌شود. بنابراین

$$N_s x = G^s M_s x + Lx = G^s \left(\frac{1}{\alpha} N_s x \right) + Lx = \frac{1}{\alpha} G^s N_s x + Lx,$$

$$N_s x = \frac{1}{\alpha} G^s N_s x + Lx \Rightarrow \frac{1}{\alpha} (\alpha I - G^s) N_s x = Lx.$$

با استفاده از لم ۲.۲ می‌دانیم که $G \geq 0$ ، بنابراین $G^s \geq 0$. از طرفی $\rho(G^s) \leq \alpha$ و در این صورت بنابر تعریف یک M -ماتریس می‌توان گفت که $\alpha I - G^s$ یک M -ماتریس است، پس دارای وارون نامنفی است، یعنی $(\alpha I - G^s)^{-1} \geq 0$. در این صورت داریم

$$N_s x = \alpha (\alpha I - G^s)^{-1} Lx \geq 0.$$

از اینکه $\rho(G) < 1$ داریم $\rho(G^s) = (\rho(G))^s < 1$. در این صورت می‌توان نوشت:

$$(I - G^s)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (G^s)^j.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} M_s &= (I - G)(I - G^s)^{-1} = (I - G) \sum_{j=0}^{\infty} (G^s)^j = \sum_{j=0}^{\infty} G^{js} - \sum_{j=0}^{\infty} G G^{js}, \\ G^s M_s &= \sum_{j=0}^{\infty} G^{s+j^s} - \sum_{j=0}^{\infty} G^{1+j^s+s} = \sum_{j=0}^{\infty} G^{js} G^s - \sum_{j=0}^{\infty} G^{j^s+1} G^s \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} G^{js} - \sum_{j=0}^{\infty} G^{j^s+1} \right) G^s = M_s G^s, \end{aligned}$$

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. \square

قضیه ۴.۲ فرض کنید Q یک M -ماتریس باشد، $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب باشد و $h\theta > 0$. فرض کنید T_{s_1} و T_{s_2} به ترتیب ماتریس‌های تکرار روش TSWR-Theta با تعداد تکرارهای درونی s_1 و s_2 باشند، اگر $1 \leq s_2 \leq s_1$ ، آنگاه

$$\rho(T_{s_1}) \leq \rho(T_{s_2}) < 1$$

برهان : فرض کنید (M_{s_1}, N_{s_1}) و (M_{s_2}, N_{s_2}) دو زوج ماتریس تعریف شده در رابطه‌ی (۱۶.۲) باشند. همچنین می‌دانیم

$$S_{s_1} = M_{s_1}^{-1} = \sum_{j=0}^{s_1-1} G^j, \quad S_{s_2} = M_{s_2}^{-1} = \sum_{j=0}^{s_2-1} G^j.$$

چون $G = (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_2 \geq 0$ ، از $s_2 \leq s_1$ نتیجه می‌گیریم که

$$\sum_{j=0}^{s_2-1} G^j \leq \sum_{j=0}^{s_1-1} G^j \Rightarrow M_{s_2}^{-1} \leq M_{s_1}^{-1}.$$

و $\mathcal{L} = M_{s_1} - N_{s_1}$ و $\mathcal{L} = M_{s_2} - N_{s_2}$ هر دو شکافت‌های منظم ضعیف هستند. حال اگر x_2 بردار ویژه‌ی پرون-فروبنیوس ماتریس T_{s_2} باشد، در این صورت طبق لم ۳.۲، $N_{s_2} x_2 \geq 0$. بنابراین از قضیه‌ی ۹.۱ می‌توانیم نتیجه بگیریم که $\rho(T_{s_1}) \leq \rho(T_{s_2})$. با توجه به اینکه T_{s_1} و T_{s_2} هر دو ماتریس‌های تکرار متناظر با شکافت‌های منظم ضعیف هستند، نتیجه می‌گیریم که

$$\rho(T_{s_1}) \leq \rho(T_{s_2}) < 1.$$

□

ماتریس تکرار T_s را وقتی که $s \rightarrow \infty$ ، محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در این حالت روش TSWR-Theta به روش WR همگرا می‌شود. بنابراین

$$M_\infty^{-1} = \lim_{s \rightarrow \infty} M_s^{-1} = \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{s-1} G^j = (I - G)^{-1} \Rightarrow M_\infty = (I - G),$$

$$\mathcal{L} = M_\infty - N_\infty \Rightarrow N_\infty = M_\infty - \mathcal{L}.$$

از طرفی طبق رابطه‌ی (۱۷.۲) می‌دانیم که $\mathcal{L} = I - G - L$ ، در این صورت می‌توان نوشت:

$$N_\infty = M_\infty - \mathcal{L} = (I - G) - (I - G - L) = I - G - I + G + L = L,$$

$$\mathcal{L} = M_s - N_s \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L} = \lim_{s \rightarrow \infty} M_s - \lim_{s \rightarrow \infty} N_s = I - G - L,$$

$$T_s = M_s^{-1} N_s \rightarrow T_\infty = \lim_{s \rightarrow \infty} T_s = \lim_{s \rightarrow \infty} M_s^{-1} N_s = (I - G)^{-1} L. \quad (20.2)$$

همچنین با استفاده از رابطه‌های $L = (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_1$ و $G = (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_2$ داریم

$$(I - G)^{-1} L = (I - (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_2)^{-1} (I + h\theta M)^{-1} h\theta N_1$$

$$\begin{aligned}
 &= [(I + h\theta M)^{-1}((I + h\theta M) - h\theta N_2)]^{-1}(I + h\theta M)^{-1}h\theta N_1 \\
 &= (I + h\theta M - h\theta N_2)^{-1}(I + h\theta M)(I + h\theta M)^{-1}h\theta N_1 \\
 &= (I + h\theta(M - N_2))^{-1}h\theta N_1 = (I + h\theta D)^{-1}h\theta N_1, \quad (21.2)
 \end{aligned}$$

که در آن $M - N_2$ را D قرار دادیم. با استفاده از رابطه‌های (۲۰.۲) و (۲۱.۲) نتیجه می‌گیریم که

$$T_\infty = (I - G)^{-1}L = (I + h\theta D)^{-1}h\theta N_1. \quad (22.2)$$

با توجه به روابط فوق، می‌توان نتیجه گرفت که $T_\infty = (I + h\theta D)^{-1}h\theta N_1$ ماتریس تکرار متناظر با شکافت $I - G - L = \lim_{s \rightarrow \infty} (\mathcal{M}_s - \mathcal{N}_s)$ است و این رابطه‌ی مستقیم با بکار بردن روش θ برای تکرارهای بیرونی دستگاه زیر (رابطه‌ی (۲۰.۲)) دارد:

$$\begin{cases} \dot{y}^{(k+1)}(t) + Dy^{(k+1)}(t) = N_1 y^{(k)}(t) + f(t), \\ y^{(k+1)}(t_0) = y_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad t \in [t_0, T], \quad y^0(t) = y_0. \end{cases}$$

که در آن $D - N_1$ یک شکافت برای ماتریس Q در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۲) است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش TSWR-Theta زمانی که $s \rightarrow \infty$ ، به روش WR همگرا می‌شود.

۲.۳.۲ تأثیر کاهش پارامتر $h\theta$ روی سرعت همگرایی

یک نتیجه‌گیری مقایسه‌ای برای بررسی تأثیر h و θ روی همگرایی روش TSWR-Theta می‌توان بدست آورد که در لم و قضیه‌ی زیر به صورت مقدماتی بیان شده است.

لم ۴.۲ فرض کنید $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب باشد و $h_1, h_2, \theta_1, \theta_2 > 0$ به طوری که $h_1\theta_1 \leq h_2\theta_2$. اگر G_1 و G_2 و L_1 و L_2 ماتریس‌های تعریف شده در رابطه‌ی ۱۰.۲ باشند و برای G_1 و L_1 و $h\theta = h_1\theta_1$ و همچنین برای G_2 و L_2 ، $h\theta = h_2\theta_2$ و $L_1 \leq L_2$ و $G_1 \leq G_2$.

برهان : با استفاده از رابطه‌ی (۱۰.۲)، می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} G_1 &= (I + h_1 \theta_1 M)^{-1} h_1 \theta_1 N_2, & G_2 &= (I + h_2 \theta_2 M)^{-1} h_2 \theta_2 N_2, \\ L_1 &= (I + h_1 \theta_1 M)^{-1} h_1 \theta_1 N_1, & L_2 &= (I + h_2 \theta_2 M)^{-1} h_2 \theta_2 N_1. \end{aligned}$$

برای ساده‌نویسی قرار می‌دهیم $x_1 = h_1 \theta_1$ و $x_2 = h_2 \theta_2$. در این صورت داریم

$$\begin{aligned} G_2 - G_1 &= (I + x_2 M)^{-1} x_2 N_2 - (I + x_1 M)^{-1} x_1 N_2 \\ &= (I + x_1 M)^{-1} [(I + x_1 M)(I + x_2 M)^{-1} x_2 - x_1] N_2 \\ &= (I + x_1 M)^{-1} [x_2 (I + x_1 M) - x_1 (I + x_2 M)] (I + x_2 M)^{-1} N_2 \\ &= (I + x_1 M)^{-1} (x_2 + x_2 x_1 M - x_1 - x_1 x_2 M) (I + x_2 M)^{-1} N_2 \\ &= (I + x_1 M)^{-1} (x_2 - x_1) (I + x_2 M)^{-1} N_2 \\ &= (x_2 - x_1) (I + x_1 M)^{-1} (I + x_2 M)^{-1}. \end{aligned}$$

چون $h_2 \theta_2 \geq h_1 \theta_1$ بنابراین $x_2 \geq x_1 \geq 0$. از طرفی چون M ، یک M -ماتریس است و $x_1, x_2 \geq 0$ ، با استفاده از لم ۵.۱ نتیجه می‌گیریم که $I + x_1 M$ و $I + x_2 M$ ، M -ماتریس هستند، بنابراین دارای معکوس نامنفی می‌باشند، یعنی

$$(I + x_1 M)^{-1} \geq 0, \quad (I + x_2 M)^{-1} \geq 0.$$

از اینکه $M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب است، نتیجه می‌گیریم که $N_2 \geq 0$. بنابراین می‌توان نوشت $G_2 - G_1 \geq 0$ و در این صورت $G_2 \geq G_1$. بطور مشابه برای L_1 و L_2 داریم،

$$\begin{aligned} L_2 - L_1 &= (I + x_2 M)^{-1} x_2 N_1 - (I + x_1 M)^{-1} x_1 N_1 \\ &= (I + x_1 M)^{-1} [x_2 (I + x_1 M) - x_1 (I + x_2 M)] (I + x_2 M)^{-1} N_1 \\ &= (x_2 - x_1) (I + x_1 M)^{-1} (I + x_2 M)^{-1} N_1 \geq 0. \end{aligned}$$

$$L_2 - L_1 \geq 0 \Rightarrow L_2 \geq L_1.$$

□

قضیه ۵.۲ فرض کنید Q یک M -ماتریس و $Q = M - N_1 - N_2$ یک M -شکافت مرکب باشد و $h_1, h_2, \theta_1, \theta_2 > 0$ ، بطوری که $h_2\theta_2 \geq h_1\theta_1$. اگر $T_s^{(1)}$ و $T_s^{(2)}$ ماتریس‌های تکرار روش TSWR-Theta به ترتیب با پارامترهای $h\theta = h_2\theta_2$ و $h\theta = h_1\theta_1$ باشند، آنگاه برای عدد ثابت $s \geq 1$ داریم

$$\rho(T_s^{(1)}) \leq \rho(T_s^{(2)}) < 1.$$

برهان : از رابطه‌ی (۱۵.۲) می‌دانیم که $y_n^{k+1} = T_s y_n^k + S_s g_n + p_{s,n}(k)$. طبق رابطه‌ی (۱۴.۲) داریم

$$T_s = G^s + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L \Rightarrow T_s^{(1)} = G_1^s + \sum_{j=0}^{s-1} G_1^j L_1.$$

حال فرض کنیم $x > 0$ بردار ویژه‌ی پرون-فروبنیوس ماتریس $T_s^{(1)}$ باشد. فرض می‌کنیم $\|x\|_2 = 1$ ، در غیر این صورت می‌توان بردار x را به صورت $\frac{x}{\|x\|_2}$ در نظر گرفت. داریم

$$\rho(T_s^{(1)})x = T_s^{(1)}x = G_1^s x + \sum_{j=0}^{s-1} G_1^j L_1 x.$$

حال با استفاده از لم ۴.۲ نتیجه می‌گیریم

$$G_1^s x + \sum_{j=0}^{s-1} G_1^j L_1 x \leq G_2^s x + \sum_{j=0}^{s-1} G_2^j L_2 x = T_s^{(2)} x = \rho(T_s^{(2)})x.$$

در این صورت $\rho(T_s^{(1)})x \leq \rho(T_s^{(2)})x$ ، با توجه به اینکه $\|x\|_2 = 1$ ، می‌توان نتیجه گرفت

$$\rho(T_s^{(1)}) \leq \rho(T_s^{(2)}).$$

از طرفی $T_s^{(1)}$ و $T_s^{(2)}$ ماتریس‌های تکرار متناظر با M -شکافت هستند، در این صورت نتیجه می‌گیریم

$$\rho(T_s^{(1)}) \leq \rho(T_s^{(2)}) < 1.$$

□

در واقع این قضیه بیان می‌کند که شعاع طیفی ماتریس تکرار روش TSWR-Theta تابع صعودی برحسب پارامتر $h\theta$ می‌باشد، به عبارت دیگر هرچه قدر فاصله‌ی نقاط گره‌ی $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ از همدیگر کمتر باشد (طول گام h کوچکتر باشد)، یا اینکه هر چه قدر پارامتر θ به صفر نزدیکتر باشد، شعاع طیفی کمتر شده و سرعت همگرایی بیشتر می‌شود.



فصل ۳

روش موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری

مسئله‌ی مقدار اولیه از دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری

$$\begin{cases} Ay(t) + By(t) = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.3)$$

را در نظر بگیرید، که در آن $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ماتریس منفرد، $B \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ماتریس نامنفرد، $t \in [t_0, T]$ و تابع برداری $f(t) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{C}^m$ پیوسته است. در این فصل روش TSWR را برای حل این مسئله بکار می‌بریم ([۱۶]). با توجه به [۶] می‌دانیم که مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۳) دارای جواب منحصر بفرد می‌باشد. لازم به ذکر است که اگر A نامنفرد باشد، در این صورت مسئله‌ی مقدار اولیه از دستگاه DAE به مسئله‌ی مقدار اولیه از دستگاه ODE تبدیل می‌شود که در فصل قبل بررسی شده است، بعلاوه اگر $A = 0$ ، در این صورت رابطه‌ی (۱.۳) به صورت یک دستگاه خطی از معادلات جبری خواهد بود که این موضوع در [۱۹] بررسی شده است.

