

TOPOLOJİNİN FİZİKTEKİ UYGULAMALARI

76221

NAİM TUĞLU

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
(MATEMATİK ANABİLİMDALI)**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

76221

HAZİRAN 1998

ANKARA


Naim TUĞLU tarafından hazırlanan TOPOLOJİNİN FİZİKTEKİ UYGULAMALARI adlı tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.




Doç. Dr. Cemil YILDIZ
Tez Yöneticisi

Bu çalışma , jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....Doç.Dr.Dursun TAŞCI.....

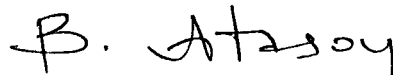
Üye :.....Doç.Dr.Cemil YILDIZ.....

Üye :.....Yrd.Doç.Dr.Ahmet Ali ÜÇAL.....

Üye :.....

Üye :.....

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ	iv
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	v
SİMGELER	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KRİSTALLER VE HOMOTOPI.....	3
2.1. Kristal Yapı.....	3
2.1.1. Örgü Öteleme Vektörleri.....	4
2.1.2. Taban ve Kristal Yapısı.....	5
2.1.3. İlkel Örgü Hücresi.....	6
2.1.4. Temel Örgü Türleri	7
2.2. Kristal Yapı Kusurları.....	12
2.2.1. Noktasal Yapı Kusurları.....	12
2.2.2. Çizgisel Yapı Kusurları.....	13
2.2.3. Hacimsel Yapı Kusurları.....	16
2.3. Homotopi Grupları.....	19
2.3.1. Dönüşümlerin Homotopisi.....	19
2.3.2. Homotopi Eşdeğerliği.....	23
2.3.3. Bir Topolojik Uzayda Eğriler.....	25
2.3.4. Esas Gruplar.....	30
2.3.5. Yüksek Homotopi Grupları.....	36
3. KUSURLARIN TOPOLOJİK SINIFLANDIRILMASI.....	40
3.1. Volterra Dislokasyonları.....	40
3.1.1. Doğal Hal ve İç Gerilmeler.....	40
3.1.2. Kristallerdeki Öteleme Dislokasyonların Topolojik Özellikleri	42
3.2. Kusurların Genel Topolojik Teorisi.....	46

3.2.1	Farklı Boyutlu Kusurların Homotopi Grupları ile Sınıflandırılması.....	46
3.2.2.	Düzen Parametre Uzayının Tanımı.....	48
3.3.	Çizgi Kusurlarının Sınıflandırılması.....	56
3.3.1.	Heisenberg Ferromagnetleri ve Ferromagnetik Malzemeler	56
3.3.2.	Düzlemsel Nematikler ve X-Y Ferromagnetleri.....	57
3.3.3.	3D (3-Boyutlu) Nematikler.....	59
3.3.4.	Çift Eksenli (Bixial) Nematikler.....	60
3.3.5.	Değişmeli Olmayan Çizgi Kusurlarının Bazı Genel Özellikleri..	63
3.3.6.	Dislokasyonlar ve Disklinasyonlar.....	65
3.3.7.	İlmeğin Sınıflandırılmasına İlişkin Uyarılar.....	70
3.4.	İkinci Homotopi Grubu $\Pi_2(V)$	73
3.4.1.	Ferromagnetler.....	73
3.4.2.	Tek-Eksenli Nematikler.....	74
3.4.3	SmA Fazları.....	74
3.5.	Konfigürasyonlar (Texture) Ve Solitonlar	76
3.6.	Düzenli Bir Ortamın Yüzeyi Üzerindeki Topolojik Kusurlar	77
3.7.	Quasi-Kristallerde Kusurlar.....	80
3.7.1.	Quasi-Kristalin Kristalografik Tanımı.....	80
3.7.2.	Quasi-Kristalin Düzen ParametreUzayı.....	81
3.7.3.	Yüksek Boyutlu Uzayda Dislokasyonlar ile $P_{//}$ 'nin Kesişmesi .	83
3.7.4.	Disveksiyonlar.....	84
3.8	Engellenmiş (Frustrated) Fazlar.....	87
3.8.1.	Kusurlara Bağlı Olarak Tanımlanan Fazlar.....	87
3.8.2.	Eğri Kristaller.....	89
3.8.3.	Eğri Fazların Düz Hale Getirilmesi.....	91
4.	DÜZENLİ ORTAMLARDA YARI-KUSURLAR.....	93
4.1.	Yarı-Kusurlar	93
4.2.	Yarı-Kusur Örnekleri ve Özellikleri.....	95
4.2.1.	Yarı-Kusur Örnekleri.....	95
4.2.2.	Yarı-Kusur Özellikleri.....	98

4.3.	Yarı-Kusurların Topolojik Teorisi.....	100
4.3.1.	Temel Uyarılar.....	101
4.3.2.	Yarı-Kusurlar İçin Homotopi Sınıfları.....	102
4.3.3.	Grup İşlemi Altında Yarı-Kusur Sınıfları.....	104
4.4.	Tam Ve Kısmi Düzendeki Tekilliklerin Sınıflandırılması	108
4.5.	Tam Ve Kısmi Düzendeki Kusurlar İle Yarı-Kusurlar Arasındaki İlişki.....	109
4.5.1	Homotopi Gruplarının Tıpatıp Dizisi.....	109
4.6.	Yarı-Kusurlarla İlgili Alıştırmalar.....	112
4.6.1.	Tek Eksenli-Çift Eksenli Nematik Kristaller.....	112
4.6.2.	Simektik C Sıvı Kristaller.....	113
4.6.3.	Şiral (Chiral) Simektik C Sıvı Kristaller.....	114
4.6.4.	Simektik $A_1 - A_2$ Sıvı Kristaller.....	115
4.6.5.	Süper Akışkan $^3\text{He-A}$	115
KAYNAKLAR.....		117
ÖZGEÇMİŞ.....		119

TOPOLOJİNİN FİZİKTEKİ UYGULAMALARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Naim TUĞLU

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 1998

ÖZET

Topolojinin Fizikteki Uygulamasını konu alan bu tez temel olarak dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konuya kısa bir giriş yapılmakta ve ikinci bölümde kristal yapı, kusur çeşitleri ve homotopi teorisi genel hatları verilmektedir.

Üçüncü bölüm homotopi teorisi kullanarak düzenli ortamlarda değişik boyutlardaki kusurlar çalışılmakta ve yüksek boyutlu hiperkristallerdeki yüzey kusurları, sıvı kristaller, quasi-kristaller ve engellenmiş ortamlardaki bazı örnekler ele alınmıştır. Çizgi kusurları Volterra süreci ile sınıflandırılmış ve bunlar topolojik sınıflandırma ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Dördüncü bölümde faz geçişlerinde oluşan yarı-kusurlar ana hatları ile ele alınmış daha sonra yarı-kusurların topolojik teorisi incelenmiştir. Cebirsel topoloji elemanları kullanılarak bazı sıvı kristallerdeki yarı-kusurlar incelenmiştir.

Bilim Kodu: 403.04.01

Anahtar Kelimeler: Homotopi, Homotopi Grupları, Kusurlar, Düzenli Ortam, Volterra Süreci

Sayfa Adedi: 125

Tez Yöneticisi: Doç. Dr. Cemil Yıldız

TOPOLOJİNİN FİZİKTEKİ UYGULAMALARI**(M.Sc. Thesis)****Naim TUĞLU****GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****June 1998****ABSTRACT**

This thesis which is about applications of Topology in Physics consists of four chapters. In the first chapter a short introduction has been made and the structure of crystals, sorts of defects and homotopy theory have been given in details in second chapter.

In the third chapter, defects in different dimensions in ordered media have been studied by using homotopy theory and surface defects in hypercrystals with high dimensions, liquid crystals, quasi-crystals and some samples in frustrated media have been considered. Line defects have been classified using Volterra process and the results of this classification have been compared with that obtained using topological classifications.

In chapter four, semi-defects which occur in the phase transitions have been studied in general and then the topological theory of semi-defects has been given. The semi-defects in some liquid crystals have been studied using algebraic topology.

Science Code: 403.04.01

Key Words: Homotopy, Homotopy Groups, Defects , Ordered Media, Volterra Process

Page Number: 125

Supervisor: Doç. Dr. Cemil Yıldız

TEŞEKKÜR

Aşağıdaki kişilere belirtilen sebeplerden dolayı;

- danışmanım ve değerli hocam sayın Doç. Dr. Cemil YILDIZ'a çalışmam süresince engin bilgisinden faydalanmam imkanını verdiği için.
- T.C. S.Ü. Fen-Ede. Fak. Matematik Bölümünün tüm Öğretim Elemanlarına ve çalışmalarında gerek duyduğum tüm imkanları sağladığı için bölüm başkanımız sayın hocam Prof. Dr. Şaziye YÜKSEL'e
- manevi katkılarından dolayı değerli hocam Yrd. Doç. Dr. A.Ahmet ÖCAL'a
- T.C. S.Ü. Fen-Ede. Fak. Fizik Bölümünün tüm Öğretim Elemanlarına ve özellikle çalışmalarında kişisel yardımlarından dolayı sayın Dr. Haluk ŞAFAK ve Dr. Hamdi Şükür KILIÇ'a
- çalışmam boyunca kararlı ve sürekli olarak bana verdiği her türlü cesaret, maddi ve manevi destekten dolayı eşim Semiha TUĞLU'ya ve tüm hayatım boyunca bana her türlü desteği sağlayan annem ve babam'a

en içten ve en samimi bir şekilde teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge		Sayfa
Çizelge 2.1	Üç boyutta 14 örgü türü.....	11
Çizelge 2.2	Bilinen bazı homotopi grupları.....	39
Çizelge 4.1	Bazı yoğun madde sistemlerinin simetri grupları ve yarı-kusur ile tam kusurlar arasındaki tıpatıp homotopi dizileri.....	116



ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil		Sayfa
Şekil 2.1	Bir kristalde yapıtaşlarının dış görünüşü ile ilişkisi.....	3
Şekil 2.2	Kristal yapı örgüsü.....	6
Şekil 2.3	İki boyutta bir uzay örgüsünün noktaları.....	7
Şekil 2.4	Beş katlı simetriye sahip bir örgü.....	8
Şekil 2.5	Bir kübün simetri düzlemleri ve eksenleri.....	9
Şekil 2.6	İki boyutta bazı örgü çeşitleri.....	10
Şekil 2.7	Noktasal yapı kusurları.....	13
Şekil 2.8	Dislokasyonların oluşumu.....	14
Şekil 2.9	Burgers vektörünün gösterimi.....	14
Şekil 2.10	Kenar ve vida türü dislokasyonların oluşumu.....	15
Şekil 2.11	İki boyutta nokta diklinasyonu ve üç boyutta disklinasyon.....	16
Şekil 2.12	Kayma ve ikizlenme türü yapı bozuklukları.....	18
Şekil 2.13	Homotop dönüşümler.....	19
Şekil 2.14	f ile g arasındaki homotopi.....	20
Şekil 2.15	α ile β eğrileri arasındaki homotopi.....	26
Şekil 2.16	$\alpha\gamma$ ile $\beta\delta$ arasındaki H homotopisi.....	27
Şekil 3.1	L dislokasyonu.....	41
Şekil 3.2	Köşe tipi disklinasyonu.....	42
Şekil 3.3	Ikizlenme tipi disklinasyon.....	42
Şekil 3.4	L dislokasyonunu çevreleyen g ilmeği ve $\Gamma=f(\gamma)$ açık eğrisi.....	44
Şekil 3.5	Kusurları çevreleyen uzaylar.....	51
Şekil 3.6	Düzen parametre uzayları.....	53

Şekil 3.7	Ferromagnetik kolay düzleminde düzen parametresi uzayına kantör dönüşüm örnekleri.....	55
Şekil 3.8	Bir ferromagnette $s=1$ singüleri.....	56
Şekil 3.9	X-Y ferromagnette dislokasyonlar.....	58
Şekil 3.10	Çift eksenli nematikte x-yönlendiricisi için $s=1/2$ y için r çizgisi.....	62
Şekil 3.11	[a] çizgi kusurunun iki farklı homotopi sınıfı.....	63
Şekil 3.12	Değişmeli olmayan iki çizgi kusurunun kesişmesi.....	65
Şekil 3.13	İki disklinasyon üzerine bir dislokasyon bölünmesi.....	66
Şekil 3.14	Dislokasyon ile disklinasyon arasındaki ilişki.....	67
Şekil 3.15	Bir dislokasyonun disklinasyon etrafında tamamen dönmesi.....	68
Şekil 3.16	Tekil bir nokta oluşturan $s=1/2$ ilmeği.....	71
Şekil 4.1	Çift eksenli nematikte tam ve yarı-kusur.....	94
Şekil 4.2	Düzgün SmA sıvı kristalinde soft, rigid bileşenler ve yarı kusurlar.....	96
Şekil 4.3	SmA ₂ sıvı kristalinde soft, rigid bileşenler ve yarı kusurlar.....	97
Şekil 4.4	Tek-çift eksenli nematikte yönlendirici alan ve yarı kusur.....	99
Şekil 4.5	ϵ yarı kusurunu çevreleyen D^2 diski	102
Şekil 4.6	Tıpatıp homotopi dizisi.....	110

SİMGELER

\vec{b}	Burgers vektörü
D^n	n-boyutlu katı küre
E^m	m-boyutlu Öklid uzayı
$E(3)$	Üç boyutta Öklid grubu
G/H	H alt grubunun G deki tüm kosetlerinin uzayı
I_x	X'in özdeşlik dönüşümü
I^n	Öklidyen n-küp
O	Düzgün sekizyüzlünün simetri grubu (oktahedral grup)
O'	İkili oktahedral grup
$O(n)$	n-boyutlu ortogonal grup
S^n	n-küre
$SO(3)$	Üç boyutta has dönmeler grubu
$SU(2)$	İki boyutta özel üniter grup
T	Düzgün dörtyüzlünün simetri grubu (tetrahedral grup)
T'	İkili tetrahedral grup
Y	Düzgün yirmiyüzlünün simetri grubu (ikosahedral grup)
\in	"Eleman olma" işareti
\forall	Her
\exists	En az bir
τ	Topoloji
\otimes	Direkt çarpım
\wedge	Dış çarpım
$\Pi_n(Y)$	Y uzayının n. homotopi grubu
[0]	Sabit dönüşüme homotop dönüşümlerin sınıfı
[f]	F dönüşümüne homotop dönüşümlerin sınıfı
∂	Sınır işlemcisi
[]	Yarı-direkt grup çarpım işlemi
\sim	"Homotop olma" işareti
\approx	"İzomorfik olma" işareti
$L(X, x_0)$	X de tabanı x_0 olan bütün kapalı eğrilerin cümleli

KISALTMALAR

SmA	Simektik A sıvı kristalleri
SmC	Simektik C sıvı kristalleri
SmC*	Şiral Simektik C sıvı kristalleri
SmA ₁	Simektik A ₁ sıvı kristalleri
³ He-A	Süper akışkan ³ Helyum

1950'lerde X ışınları ile yapılan inceleyen V.Volterra ile nemetiklerde gözlenen "çizgilerin (threads)" ve smetiklerde gözlenen "fokal koniklerin" bu mezomorfik fazların simetrileriyle doğrudan ilişkili olduğunu gösteren G. Friedel 'in çalışmalarıyla, yüzyılın başlarına uzanır.

Söz konusu bu iki çalışma ayrı ayrı kusur teorisinin iki temel yönünü ortaya çıkarmıştır. Bunlar; (1) Kusurlar "topolojik kararlı" durumlardır ve düzenli ortamın simetrisini özel bir biçimde bir miktar bozarlar. Friedel, bulguların X-ışın çalışmaları ile doğrulanmasından uzun yıllar önce, nematik ve smetiklerdeki kusurları gözleyerek bu maddelerin moleküler yapısını yorumlayabilmiştir. (2) Kusurlar "enerji bakımından kararlılıkları" ile karakterize edilirler; yani taşıdıkları deformasyon alanları, elastik enerjiyi minimize eden tekil çözümlerdir (Volterra). Tüm bunlara rağmen, kristallerin ve süper akışkan Helyumun aktif şekilde incelenmeye başlandığı yetmişli yıllardan önce, her çeşit düzenli ortamdaki kusurların topolojik özelliklerini tümüyle açıklayabilecek çok genel bir teorinin ortaya çıkacağı tahmin edilmiyordu. Aksine, katıların plastik deformasyonu üzerindeki araştırmalar önemli ölçüde Volterra 'nın çalışmalarına bağlı kalmıştır. Plastik süreçlerde karşılaşılan ana kusurlardan olan "öteleme dislokasyonlarını" sınıflandırmak nispeten kolaydı, dolayısıyla bunların topolojik yapısı üzerinde fazla durulmamış, daha ziyade tekil gerilme (stress) kaynakları olarak nitelikleri vurgulanmış ve "kusur" olarak adlandırmışlardır. Bu tip kusurlar, kristalin mükemmel düzenlenişini bozan olgulardır. Aynı terminoloji, katı kristallerden çok daha karmaşık düzenli sistemleri incelemeye başlayan yoğun madde fizikçileri tarafından da paylaşılmıştır.

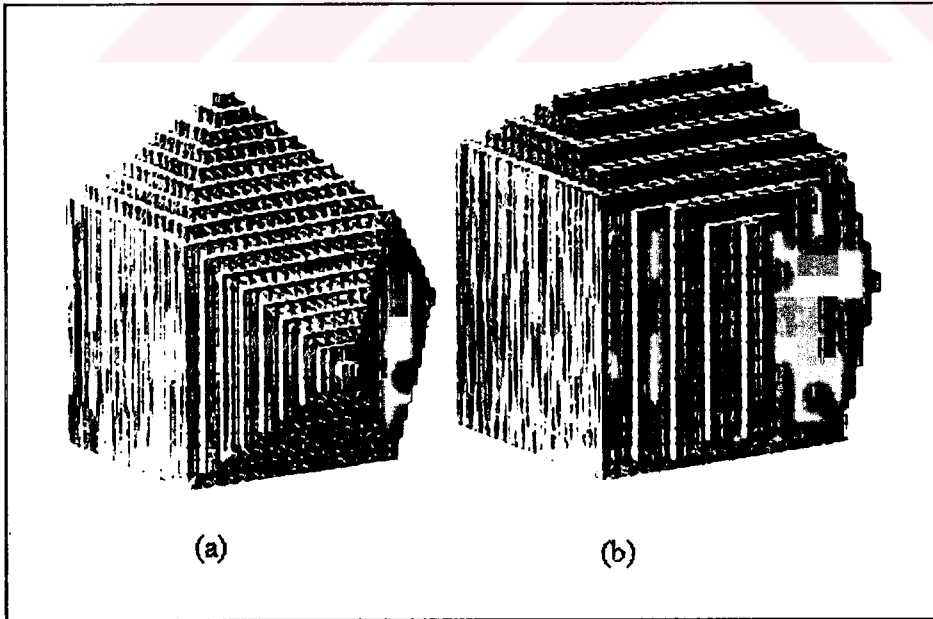
Diğer taraftan kozmoloji ile uğraşanlar ve parçacık fizikçileri, tamamen bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda, evrenin ilk safhalarındaki faz geçişlerinde ortaya çıkan tekillikleri açıklamak ve bunları doğrudan temel parçacıklara bağlamak amacıyla cebirsel topoloji kavramlarının benzer şekilde kullanımını geliştirmişlerdir. Bu tekillere ilişkin topolojik invariantlar yüksek enerji fiziğinin karmaşık dünyasında bir ölçüde sadeleşmeye yol açtığından seçilen terminoloji herhangi bir "kusur" fikrini [monopoller, instantonlar, sicimler (strings), ve vortexler, örgüler (textures) veya kink'ler v.b.] tam olarak yansıtmazlar. Ancak burada, yoğun madde fiziğindeki çağrışımları biraz daha farklı olan bu kusur isimlendirmeleri kullanılacaktır. Sadece uzun yıllar dislokasyon fiziğinde tamamen farklı bir anlamda kullanılmış olan texture ve kink terimleri yerine, Louis Michel tarafından ortaya atılmış olan "konfigürasyon" kelimesi tercih edilecektir.

2. KRİSTALLER VE HOMOTOPI

2.1. Kristal Yapı

Bir kristal kararlı bir ortamda büyümeye başladığında meydana gelen yapı, birbirine özdeş yapı taşlarının ard arda eklenmesiyle oluşur (Şekil 2.1). Bu yapıtaşları tek atomlar veya atom grupları olabilir. O halde kristal, atom gruplarından oluşan üç boyutlu bir örgüdür. İdeal bir kristal özdeş yapı taşlarının uzayda sonsuza kadar dizilişi ile oluşturulur. Bakır, gümüş, altın, demir, alüminyum ve alkali metal gibi basit kristallerde en küçük yapısal birimler tek atomlardır. Ancak en küçük yapısal birim birkaç atom veya molekül olabilir.

Tüm kristallerin yapısı bir örgü ile tanımlanabilir. Bu örgünün her düğüm noktasında bulunan atomlar grubuna taban denir. Bu tabanın uzayda tekrarlanmasıyla kristal oluşur.



Şekil 2.1. Bir kristalde yapıtaşlarının dış görünüşüyle ilişkisi.
(a) ve (b) de aynı yapı taşları farklı kristal yüzeylerine yol açar.

2.1.1. Örgü Öteleme Vektörleri

Bir örgü \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} gibi üç temel öteleme vektörü ile tanımlanır. Buna göre atomların dizilişi bir \vec{r} konumlu yerde nasıl ise,

$$\vec{r}' = \vec{r} + u_1 \vec{a} + u_2 \vec{b} + u_3 \vec{c} \quad (2.1)$$

olan \vec{r}' konumlu bir yerde de aynı olur. Burada u_1 , u_2 , u_3 her değeri alabilen tamsayılardır. Denklem 2.1 ile tanımlanan \vec{r}' noktaların kümesine örgü adı verilir.

Örgü, uzayda periyodik olarak sıralanmış noktaların dizisidir. Bunun iki boyutlu karşılığı ağ adını alır. Örgü bir çeşit matematik soyutlamadır; atomlardan oluşan bir taban bu örgünün her düğüm noktasına yerleştiğinde kristal oluşur. Bu kavramlar arasındaki bağıntı şöyle ifade edilebilir :

$$\text{örgü} + \text{taban} = \text{kristal yapı} \quad (2.2)$$

Herhangi iki \vec{r}' , \vec{r} noktasından bakıldığında atomların dizilişini aynı kılan bir $\{u_1, u_2, u_3\}$ tamsayı üçlüsü her zaman bulunabiliyorsa \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} vektörlerine ilkel öteleme vektörleri adı verilir. Bu tanıma göre kristalin yapı taşı olabilecek en küçük hücre bu ilkel öteleme vektörleriyle oluşur.

Kristal eksenleri tanımlamakta genellikle ilkel öteleme vektörleri kullanırız. Ancak, kristal simetrisini daha basit olarak verebiliyorsa ilkel olmayan eksenler de kullanılır. \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} den oluşan kristal eksenleri bir paralelkenar prizmanın üç komşu kenarını oluştururlar. Örgü noktaları sadece prizmanın köşelerinde oluşuyorsa bu ilkel paralelkenar prizmadır.

Bir örgü öteleme operasyonu

$$\vec{T} = u_1 \vec{a} + u_2 \vec{b} + u_3 \vec{c} \quad (2.3)$$

ile gösterilen bir kristal öteleme vektörü ile tanımlanır. Örgü üzerindeki herhangi iki nokta bu tür vektörlerle birbirine ötelenebilir. Bir kristal yapısını tanımlarken üç önemli soruya cevap vermek gerekir. Örgü nedir? Hangi üç \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} vektörlerini seçmeliyiz? Taban hangisidir?

Belirli bir yapı için birden fazla örgü, belirli bir örgü için de birden fazla eksen takımı seçme olanağı her zaman vardır. Bu iki seçim yapıldıktan sonra baz tanımı yapılabilir. Sonunda Denklem 2.3 sağlanıyorsa tüm hesaplamalar doğru çıkacaktır.

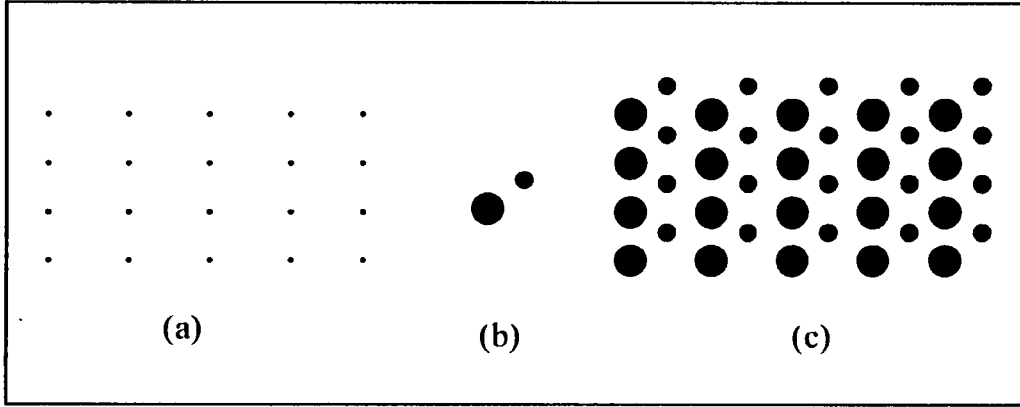
Bir kristal üzerinde yapılan simetri işlemleri kristali tekrar eski konumuna getirir. Örgü ötelemesi böyle bir işlemdir. Bunun dışındaki dönme ve yansıma işlemlerine noktasal işlemler denir. Örgü noktaları etrafında veya paralelkenar prizma içindeki özel noktalar etrafında yapılan dönme ve yansıma işlemleri sonucunda kristali eski konumuna getirmek mümkündür. Öteleme ve noktasal işlemlerin birlikte etkilendiği bileşik işlemler olabilir.

2.1.2. Taban ve Kristal Yapı

Her örgü noktasında atom gruplarından oluşan bir taban vardır ve bu tabanın birleşimi, yerleşimi ve yönü aynıdır. Şekil 2.2 de örgütün her noktasına bir taban eklendiğinde bir kristal yapısının nasıl oluştuğu görülmektedir. Bir tabandaki atom sayısı bir veya daha çok olabilir. Tabanı oluşturan j atomunun kendi ait olduğu örgü noktasına göre konumu

$$\bar{r}_j = x_j \bar{a} + y_j \bar{b} + z_j \bar{c} \quad (2.4)$$

olur. Burada örgü noktası olarak seçtiğimiz orijini uygun şekilde yönlendirirsek $0 \leq x_j, y_j, z_j \leq 1$ olur.



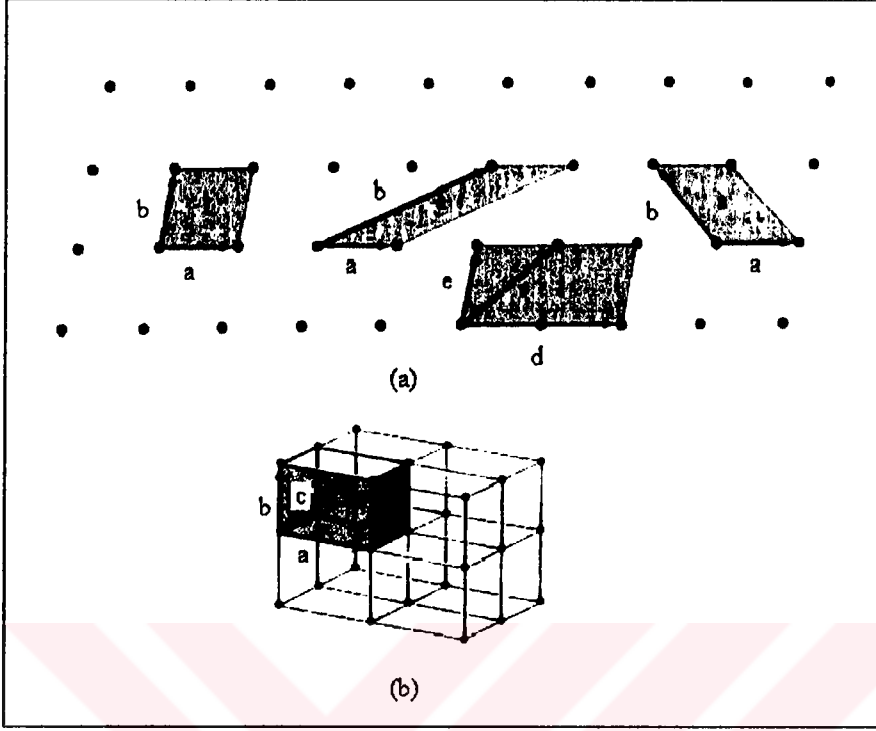
Şekil 2.2. Kristal yapısı örgütünün
 (a) her noktasına bir hücre tabanı
 (b) eklenerek oluşur
 (c) şekline bakarken önce tabanı tanımak ve sonra örgüyü düşünmek kolaydır.

2.1.3. İlkel Örgü Hücresi

\bar{a} , \bar{b} , \bar{c} ilkel eksenleriyle tanımlanan paralelkenar prizmaya ilkel hücre adı verilir. İlkel hücre kristal öteleme işlemini tekrarlamak suretiyle tüm uzayı doldurur. İlkel hücre aynı zamanda minimum hacimli hücredir. İlkel hücrede her zaman bir örgü noktası vardır. Bir paralelkenar prizma şeklindeki ilkel hücre sekiz köşesinde de birer örgü noktasından oluşuyorsa, her bir örgü noktası sekiz ilkel hücre tarafından paylaşılmış olacağından, hücredeki toplam

örgü sayısı 1 olur yani $8 \times \frac{1}{8} = 1$.

Eksenleri \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} olan bir paralelkenar prizmanın hacmi, $V_c = |\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})|$ olur. İlkel hücre içindeki tabana ilkel taban denir. İlkel tabandan daha az sayıda atom içeren taban olamaz.



Şekil 2.3.(a) İki boyutta bir uzay örgüsünün noktalar. Buradaki 1. 2. ve 3. şekillerdeki vektör çiftleri örgünün öteleme vektörleri iken 4. şekildeki örgü öteleme vektörleri olamazlar; çünkü buradaki vektör çiftinin tam katlarını kullanarak \vec{T} öteleme vektörü oluşturamayız.

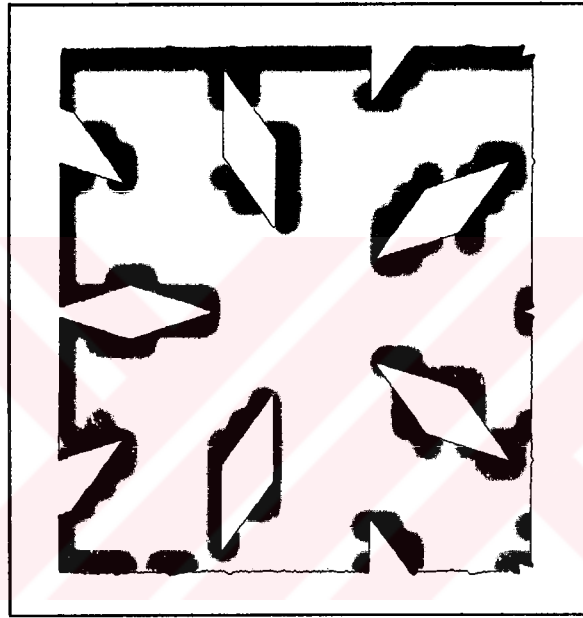
(b) Üç boyutta ilkel örgü hücresi

2.1.4. Temel Örgü Türleri

Kristal örgüleri öteleme ve diğer simetri işlemleri ile kendi üzerlerine dönüştürülebilirler. Tipik bir simetri işlemi bir örgü noktasından geçen eksen etrafında dönme işlemidir. Her biri sırasıyla 2π , $2\pi/2$, $2\pi/3$, $2\pi/4$, $2\pi/6$ radyanlık dönme işlemlerine karşılık gelen bir-, iki-, üç-, dört- ve altı-kat simetriye sahip dönme eksenleri bulunabilir. Bu dönme eksenleri 1, 2, 3, 4 ve 6 sembolleriyle gösterilirler.