۱.۳ روش تکراری موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه DAE

در رابطه‌ی (۱.۳) فرض کنید، $A = M_A - N_A$ و $B = M_1 - N_1$ دو شکافت P-منظم باشند. در این صورت روش تکراری WR به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} M_A \dot{y}^{k+1}(t) + M_1 y^{k+1}(t) = N_1 y^k(t) + N_A \dot{y}^k(t) + f(t), \\ y^{k+1}(t_0) = y_0, \quad k = 0, 1, \dots, \quad t \in [t_0, T], \quad y^0(t) = y_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

برای محاسبه‌ی y^{k+1} مانند روش بکاربرده شده در فصل قبل، شکافت $M_1 = M_2 - N_2$ را در نظر می‌گیریم، با این تفاوت که این شکافت P-منظم است. در این صورت روش تکراری TSWR به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} M_A \dot{z}^{v+1}(t) + M_2 z^{v+1}(t) = N_2 z^v(t) + N_1 y^k(t) + N_A \dot{y}^k(t) + f(t), \\ z^{v+1}(t_0) = y^k(t_0) = y_0, \\ k = 0, 1, \dots, \quad v = 0, 1, \dots, s-1, \quad y^0(t) = y_0, \quad t \in [t_0, T]. \end{cases} \quad (3.3)$$

از آنجایی که TSWR یک روش تکراری ایستا است، s یک عدد صحیح مثبت بوده و تعداد تکرارهای درونی را مشخص می‌کند، همچنین $y^{k+1}(t) = z^s(t)$ بنابراین الگوریتم زیر را برای روش TSWR پیوسته می‌توان بیان کرد.
الگوریتم ۱.۳ : الگوریتم روش تکراری تخفیف موجی شکل دو مرحله‌ای پیوسته (TSWR)

1. For $k = 0, 1, \dots$
2. $z^0(t) = y^k(t)$
3. For $v = 0, 1, \dots, s-1$
4. $M_A \dot{z}^{v+1}(t) + M_2 z^{v+1}(t) = N_2 z^v(t) + N_1 y^k(t) + N_A \dot{y}^k(t) + f(t)$
5. $z^{v+1}(t_0) = y^k(t_0) = y_0$
6. EndFor
7. $y^{k+1}(t) = z^s(t)$
8. EndFor

رابطه‌ی تکراری که در این الگوریتم آمده، پیوسته است. برای گسسته‌سازی آن فرض کنیم، بازه‌ی زمانی $[t_0, T]$ به نقاط متساوی‌فاصله‌ی $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ با طول گام h افراز

شده باشد. با استفاده از روش θ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$M_A z_{n+1}^{v+1} - M_A z_n^{v+1} = h\theta[-M_\tau z_{n+1}^{v+1} + N_\tau z_{n+1}^v + N_\lambda y_{n+1}^k + N_A \bar{y}_{n+1}^k + f(t_{n+1})] \\ + h(1-\theta)[-M_\tau z_n^{v+1} + N_\tau z_n^v + N_\lambda y_n^k + N_A \bar{y}_n^k + f(t_n)] \quad (4.3)$$

در این رابطه‌ی تکراری z_n^v و y_n^k به ترتیب تقریب‌هایی برای $z^v(t_n)$ و $y^k(t_n)$ ، همچنین \bar{y}_n^k و \bar{y}_{n+1}^k به ترتیب تقریب‌هایی برای $\bar{y}^k(t_n)$ و $\bar{y}^k(t_{n+1})$ هستند. قرار می‌دهیم

$$F = (M_A + h\theta M_\tau)^{-1}(M_A - h(1-\theta)M_\tau), \\ b_n(v, k) = (M_A + h\theta M_\tau)^{-1}(N_\tau z_n^v + N_\lambda y_n^k + N_A \bar{y}_n^k + f_n), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

در این صورت رابطه‌ی تکراری (۴.۳) را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$z_{n+1}^{v+1} = F z_n^{v+1} + h\theta b_{n+1}(v, k) + h(1-\theta)b_n(v, k). \quad (5.3)$$

در نتیجه روش TSWR را می‌توان به صورت یک الگوریتم گسسته با پارامتر θ بیان کرد.

۲.۳ الگوریتم روش تکراری موجی شکل دو مرحله‌ای با پارامتر θ

الگوریتم ۲.۳ : الگوریتم روش تکراری تخفیف موجی شکل دو مرحله‌ای (TSWR - Theta)

1. For $k = 0, 1, \dots$
2. $z_n^0 = y_n^k, \quad n = 0, 1, \dots, N$
3. For $v = 0, 1, \dots, s-1$
4. $z_0^{v+1} = y_0^k = y_0$
5. For $n = 0, 1, \dots, N-1$
6. $z_{n+1}^{v+1} = F z_n^{v+1} + h\theta b_{n+1}(v, k) + h(1-\theta)b_n(v, k)$
7. EndFor
8. EndFor
9. $y_n^{k+1} = z_n^s, \quad n = 0, 1, \dots, N$
10. EndFor

ذکر این نکته ضروری است که در الگوریتم فوق در مرحله‌ی شروع y_n^0 را به ازای تمام نقاط گرهی برابر با y در نظر می‌گیریم، همچنین \bar{y}_n^k با استفاده از رابطه‌ی $A\bar{y}_n^k + By_n = f(t_n)$ بدست می‌آید و برای محاسبه‌ی \bar{y}_n^k از تقریب تفاضلی پسرو به صورت زیر کمک می‌گیریم:

$$\bar{y}_n^k = \frac{y_n^k - y_{n-1}^k}{h}.$$

قرار می‌دهیم $P_M = (1 - \theta)I + \theta F$ ، در این صورت با استفاده از لم ۱.۲ رابطه‌ی تکراری (۵.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$z_n^{v+1} = F^n z_0^{v+1} + h(1 - \theta)F^{n-1}b_0(v, k) + h \sum_{j=1}^{n-1} F^{j-1} P_M b_{n-j}(v, k) + h\theta b_n(v, k). \quad (6.3)$$

ماتریس‌های G ، L و P ، همچنین بردار \hat{g}_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G = h\theta(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} N_\Upsilon, \quad L = h\theta(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}, \quad P = (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}, \\ \hat{g}_n = [F^n + h(1 - \theta)F^{n-1}P(N_\Upsilon + N_\Lambda)]y_0 + h(1 - \theta)F^{n-1}P(f(t_0) + N_A \bar{y}_0^k) + h \sum_{j=1}^{n-1} F^{j-1} P_M P f(t_{n-j}) + h\theta P f(t_n). \quad (7.3)$$

از طرفی می‌دانیم که $z_0^{v+1} = y_0^k = y_0$. همچنین با جایگذاری $b_n(v, k)$ و با توجه به روابط (۷.۳)، رابطه‌ی (۶.۳) را می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$z_n^{v+1} = F^n y_0 + h(1 - \theta)F^{n-1}(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}(N_\Upsilon y_0 + N_\Lambda y_0 + N_A \bar{y}_0^k + f(t_0)) \\ + h \sum_{j=1}^{n-1} F^{j-1} P_M (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}(N_\Upsilon z_{n-j}^v + N_\Lambda y_{n-j}^k + N_A \bar{y}_{n-j}^k + f(t_{n-j})) \\ + h\theta[(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}(N_\Upsilon z_n^v + N_\Lambda y_n^k + N_A \bar{y}_n^k + f(t_n))] \\ = h\theta(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} N_\Upsilon z_n^v + h\theta(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}(N_\Lambda y_n^k + N_A \bar{y}_n^k) \\ + h \sum_{j=1}^{n-1} F^{j-1} P_M P(N_\Upsilon z_{n-j}^v + N_\Lambda y_{n-j}^k + N_A \bar{y}_{n-j}^k) \\ + h \sum_{j=1}^{n-1} F^{j-1} P_M (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} f(t_{n-j}) + h\theta(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} f(t_n) \\ + [F^n + h(1 - \theta)F^{n-1}P(N_\Upsilon + N_\Lambda)]y_0 + h(1 - \theta)F^{n-1}P(f(t_0) + N_A \bar{y}_0^k).$$

در نهایت z_n^{v+1} را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$z_n^{v+1} = Gz_n^v + L(N_\nu y_n^k + N_A \bar{y}_n^k) + h \sum_{j=1}^{n-1} F^{j-1} P_M P (N_\nu z_{n-j}^v + N_\nu y_{n-j}^k + N_A \bar{y}_{n-j}^k) + \hat{g}_n. \quad (۸.۳)$$

بردارهای زیر را به صورت

$$\tilde{g}_n = \begin{cases} -LN_A y_0^k / h, & n = 1, \\ -F^{n-2} P_M P N_A y_0^k, & n \geq 2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_n &= [g_1^T, g_2^T, \dots, g_n^T]^T = [\hat{g}_1^T + \tilde{g}_1^T, \hat{g}_2^T + \tilde{g}_2^T, \dots, \hat{g}_n^T + \tilde{g}_n^T]^T, \\ \bar{z}_n^v &= [(z_1^v)^T, (z_2^v)^T, \dots, (z_n^v)^T]^T, \quad \tilde{y}_n^k = [(y_1^k)^T, (y_2^k)^T, \dots, (y_n^k)^T]^T, \\ L_h &= L(N_\nu + N_A/h), \end{aligned}$$

و ماتریس‌های φ_n و ψ_n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_n = \begin{pmatrix} G & & & & & \\ hP_M P N_\nu & G & & & & \\ hF P_M P N_\nu & hP_M P N_\nu & G & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ hF^{n-2} P_M P N_\nu & hF^{n-1} P_M P N_\nu & \cdots & hP_M P N_\nu & G & \end{pmatrix},$$

$$\psi_n = \begin{pmatrix} L_h & & & & & \\ -LN_A/h & L_h & & & & \\ -P_M P N_A/h & -LN_A/h & L_h & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ -F^{n-2} P_M P N_A/h & & \cdots & -LN_A/h & L_h & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hP_M P L_h & & & & & \\ hF P_M P L_h & hP_M P L_h & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ hF^{n-2} P_M P L_h & & \cdots & hP_M P L_h & & \end{pmatrix}.$$

در این صورت رابطه‌ی (۸.۳) را می‌توان به صورت فشرده‌ی زیر نوشت:

$$\bar{z}_n^{v+1} = \varphi_n \bar{z}_n^v + \psi_n \tilde{y}_n^k + \bar{g}_n. \quad (۹.۳)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۹.۳) داریم

$$\bar{z}_n^v = \varphi_n \bar{z}_n^{v-1} + \psi_n \tilde{y}_n^k + \bar{g}_n. \quad (۱۰.۳)$$

فرض کنیم تکرار داخلی v ثابت و برابر با s باشد. در این صورت رابطه‌ی (۱۰.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{z}_n^s &= \varphi_n \bar{z}_n^{s-1} + \psi_n \tilde{y}_n^k + \bar{g}_n \\ &= \varphi_n (\varphi_n \bar{z}_n^{s-2} + \psi_n \tilde{y}_n^k + \bar{g}_n) + \psi_n \tilde{y}_n^k + \bar{g}_n \\ &= \varphi_n^2 (\varphi_n \bar{z}_n^{s-2} + \psi_n \tilde{y}_n^k + \bar{g}_n) + \varphi_n \psi_n \tilde{y}_n^k + \varphi_n \bar{g}_n + \psi_n \tilde{y}_n^k + \bar{g}_n \\ &= \varphi_n^3 \bar{z}_n^{s-2} + \varphi_n^2 \psi_n \tilde{y}_n^k + \varphi_n \psi_n \tilde{y}_n^k + \psi_n \tilde{y}_n^k + \varphi_n^2 \bar{g}_n + \varphi_n \bar{g}_n + \bar{g}_n. \end{aligned}$$

با ادامه‌ی همین روند به استقراء داریم

$$\begin{aligned} \bar{z}_n^s &= \varphi_n^s \bar{z}_n^0 + \varphi_n^{s-1} \psi_n \tilde{y}_n^k + \varphi_n^{s-2} \psi_n \tilde{y}_n^k + \cdots + \varphi_n \psi_n \tilde{y}_n^k + \psi_n \tilde{y}_n^k \\ &\quad + \varphi_n^{s-1} \bar{g}_n + \varphi_n^{s-2} \bar{g}_n + \cdots + \bar{g}_n. \\ \Rightarrow \bar{z}_n^s &= \varphi_n^s \bar{z}_n^0 + \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_n^v \psi_n \tilde{y}_n^k + \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_n^v \bar{g}_n. \end{aligned}$$

اگر در این رابطه آخرین مؤلفه‌ی \bar{z}_n^s را بیرون بکشیم، جمله‌ی عمومی z_n^s در نقطه‌ی t_n به صورت

$$\bar{z}_n^s = \begin{pmatrix} z_1^s \\ z_2^s \\ \vdots \\ z_n^s \end{pmatrix} = \varphi_n^s \begin{pmatrix} z_1^0 \\ z_2^0 \\ \vdots \\ z_n^0 \end{pmatrix} + \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_n^v \psi_n \begin{pmatrix} y_1^k \\ y_2^k \\ \vdots \\ y_n^k \end{pmatrix} + \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_n^v \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

بدست می‌آید و بنابراین

$$\begin{aligned} z_n^s &= G^s z_n^0 + \varphi_{n,1}^s z_1^0 + \varphi_{n,2}^s z_2^0 + \varphi_{n,3}^s z_3^0 + \cdots + \varphi_{n,n-1}^s z_{n-1}^0 + G^0 L_h y_n^k + G^1 L_h y_n^k \\ &\quad + \cdots + G^{s-1} L_h y_n^k + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \varphi_n^v \psi_n \right)_1 y_1^k + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \varphi_n^v \psi_n \right)_2 y_2^k + \cdots + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \varphi_n^v \psi_n \right)_{n-1} y_{n-1}^k \\ &\quad + G^0 g_n + G^1 g_n + \cdots + G^{s-1} g_n + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{n,1}^v g_1 \right) + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{n,2}^v g_2 \right) + \cdots \\ &\quad + \left(\sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{n,n-1}^v g_{n-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= G^s z_n^\circ + \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{n,j}^s z_j^\circ + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L_h y_n^k + \left(\sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{n,l}^v \psi_{l,1} \right) y_1^k + \left(\sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{n,l}^v \psi_{l,2} \right) y_2^k \\
 &+ \cdots + \left(\sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{n,l}^v \psi_{l,n-1} \right) y_{n-1}^k + \sum_{v=0}^{s-1} G^v g_n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{n,j}^v g_j \\
 &= G^s z_n^\circ + \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{n,j}^s z_j^\circ + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L_h y_n^k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{n,l}^v \psi_{l,j} y_j^k + \sum_{v=0}^{s-1} G^v g_n \\
 &+ \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{n,j}^v g_j.
 \end{aligned}$$

در تمام روابط بالا $\psi_{n,j}^{(v)}$ و $\varphi_{n,j}$ به ترتیب (n, j) -امین بلوک $\psi_n^{(v)}$ و φ_n را نشان می‌دهد. قرار

می‌دهیم

$$\begin{aligned}
 T_s &= G^s + \sum_{v=0}^{s-1} G^v L_h, & W_s &= \sum_{v=0}^{s-1} G^v, \\
 p_{s,n}(k) &= \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{n,j}^s y_j^k + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^n \varphi_{n,l}^v \psi_{l,j} y_j^k + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{n,j}^v g_j. \quad (11.3)
 \end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم که $z_n^\circ = y_n^k$ و $z_n^s = y_n^{k+1}$ و همچنین $p_{s,n}(k)$ فقط به مقدار y_j^k در نقاط گرهی $\{t_0, t_1, \dots, t_{n-1}\}$ وابسته است. بنابراین با جایگذاری روابط (۱۱.۳) در z_n^s داریم

$$y_n^{k+1} = T_s y_n^k + W_s g_n + p_{s,n}(k). \quad (12.3)$$

با محاسبات اخیر، روش تکراری TSWR-Theta را برحسب رابطه‌ی تکراری (۱۲.۳) بیان کردیم، که به موجب آن بررسی همگرایی روش TSWR-Theta آسان‌تر خواهد بود و در بخش بعدی به بررسی این موضوع خواهیم پرداخت.

۳.۳ بررسی همگرایی روش تکراری موجی شکل دومرحله‌ای

در فصل اول لم ۱۳.۱ و قضیه‌ی ۱۹.۱ شرایط لازم و کافی را برای همگرایی یک روش تکراری بیان می‌کند. تحت این شرایط، همگرایی روش TSWR-Theta را که به صورت رابطه‌ی ۱۲.۳ بیان شد، بررسی می‌کنیم.

لم ۱.۳ در رابطه‌ی تکراری (۱۲.۳) فرض کنید W_s ماتریس نامنفرد باشد، اگر $\rho(T_s) < 1$ آنگاه این رابطه‌ی تکراری همگراست.

برهان : اثبات به استقراء بر روی n است. فرض کنیم $n = 1$ ، در این صورت $P_{s,1}(k) = 0$. از طرفی $1 < \rho(T_s) < W_s$ نامنفرد است، همچنین $\lim_{k \rightarrow \infty} k^k = y_1$ ، بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۱۹.۱ نتیجه می‌گیریم که رابطه‌ی تکراری (۱۲.۳) همگراست. حال فرض کنیم $n = 2$ در این صورت رابطه‌ی تکراری (۱۲.۳) به صورت $y_2^{k+1} = T_s y_2^k + W_s g_2 + p_{s,2}(k)$ خواهد بود که در آن $P_{s,2}(k)$ به صورت زیر است:

$$p_{s,2}(k) = \varphi_{2,1}^s y_1^k + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{l=1}^2 \varphi_{2,l}^v \psi_{l,1} y_1^k + \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{2,j}^v g_1. \quad (13.3)$$

بنابراین داریم

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{s,2}(k) = \varphi_{2,1}^s y_1 + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{l=1}^2 \varphi_{2,l}^v \psi_{l,1} y_1 + \sum_{v=0}^{s-1} \varphi_{2,j}^v g_1.$$

همچنین $\lim_{k \rightarrow \infty} y_2^k = y_2$ ، بنابراین شرایط قضیه‌ی ۱۹.۱ برقرار است. در این صورت رابطه‌ی تکراری (۱۳.۳) همگراست. حال فرض کنیم حکم به ازای $n = q$ برقرار باشد، برای $n = q + 1$ رابطه‌ی تکراری (۱۲.۳) به صورت زیر است:

$$y_{q+1}^{k+1} = T_s y_{q+1}^k + W_s g_{q+1} + p_{s,q+1}(k),$$

که در آن

$$p_{s,q+1}(k) = \sum_{j=1}^q \varphi_{q+1,j}^s y_j^k + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{q+1} \varphi_{q+1,l}^v \psi_{l,j} y_j^k + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^q \varphi_{q+1,j}^v g_j.$$

با توجه به اینکه $\lim_{k \rightarrow \infty} y_j^k = y_j$ می‌توان نوشت:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{s,q+1}(k) = \sum_{j=1}^q \varphi_{q+1,j}^s y_j + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^q \sum_{l=1}^{q+1} \varphi_{q+1,l}^v \psi_{l,j} y_j + \sum_{v=0}^{s-1} \sum_{j=1}^q \varphi_{q+1,j}^v g_j.$$

بنابراین با استفاده از قضیه‌ی ۱۹.۱ می‌توان نتیجه گرفت که حکم به ازای $n = q + 1$ نیز برقرار است. \square

با استفاده از لم فوق نتیجه می‌گیریم زمانی که W_s نامنفرد و $1 < \rho(T_s)$ ، دنباله‌ی $\{y_n^k\}_{k=0,1,\dots}$ در رابطه‌ی (۱۲.۳) همگراست. قضیه‌ی بعدی شرایط لازم و کافی را برای اینکه $1 < \rho(T_s)$ باشد، معرفی می‌کند.

قضیه ۱.۳ رابطه‌ی تکراری (۳.۳) را برای مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۳) در نظر بگیرید. فرض کنید $B' = B - N_A/h$ و $N'_1 = N_1 + N_A/h$. همچنین فرض کنید $M_A \geq 0$ و $M_1 = M_2 - N_2$ اگر $N'_1 \geq 0$ باشد و به طوری که $B' = M_1 - N'_1$ و $B' > 0$. شکافت P-منظم باشد، آنگاه $\rho(T_s) < 1$.

برهان : از اینکه $M_1 = M_2 - N_2$ یک شکافت P-منظم است، نتیجه می‌گیریم که $M_2^H + N_2 > 0$. همچنین از فرض $B' > 0$ و $N'_1 \geq 0$ نتیجه می‌شود که $M_1 = M_2 - N_2 = B' + N'_1 > 0$. با توجه به اینکه $M_A \geq 0$ می‌توان نوشت:

$$(M_A + h\theta M_2)^H + h\theta N_2 > 0,$$

$$(M_A + h\theta M_2) - h\theta N_2 = M_A + h\theta(M_2 - N_2) > 0.$$

قرار می‌دهیم $G = (M_A + h\theta M_2)^{-1} h\theta N_2$ ، در این صورت با استفاده از لم ۹.۱ نتیجه می‌گیریم که $\rho(G) < 1$ ، در نتیجه می‌توان گفت که $I - G$ و $I - G^s$ نامنفرد هستند. با استفاده از لم ۱۰.۱ می‌توان نتیجه گرفت که دو ماتریس منحصربفرد P_G و Q_G به صورت

$$P_G = (I - G)(I - G^s)^{-1}, \quad Q_G = P_G - (I - G),$$

وجود دارند، به طوری که $G^s = P_G^{-1} Q_G$. با استفاده از رابطه‌ی (۱۱.۳) می‌دانیم که $T_s = G^s + \sum_{j=0}^{s-1} G^j L_h$ و برای ساده کردن T_s به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$G^s = P_G^{-1} Q_G = (I - G^s)(I - G)^{-1} [(I - G)(I - G^s)^{-1} - (I - G)] = I - (I - G^s),$$

$$T_s = G^s + \sum_{j=0}^{s-1} G^j L_h = I - (I - G^s) + \left(\sum_{j=0}^{s-1} G^j \right) L_h.$$

از طرفی $\rho(G) < 1$ بنابراین می‌توان نوشت $\sum_{j=0}^{\infty} G^j = (I - G)^{-1}$ و در این صورت

$$\sum_{j=0}^{s-1} G^j + \sum_{j=s}^{\infty} G^j = (I - G)^{-1},$$

$$\Rightarrow \sum_{j=0}^{s-1} G^j = (I - G)^{-1} - \sum_{j=s}^{\infty} G^j = (I - G)^{-1} - \sum_{j=0}^{\infty} G^{j+s} = (I - G)^{-1} - G^s \sum_{j=0}^{\infty} G^j$$

$$= (I - G)^{-1} - G^s (I - G)^{-1} = (I - G^s)(I - G)^{-1}.$$

بنابراین T_s را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned}
 T_s &= G^s + \sum_{j=0}^{s-1} G^j L_h = I - (I - G^s) + \left(\sum_{j=0}^{s-1} G^j \right) L_h \\
 &= I - (I - G^s) + (I - G^s)(I - G)^{-1} L_h = I - (I - G^s)(I - G)^{-1} (I - G - L_h) \\
 &= I - (I - G^s)(I - G)^{-1} [I - (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} h\theta N_\gamma \\
 &\quad - (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} h\theta (N_\gamma + \frac{1}{h} N_A)] \\
 &= I - P_G^{-1} (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} [M_A + h\theta M_\gamma - h\theta N_\gamma - h\theta N_\gamma - \frac{h\theta}{h} N_A] \\
 &= I - P_G^{-1} (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} [M_A + h\theta (M_\gamma - N_\gamma - N_\gamma - \frac{1}{h} N_A)] \\
 &= I - P_G^{-1} (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} [M_A + h\theta (B - \frac{1}{h} N_A)] \\
 &= I - P_G^{-1} (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} (M_A + h\theta B') \\
 &= I - P_G^{-1} P (M_A + h\theta B'),
 \end{aligned}$$

نوشت که در آن $P = (M_A + h\theta B')$ همچنین قرار می‌دهیم $A_h = M_A + h\theta B'$. بنابراین

$$\begin{aligned}
 A_h - T_s^H A_h T_s &= A_h - [I - (P^{-1} P_G)^{-1} A_h]^H A_h [I - (P^{-1} P_G)^{-1} A_h] \\
 &= A_h (P^{-1} P_G)^{-1} A_h + A_h^H (P^{-1} P_G)^{-H} A_h \\
 &\quad - A_h^H (P^{-1} P_G)^{-H} A_h (P^{-1} P_G)^{-1} A_h.
 \end{aligned}$$

با توجه به اینکه A_h هرمیتی است، داریم

$$\begin{aligned}
 A_H - T_h A_h T_s &= A_h^H ((P^{-1} P_G)(P^{-1} P_G)^{-1})^H (P^{-1} P_G)^{-1} A_h \\
 &\quad + A_h^H (P^{-1} P_G)^{-H} (P^{-1} P_G)(P^{-1} P_G)^{-1} A_h - A_h^H (P^{-1} P_G)^{-H} A_h (P^{-1} P_G)^{-1} A_h \\
 &= A_h^H (P^{-1} P_G)^{-H} (P^{-1} P_G)^H (P^{-1} P_G)^{-1} A_h + A_h^H (P^{-1} P_G)^{-H} (P^{-1} P_G)(P^{-1} P_G)^{-1} A_h \\
 &\quad - A_h^H (P^{-1} P_G)^{-H} A_h (P^{-1} P_G)^{-1} A_h \\
 &= [(P^{-1} P_G)^{-1} A_h]^H [P^{-1} P_G + (P^{-1} P_G)^H - A_h] [(P^{-1} P_G)^{-1} A_h] \\
 &= [(P^{-1} P_G)^{-1} A_h]^H [P^{-1} (Q_G + I - G) - A_h + (P^{-1} P_G)^H] [(P^{-1} P_G)^{-1} A_h] \\
 &= [(P^{-1} P_G)^{-1} A_h]^H [P^{-1} Q_G + P^{-1} - P^{-1} G - A_h + (P^{-1} P_G)^H] [(P^{-1} P_G)^{-1} A_h].
 \end{aligned}$$

فصل ۳ : روش موجی شکل دومرحله‌ای برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری — ۶۰

مقدار $P^{-1} - P^{-1}G - A_h$ را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 P^{-1} - P^{-1}G - A_h &= M_A + h\theta M_\gamma - (M_A + h\theta M_\gamma)(M_A + h\theta M_\gamma)^{-1}h\theta N_\gamma - M_A \\
 &\quad - h\theta B' \\
 &= M_A + h\theta M_\gamma - h\theta N_\gamma - M_A - h\theta B' \\
 &= M_A + h\theta M_\gamma - h\theta N_\gamma - M_A - h\theta(M_\gamma - N_\gamma - N_\gamma - \frac{N_A}{h}) \\
 &= M_A + h\theta M_\gamma - h\theta N_\gamma - M_A - h\theta M_\gamma + h\theta N_\gamma + h\theta N_\gamma + h\theta \frac{N_A}{h} \\
 &= h\theta(N_\gamma + \frac{N_A}{h}) = h\theta N'_\gamma. \quad (۱۴.۳)
 \end{aligned}$$