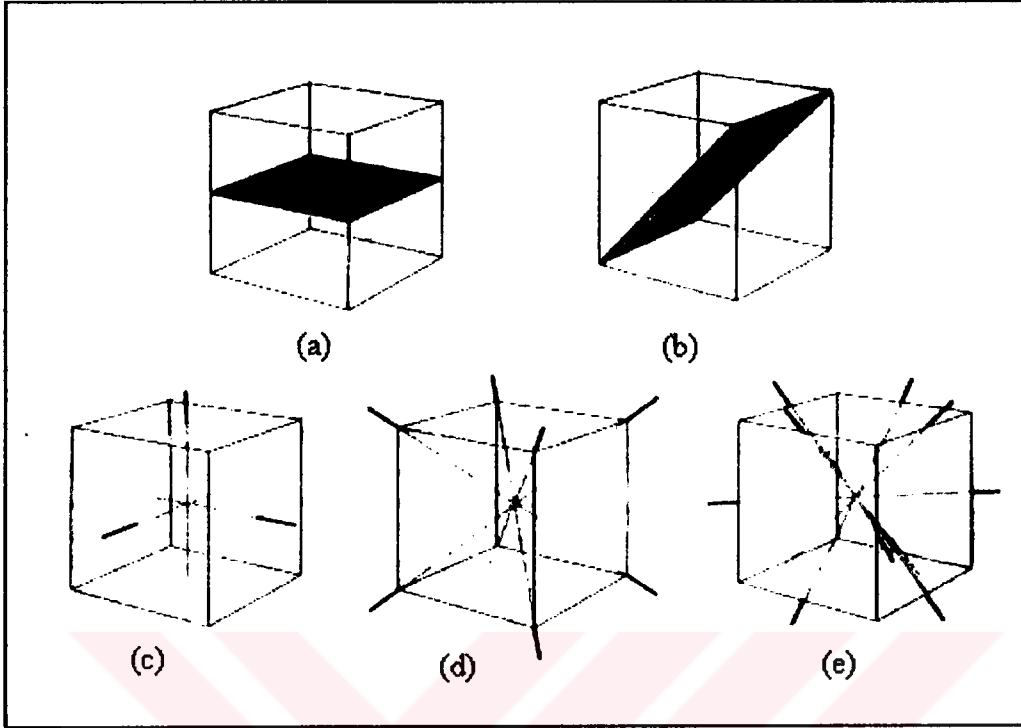
Ancak, $2\pi/5$ veya $2\pi/7$ radyanlık dönme altında simetrik olan örgü bulamayız. Tek bir molekül istenilen katlılıkta dönme simetrisine sahip olabilir, ama

sonsuz bir örgü bu özelliğe sahip olamaz. Örneğin, beş kat simetriye sahip moleküller kullanarak bir kristal yapabiliriz, ama bu kristalin beş kat simetri eksenine sahip olması beklenemez. Şekil 2.4. te beş kat simetriye sahip bir örgü oluşturmaya çalışılırsa ne olacağı görülmektedir: Beşgenlerle tüm uzayı doldurmak istediğimizde aralarında boşluklar kalmakta ve dolayısıyla gerekli öteleme simetrisini bozmaktadır.



Şekil 2.4. Bir örgü beş katlı simetriye sahip olamaz; çünkü tüm uzayı özdeş beşgenlerle tamamen doldurulamaz.

Bir örgü noktasına simetri işlemleri uygulandığında bu örgüyü kendi üzerine geri getiren tüm simetri işlemleri kümesine örgü noktasal grubu denir. Olabilecek dönme işlemlerinden bahsettik. Ek olarak, örgü noktasından geçen bir düzleme göre yansıma işlemi olabilir. Ters denilen diğer bir işlem π radyan kadar dönme ve ardından bu eksene dik bir düzleme göre yansıma işleminden oluşur. Bu iki işlemin net sonucu \bar{r} konumunu $-\bar{r}$ ye dönüştürür. Bir kübün simetri eksenleri ve simetri düzlemleri Şekil 2.5. te gösterilmiştir.

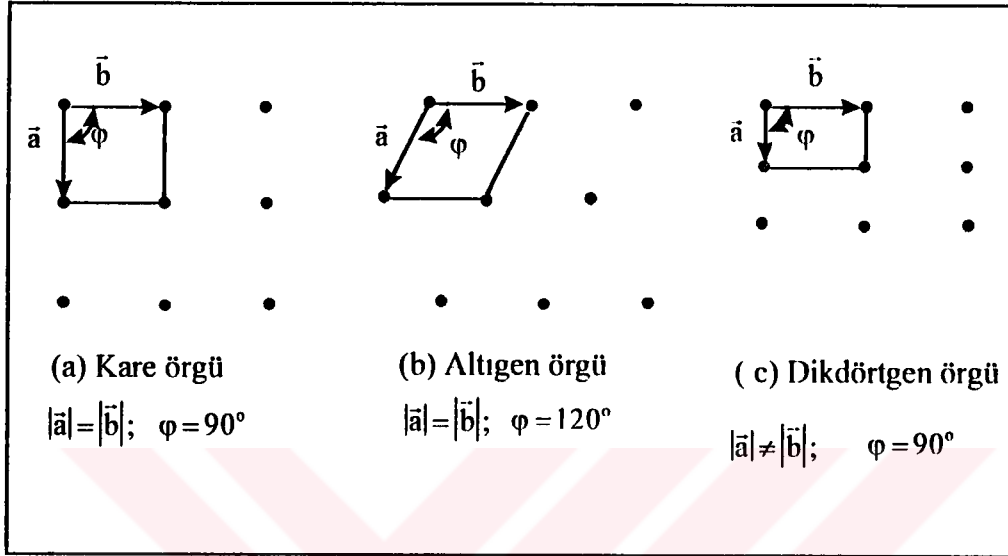


Şekil 2.5.(a) Bir kübün yüzeylerine paralel bir simetri düzlemi. (b) Bir kübün köşegen simetri düzlemi. (c) Kübün üç adet dördü simetri eksenler. (d) Kübün dört adet üçlü simetri eksenleri. (e) Kübün altı adet ikili simetri eksenleri.

2.1.4.1. İki boyutlu örgü türleri

Örgü öteleme vektörlerinin boyları veya aralarındaki φ açısının değerinde bir kısıtlama olmadığı için olabilecek örgü türü sayısı sınırsızdır. Şekil 2.3.a daki örgü herhangi iki \vec{a} ve \vec{b} vektörleri için çizilmiştir. Böyle genel bir örgüye eğik örgü adı verilir ve sadece π ve 2π açıları kadar dönme simetrisi vardır. Ancak, eğik türden bazı özel örgülerin $2\pi/3$, $2\pi/4$ veya $2\pi/6$ açılık dönme simetrisi olabilir. Bu yeni işlemler altında değişmez kalan bir örgü kurmak istiyorsak \vec{a} ve \vec{b} vektörlerine kısıtlama getirmeliyiz. Başlıca 4 tür kısıtlama vardır ve her biri özel bir örgü türüne yol açar. Şekil 2.6 'da gösterilen 4 özel örgü türü ile eğik örgüyü de dahil edersek düzlemde 5 farklı örgü türü oluşur.

Genel olarak, tüm kısıtlamalar sonucu elde edilen örgü türlerine Bravais örgüleri adı verilir. O halde, iki boyutta beş adet Bravais örgüsü vardır.



Şekil 2.6. İki boyutta bazı örgü çeşitleri.

2.1.4.2. Üç boyutta örgü türleri

Üç boyutta noktasal simetri grubu 14 farklı örgü türü gerektirir (Çizelge 2.1). En genel örgü türü triklinik olup 13 tane özel örgü bulunur. Hücre yapısı özelliğine göre ayrılmak istendiğinde triklinik, monoklinik, ortorombik, tetragonal, kübik, trigonal ve altıgen olmak üzere 7 farklı hücre türüne dayanan sistemler şeklinde gruplandırılırlar.

Hücredeki bir noktanın konumu Denklem 2.4. de atomik x, y, z koordinatlarıyla belirlenir. Burada her koordinat, hücrenin bir köşesinden seçilen orijine göre a, b, c eksen uzunluklarının birer kesridir. Örneğin, bir hücrenin cisim merkezinin koordinatları $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$ olur. Yüzey merkezlerinin

koordinatları arasında $\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0$, $0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} 0 \frac{1}{2}$ sayılabilir.[1]

Çizelge 2.1. Üç boyutta 14 örgü türü . [1]

Sistem	Örgü sayısı	Birim hücre eksen ve açılarının özellikleri
Triklinik	1	$a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma$
Monoklinik	2	$a \neq b \neq c, \alpha = \gamma = 90^\circ \neq \beta$
Ortorombik	4	$a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Tetragonal	2	$a = b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Kübik	3	$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
Trigonal	1	$a = b = c, \alpha = \beta = \gamma < 120^\circ, \neq 90^\circ$
Altıgen	1	$a = b \neq c, \alpha = \beta = 90^\circ \gamma = 120^\circ$

2.2. Kristal Yapı Kusurları

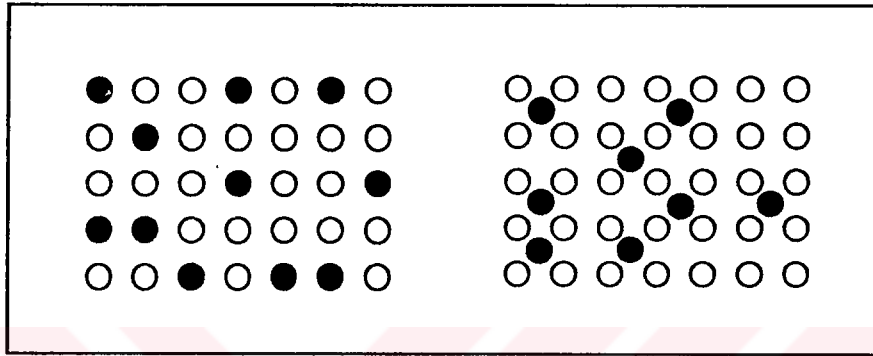
Bir kristal hacmi içerisinde atomlar veya atom grupları tanımlandığı gibi, bir çoğunda düzgün bir sıralanış yoktur. Bir kristal yapıyı oluşturan atomları hiçbir zaman durgun halde değildir. Sıcaklığa bağımlı olarak atomlar bir kristalin içerisinde bulunmaları beklenen noktanın etrafında titreşim hareketi yaparlar. İşte bu durum bile atomların sabit noktalarda ve birbirlerine göre belirli uzaklıklarda olmadıklarını verir. Kristali oluşturan atomlar arasında yabancı atomlar; yani bu kristalin yapısı içerisinde yer almaması gereken atomlar bulunabilir. Bu da bir tür yapı bozukluğu olur ve kristalin tanımlanan ideal halinde olmadığını gösterir. Ancak biz bu iki tür ideallikten sapma üzerinde fazla durmayacağız. Biz belirli bir atom veya atom gruplarından oluşan bir kristalde, bu atomların arasındaki düzenin bozulduğu halleri inceleyeceğiz. Kısaca bir kristal yapı içerisinde atomların düzeni tanımlandığı ideal durumdan üç şekilde ayrılabilir; noktasal, çizgisel ve hacimsel. Noktasal bir yapı kusuru, kristal yapısı içerisinde bir atomun bulunması gereken konumda bulunmaması ya da bulunmaması gereken konumda fazladan bulunması ile ortaya çıkabilir. Çizgisel yapı kusurları dislokasyon tipi kusurlardır ve kristalin dış baskılara karşı direncinde önemli değişikliklere yol açar. Hacimsel yapı kusurları ise, ikizlenme (twinning) veya kayma (slip) türü kusurlardır ve bunlar üç boyutta ortaya çıkarlar.

Kusurlar, kristali kullanılır, işe yarar hale getirmektedir. Mükemmel kristaller güzeldir; fakat kusurlu kristaller kullanışlıdır.

2.2.1. Noktasal Yapı Kusurları

Bu kristal yapı kusurları kristalin oluşumu sırasında ortaya çıkmış olabileceği gibi, oluşumdan sonra dış etkenlerle de oluşturulabilirler. Bazen atomlar örgüdeki yerlerinde bulunmayarak boş örgü konumlar ortaya çıkarırlar. Bazen

de örgünün düzenli satır veya sütunları arasına fazladan başka atomlar sıkıştır. Ayrıca bazı durumlarda birkaç örgü konumunda farklı bir elementin atomları bulunabilir. Kristal örgüde böyle farklı bir atomun yakın çevresi bozulabilir. Bu üç ayrı türdeki kusurlar sırasıyla boşluklar, örgü arası konumlar ve yer değiştirmeli safsızlıklar olarak adlandırılır.



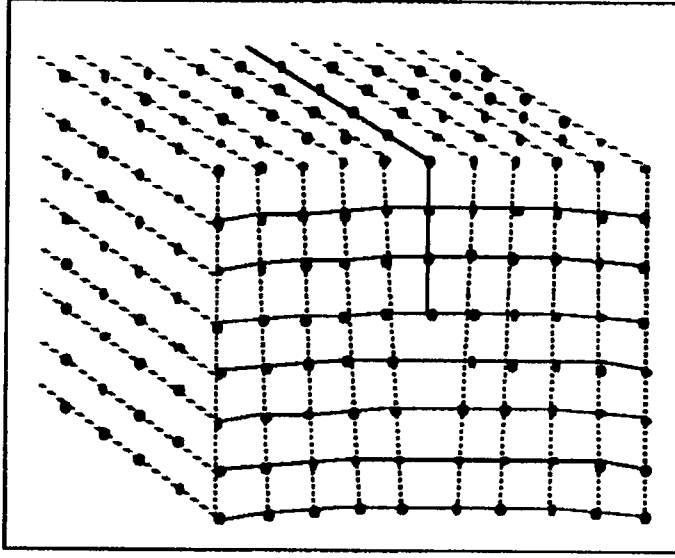
Şekil 2.7. Noktasal yapı kusurları

2.2.2. Çizgisel Yapı Kusurları

İdeal örgüdeki denge konumlarında bulunmayan atomların belirli uzunlukta bir çizgi boyunca dizilmelerinden meydana gelen çizgi kusurlarının başlıca örnekleri, dislokasyon ve disklinasyonlardır.

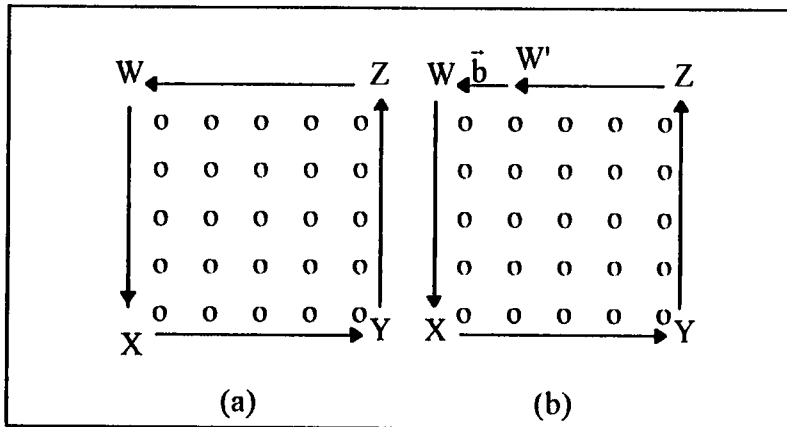
2.2.2.1. Dislokasyonlar

Dislokasyonlar, örgü içerisinde oldukça uzun atomik boyutlarda ortaya çıkarlar ve kristalin mekanik özelliklerinde çok önemli değişikliklere yol açarlar. Dislokasyonlar, kristal yapı içerisinde yapının zayıflık merkezleri olarak bilinirler. Dislokasyonlar bu nedenle bir kristalin kırılabilirliği 10^4 katı kadar azalabilir. Bu nedenle özellikle materyal hazırlanmasında dislokasyonların varlığını ve yoğunluğunun bilinmesi büyük önem taşır. Dislokasyon, basitçe kristal yapı içerisinde konumları değiştirilmiş atomların oluşturduğu bir çizgi olarak düşünülebilir.



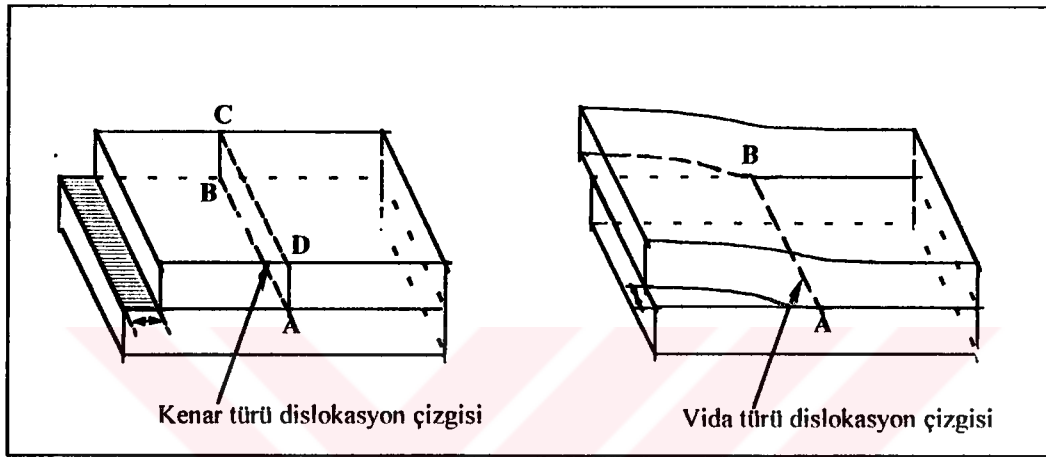
Şekil 2.8. Dislokasyonların oluşumu

Bir kristal yapı içerisinde çıkan dislokasyonların oluşum özellikleri ve cinsi Burgers vektörü ile tanımlanır. Dislokasyonların özelliklerini açıklanmasını kolaylaştıran bu vektörü tanımlayabilmek için Şekil 2.9. deki gibi XYZW ile belirlenmiş bir kristal düzlemi içerisinde atomların çizgisel bir boyutta konumlarını birbiri ardınca değiştirdiklerini düşünerek Şekil 2.9.b. de görüldüğü gibi XYZW dolanımını (a) kısmında görülen yüzeyi örtmeyecek ve XYZW dolanımını kapatabilmek için ek bir \vec{b} vektörü eklenmesi gerekecektir. İşte bu vektör Burgers vektörü olarak tanımlanır.



Şekil 2.9. Burgers vektörünün gösterimi

Burger vektörü dislokasyon çizgisine dik ya da paralel olabilir ve \vec{b} vektörünün dislokasyon çizgisine paralel olduğu dislokasyon türleri vida tipi, dik olduğu dislokasyon türleri de kenar tipi dislokasyonlar olarak tanımlanırlar. Aşağıdaki şekil bu iki tür dislokasyonun üç boyutta ortaya çıkış şeklini göstermektedir.



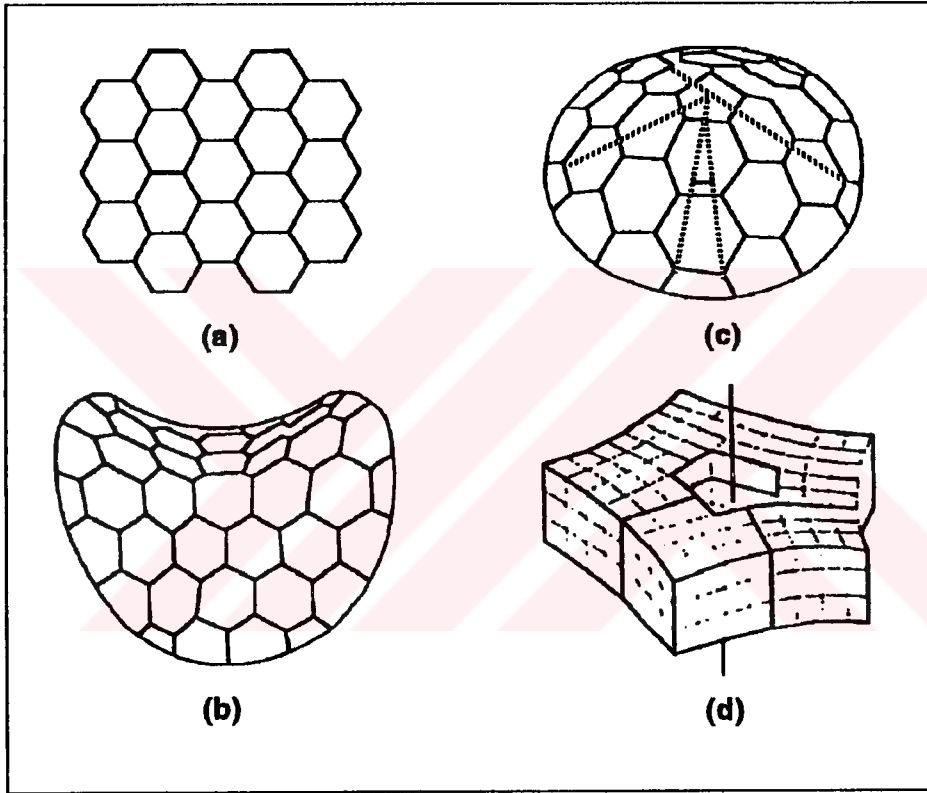
Şekil 2.10. Kenar ve vida türü dislokasyonların oluşumu

Dislokasyonların kristal içerisinde ortaya çıktığı bölgeler kristalin ideal halindeki bölgelere göre daha yüksek enerjili bölgelerdir ve bu nedenle yüksek enerji bölgeleri olarak tanımlanırlar. Kristaller için genel bir formül ile bu enerji $\mu|\vec{b}|^2$ şeklindedir. Burada \vec{b} , Burgers vektörü ve μ 'de kristalin kesme modülüdür. İdeal ve dislokasyon içeren kristaller enerjileri açısından karşılaştırıldıklarında, bu şekilde bir kusur ile kristalin entropisinin ideal kristalin entropisinden daha büyük olduğu görülmektedir.

2.2.2.2. Disklinasyonlar

Disklinasyonlar, bir kristal örgüdeki kesme düzlemlerinin bağıl dönmeleri sonucunda ortaya çıkan kusurlardır. Aşağıdaki Şekil 2.11 de iki ve üç boyutta disklinasyon örnekleri görülmektedir. İki boyutta birer nokta kusur olan disklinasyonlar üç boyutta çizgi kusurlarıdır. Şekil 2.11.b deki disklinasyon, a' daki kusursuz altıgen örgü, bir doğru boyunca kesildikten ve 60° lik kama

şeklinde açıldıktan sonra ara bölgenin tekrar düzgün altıgen örgüden 60° lik bir kama parçasının atılmasından sonra yüzeylerin tekrar birleştirilmeleri sonucunda meydana gelmişlerdir. Bu şekilde örgü kesmeleri ve ara bölgelere madde eklenmesi veya çıkarılması işlemlerine Volterra süreçleri denir. Dislokasyonlar örgütün öteleme simetrisini disklinasyonlar ise dönme simetrisini bozmaktadır.



Şekil 2.11. İki boyutta (a) kusursuz altıgen örgü (b) ve (c) nokta disklinasyonlu altıgen örgü (d) üç boyutta diklinasyon

2.2.3. Hacimsel Yapı Kusurları

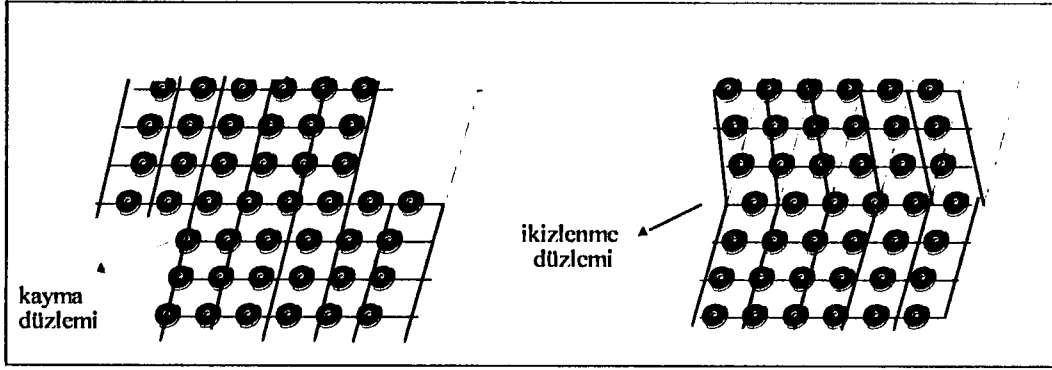
Kristal yapıda gözlenen hacimsel türdeki kusurlar, çizgisel tür kusurlar olan dislokasyonlarla yakından ilişkilidir. Örneğin kayma türü bir kristal yapı bozukluğu her zaman çizgisel bir yapı bozukluğunun dislokasyonun oluşumuna neden olur.

2.2.3.1. Kayma (slip) türü yapı kusurları

Bu tür yapı kusurları, kristali oluşturan atomik düzen bozulmaksızın kristalin iki bölümünün kayma düzlemi olarak bilinen bir düzlem üzerinde atomik uzaklıklar düzeyinde birbirlerine göre kaymaları şeklinde ortaya çıkarlar. Kayma oluşumu sırasında ortaya çıkan atomik yer değiştirmede, yer değiştirme uzunlukları atomlar arası uzaklığın tam katlarıdır.

2.2.3.2. İkizlenme (twinning) türü yapı kusurları

Bu tür yapı kusurları, yine kristalin bir bölümü diğer bir bölüme göre hacimsel olarak yer değiştirmiş olmakla birlikte, atomik yer değiştirme atomlar arası uzaklığın tam katları değildir. Bu tür yapı kusurlarında kristalin bir miktar hacmi diğerine göre belirli bir açı altında döner, her iki hacim de aynı atomik düzeni korumakla birlikte birbirlerine göre bu açı kadar dönmüş olurlar. Kristal hacimlerinin ayrı incelenmesi sonucunda gözlenen en belirgin özellik her iki hacminde kristalin ideal atomik yerleşim düzeninin korunmuş olmasıdır. Ancak, sanki aynı kristal yapıda iki hacim birbirlerine göre belirli bir açı kadar döndürülerek bir kristal düzlemi içerisinde yapıştırılmış gibidirler. Bu düzleme de ikizlenme düzlemi denir. Kayma türü yapı kusurları daima kristalin en çok atom içeren düzlemleri üzerinde ya da atomların en sıkı paketlenmiş düzlemlerinde oluşur. Hem kayma hem de ikizlenme türü yapı kusurlarında bu tür kusurların üzerinde olduğu düzlem, bozukluğun oluşum doğrultusu ile birlikte verilir.



Şekil 2.12. Kayma ve ikizlenme türü yapı bozuklukları



2.3. Homotopi Grupları

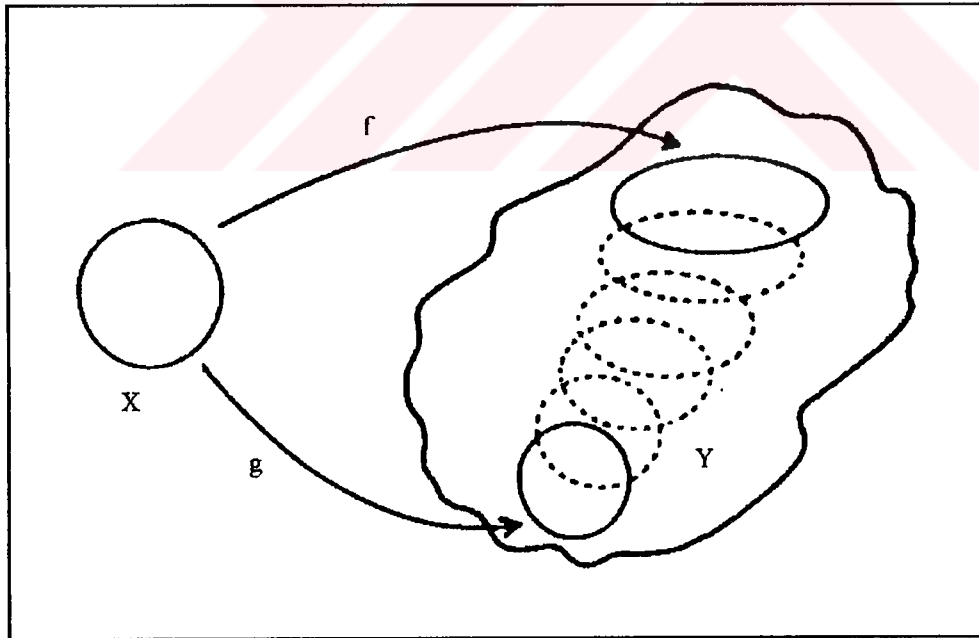
2.3.1. Dönüşümlerin Homotopisi

Tanım 2.3.1. Y bir topolojik uzay ve $A, B \subset Y$ nin iki alt uzayı olsun A dan B ye sürekli bir deformasyon ile geçilebiliyorsa bu uzaylara homotoptur denir.

Tanım 2.3.2. Y bir topolojik uzay ve $I = [0,1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ olsun.

Bir $\alpha : I \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümünün Y uzayındaki görüntüsüne eğri (yay, yol) denir.

Tanım 2.3.3. α, β iki eğri olsun Eğer α sürekli olarak β ya dönüştürülebiliyorsa α, β ya homotoptur denir.



Şekil 2.13. Homotop dönüşümler

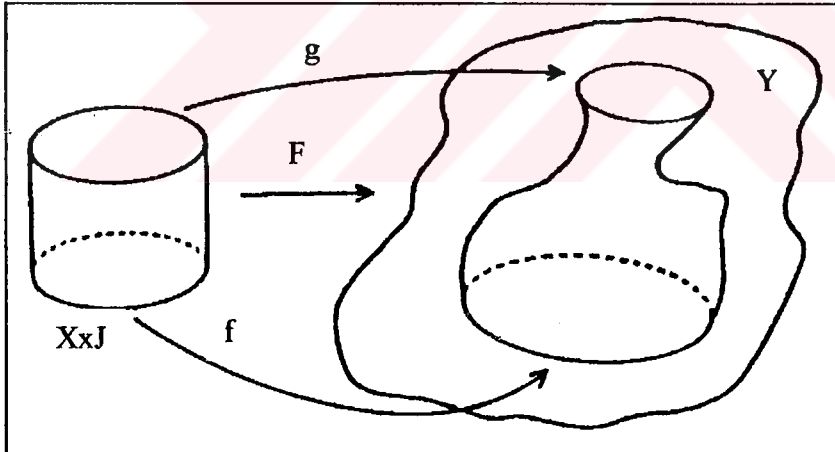
Sürekli deformasyon fikrinin matematiksel olarak ifadesi şöyledir: $t \in J = [0,1]$ aralığında değişen bir parametre ve t parametresine Y de karşılık gelen α_t

eğrilerinin ailesini düşünelim; öyleki $\alpha_0 = \alpha$ ve $\alpha_1 = \beta$ ve t, J yi taradığı zaman α_t sürekli olarak değişsin. Bir

$$F(x, t) = F: I \times J \longrightarrow Y \quad (2.5)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada F sürekli ve t 'nin her değerine karşılık bir α_t eğrisi karşılık gelir. Özel olarak $F(x, 0) = \alpha_0 = \alpha$ ve $F(x, 1) = \alpha_1 = \beta$ dir. F fonksiyonu α_t eğrileri yardımıyla α dan β ya sürekli bir deformasyon tanımlayacaktır. F fonksiyon bir tek değildir. $\alpha_0 = \alpha$ ve $\alpha_1 = \beta$ şartlarını sağlayan herhangi bir α_t eğri ailesi bulunabilir.

Bu düşünce esas tutularak, I herhangi bir topolojik uzay olarak alındığı takdirde homotopi kavramının en genel şekil verilebilir. Ancak burada, homotopi görüntüler arasında değil bu görüntüleri veren dönüşümler arasında sürekli bir deformasyondur.



Şekil 2.14. f ile g arasındaki homotopi

Tanım 2.3.4. X ve Y topolojik uzaylar ve $f, g: X \longrightarrow Y$ sürekli iki dönüşüm olsun. Eğer

$$F(x, t) = F: X \times J \longrightarrow Y \quad \forall x \in X \text{ için } F(x, 0) = f(x) \text{ ve } F(x, 1) = g(x) \quad (2.6)$$

olacak şekilde sürekli bir F dönüşümü varsa f, g ye homotoptur denir ve $f \sim g$ veya $f \stackrel{F}{\sim} g$ ile gösterilir. F ye f den g ye homotopi denir.

Teorem 2.3.1. “ \sim homotopi” bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İspat: (i) Yansıma özelliği: $F(x,t) : X \times J \longrightarrow Y$ dönüşümü, $F(x,t) = f(x)$ olsun Bu takdirde $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = f(x)$ ve $F(x,t)$ süreklidir, dolayısıyla $f \sim f$ dir.

(ii) Simetri özelliği : $f \sim g$ olsun . Bu durumda $\exists F(x,t) : X \times J \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü var öyleki; $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ dir. $G(x,t) = F(x,1-t)$ şeklinde tanımlayalım. Bu G dönüşümü sürekli ve $G(x,0) = F(x,1) = g(x)$, $G(x,1) = F(x,0) = f(x)$ olur. Dolayısıyla $g \sim f$ dir.

(iii) Geçişme özelliği: $f \sim g$ ve $g \sim h$ olsun. Bu durumda $f \sim g$ ise $\exists F(x,t) : X \times J \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü var öyleki; $F(x,0) = f(x)$ ve $F(x,1) = g(x)$ dir. $g \sim h$ ise $\exists G(x,t) : X \times J \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü var öyleki; $G(x,0) = f(x)$ ve $G(x,1) = g(x)$ dir.

Bir $H(x,t) : X \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü;

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlayalım. $H(x,t)$ süreklidir. Diğer taraftan $H(x,0) = F(x,0) = f(x)$ ve $H(x,1) = G(x,1) = g(x)$ dir. Dolayısıyla $f \sim h$ dir.

X topolojik uzayından Y topolojik uzayına bütün $f : X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümlerin cümlesi \sim bağıntısı altında eşdeğer sınıflara ayrılır. Bu eşdeğer sınıflara homotopi sınıfları denir ve bütün homotopi sınıflarının cümlesi $[X;Y]$ ile gösterilir. Şayet $f : X \longrightarrow Y$ ise f nin homotopi sınıfı $[f]$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.5. X ve Y iki topolojik uzay, $A \subset X$ herhangi bir alt cümle ve $f, g : X \longrightarrow Y$ de $\forall x_0 \in A$ için $f(x_0) = g(x_0)$ şartını sağlayan iki sürekli

dönüşüm olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir $F: X \times J \longrightarrow Y$ dönüşümü varsa f , A ya göre g ye homotoptur denir ve $f \sim g$ rel. A ile gösterilir. Bu durumda

$$(i) \quad \forall x \in X \text{ ise } F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$$

$$(ii) \quad \forall x_0 \in A \text{ ise } F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$$

olup bu homotopiye rölatif homotopi denir. $A = \emptyset$ ise sadece $f \sim g$ yazılır. Demek ki homotopi, rölatif homotopinin özel bir halidir.