حال با جایگذاری رابطه‌ی (۱۴.۳) در $A_h - T_s^H A_h T_s$ داریم:

$$A_h - T_s^H A_h T_s = [(P^{-1}P_G)^{-1}A_h]^H [P^{-1}Q_G + h\theta N'_\gamma + (P^{-1}P_G)^H] [(P^{-1}P_G)^{-1}A_h].$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
 P^{-1}P_G - P^{-1}Q_G &= P^{-1}(P_G - Q_G) = P^{-1}(I - G) = M_A + h\theta(M_\gamma - N_\gamma), \\
 (P^{-1}P_G)^{-1}P^{-1}Q_G &= P_G^{-1}Q_G = G^s = [(M_A + h\theta M_\gamma)^{-1}h\theta N_\gamma]^s. \quad (۱۵.۳)
 \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $R = M_A + h\theta(M_\gamma - N_\gamma)$ با توجه به اینکه $M_A \succeq 0$ و $M_\gamma = M_\gamma - N_\gamma \succ 0$ نتیجه می‌گیریم که $R \succ 0$ و همچنین از اینکه $M_\gamma^H + N_\gamma \succ 0$ نتیجه می‌گیریم که $R = (M_A + h\theta M_\gamma) - h\theta N_\gamma$ یک شکافت P -منظم است. با توجه به رابطه‌ی (۱۵.۳) و قضیه‌ی ۱۱.۱ نتیجه می‌گیریم که $R = P^{-1}P_G - P^{-1}Q_G$ یک شکافت P -منظم است. بنابراین $(P^{-1}P_G)^H + P^{-1}Q_G \succ 0$ از طرفی $N'_\gamma \succeq 0$ و در این صورت می‌توان نوشت

$$P^{-1}Q_G + h\theta N'_\gamma + (P^{-1}P_G)^H \succ 0. \quad (۱۶.۳)$$

حال فرض کنیم $x \in \mathbb{C}^m$ $x \neq 0$. با توجه به رابطه‌ی (۱۶.۳) نشان می‌دهیم که $A_h - T_s^H A_h T_s$ معین مثبت هرمیتی است:

$$\begin{aligned}
 x^H (A_h - T_s^H A_h T_s) x &= x^H [(P^{-1}P_G)^{-1}A_h]^H [P^{-1}Q_G + h\theta N'_\gamma + (P^{-1}P_G)^H] \\
 &\quad [(P^{-1}P_G)^{-1}A_h] x \\
 &= [((P^{-1}P_G)^{-1}A_h)x]^H [P^{-1}Q_G + h\theta N'_\gamma + (P^{-1}P_G)^H]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [((P^{-1}P_G)^{-1}A_h)x] \\ & = y^H [P^{-1}QG + h\theta N'_1 + (P^{-1}P_G)^H]y > 0, \end{aligned}$$

که در آن $y = ((P^{-1}P_G)^{-1}A_h)x$ بنابراین $y^H [P^{-1}QG + h\theta N'_1 + (P^{-1}P_G)^H]y > 0$ حال از قضیه‌ی ۱۲.۱ مستقیماً نتیجه می‌گیریم که

$$\rho(T_s) < 1.$$

□

با توجه به مفروضات قضیه‌ی فوق واضح است که $B' = M_2 - N_2 - N'_1$ یک شکافت P -منظم مرکب هرمیتی است و با فرض این P -شکافت مرکب هرمیتی همچنان حکم قضیه برقرار است. اگر $M_A = A$ و $N_A = 0$ ، در این صورت در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۳)، A یک ماتریس نیمه معین مثبت هرمیتی و B یک ماتریس معین مثبت هرمیتی است و این مسأله‌ی مقدار اولیه همچنان به صورت دستگاهی از DAE است. قضیه‌ی ۱.۳ برای حالتی که A معین مثبت هرمیتی باشد نیز برقرار است که در این حالت A یک ماتریس نامفرد بوده و در نتیجه مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۳) به یک دستگاه از ODE تبدیل می‌شود.

۱.۳.۳ تأثیر افزایش تکرارهای درونی روی سرعت همگرایی

در این بخش نشان می‌دهیم که با افزایش پارامتر s (تعداد تکرارهای درونی)، شعاع طیفی ماتریس تکرار T_s در رابطه‌ی (۱۲.۳) کمتر شده و در نتیجه سرعت همگرایی روش TSWR-Theta بیشتر می‌شود.

قضیه ۲.۳ فرض کنید $B' = M_2 - N_2 - N'_1$ یک شکافت P -منظم مرکب هرمیتی باشد، که در آن $N_2 > 0$ و B' ، همچنین $M_A \succeq 0$. فرض کنید s_1 و s_2 به ترتیب پارامترهای متناظر با ماتریس‌های تکرار T_{s_1} و T_{s_2} باشند، اگر $1 \leq s_2 < s_1$ آنگاه $\rho(T_{s_1}) < \rho(T_{s_2}) < 1$.

برهان : فرض کنید W_{s_i} و T_{s_i} و $i = 1, 2$ ، ماتریس‌های تعریف شده در رابطه‌ی تکراری (۱۲.۳) باشند. قرار می‌دهیم

$$M_{s_i} = (M_A + h\theta M_2)W_{s_i}^{-1}, \quad N_{s_i} = (M_A + h\theta M_2)W_{s_i}^{-1}T_{s_i},$$

$$\begin{aligned}
 &= [(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} + (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} h\theta N_\Upsilon (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} + \dots \\
 &\quad + (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} h\theta N_\Upsilon \dots (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} h\theta N_\Upsilon (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}]^{-H} \\
 &= (M_A + h\theta M_\Upsilon)(I + G + \dots + G^{s_i-1})^{-1} = (M_A + h\theta M_\Upsilon)(W_{s_i})^{-1} = M_{s_i}.
 \end{aligned}$$

ماتریس N_{s_i} را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\begin{aligned}
 N_{s_i} &= (M_A + h\theta M_\Upsilon)W_{s_i}^{-1}T_{s_i} = (M_A + h\theta M_\Upsilon)[(\sum_{j=0}^{s_i-1} G^j)^{-1}G^{s_i} + L_h] \\
 &= (M_A + h\theta M_\Upsilon)[(I + G + G^\Upsilon + \dots + G^{s_i-1})^{-1}G^{s_i} + L_h] \\
 &= (M_A + h\theta M_\Upsilon)[(G^{-s_i}(I + G + G^\Upsilon + \dots + G^{s_i-1}))^{-1} + L_h] \\
 &= (M_A + h\theta M_\Upsilon)[(G^{-s_i} + G^{-s_i+1} + G^{-s_i+2} + \dots + G^{-1})^{-1} + L_h] \\
 &= (M_A + h\theta M_\Upsilon)[(G^{-s_i} + G^{-(s_i-1)} + G^{-(s_i-2)} + \dots + G^{-1})^{-1} + L_h] \\
 &= (M_A + h\theta M_\Upsilon)[(\sum_{j=1}^{s_i} G^{-j})^{-1} + L_h] = (M_A + h\theta M_\Upsilon)[(\sum_{j=0}^{s_i-1} G^{-j})^{-1} + L_h] \\
 &= [(\sum_{j=0}^{s_i-1} G^{-j})(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}]^{-1} + (M_A + h\theta M_\Upsilon)L_h \\
 &= [(\sum_{j=0}^{s_i-1} G^{-j})(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}]^{-1} + (M_A + h\theta M_\Upsilon)L(N_\Upsilon + \frac{N_A}{h}) \\
 &= [(\sum_{j=0}^{s_i-1} G^{-j})(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}]^{-1} + (M_A + h\theta M_\Upsilon)h\theta(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}N'_\Upsilon \\
 &= [(\sum_{j=0}^{s_i-1} G^{-j})(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}]^{-1} + h\theta N'_\Upsilon \\
 &= [(I + G^{-1} + G^{-2} + \dots + G^{-(s_i-1)})(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}]^{-1} + h\theta N'_\Upsilon \\
 &= [(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} + G^{-1}(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} + G^{-2}(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} \\
 &\quad + \dots + G^{-(s_i-1)}(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1}]^{-1} + h\theta N'_\Upsilon \\
 &= [G(h\theta N_\Upsilon)^{-1} + (h\theta N_\Upsilon)^{-1} + G^{-1}(h\theta N_\Upsilon)^{-1} + G^{-2}(h\theta N_\Upsilon)^{-1} \\
 &\quad + \dots + G^{-(s_i+2)}(h\theta N_\Upsilon)^{-1}].
 \end{aligned}$$

با توجه به مفروضات قضیه می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned}
 M_A + h\theta M_\Upsilon &\succ \circ, & (M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} &\succ \circ, & h\theta N_\Upsilon &\succ \circ, & (h\theta N_\Upsilon)^{-1} &\succ \circ, \\
 N'_\Upsilon &\succ \circ, & G^{j-1}(M_A + h\theta M_\Upsilon)^{-1} &\succ \circ, \\
 (G^{-1})^{j-1}(h\theta N_\Upsilon)^{-1} &\succ \circ, & j &= 1, 2, \dots, s_i - 1.
 \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $M_{s_i}, N_{s_i} \succ 0$ و در نتیجه $M_{s_i}^{-1} \succ 0$ ، $i = 1, 2$. بنابراین $M_{s_i}^{-1} N_{s_i} \succ 0$ و همچنین

$$M_{s_i}^{-1} N_{s_i} = M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}} M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}} N_{s_i} M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}} M_{s_i}^{\frac{1}{\nu}} \sim M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}} N_{s_i} M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}}.$$

از اینکه $N_{s_i} \succ 0$ با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۱ قسمت (ج) نتیجه می‌گیریم که $M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}} N_{s_i} M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}}$ معین مثبت هرمیتی است. در نتیجه مقادیر ویژه‌ی آن مثبت است. از طرفی $M_{s_i}^{-1} N_{s_i}$ با $M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}} N_{s_i} M_{s_i}^{-\frac{1}{\nu}}$ متشابه است، بنابراین $M_{s_i}^{-1} N_{s_i}$ نیز دارای مقادیر ویژه‌ی مثبت است، یعنی $\lambda(M_{s_i}^{-1} N_{s_i}) \in \mathbb{R}^+$. به طریق مشابه نتیجه می‌گیریم که $\lambda(M_{s_i}^{-1} (M_A + h\theta B')) \in \mathbb{R}^+$ در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\lambda(T_{s_i}) \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda(T_{M_i}) \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2.$$

از طرفی داریم

$$1 > \rho(T_{s_i}) = \rho(I - T_{M_i}) = 1 - \lambda_{\min}(T_{M_i}), \quad i = 1, 2.$$

با توجه به فرض $1 \leq s_2 < s_1$ ، از لم ۶.۱ قسمت (د) نتیجه می‌گیریم $M_{s_1}^{-1} < M_{s_2}^{-1}$ ، $0 < M_{s_2}^{-1} < M_{s_1}^{-1}$ ، بنابراین با توجه به لم ۶.۱ قسمت (ب) می‌توان نوشت:

$$(M_A + h\theta B')^{\frac{1}{\nu}} M_{s_2}^{-1} (M_A + h\theta B')^{\frac{1}{\nu}} < (M_A + h\theta B')^{\frac{1}{\nu}} M_{s_1}^{-1} (M_A + h\theta B')^{\frac{1}{\nu}}.$$

با استفاده از نتیجه‌ی ۴.۱ داریم

$$\lambda((M_A + h\theta B')^{\frac{1}{\nu}} M_{s_2}^{-1} (M_A + h\theta B')^{\frac{1}{\nu}}) < \lambda((M_A + h\theta B')^{\frac{1}{\nu}} M_{s_1}^{-1} (M_A + h\theta B')^{\frac{1}{\nu}}),$$

$$\lambda(M_{s_2}^{-1} (M_A + h\theta B')) < \lambda(M_{s_1}^{-1} (M_A + h\theta B')),$$

$$\lambda(T_{M_2}) < \lambda(T_{M_1}) \Rightarrow -\lambda(T_{M_1}) < -\lambda(T_{M_2}) \Rightarrow \rho(T_{s_1}) < \rho(T_{s_2}).$$

در نتیجه

$$\rho(T_{s_1}) < \rho(T_{s_2}) < 1.$$

□

با مفروضات قضیه ی ۲.۳ ماتریس تکرار T_s را وقتی که $s \rightarrow \infty$ ، محاسبه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در این حالت روش TSWR-Theta به روش WR همگرا می‌شود. برای این کار داریم

$$\begin{aligned} M_\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} M_s = \lim_{s \rightarrow \infty} (M_A + h\theta M_\gamma) \left(\sum_{j=0}^{s-1} G^j \right)^{-1} \\ &= (M_A + h\theta M_\gamma)(I - G) = M_A + h\theta(M_\gamma - N_\gamma), \\ N_\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} N_s = \lim_{s \rightarrow \infty} (M_A + h\theta M_\gamma) W_s^{-1} T_s \\ &= (M_A + h\theta M_\gamma) \lim_{s \rightarrow \infty} W_s^{-1} [I - M_s^{-1} (M_A + h\theta B')] \\ &= (M_A + h\theta M_\gamma) \lim_{s \rightarrow \infty} [W_s^{-1} - (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} (M_A + h\theta B')] \\ &= (M_A + h\theta M_\gamma) [(I - G) - (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} (M_A + h\theta B')] \\ &= (M_A + h\theta M_\gamma) [I - G - (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} (M_A + h\theta B')] \\ &= (M_A + h\theta M_\gamma) [I - h\theta (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} N_\gamma - (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} (M_A + h\theta B')] \\ &= (M_A + h\theta M_\gamma) - h\theta N_\gamma - (M_A + h\theta B') = h\theta(M_\gamma - N_\gamma - B') \\ &= h\theta(M_\gamma - B') = h\theta N'_\gamma. \end{aligned}$$

بنابراین ماتریس تکرار به صورت زیر است:

$$T_\infty = M_\infty^{-1} N_\infty = (M_A + h\theta(M_\gamma - N_\gamma))^{-1} h\theta N'_\gamma = (M_A + h\theta M_\gamma)^{-1} h\theta \left(N_\gamma + \frac{N_A}{h} \right).$$

همانطور که ملاحظه می‌کنیم، T_∞ ماتریس تکرار متناظر با روش WR است.

۲.۳.۳ تأثیر کاهش پارامتر θ روی سرعت همگرایی

با استفاده از قضیه ی مقایسه‌ای که در ادامه می‌آید، نشان می‌دهیم که با کاهش پارامتر θ و نزدیکتر شدن آن به صفر سرعت همگرایی بیشتر می‌شود.

قضیه ۳.۳ فرض کنید $T_s^{(1)}$ و $T_s^{(2)}$ ماتریس‌های تکرار روش TSWR-Theta به ترتیب متناظر با پارامترهای θ_1 و θ_2 باشند و $M_A > 0$ و $B' > 0$. همچنین فرض کنید $B' = M_\gamma - N_\gamma - N'_\gamma$ یک شکافت P-منظم مرکب هرمیتی باشد، به طوری که $N'_\gamma > 0$ و

$N_2 \succ \circ$. بعلاوه فرض کنید M_A, N_2, N_1' و M_2 نسبت به عمل ضرب با همدیگر جابجا می‌شوند. اگر $\theta_1 < \theta_2 < \circ$ آنگاه $\rho(T_s^{(1)}) < \rho(T_s^{(2)}) < 1$ که در آن $s \geq 1$ و $h > \circ$.