Tanım 2.3.6. X ve Y topolojik uzaylar, $f, g: X \longrightarrow Y$ sürekli iki dönüşüm ve $f \sim g$ olsun. Eğer g nin görüntü uzayı $g(X)$ bir noktadan ibaret ise yani g sabit bir dönüşümü ise, bu takdirde f bir sabite homotoptur denir.

Tanım 2.3.7. X topolojik uzay ve $I_x: X \longrightarrow X$ özdeşlik dönüşümü olsun. I_x bir sabite homotop ise X uzayına büzülebilir veya bir noktaya deforme edilebilir denir.

Örnek 2.3.1. n -boyutlu Euclide uzayının $E^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ dolu birim küresi \mathbb{R}^n nin büzülebilir bir alt uzayıdır. Gerçekten

$$\begin{aligned} F(x, t) &: E^n \times J \longrightarrow E^n \\ F(x, t) &= (1-t) \cdot x = ((1-t)x_1, (1-t)x_2, \dots, (1-t)x_n) \end{aligned} \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanırsa F sürekli olup,

$$F(x, 0) = x = I_{E^n}(x), F(x, 1) = 0 = (0, 0, \dots, 0)$$

şartını sağlar. Dolayısıyla $I_{E^n}: E^n \longrightarrow E^n$ özdeşlik dönüşümü bütün $x \in E^n$ için $O(x) = 0$ sabit dönüşümüne homotoptur. Böylece E^n dolu birim küresi büzülebilirdir.

Teorem 2.3.2. Eğer Y büzülebilir bir uzay ise, her bir $f: X \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü bir sabite homotoptur.

İspat: Y büzülebilir bir topolojik uzay olsun .Bu durumda $\forall y \in Y$ için $g(y) = y_0$, $y_0 \in Y$ olan bir $g: X \longrightarrow Y$ sabit dönüşüm vardır ; öyleki $I_Y: Y \longrightarrow Y$ özdeşlik dönüşümü g ye homotoptur; yani $I_Y \sim g$ dir. Bu ise $\exists Y \times J \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü var öyleki; $\forall y \in Y$ için $F(y,0) = I_Y$, $F(y,1) = y_0 = g(y)$ dir.

Şimdi $f: X \longrightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm olsun ve $G: X \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü $G(x,t) = F(f(x), t)$, $x \in X$ şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde G süreklidir, üstelik

$$G(x,0) = F(f(x),0) = f(x) , \quad G(x,1) = F(f(x),1) = y_0 \quad (2.9)$$

dir. Sonuç olarak $h: X \longrightarrow Y$ dönüşümü $\forall x \in X$ için $h(x) = y_0$ olarak tanımlanırsa $f \sim h$ elde edilir. Bu ise istenilen şeydir.

2.3.2. Homotopi Eşdeğerliği

Tanım 2.3.8. X ve Y iki topolojik uzay ve $f: X \longrightarrow Y$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $ff' \sim I_Y$ ve $f'f \sim I_X$ olacak şekilde $f': Y \longrightarrow X$ sürekli dönüşümü varsa f dönüşümüne homotopi eşdeğerlilik denir.

X uzayından Y uzayına homotopi eşdeğerlilik bir f dönüşümünün varlığı halinde X ve Y uzayları homotopik eşdeğerdirler veya X ve Y aynı homotopi tipindedir denir ve $X \sim Y$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.3.3. Aynı homotopi tipinden olma bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır.[3]

İspat: Yansıma ve simetri aksiyomlarının sağlandıkları tanımdan görülmektedir. Geçişme aksiyomu $X \sim Y$, $Y \sim Z$ ise $X \sim Z$ dir. Gerçekten,

$X \sim Y$ ise $\exists f: X \longrightarrow Y$, $f': Y \longrightarrow X$ öyleki f ve f' $ff' \sim I_Y$ ve $f'f \sim I_X$ $Y \sim Z$ ise $\exists g: Y \longrightarrow Z$, $g': Z \longrightarrow Y$ öyleki g ve g' $gg' \sim I_Z$ ve $g'g \sim I_Y$.

Diğer taraftan $h = gf: X \longrightarrow Z$, $h' = f'g': Z \longrightarrow X$ dönüşümü süreklidir.

Üstelik $h'h: X \longrightarrow X$, $hh': Z \longrightarrow Z$ dir. Gösterelim ki; $h'h \sim I_X$, $hh' \sim I_Z$.

Gerçekten $hh' = (f'g')(gf) = f'(g'g)f$. Halbuki $g'g \sim I_Y$ idi. Dolayısıyla $f'(g'g) \sim f'I_Y = f'$ yani $f'(g'g) \sim f'$ dir. Buradan $f'(g'g)f \sim f'f$ olur. Yani $h'h \sim f'f$ elde edilir. Halbuki $f'f \sim I_X$ ve “ \sim ” eşdeğerlik bağıntısı olduğundan $h'h \sim I_X$ bulunur. Benzer şekilde $hh' \sim I_Z$ elde edilir. Dolayısıyla $X \sim Z$ dir.

Sonuç olarak homotopik eşdeğer bağıntısı ile topolojik uzayların sınıfını ayırık sınıflara ayırmak mümkündür. Aynı sınıfa ait iki topolojik uzay, aynı homotopi tipindedir. Bu sınıflar topolojik eşdeğer uzayların sınıfından daha geniştirler. Topolojik eşdeğerlik, homotopik eşdeğerlikten daha kuvvetlidir yani daha fazla şart yüklenmiştir. Bir homotopi invaryant yani homotopik eşdeğer uzayların taşıdığı bir özellik aynı zamanda bir topolojik invaryanttır. Ancak tersi her zaman doğru değildir, yani topolojik invaryant özellik, bir homotopi invaryant olmayabilir.

Teorem 2.3.4. X ve Y topolojik eşdeğer iki uzay olsun. bu takdirde X ve Y homotopik eşdeğerdir.

İspat: X ve Y topolojik eşdeğer olduklarından $f: X \longrightarrow Y$ f sürekli, 1-1, örten ve f nin tersi $f^{-1}: Y \longrightarrow X$ süreklidir. Dolayısıyla $ff^{-1} = I_Y$, $f^{-1}f = I_X$ dır. “ \sim ” bağıntısı eşdeğerlik bağıntısı olduğundan $ff^{-1} \sim I_Y$, $f^{-1}f \sim I_X$. Buradan $X \sim Y$ elde edilir.

2.3.3. Bir Topolojik Uzayda Eğriler

Tanım 2.3.9. $\alpha: I \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümünün $\alpha(0)$ ve $\alpha(1)$ noktalarına eğrinin sırası ile başlangıç ve bitim noktası denir.

Tanım 1.3.10. $\alpha^{-1}: I \longrightarrow Y$ $\alpha^{-1}(x) = \alpha(1-x)$ şeklinde tanımlanan eğriye, α eğrisinin tersi denir. Bu iki eğri, Y de aynı nokta cümlelerini belirtirler, ancak yönleri terstir. Açık olarak α nın bitim noktası α^{-1} in başlangıç noktası ile çakışır.

Tanım 2.3.11. $\alpha: I \longrightarrow Y$ ve $\beta: I \longrightarrow Y$ eğrileri verilmiş olsun. Eğer α nın bitim noktası ile β nın başlangıç noktası çakışıyorsa yani $\alpha(1) = \beta(0)$ ise bu takdirde $\gamma: I \longrightarrow Y$,

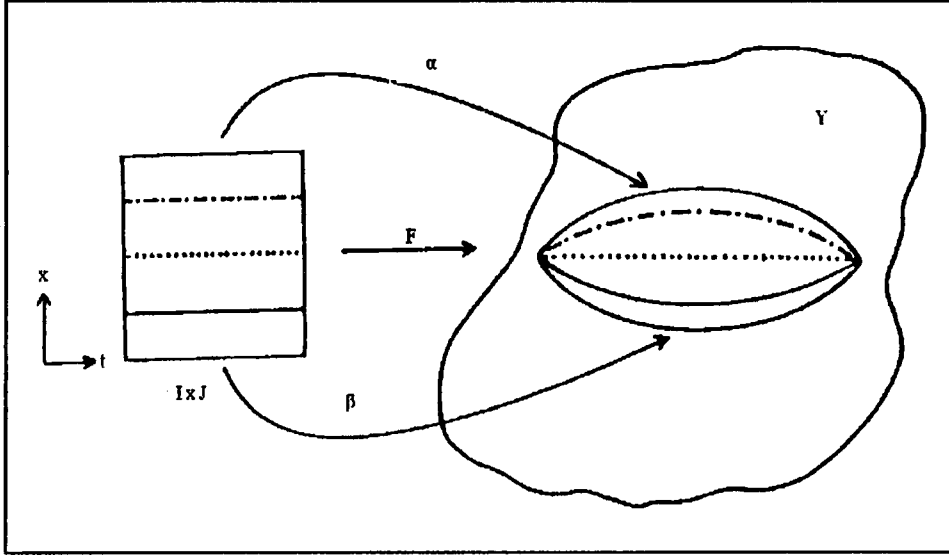
$$\gamma(x) = \begin{cases} \alpha(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x-1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanan γ dönüşümü süreklidir ve Y de bir eğri tanımlar. γ ya α ile β eğrilerinin çarpımı denir ve $\gamma = \alpha\beta$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.12. α sabit bir dönüşüm ise α eğrisine sıfır eğri denir.

Tanım 2.3.13. $\alpha: I \longrightarrow Y$, $\alpha(0) = \alpha(1) = y_0$ ise yani başlangıç ve bitim noktası çakışıyorsa α ya kapalı eğri veya y_0 noktasında ilmek denir.

Tanım 2.3.14. $\alpha: I \longrightarrow Y$ ve $\beta: I \longrightarrow Y$ başlangıç ve bitim noktaları aynı olan eğriler olsun. Eğer α ve β I 'nın $(0,1)$ alt cümlesine göre homotop ise bu iki eğriye homotop denir ve $\alpha \sim \beta$ şeklinde gösterilir. $\alpha \sim \beta$ den kasıt $\alpha \sim \beta$ rel.(0,1) dir.



Şekil 2.15. α ile β eğrileri arasındaki homotopi

Teorem 2.3.5. $\alpha, \beta, \gamma,$ ve δ Y de eğriler, $\alpha \sim \gamma, \beta \sim \delta$ ve $\alpha\beta$ tanımlı olsun.

Bu takdirde $\gamma\delta$ da tanımlı olup $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ rel.(0,1) dir. [4]

İspat: $\alpha\beta$ tanımlı olduğundan $\alpha(1) = \beta(0)$ dir. Diğer taraftan $\alpha \sim \gamma, \beta \sim \delta$ ise sırası ile $\alpha(1) = \gamma(1), \beta(0) = \delta(0)$ olur. Buradan $\gamma(1) = \delta(0)$ elde edilir. Yani $\gamma\delta$ tanımlıdır.

Şimdi $\alpha \sim \gamma$ ise $\exists F: I \times J \longrightarrow Y$ öyleki $F(x,t)$ sürekli ve $F(x,0) = \alpha(x), F(0,t) = \alpha(0) = \gamma(0), F(1,t) = \alpha(1) = \gamma(1)$.

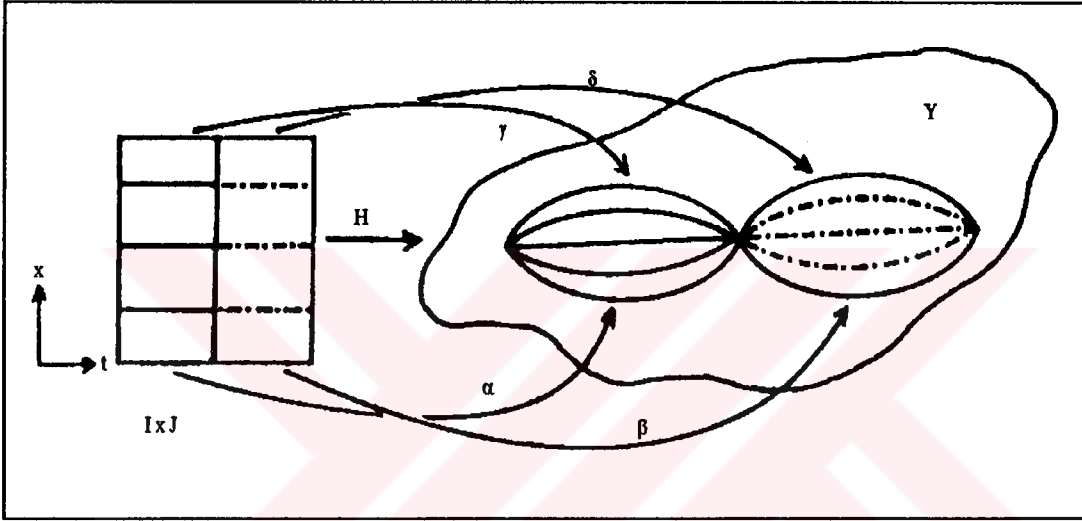
Aynı şekilde $\beta \sim \delta$ ise $\exists G: I \times J \longrightarrow Y$ öyleki $G(x,t)$ sürekli ve $G(x,0) = \beta(x), G(x,1) = \delta(x), G(0,t) = \beta(0) = \delta(0), G(1,t) = \beta(1) = \delta(1)$. Nihayet I aralığını ikiye parçalamak suretiyle $H: I \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü;

$$H(x,t) = \begin{cases} F(2x,t), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ G(2x-1,t), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlarsak $H, I \times J$ de sürekli ve

$$\begin{aligned}
H(x,0) &= \begin{cases} \alpha(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x-1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \\
H(x,1) &= \begin{cases} \gamma(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \delta(2x-1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

yani $H(x,0) = \alpha \beta$, $H(x,1) = \gamma \delta$ dir. Diğer taraftan $H(0,t) = \alpha(0) = \gamma(0)$, $H(1,t) = \beta(1) = \delta(1)$ dir. Buradan $\alpha \beta \sim \gamma \delta$ rel.(0,1) bulunur.



Şekil 2.6. $\alpha \beta$ ile $\gamma \delta$ arasındaki H homotopisi

Teorem 2.3.6. α ve β , $\alpha \sim \beta$ olacak şekildeki eğriler ise $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ dir.

İspat: $\alpha \sim \beta$ ise $\exists F: I \times J \longrightarrow Y$ öyleki $F(x,t)$ sürekli ve $F(x,0) = \alpha(x)$, $F(x,1) = \beta(x)$, $F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0)$ ve $F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$. Şimdi $G: I \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü $G(x,t) = F(1-x, t)$ olacak şekilde tanımlanırsa G sürekli dir. Diğer taraftan $G(x,0) = F(1-x,0) = \alpha(1-x) = \alpha^{-1}$, $G(x,1) = F(1-x,1) = \beta(1-x) = \beta^{-1}$, $G(0,t) = F(1,t) = \alpha(1) = \beta(1) = \alpha^{-1}(0) = \beta^{-1}(0)$, $G(1,t) = F(0,t) = \alpha(0) = \beta(0) = \alpha^{-1}(1) = \beta^{-1}(1)$. Buradan $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ bulunur.

Teorem 2.3.7. α bir eğri ve β , $\alpha\beta$ tanımlı olacak şekildeki sıfır eğri olsun. Bu takdirde $\alpha\beta \sim \alpha$ dir. Aynı şekilde γ , $\gamma\alpha$ tanımlı olacak şekilde bir sıfır eğrisi ise $\gamma\alpha \sim \alpha$ dir.

İspat: $\alpha\beta$ tanımlı ve β sıfır eğri olduğundan her $x \in I$ için $\alpha(1) = \beta(x)$ dir.

Şimdi $F: I \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü

$$F(x, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2x}{1+t}\right), & 0 \leq x \leq \frac{1+t}{2} \\ \alpha(1) = \beta(x), & \frac{1+t}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlayalım. F süreklidir ve üstelik

$$F(x, 0) = \begin{cases} \alpha(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1) = \beta(x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

$F(x, 0) = \alpha\beta$ dir.

$$F(x, 1) = \begin{cases} \alpha(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ \alpha(1), & x = 1 \end{cases} \quad (2.15)$$

$F(x, 1) = \alpha$. Diğer taraftan $F(0, t) = \alpha(0)$, $F(1, t) = \alpha(1)$. Buradan $\alpha\beta \sim \alpha$ elde edilir. Benzer şekilde $\gamma\alpha \sim \alpha$ olduğu da gösterilebilir. $\gamma\alpha$ tanımlı ve γ sıfır eğri olduğundan $x \in X$ için $\alpha(0) = \gamma(x)$ dir. Şimdi $G: I \times J \longrightarrow Y$ şeklinde bir G dönüşümünü;

$$G(x, t) = \begin{cases} \gamma(x) = \alpha(0), & 0 \leq x \leq \frac{1-t}{2} \\ \alpha\left(\frac{2x-1+t}{1+t}\right), & \frac{1-t}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.16)$$

şeklinde tanımlayalım. Üstelik G süreklidir ve

$$G(x, t) = \begin{cases} \gamma(x) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2x-1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

$G(x, 0) = \gamma\alpha$ ve

$$G(x, 1) = \begin{cases} \gamma(0), & x = 0 \\ \alpha(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.18)$$

$G(x,1) = \alpha$ dir. Diğer taraftan $G(0,t) = \alpha(0)$, $G(1,t) = \alpha(1)$ dir. Buradan $\gamma\alpha \sim \alpha$ elde edilir.

Teorem 2.3.8. α , β ve γ Y de $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ tanımlı olacak şekilde üç eğri olsun. Bu takdirde $(\alpha\beta)\gamma$ ve $\alpha(\beta\gamma)$ tanımlı olup $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ dir.

İspat: $F: I \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{4x}{1+t}\right), & 0 \leq x \leq \frac{1+t}{4} \\ \beta(4x-1-t), & \frac{1+t}{4} \leq x \leq \frac{2+t}{4} \\ \gamma\left(\frac{1-4-4x}{2-t}\right), & \frac{2+t}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlayalım. $F(x,t)$ sürekli olup

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(4x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{4} \\ \beta(4x-1), & \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(2x-1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.20)$$

ve

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \beta(4x-2), & \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4} \\ \gamma(4x-3), & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

olur. Buradan $F(x,0) = (\alpha\beta)\gamma$ ve $F(x,1) = \alpha(\beta\gamma)$ elde edilir. Üstelik $F(0,t) = \alpha(0) = F(0,0)$, $F(1,t) = \gamma(1) = F(1,1)$ dir. Böylece $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ elde edilir.

Teorem 2.3.9. α , Y de herhangi bir eğri ise $\alpha\alpha^{-1}$ ve $\alpha^{-1}\alpha$ sıfır eğriye homotoptur.

İspat: $F: I \times J \longrightarrow Y$ dönüşümü şu şekilde tanımlayalım:

$$F(x,t) = \begin{cases} \alpha(2x(1-t)), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2(1-x)(1-t)), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Bu takdirde F süreklidir ve

$$F(x,0) = \begin{cases} \alpha(2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha(0), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(0), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

Dolayısıyla $F(x,0) = \alpha\alpha^{-1}$, $F(x,1) = \alpha(0)$ dir. Diğer taraftan $F(0,t) = \alpha(0)$ $F(1,t) = \alpha(0)$ olur. Buradan $\alpha\alpha^{-1}$, görüntüsü $\alpha(0)$ olan sıfır eğrisine homotoptur.

Aynı şekilde gösterilebilir ki $\alpha^{-1}\alpha$ de görüntüsü $\alpha(1)$ olan sıfır eğriye homotoptur. $G: I \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü

$$G(x,t) = \begin{cases} \alpha(1-2x(1-t)), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha((2-2x)(1-t)+1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.24)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde G süreklidir ve

$$G(x,0) = \begin{cases} \alpha(1-2x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2x-1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad (2.25)$$

$$F(x,1) = \begin{cases} \alpha(1), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(1), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

dir. Dolayısıyla $G(x,0) = \alpha^{-1}\alpha$, $G(x,1) = \alpha(1)$ dir. Diğer taraftan $G(0,t) = \alpha(1)$, $G(1,t) = \alpha(1)$ olur. Böylece $\alpha^{-1}\alpha$, görüntüsü $\alpha(1)$ olan sıfır eğriye homotoptur.

Sonuç 2.3.1. α ve β , $\alpha\beta^{-1}$ olacak şekildeki eğriler olsun. $\alpha\beta^{-1}$ nin sıfır eğriye homotop olması için gerek ve yeter şart $\alpha \sim \beta$ olmasıdır.

2.3.4. Esas Gruplar

Y bir topolojik uzay ve $y_0 \in Y$ sabit bir nokta olsun. Y 'de y_0 noktasında başlayıp ve biten bütün kapalı eğrileri göz önüne alalım. y_0 noktasına eğriler için taban nokta, eğrilere de y_0 de eğri veya ilmek denir.

Tanım 2.3.15. α , y_0 noktasında bir eğri ise α ya homotop y_0 daki bütün eğrilerin sınıfı $[\alpha]$ ile gösterilir. $[\alpha]$ ve $[\beta]$ gibi iki sınıfın çarpımı, $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ ile gösterilir. Bu şekilde tanımlanan çarpım, Teorem 2.3.5 den dolayı temsilci elemana bağlı değildir. Gerçekten $\alpha \sim \gamma$ ve $\beta \sim \delta$ ise $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ olduğundan $[\gamma][\delta] = [\gamma\delta] = [\alpha\beta]$ dir. Böylece $[\alpha][\beta]$ çarpımı $[\alpha]$ ve $[\beta]$ tarafından birtek olarak tanımlandığından çarpım anlamlıdır.

y_0 noktasındaki bütün eğrilerin cümlesini homotopi bağıntısı ayrık homotopi sınıflarına ayırır. Yukarıda tanımlanan çarpım işlemi, homotopi sınıflarının cümlesinde bir grup yapısı tanımlar. Gerçekten Kesim 2.3.3 deki teoremler yardımıyla aşağıdaki grup aksiyomlarının sağlandığı görülür.

(i) y_0 da eğrilerin homotopi sınıflarının cümlesi çarpım işlemine göre kapalıdır.

$[\alpha][\beta]$, y_0 da eğrilerin $[\alpha\beta]$ homotopi sınıflarına eşittir.

(ii) $([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha\beta][\gamma] = [(\alpha\beta)\gamma]$,

$$[\alpha]([\beta][\gamma]) = [\alpha][\beta\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)] .$$

Halbuki Teorem 2.3.6 dan dolayı $(\alpha\beta)\gamma \sim \alpha(\beta\gamma)$ ise $[(\alpha\beta)\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)]$ dir. Buradan $([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha]([\beta][\gamma])$ elde edilir. Yani birleşme özelliği sağlanmaktadır.

(iii) y_0 da sıfır eğrilerin homotopi sınıfını $[1]$ ile gösterirsek Teorem 2.3.7 den dolayı $[\alpha][1] = [\alpha]$ olur. O halde $[1]$ birim elemandır.

(iv) Teorem 2.3.8 den dolayı $[\alpha][\alpha^{-1}] = [\alpha\alpha^{-1}] = [1]$. Yani her bir homotopi sınıfı bir inverse sahiptir.

y_0 noktasındaki eğrilerin bütün homotopi sınıflarının cümlesi tanımlanan çarpma işlemine göre gruptur. Bu gruba esas grup denir ve $\Pi_1(Y, y_0)$ ile gösterilir. Şimdi eğrisel bağlantılı bir uzayın herhangi iki noktasında esas grupların izomorf olduğunu göstereceğiz. Yani eğrisel bağlantılı uzaylar için esas grup taban noktasından bağımsızdır.

Teorem 2.3.10. Eğrisel irtibatlı bir topolojik uzay ve $y_0, y_1 \in Y$ herhangi iki nokta olsun. Bu takdirde, $\Pi_1(Y, y_0) \cong \Pi_1(Y, y_1)$. [5]

İspat: α, y_0 da bir eğri olsun. Y , eğrisel irtibatlı olduğundan, y_0 başlangıç ve y_1 bitim noktası olan bir γ eğrisi mevcuttur. Bu takdirde, $\beta = (\gamma^{-1}\alpha)\gamma$, y_1 de bir eğridir.

Diğer taraftan Teorem 2.3.5. den dolayı $\alpha_1 \sim \alpha_2 \Rightarrow \gamma^{-1}\alpha_1 \sim \gamma^{-1}\alpha_2 \Rightarrow (\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma \sim (\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma$. Yani, α_1, α_2 y_0 da iki eğri ve $\beta_1 = (\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma$, $\beta_2 = (\gamma^{-1}\alpha_2)\gamma$. y_1 de karşılık gelen eğriler ise, $\alpha_1 \sim \alpha_2$ ise $\beta_1 \sim \beta_2$. Diğer taraftan β y_1 de herhangi bir eğri ise $\alpha = (\gamma\beta)\gamma^{-1}$, y_0 da bir eğridir ve Teorem 2.3.8. ve Teorem 2.3.9 'den dolayı

$$(\gamma^{-1}\alpha)\gamma = \gamma^{-1}((\gamma\beta)\gamma^{-1})\gamma \sim \beta . \quad (2.27)$$

Karşıt olarak β_1, β_2 y_1 de iki eğri ve $\alpha_1 = (\gamma\beta_1)\gamma^{-1}$, $\alpha_2 = (\gamma\beta_2)\gamma^{-1}$, y_0 da eğriler olsun. $\beta_1 \sim \beta_2 \Rightarrow$ Teorem 2.3.5., Teorem 2.3.8 ten dolayı $\alpha_1 \sim \alpha_2$. Görülüyor ki; $\Pi_1(Y, y_0)$ in her bir $[\alpha]$ homotopi sınıfı $\Pi_1(Y, y_1)$ de bir tek olarak bir $[\beta]$ homotopi sınıfını belirtiyor ve karşıt olarak bir $\Pi_1(y_0)$ de her bir $[\beta]$ homotopi sınıfı $\Pi_1(Y, y_0)$ da bir tek olarak bir $[\alpha]$ homotopi sınıfını belirtiyor. Şu halde $\Phi([\alpha]) = [\beta] = [(\gamma^{-1}\alpha)\gamma]$ şeklinde tanımlanan

$\Phi : \Pi_1(Y, y_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_1)$ dönüşümü bire-bir ve üzerinedir. Üstelik Teorem 2.3.5., 1.3.8, 1.3.9 den dolayı $((\gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2)\gamma) = (\gamma^{-1}(\alpha_1\alpha_2)\gamma)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\Phi([\alpha_1]) \Phi([\alpha_2]) &= [\beta_1][\beta_2] = [\beta_1\beta_2] \\ &= [((\gamma^{-1}\alpha_1)\gamma)(\gamma^{-1}\alpha_2)] \\ &= [(\gamma^{-1}(\alpha_1\alpha_2))\gamma]\end{aligned}$$

$\Phi([\alpha_1]) \Phi([\alpha_2]) = \Phi([\alpha_1\alpha_2])$. Dolayısıyla, $\Pi_1(Y, y_0) \cong \Pi_1(Y, y_1)$.

Tanım 2.3.16. Y bir topolojik uzay ve $y_0 \in Y$ olsun. (Y, y_0) çiftine noktalı topolojik uzay adı verilir.

Notasyon: Y de tabanı y_0 olan bütün kapalı eğrilerin cümlesini $L(Y, y_0)$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.3.11. (X, x_0) ve (Y, y_0) uzaylarının çarpımının esas grubu, esas gruplarının direkt çarpımına izomorftur. Yani

$$\Pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0) \cong \Pi_1(X, x_0) \otimes \Pi_1(Y, y_0) \quad (2.27)$$

dir.[3]

İspat: p_x ve p_y , $X \times Y$ nin sırasıyla X ve Y üzerine dönüşümleri olsun. Yani herhangi bir $f \in L(X \times Y, x_0 \times y_0)$ için $p_x \circ f \in L(X, x_0)$ ve $p_y \circ f \in L(Y, y_0)$ olsun. $\Pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ den $\Pi_1(X, x_0) \otimes \Pi_1(Y, y_0)$ içine T fonksiyonunu $T([f]) = ([p_x \circ f], [p_y \circ f])$ olarak tanımlayalım. Gösterelim ki; T bir izomorfizmdir.

(i) T tek türlü tanımlanmıştır. Yani $[f]$ nin temsilcisine bağlı değildir. Kabul edelim ki $f_0 \sim f$ olsun. Bu durumda $F: I \times J \rightarrow X \times Y$ homotopisi var öyleki $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f(x)$ ve $F(0, t) = x_0 \times y_0 = F(1, t)$ dir.

$p_x \circ f : I \times J \rightarrow X$ fonksiyonunu düşünelim. Bu takdirde aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} p_x \circ F(x,0) &= p_x \circ f_0(x), \quad p_x \circ F(x,1) = p_x \circ f_1(x) \text{ ve} \\ p_x \circ F(0,t) &= p_x \circ F(1,t) = p_x(x_0 \times y_0) = x_0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Buradan $p_x \circ f_0(x) \sim p_x \circ f_1(x)$ olduğu çıkar. Yani $[p_x \circ f]$ bir tek eleman olarak belirtilmiştir. Benzer şekilde $[p_y \circ f]$ de bir tek olarak belirtildiği kolayca gösterilebilir.

(ii) T örtendir. Gerçekten $([g_1], [g_2]) \in \Pi_1(X, x_0) \otimes \Pi_1(Y, y_0)$ iken $f \in L(X \times Y, x_0 \times y_0)$ elemanını

$$f(x) = \begin{cases} (g_1(2x), y_0), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (x_0, g_2(2x-1)), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlayalım. $f(\frac{1}{2}) = (x_0, y_0)$, $[0, \frac{1}{2}]$ ve $[\frac{1}{2}, 1]$ üzerinde sürekli olduğundan $f(x)$ süreklidir. Tanımdan dolayı $p_x \circ f = g_1$ yani $p_x \circ f \sim g_1$ ve $p_y \circ f \sim g_2$ dir. Diğer taraftan, $f(0) = (g_1(0), y_0) = (x_0, y_0) = f(1)$ olduğundan $f \in L(X \times Y, x_0 \times y_0)$ dir. O zaman $T([f]) = ([g_1], [g_2])$ olur. O halde T örtendir.

(iii) T bire-birdir. Kabul edelim ki; $T([f_0]) = T([f_1])$ olsun. Tanımından dolayı $([p_x \circ f_0], [p_y \circ f_0]) = ([p_x \circ f_1], [p_y \circ f_1])$ yazılabilir. Bu demektir ki $p_x \circ f_0$ ile $p_x \circ f_1$ arasında F_1 ve $p_y \circ f_0$ ile $p_y \circ f_1$ arasında F_2 homotopileri vardır. Bu homotopiler yardımıyla $F: I \times J \longrightarrow X \times Y$ homotopisini, $F(x,t) = (F_1(x,t), F_2(x,t))$ olarak tanımlayalım. F , X ve Y 'nin herbirinde sürekli olduğundan $X \times Y$ de süreklidir. Üstelik

$$F(x,0) = (p_x \circ f_0, p_y \circ f_0) = f_0(x), \quad F(x,1) = (p_x \circ f_1, p_y \circ f_1) = f_1(x) \text{ ve}$$

$$F(0,t) = (F_1(0,t), F_2(0,t)) = (x_0, y_0), \quad F(1,t) = (F_1(1,t), F_2(1,t)) = (x_0, y_0)$$

O halde F , $f_0(x)$ ile $f_1(x)$ arasında bir homotopidir. Buradan $[f_0] = [f_1]$ elde edilir.

(iv) T bir homomorfizmdir. $[f], [g] \in \Pi_1(X \times Y, x_0 \times y_0)$ ise

$$\begin{aligned} T([f],[g]) &= T([f.g]) = ([p_x o(f.g)], [p_y o(f.g)]) \\ &= ([p_x o f p_x o g], [p_y o f p_y o g]) \\ &= ([p_x o f] [p_x o g], [p_y o f] [p_y o g]) \\ &= ([p_x o f], [p_y o f]) ([p_x o g], [p_y o g]) \\ &= T([f]) T([g]). \end{aligned}$$

Örnek 2.3.2. $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ birim çemberinin esas grubu Z tam sayılar grubuna izomorftur. Gerçekten P , S^1 üzerinde herhangi bir nokta olsun. P de bir eğri, ya bir sıfır eğridir veya çemberi bir veya birden fazla devreden eğrilerdir. α , P 'de bir eğri olsun. Kabul edelim ki; α çemberi r defa devretsin. β , P de diğer bir eğri olup çemberi s defa devretsin. Bu takdirde eğer $r > s$ ise α, β ya homotop değildir. Çünkü $\alpha\beta^{-1}$, P de bir eğri olup çemberi $r-s$ defa devreder. Böyle bir eğri ise sıfır eğriye homotop olamaz. Demek ki; P de eğrilerin homotopi sınıfları tam sayılar grubuna bire-bir karşı gelmektedir. Bu karşı gelme bir izomorfizmdir.

$f : Z \longrightarrow \Pi_1(S^1, P)$ fonksiyonu $\forall n \in Z$ için γ P de çemberi bir defa devreden pozitif olarak yönlendirilmiş bir eğri olmak üzere,

$$f(n) = \begin{cases} \gamma^n = (\underbrace{\gamma \cdot \gamma \cdot \dots \cdot \gamma}_n) & n > 0 \\ \gamma^0 = P(\text{Sıfır eğri}) & n = 0 \\ \gamma^{-n} = (\underbrace{\gamma^{-1} \cdot \gamma^{-1} \cdot \dots \cdot \gamma^{-1}}_n) & n < 0 \end{cases} \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlarsak bu fonksiyon $\Pi_1(S^1, P)$ ile $(Z, +)$ tamsayılar grubu arasında bir izomorfizmdir.

(i) f bire-birdir. $n, m \in \mathbb{Z}$ için n, γ^n ve m, γ^m ye karşılık gelsin Bu takdirde eğer $\gamma^n \sim \gamma^m$ ise $n = m$ dir.

(ii) f örtendir. $\Pi_1(S^1, P)$ deki her homotopi sınıfı için öyle bir $m \in \mathbb{Z}$ bulunabilir ki; $f(m)$ bu sınıfa eşittir. Buradan P deki her eğri bir homotopi sınıfıdır.

(iii) Toplama işlemi korunur. $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ için $f(n+m) = \gamma^{n+m} = \gamma^n \cdot \gamma^m$. dolayısıyla f bir izomorfizmdir.

Örnek 2.3.3. $T^2 = S^1 \times S^1$ toru bir esas gruba sahiptir ve

$$\Pi_1(T^2) \cong \Pi_1(S^1) \otimes \Pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \quad (2.32)$$

dir bu esas grup $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ grubuna izomorftur. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nin üreteçleri $(1,0)$ ve $(0,1)$ dir $S^1 \times S^1$ de bunlara α ve β eğrileri karşılık gelir. S^1 in esas grubu taban noktasına bağlı olmadığından $S^1 \times S^1$ de taban noktasına bağlı değildir.[5]

Örnek 2.3.4. $X = S^1 \times \mathbb{R}$ bir silindir olsun. $\Pi_1(\mathbb{R}) = \{e\}$ olduğundan

$$\Pi_1(X) \cong \mathbb{Z} \times \{e\} \cong \mathbb{Z} \quad (2.33)$$

2.3.5. Yüksek Homotopi Grupları

Bundan önceki Kısım 2.3.1, 2.3.2 ve 2.3.3 'de I kapalı aralığının bir Y topolojik uzayına sürekli dönüşümlerini ele alarak Y nin bir sabit y_0 noktasında eğrilerin homotopi sınıflarını oluşturduk. Bunların bir grup yapısına sahip olduğunu gösterdik. Burada I yerine, \mathbb{R}^n nin bir alt cümlesi olan n -boyutlu I^n küpünü göz önüne alırsak esas grup kavramı n -boyuta genelleştirilebilir. Ancak bu genelleştirmede, yani $n > 1$ halinde esas grup yerine homotopi grubu tanımı kullanılmaktadır.

$I^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ n-küpünün sınırı,

$\partial I^n = \left\{ x \in I^n : \prod_{i=1}^n x_i(1-x_i) = 0 \right\}$ ile gösterilen x_1, x_2, \dots, x_n koordinatlarından

bir tanesine sıfır veya bir değeri vermekle elde edilen I^n nin alt cümlelerinin birleşimidir.

Tanım 2.3.17. Y bir topolojik uzay, $y_0 \in Y$ sabit bir nokta ve $\alpha, \beta : I^n \longrightarrow Y$ $\alpha(I^n) = \beta(I^n) = y_0$ olacak şekildeki sürekli dönüşümler olsun. Eğer aşağıdaki şartları sağlayan $F(x, t) : I^n \times J \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümü varsa $\alpha, \partial I^n$ 'e göre β ya homotopur denir ve $\alpha \sim \beta$ rel. ∂I^n ile gösterilir.

(i) $F(x, 0) = \alpha, F(x, 1) = \beta$;

(ii) $F(I^n \times J) = y_0$

Tekrar hatırlatalım ki ; $n = 1$ ise α, β y_0 da eğrilerdir.

Tanım 2.3.18. Y bir topolojik uzay, $y_0 \in Y$ sabit bir nokta ve $\alpha, \beta : I^n \longrightarrow Y$ $\alpha(I^n) = \beta(I^n) = y_0$ olacak şekildeki sürekli dönüşümler olsun. $\gamma : I^n \longrightarrow Y$ şeklindeki dönüşümü;

$$\gamma = \begin{cases} \alpha(2x_1, x_2, \dots, x_n), & 0 \leq x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_n), & \frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \end{cases} \quad (2.33)$$

şeklinde tanımlayalım. γ dönüşümü süreklidir ve $\gamma(I^n) = y_0$ dir. $n = 1$ ise γ, α ve β eğrilerinin çarpımıdır. $n > 1$ ise γ dönüşümüne α ile β dönüşümlerinin çarpımı denir ve $\gamma = \alpha\beta$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.11. Y bir topolojik uzay, $y_0 \in Y$ sabit bir nokta ve $\alpha, \beta, \gamma, \delta : I^n \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümler ve $\alpha(I^n) = \beta(I^n) = \gamma(I^n) = \delta(I^n) = y_0$ olsun. Eğer $\alpha \sim \gamma$ rel. ∂I^n , ve $\beta \sim \delta$ rel. ∂I^n ise $\alpha\beta \sim \gamma\delta$ rel. ∂I^n dir. [4]

İspat : İspat, Teorem 2.3.6. ispatının bezeri şekilde yapılabilir.

Teorem 2.3.12. “ \sim rel. ∂I^n ” bağıntısı bir eşdeğerlik bağıntısıdır. [5]

İspat: $\alpha : I^n \longrightarrow Y$ $\alpha(I^n) = y_0 \in Y$ şeklindeki sürekli bir dönüşüm olsun.

(i) $\alpha \sim \alpha$ rel. ∂I^n . Çünkü $F(x,t): I^n \times J \longrightarrow Y$ dönüşümü $\forall t \in J$ için $F(x,t) = \alpha(x)$ şeklinde tanımlanırsa $F(x,0) = \alpha(x)$, $F(x,1) = \alpha(x)$ ve $\alpha(I^n) = y_0$ dır. O halde $\alpha \sim \alpha$ rel. ∂I^n dir.

(ii) $\alpha \sim \beta$ rel. ∂I^n ise $\exists F(x,t): I^n \times J \longrightarrow Y$ sürekli ve $F(x,0) = \alpha$, $F(x,1) = \beta$ $F(I^n \times J) = y_0 \in Y$.

Şimdi $G(x,t): I^n \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü $G(x,t) = F(x,1-t)$ şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde g sürekli ve $G(x,0) = F(x,1) = \beta$, $G(x,1) = F(x,0) = \alpha$. Ayrıca $G(I^n \times J) = y_0$. O halde $\beta \sim \alpha$ rel. ∂I^n dir.

(iii) $\alpha \sim \beta$ rel. ∂I^n , $\beta \sim \gamma$ rel. ∂I^n ise $\alpha \sim \gamma$ rel. ∂I^n dır.

$\alpha \sim \beta$ rel. ∂I^n ise $\exists F(x,t): I^n \times J \longrightarrow Y$ sürekli ve $F(x,0) = \alpha$, $F(x,1) = \beta$ $F(I^n \times J) = y_0 \in Y$ ve

$\beta \sim \gamma$ rel. ∂I^n ise $\exists G(x,t): I^n \times J \longrightarrow Y$ sürekli ve $G(x,0) = \beta$, $G(x,1) = \gamma$ $G(I^n \times J) = y_0 \in Y$ dır. Şimdi $H(x,t): I^n \times J \longrightarrow Y$ dönüşümünü,

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

şeklinde tanımlayalım. $H(x,t)$ sürekli ve $H(x,0) = F(x,0) = \alpha$, $H(x,1) = G(x,1) = \gamma$ ve $H(I^n \times J) = y_0$ dir. Dolayısıyla $\alpha \sim \gamma$ rel. ∂I^n olur.

Şimdi, $\alpha(I^n) = y_0$ şartını sağlayan bütün $\alpha : I^n \longrightarrow Y$ sürekli dönüşümlerin cümlesini göz önüne alalım. “ \sim rel. ∂I^n ” homotopi bağıntısı bir eşdeğerlik

bağıntısı olup α dönüşümlerini ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayırır. Bu sınıflara homotopi rel. ∂I^n denir.

Teorem 2.3.18. göz önünde tutulursa, homotopi sınıflarının cümlesinde çarpma işlemi tanımlanabilir. Bu operasyona göre homotopi sınıflarının cümlesi bir grup yapısına sahiptir. Bu grup $\Pi_n(Y, y_0)$ ile gösterilir ve bu gruba y_0 da Y nin n -boyutlu homotopi grubu denir. $n=1$ için $\Pi_1(Y, y_0)$ homotopi grubuna esas grup denir.

Çizelge 2.2. Bilinen bazı homotopi grupları

	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	Π_6
SO(3)	Z_2	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{12}
SO(4)	Z_2	0	$Z + Z$	$Z_2 + Z_2$	$Z_2 + Z_2$	$Z_{12} + Z_{12}$
SO(5)	Z_2	0	Z	Z_2	Z_2	0
SO(6)	Z_2	0	Z	0	Z	0
SO(n) $n > 6$	Z_2	0	Z	0	0	0
U(1)	Z_2	0	0	0	0	0
SU(2)	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{12}
SU(3)	0	0	Z	0	Z	Z_6
SU(n) $n > 3$	0	0	Z	0	Z	0
S^2	0	Z	Z	Z_2	Z_2	Z_{12}
S^3	0	0	Z	Z_2	Z_2	Z_{12}
S^4	0	0	0	Z	Z_2	Z_2

3. KUSURLARIN TOPOLOJİK SINIFLANDIRILMASI

3.1. Volterra Dislokasyonları

3.1.1. Doğal Hal ve İç Gerilmeler (Stress)

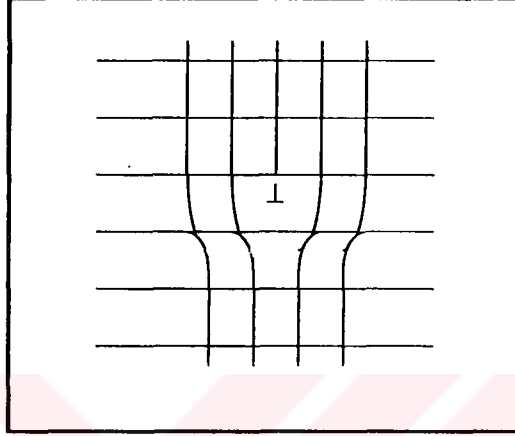
Volterra süreci, başlangıç konumu mükemmel ortamda olacak şekilde tanımlanan bir L çizgi tekiliği, kapalı bir ilmek veya sonsuz bir eğri etrafında düzen parametre alanı oluşturulması için pratik bir yöntem sağlar. Mükemmel ortamdan kasıt gerilmenin olmadığı bir malzeme bölgesidir. Söz konusu süreç iki aşamadan oluşur. İlk olarak, mükemmel ortam L çizgisi ile sınırlı bir Σ yüzeyi (kesme yüzeyi) boyunca kesilir. Daha sonra, Σ 'nın iki kenarı Σ_1 ve Σ_2 ,

$$\vec{d}_{\Sigma}(\vec{M}) = \vec{b} + \vec{\Omega} \cdot \vec{OM} \quad \vec{M} \in \Sigma \quad (3.1)$$

katı yer değiştirmesi ile birbirlerine göre yer değiştirilir; bu yer değiştirme, bir \vec{b} ötelemesi ile O dan geçen bir doğrultu boyunca $\vec{\Omega}$ dönmesinin toplamıdır. L boyunca yer değiştirme alanının tekiliğinden kurtulmak için, ortamdan L 'yi çevreleyen toroidal bir malzeme bölgesi çıkarılır. Katı yer değiştirme ile oluşan boşluk tamamen Σ_1 ve Σ_2 ile sınırlı gerilmesiz bir hacmi ile doldurulur, çift kaplama durumunda, belirli miktarda gerilmesiz madde atılır. Σ_1 ile Σ_2 arasındaki kimyasal bağlar tekrar oluşturulur ve malzeme tekrar elastik hale getirilir. Somigliona tarafından ortaya atılan bir teoriye göre, lineer elastiklik (esneklik) geçerli olduğu sürece Σ_1 ile Σ_2 arasındaki gerilmelerde hiçbir süreksizlik yoktur ve "doğal hal" adını alan sonuç hal, Σ 'nin seçimine değil sadece L 'nin konumuna bağlıdır. Doğal halde ortam iç gerilmeler içerir, ancak sınırda hiçbir kuvvet etkimez.

$\vec{d}_{\Sigma}(\vec{M})$ sabit bir \vec{b} ötelemesi olduğunda (\vec{b} Burgers vektörüdür) kusur "dislokasyon" olarak adlandırılır. Şayet \vec{b} vektörü çizgi kusuruna dik ise bu

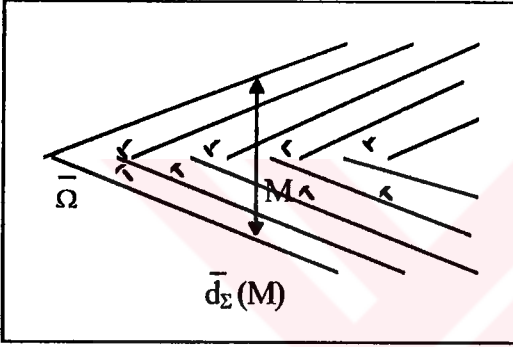
durumda çizgi kusuru düzlemsel bir ilmek veya sonsuz bir doğru olup, "kenar" dislokasyonundan söz edilir. "vida" dislokasyonları ise çizgiye paralel \vec{b} ile oluşan doğrusal çizgilerdir. Genel bir eğri-çizgisel (curveliear) dislokasyon, çizgi boyunca değişen karmaşık bir karaktere sahiptir.



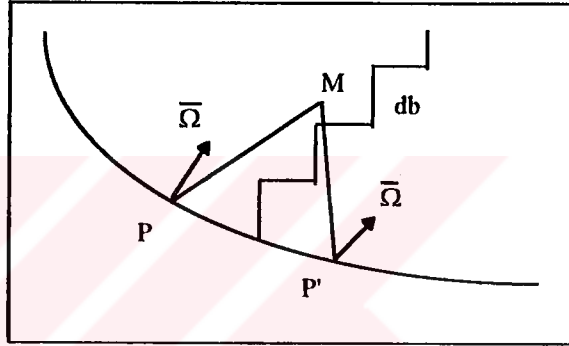
Şekil 3.1. L Dislokasyonu

Bir katıdaki elastik alana ait en genel tekillik, katı yer değiştirmeleri \vec{b} ötelemeleri ile sınırlı dislokasyon alanlarının üst üste gelmesi şeklinde tanımlanabilir. Bir Σ yüzeyi üzerindeki Volterra işleminde ortaya çıkan herhangi bir $\vec{d}_\Sigma(\vec{M})$ yer değiştirme alanının, sonsuz küçük $\delta\vec{b}$ Burgers vektörlerine sahip, kesme yüzeyleri Σ 'nın bir kısmını kapsayan ve \vec{M} 'deki toplamları $\Sigma\delta\vec{b} = \vec{d}_\Sigma(\vec{M})$ olan temel Volterra süreçlerinin bir toplamı şeklinde ayrıştırılabileceği açıktır. Bilby, Kondo ve Kröner dislokasyon yoğunluklarını süreklilik teorisi ile tanımlamışlardır. "Kama disklinasyonu" (wedge disclination, hiçbir global \vec{b} ötelemesi içermeyen, çizgi boyunca $\vec{\Omega}$ dönme vektörü ile oluşan bir dislokasyon), bir dizi paralel kenar dislokasyonun toplamıdır (şekil 3.2). Daha karmaşık olan "ikizlenme (twist) disklinasyonu" (global \vec{b} ötelemesi içermeyen, çizgiye dik $\vec{\Omega}$ dönmesi içeren dislokasyon) ise disklinasyona bitişik sonsuz küçük $\delta\vec{b} = \vec{\Omega} \wedge \delta\vec{s}$ öteleme vektörlerinin dislokasyon çizgi yoğunluğunun sona ermesi şeklinde

düşünülebilir. Karmaşık yapıdaki (kama-ikizlenme) bir disklinasyonun gösterimi şu şekilde açıklanabilir (Şekil 3.3): \vec{P} ve $\vec{P}' = \vec{P} + d\vec{s}$, disklinasyon çizgisi üzerindeki birbirine yeterince yakın iki nokta olsun. \vec{P} 'den görülen \vec{M} deki yer değiştirme $\vec{d}_p = \vec{\Omega} \wedge \overline{PM}$ dir. Aynı yer değiştirme \vec{P}' den $\vec{d}_{p'} = \vec{\Omega} \wedge \overline{P'M}$ şeklinde görülür. Fark ise tüm Σ üzerinde aynı değere sahiptir. Bu durum, $d\vec{b} = \vec{d}_p - \vec{d}_{p'} = \vec{\Omega} \wedge d\vec{s}$ öteleme vektörüne sahip, \vec{P} ve \vec{P}' arasındaki çizgiye bitişik bir dislokasyondan da anlaşılabilir.



Şekil 3.2. Köşe tipi disklinasyon



Şekil 3.3. İkizlenme tipi disklinasyon

Elbette yukarıdaki analiz sadece \vec{b} ve $\vec{\Omega}$, lineer elastikliğe izin verecek şekilde yeterince küçük ise geçerlidir. Ancak bu analizin bu analizin yine de sadece öteleme taşıyan kusurlar ile dönme taşıyan kusurlar arasındaki ilişkinin anlaşılmasında belirli bir katkısı olacaktır. Bu ilişkinin karmaşıklığı, en iyi şekilde topolojik teoremin en genel haliyle anlaşılacaktır. [7]

3.1.2. Kristallerdeki Öteleme Dislokasyonlarının Topolojik Özellikleri

Katı kristaller, dislokasyonların varlığına olabildiğince basit birer örnek oluştururlar. Kristaller öteleme bakımından invaryant olduklarından, ötelemeler için Volterra süreci, \vec{b} 'nin

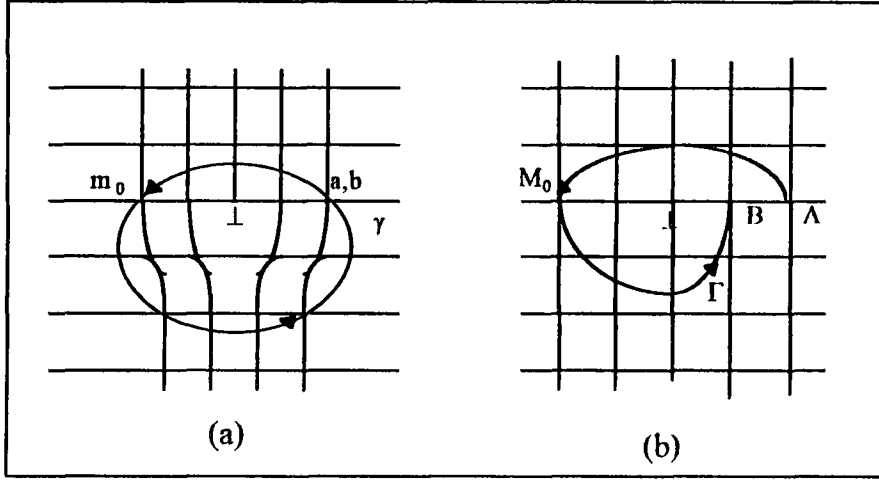
$$\vec{b} = \sum_{i=1}^3 n_i \vec{a}_i \quad n_i \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

şeklinde bir öteleme simetri vektörü olması durumunda, çok basit bir fiziksel anlam kazanırlar ve bu durumda uçlarında kimyasal bağların uygun şekilde gerçekleştiği kesme yüzeyi görünmez. Burada \vec{a} bir örgü parametresidir. Kristallerdeki dislokasyonlar ellili yılların başlarından beri gözlenmektedir ve ince (yaklaşık 500° luk) kristal filmlerin elektron mikroskopundaki görüntüleri, dislokasyon tarafından taşınan \vec{b} Burgers vektörlerinin ölçülmesine imkan sağlamıştır. Dislokasyonlar, kristallerin plastik deformasyon özelliklerinin anlaşılmasında önemli bir role sahiptir.

Burgers vektörleri Volterra süreci çerçevesinde aşağıdaki şekilde ölçülür. Şekil 3.4.(a) da görüldüğü gibi, bir L dislokasyonunu çevreleyen kapalı bir γ ilmeğini göz önüne alalım. Bu ilmek bir "iyi kristal" içerisinde bulunsun; yani çekirdekten yeterince uzakta düzen parametresi (burada deformasyon), γ boyunca herhangi bir m_0 noktasında ölçülebilsin. Bu durumda,

$$f : X_{\text{def}} \longrightarrow X ; \quad \gamma \xrightarrow{f} \Gamma \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlanan bir f dönüşümü mevcut olup bu dönüşüm, deforme olmuş, X_{def} kristaline ait γ 'yı, X deki Γ ya taşıyacak ve Γ daki M_0 taban noktası, γ üzerindeki bir m_0 noktasının görüntüsü olacaktır (Şekil 3.4.b). Burada sadece \vec{b} periyotları ile ilgileneceğimizden, mükemmel kristal daima Bravais örgüsü ile sembolize edilebilir. Şekil 3.4.b den açıkça görüldüğü gibi Γ açık bir eğri olup, $\overline{BA} = \vec{b}$ kapanma aralığı dislokasyonun Burgers vektörünü verir. İşlemin sonucu, L 'yi çevreleyen γ nın seçimine bağlı değildir. Bu nedenle dislokasyonlar, üç boyutlu bir kristal için $Z^3 = Z \times Z \times Z$ şeklinde bir abelyen grup tarafından oluşturulan \vec{b} örgü vektörleri yardımıyla sınıflandırılır.



Şekil 3.4. (a) L dislokasyonunu çevreleyen kapalı γ ilmeği
(b) $f(\gamma) = \Gamma$ açık eğrisi

Bir dislokasyonun invaryantının bulunması için topolojik yöntem farklı biçimde kullanılır. Bu durumda $\mu \in V$ ve V düzen parametre manifoldu veya uzayı olmak üzere $\phi : m \longrightarrow \mu$ dönüşümünden yararlanır. Üç-boyutlu kristal durumlarında, ilgili manifold $V = T^2$ 3-tor'dur ve T^2 genişletilmiş bir Brillouin bölgesi olan Bravais örgüsünün indirgenmiş Brillouin bölgesidir. $\phi : m \longrightarrow \mu$ dönüşümü, birincisi $m \in X_{\text{def}}$ 'i $M \in X$ üzerine taşıyan bir $f : m \longrightarrow M$ uzaysal dönüşüm ve ikincisi M 'yi belirlenmiş periyodik sınırlara sahip birinci Brillouin bölgesindeki μ 'ye getiren dönüşüm olmak üzere iki dönüşümün çarpımı şeklinde göz önüne alınabilir. Buna göre ;

$$\phi : X_{\text{def}} \longrightarrow V, \quad \gamma \xrightarrow{\phi} \Gamma_V \quad (3.4)$$

işlemi X_{def} den V ye bir uzaysal dönüşüm olup, γ 'yı V nin kapalı bir Γ_V ilmeği üzerine taşımaktadır (kapalılık özelliği, düzen parametresinin aynı değerini temsil eden V üzerindeki μ noktalarının belirlenmiş olmasından kaynaklanır). En önemli nokta, aynı L dislokasyon çizgisini çevreleyen ve γ nın düzgün bir deformasyon ile elde edilmiş herhangi bir değer V ' Burgers ilmeğinin de Γ_V den V de düzgün bir $\tilde{\delta}(\mu)$ yer değiştirmesi ile elde

edilebilecek bir Γ_V' ilmeği vermesidir. Γ_V ve Γ_V' nin ikisi de T^3 üzerinde aynı homotopi sınıfına ait ilmeklerdir. Bu durumda, üç-boyutlu bir kristaldeki dislokasyon çizgi kusurlarının, T^3 üzerindeki ilmeklerin homotopi sınıflarının denkliği cinsinden sınıflandırılabilceği sonucunu çıkarabiliriz. Bu denk homotopi sınıflarının, torun $\Pi_1(T^3)$ esas grubu veya birinci homotopi grubunu oluşturur. Bu grup $Z \times Z \times Z$ 'e izomorftür.

$$\Pi_1(T^3) \approx Z \times Z \times Z \quad (3.5)$$

Topolojik sınıflandırma, yani iyi kristalden düzen parametre uzayına dönüşüm ile elde edilen sınıflandırma, süper akışkanların da dahil olduğu her tip düzenli ortama genelleştirilebilir. Volterra sınıflandırmasında, ortamın simetri grubunun (sıvı kristaller ve süper akışkanlarda olduğu gibi) sürekli alt cümleler içermesi durumunda problemlerle karşılaşılır. Bu sınıflandırma nokta kusurlara, yüzey (wall) ve konfigürasyonlara genelleştirilemezler. Bununla birlikte Volterra yöntemi sadece farklı tip çizgi kusurları arasındaki ilişkinin doğrudan görülmesinde anlaşılması kolay bir çerçeve sunmaz. Aynı zamanda bunların enerji kararlılığı hakkında da tabanı ipuçları verir ve bu kusurların ilerlemesi, etkileşmesi ve katlanması durumunda ortaya çıkan fiziksel mekanizmaların oluşturulmasına yardımcı olur. Örneğin topolojik yöntemde, yukarıda tartışılan dislokasyon ve disklinasyon arasındaki ilişki kolayca görülmez. Sonuç olarak her iki yöntem, engellenmiş ortamlardaki (metalik camlar, termodinamik kusurlar içeren fazlar v.b.) ve quasi-kristallerdeki kusurların analizinde, eşdeğer kullanılabilirliğe sahiptir ve bir anlamda birbirlerini tamamlayıcıdır. [7]

3.2. Kusurların Genel Topolojik Teorisi

3.2.1. Farklı Boyutlu Kusurların Homotopi Grupları ile Sınıflandırılması

Deforme olmuş d -boyutlu bir X_{def} fiziksel sistemi göz önüne alalım ve bu fiziksel sistemde kusurlar, n -boyutlu bir kusuru çevreleyen r -boyutlu bir S^r küresine homotop kapalı bir γ^r “devresi” oluşturuyor olsun. Buna göre kusur, γ^r ile sınırlanmış $(r+1)$ -boyutlu Σ^{r+1} yüzeyine enine (transvers) yönelmiş olacağından $n = d - r - 1$ dir. γ^r devresi genelleştirilmiş Burgers devresini, Σ^{r+1} ise kesme yüzeyini temsil eder. 3-boyutlu durum için aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

$r = 0$ için ; kusur yüzeysel bir geometriye sahiptir, bir yüzey (wall) kusurdur. γ^0 , yüzeyin her iki tarafında yerleşmiş iki noktadan oluşur.

$r = 1$ için ; kusur bir çizgi kusurudur (bir sicim, bir dislokasyon veya disklinasyon). γ^1 bilinen Burgers vektörüne karşılık gelir.

$r = 2$ için ; kusur bir noktadır (bir nokta kusur, bir monopol), γ^2 bir küreye homotoptir.

$r = 3$ için ; kusur (-1) boyutunda olup fazla fiziksel bir anlamı yoktur. bu durumda Burgers manifoldu göz önüne almak daha uygun olacaktır (bu manifold, S^3 'e homotop bir γ^3 devresidir).

Tüm bu durumlar için,

$$\gamma^r \xrightarrow{\phi} \Gamma_V^r \quad (3.6)$$

dönüşümünde, γ^r nin Γ_V^r görüntüsünün homotopi sınıfları göz önüne alınır.

$r = 1$ durumu oldukça ilginçtir; $m_0 = m_1$ orijin ve γ_1 in uç noktaları olacak şekilde, γ_1 in parametrizasyonunda kullanılan doğru üzerinde $[0,1]$ birim parçayı göz önüne alalım. Yukarıdaki dönüşüme göre,

$$\mu_0 = \phi(0) = \phi(1) = \mu_1 \quad (3.7)$$

V üzerinde bir noktadır ve γ^1 , μ_0 taban noktasına sahip bir ilmektir. $\phi_t(0) = \phi_t(1) = \mu_0$ sınır şartlarına sahip, $\phi_t(z)$ bir-boyutlu düzgün dönüşüm ailesine ait herhangi bir dönüşüm, γ_t^1 tek boyutlu düzgün ilmek ailesine ait, μ_0 da taban noktalı bir ilmek dönüşümüdür. ϕ_t dönüşümleri μ_0 da homotoptur ve bir $[\phi]$ sınıfı oluştururlar. X_{def} ve μ_0 da aynı taban noktasında bulunan γ_t^1 ve λ_t^1 ilmekleri için, $[\phi]*[\psi]$ şeklinde bir homotopi sınıf çarpımını tanımlamak kolaydır. Bu sınıflar bir grup oluşturur ve μ_0 noktasında V nin “esas grubu” olarak adlandırılır.

$r > 1$ boyutlu dönüşümler, yukarıdaki sürecin doğal genelleştirilmesi ile tanımlanır. $r = 2$ de parametrizasyon, tüm noktaları belirli kenarlara ait $[0,0;0,1;1,0;1,1]$ karesinin parametrizasyonudur. İlgili homotopi sınıfları $\Pi_2(V, \mu_0)$ ikinci homotopi grubunu oluştururlar. $r = 3$ deki parametrizasyon ile, tüm noktaları belirlenen yüzeylerde bulunan bir küp parametrizasyonudur. Bu son durumda söz konusu şart, fiziksel örneğin düzgün sınır koşullarına ($\mu(\partial X) = \mu_0 = \text{sbt.}$) sahip olduğunu ifade eder. Aynı zamanda tüm örnek V üzerinde özdeş biçimde dönüşüme uğrar ve bu da numunenin tüm hacmi üzerinde bir “iyi kristal” olduğu anlamına gelir. $\Pi_3(V, \mu_0)$ ile tanımlanan kusurlar tekil bir düzen parametre değerine sahip olmamakla birlikte, topolojik her şekilde topolojik kararlıdır.

Kendimizi $d=3$ değeri ile sınırlandırmayacağız. İki boyutlu düzenli ortamlarda (örneğin zarlarda, Langmuir-Blodgett filmlerinde), nokta kusurlar Π_1 ile ve konfigürasyonlar Π_2 ile sınıflandırılır. Quasi-kristallerin yapısal özelliklerini

incelemek için yüksek boyutlu kristallerin göz önüne alınması yararlı olacaktır. Örneğin ikosahedral simetriye sahip quasi-kristaller, bu tip yapılarda $r = 1$ dislokasyonları $n = 4$ boyutuna sahiptirler.

Sadece taban noktaları farklı olan $\Pi_n(V, \mu_0)$ ve $\Pi_n(V, \mu_1)$ iki homotopi grubunun $[\phi]_0$ ve $[\phi]_1$ homotopi sınıfları, birbirine $[\phi]_1 = g [\phi] g^{-1}$ eşlenik (konjugasyon) işlemi ile bağlı olup burada g , μ_1 'i μ_0 'a dönüştüren işlemidir. Bu özellik, homotopi sınıfı $[\phi] \in \Pi_n(V, \mu)$ olan X_{def} deki bir kusurun herhangi bir $[\psi][\phi][\psi]^{-1}$ homotopi sınıfı ile temsil edilebileceğini ifade etmekte olup, buradaki $[\psi] \in \Pi_n(V, \mu)$, aynı μ noktasındaki homotopi demetinin aynı grubunun bir diğer elemanıdır.[8]

3.2.2. Düzen Parametre Uzayının Tanımı

Kristal düzenin bulunması, yoğun madde içinde gerçek dislokasyonların yani düzenli kristallerde öteleme dislokasyonlar ve sıvı kristallerde nokta dislokasyonların mümkün oluşumlara götürdüğü gösterildi. Mümkün kusurların ortamın düzen parametresine bağlı olacaktır. Elli yıl önce kusurları yalnızca düzen parametresinin değişim bölgesinin değil aynı zamanda kusur boyutu ve kusuru içeren ortam boyutunun da fonksiyonları olan genel bir yolla sınıflandırmayı mümkün kılan bir yaklaşım geliştirildi. Bu yaklaşım, cebirsel topolojinin daha açıkçası homotopi ve homotopi teorisi matematiksel bir tekniğin olduğu göz önünde bulundurularak bunun topolojik bir yaklaşım olduğu söylenir. Rogula tarafından verilen bir konferans ve diğer iki kısa makalesi bu alanda ilk adımları oluşturmuştur. Aşağıda topolojik yaklaşım çerçevesinde elde edilecek olan ve bu yaklaşım uygulandığı zaman ortaya çıkabilecek güçlüklerin içerildiği başlıca sonuçlar ve ana düşüncelere kısaca değineceğiz.

Düzenli bir ortamın, düzen parametresi olarak adlandırılan belirli bir $f(r)$ fonksiyonu ile tanımlanabileceğini kabul edeceğiz. Burada f 'nin mümkün

olan değerlerinden oluşan V kümesi, düzen parametre uzayı olarak adlandırılır ve r de maddenin bulunduğu X_{def} uzayına aittir. Başka bir deyişle ortam tarafından oluşturulan fiziksel uzaydan (X_{def} bölgesi) ortamın düzen derecesini karakterize eden belirli bir V uzayı içine

$$f : X_{\text{def}} \longrightarrow V \quad (3.8)$$

sürekli dönüşümü belirtir. $f(r)$ 'nin bir fonksiyoneli olan ($E[f(r)]$), sistemin enerjisi, düzen parametresinin büyüklüğü V kümesinde seçilen $f(r) = \text{sabit}$ tüm sistem üzerinde sabit ise bir minimal değere sahiptir ve ortam düzgün olarak adlandırılır. Maddenin düzgün olmayan durumları kusurlara bağlıdır. Bu durumda düzen parametresi, ortamın boyutundan küçük olan sonlu sayıdaki yüzeyler (kusurlar) üzerindeki süreksizlikler haricinde tüm ortam üzerinde değişir. Üç boyutlu bir uzayda sıfır-boyutlu (nokta) kusurları, bir-boyutlu (çizgi) kusurları ya da iki-boyutlu (düzlemsel) kusurlar bulunabilir. Topolojik olarak adlandırılan düzgün olmayan kusursuz haller de mümkündür. Bu durumda $f(r)$, maddenin her noktasında süreklidir, ancak $f(r) \neq \text{sabit}$ tir. Böyle bölgeler aynı zamanda parçacık benzeri solitonlar ebatında tanımlanabilir. $f(r)$ homojensizliğe bağlı bükülmenin enerji gradiyentinin kusur merkezleri dışında E_{min} ile karşılaştırıldığında küçük olduğu kabul edilir. Yani düzen parametresi, kusurların varlığında bile sistemin büyük kısmı için V kümesi limitleri dışına çıkmaz. Bu iddia topolojik yaklaşımın uygulanabilirlik kriterini ifade eder.