برهان : قرار می‌دهیم $r_i = h\theta_i$, $i = 1, 2$. از اینکه $M_A \succ \circ$ و $M_2 \succ \circ$ ، نتیجه می‌گیریم که $M_A + r_i M_2 \succ \circ$. از اینکه N_1', M_2 و M_A با همدیگر جابجا می‌شوند، می‌توان نوشت

$$(M_A + r_i M_2) r_i N_1' = r_i N_1' (M_A + r_i M_2).$$

با استفاده از قضیه‌ی ۱۸.۱ نتیجه می‌گیریم که $(M_A + r_i M_2)^{-1}$ با $r_i N_1'$ جابجا می‌شود. همچنین $(M_A + r_i M_2)^{-1} \succ \circ$ و $r_i N_1' \succ \circ$. در این صورت از قضیه‌ی ۱۸.۱ نتیجه می‌شود که،

$$(M_A + r_i M_2)^{-1} r_i N_1' \succ \circ, \quad i = 1, 2,$$

$$L_{h_i} = L_i \left(N_1 + \frac{N_A}{h} \right) = L_i N_1' = r_i (M_A + h\theta M_2)^{-1} N_1' \succ \circ, \quad i = 1, 2.$$

به طور مشابه از اینکه N_2, M_2 و M_A با همدیگر جابجا می‌شوند، نتیجه می‌گیریم

$$G_i = r_i (M_A + r_i M_2)^{-1} N_2 \succ \circ, \quad i = 1, 2.$$

همچنین $G_i^j \succ \circ$ و چون N_1' و N_2 با هم جابجا می‌شوند، بنابراین G_i^j و L_{h_i} دارای خاصیت جابجایی هستند. بنابراین داریم

$$G_i^j L_{h_i} \succ \circ, \quad i = 1, 2, \quad j \in [\circ, s],$$

$$T_s^{(i)} = G_i^s + \sum_{j=\circ}^{s-1} G_i^j L_{h_i} \succ \circ.$$

با توجه به اینکه داریم

$$G_i = (M_A + r_i M_2)^{-1} r_i N_2 = \left(\frac{1}{r_i} M_A + M_2 \right)^{-1} N_2,$$

$$L_{h_i} = (M_A + r_i M_2)^{-1} r_i N_1' = \left(\frac{1}{r_i} M_A + M_2 \right)^{-1} N_1'.$$

می‌توان نوشت:

$$G_1 = \left(\frac{1}{r_1} M_A + M_2 \right)^{-1} N_2,$$

$$L_{h_2} - L_{h_1} = \left[\left(\frac{1}{r_2} M_A + M_2 \right)^{-1} - \left(\frac{1}{r_1} M_A + M_2 \right)^{-1} \right] N_1'.$$

با توجه به این دو رابطه و با استفاده از مفروضات قضیه نتیجه می‌گیریم که G^j و $L_{h_2} - L_{h_1}$ با هم جابجا می‌شوند. همچنین $L_{h_2} - L_{h_1} > 0$ و $r_1 = h\theta_1 < r_2 = h\theta_2$ از طرفی با استفاده از لم ۶.۱ روابط زیر نتیجه می‌شود:

$$L_{h_2} - L_{h_1} > 0 \Rightarrow L_{h_1} < L_{h_2},$$

$$G_1 < G_2 \Rightarrow G_1^j < G_2^j, \quad j \in [1, s],$$

$$G_1^j L_{h_1} < G_1^j L_{h_2} < G_2^j L_{h_2}.$$

در این صورت نتیجه می‌گیریم،

$$0 < T_s^{(1)} = G_1^s + \sum_{j=0}^{s-1} G_1^j L_{h_1} < G_2^s + \sum_{j=0}^{s-1} G_2^j L_{h_2} = T_s^{(2)} \Rightarrow T_s^{(1)} < T_s^{(2)}.$$

بنابراین با استفاده از نتیجه‌ی ۴.۱ می‌توان نوشت:

$$\rho(T_s^{(1)}) < \rho(T_s^{(2)}) < 1.$$

□

فصل ۴

نتایج عددی

در این فصل چند مثال عددی از دستگاه ODE و DAE بیان می‌کنیم و روش‌های WR و TSWR را برای این مثالها پیاده می‌کنیم. همچنین در ادامه با استفاده از نتایج عددی حاصل به مقایسه‌ی روش WR و TSWR می‌پردازیم. تمام محاسبات با برنامه‌هایی به زبان MATLAB روی کامپیوتری با مشخصات زیر محاسبه شده‌اند.

$$RAM : 4.00 GB, \quad CPU : 2.10 GHz.$$

تعریف ۱.۴ فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$ و $B \in \mathbb{C}^{l \times k}$ ، در این صورت حاصلضرب کرونگر^۱

به صورت زیر تعریف می‌شود $A \otimes B \in \mathbb{C}^{nl \times mk}$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix}.$$

این حاصلضرب را، حاصلضرب مستقیم نیز می‌نامند. همانطور که مشاهده می‌کنیم برخلاف ضرب ماتریس‌ها هیچ محدودیتی روی مرتبه‌ی ماتریس A یا B وجود ندارد.

^۱Kronecker

مثال ۱.۴ مسأله‌ی مقدار اولیه از دستگاه ODE زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) + Qy(t) = f(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

فرض کنیم ماتریس Q سه‌قطری بلوکی به صورت

$$Q = \begin{pmatrix} \tilde{Q} & -\alpha I_m & & & \\ -\alpha I_m & \tilde{Q} & -\alpha I_m & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\alpha I_m & \tilde{Q} & -\alpha I_m \\ & & & -\alpha I_m & \tilde{Q} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mq \times mq},$$

و ماتریس \tilde{Q} به صورت

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta & & & \\ -\beta & \gamma & -\beta & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\beta & \gamma & -\beta \\ & & & -\beta & \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

تعریف شده باشد که در آن α ، β و γ اعداد حقیقی نامنفی هستند. ماتریس Q را می‌توان برحسب حاصلضرب کرونکر به صورت

$$Q = \gamma(I_q \otimes I_m) - [\beta(I_q \otimes R_m) + \alpha(R_q \otimes I_m)], \quad (2.4)$$

نوشت که R_n یک ماتریس سه‌قطری از مرتبه‌ی $n \times n$ است که در آن اعضای یک قطر بالا و پایین قطر اصلی یک و بقیه برابر با صفر هستند. با محاسبه‌ی سمت راست رابطه‌ی (۲.۴) ماتریس Q را بدست آورده و نشان می‌دهیم که این دو معادل هستند. داریم

$$I_q \otimes I_m = \text{diag}(I_m)_{q \times q}, \quad I_q \otimes R_m = \text{diag}(R_m)_{q \times q},$$

$$R_q \otimes I_m = \text{tridiag}(I_m, \circ, I_m)_{q \times q}.$$

که در آن \circ ماتریس مربعی صفر از مرتبه‌ی $m \times m$ است. با جایگذاری مقادیر فوق، در رابطه‌ی (۲.۴) داریم

$$\gamma(I_q \otimes I_m) - [\beta(I_q \otimes R_m) + \alpha(R_q \otimes I_m)]$$

$$\begin{aligned}
&= \gamma \text{diag}(I_m)_{q \times q} - [\text{diag}(\beta R_m)_{q \times q} + \text{tridiag}(\alpha I_m, \circ, \alpha I_m)_{q \times q}] \\
&= \text{diag}(\gamma I_m)_{q \times q} - \text{tridiag}(\alpha I_m, \beta R_m, \alpha I_m)_{q \times q} \\
&= \text{tridiag}(-\alpha I_m, \gamma I_m - \beta R_m, -\alpha I_m)_{q \times q}. \quad (۳.۴)
\end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned}
\gamma I_m - \beta R_m &= \text{diag}(\gamma)_{m \times m} - \beta \text{tridiag}(1, \circ, 1)_{m \times m} \\
&= \text{diag}(\gamma)_{m \times m} - \text{tridiag}(\beta, \circ, \beta)_{m \times m} \\
&= \text{tridiag}(-\beta, \gamma, -\beta) = \tilde{Q}.
\end{aligned}$$

بنابراین رابطه‌ی (۳.۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\gamma(I_q \otimes I_m) - [\beta(I_q \otimes R_m) + \alpha(R_q \otimes I_m)] \\
&= \text{tridiag}(-\alpha I_m, \gamma I_m - \beta R_m, -\alpha I_m)_{q \times q} \\
&= \text{tridiag}(-\alpha I_m, \tilde{Q}, -\alpha I_m)_{q \times q} = Q.
\end{aligned}$$

می‌دانیم که مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A = \text{tridiag}(c, b, a)_{n \times n}$ ([۱]) به صورت زیر می‌باشند:

$$\lambda_j = b + 2a\sqrt{\frac{c}{a}} \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

بنابراین مقادیر ویژه‌ی Q به صورت هستند:

$$\lambda_j = \gamma - [2\beta \cos\left(\frac{j\pi}{mq+1}\right) + 2\alpha \cos\left(\frac{j\pi}{mq+1}\right)], \quad j = 1, 2, \dots, mq. \quad (۴.۴)$$

در این مثال فرض کنیم

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 4, \quad m = 10, \quad q = 10.$$

پس برای رابطه‌ی (۴.۴) داریم

$$\begin{aligned}
\lambda_j &= 4 - [2 \cos\left(\frac{j\pi}{101}\right) + 2 \cos\left(\frac{j\pi}{101}\right)], \\
\Rightarrow \lambda_j &= 4 - [4 \cos\left(\frac{j\pi}{101}\right)], \quad j = 1, 2, \dots, 100.
\end{aligned}$$

از طرفی

$$0 < \frac{j\pi}{101} < \pi \Rightarrow -1 < \cos\left(\frac{j\pi}{101}\right) < 1 \Rightarrow 4 > 4 \cos\left(\frac{j\pi}{101}\right),$$

$$\Rightarrow 4 > [2 \cos(\frac{j\pi}{101}) + 2 \cos(\frac{j\pi}{101})], \quad j = 1, 2, \dots, 100.$$

بنابراین

$$\rho((I_{10} \otimes R_{10}) + (R_{10} \otimes I_{10})) < 4.$$

در نتیجه Q را توانستیم به صورت $sI - B$ بنویسیم که $\rho(B) < s$. بنابراین طبق تعریف M -ماتریس، Q یک M -ماتریس است. برای حل مساله‌ی مقدار اولیه‌ی (۱.۴) به روش TSWR-Theta، شکافت مرکب $Q = M - N_1 - N_2$ را در نظر می‌گیریم که در آن

$$M = \gamma(I_q \otimes I_m), \quad N_1 = \alpha(R_q \otimes I_m), \quad N_2 = \beta(I_q \otimes R_m).$$

در این صورت تکرار بیرونی و درونی از نوع روش تکرار ژاکوبی می‌باشند. بنابر تعریف M -شکافت مرکب می‌توان گفت که $Q = M - N_1 - N_2$ ، یک M -شکافت مرکب است، در نتیجه روش TSWR-Theta همگرا خواهد بود، همچنین داریم

$$M = \gamma(I_q \otimes I_m) = 4 \text{diag}(I_m)_{q \times q} = \text{diag}(4)_{mq \times mq} = \text{diag}(4)_{100 \times 100},$$

$$N_1 = \alpha(R_q \otimes I_m) = \text{tridiag}(I_m, 0, I_m)_{q \times q} = \text{tridiag}(I_{10}, 0, I_{10})_{10 \times 10},$$

$$N_2 = \beta(I_q \otimes R_m) = \text{diag}(R_m)_{q \times q} = \text{diag}(R_{10})_{10 \times 10}.$$

ماتریس‌های تکرار T_s و T_∞ را با استفاده از رابطه‌های (۱۴.۲) و (۲۲.۲) بدست می‌آوریم و شعاع طیفی این دو ماتریس را به ازای مقادیر مختلف s و $h\theta$ محاسبه می‌کنیم. با توجه به نتایج عددی بدست آمده در جدول ۱.۴ مشاهده می‌کنیم که با افزایش $h\theta$ شعاع طیفی بیشتر شده در نتیجه سرعت همگرایی کمتر می‌شود، همچنین با افزایش s (تعداد تکرارهای درونی) شعاع طیفی کمتر شده و سرعت همگرایی بیشتر می‌شود، که تأثیر این دو پارامتر بر روی سرعت همگرایی در قضیه‌های ۴.۲ و ۵.۲ ثابت شد.

$$N_1 = R_q \otimes I_m = \begin{pmatrix} \circ & I_m & & & \\ I_m & \circ & I_m & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & I_m & \circ & I_m \\ & & & I_m & \circ \end{pmatrix}_{q \times q}$$

$$N_2 = I_q \otimes (R_m - F_m) = I_q \otimes \left[\begin{pmatrix} \circ & 1 & & & \\ 1 & \circ & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \circ & 1 \\ & & & 1 & \circ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \circ & & & & \\ 1 & \circ & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & \circ & \\ & & & 1 & \circ \end{pmatrix} \right]$$

$$= I_q \otimes \begin{pmatrix} \circ & 1 & & & \\ & \circ & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \circ & 1 \\ & & & & \circ \end{pmatrix}_{m \times m}$$

ماتریس‌های N_2, N_1, M از مرتبه‌ی $m \times m$ هستند. همانند مثال قبل مشاهده می‌شود که شعاع طیفی ماتریس تکرار تابع صعودی از $h\theta$ و تابع نزولی از s می‌باشد. که نتایج عددی آن در جدول ۲.۴ نشان داده شده است.

s	$h\theta = 0.1$	$h\theta = 0.3$	$h\theta = 0.5$	$h\theta = 0.8$	$h\theta = 1$
۱	۰.۱۹۸۰۷۴۴	۰.۴۳۴۰۸۸۸	۰.۵۵۸۹۴۵۰	۰.۶۶۳۱۸۸۳	۰.۷۰۶۳۶۰۵
۲	۰.۱۴۰۶۶۸۷	۰.۲۷۳۶۲۴۷	۰.۳۳۶۸۱۲۷	۰.۳۸۶۷۸۰۵	۰.۴۰۶۸۱۸۰
۳	۰.۱۳۷۱۰۷۷	۰.۲۶۲۵۴۷۰	۰.۳۲۲۱۱۳۲	۰.۳۶۹۹۱۹۶	۰.۳۸۹۴۰۷۷
۴	۰.۱۳۷۰۵۴۷	۰.۲۶۱۶۵۰۶	۰.۳۱۹۸۵۲۷	۰.۳۶۵۶۴۸۴	۰.۳۸۳۹۹۰۳
۵	۰.۱۳۷۰۴۲۵	۰.۲۶۱۵۰۶۱	۰.۳۱۹۵۵۹۲	۰.۳۶۵۲۰۲۴	۰.۳۸۳۴۸۱۷
۶	۰.۱۳۷۰۴۲۱	۰.۲۶۱۴۸۵۳	۰.۳۱۹۴۸۰۵	۰.۳۶۵۰۰۷۰	۰.۳۸۳۲۰۷۵
۷	۰.۱۳۷۰۴۲۱	۰.۲۶۱۴۸۳۴	۰.۳۱۹۴۷۴۱	۰.۳۶۴۹۹۳۵	۰.۳۸۳۱۹۰۱
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
∞	۰.۱۳۷۰۴۲۱	۰.۲۶۱۴۸۳۰	۰.۳۱۹۴۷۱۷	۰.۳۶۴۹۸۵۱	۰.۳۸۳۱۷۶۸