Bu yaklaşım, kusurların dağılımı ve düzen parametresi $f_1(r)$ nin verilmesi ile maddenin belirli bir halden başka bir $f_2(r)$ hale geçiş olasılığının incelenmesine imkan verir. Bu, düzen parametre uzayındaki kusurların çevresinin denklem (3.8) dönüşümünün özelliklerini analiz etmek için yeterlidir. Böylece dönüşümlerin dikkate alınması, düzen parametresinin tüm benzer dağılımlarının sınıflara ayrılmasına imkan verir. Bu dönüşüm bir sınıf içinde düzen parametresinin $f_1(r)$ den $f_2(r)$ ye sürekli bir değişimi mümkün kılar.

Kusurların bir sınıftan diğer bir sınıfa geçişi sürekliliğin ihlal edilmesinin bir sonucu olarak tüm sistem üzerinde düzen parametresinin global değişmesini gerekli kılar.

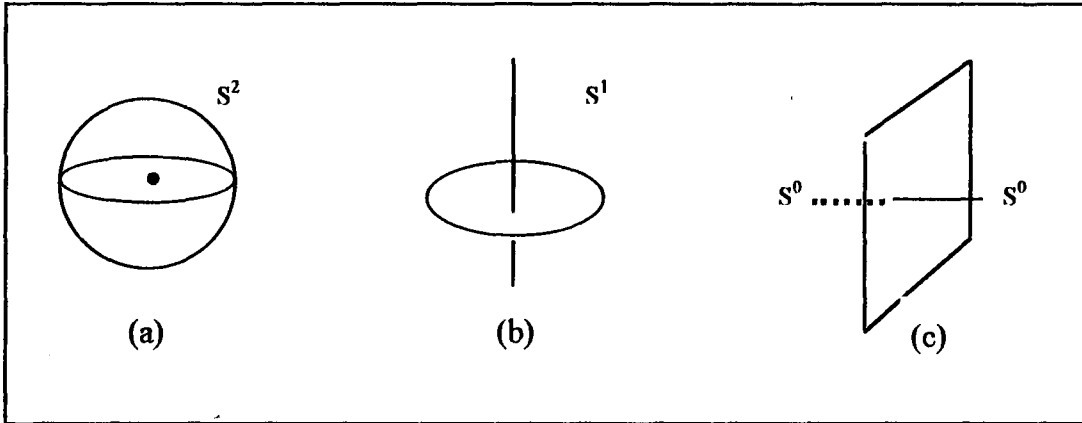
Kusurlar ayrı analiz edildiği zaman tüm X_{def} bölgesinin değil; fakat bir K' bölgesinin V içine yansımaları dikkate almak yeterlidir. Ortam d -boyutlu, kusurun boyutu r olmak üzere K' nün boyutu;

$$n = d - r - 1 \quad (3.9)$$

bağıntısı ile belirlenir.[5]

Örneğin, üç boyutlu ortamlardaki sıfır-boyutlu kusurlar, iki-boyutlu bir küre S^2 ($X_{\text{def}} \sim K' \equiv S^2$), çizgi kusurları bir ilmek (bir-boyutlu küre S^1) ve düzlem kusurları iki noktalı bir sistem S^0 ile kuşatılmıştır (Şekil 3.5). Bu n -boyutlu bir kürenin V bölgesinin homotopi grubu olarak adlandırılan bir V kümesi içine ($S^n \longrightarrow V$) dönüşümlerin sınıfı olarak bilinir. Topolojide $\Pi_n(V)$ grupların hesaplanması için geliştirilen iyi metotlar vardır. Sonuç olarak her bir elemana d -boyutlu ortamın kusurlarından oluşan bir sınıf karşılık gelir. Bir homotopi grubunun, grup kuralı kusurların denklik kuralı ile bağlantılıdır. Böylece, üç boyutlu bir ortamdaki nokta kusurları sınıflandırmak için $\Pi_2(V)$ 'yi, çizgi kusurlar için $\Pi_1(V)$ yi ve düzlem kusurları için $\Pi_0(V)$ küresini bulmak yeterlidir. Topolojik konfigürasyonlar (texturesler) $\Pi_3(V)$ yardımıyla sınıflandırılır.

Kusurların topolojik sınıflandırılmasındaki en önemli nokta, V kümesinin bulunmasıdır. Problem çözümünün bu aşamasının sonunun fiziksel anlama bağlı algoritma ile yapılabilir. Bu kusurların topolojik sınıflandırılmasının uygulanabilirlik bölgesinin çokluğunu izah eder. $f(r)$ düzen parametresinin herhangi bir parametresi biliniyor ise, V düzen parametre uzayı bulunabilir.



Şekil 3.5. Üç-boyutlu ortamda kusurları çevreleyen uzaylar.
 (a) Nokta kusurlar için
 (b) Çizgi kusurlar için
 (c) Düzlemsel kusur için.

Bununla birlikte, düzen parametre uzayını bulmak için genel bir prosedür geliştirilebilir. İlk olarak sistemin E_{\min} enerjisinin ya da başka uygun bir termodinamik potansiyel sabit kaldığı tüm dönüşümleri içeren bir G grubu bulunur. Daha sonra, elemanları düzen parametresinin değişmediği dönüşümler olan bir H grubu belirlenir (H , düzen parametresinin izotropi grubudur). Bu H ile G 'nin faktörizasyonu sonucu olarak G/H bölümü bulunur. Bunun anlamı, belirli bir sabit düzen parametresini o şekilde etkiler ki; E_{\min} 'yi invaryant bırakan f 'nin tüm değerler kümesi; yani V düzen parametre uzayı belirlenir. Böylece

$$V = G / H \quad (3.10)$$

yazılabilir. Tanımlanan işlemi aşağıda göstereceğiz. İlk olarak mümkün kusuroolarak yalnızca dönme simetri elemanları ve dislokasyonlara sahip sistemleri ele alacağız.

(1) İzotropik Ferromagnetik: $G = SO(3)$ üç-boyutlu dönmelerin grubu, $H = U(1)$ bir-boyutlu dönmelerin grubu olsun. Böylece

$$V = G/H = SO(3) / U(1) = S^2 \quad (3.11)$$

dir. Bir ferromagneğin izotropisinin anlamı, enerjisinin \vec{M} magnetizasyon vektörünün yöneliminden bağımsız olmasıdır. Bu durumda düzen parametre uzayı, iki boyutlu bir küre ile ifade edilebilir.

(2) Nematik Sıvı Kristal: Buradaki ortam iki boyutlu S^2 küresi üzerindeki zıt noktaların özdeş olması dışında yukarıdakine benzerdir; çünkü yönlendiricinin zıt yönleri ayırt edilemez. Bu S^2 nin bölüm uzayı bunun Z_2 alt uzayına bölünmesiyle bulunabilir (burada $Z_2 = \{0,1\}$ iki elemanlı bir gruptur). RP^2 izdüşüm düzlemi olarak elde edilen bir uzay elde edilir.

$$V = S^2/Z_2 = RP^2 \quad (3.12)$$

(3) Ferromagnetik Kolay Düzlemi: Bu, düzen parametresinin belirli bir düzlemde kalması gerektiğini ve kolay magnetizasyonu olarak adlandırılan, sistem için enerjik olarak uygun bir düzlemdir. Bu durumda düzen parametre uzayı $V = S^1$ daire çevresidir. Aynı düzen parametre uzayı süper iletkenler ve süper akışkan 4He 'un karakteristiğidir.

(4) Ferromagnetik Kolay Eksenleri: Magnetizasyon mümkün iki yönelim ile sabit bir eksen boyuncadır. Buradaki düzen parametre uzayı, iki izole noktadan oluşur $V = S^0$.

T(3) 3-boyutlu öklid uzayın öteleme grubu olmak üzere, $H = B$ iken, ortam yalnızca $G = T(3)$ ayrık öteleme simetrisine sahiptir. Burada B ise Bravais örgü vektörleri ile ötelenen örgünün alt grubu olmak üzere düzen parametre uzayı,

$$V = T(3)/B \quad (3.13)$$

şeklindedir.

(5) Özdeş b Periyotlu Bir-Boyutlu Kristal: $G = T(1)$ bir-boyutlu bir yer değişmeler grubu ve $H = B_b$, b aralıklı (mesafeli) dönmeler kümesi olmak üzere düzen parametre uzayı,

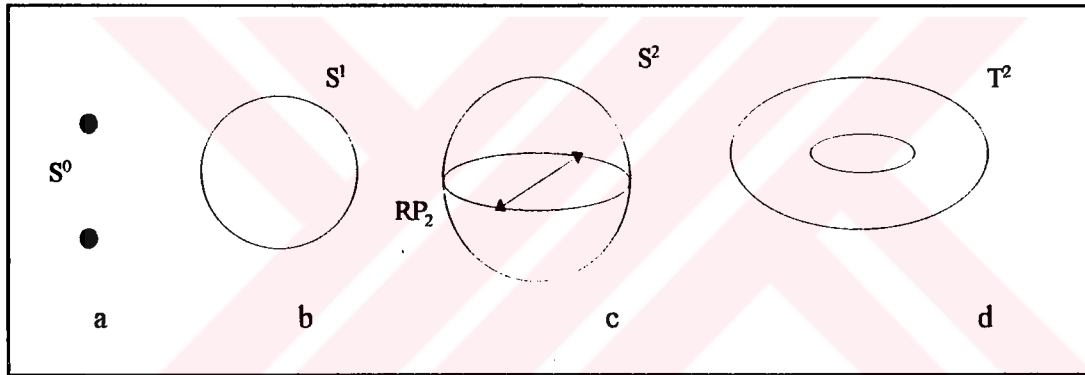
$$V = T(1)/B_b = S_b^1 \quad (3.14)$$

bir-boyutlu S_b^1 küresine denk olan, denk uçlara sahip b uzunluklu bir parçasıdır.

(6) b_1 ve b_2 Periyotlara Sahip İki-Boyutlu Kristal : $G = T(2)$, $H = B_{b_{1,2}}$ iken düzen parametre uzayı,

$$V = T(2)/B_{b_{1,2}} = T^2 \quad (3.15)$$

dir. Burada T^2 iki-boyutlu tordur. Yukarıda dikkate alınan bazı düzen parametre uzayların geometrik parametrizasyonu şekil 3.6 da verilmiştir.



Şekil 3.6. Düzen parametre uzayı.
 (a) İki nokta sistemi (sıfır-boyutlu küre S^0)
 (b) Bir-boyutlu küre S^1
 (c) İki-boyutlu küre, RP_2 projektif düzlem
 (d) İki boyutlu tor T^2

(7) Düzenli üç-boyutlu bir kristal için G , öklid uzayının uygun dönüşümlerinin (yansımalar ve inversler olmaksızın) bir grub olarak seçilebilir. $G = T(3) \otimes SO(3)$ dır burada, \otimes direkt çarpımı ifade eder. Benzer şekilde H , incelenen kristali örgü yada örgü dönüşüm grubunun bir D_k dönmeli nokta grubu ile direkt çarpım formunda olan tüm uzay gruplarının uygun bir alt grubu olarak ifade edilebilir. Sonuç olarak

$$V = T(3) \otimes SO(3) / B \otimes D_k \quad (3.16)$$

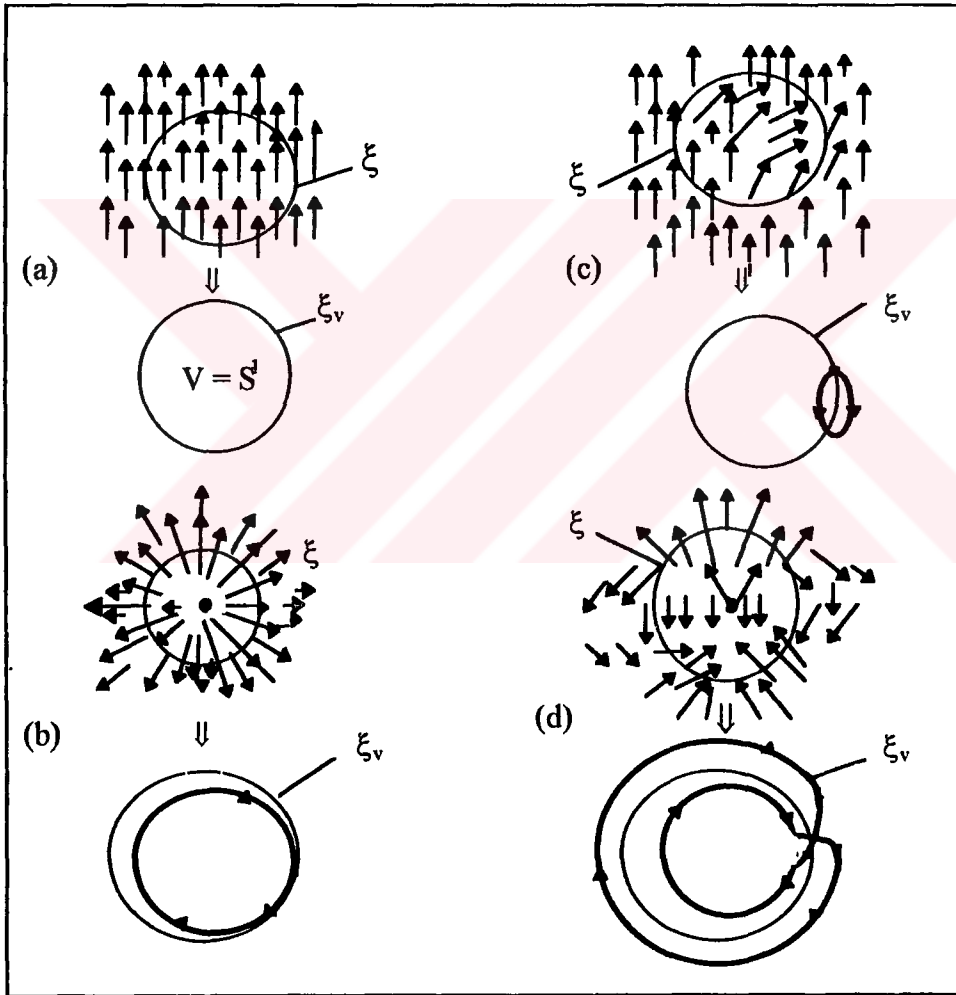
bulunur.

Ancak, denklem 3.16 ilişkisi ile tanımlanan bir küme düzen parametre uzayı olarak kullanılırsa ihtilaflı olduğunu belirtmeliyiz. Örneğin, öteleme simetrisine sahip bir kristalin homojen olmayan durumlarının tam bir tanımlanmasının, düzen parametre uzayındaki gerçek bir fiziksel uzaya dönüşüm ile elde edilip edilemeyeceği açık değildir. Topolojik yaklaşım çerçevesinde bir başka soru, öteleme ve dönmeye sahip bir kristalli örgüdeki kesme ve genişlemelerin ilişkisidir. Bu, bozulan öteleme simetrisine sahip sistemlere genişletildiğinde düzen parametre uzayının ne olur? sorusu açıkta kalır.

Şimdi kusurların kararlılığı ve sınıflandırılmasına imkan veren kusuru saran veya çevreleyen (ambient) uzaydan düzen parametresi uzayına olan dönüşümlerin sınıflandırılmasının nasıl yapıldığını inceleyelim. Örnek olarak, bir kolay düzlem ferromagnetikteki çizgi kusurlarını analiz edelim. Bu durumda ambient uzay (kusur çizgisini örten ξ hattı) bir S^1 küresidir. $\xi = S^1$ ve bu durumdaki düzen parametre uzayı da bir $V = S^1$ küredir. ξ hattını, kolay magnetizasyon düzleminde bulunacak şekilde seçelim. Bu durumda mümkün bir kusur çizgisi bu düzleme dik olacaktır.

Kusursuz düzgün bir hal için ξ hattın, dönüşümü V uzayındaki tek bir noktayı temsil eder (Şekil 3.7.a). Bir kusur ortaya çıktığı zaman kapalı bir ξ_v konturu (Şekil 3.7.b-d) de ξ konturunun bir dönüşümüdür. Ancak bu üç durumdaki topolojik özellikler oldukça farklıdır. Şekil 3.7.b de gösterilen kusur için ξ_v konturu, düzen parametre uzayının iç kısmındaki sürekli deformasyon (homotopi) ile bir nokta içine büzülebilir. Şekil 3.7.c,d de gösterilen kusurlar için bu mümkün değildir. Ayrıca (ξ_v) konturu, düzen parametre uzayını S^1 'in etrafını iki kez kuşatırken (dolanırken) daire çevresini bir kez dolanan bir kontur içine bozmadan yada değiştirmeden (döndürmeyebilir) çevirmeyebilir.

Bu nedenle ortam kusurları doğal olarak, ξ konturu V içine mümkün dönüşümlere karşılık gelen sınıflara bölünür. Sıfırıncı sınıfta homojen bir hal vardır, bu sınıfa dahil edilen kusurlar düzen parametresinin lokal olarak yeniden düzenlenmesi ile düzgün hale geçilebilir. Böyle kusurlar topolojik kararsızdır. Birinci ve ikinci sınıflarındaki kusurlar topolojik olarak kararlıdır. Bunların homojen hale geçmesi, düzen parametresinin kusur çizgisinden keyfi olarak büyük mesafelerdeki değişimi gerekli kılar.[9]



Şekil 3.7. Ferromagnetik kolay-düzleminde ($V=S^1$) çevreleyen uzaydan düzen parametresi uzayına ξ kantör dönüşüm örnekleri. Ortam durumları

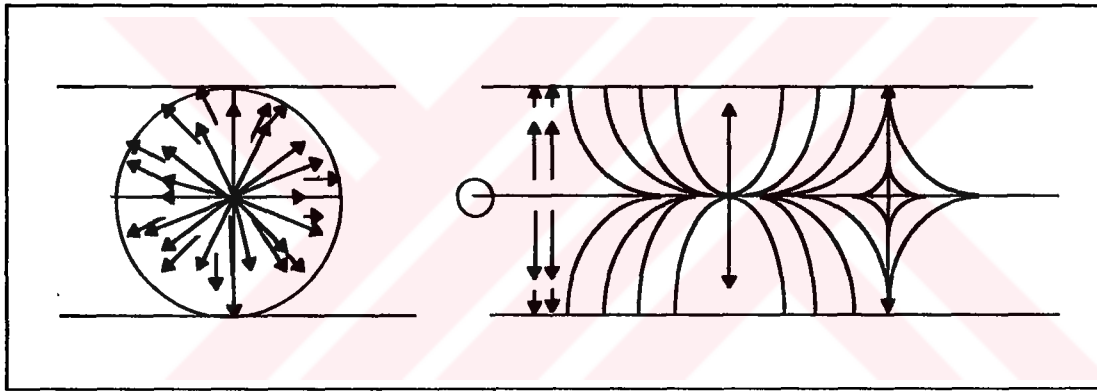
- (a) Kusursuz ve düzgün
- (b) Topolojik kararlı kusur
- (c,d) 2π ve 4π kuvvetten topolojik kararlı disklinasyonlar.

3.3. Çizgi Kusurlarının Sınıflandırılması

Çizgi kusurlarının sınıflandırmasına ilişkin özellikleri birkaç örnek yardımıyla açıklamaya çalışalım.

3.3.1. Heisenberg Ferromagnetleri ve Ferromagnetik Malzemeler

İzotropik (Heisenberg) bir ferromagnetin düzen parametre uzayı açıkça iki boyutlu bir S^2 küresi olup, esas grubu belirlidir. S^2 üzerindeki herhangi bir ilmek, düzgün biçimde sifıra büzülebilir. Dolayısıyla bu tip düzenli malzemelerde, disklinasyonlar topolojik kararlı kusurlar değildir.



Şekil 3.8. Bir ferromagnette $s = 1$ singüleri

Bunu anlamı, topolojik kararsız dislokasyonların gözlenemeyeceği anlaşılmalıdır. Enerji açısından kararlılık aynı zamanda özel sınır şartlarının varlığına da bağlı olup, bu durum topolojik kararlılık şartlarından daha önemli olabilir. Örneğin spinlerin, uygulanan bir dış alan sonucu, herhangi bir (silindirik) simetri eksenine radyal veya dik kalmaya zorlandığını kabul edelim (Şekil 3.8.). Enerjiyi minimize eden bu düzlemin, γ nın düzgün şekilde sifıra gitmesi durumunda bile, γ nın büyüklüğü ne olursa olsun bu kusuru çevreleyen söz konusu γ Burgers halkasının S^2 üzerinde ekvatorial bir L ilmeğine dönüştüğü bir kofigurasyondur. Ancak bu tekillik, spinlere çok

uzaktaki radyal doğrultudan disklinasyon çizgisi komşuluğunda yönelmeleri sağlayacak şekilde bir dönme verilmesi ile gözden kaybolacaktır. Çizginin topolojik kararlılığının olmayışını gösteren bu “üçüncü boyuttaki kaçış” ilk kez aynı tipteki kusurlar için, nematiklerde tanımlanmıştır.

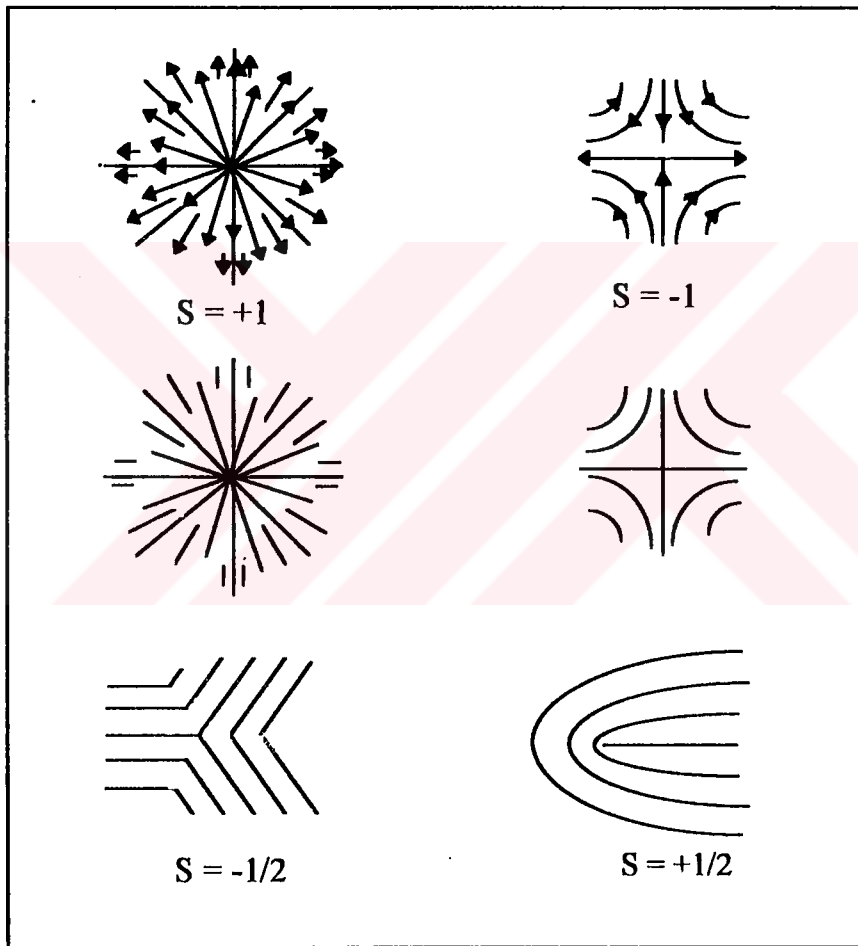
Bilinen ferromagnetik durum, bir magnetik kristal izotropinin varlığı ile Heisenberg durumundan ayrılır. Bu anizotropi, \vec{M} mıknatıslanmasının kolay \vec{M}_i ve \vec{M}_j eksenlerinin birisi boyunca yöneldiği tanım bölgelerini (domen) ayıran düzlemsel Bloch duvarlarının ortaya çıkışını açıklamaktadır. Her iki duvar da tekil (singüler) değildir ve \vec{M} nin doğrultusu, sol veya sağa yönelmiş helis yörüngede düzgün biçimde \vec{M}_i den \vec{M}_j ye değişir. Sol ve sağa yönelmiş duvar bölgeleri (Néel çizgileri olarak adlandırılan) çizgi kusurları ile birbirinden ayrılmış olup, bu çizgiler, yukarıda sözü edililen aynı nedenden ötürü herhangi bir tekillik içermezler. Ancak çok karmaşık bir yapıya sahip olabilirler. Tekilliği çevreleyen herhangi bir γ devresi, S^2 küresi üzerinde sıfıra homotop bir Γ ilmeğine dönüşür. Bu S^2 küresi burada da uygun bir düzen parametre uzayı olarak kullanılabilir. Ancak tüm noktaların enerji bakımından tamamen eşdeğer olmadığı gerçeği göz önünde tutulmalıdır.

Çok ince numunelerde Bloch duvarları Néel duvarları ile yer değiştirmiştir ve \vec{M} mıknatıslanması, \vec{M}_i den \vec{M}_j ye saat yönü veya ters yönde döndüğünde numune düzlemi içerisinde kalır. Çizgi kusurları farklı saat yönlerine sahip bölgeleri birbirinden ayırır ve bunlar “Bloch” çizgileri olarak adlandırılır. Kusur çizgisi boyunca, üçüncü boyutta mıknatıslanmanın “kaçışı (uzaklaşması)” yardımıyla tekillikten kurtarılabilirler.

3.3.2. Düzlemsel Nematikler ve X-Y Ferromagnetleri

Her iki örnekte de düzen parametre uzayı bir S^1 dairesidir, ancak düzen parametreleri aynı değildir. (a) X-Y örneğinde düzen parametresi düzlemsel

bir \vec{M} vektörü olup, $\vec{M}(0) = \vec{M}(2\pi)$ olacak şekilde bir ϕ ($0 \leq \phi \leq 2\pi$) açısı ile tanımlanır. (b) Nematik örneğinde ise düzlemsel bir n yönlendiricisi olup, n ile $-n$ fiziksel bakımdan özdeştir ve sadece $0 \leq \phi \leq \pi$ değişimi göz önüne almak yeterlidir. Dolayısıyla X-Y durumunda V bir tam S^1 dairesi, nematik durumda ise yarım bir P^1 dairesidir. Ancak $n(0) \equiv n(\pi)$ olduğundan iki ucun belirlenmesi zorunludur ve P^1 topolojik olarak S^1 'e özdeştir.



Şekil 3.9. Nematik ve X-Y ferromagnetiklerdeki $s=\pm 1$ ve $s=\pm 1/2$ dislokasyonları.

Her iki durum için de $\Pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$ yazabiliriz, ancak nokta disklinasyonları aynı değildir. \vec{M} veya n nin bir nokta kusuru çevreleyen γ devresi boyunca ϕ dönme açılarının 2π ye oranı şeklinde bir s niceliği tanımlayacak olursa, X-Y durumunda s , topolojik kararlı kusurlar için sadece tam değerler alabilirken,

nematik durumda yarım değerler alabilir. s 'nin yarı-tam değerler alması, X-Y ferromagnetin simetrisini, bir tekil nokta ile sınırlanmış yarı-tam değer şiddetindeki bir çizgi boyunca bozulmaya uğrayacaktır. Dolayısıyla X-Y ferromagnetin nokta disklinasyon değişmezi (invariantı) olarak göz önüne alınamaz. Her iki tip kusuru niteleyen $\Pi_1(S^1)$ ve $\Pi_1(P^1)$, s 'yi koruyan gruplar arası dönüşümlerde homomorfik olmakla birlikte izomorfik değildir (Şekil 3.9.).

Düzlemsel nematiklerdeki kusurlar ilk kez F.C. Frank tarafından ortaya atılmıştır.

3.3.3. 3D (3-Boyutlu) Nematikler

Düzen parametre uzayı, yukarıda söz edilen aynı nedenlerden ötürü bir yarı küredir; S^2 nin çap doğrultusundaki iki zıt noktası, $\vec{n} \equiv -\vec{n}$ düzen parametresinin aynı değerine karşılık gelir ve projektif düzlem olarak adlandırılan P^2 nin aynı noktası üzerine düşerler. Bu durum, söz konusu iki manifoldun topolojik özelliklerinde önemli farklılıklar ortaya çıkarır. $\Pi_1(S^2)$ trivial iken $\Pi_1(P^2) \approx Z_2$ dir ve burada $Z_2, \{1\}, \{a\}$ ve $\{a\}^2 = \{1\}$ elemanlarına sahip 2 mertebeli bir abelyen gruptur. Bu sonuçlar, yarı küre üzerinde temel işlemler gerçekleştirilerek kolayca elde edilebilir.

Üç-boyutlu bir nematiğin disklinasyonları, yukarıda tanımlanan “kaçış (escape)” işlemi yardımıyla doğrudan iki-boyutlu nematiklere bağlanabilir. Şekil 3.9. deki iki-boyutlu nematiğin s -tamsayı disklinasyonlarına bu tip bir işlem uygulanırken, bunlar hiçbir çekirdek tekilliği içermeyecek şekilde 3-boyutlu nematiğin s -tamsayı disklinasyonlarına dönüştürülür. Bir s -tamsayı içeren bu tip bir γ ilmeği S^2 de γ' ilmeğine dönüşür ve γ' , S^2 üzerindeki çap doğrultusunda zıt noktaların belirlenmesi işlemi ile bir $\Gamma = p(\gamma')$ ilmeği üzerinde izdüşüm yapar, $p : S^2 \rightarrow P^2$. Açıkça bu Γ lar $\Pi_1(P^2)$ de $\{1\}$ aşıkâr (trivial) sınıfına aittirler. Tamsayı kuvvetli tüm disklinasyonlar, 3-boyutlu bir

nematikte topolojik olarak kararsızdır. Ancak, tam sayı olmayan disklinasyonlar 3. boyutta kaçış oluşturamazlar ve bunları çevreleyen herhangi bir γ ilmeği, $\Pi_1(P^2)$ de temsili bir $\{a\}$ sınıfına döndürür. Dolayısıyla buradan, üç-boyutlu bir nematikte tüm tamsayı olmayan disklinasyonların homotop olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Buna göre, herhangi bir tamsayı olmayan disklinasyondan bir diğer tamsayı olmayan disklinasyona düzgün bir geçiş süreci söz konusudur. $s = \frac{1}{2}$ den $s = -\frac{1}{2}$ ye olan düzgün geçiş Bouligand tarafından açıklanmıştır. s_1 ve s_2 kuvvetinden iki tamsayı olmayan çizginin homotop olarak belirlenebilme imkanı, s_1 ve s_2 nin toplam veya farkının bir tamsayı olması ile ilişkilidir. Yani bu tip iki çizgi, ortaya çıktıklarında topolojik olarak kararsız bir tamsayı çizgisinin oluşmasına neden olurlar.

3.3.4. Çift Eksenli (Biaxial) Nematikler

Bunlar, çizgi kusurlarının abelyen olmayan bir grup ile karakterize edildiği düzenli ortamlar için standart bir teorik örnektir. Bu tip simetri gösteren az sayıda malzeme vardır, dolayısıyla bu kusurlar ve sahip oldukları özellikler, abelyen olmayan karakterleri nedeniyle deneysel bakımdan az anlaşılmıştır. Bununla birlikte, tartışılan özelliklerin bir anlamda yalın bir açıklamasına imkan verdiklerinden çift-eksenli nematikler, teorikçiler için gözde örnekler arasında yer alırlar. Bunların çizgi kusurları sadece tek tip bir simetriyi, dönmeyi (disklinasyonlara karşı disklinasyonlar) bozulmaya uğratırlar ve ilgili esas grup oldukça basit bir davranış gösterir. Özdeş özellikler gösteren diğer deneysel durumlar (katı kristaller, kolesterikle, smektikler) deneysel olarak çok daha iyi anlaşılmış durumdadır. Bunlar daha az yalın durumlara karşılık gelir; abelyen olmayan özellikleri gibi farklı tip çizgi kusurlar içerir ve bunlar arasındaki etkileşimler çok önceleri incelenmeye başlamıştır ancak bulunan sonuçların daha genel bir çerçeveye oturtulması ihtiyacı duyulmamıştır.

Çift-eksenli nematikler, normal nematiklerin $D_{\infty h}$ silindirik simetrisini bozan yerel bir F simetrisine sahiptir. Bu nedenle $H = R^3 \square F$ yazılabilir. Bilinen birkaç durumda $F=D_{2h}$ olup ve düzen parametre uzayının birinci homotopi grubu $SU(2)$ de D_2 yükselmesine karşılık gelir. Yani 8 elemanlı Q bölüm (qaternion) grubu, Pauli matrisleri cinsinden,

$$Q = [\{1\}; \{-1\}; \{ \pm i\sigma_x \}; \{ \pm i\sigma_y \}; \{ \pm i\sigma_z \}] \quad (3.17)$$

şeklindedir. Burada,

$$\{ \pm i\sigma_x \}^2 = \{ \pm i\sigma_y \}^2 = \{ \pm i\sigma_z \}^2 = \{-1\} \quad , \quad \{ i\sigma_x \} \{ i\sigma_y \} = \{ i\sigma_z \} \quad \text{v.b.}$$

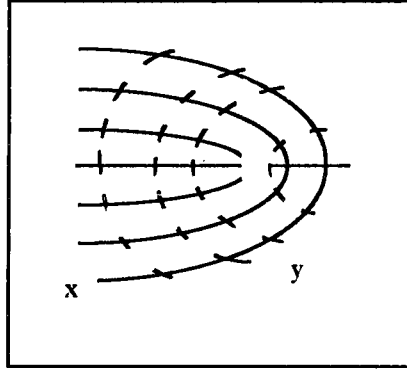
dir. Q beş eşleniklik sınıfına sahiptir :

$$C_0 = \{1\} \quad \bar{C}_0 = \{-1\} \quad C_x = \{ \pm i\sigma_x \} \quad C_y = \{ \pm i\sigma_y \} \quad C_z = \{ \pm i\sigma_z \}$$

Eğer bir grupta $\alpha = \gamma \beta \gamma^{-1}$ bağıntısını sağlayan bir γ elemanı varsa, grubun α ve β elemanları aynı eşlenik sınıfına aittirler. Esas grubun eşleniklik sınıflarının fiziksel anlamı kesim 3.3.5 de verilecektir. Önce grubun geometrik temsilini tartışalım. Bunun için D_{2h} simetrisinin üç yerel ortogonal doğrultu, O_x , O_y , O_z boyunca üçlü \bar{l} , \bar{m} ve \bar{n} ($\bar{l} = -\bar{l}$, $\bar{m} = -\bar{m}$ ve $\bar{n} = -\bar{n}$) yönlendiricilerinin simetrisi olduğunu belirtelim. Sadece iki yönlendiriciyi, örneğin \bar{l} ve \bar{m} yi tekil (singüler) hale getiren, \bar{n} 'yi tekil olmayan (non-singüler) durumda bırakan kusurlar oluşturmak mümkündür.

Örneğin Şekil 3.10. da tek-eksenli bir nematikteki bir disklinasyona benzer şekilde $s = \frac{1}{2}$ şiddetli bir disklinasyon gösterilmiştir. Bu bölüm grubunun $s_z = \{ i \sigma_z \}$ elemanı olarak göz önüne alınabilir. Bu kofigürasyondan $s = -\frac{1}{2}$ şiddetli bir kofigürasyona, \bar{l} ve \bar{m} yönlendirici alanlarından herhangi birinin sürekli biçimde değiştirilmesi ile geçilebilir. Ancak bu süreç \bar{n} alanı için sürekli değildir. Dolayısıyla bu iki çizgi topolojik bakımdan özdeş değildir ve

ikincisini $s_z^{-1} = \{-i\sigma_z\}$ sınıfına etki ettirebiliriz. Bunlar ortaya çıktıklarında toplam tekilliğin ortadan kalkacağı açıktır.



Şekil 3.10. Çift (bixial) nematikte x-yönlendiricisi için $s = \frac{1}{2}$; y-yönlendirici r çizgisi.

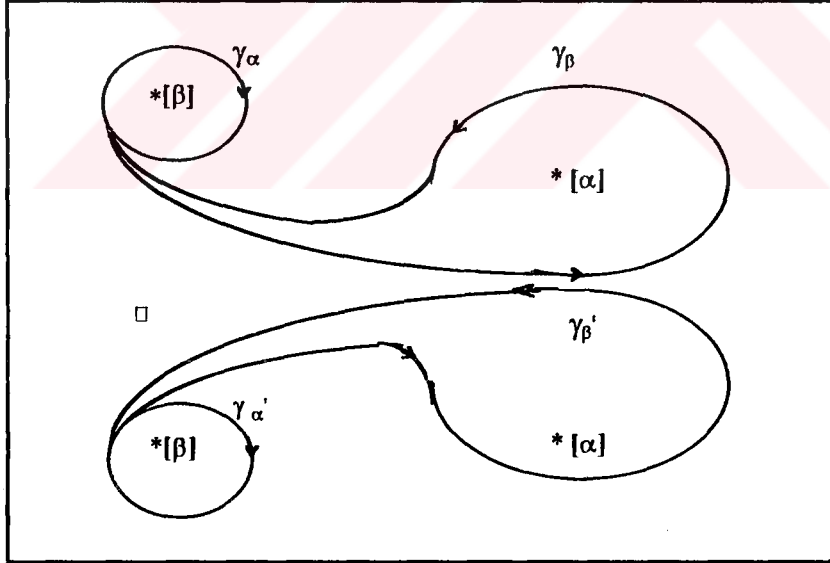
Diğer taraftan s_z^2 , $\bar{1}$ ve \bar{m} yönlendiricileri için tekil olan, ancak \bar{n} için tekil olmayan $s = \pm 1$ şiddetli bir çizgiyi temsil eder. Bu ise üç yönlendirici için aynı anda 3.boyutta kaçış işlemi ile sürekli hale getirilemez; ancak $(\bar{1}, \bar{m})$, (\bar{m}, \bar{n}) , $(\bar{n}, \bar{1})$ yönlendirici çiftlerinden herhangi birisinde sürekli şekilde tekil hale getirilebilir. Dolayısıyla bunların tümü $s_x^2 = s_y^2 = s_z^2 = \{-1\}$ olacak şekilde bölüm grubunun $\{-1\}$ sınıfına aittirler.

Yarım-tamsayı şiddetli çizgiler, tek-eksenli nematik durumun tam tersine, topolojik olarak kararlı olduklarından, $\{1\} = \{-1\}^2$ grubun birim elemanı olduğu için tamsayı şiddetindeki çizgilerin kararlı olmamasını bekleriz. Dolayısıyla 4π açılı bir disklinasyon ($s = 2$), 3.boyutta kaçış işlemi yapılabilir; ancak 2π açılı disklinasyon yapamaz. Bu özellik, Pauli matrislerinin ve $\frac{1}{2}$ spinlerin iyi bilinen karakteristiklerini açıklamaktadır.

3.3.5. Değişmeli Olmayan Çizgi Kusurlarının Bazı Genel Özellikleri

3.3.5.1 Kusurların topolojik sınıfları, esas grubun eşlenik sınıfları ile karakterize edilir.

α ve β , $\Pi_1(V)$ nin iki elemanı olsun; $\beta^{-1}\alpha\beta$ formundaki diğer elemanlar, Şekil 3.11. de gösterildiği gibi V üzerinde elde edilebilir. Şekil 3.11. de $\gamma_\alpha, \gamma_\beta, \gamma_\beta^{-1}$ ilmekleri düzenli ortamda ve bunların $\Gamma_\alpha, \Gamma_\beta, \Gamma_\beta^{-1}$ dönüşümleri V de göz önüne alınmıştır. Şekil 3.11. de açıkça görüldüğü gibi $[\beta]$ kusurunun “bir tarafında” yer alan bir ilmek olan γ_α , $[\beta]$ nin “diğer tarafında” yer alan γ'_α ilmeğinden farklı bir homotopi sınıfındadır. Başka bir deyişle, bir kusurun başka bir kusur etrafında dolaştığı her seferinde bu durum, $(\alpha \rightarrow \beta^{-1}\alpha\beta; \alpha^{-1}\beta\alpha)$ nin her ikisinin de homotopi sınıflarını değiştirme etkisi gösterir.



Şekil 3.11. $[\alpha]$ çizgi kusurunun iki farklı homotopi sınıfı

Buna göre çift eksenli nematik örneğinde, aynı kusur s_z veya s_z^{-1} den herhangi birisi ile temsil edilebilir. Çünkü her ikisi de eşlenik sınıfına aittir. Bununla birlikte, buradan aynı C_z eşlenik sınıfına ait iki kusurun birbirinden bağımsız şekilde isimlendirilebileceği anlamı çıkarılmamalıdır. Ancak bu kusurların

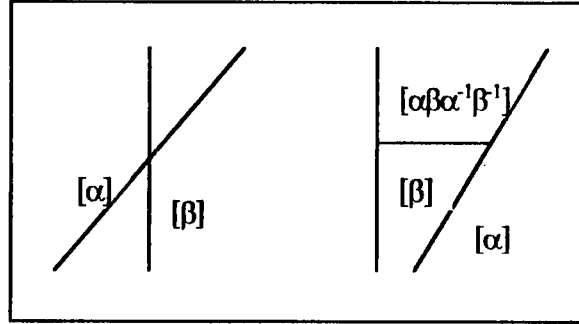
isimlerini, (bunları uygun biçimde seçilmiş diğer kusurlar etrafında dolaştırarak), zıt topolojik invaryantlara sahip olacak biçimde değiştirmek mümkündür ve sonuçta, bu kusurlar birleştiklerinde birbirlerini yok edeceklerdir.

3.3.5.2. Kusurların birleşimi

Esas grupta eşleniklik sınıfına sahip kusurlara ilişkin bu tanımlamanın bir diğer sonucu, C_α , C_β eşlenik sınıflarına ait iki $[\alpha]$ ve $[\beta]$ kusurunun etkileşmesinin $C_\alpha C_\beta = \sum C_i$ çarpımlı eşlenik sınıflarına ait bir kusur vereceğidir. Bu çarpımın bir tek (unique) sınıftan oluşması gerekli değildir. Dolayısıyla $[\alpha]$ ve $[\beta]$ nin birleşmesinin sonucu önceden bilinmez. Bu sonuç, $[\alpha]$ ve $[\beta]$ nin izledikleri yola bağlıdır.

3.3.5.3. Kesişmenin (Crossing) Engellenmesi

Komutatif olmayan iki α ve β ($\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \neq 1$) sınıfına ait iki kusur, kesişmeye engel oluşturmaktadır. Bu durum Şekil 3.12. de açıklanmıştır. $[\alpha]$ kusurunun $[\beta]$ yı kestikten sonraki konumu $\beta\alpha\beta^{-1}$ homotopi sınıfı ile tanımlanır. Dolayısıyla, kesişmeden sonra $[\alpha]$ yı $[\beta]$ ile birleştiren $\alpha^{-1}\beta\alpha\beta^{-1}$ homotopi sınıfına ait bir kusur bulunacaktır. Eğer α ile β komutatif iseler topolojik olarak kararlı bu tip bir kusur söz konusu olmaz. Katılarda (öteleme) dislokasyon-larının kesiştikleri ve ayrıldıktan sonra geride yeni bir kusur bırakmadıkları bilinmektedir. Kesişmeye tek engel sadece topolojik değil, aynı zamanda (çekirdeğin yeniden düzenlenmesi nedeniyle) enerjiktir. Birleştirici kusur, $\Pi_1(V)$ komutatör alt grubuna aittir. Z_2 ile izomorfik olup bunun tek (unique) aşikar olmayan elemanı $\{-1\}$ dir. [10]



Şekil 3.12. Komutatif olmayan iki çizgi kusurunun kesişmesine engel

3.3.6. Dislokasyonlar ve Disklinasyonlar

Normal katılarda disklinasyonlar mevcut değildir; bu tür kusurların çizgi gerilmeleri çok büyüktür. Ancak daha ziyade sıvı kristallerde söz konusu kusura ilişkin örnekler bulmayı bekleyebiliriz. Aynı anda hem dislokasyon hem de (nematiklerin tersine aynı düzen parametresine sahip) disklinasyon kusuru gösterebilen üç tip sıvı kristal vardır. Bunlar, smektikler, hegzagonal fazlar ve kolesteriklerdir. Smektikler tabakalı ortamlardır ve bu nedenle 1D (tek boyutlu) katılar gibi davranırlar. Heksagonal fazlar ise sütunlu yapıda olup, dolayısıyla 2D katılıdır. Smektiklerde tabakalara normal doğrultu bir yönlendirici rolü oynar (örneğin SmA); hegzagonal fazlarda ise bu yönlendirici rolü sütunların teğetlerine aittir. Üçüncü durum olan kolesteriklerde ise kusurlar, çift eksenli nematiklerdeki gibi quaterniyon grubu (dörtlü) ile sınıflandırılır. Bu örneği sırası ile inceleyelim.

3.3.6.1. Smektikler

Çizgi kusur grubu, $Z_2 \times Z$ yarı-direk çarpımı olup, Z_2 disklinasyonlara (nematiklerdeki ile aynı $Z_2 = \{1,0\}$ grubu) ve Z , normal boyunca öteleme simetri grubu ile tanımlanan dislokasyonlara karşılık gelir. p bir tamsayı olmak üzere (α, p) , $\Pi_1(\text{SmA})$ nın bir elemanı olsun. Buna göre aşağıdaki birleşme kuralı yazılabilir :

$$(\alpha, p) (\beta, p) = (\alpha\beta, p + \alpha(q)) \quad (3.18)$$

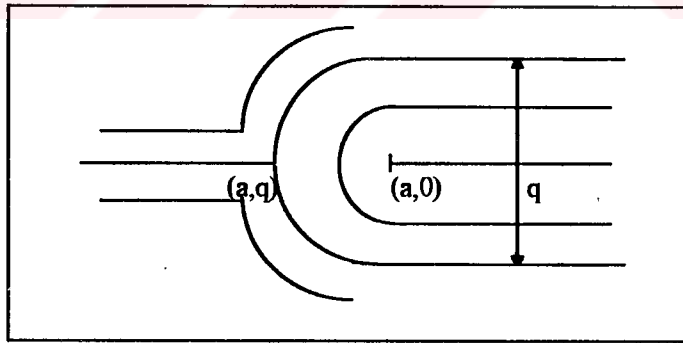
burada

$$\begin{aligned}\alpha(q) = q & \quad \alpha = 1 \text{ için} \\ \alpha(q) = q & \quad \alpha = a \text{ için}\end{aligned}$$

İşaret değişmesi, $\pm\pi$ kadar bir dönmenin ötelemeleri ters çevirdiğini göstermektedir. (a, Z_2) dedir. Dolayısıyla saf bir disklinasyona karşılık gelen (a, o) kusur eşleniklik sınıfı göz önüne alınabilir :

$$\begin{aligned}(1, p) (a, o) (1, -p) &= (a, 2p) \\ (a, p) (a, o) (a, p) &= (a, 2p)\end{aligned}\tag{3.19}$$

denklemler, (a, o) ve $(a, 2p)$ homotopi sınıflarına ait kusurların aynı eşleniklik sınıfında bulduklarını, dolayısıyla yukarıda tartışılan anlamda özdeş olduklarını söylemektedir. $(a, 2p)$, (a, o) ın $(1, p)$ dislokasyonu etrafında bir tam dönmesi ile oluşur. $(a, 2p)$ yi tabakaların normali boyunca p miktarı kadar yer değiştirmiş bir disklinasyonun homotopi sınıfı olarak göz önüne alabiliriz. Bu yorumlama şimdi gerçekleştirilecek açıklama ile uyum içindedir.



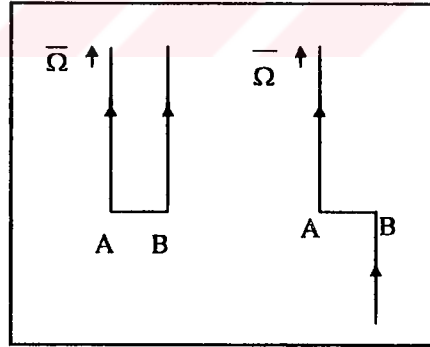
Şekil 3.13. İki disklinasyon üzerine bir dislokasyon bölünmesi

Bir (a, o) disklinasyonu ile buna $\frac{1}{2}q$ mesafede paralel başka bir (a, q) disklinasyonu gözönüne alalım. Şekil 3.13. de grafiksel olarak gösterildiği gibi her iki disklinasyon, $|q|$ Burgers vektörüne sahip bir dislokasyon oluşturur ve dolayısıyla

$$(q, p) (a, o) = (1, q) \quad (3.20)$$

yazılabilir.

Dislokasyon ve disklinasyonlar arasındaki bu ilişki daha ayrıntılı biçimde incelenmeye değerdir. Şekil 3.14. de aynı disklinasyon ilmeğine ait, dolayısıyla antiparalel yönlendiklerinde aynı uzunluklara sahip iki doğrusal yarı disklinasyon çizgisi gösterilmiştir. Yarı disklinasyonlardan birisini π açısı kadar döndürerek diğeri ile aynı doğrultuya, ancak AB kıvrılma kenarı (kink) boyunca $\frac{1}{2}q$ kadar yer değiştirerek getiren toplam şekil, iki yarı-sonsuz kadar “kenar” elemanına (çizgi boyunca) ve kıvrılma çizgisi (AB) boyunca küçük bir “bükülme” elemanına sahip iki yarı doğru ile bir kıvrılma kenarından oluşuyormuş gibi düşünülebilir. Buradan, disklinasyonların bükülme kısımlarının kendilerine bağlı dislokasyonlar içerdikleri sonucu çıkarılabilir. Bu bize, nematiklerdeki eğri disklinasyonlara ilişkin tartışmaları hatırlatmaktadır.

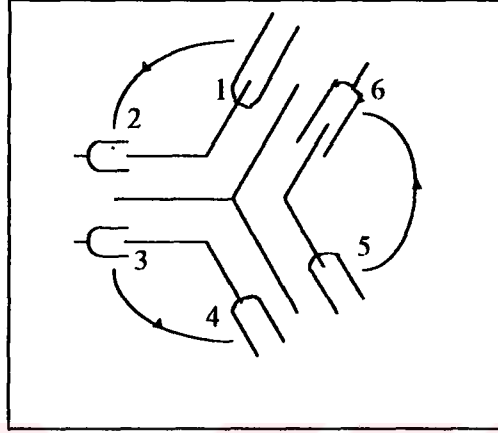


Şekil 3.14. Dislokasyon ile disklinasyon arasındaki ilişki

Şimdi bir dislokasyonun bir disklinasyon etrafında tamamen dönmesini göz önüne alalım.

$$(a, q) (1, p) (a, q) = (1, -p) \quad (3.21)$$

Bu işlem dislokasyona işaret değiştirecektir. Şekil 3.15. de gösterilmiş olan bu dönme işlemi, aynı eşleniklik sınıfına ait kusurlar arasındaki özdeşliğe en şaşırtıcı örneği teşkil eder.



Şekil 3.15. Bir dislokasyonun bir disklinasyon etrafında tamamen dönmesi

Sonuç olarak, komütatif alt grubu, $(1, 2p)$ çift Burgers vektörlü dislokasyonlardan oluşur. Bunu kontrol etmek kolaydır. Örneğin $(1,p)$ dislokasyonu ile (A, o) disklinasyonun kesişmesi

$$(1, p) (A, o) (1, -p) (A, o) = (1, -2p) \quad (3.22)$$

sonucunu verir. Bir bütün olarak komute edebilen disklinasyonlar herhangi bir engel olmadan kesişebilirler. Aynı şey ayrı olarak dislokasyonlar için de doğrudur. Ancak bu durum, çizgi kusurların bütün takımı için geçerli değildir.

3.3.6.2. Sütunlu Fazlar

Çizgi kusur grubu $\bar{D}_6 \square Z_2$ yarı-direkt çarpımı olup, \bar{D}_6 çift eksenli nematik düzen parametresine (D_{6h} simetrisine) ve Z_2 sütunlara dik düzlemdeki ötelemelere karşılık gelir. Analiz yukarıda olduğu gibi gerçekleştirilebilir. Deneysel olarak disklinasyon çizgileri enerjiye bağlı nedenlerden ötürü düz doğrular şeklinde ortaya çıkmaktadır. Çizgi üzerinde oluşan herhangi bir bozulma, şekil 3.14. de olduğu gibi bir kıvrılma kenarı şeklinde gözlenir.

Dislokasyon burgers vektörleri disklinasyon çizgisine ve bükülme kenarına diktir. Başka bir deyişle bükülme kenarı, sütünlara dik düzlem içerisinde öteleme simetri doğrultusuna dik bir doğrultuda yer alır.

3.3.6.3. Kolesterik Fazlar

Helistik sarmal olması dışında yerel düzen parametresi \vec{n} , $\vec{\chi}$ ve $\vec{\tau} = \vec{n} \wedge \vec{\chi}$ yönlendiriciler sahip bir trihedron olup bu yönlendiriciler sırasıyla, moleküler doğrultu, chiral (şiral) eksen ve bunların $\vec{\tau}$ vektörel çarpımları boyunca yönelmişlerdir. Bu yukarıda incelenmiş olan D_{2h} çift-eksenli nematik yapıya benzer ve $\Pi_1(\text{kolesterik}) \cong Q$ dur. Bunun üzerinde, helis yapının oluşturduğu, adım genişliğinin yarısına eşit, $p/2$ kadar bir periyodiklik vardır. Daha sonra görüleceği gibi bunun, kusurların sınıflandırılması üzerinde hiçbir etkisi yoktur. \vec{n} ve $\vec{\tau}$ disklinasyon çizgileri, çift-eksenli nematiklerdeki s_x ve s_y çizgilerine benzer. $\vec{\chi}$ çizgileri (bunlara s_z diyelim) dikkat çekici özelliğe sahiptirler. Tanım gereği bunlar, $\vec{\chi}$ eksenini boyunca 2-katlı dönme simetrilerini bozarlar; ancak $\vec{\chi}$ eksenini bir öteleme simetri doğrultusu olduğundan $\vec{\chi}$ çizgileri aynı zamanda temel bir Burgers vektörü için $b = p/2 \sim \pi$ özdeşliği veya eşdeğer şekilde $nb \sim (\pm s_z)^n$ özdeşliği ile öteleme simetrisini de bozarlar. Dolayısıyla, n 'nin 4 çarpanı olması durumunda dislokasyonlar topolojik olarak kararlı değildirler. $(\pm s_z)^4 = \{1\}$ ve n 'nin diğer tüm değerleri için $\{-1\}$ e özdeşirler. Topolojik bakımından kararlılığı, dislokasyonun şekline ve ortamın elastiklik (esneklik) sabitlerine bağlıdır. Diğer taraftan rölatif enerji kararlılığı, yani farklı s_x , s_y , s_z çizgilerinin sıklığı, üç adet $\vec{\chi}$, \vec{n} ve $\vec{\tau}$ yönlendiricinin hepsi aynı fiziksel gerçekliğe sahip olmadığının göz önüne alınması ile incelenebilir. $\vec{\chi}$ ve $\vec{\tau}$ sanal yönlendiricilerdir, \vec{n} ise fiziksel olarak molekülün uzun doğrultusuna karşılık gelir. Dolayısıyla s_x çizgileri (n 'nin tekil olmadığı çizgiler) tercih edilir. Bir dislokasyon,

$$s_x s_y = s_z \sim b, \quad s_x^2 = \{-1\} \sim 2b \quad \text{v.b.} \quad (3.23)$$

şemasına uygun biçimde iki disklinasyona ayrıştırılabileceğinden, gözlenen ayrılmalar çoğunlukla bir s_x çizgisi veya daha fazla sayıda çizgi içerir.

İzotropik fazda büyüyen kolesterik damlacıklarında $\{-1\}$ çizgileri ve $\{-1\}$ kararlı çizgileri gözlenmiştir. Bunların ortaya çıkması sınır şartları ile müdahale sonucu gerçekleştirilmiştir. Bu küre üzerindeki yönlendirici bir alanın toplam indisinin, kürenin Euler sayısı olan 2 'ye eşit olduğu iyi bilinmektedir. Bu aynı zamanda, çekirdek içerisinde bulunması gereken ve sınırdaki ortaya çıkan tekilliklerin toplamı s şiddetindedir. Eğer toplam şiddet, sınırdaki tek bir nokta üzerinde yoğunlaşmış ise, bu tekil bir $\{1\}$ çizgisinin ortaya çıkışına karşılık gelir ve bu çizgi, her ne kadar topolojik bakımdan kararsız olsa da sınır şartları nedeniyle üçüncü boyuta kaçamayacaktır. Genelde bu tekil çizgi helis adımının uzunluğu boyunca varlığını sürdürür ve daha sonra, üzerinde çizginin sona erdiği bir monopole dönüşür.

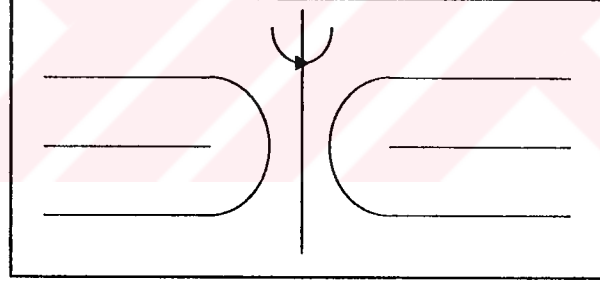
3.3.7. İlmeklerin Sınıflandırılmasına İlişkin Uyarılar

Michel, homotopinin oldukça kaba bir sınıflandırma olduğunu ve $\phi : X_{\text{def}} \longrightarrow G/H$ dönüşümünün değişik engellemeleri karşıladığı, bir çok durumda bu sınıflandırmanın daha hassas hale getirilmesi gerektiğini ifade etmiştir. Bu araştırmacı $\Pi_1(V)$ de katsayılara sahip X_{def} kohomotopi sınıfların kullanımını ortaya atmıştır.

Burada ise ilmeklerin, ilmeğin çevrelediği (sınırladığı) Σ yüzeyine ilişkin bir takım topolojik özellikler yardımıyla sınıflandırdığı farklı bir bakış açısı göz önüne alınacaktır. Volterra çerçevesinde herhangi bir Σ yüzeyi, Volterra işlemi gerçekleşmeden önce mükemmel kristale yerleştirilmiş kesme yüzeyinin deforme olmuş görüntüsü olarak düşünebiliriz. İlmeğin sınırladığı herhangi bir Σ yüzeyinin, kusur çizgisini çevreleyen γ Burgers devresinin M orijinlerin oluşturduğu hat olarak seçildiğini kabul edelim. Bu Burgers devrelerinin termodinamik grubunu G de yükseltme (lift) işlemine tabi

tutalım. Bütün olarak $\{\gamma\}$ sürekli kümesi, G üzerinde $\{\Gamma\}$ Burgers devrelerinin oluşturduğu sürekli bir küme karşılık gelir ve bunların $\{h\}$ uç noktaları iki boyutlu (2D) bir σ manifoldu tanımlar.

M_0 da özel bir γ_0 devresi seçelim. Bunun G deki görüntüsü $0 \in G$ birim elemanından başlayan ve bir $h_0 \in H_0$ elemanında sona eren bir yol olup, buradaki H_0 , M_0 daki küçük grup (kristalin simetri grubu) dur. Diğer tüm uç noktaları ise bir σ cümlesini oluştururlar ve G de gh_0g^{-1} şeklinde tanımlanan eleman üzerindedirler; burada g , G ye ait olup H_0 'a ait değildir. Bu eşlenik sınıfı ile tanımlanan manifoldu N ile gösterelim. Dolayısıyla Σ nın N deki görüntüsünün homotopi sınıfı ile ilgilenmekteyiz. Aslında gh_0g^{-1} ile gh_0 arasında bire bir karşılık vardır. N , $G/H = \bigcup_i g_i h_0$ koset uzayına izomorfiktir.



Şekil 3.15. Yok olması tekil bir nokta oluşturan $s = \frac{1}{2}$ ilmeği

Eğer σ kapalı bir manifold ise, ilgili nicelik $\Pi_2(V)$ dir. Nematik durumda, $V = P^2$, $\Pi_2 \approx Z$ olacağından topolojik olarak farklı sonsuz tip Σ mevcuttur. Ancak bu tip muhtemelen kompleks çizgiler içeren kusurların gözlemlendiği herhangi bir fiziksel durumla henüz karşılaşılmamıştır.

Eğer σ kapalı değilse, herbiri $\Pi_1(V)$ nin bir elemanına karşılık gelen çok sayıda olasılık söz konusudur. Nematik durumda $\Pi_1(P^2) \cong Z_2$ dir ve iki olasılık vardır :

i) Eğer σ bir nokta ile homotop ise, Σ nın sadece tek bir h_0 simetri elemanı taşıdığı söylenebilir. Bu durum klasik Volterra sürecidir ve Friedel ile Gennes tarafından incelenmiştir. Söz konusu durumda ayrıca Frank 'ın kenar çizgileri de işin içine girer. Dolayısıyla Σ , mükemmel ortamda Volterra süreci tamamlanmadan önce çizilen olası bir kesme yüzeyinin gerçek görüntüsüdür.

ii) σ bir çizgi ile homotop ise Volterra süreci göz önüne alınmaz. Bu, şekil 3.16. daki durumdur. Katlanma sonucu disklinasyon çizgisi tekil bir nokta haline döner. Ancak (i) durumunda katlanma bütüncüdür.



3.4. İkinci Homotopi Grubu $\Pi_2(V)$

$\Pi_2(V)$ grubu diğer bütün $\Pi_n(V)$ ($n \geq 1$) grupları gibi abelyen bir gruptur. İlk önce ferromagnetler ve tek-eksenli nematiklerdeki tekil noktaları (monopoller), daha sonra smektiklerdeki tekil noktaları inceleyeceğiz.

Çift-eksenli nematikler ve kolesteriklerde, bunların ikinci homotopi grupları trivial olduğundan topolojik kararlı hiçbir nokta mevcut değildir; ancak daha önce de görüldüğü gibi, tekil bir sicime (string) bağlı monopoller bulunabilir. Bunların topolojik karakteri üçüncü-boyuta kaçmalarına imkan sağlayacaktır. Diğer mümkün durum, $\{1\}$ siciminin

$$\{1\} = s_x s_y s_z \quad (3.24)$$

modeline uygun biçimde bir veya daha çok sayıda topolojik olarak kararlı disklinasyona bölünebilmesidir. Monopollere bağlı sicimler ile yüksek enerjili parçacık fiziğinde sıkça karşılaşılmaktadır.

Tüm pratik amaçlar için, üzerinde homotopi sınıflarının yer aldığı taban noktaları gözardı edilebilir. Homotopi sınıfları sadece Π_n üzerinde Π_1 yörüngesine kadar tanımlanır. $n=1$ durumunda bu tanımlama, zaten kullanılmakta olan eşleniklik sınıflarını verecektir. Diğer durumlarda $\Pi_1 \rightarrow \text{Aut } \Pi_n$ işleminin; yani n 'inci homotopi grubunun otomorfizm grubunun göz önüne alınması zorunludur. $n=2$ için bu işlemin ilginç sonuçları vardır.

3.4.1. Ferromagnetler

İkinci homotopi grubu Z olup, nokta kusurları n , $-n$ zıt yük çiftleri ile tanımlanır. Bu yük ise, S^2 homotop Burgers devresi üzerinde bir tamsayı yardımıyla hesaplanabilir. Aynı hesaplanma nematikler için de söz konusudur.

3.4.2. Tek-Eksenli Nematikler

Nematiklerde nokta kusurların konfigürasyonları, ferromagnetlerdeki ile aynıdır. Bir ferromagnet nokta kusurda okların kaldırılması sonucu nematik bir monopol elde edileceği; ancak tersine bir nematik monopolün, zıt yüklü iki ferromagnetik nokta kusur verecek şekilde iki farklı biçimde yönelebileceği açıktır. Bu önemli özellik, Π_2 üzerinde Π_1 in uygulanmasının oluşturacağı etki izlenerek anlaşılabilir. Bir monopolün $\{a\}$ sınıfı bir çizgi kusur etrafında dolaştığını göz önüne alalım ve yönlendiricilerin uygun ancak keyfi bir biçimde yönlendiklerini kabul edelim (bu, tek kusur olarak monopol içeren tüm bölgeler için mümkündür). Kusur tarafında dolaşma tanımlandığından yönlendiricilerin işaret değiştireceği açıktır ve bunun bir sonucu olarak aynı kusur, duruma göre n veya $-n$ ile temsil edilebilir. İki monopolün uygun biçimde isimlendirilmesi gerekir. Dolayısıyla her ne kadar herhangi bir anda aynı cisimler olsalar da zıt işaretli iken birbirlerini yok edecek, ancak aynı işaretli iken "daha büyük" bir monopol oluşturacak şekilde birleşeceklerdir.

3.4.3. SmA Fazları

Her ne kadar monopoller aynı grupta sınıflandırılıyorsa ve bu monopollerin bozulmaya uğrattıkları düzen parametresi benzer şekilde yönlendirici kısımdan oluşuyorsa da (kristaller $\Pi_2 \approx 1$ grubuna sahiptir), yönlendirici alanın bir yüzeye dik her noktada integrallenebilmesi gerektiğinden, nematiklerde karşılaşılan tüm geometrilerin smektiklerde de gözlenmesi mümkün değildir. Bu imkansızlık n yükünün herhangi bir değeri için söz konusudur. Eşmerkezli küresel tabakalar $n = \pm 1$ monopollerini oluştururlar. Bunlara karşılık gelen antimonopoller integre edilemezler ve biri dairesel, diğeri bu dairenin ekseni boyunca yönelmiş iki disklinasyona ayrışırlar. Bu tip geometri oldukça sık gözlenmektedir. Tabakalar, dairesel ilmek etrafında

paralel yarım-tor şeklinde katlanırlar ve eksen üzerinde birleşirler. Bu torik geometri, yaklaşık 100 yıl önce ilk kez G. Friedel ve F. Grodjan tarafından açıklanan ve “fokal konik bölgeler” olarak bilinen özel bir yapıdır. Bu fokal konikler, gerçekte yoğun madde fiziğinde karşılaşılan ilk kusurlardır.