جدول ۲.۴: مقادیر $\rho(T_s)$ برای مثال ۲.۴

مثال ۳.۴ مسأله‌ی مقدار اولیه از دستگاه DAE زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} A\dot{y}(t) + By(t) = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \quad t \in [t_0, T]. \end{cases} \quad (5.4)$$

فرض کنید A و B ماتریس‌های بلوکی از مرتبه‌ی $q \times q$ به صورت زیر باشند، که مؤلفه‌های آنها ماتریس‌هایی از مرتبه‌ی $p \times p$ هستند:

$$A = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I & & \\ & & & \circ & \\ & & & & \circ \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pq \times pq}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & -I & & & \\ -I & B_1 & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -I & B_1 & -I \\ & & & -I & B_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{pq \times pq}.$$

که در آن $I \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ، ماتریس همانی و \circ ماتریس صفر هم‌مرتبه با I است و ماتریس B_1 به صورت زیر است:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

واضح است که ماتریس A منفرد است، جواب دقیق حاصل از حل تحلیلی به صورت زیر است:

$$y(t) = [\cos(t), \sin(t), t, \cos(t), \sin(t), t, \dots, \cos(t), \sin(t), t, \dots]^T \in \mathbb{R}^m. \quad (6.4)$$

با توجه به معلوم بودن $y(t)$ ، $f(t)$ و y_0 قابل محاسبه هستند. برای حل این مسأله به روش WR و TSWR-Theta شکافت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A = M_A - N_A,$$

$$B = M_1 - N_1, \quad M_1 = M_2 - N_2, \quad B = M_2 - N_2 - N_1.$$

که در آن ماتریس‌های $M_A, N_A, M_1, N_1, M_2, N_2$ بلوکی از مرتبه‌ی $q \times q$ و به صورت زیر هستند:

$$M_A = \begin{pmatrix} I & & & \\ & \ddots & & \\ & & I & \\ & & & \frac{1}{\tau} I \\ & & & & \circ \end{pmatrix}, \quad N_A = \begin{pmatrix} \circ & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \circ & & \\ & & & \frac{1}{\tau} I & \\ & & & & \circ \end{pmatrix}.$$

$$M_\tau = \begin{pmatrix} \lambda I & & & \\ & \lambda I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda I \end{pmatrix}, \quad N_\tau = \begin{pmatrix} 2I & I & & \\ I & 2I & I & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & I & 2I & I \\ & & & I & 2I \end{pmatrix}.$$

$$M_\lambda = \begin{pmatrix} 2I + B_\lambda & & & \\ & 2I + B_\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2I + B_\lambda \end{pmatrix},$$

$$N_\tau = \begin{pmatrix} \tau I - B_\lambda & & & \\ & \tau I - B_\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tau I - B_\lambda \end{pmatrix}.$$

با جایگذاری شکافت‌های $A = M_A - N_A$ و $B = M_\lambda - N_\lambda$ در مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی (۵.۴) داریم:

$$\begin{cases} M_A y^{k+1}(t) + M_\lambda y^{k+1}(t) = N_A y^k(t) + N_\lambda y^k(t) + f(t), \\ y^{k+1}(t_0) = y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in [t_0, T]. \end{cases}$$

فرض کنیم بازه‌ی $[t_0, T]$ به نقاط متساوی‌فاصله‌ی $\{t_0, t_1, \dots, t_J\}$ افراز شده باشند. به ازای هر $n = 0, 1, \dots, J-1$ ، $t \in [t_n, t_{n+1}]$ از تقریب تفاضلی پیشرو برای مشتق مرتبه‌ی اول به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t_{n+1}) - y(t_n)}{h} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}.$$

بنابراین به ازای هر تکرار k می توان نوشت

$$\dot{y}^k(t) = \frac{y_{n+1}^k - y_n^k}{h}.$$

در این صورت روش WR گسسته سازی شده به صورت زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} M_A \frac{y_{n+1}^{k+1} - y_n^{k+1}}{h} + M_\lambda y_{n+1}^{k+1} = N_A \frac{y_{n+1}^k - y_n^k}{h} + N_\lambda y_{n+1}^k + f_{n+1}, \\ y_0^{k+1} = y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, J-1, \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} M_A y_{n+1}^{k+1} - M_A y_n^{k+1} + h M_\lambda y_{n+1}^{k+1} = h N_\lambda y_{n+1}^k + N_A y_{n+1}^k - N_A y_n^k + h f_{n+1}, \\ y_0^{k+1} = y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, J-1, \end{cases}$$

یا

$$\begin{cases} (M_A + h M_\lambda) y_{n+1}^{k+1} = h (N_\lambda + \frac{1}{h} N_A) y_{n+1}^k + M_A y_n^{k+1} - N_A y_n^k + h f_{n+1}, \\ y_0^{k+1} = y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, J-1. \end{cases} \quad (7.4)$$

فرض کنید $J = 20$ و $h = 0.1$ و $t_0 = 0$. در این صورت رابطه ی (۷.۴) به صورت زیر

خواهد بود:

$$\begin{cases} (M_A + 0.1 M_\lambda) y_{n+1}^{k+1} = 0.1 (N_\lambda + 1.0 N_A) y_{n+1}^k + M_A y_n^{k+1} - N_A y_n^k + 0.1 f_{n+1} \\ y_0^{k+1} = y_0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, 19. \end{cases} \quad (8.4)$$

نقاط گرهی t_n با طول گام $h = 0.1$ به صورت زیر بدست می آیند:

$$t_n = t_0 + nh = 0.1n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 20.$$

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.1, \quad t_2 = 0.2, \quad \dots, \quad t_{19} = 1.9, \quad t_{20} = 2.$$

ماکزیمم تعداد تکرار بیرونی k را برابر با ۱۰۰ در نظر می گیریم. فرض کنیم معیار توقف به

صورت زیر باشد:

$$\|y_n^{k+1} - y_n^k\|_\infty \leq 0.001 \quad \text{یا} \quad k > 100.$$

با استفاده از روش WR که به صورت رابطه ی تکراری (۸.۴) بیان شد، می توان جواب را

برای p و q های مختلف محاسبه کرد.

همین مسأله را بار دیگر به روش TSWR-Theta حل می‌کنیم. با استفاده از رابطه‌ی (۵.۳) می‌دانیم که رابطه‌ی تکراری روش TSWR-Theta به صورت زیر است:

$$z_{n+1}^{v+1} = F z_n^{v+1} + h\theta b_{n+1}(v, k) + h(1 - \theta)b_n(v, k).$$

که در آن ماتریس F و بردار $b_n(v, k)$ به صورت زیر هستند:

$$F = (M_A + h\theta M_\tau)^{-1}(M_A - h(1 - \theta)M_\tau),$$

$$b_n(v, k) = (M_A + h\theta M_\tau)^{-1}(N_\tau z_n^v + N_\tau y_n^k + N_A \bar{y}_n^k + f_n), \quad n = 0, 1, \dots, 20.$$

همانند روش WR فرض کنیم $t_0 = 0$ و $h = 0.1$ و $J = 20$ ، و همچنین قرار می‌دهیم $\theta = 1$ و $s = 5$. در این صورت داریم

$$z_{n+1}^{v+1} = (M_A + 0.1 M_\tau)^{-1} [M_A z_n^{v+1} + 0.1 N_\tau z_{n+1}^v + 0.1 N_\tau y_{n+1}^k + 0.1 N_A \bar{y}_{n+1}^k + 0.1 f_{n+1}], \quad n = 0, 1, \dots, 19, \quad v = 0, 1, \dots, 4, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

فرض کنیم معیار توقف به صورت قبلی باشد. با استفاده از الگوریتم TSWR-Theta جواب را برای p و q های مختلف حساب می‌کنیم.

برای هر دو روش مدت زمان لازم برای محاسبه‌ی جواب به صورت مقایسه‌ای در جدول ۳.۴ برحسب ثانیه آمده است. با توجه به نتایج عددی حاصل مشاهده می‌شود، روش TSWR-Theta نسبت به روش WR در زمان کمتری به جواب می‌رسد.

همچنین تعداد تکرارهای بیرونی برای هر دو روش در جدول ۴.۴ ارائه شده است. با توجه به این جدول ملاحظه می‌کنیم که روش TSWR-Theta در تعداد تکرار کمتری نسبت به روش WR به جواب می‌رسد، به عبارتی سرعت همگرایی روش TSWR-Theta نسبت به WR بیشتر است و این مزایای افزودن تکرار درونی را به روش WR نشان می‌دهد.

$p \times q$	100×3	50×6	50×10	100×5
WR(s)	۰.۰۹۶۸	۰.۰۹۱۱	۰.۱۱۸۱	۰.۱۴۶۱
TSWR(s)	۰.۰۳۹۵	۰.۰۳۷۳	۰.۰۵۵۸	۰.۰۶۶۴

جدول ۳.۴: نتایج عددی برای مدت زمان WR و $TSWR - Theta$ بر حسب ثانیه

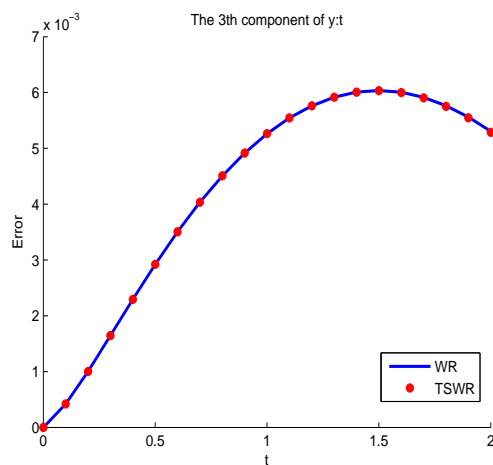
$p \times q$	100×3	50×6	50×10	100×5
WR	۲۰	۱۹	۱۹	۲۳
TSWR	۱۵	۱۴	۱۴	۱۸

جدول ۴.۴: نتایج عددی تعداد تکرارهای بیرونی k برای WR و $TSWR - Theta$

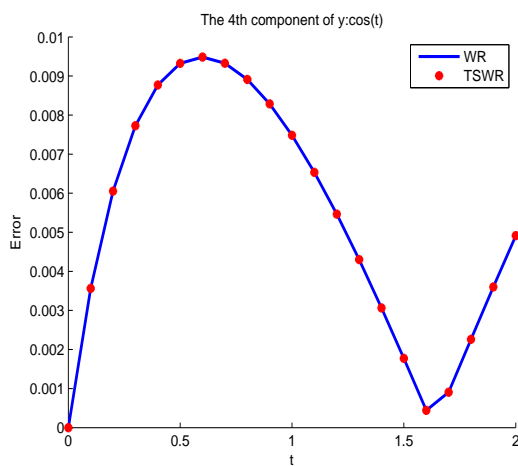
به ازای $p = 50$ و $q = 6$ خطای مطلق مؤلفه‌ی سوم و چهارم جواب بدست آمده از روش WR و $TSWR-Theta$ را با مؤلفه‌ی سوم و چهارم جواب دقیق، در نقاط گرهی محاسبه می‌کنیم. با توجه به نتایج عددی بدست آمده در شکل ۱.۴ و ۲.۴ ملاحظه می‌کنیم که خطای مطلق مؤلفه‌ی سوم و چهارم جواب بدست آمده از حل عددی با جواب دقیق برای هر دو روش WR و $TSWR-Theta$ تقریباً با هم برابرند، و این نشان می‌دهد که با معیار توقف مشترک، هر دو روش تکراری WR و $TSWR-Theta$ به یک جواب همگرا می‌شوند.

قرار می‌دهیم $error_3 = \|y_3^{k+1} - y_3^k\|_\infty$ به ازای $p = 50$ و $q = 6$ ، برای هر دو روش تکراری WR و $TSWR-Theta$ ، $error_3$ را محاسبه می‌کنیم، در واقع نرم-بی‌نهایت تفاضل جواب بدست آمده در تکرار بیرونی $k+1$ را از تکرار بیرونی k ، در نقطه‌ی گرهی $t_3 = 0.3$ محاسبه می‌کنیم. با توجه به نتایج عددی بدست آمده در شکل ۳.۴ مشاهده می‌کنیم که با افزایش تکرارهای بیرونی مقدار $error_3$ در روش $TSWR-Theta$ نسبت به روش WR سریعتر به صفر همگرا می‌شود.

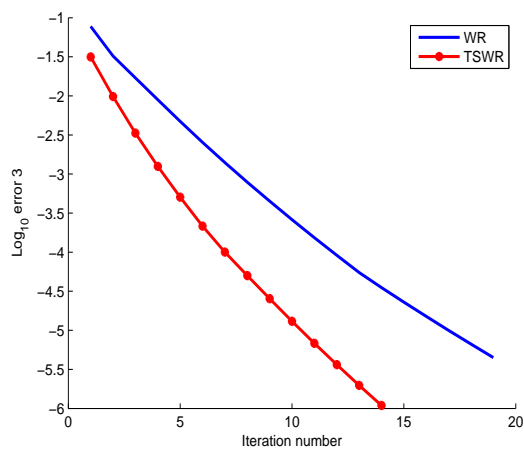
به طور مشابه قرار می‌دهیم $error_4 = \|y_4^{k+1} - y_4^k\|_\infty$ مقدار $error_4$ را برای هر دو روش تکراری محاسبه کرده و در شکل ۴.۴ مقایسه می‌کنیم. مجدداً به این نتیجه می‌رسیم که روش تکراری $TSWR-Theta$ نسبت به WR سریعتر به جواب همگرا می‌شود.