$H_A=(R^2 \times Z) \sqcap D_{\infty h}$ dan $H_C=(R^2 \times Z) \sqcap C_{2h}$ ‘a SmA-SmC geçişi, $\Pi_1(\text{SmA}) \approx Z \mid Z_2$ nin $\Pi_1(\text{SmC}) \approx Z \sqcap Z_4$ ye dönüşümüne ve topolojik bakımından kararlı monopollerin ($\Pi_2(\text{SmC}) \approx 1$) ortadan kaybolmasına uyum sağlamak zorunda olan yeni kusur ve “yarı-kusurları” beraberinde getirir. Sonuçta SmA fazından zaten mevcut olan monopoller “sicim (string)” olarak isimlendirilen kusurlar kazanır; bu ikinci mertebeden faz geçişi deneysel olarak geniş şekilde incelenmektedir.

3.5. Konfigürasyonlar (Texture) ve Solitonlar

Bunlar, 3D konfigürasyonlar için $\Pi_3(V)$ ile soliton duvarları için $\Pi_2(V)$ ile ve soliton çizgileri için $\Pi_1(V)$ ile tanımlanırlar. Finkelstein'in öncü çalışmalarının ardından gerek kozmolojistler gerekse parçacık fizikçileri tarafından yoğun biçimde incelendiklerinden burada fazla üzerinde durulmayacaktır. Ancak, bu yapıların, yoğun madde fiziğinde tüm düzenli ortamlarda bulunması gerektiği öngörüldüğü hale varlıklarını ifade eden ender çalışmanın mevcut olması ilgi çekicidir. Bunun en az iki nedeni vardır. Sıvı benzeri sistemlerde bu tip konfigürasyonlar zayıflayarak sönme eğilimi gösterirler. Nematik durumda, elastikliğin izotropik olması halinde söz konusu özellikle tamdır; katılarda veya kısmi öteleme mezomorfik fazlarda ise bir konfigürasyon tarafından taşınan bir deformasyon öklid uzayına diffeomorf değildir. Dolayısıyla herhangi bir konfigürasyon, kendisine büyük bir enerji sağlayacak dislokasyon yoğunluklarını beraberinde taşır.

Konfigürasyon kavramının çok kullanışlı olduğu bir durum göz önüne alacağız. Kolesteriklerde, \vec{n} yönlendiricisi üzerindeki tekillikleri ortadan kaldıracak bir geometrik yapı tercih edilir. Dolayısıyla bir konfigürasyon yönlendirici alanı sürekli bir biçimde belli doğrul-tuyu göstereceğinden, $\Pi_3(P^2) \approx Z$ veya $\Pi_3(S^2) \approx Z$ ile tanımlanan konfigürasyonlar ile ilgilidir. Bu kolesterik alanların yapısı, \vec{n} 'nin sınırda sabit bir değer alacağını ortaya koymaktadır. $S^3 \rightarrow S^2$ dönüşümü Hopf dönüşümleri olarak adlandırılır ve bu dönüşümlerin her birisi için düzenli ortamda (veya S^3 te) yönlendiricinin sabit bir değer aldığı eğrilerin bağlantı sayılarının bir ölçüsü olarak değerlendirilebilecek bir $n \in Z$ Hopf indisi tanımlanır.

3.6. Düzenli Bir Ortamın Yüzeyi Üzerindeki Topolojik Kusurlar

Sınır bölgelerindeki kusurların, yarı-kusurların veya incelenen ortamın boyutuna bağlı kusurların sınıflandırılması gibi tam homotopi dizisinin kullanımının çok yarar sağladığı bir çok durum söz konusudur. Sözü edilen, incelenen ortamın boyutuna bağlı kusurlar ile, süper akışkan He fazlarında sıkça karşılaşılmaktadır. Tüm bu durumlardan biri diğeri içerisinde yer alan iki düzen parametre uzayı, örneğin V ile \tilde{V} tanımlanmalıdır ($\tilde{V} \in V$). Homotopi kavramı, rölatif (görelî) homotopiyi de içerecek şekilde genişletilmelidir. Burada tartışmayı, sınırlardaki kusurlar çerçevesinde tutacağız. Sonuçta X_{def} hacimli bir madde ve ∂X_{def} sınır olarak tanımlanır. ∂X_{def} 'in homojen olduğu dolayısıyla özel bir \tilde{V} düzen parametre uzayının bunun üzerinde tanımlanabileceğini kabul edeceğiz.

Örnek olarak, bir numune (madde) sınırındaki nokta tekilliklerini tanımlamaya çalışalım. Bu tip tekillikler, madde içerisindeki sınırla kesişen çizgi kusurları veya sınıra yerleşmiş nokta kusurları olabileceği gibi madde ile doğrudan ilişkisi veya madde içerisinde sürekliliği bulunmayan sınırın özel düzen parametresi de olabilir. Bir kural olarak bu tekillikler ya tamamıyla sınıra yerleşmiş ve sınır üzerindeki düzenin herhangi bir temsili \tilde{V} manifoldu ile gösterilen bir γ Burgers ilmeği ile veya yüzey kusurunun, $\gamma_h = \partial \Sigma_h$ sınırı yüzey üzerinde bulunan yarı-kürsel bir Σ_h Burgers devresi ile örtülmesi sonucu temsil edilirler. Bu son durumlarda Σ_h homotopi sınıfını tanımlayan dönüşüm için V ile \tilde{V} nin birlikte göz önüne alınması gerekecektir.

Sınır şartları, düzen parametresinin serbestlik derecesine kısıtlandığından, \tilde{V} genellikle V nin bir alt manifoldudur; dolayısıyla daha önce sınır bölgesine ait olan herhangi bir γ çizgisinin madde içersinde düzgün biçimde geçişinden kaynaklanan, $\Pi_1(\tilde{V}) \rightarrow \Pi_1(V)$ şeklinde bir homomorfizm bulunmalıdır.

kaynaklanan, $\Pi_1(\tilde{V}) \rightarrow \Pi_1(V)$ şeklinde bir homomorfizm bulunmalıdır. Burada "düzgün" den kasıt Γ nın "iyi kristal" içerisinde bulunması ve iyi kristale aktarılmış olmasıdır. Eğer meydana gelen homomorfizm sürecinde $\{a\}$ aynı anda $\Pi_1(V)$ nin ve $\Pi_1(\tilde{V})$ nin bir elemanı ise, buna karşılık gelen yüzey tekillik noktası açık şekilde, ∂X_{def} in özel nokta tekillikleri $\{b\} \in \Pi_1(\tilde{V})$ elemanları ile temsil edilirler ve bunlar, γ nın düzgün biçimde hacimsel maddeye aktarılması ile $\Pi_1(V)$ de sıfıra gider. Göz önüne alınan bu süreç \tilde{V} nin i_1 elemanının V ye dahil edilmesi işlemidir. $\{b\}$ elemanları,

$$i_1: \Pi_1(\tilde{V}) \rightarrow \Pi_1(V) \quad (3.25)$$

homomorfizmin çekirdeğindedir.

Diğer yüzey nokta tekillikleri, X_{def} 'e yerleştirildiklerinde sürekliliklerini koruyan hacimsel nokta tekilliklerinden kaynaklanır. Bunlar, γ_h \tilde{V} üzerinde temsil edilmek üzere ve \tilde{V} nin tüm noktaları V içerisinde tanımlanmak üzere, V de çizilen Σ_h yarı-kürelerinin homotopi sınıfları ile karakterize edilirler. Bu işlem bir "rölatif homotopi grubu", $\Pi_2(V, \tilde{V})$ tanımlar ve bu da V modulo \tilde{V} deki kürelerin ait olduğu homotopi sınıfları grubudur. Bu durumda,

$$\rightarrow \Pi_2(\tilde{V}) \rightarrow \Pi_2(V) \rightarrow \Pi_2(V, \tilde{V}) \rightarrow \Pi_1(\tilde{V}) \rightarrow \Pi_1(V) \rightarrow \dots \quad (3.26)$$

şeklinde bir tıpatıp dizi homotopi dizisi yazılabilir. Bu dizide, i ve j dönüşümleri zaten tanımlanmıştır. ∂ ise Σ_h nin göz önüne alınması durumunda, sadece malzeme yüzeyindeki $\partial \Sigma_h = \gamma_h$ sınırını içeren bir işlemdir. Bu işlem ise,

$$\text{Im}(\partial_2) = \ker(i_1)$$

şeklinde bir grup homomorfizmi oluşturur.

Özetlenecek olursa, tam dizinin özellikleri kullanarak sınırdaki nokta kusurların aşağıdaki sınıflara ait olduğu söylenebilir:

(a) Çizgilerin sınırla kesişmesine karşılık gelen yüzey noktaları $\text{Im}(i_1)$ dendir. İlgilenilen bir çok durumda $\text{Im}(i_1) = \Pi_1(V)$ dir. Örneğin normal bir kristalde, sınırı iz bırakmadan kesen hiçbir dislokasyon yoktur.

(b) Sınıra özgü ve hacim içerisinden gelen nokta kusurları, iki tip kusur da $\Pi_2(V, \tilde{V})$ 'ye aittir ve $\ker(i_1)$ ile $\Pi_2(V) / \text{Im}(j_2)$ faktör grubunun (hacimsel bölgeden gelen singüler noktalar) genellikle doğrudan olmayan çarpımına eşittir.

Bu, herhangi bir boyuttaki yüzey kusurlarına genelleştirilebilir. Kavramların uygulanışına bir örnek olarak quasi-kristalleri göz önüne alacağız.

3.7. Quasi-Kristallerde Kusurlar

Bu ve daha sonraki bölüm, kusurların topolojik teorisinde iki özel konu olan quasi-kristaller ile engellenmiş (frustrated) ortamlarla ilgilidir. Quasi-kristallerin tanımlanması oldukça yüksek boyutlu, $d > 3$ bir kristalografi gerektirir. Engellenmiş ortamlardaki kusurlar, sabit eğriliğe sahip bir uzaydaki bir kristale aitmiş gibi düşünülebilir. Burada söz konusu iki durum sadece genel hatlarıyla ele alınacaktır.

3.7.1. Quasi-Kristalin Kristalografik Tanımı

Dönme simetrisi öklidyen olmadığından quasi-kristaller periyodik değildir. Son zamanlarda keşfedilen oktagon ve dodecagonal türü “izinsiz (yasak)” simetrisi yanında, doğada decagonal (düzenli pentagonları düzlemi tam doldurmadığından öklidyen değildir) ve icosahedral (düzenli icosahedraları uzayı tam doldurmadığından öklidyen değildir) türü quasi-kristaller de bilinmektedir.

Bravais quasi örgü uzayının en az iki tip poligon (2D de) veya polihedron (3D) ile kaplanmasının bir sonucudur ve “kesme-izdüşüm olma (cut-and-project)” yöntemi ile elde edilebilir. Bunun için önce $d > 3$ boyutlu bir hiperkübik kristal göz önüne alınır. Bu kristal, fiziksel uzay olarak nitelendirilen $d_{//}$ -boyutlu bir $P_{//}$ hiperdüzlemi boyunca kesilir ve bunun üzerine $P_{//}$ ye paralel olacak şekilde, kübik hiperhücrenin kesimine eşit bir S “dilimine (strip)” ait hiper örgütün alt cümlesinin izdüşümü alınır. Bu yöntem, $d=5$ durumunda ($d_{//}=2; d_{\perp}=3$), iki tip rombohedralden oluşan ve “Penrose” olarak adlandırılan bir bir kaplama, $d = 6$ durumunda ($d_{//}=d_{\perp}=3$), iki tip rombohedralden oluşan bir ikosahedral kaplama ve $d = 4$ durumunda, ($d_{//}=d_{\perp}=2$) oktagon bir kaplama verir.

Elbette yukarıdaki işlem, $P_{//}$ kesme düzleminin yeteri derecede yönlendirilmiş olması durumunda düz simetrisini verecektir. Ancak bu durumda bile quasi örgünün bütün olarak simetrisini değiştirmeksizin, kendisine paralel yer değiştirilebileceği ($P_{//}, S$) çiftinin konumuna bağlı olarak, Bravais quasi örgü tanımında da bir miktar keyfilik söz konusudur. Quasi örgüyü tanımlamanın daha genel bir yolu, hiperkübik örgünün her bir köşeye (vertex) bitişik “atomik” bir Σ yüzeyi ile örülmüş olduğunun kabul edilmesidir. Σ yüzeyinin giriş bölgesi A_{\perp} olarak adlandırılan, P_{\perp} üzerindeki birim hiperhücrenin izdüşümüne eşit alınması ile “kesme-izdüşüm” yönteminde Bravais örgüsü elde edilir. Birleşme köşesi seçilen yüzey dilimi üzerinde bulunan her Σ , $P_{//}$ ‘yi R köşesinin tam M izdüşümünde keser. Dolayısıyla her iki süreç birbirine özdeştir. Ancak ikinci süreçte quasi-kristal, d -boyutlu bir kristalin $d_{//}$ -boyulu sınırı olarak tanımlanır. Sonuçta kullanılacak olan bu tanımlamadır.

3.7.2. Quasi-Kristalin Düzen Parametre Uzayı

Bir quasi-kristalin bir sınır şeklinde tanımlanması, iki düzen parametre uzayının kullanımını gerektirir.

(i) Burada kristalin V düzen parametre uzayı, hiperkübik bir örgüdür. Dolayısıyla $V=T^d$ dir. Bu tartışmada, ötelemeleri tanımlayan düzen parametresi göz önüne alınacak, ancak daha büyük enerjiye sahip olup bu nedenle daha az karşılaşılan kusurların oluşturduğu dönme süreçleri işin içine katılmayacaktır.

(ii) $P_{//}$ sınırının uymak zorunda olduğu sınırları tanımlayan \tilde{V} düzen parametre uzayı; yukarıda da görüldüğü gibi quasi örgünün farklı mükemmel durumları (fazlar olarak adlandırılır) $P_{//}$ ‘nin farklı paralel konumlarına karşılık gelir ve P_{\perp} yi sadece tek bir noktada kesen $P_{//}$ nin, P_{\perp} üzerinde d -boyutlu bir I^d

hiperkübünün izdüşümü ile elde edilen A_{\perp} giriş bölgesine şekil ve büyüklük olarak eşit bir I^1 bölgesi üzerinde değiştirilmesi ile eşdeğer olmayan tüm fazlar elde edilebilir. Bununla birlikte, I^1 de sonsuz sayıda fazla nokta, quasi örgü için aynı fazı verecektir. Gerçekte I^1 üzerinde seçilen yüzeye ait bir hiperörgü vektörünün izdüşümü ile birbirine bağlı olan tüm M noktaları I^d kadar ayrılacaktır. Bir kristal sınırına özgü kusurlar rölatif $\Pi_n(V, \tilde{V})$ homotopi grupları ile sınıflandırılırlar (burada \tilde{V} , V nin bir alt manifoldudur). Bu gruplar V içerisinde \tilde{V} tüm noktalarının belirlenmesi ile oluşturulurlar. \tilde{V} nin düzen parametresinin bir değeri ile \tilde{V} içerisindeki bir nokta arasında (biunivocal) dönüşüm özelliklerine sahip bir düzen parametre uzayı olup olmaması fazla önemli değildir.

V belirlenmiş karşıt yüzeylere (yani d -boyutlu bir tor) sahip d -boyutlu bir I^d hiperküpüdür. \tilde{V} ise I^1 nin kenar ve yüzeyleri arasında I^d hiperkübünün özelliklerinden türetilen birtakım belirgin karakteristikler ile I^d nin P_{\perp} deki I^1 izdüşümü yardımıyla elde edilir. I^1 in I^d de (I^d nin kenar ve yüzeyleri boyunca ∂I^1 sınırlarına sahip ve ayrıca ∂I^1 üzerinde izdüşüm yapacak şekilde) tekrar yükseltilmesi (lift), I^1 in tamamen I^d içerisinde yer aldığını açıkça ortaya koymaktadır. Ayrıca I^1 deki tanımlamalar aynı zamanda I^d deki tanımlamalardır. Dolayısıyla \tilde{V} , V içerisinde yer alır; rölatif homotopi gruplarının oluşturulma şartları yerine getirilmiştir. \tilde{V} oktagonal durumda ($d_{//} = d_{\perp} = 2$) çok basit bir şekil alır; I^1 düzenli bir oktagondur (4-boyutlu küpün izdüşümü). Karşıt kenarların tanımlanmasıyla \tilde{V} , iki delikli (bietzel) bir tor biçiminde elde edilir.

3.7.3. Yüksek-Boyutlu Uzayda Dislokasyonlar ve Bunların $P_{//}$ İle Kesişmesi

Bu tip dislokasyonlar topolojik tanımlamada $\Pi_1(T^d) \approx Z^d$ ile Volterra tanımlamasında ise d-boyutlu bir \vec{b} Burgers vektörü ile sınıflandırılır. Hiperçizgi kusuru L_d , hiperörgüde (d-2)-boyutludur; ancak bunun $P_{//}$ ile kesişmesi $(d_{//}-2)$ boyutludur. Yani $d_{//}=3$ için (ikosahedral durum) bir çizgi ve $d_{//}=2$ için (decagonal, oktagon ve dodecagonal durumları) bekleneceği gibi bir noktadır. Simetri nedeniyle L_d hiperçizgisinin, P_{\perp} ile quasi-kristaldeki $(d_{//}-2)$ -boyutlu bir L çizgisinin kartezyen çarpımı olduğu görülebilir :

$$L_d = L \times P_{\perp} \quad (3.27)$$

Quasi-kristalde, hiperkusurun kesişmesi ile oluşan bozulmalar (toplam deformasyon alanının “fonon” bileşeni olarak adlandırılan ve) çizgiye olan ters uzaklıkla azalan Burgers vektörünün $b_{//}$ paralel bileşeniyle orantılı bir yer değiştirme alanı ile konum ve uzaklıkla değişimi henüz tam olarak anlaşılmamış olan ve Burgers vektörünün b_{\perp} dik bileşeni ile orantılı, dağılmış yerel kimyasal değişimler cümlesine karşılık gelen bir “fazon (Phason)” bileşeni içerir.

3.7.4. Disveksiyonlar

Bu terimden kasıt, yukarıda açıklandığı gibi $\Pi_2(V, \tilde{V})$ ile sınıflandırılan, quasi-kristallere özgü çizgi kusurlarıdır. Sonsuz tam dizinin,

$$\Pi_n(V) \approx \Pi_n(T^d) \approx 1 \quad (\text{herhangi bir } n \geq 2 \text{ için}) \quad (3.28)$$

olması nedeniyle,

$$\Pi_n(V, \tilde{V}) \approx \Pi_{n-1}(\tilde{V}) \quad n > 2 \quad (3.29)$$

şeklinde bir seri izomorfizme ayrışacağı açıktır. $n = 2$ veya daha küçük değerler için,

$$1 \rightarrow \Pi_2(V, \tilde{V}) \rightarrow \Pi_1(\tilde{V}) \rightarrow \Pi_1(V) \rightarrow \Pi_1(V, \tilde{V}) \rightarrow 1 \quad (3.30)$$

sonlu dizisi elde edilir.

Bu dizinin ilk iki dönüşümüne (homomorfizme) bakılacak olursa, $\Pi_2(V, \tilde{V})$ nin kendisi de \tilde{V} nin evrensel örtüsünün otomorfizm grubu olan $\Pi_1(\tilde{V})$ nin değişmez bir alt grubu olduğu görülür. Oktagonol durumda ($d=d_{//}=d_{\perp}=2$), \tilde{V} iki delikli bir tor 'dur. Bunun evrensel örtüsü, düzenli oktagonlarla kaplı hiperbolik H_2 düzlemidir. $\Pi_1(\tilde{V})$, H_2 hiperbolik düzlemin öteleme grubunun kesikli (sürekli olmayan) bir alt grubudur ve bir oktagonu diğeri üzerine taşır. Oktagonlarla kaplanmış H_2 düzlemi bir eğrisel uzayda Schlafli notasyonunda $\{8,8\}$ ile gösterilen mükemmel bir Bravais örgüsü şeklinde düşünülür. Bunun anlamı, $p=8$, $q=8$ dir ve her tepe noktasında (vertexte) çakışan q tane p -yüzlü vardır. Hiperbolik düzlemdeki ötelemeler değişmeli (komütatif) değildir ve Cartan 'ın transveksiyon ile adlandırılırlar. $\Pi_2(V, \tilde{V})$ ile sınıflandırılan kusurlar dolayısıyla bir alt transveksiyon grubu oluştururlar ve bunlara disveksiyon adı verilir.

Çift torun evrensel örtüsü olan $\{8, 8\}$ 'i oktagonol quazi-kristalin ideal bir Bravais (hiperbolik) örgüsü şeklinde göz önüne almak yararlıdır. Aynı şekilde torun evrensel örtüsü, normal bir kristalin Bravais (öklidyen) örgüsüdür. Quazi-kristallerdeki çizgi kusurları çevreleyen Burgers devreleri, normal Bravais devrelerinin Bravais örgüsünde çizilmesi ile tamamen aynı biçimde, $\{8, 8\}$ deki açık yollar boyunca çizilirler. Tüm bu söylenenler oktagonol durumla ilgilidir. Ancak benzer şekilde diğerk quazi-kristal simetrikler içinde, \tilde{V} nin evrensel örtüleri olan düzenli biçimde tasarlanmış eğri uzaylar tanımlamak mümkündür.

$\Pi_2(V, \tilde{V})$, d-boyutlu kristalin her bir hiperkübik hücresindeki 1^1 lerin yükseltmelerinin (lift) birleşmesinden oluşan “atomik Σ_{at} yüzeyinin” esas grubudur. Bu özellik, burada tartışılan topolojik özellikler ile ilk kez Σ_{at} kavramını ortaya atan Frenkel ve arkadaşlarının ele aldığı özellikler arasında bir bağlantı sağlamaktadır. Σ_{at} ‘ın üstünlüğü, quasi-kristaller için bir (öklidyen) Bravais örgüsü rolü oynayan $d_{//}$ -boyutlu bir öklidyen kristal olması, ancak dislokasyonlar ile disveksiyonların birbirinden ayırt edilmesini sağlamasıdır. Dislokasyonlara karşılık gelen Burgers devreleri Σ_{at} üzerinde açık yollar boyunca, diğer taraftan disveksiyonların Burgers devreleri ilmekler üzerinde temsil edilir (çizilir). Σ_{at} yüzeyi, içerisinde bir kusur etrafındaki tüm Burgers devrelerinin açık yollar boyunca yer aldığı hiperbolik evrensel H_2 örtüsü ile üzerinde tüm Burgers devrelerinin aşikar olmayan (açık olmayan) ilmekler boyunca yer aldığı \tilde{V} düzen parametre uzayı arasında bulunur. Dolayısıyla $\Pi_2(V, \tilde{V}) \approx \Pi_1(\Sigma_{at})$ dir. Ayrıca Σ_{at} ‘ın öklidyen karakteri nedeniyle, esas grubun $\Pi_1(\tilde{V})$ nin bir normal alt grubu olduğu (bu özellik tam homotopi dizisinden de açıkça görülebilir) ve diğer taraftan komutator alt grubunu da içerdiği gösterilebilir. İlgilenilen birçok durumda (örneğin oktagonal durumda) komutator alt grubunun kendisidir.

Tam homotopi dizisinin incelenmesi halinde, $\Pi_2(V, \tilde{V})$ nin tüm elemanlarının, $\Pi_1(V) \approx Z^d$ nin aşikar elemanlarına dönüştüğü görülebilir; buradan disveksiyonların, sıfıra giden toplam Burgers vektörüne sahip dislokasyonların çok-kutupları (multipol) olduğu sonucuna varılır. Bu özellik, disveksiyonların sıfıra giden toplamı dislokasyonlara ayrıştırılabileceğini ve yığılma kusurları ile aynı yapıda olduklarını göstermektedir. Quasi-kristallerdeki dislokasyonlar, $P_{//}$ fiziksel uzayındaki Burgers vektörlerinin, öteleme simetrisinin, yokluğundaki izinli tek değer olan $\bar{b}_{//} = \infty$ değerini alamayacağı

anlamını taşıyan, “kısmi” dislokasyonlardır. Benzer şekilde, quasi-kristallerdeki yalıtılmış dislokasyonlara, bir yığılma kusuru, yani disveksiyonlar cinsinden tanımlanabilecek bir fazon (phson) alanı eşlik edecektir.

$\Pi_2(V, \tilde{V})$, kendisi de $i_1: \Pi_1(\tilde{V}) \rightarrow \Pi_1(T^d)$ dönüşümünün çekirdeği olan $\Pi_1(\tilde{V})$ nin bir alt grubuna izomorfik olarak dönüşürken, $\Pi_1(\tilde{V})$ nin diğer elemanları ($\notin \Pi_2(V, \tilde{V})$) da, Z^d ile izomorfik olan $\Pi_1(T^d)$ nin bir alt grubuna döndürür. $\Pi_1(T^d)$ aynı Z^d dir ve bir grup teori teoremine göre, herhangi bir serbest Z^m abelyen grubun bir alt grubu da bir serbest Z^k abelyen grubu olacağından ($k \leq m$ olup burada $k=m=d$ dir), bu sonuçta herhangi bir çelişki yoktur. Daha önce ifade edildiği gibi \tilde{V} , quasi-kristalin özel düzen parametre uzayından çok daha büyüktür ve $\text{Im}(i_1)$ de görülmeyen bir takım öteleme simetrisi içerirler. Bununla birlikte $\text{Im}(i_1)$, $\Pi_1(T^d)$ ye istenildiği kadar yaklaştırılarak \tilde{V} gerektiğince küçük yapılabilir.

3.8. Engellenmiş (Frustrated) Fazlar

Yoğun madde fiziğinde incelenen sistemlerden bir kısmında yerel düzenlilik, düzgün bir biçimde tüm uzay boyunca devam etmez. Bu durum ikosahedral düzen haline karşılık gelir ve öklidyen uzay ile uyuşmaz; bu tip düzenin bir takım metalik alaşımlardaki varlığı (bölgesel düzenin yönelim simetrisini, periyodikliğin bozulmasına rağmen genel olarak muhafaza eden) quasi-kristallilik halini gerektirir. Bununla birlikte, diğer bazı “engellenmiş” yerel düzenlilik hallerinde uzum menzilli yapı aynı periyodikliğe sahiptir; ancak bu durum, bölgesel düzenin “taban durumu” etrafındaki çalkalanmaları pahasına gerçekleşir. Taban durum bölgesel düzenlilik, yönelim simetrisinin tam anlamıyla oluşması için yeterli değildir. yapısal bir bakış açısından ayırd edici bir özellik bu çalkalanmaların, sıfırdan farklı sabit bir eğriliğe sahip bir uzay içerisinde yer alan ve bu uzayda bölgesel düzen simetrilerinin engellenmemiş olduğu bazı kristallerin karakteristikleri olan periyodik çizgi kusurları cinsinden incelenebilmesidir. Bu model, gelişigüzel yerleşmiş çizgi kusurlarının (bu sayede düzensiz sistemler tanımlanabilir) ve hatta quasi-kristallerle ilişki olarak periyodik olmayan çizgi kusurlarının gerçekleşme olasılığını içerecek şekilde yeterince geneldir. Burada ilk olarak temel engellenmiş fazlara ilişkin özet bir tanımlama verilecek ve daha sonra bu fazların yer aldıkları eğri kristaller ele alınacak ve son olarak eğri (curved) kristallere çizgi kusurların dahil edilmesinin, bu kusurların diz (eğri olmayan) kristallere dönüşümü nasıl sağladıkları gösterilecektir.

3.8.1. Kusurlara Bağlı Olarak Tanımlanan Fazlar

3.8.1.1. Mavi fazlar

Bu fazlar, kolesterik fazların değişik modifikasyonlarıdır; yani şiral (chiral) moleküllerden oluşurlar, ancak bir tek (unique) eksen etrafında basit bir

dönme yerine iki katlı bir dönme (dolanma) içerirler. Bölgesel simetirileri silindirik olup bu geometri, tek bir benzersiz silindir etrafında sonsuza dek sürmez, engellenmişlerdir. Dolayısıyla düzenlenmiş faz, silindirik veya sarmal sonsuz vida (worm) benzeri bölgelerin sıkı biçimdeki paketlenmiş baz durumunda gerçekleşir. Doğada bu tür düzenin gerçekleştiği bir çok olası durum söz konusudur. Bu bölgeler DNA xanthane gibi biyolojik polimerlerde gözlemlendiği gibi bazı özel sınırlı geometrilerde büyük birim hücrelere sahip (ve erimiş polimerlere benzer biçimde gelişigüzel karışmış) kübik düzenlemeler oluşturabilirler. Silindirin kübik paketlenmesi denge disklinasyonları olan disklinasyonlardan 3-boyutlu bir ağ oluşturabilir. Diğer taraftan dinoflagellate kromozomun geometrik yapısına da (yerel çift sarmaldan dolayı) benzer ancak silindirik olmayıp helis biçiminde bir engellenmiş düzen tipine başka bir örnek teşkil ettiği düşünülmektedir. Bu engellenmiş paketlenmeyi sarmalayan çift helis yapı bir yerel DNA düzenlenme disklinasyonudur ($s=1/2$) ve kromozomun doğal boyutlarını tanımlar.

3.8.1.2. Frank ve Kasper fazları

Bu metalik fazlar farklı ancak karşılaştırılabilir boyutlardaki atomların sıkı paketlenme düzenlenişi gösteren kompleks alaşımlardır. Dört eşit atomun en iyi yerel düzenlenişi, atomların düzenli bir tetrahedronun köşelerinde yer alması ile gerçekleşir. Dolayısıyla FK (Frank ve Kasper) fazları, TCP (tetrahedral sıkı paketlenmiş) alaşımlar şeklinde tanımlanabilirler.

Beş adet düzenli tetrahedra $7^{\circ}27'$ gibi küçük bir açısal boşluk ile ortak bir kenar etrafında uzayı yaklaşık olarak tamamen doldururlar. Dolayısıyla 5-katlı bir yerel simetri oluşturmak için atomların küçük bir yeniden düzenlenmesi yeterlidir. Ayrıca ikosahedron 'un köşelerine yerleşmiş 12 atom, ikosahedronun merkezi ile birlikte (merkezde) ortak bir köşeye sahip 20 adet tetrahedron ve 6 adet beş katlı eksen oluşturur. Bu geometrik yapılanma,

ikosahedral yerel simetrisinin ve buna ilişkin engellenmenin varlığına işaret etmektedir.

Gerçekte bir FK periyodik fazda, atomlar etrafında $Z=12, 14, 15, 16$ koordinasyon sayıları söz konusudur. $Z \neq 12$ koordinasyon kabukları, tetrahedronlardaki bir takım bozulmalar pahasına, geometri engellenmeyi etkisiz hale getirir. Bu TCP düzenlenmesinin önemli bir özelliği, $Z \neq 12$ değerine sahip atomların, üç-boyutlu bir iskelet yapı oluşturan çizgiler boyunca yer almasıdır. İskelet ağını oluşturan iki düğüm noktasını birleştiren parça boyunca koordinasyon sayısı sabit kaldığından ve bu da bu parça etrafında dönme simetrisinin sabit kaldığını gösterdiğinden bu çizgiler gerçek disklinasyon çizgileridir.

3.8.1.3. Metalik camlar ve basit sıvılar

Frank ve Bernal 'in öncü çalışmalarından beri basit bir sıvının veya metalik bir camın yerel düzenlenmesinin, atomların büyük bir çoğunluğu etrafında ikosahedral yapıda olduğuna inanılmaktadır. Bu tip sistemlerin yapısal düzensizliğinin, sabit eğrilikli bir uzayda yer alan bir kristale geliştirel biçimde yerleştirilmiş bir disklinasyon cümlesi ile tanımlanabileceği bilinmektedir. Bu disklinasyonlar eğri uzayı düz hale getirirler. FK fazlarının 3-boyutlu yapısı düz uzaydaki bu tip disklinasyonlardan oluşan bir cümleden başka bir şey değildir.

3.8.2. Eğri Kristaller

Atom ve moleküllerin düzenli bir sıralanışı şeklinde tanımlanan ve bir takım simetri işlemleri altında değişmez kalan herhangi bir kristal, eğer (öklidyen grubun bir alt grubu olmayan) bir $G \subset E^3$ grubu ile değişmez kalıyorsa ya bir S^3 küresinde ya da hiperbolik bir H^3 uzayında bulunmaktadır. G, S^3 veya H^3 izometri grubuna aittir. Buna ilişkin pratik önemi olan iki örnek sunalım.

3.8.2.1. S^3 ün {335} düzenlenişi

Temel bölge düzenli bir tetrahedrondur. S^3 küresi 600 tetrahedron, 120 köşe içerir; koordinasyon $Z = 12$ dir. Paketlenme yoğunluğu; yani köşelerde merkezlenmiş temas halindeki katı kürelerin kapladığı hacmin toplam hacme oranı $p_{335} = 0.774...$ dir. Bu oran $p_{fcc} = 0.74048...$ den daha büyük olup, üç boyuttaki en iyi paketlenmedir. {335} ve {pqr} ye ilişkin ayrıntılar için 77, 78,79 kaynaklarına başvurulabilir. Burada p herhangi bir yüzeyin köşe sayısı, q temel polihedral bölgede yer alan bir köşedeki yüzey sayısı ve r bir ortak kenar etrafındaki bölge sayısıdır.

{335} in eğrilinin giderilmesi, eğer bu işlem bir algoritmaya uygun biçimde gerçekleştiriliyorsa metalik camlar, FK fazları ve görünürde quazi-kristal olan yapıları verecektir.