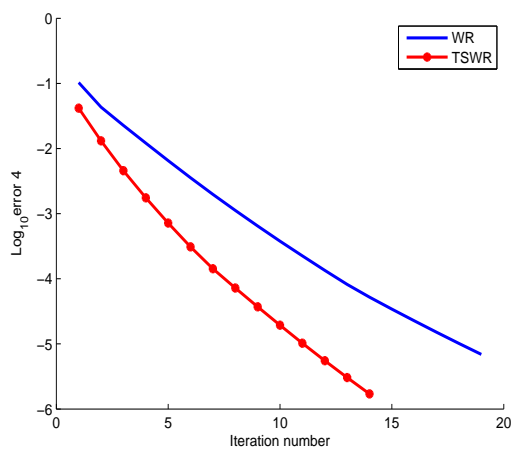
شکل ۱.۴ : خطای مطلق درایه‌ی سوم جواب تقریبی برای مثال ۳.۴



شکل ۲.۴ : خطای مطلق درایه‌ی چهارم جواب تقریبی برای مثال ۳.۴



شکل ۳.۴: نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_3$ برای مثال ۳.۴



شکل ۴.۴: نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_4$ برای مثال ۳.۴

مثال ۴.۴ شکافت‌های مثال قبل را برای مسأله‌ی مقدار اولیه‌ی (۵.۴) در نظر بگیرید، در این مثال فرض کنید $p = 5$ و $q = 6$. ماتریس‌های N_1 ، N_2 ، B' و N_2 به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} N_1' &= N_1 + \frac{N_A}{h} = N_1 + 1 \circ N_A, \\ B' &= B - \frac{N_A}{h} = B - 1 \circ N_A, \\ N_2 &= M_2 - B' - N_1'. \end{aligned}$$

که ماتریس‌های N_1 ، N_2 ، M_2 و N_A در مثال قبل مشخص شده‌اند. همچنین می‌دانیم که ماتریس تکرار از رابطه‌ی $T_s = G^s + \sum_{j=0}^{s-1} G^j L_h$ بدست می‌آید، که در آن

$$G = (M_A + h\theta M_2)^{-1} h\theta N_2, \quad L_h = (M_A + h\theta M_2)^{-1} h\theta N_1'.$$

با جایگذاری $h = 0.1$ داریم

$$G = 0.1\theta(M_A + 0.1\theta M_2)^{-1} N_2, \quad L_h = 0.1\theta(M_A + 0.1\theta M_2)^{-1} N_1',$$

و ماتریس M_A به صورت مشخص شده در مثال قبل است. شکافت $B' = M_2 - N_2 - N_1'$ یک شکافت P-منظم مرکب هرمیتی است و تمام شرایط قضیه‌های مقایسه‌ای ۲.۳ و ۳.۳ برقرارند. همچنین می‌دانیم که زمانیکه $s \rightarrow \infty$ ماتریس تکرار از رابطه‌ی $T_\infty = [M_A + h\theta(M_2 - N_2)]^{-1} h\theta N_1'$ بدست می‌آید، که در این مثال T_∞ به صورت زیر است:

$$T_\infty = 0.1\theta[M_A + 0.1\theta(M_2 - N_2)]^{-1} N_1'.$$

شعاع طیفی ماتریس تکرار T_s را به ازای مقادیر مختلف s و θ محاسبه می‌کنیم. با توجه به نتایج عددی نشان داده شده در جدول ۵.۴، ملاحظه می‌کنیم که به ازای s ثابت با افزایش θ ، $\rho(T_s)$ افزایش و سرعت همگرایی کمتر می‌شود. همچنین به ازای θ ثابت با افزایش s ، $\rho(T_s)$ کاهش و سرعت همگرایی بیشتر می‌شود.

s	$\theta = 0.1$	$\theta = 0.3$	$\theta = 0.5$	$\theta = 0.7$	$\theta = 0.8$	$\theta = 1$
۱	۰.۸۰۵۵	۰.۸۳۲۹	۰.۸۴۰۸	۰.۸۴۵۱	۰.۸۴۶۷	۰.۸۴۹۳
۲	۰.۷۱۸۶	۰.۷۵۶۷	۰.۷۶۷۸	۰.۷۷۴۰	۰.۷۷۶۳	۰.۷۸۰۱
۳	۰.۶۷۹۹	۰.۷۲۲۰	۰.۷۳۴۴	۰.۷۴۱۳	۰.۷۴۴۰	۰.۷۴۸۴
۴	۰.۶۶۲۶	۰.۷۰۶۱	۰.۷۱۹۰	۰.۷۲۶۳	۰.۷۲۹۱	۰.۷۳۳۷
۵	۰.۶۵۴۹	۰.۶۹۸۸	۰.۷۱۱۹	۰.۷۱۹۴	۰.۷۲۲۲	۰.۷۲۷۰
۶	۰.۶۵۱۵	۰.۶۹۵۵	۰.۷۰۸۷	۰.۷۱۶۲	۰.۷۱۹۱	۰.۷۲۳۹
۷	۰.۶۴۹۹	۰.۶۹۴۰	۰.۷۰۷۲	۰.۷۱۴۷	۰.۷۱۷۶	۰.۷۲۲۴
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
∞	۰.۶۴۸۶	۰.۶۹۲۷	۰.۷۰۵۹	۰.۷۱۳۴	۰.۷۱۶۳	۰.۷۲۱۲

جدول ۵.۴: مقادیر $\rho(T_s)$ در روش $TSWR - \theta$ برای مثال ۴.۴

مثال ۵.۴ مسأله‌ی مقدار اولیه و مرزی از دستگاه DAE زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} A \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + B \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} + CU(x,t) = f(x,t), \\ U(a,t) = U(b,t) = 0, \quad t \in [t_0, T], \\ U(x, t_0) = U_0(x), \quad x \in [a, b], \end{cases} \quad (9.4)$$

و $b = 1, T = 2, t_0 = 0$ در آن توابع پیوسته‌ای هستند، که در آن $U, f : [t_0, T] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^5$

$a = -1$. جواب دقیق حاصل از حل تحلیلی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} U(x,t) &= [U_1(x,t), U_2(x,t), U_3(x,t), U_4(x,t), U_5(x,t)]^T \\ &= [(x^2 - 1) \cos(t), x^2(x^2 - 1)e^{-t}, x \sin(t), x^2 \cos(t), t]^T. \end{aligned}$$

فرض کنیم ماتریس‌های $A, C \in \mathbb{R}^5$ به صورت زیر باشند:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

و $B = -I$ که در آن $I \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ ماتریس همانی است. بنابراین $f(x, t)$ و $U_0(x)$ قابل محاسبه می‌باشند. بازه $[-1, 1]$ را به نقاط متساوی‌فاصله‌ی $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ و $q = 19$ ، به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$x_k = a + k\mu, \quad \mu = \frac{b-a}{q+1} = \frac{2}{20} = 0.1, \quad k = 1, 2, \dots, 19,$$

$$x_1 = -0.9, \quad x_2 = -0.8, \quad \dots, \quad x_{18} = 0.8, \quad x_{19} = 0.9.$$

می‌دانیم که به ازای هر زیربازه‌ی $[x_k, x_{k+1}]$ ، یک تقریب تفاضلی برای مشتق مرتبه‌ی دوم به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x_k} \approx \frac{1}{\mu^2} (U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, 19.$$

به ازای هر $x = x_k$ ، با جایگذاری تقریب تفاضلی در رابطه‌ی (۹.۴)، صورت ماتریسی این معادله را بدست می‌آوریم:

$$A \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} \Big|_{x_k} + B \frac{U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}}{\mu^2} + CU(x, t) \Big|_{x_k} = f(x, t) \Big|_{x_k}.$$

قرار می‌دهیم $U_k = U(t, x_k)$ و $k = 1, 2, \dots, 19$. به این ترتیب رابطه‌ی (۹.۴)، به صورت زیر به یک دستگاه از ODE تبدیل می‌شود:

$$AU'_k(t) + \frac{1}{\mu^2} B[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] + CU_k(t) = f_k(t). \quad (10.4)$$

با جایگذاری $k = 1, 2, \dots, 19$ در رابطه‌ی (۱۰.۴) دستگاه زیر حاصل می‌گردد.

$$AU'_1(t) + \frac{1}{\mu^2} B[U_2(t) - 2U_1(t) + U_0(t)] + CU_1(t) = f_1(t),$$

$$AU'_2(t) + \frac{1}{\mu^2} B[U_3(t) - 2U_2(t) + U_1(t)] + CU_2(t) = f_2(t),$$

$$AU'_3(t) + \frac{1}{\mu^2} B[U_4(t) - 2U_3(t) + U_2(t)] + CU_3(t) = f_3(t),$$

⋮

$$AU'_{19}(t) + \frac{1}{\mu^2} B[U_{20}(t) - 2U_{19}(t) + U_{18}(t)] + CU_{19}(t) = f_{19}(t).$$

با توجه به شرایط مرزی $U_0(t) = U_p(t) = 0$ ، می‌توانیم شکل ماتریسی دستگاه فوق را به صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} A & & & & \\ & A & & & \\ & & A & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U'_1(t) \\ U'_2(t) \\ U'_3(t) \\ \vdots \\ U'_{19}(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu^2} \begin{pmatrix} -2B & B & & & \\ B & -2B & B & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & B & -2B & B \\ & & & & B & -2B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ \vdots \\ U_{19}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & & & & \\ & C & & & \\ & & C & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ \vdots \\ U_{19}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_{19}(t) \end{pmatrix}.$$

با استفاده از تعریف حاصلضرب کرونگر می‌توان نوشت:

$$(I \otimes A) \begin{pmatrix} U'_1(t) \\ U'_2(t) \\ U'_3(t) \\ \vdots \\ U'_{19}(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{\mu^2} \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \otimes B \right] \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ \vdots \\ U_{19}(t) \end{pmatrix} + (I \otimes C) \begin{pmatrix} U_1(t) \\ U_2(t) \\ U_3(t) \\ \vdots \\ U_{19}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ \vdots \\ f_{19}(t) \end{pmatrix}.$$

در اینجا I ماتریس همانی از مرتبه 19×19 است. قرار می‌دهیم $P = \text{tridiag}(1, -2, 1)$ در این صورت رابطه‌ی بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(I \otimes A)(U_1^T(t), U_2^T(t), \dots, U_{19}^T(t))^T + \frac{1}{\mu^2}(P \otimes B)(U_1^T(t), U_2^T(t), \dots, U_{19}^T(t))^T + (I \otimes A)(U_1^T(t), U_2^T(t), \dots, U_{19}^T(t))^T = (f_1^T(t), f_2^T(t), \dots, f_{19}^T(t))^T. \quad (11.4)$$

قرار می‌دهیم

$$\tilde{U}(t) = (U_1^T(t), U_2^T(t), \dots, U_{19}^T(t))^T, \quad \tilde{U}'(t) = (U_1^T(t), U_2^T(t), \dots, U_{19}^T(t))^T,$$

$$F(t) = (f_1^T(t), f_2^T(t), \dots, f_{19}^T(t))^T.$$

بنابراین با جایگذاری مقادیر بالا در رابطه‌ی (۱۱.۴)، رابطه‌ی (۹.۴) نیمه گسسته‌سازی شده و شکل ماتریسی آن به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} (I \otimes A)\tilde{U}'(t) + \frac{1}{\mu^2}(P \otimes B)\tilde{U}(t) + (I \otimes C)\tilde{U}(t) &= F(t), \\ (I \otimes A)\tilde{U}'(t) + \left(\frac{1}{\mu^2}P \otimes B + I \otimes C\right)\tilde{U}(t) &= F(t). \end{aligned} \quad (12.4)$$

همانطور که ملاحظه می‌کنیم رابطه‌ی (۱۲.۴) به صورت یک دستگاه از DAE است، برای حل آن از روش WR و TSWR-Theta استفاده می‌کنیم و در پایان نتایج عددی حاصل را با هم مقایسه می‌کنیم، شکافت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} I \otimes A &= M_A - N_A, \\ \frac{1}{\mu^2}P \otimes B + I \otimes C &= M_1 - N_1, \quad M_1 = M_2 - N_2, \\ \frac{1}{\mu^2}P \otimes B + I \otimes C &= M_2 - N_2 - N_1. \end{aligned} \quad (13.4)$$

فرض کنیم ماتریس‌های N_A ، N_1 و M_2 از مرتبه‌ی 95×95 به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} N_A &= \begin{pmatrix} \circ & & & & \\ & \circ & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \circ & \\ & & & & \frac{1}{10}A \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 2I & I & & & \\ I & 2I & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & I & 2I & I \\ & & & I & 2I \end{pmatrix}, \\ M_2 &= \begin{pmatrix} (\frac{2}{\mu^2} + 1)I + C & & & & \\ & (\frac{2}{\mu^2} + 1)I + C & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (\frac{2}{\mu^2} + 1)I + C & \\ & & & & (\frac{2}{\mu^2} + 1)I + C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

با توجه به رابطه‌های (۱۳.۴) می‌توانیم ماتریس‌های M_A ، M_1 و N_2 را محاسبه کنیم. در این صورت داریم

$$M_A = \begin{pmatrix} A & & & \\ & \ddots & & \\ & & A & \\ & & & \frac{11}{10}A \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \text{tridiag}(1 \circ \circ B + I, -2 \circ \circ B + C + 2I, 1 \circ \circ B + I),$$

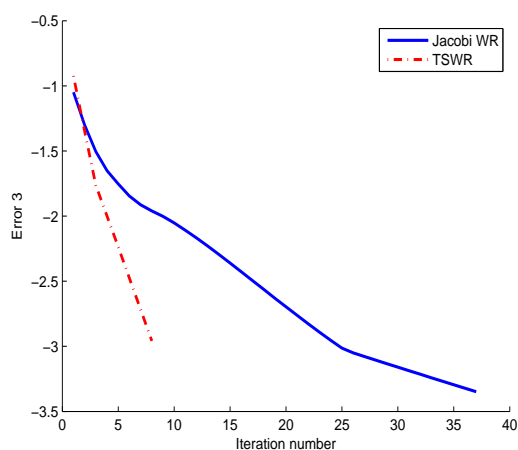
$$N_2 = \text{tridiag}(-1 \circ \circ B - I, (\frac{2}{\mu^2} - 1)I + 2 \circ \circ B, -1 \circ \circ B - I).$$

با توجه به شکافت $I \otimes A = M_A - N_A$ و $\frac{1}{\mu}P \otimes B + I \otimes C = M_1 - N_1$ ملاحظه می‌کنیم که تکرار بیرونی از نوع تکرار ژاکوبی است، روش‌های تخفیف موجی شکل ژاکوبی (Jacobi WR) و موجی شکل دومرحله‌ای (TSWR-Theta) را برای حل این مسأله بکار می‌بریم. فرض کنیم $\theta = 1$ ، $h = 0.1$ ، $J = 20$ ، $s = 4$ و شرط توقف برای تکرار بیرونی هر دو روش به صورت زیر باشد:

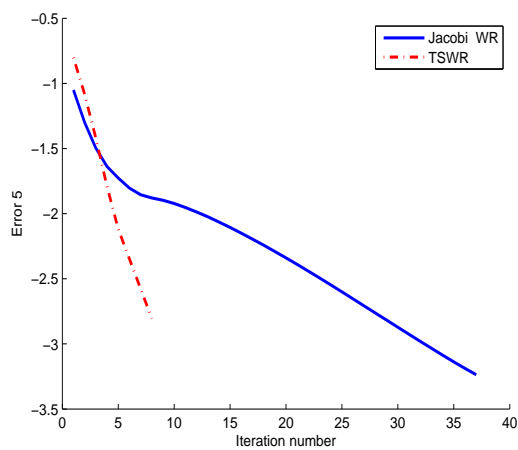
$$\|y_n^{k+1} - y_n^k\|_\infty \leq 10^{-12} \quad \text{یا} \quad k > 100.$$

همانند مثال‌های قبل $error_2 = \|y_2^{k+1} - y_2^k\|_\infty$ و $error_5 = \|y_5^{k+1} - y_5^k\|_\infty$ به ترتیب در نقاط گرهی $t_2 = 0.3$ و $t_5 = 0.5$ برای هر دو روش محاسبه کرده و به صورت مقایسه‌ای در نمودارها آورده‌ایم.

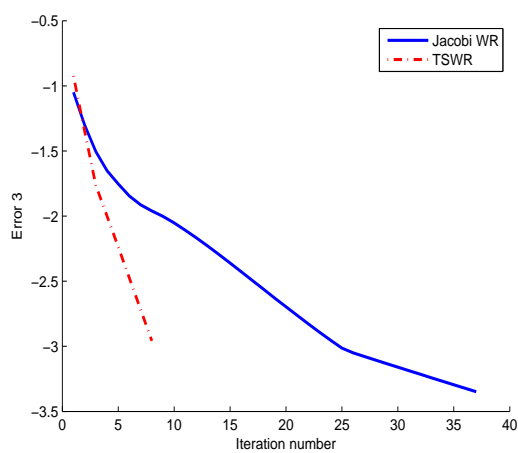
با توجه به نتایج عددی بدست آمده در شکل‌های ۵.۴ و ۶.۴ ملاحظه می‌کنیم که لگاریتم $error_2$ و $error_5$ برای هر دو روش با افزایش تکرارهای بیرونی کمتر می‌شود و در نتیجه خطا به صفر همگرا می‌شود. در تکرارهای آغازین، سرعت همگرایی روش Jacobi WR بیشتر از روش TSWR-Theta است، ولی در تکرارهای پایانی عکس این رفتار صورت می‌گیرد، بنابراین در حالت کلی مقایسه‌ی سرعت همگرایی این دو روش نسبت به همدیگر، به نوع شکافت ماتریس‌ها و همچنین مسأله‌ی داده شده بستگی دارد.



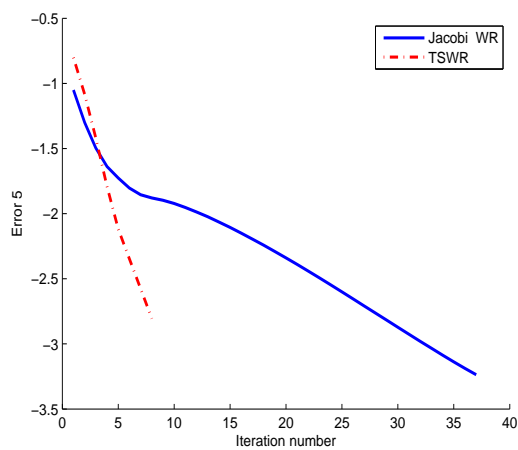
شکل ۵.۴: نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_3$ برای مثال ۵.۴



شکل ۶.۴: نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_5$ برای مثال ۵.۴



شکل ۷.۴: نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_3$ برای مثال ۶.۴



شکل ۸.۴: نتایج عددی حاصل از محاسبه‌ی $\log_{10} error_5$ برای مثال ۶.۴

مثال ۶.۴ مثال قبل را در نظر بگیرید، با این تفاوت که ماتریس A از مرتبه 5×5 به صورت زیر است.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

همانند مثال قبل $error_3$ و $error_5$ محاسبه کرده و نتایج عددی آن را در شکل های ۷.۴ و ۸.۴ آورده ایم. با توجه به این شکل ها مشاهده می شود که نتیجه ی بحث مثال قبل در این قسمت هم برقرار است.

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این پایان‌نامه روش تکراری موجی شکل دومرحله‌ای برای حل مسائل مقدار اولیه از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جبری بکار برده شده است. پس از معرفی تعاریف و مفاهیم اولیه در فصل اول، مسأله‌ی مقدار اولیه از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی را در فصل دوم مطرح نموده و برای حل آن به معرفی و بررسی روش تکراری تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای پرداخته‌ایم و سپس همگرایی و وابستگی سرعت همگرایی آنرا نسبت به دو پارامتر مستقل بررسی کرده‌ایم. برای فصل سوم مسأله‌ی مقدار اولیه از دستگاه معادلات دیفرانسیل جبری را در نظر گرفتیم و همانند فصل دوم روش تکراری تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای را برای حل اینگونه مسائل بررسی کرده‌ایم و در ادامه با استفاده از یک سری قضایای مقایسه‌ای، همگرایی آنرا نشان داده و به بررسی رفتار همگرایی پرداخته‌ایم. در فصل آخر با ارائه‌ی چند مثال از دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جبری نتیجه‌ی مطالب نظری را به صورت عددی نشان داده‌ایم. با توجه به حوزه‌ی گسترده‌ی معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های دینامیکی، این روش تکراری را می‌توان برای انواع دیگر دستگاه معادلات دیفرانسیل از جمله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE^۱) بکار برد، که یک مثال از آن در فصل چهارم مطرح شده است، همچنین این روش را می‌توان برای حالتی بکار برد که در آن ماتریس ضرایب دستگاه، ثابت نباشند.

پوست الف

مراجع



فهرست منابع

۱) داود خجسته سالکویه، روش‌های عددی در جبرخطی، انتشارات آموزشهای بنیادی ۱۳۹۰، تهران.

2- Axelsson, O., 1996. Iterative solution methods, University of Nijmegen, The Netherlands, Cambridge University Press.

3- Benzi, M., Szyld, D. B., 1997. Existence and uniqueness of splittings for stationary iterative methods with applications to alternating methods, N. Math. 76:309-321.

4- Berman, A. Plemmons, R., 1994. Nonnegative matrices in the mathematical sciences, SIAM, Philadelphia, PA.

5- Bernstein, D. S., 1954. Matrix mathematics, Princeton University Press, Oxford.

6- Brenan, K. Campbell, S., Petzold, L., 1989. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations, North-Holland, New York.

7- Castel, M.J., Migallon, V., Penades, J., 1998. Convergence of non-stationary parallel multisplitting methods for Hermitian positive definite matrices, Math. Comp. 221:209-220.

8- Garrappa, R., 2004. An analysis of convergence for two-stage waveform relaxation methods, J. Comput. Appl. Math., 169:377-392.

9- Horn, R.A., Johnson, C.A., 1985. Matrix analysis, Cambridge U.P.I.

10- Lanzkron, P.J., Rose, D.J., Szyld, D.B., 1991. Convergence of nested classical iterative methods for linear systems, Numer. Math., 58:685-702.

11- Marek, I., Szyld, D.B., 1990. Comparison theorems for weak splittings of bounded operators, Numer. Math., 58:387-397.

12- Morton, K.W., Mayers, D.F., 1994. Numerical solution of partial differential equations, Cambridge University Press, Cambridge.

13- Nichols, N.K., 1973. On the convergence of two-stage iterative processes for solving linear equations, SIAM. J. Numer. Anal., 10:460-469.

14- Pan, J., Bai, Z., Ng, M., 2005. Two-stage waveform relaxation methods for implicit linear initial value problems, Numer. Linear Algebra Appl., 12:293-304.

15- Song, Y., 2002. Comparison theorems for splittings of matrices, Numer. Math., 92:563-591.

16- Song, Y., Bao, W., 2011. Two stage waveform relaxation method for the initial value problems of differential-algebraic equations, J. comput. Appl. Math. 236:1123-1136.

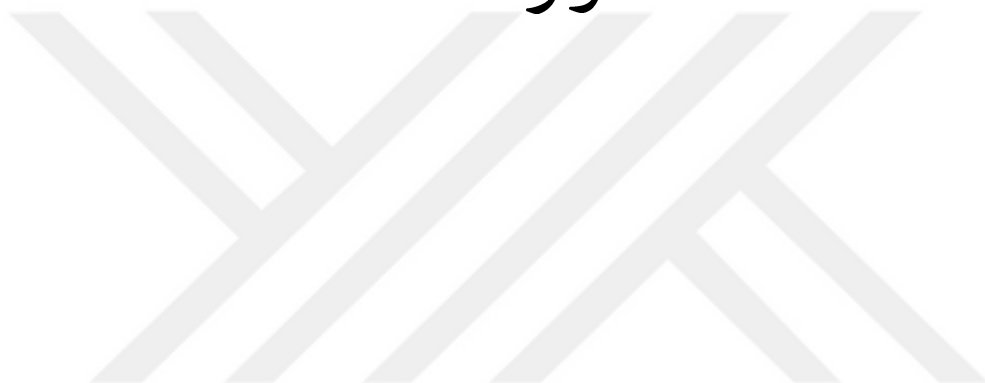
17- Wang, J., Bai, Z., 2006. Convergence analysis of two-stage waveform relaxation method for the initial value problems, Appl. Math. Comput., 172:797-808.

18- Yong, D., 1971. Iterative solution of large linear systems, Academic Press, New York.

19- Zhou, S., Huang, T., 2008. Convergence of waveform relaxation methods for hermitian positive definite linear system, Appl. Math. Comput., 203:943-952.

پیوست ب

واژه نامه



واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

آ

array	آرایه
induction	استقراء
scaler	اسکالر
arithmetic operations	اعمال حسابی
algorithm	الگوریتم
stationary	ایستا

ب

vector	بردار
eigenvector	بردار ویژه
infinity	بی نهایت

پ

partial	پاره‌ای
stable	پایدار
lower triangular	پایین مثلثی
Perron	پرون
continuous	پیوسته
uniformly continuous	پیوسته یکنواخت

ت

function	تابع
transpose	ترانهاده
decomposition	تجزیه
relaxation	تخفیف

linear combination	ترکیب خطی
waveform relaxation	تخفیف موجی شکل
two-stage waveform relaxation	تخفیف موجی شکل دومرحله‌ای
finite differences	تفاضلات متناهی
backward differences	تفاضلات پسرو
forward differences	تفاضلات پیشرو
iteration	تکرار
iterative	تکراری
outer iteration	تکرار بیرونی
inner iteration	تکرار درونی
	ح
exact solution	جواب واقعی، جواب دقیق
	چ
Cholesky	چولسکی
	ح
Kronecker product	حاصلضرب کرونکر
initial guess	حدس اولیه
real	حقیقی
	خ
error	خطا
	د
entry	درایه
system	دستگاه

system of linear equations	دستگاه معادلات خطی
sequence	دنباله
rank	رتبه
eigenpair	زوج ویژه
Jacobi	ژاکوبی
compatible	سازگار
tridiagonal	سه قطری
spectral radius	شعاع طیفی
splitting	شکافت
regular splitting	شکافت منظم
weak regular splitting	شکافت منظم ضعیف
composite regular splitting	شکافت منظم مرکب
initial conditions	شرایط اولیه
boundary conditions	شرایط مرزی
increasing	صودی
implicit	ضمنی

	ط
difference scheme	طرح تفاضلی
	ع
iterative operator	عملگر تکراری
linear operator	عملگر خطی
	غ
nonstationary	غیر ایستا
	ف
Frobenius	فروبنیوس
	ق
diagonal	قطری
	م
matrix	ماتریس
iterative matrix	ماتریس تکرار
block matrix	ماتریس بلوکی
similar	متشابه
symmetric	متقارن
finite	متناهی
positive	مثبت
complex	مختلط
order	مرتبه
conjugate	مزدوج
initial value problem	مسأله‌ی مقدار اولیه
independent	مستقل

equations	معادلات
ordinary differential equations	معادلات دیفرانسیل معمولی
partial differential equations	معادلات دیفرانسیل پاره‌ای
differential algebraic equations	معادلات دیفرانسیل جبری
ordinary	معمولی
definite	معین
positive definite	معین مثبت
symmetric positive definite	معین مثبت متقارن
Hermitian positive definite	معین مثبت هرمیتی
comparison	مقایسه
eigenvalue	مقدار ویژه
singular	منفرد
waveform	موجی شکل
	ن
inequality	نامساوی
nonsingular	نامنفرد
nonnegative	نامنفی
norm	نرم
Euclidean norm	نرم اقلیدسی
induced norm	نرم القایی
infinity norm	نرم بینهایت
natural norm	نرم طبیعی
matrix norm	نرم ماتریسی
decreasing	نزولی
symmetric positive semidefinite	نیمه معین مثبت متقارن
Hermitian positive semidefinite	نیمه معین مثبت هرمیتی

imaginary unit	واحد موهومی
existence	وجود
Hermitian	هرمیتی
identity	همانی
convergent	همگرا
convergence	همگرایی
unique	یکتا

Surname: Hassanzadeh	Name: Zeinab
Title of thesis: Two-stage waveform relaxation for the initial value problems	
Supervisors: Dr. Davod Khojasteh Salkuyeh	
Graduate Degree: Master of Science University of Mohaghegh Ardabili Graduation date: 18/07/2012	Major: Applied Mathematics Faculty: Mathematical Sciences Number of pages: 100
Keywords: Waveform relaxation method, Two-stage iterative method, Initial value problem, Ordinary differential equations, Differential algebraic equations, Theta method	
Abstract: In this dissertation, we inset waveform relaxation method and two-stage waveform relaxation method for solving initial value problems, which both of them are based on stationary iterative process. Considered initial value problems contains system of ordinary differential equations and differential algebraic equations. Transformation of the original system of differential equations to smaller and simpler subsystems is the aim of introducing the two methods, that it is done by decoupling of matrices in the original system. Two-stage waveform relaxation method is obtained from waveform relaxation method by adding inner iterations, such that the speed of the convergence is increased. Finally some numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the two methods, and we compare the speed of the convergence and accuracy of two methods by the numerical results.	



Faculty of Mathematical Sciences

Department of Mathematics and Applications

Two-stage waveform relaxation for the initial value problems

Supervisor

Dr. Davod Khojasteh Salkuyeh

by

Zeinab Hassanzadeh

University of Mohaghegh Ardabili

July 2012