3.8.2.2. S^3 üzerindeki Clifford paralelleri

$$S^3 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \quad (3.31)$$

4-boyutlu bir uzaydaki 3-boyutlu bir kürenin denklemi olsun. Bu durumda

$$\vec{n} = R^{-1}(-x_1, x_0, x_3, -x_2) \quad (3.32)$$

vektör alanı, küresel geometri nedeniyle birbirine paralel olan ancak bir diğerine göre çift sarmal oluşturmuş, S^3 üzerindeki büyük daire cümlesine teğettir. Birbirine yeterince yakın iki Clifford paraleli, aynen bir halattaki iki ip gibi bir diğeri etrafında sarmal oluşturur. Bu yapı mavi fazdaki çift-sarmal yapının “düzenli” bir biçimi olan bir geometridir. Sarmal adımı kürenin yarıçapı ile sınırlıdır ve Clifford cümlesi ya sağa veya sola yönelmiştir.

Bu eğri sıvı kristal fazın disklinasyonlar ile düz uzay haline getirilmesi mavi fazları verir.

3.8.3. Eğri Fazların Düz Hale Getirilmesi

Yukarıda açıklanan eğri kristallerin bir üstünlüğü, atom ve moleküllerin fiziksel olarak gözlenen yerel düzenini enerji gereksinimlerini sağlayacak konumlara yerleştirilebilmesidir. Çözülmesi gereken yapısal problem, bu yerel düzeni tanımlayan uzaklık ve açıları çok fazla değiştirmeksizin sıfırdan farklı sabit eğrilikli (S^3 veya H^3) bu tip eğri kristallerin öklidyen uzaya nasıl dönüştürülebileceğidir. Elbette bu tip bir dönüşüm gerçekleştirirken, eğri kristalde var olan iskelet ağı düzenli uyumun bozulması gerekecektir; çünkü farklı eğrilikteki uzaylar arasında hiçbir global izometri mevcut değildir. Ancak ilgilendiğimiz süreç, bu uyumun bozulmasını sağlayan söz konusu sürecin ta kendisidir. Bu incelenen simetrideki yapısal düzensizliklerin mükemmel (soyut) bir sistemle; yani fiziksel bir sistem yerine aynı bölgesel düzene sahip eğri bir kristal ile karşılaştırma yardımıyla tanımlanabilmesine imkan sağlamaktadır.

İlgili teorem şu şekilde açıklanabilir : vektörlerin bir Rieman manifoldunun bir noktasından başka bir noktaya sabit bir L yolu boyunca paralel olarak taşınması bir lineer izometrik işlemdir.

Bunun anlamı, E^3 üzerinde herhangi bir M (örneğin S^3 veya H^3) manifoldunu bir $L \in M$ yolu boyunca “kaydırmaksızın yuvarlayabilmek” daima mümkündür; L üzerindeki uzaklıklar $\hat{I}_m(L)$ boyunca korunumludur. Ayrıca L ‘ye bitişik ve L ile bir α açısı yapan herhangi bir \vec{t} vektörü, E^3 üzerinde $\hat{I}_m(L)$ ‘ye aynı α açısında bitişik bir vektör boyunca dönüşüm yapar. Özel olarak eğer $\hat{I}_m(L)$ düz bir doğru ise bu durumda L , M ‘nin bir geodeziğidir ve L ‘ye aynı açıda bitişik \vec{t} vektörlerinin görüntüleri E^3 de paraleldir (Levi-Civita bağlantısı).

Bu teoremin, M ile E^3 arasındaki izometrik dönüşümleri ne şekilde sınırladığı kolayca görülebilir. M üzerinde yeterince küçük bir L ilmeği göz önüne alalım. Bunun $\text{Im}(M)$ görüntüsü genellikle açık bir yoldur ve bir $\text{Im}(\bar{t})$ vektörünün dönmesinin bir ölçüsü olan aralık açısı w ve ilmeğin kapalılığının eksikliğini ifade eden kapanma eksikliği σ ile tanımlanır. Burada \bar{t} herhangi bir sabit açıda L 'ye bitişiktir ve tam bir tur yapar. λ tipik olarak L boyutunda bir nicelik olmak üzere, L nin M de çevirdiği yeterince küçük alan $\sigma \approx \lambda^2$ olsun. Bu durumda K , kesit eğriliği olmak üzere

$$w = K \sigma, \quad \Delta = w \lambda \approx \lambda^3 \quad (3.33)$$

yazılabilir.

Aralık açısı kapanma eksikliğinde bir merteye daha büyüktür. K 'nın işaretine bağlı olarak aralık açısı pozitif olabileceği gibi (S^3 durumunda boşluğa madde eklemek gerekecektir), negatif de olabilir (H^3 durumunda iki kez örtülmüş bölgeden madde çıkarmak gerekecektir). Bu tartışma, dönüşüm sürecinin eğri kristalde disklinasyon tipi işlemlere gereklilik gösterdiğine işaret etmekle birlikte, bu işlemlerin sınırlılıklarını da ortaya koymaktadır. Bölgesel düzeni koruyabilmek için kabul edilebilir tek disklinasyon, eğri kristalin kusur sınıflandırılmasına ait; yani $\Omega = 2\pi/n$ genişlikli bir simetri açısında madde eklenmesi veya çıkarılmasını gerçekleştiren disklinasyondur. Çizgiyi çevreleyen ρ yarıçaplı bir daire boyunca uzaklıkların mükemmel uyumu, ancak $\Omega\rho$ 'nun bir örgü uzaklığı olması durumunda mümkündür. Diğer tüm Ω değerleri için disklinasyon modundaki dönüşüm, elastik deformasyonlar yardımıyla tamamlanmalıdır. Pratikte disklinasyon yoğunluğu, mükemmel izometriye ulaşmada başarısız kalan ve zıt işaretli gerilmeler içeren disklinasyonların neden olduğu iki tip elastik gerilme arasındaki çekişmenin bir sonucudur.[7]

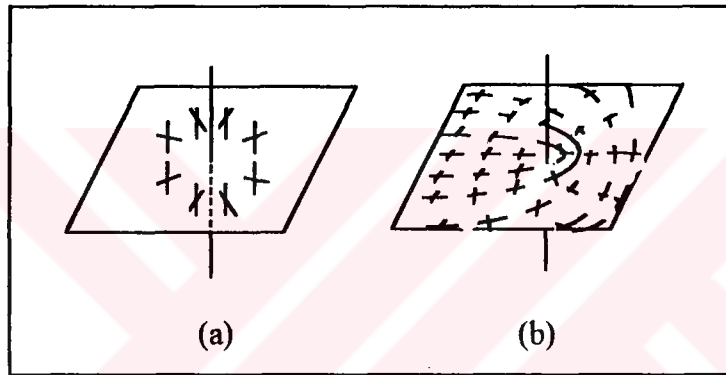
4. DÜZENLİ ORTAMLARDA YARI-KUSURLARIN TOPOLOJİK TEORİSİ

4.1. Yarı-Kusur

Bir çok durumda, yoğun madde sistemindeki kusurlar bir faz geçişi esnasında ortaya çıkarlar. İzotropik olmayan bir sıvının veya bir süperakışkanın, bozulmamış G simetri grubuna sahip izotropik bir sıvıdan oluşması (büyümesi) durumunda bozulmuş $H_1 < G$ global simetrikli düzgün bir yapı göstermesi ender karşılaşılan bir durumdur. Düzenleyici bir alana maruz kalmadığı sürece sistem, bir kural olarak düzenli olmayan bir görünümde ve tek bir düzen parametresi yerine, Landau serbest enerjisinin minimumlarının G/H_1 cümlesinde değerlere sahip bir düzen parametre alanı ile tanımlanmalıdır. Kléman-Toulouse ilkesine göre, bu alanın n -boyutlu uzaydaki d -boyutlu tekillikleri, $k = n - d - 1$ olmak üzere $\Pi_k(G/H_1)$ homotopi grubunun elemanları ile sınıflandırılırlar.[11]

Bununla birlikte birçok faza doğrudan izotropik sıvıdan ulaşılamaz, ancak sadece ara durumlar üzerinden varılabilir. Eğer H_2 simetri grubuna sahip bir faz 2'ye $H_1 > H_2$ simetrikli düzgün bir durumdan geçiş yardımıyla ulaşılabiliyorsa, mevcut düzen parametre uzayı H_1/H_2 kosetlerinin bir cümlesi olacaktır. Tekillikler sadece faz geçişinde düzen parametrisine eklenen serbestlik derecelerinden ortaya çıkar. Standart örnek olarak, $H_1 = D_{\infty h} < O(3)$ simetrikli düzgün bir tek-eksenli nematik sıvı kristalden $H_2 = D_{2h}$ simetrikli çift eksenli faza geçiş göz önüne alınacaktır. Geçiş sırasında, kenar eksenleri yönlendirici (direktör) yönünde oluşur ve düzen parametresi bir çarpı biçimini alır. Ana eksenler yönelmiş durumda kalırken kenar eksenler, $H_1/H_2 = S^1/Z_2 \cong P^1$ de değer alan ve düzenleyici geçişi XY-model bir düzlem rotatorun geçişine çok benzer olan düzlemsel bir yönlendirici alan oluşturur. Kenar eksenlerindeki herhangi bir

tekillik, yani faz 1 'in düzen parametre alanının düzgün olduğu bir nokta, yarı-kusur olarak nitelendirilir (Şekil 4.1). Yarı-kusurlar $\Pi_k(H_1 / H_2)$ homotopi grupları yardımıyla sınıflandırılır. Eğer faz 1 'in düzen parametre alanı düzgün değilse tekilliğin komşuluğunda sürekli ise yine yarı-kusur gösterimi oldukça geçerlidir. Faz 2 'ye iki geçişte ulaşıyorsa, bu fazın kusurları da iki basamakta gelişir ve bu sürecin araştırılmasında yarı-kusur kavramı çok büyük önem kazanır.



Şekil 4.1. Çift eksenli nematik sıvı kristaldeki disklinasyonlar:

- (a) Yarı-kusur. Yan eksendeki kusurlu düzgün yönlendirici alan.
 (b) Tam kusur: yönlendirici ve yan eksen tekildir.

Yarı-kusurların tanımlanmasını faz geçişlerinin incelenmesi sırasında gerçekleştirilmiş olmamıza rağmen bu kusurları çok daha genel bir çerçevede tarif edeceğiz. Birbiri ile ilişkili iki bileşene ayrılabilen bir düzen parametresi verilmiş olsun ve bileşenden birisi rigid (sert, katı) diğeri ise soft (yumuşak) bileşen olsun. Bu durumda yarı-kusur, rigid bileşenin sürekli bir alan oluşturduğu ancak soft bileşenin süreksiz olduğu bölgedir (Şekil 4.1.a). Şekil 4.1.b de her iki düzenin de süreksiz olduğu bir tam kusur gösterilmiştir. Kısaca, düzen parametresinin rigid bileşenindeki bir alan kısmi düzen olarak, diğer taraftan ilgili rigid ve soft bileşenlerden oluşan tam düzen parametresindeki bir alan ise tam düzen olarak adlandırılır. Genel tanımlamada, tam ve düzen kısmi düzenin

simetri grupları arasında herhangi bir altgrup ilişkisi gerekmeyeceği gibi, düzen parametre uzayının koset uzayları ile nitelendirilmesine de gerek yoktur.

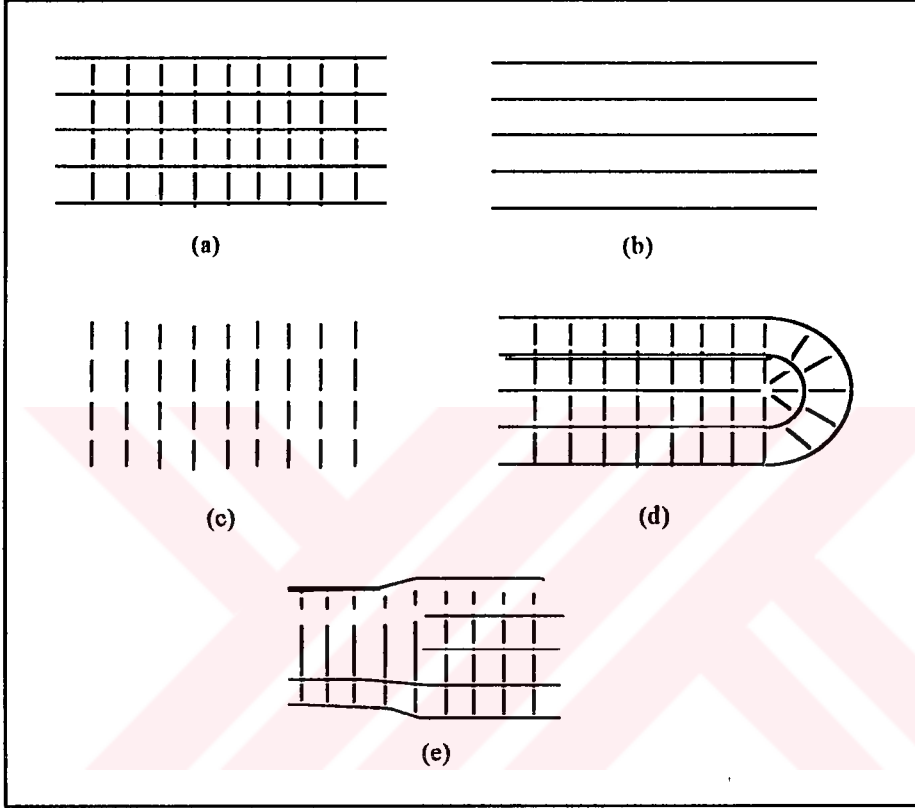
Kesim 4.2. de değişik yarı-kusur türleri ve bunların özelliklerine ilişkin bir tanımlama sunulmuştur. Örneğin yarı-kusurlar, kısmi düzendeki düşük boyutlu kusurlar tarafından sınırlandırılmaları durumunda, hacim içerisinde sona erebilirler. Tam düzen simetrisinin kısmi düzen simetrisinin bir alt grubu olduğu özel durumda, yarı-kusurları sınırlandırmak için özel homotopi teknikleri uygulanır (Kesim 4.3). Bu yarı-kusurlar, tıpatıp homotopi dizisi yardımıyla tam düzendeki kusurlara bağlanır (Kesim 4. 4). Tamkusurlara ilişkin esas grubun yarı-kusurlar için homotopi grupları üzerinde işleme uğratılması Kesim 4.3.3. de açıklanmıştır. Bu işlemin bir sonucu olarak, tam ve yarı-kusurların çakışma süreçlerinde, tam çizgi tekilliklerinin iyi bilinen ayrışma problemlerine benzer şekilde topolojik engeller çıkar.

4.2. Yarı-Kusur Örnekleri ve Özellikleri

4.2.1. Yarı-kusur Örnekleri

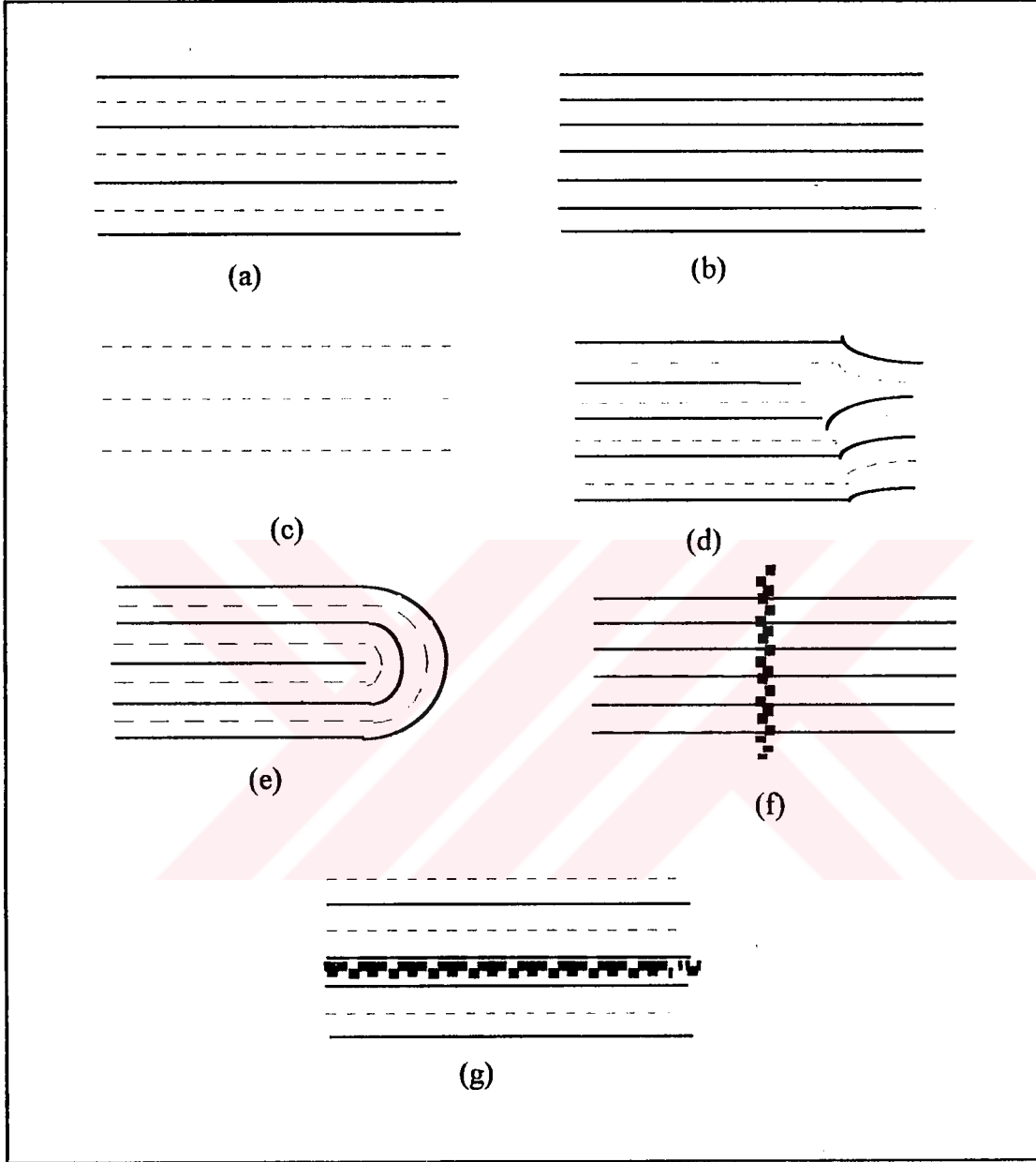
Şekil 4.2.a da kütle merkezleri paralel katmanlar üzerinde toplanmış uzun moleküllerden oluşan düzgün (uniform) bir simetrik A sıvı kristali gösterilmiştir. Düzen parametresi, Şekil 4.2.b deki kütle yoğunluk dalgasına ve uzun menzilli yönelim düzenini tanımlayan yönlendiriciye (Şekil 4.2.c) ayrıştırılabilir. Her iki düzenin birbiriyle ilişkisi, yönlendirici ve katman normalinin birbirine paralel olma şartıdır. Şekil 4.2.d deki alan her iki düzende de tekildir, dolayısıyla bir tam kusuru temsil eder. Şekil 4.2.e deki alan ise bir yarı kusurdur, çünkü yönlendirici alan düzgün iken veya bölgesel bir çalkalanma sonucu düzgün hale getirilebiliyor iken sadece katmanların düzeni bir dislokasyon ile bozunuma uğrar. Genelde nematik duruma geçiş, simetrik duruma geçişten daha yüksek bir sıcaklıkta

oluşur. Dolayısıyla yönlendirici (director) düzen parametresinin rigid bileşenidir ve yarı-kusur tam kusurdan daha az enerji taşır.



Şekil 4.2. (a) Düzgün SmA liquid kristalin katman yapısı
 (b) Düzen parametresinin soft bileşeni
 (c) Rigid bileşeni
 (d) Tam kusur
 (e) Yarı-kusur

SmA₂ çift katmanlı sistemin (Şekil 4.3.a) düzen parametresi, basit SmA₁ kütle yoğunluk dalgasına (Şekil 4.3.b) bir süper yapının (Şekil 4.3.c) bağlanması ile oluşturulabilir. (Şekil 4.3.d ve 3.e) deki her iki düzen de tekil olup tam kusurlara yol açar. Düzen parametresinin rigid kısmı, temel SmA₁ katman sistemi, hiçbir tekillik içermediğinden dolayı Şekil 4.3.f ve 3.g yarı-kusurları gösterir.



Şekil 4.3. (a) Düzgün olmayan antiferroelektrik SmA₂ sıvı kristalinin çift katmanlı sistemi
 (b) Rigit bileşeni
 (c) Soft bileşeni
 (d,e) Tam kusur: her iki düzendeki dislokasyon ve disklinasyon.
 (f,g) Yarı-kusurlar: yoğun kütle düzeni düzgündür, süper yapılar karışıktır.

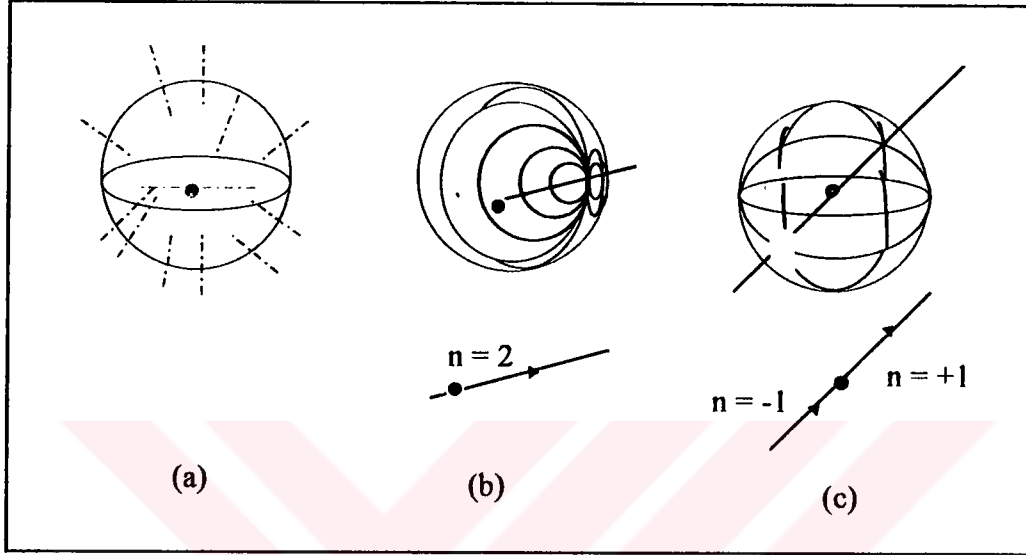
Çift eksenli nematik sıvı kristalin düzen parametresinin iki bileşeni, birbirine dik kalma şartı altındaki ana eksen ve kenar eksenlerdir. Düzen parametresinin rigid bileşenin ana eksen ve soft bileşenin kenar eksen olarak adlandırılmasının temelinde, tek eksenli-çift eksenli nematik geçişe ilişkin değişik teorik ve deneysel çalışmalar bulunmaktadır. Çift eksenli nematiklerin yarı-kusur çizgileri, $\Pi_1(P') = \frac{1}{2} Z$ olması nedeniyle, yarı-tamsayı değerleri ile sınıflandırılırlar.[14]

4.2.2. Özellikler

Bir yarı-kusurun tanımlanması için düzen parametresinin rigid kısmının alanının, tekilliğin komşuluğunda sürekli olduğunun belirtilmesi gerekir. Bu durumda iki yarı-kusur, birinden diğerine sürekli deformasyon esnasında kısmi düzenin tekil olmayı sürdürmesi durumunda ancak birbirine özdeş olarak nitelendirilebilir. Eğer bu şart ihlal edilirse, yarı-kusurlar hacim içerisinde sona erebilir veya türlerini değiştirebilirler. Ancak bu durumda kısmi düzenin düşük boyutlu tekilleri yarı-kusurlara bağlanmalı veya iki yarı-kusur türü arasında bir ara yüzey oluşturmalıdır.

Şekil 4.4.a da tek-eksenli bir nematik fazın hedgehog biçimindeki nokta tekilliği gösterilmiştir. Çift eksenli faza bir geçişten sonra kenar eksenleri, nokta etrafındaki her bir küre üzerinde teğetsel bir yönlendirici alan oluşturur ve bu alan toplam sarmal sayısı 2 olan tekillikler göstermelidir. Bu tekillikler, bir $n = 2$ yarı-kusur çizgisine yol açacak şekilde hedgehog biçimli yüzey tarafından sarılmış olan (Şekil 4.4.b) küre üzerinde bir noktada yoğunlaşabilir. Eğer kürenin zıt kutup noktalarında, herbirinin sarmal sayısı (yüzey normal vektörüne göre) $n = 1$ olan iki tekillik mevcut ise, $n = 1$ sarmal sayısı bir yarı-kusur çizgisi elde

edilir ki bu da nokta tekilliğinde (çizgi boyunca sabit yönelime göre) $n = -1$ indisli bir tekiliğe dönüşür (Şekil 4.4.c).



Şekil 4.4. (a) Tek eksenli nematikte bir hedgehog nokta tekilliğinin yönlendirici alanı
 (b) Çift eksenli yüzeydeki yan eksenin teğetsel alanı. Sarmal sayısı 4π olan yarı-kusur çizgisi.
 (c) b dekinin benzeri toplam sarmal sayısı 2π olan yarı- kusur çizgisi.

Tam kusurların sınıflandırılması için, bir deformasyon sürecinde düzen parametresinin bir bileşeninin kusur cümlesi boyunca sürekliliğini koruyor durumda kalması gerekliliği yoktur. Dolayısıyla eğer tam kusur olarak göz önüne alırsa bazı yarı kusurlar sarmal sayısı 2 ve bunun tam katları olan çift-eksenli duruma bozulabilirler. Ancak bu bozulma sırasında düzen parametresinin rigid kısmında ara durum şeklinde bir tekillik gözlenir. Bu tekillik ise, bir enerji engeli oluşturur ve yarı-kusur için kararlılık sağlar.

Kısmi düzendeki tekillikler tam düzene yol açan bir faz geçişinde bir yarı-kusur oluşmasına neden olabilirler. Şekil 4.4.c deki yarı-kusur çizgileri, tek eksenli nematik fazın çift eksenli faza dönüşmesi durumunda hedgehog biçiminde bir

büyüme gösterirler. Smektik A \rightarrow Smektik C geçişi tek eksenliden çift eksenli faza bir geçiş şeklinde yorumlanabilir ve bu geçişte kenar eksenleri yönlendiricinin katmanlar üzerindeki izdüşümü ile oluşturulur.

4.3. Yarı-Kusurların Topolojik Teorisi

Yeni yapıların çeşitliliği, yarı-kusurlar arasındaki ilişkiler ve süreçler temelde düzen parametresinin iki bileşeni arasındaki çiftlenimden (coupling) kaynaklanır. Bu çiftlenim olmaksızın tam düzen parametresi, rigid bileşen için V_r ve soft bileşen için V_s düzen parametre uzayından oluşan bir $V_r \times V_s$ çarpım uzayında değer alır. Sınıflandırıcı homotopi grupları da bu bileşenler cinsinden çarpanlara ayrılır;

$$\Pi_k (V_r \times V_s) \approx \Pi_k (V_r) \times \Pi_k (V_s) \quad (4.1)$$

ve bu durumda tekillikler, etkileşmeden yan yana varlığını sürdüren tek bileşenli tekilliklerin basitçe üst üste gelmesinden (superposition) oluşur.

Burada, bileşenler arasındaki çiftlenimin, tam düzene sahip H_2 simetri grubu ile kısmi düzene sahip H_1 simetri grubu arasında $H_2 < H_1$ altgrup ilişkisi ile temsil edilebildiği durum göz önüne alınacaktır. Kesim 4.3.1 deki bazı temel görüşlerin ardından Kesim 4.3.2 de, kısmi düzenin düzgün olmaması durumunda bile yarı-kusurların iyi tanımlı oldukları gösterilecektir. Aynı zamanda, tam çizgi tekilliklerine ait $\Pi_1 (G / H_2)$ esas grubunun yarı-kusurlara ilişkin $\Pi_2(H_1/H_2)$ homotopi grupları üzerindeki işleminin anlaşılması için bazı yararlı yöntemler sunulacaktır. Bu işlem nesnelerin doğru şekilde sınıflandırılmasına götürür ve tam kusur çizgileri ile yarı-kusur çizgileri arasındaki çaprazlama süreçlerinde gözlenen özel topolojik engellemeden sorumludur.

4.3.1. Temel Uyarılar

$gH_2 \in G/H_2$ düzgün sabit düzen parametresine sahip bir faz 2 'nin gerçekleşmesi durumunda, faz 1 'e düzgün bir geçişte, $gH_1 \in G/H_1$ sabit değerli bir düzen parametresi elde edilir. Bu durumda geçiş,

$$p : G/H_2 \longrightarrow G/H_1 \quad (4.2)$$

izdüşümü ile tanımlanır. Aynı görüşler düzgün olmayan fazların geçişleri için de geçerlidir. ε bir tekillik kümesi olmak üzere, $R^3 \setminus \varepsilon$ üzerindeki bir F_2 düzen parametre alanının verilmesi durumunda faz 1 deki sonuç alan $F_1 = F_2 \circ p$ olacaktır;

$$\begin{array}{ccc} R^3 \setminus \varepsilon & \xrightarrow{F_2} & G/H_2 \\ & \searrow F_1 & \downarrow p \\ & & G/H_1 \end{array} \quad (4.3)$$

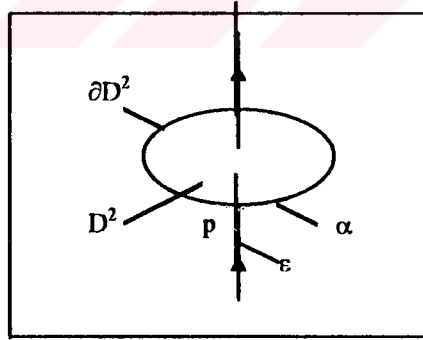
G/H_2 uzayına örnek olarak, taban uzayı G/H_1 ve izdüşümü p olan bir lif demeti göz önüne alınabilir. Taban uzayının her bir noktasına (örneğin bir yönlendiriciye) $H_1/H_2 = p^{-1}(H_1)$ lifinin (kenar eksenlerinin yönelim kümesi) bir kopyası eklenir. Eğer süreç tersine çevrilirse ve bir sabit düzen parametre alanı F_1 den faz 2 'ye geçilirse, yarı-kusurlar ortaya çıkar. Bu durumda matematiksel olarak, $F_1 = p \circ F_2$ olacak şekilde, F_1 den F_2 ye dönüşüm yükseltmesi (lifti) gerekir. Bu yükselme dönüşümü sırasında yeni tekillikler (yarı-kusurlar) ortaya çıkabilir ve hatta çıkması da gerekir. Eğer F_1 düzgün ise, örneğin $H_1 \in G/H_1$ 'e eşit ise yükselme sadece H_1/H_2 de değere sahip bir alandır ve yükselme işlemindeki kusurlar $\Pi_k(H_1/H_2)$ homotopi grupları ile sınıflandırılır. Eğer F_1 düzgün değilse bu düzgün bir alana deforme olur ve yarı-kusurların sınıflandırılması tekrar düzgün duruma döner.

4.3.2. Yarı-kusurlar İçin Homotopi Sınıfları

Bir yarı-kusur çizgisini üç-boyutlu uzayda sınıflandırmak için, Şekil 4.5 de gösterildiği gibi çizgiye dik yönelmiş bir D^2 diski seçilir. Bu durumda, sabit bir $p = \alpha(0) = \alpha(1)$ taban noktasından başlayan, ∂D^2 sınırı boyunda devam eden ve aynı baz noktasında sona eren bir kapalı ilmek tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \alpha : I = [0, 1] &\longrightarrow \partial D^2 \\ t &\longrightarrow \alpha(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Yukarıda olduğu gibi burada da tam düzen parametre alanını F_1 ile ve kısmi düzen parametre alanını F_2 ile göstereceğiz. F_1 alanı tüm D^2 üzerinde iyi tanımlı ve süreklidir; F_2 ise ∂D^2 üzerinde tanımlı ve süreklidir. Şimdi kısmi düzenin sürekli biçimde düzgün bir alana bozulduğunu kabul edelim. Çift-eksenli nematik sıvı kristallerde bu süreç, kenar eksenlerin dönme açılarının ortak bir düzlemde ölçülebilmesini sağlayacak şekilde ana eksenlerin yönelmesine karşılık gelir.



Şekil 4.5. ϵ yarı-kusurunu çevreleyen D^2 diski. Diskin sınırı ∂D^2 , p 'de başlayıp biten α kapalı ilmeği ile tanımlanmıştır.

Deformasyon süreci için F_1 alanı ve $F_2\alpha$ ilmeği,

$$\begin{aligned} F_1(x) &= f_1(x) H_1 \in G / H_1, & x \in D^2, \\ F_2(\alpha(t)) &= f_2(t) H_2 \in G / H_2, & t \in I, \end{aligned} \quad (4.5)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada f_1, F_1 in G ve $f_2, F_2 \circ \alpha$ nın G ye yükselme dönüşümleridir. H_1 ve H_2 sırasıyla $F_1(p)$ ve $F_2(\alpha(0))$ 'nın simetri grupları olarak alınır. ve $f_1(p) = f_2(0) = e$ olduğu kabul edilir. Yükselme dönüşümleri sırasıyla D^2 ve I birleşik bölgeler üzerinde tanımlanır. $H_2 < H_1$ çiftlenim şartından dolayı her $t \in I$ için,

$$f_2(t) H_2 \subset f_1(\alpha(t)) H_1 \quad (4.6)$$

alt küme ilişkisi ve dolayısıyla

$$f_2(t) H_1 = f_1(\alpha(t)) H_1, \quad (4.7)$$

veya

$$f_1(\alpha(t))^{-1} f_2(t) H_1 = H_1. \quad (4.8)$$

eşitliği geçerlidir. Kısmi düzen

$$T_s(x) = f_1(x(1-s) + ps) f_1(x)^{-1} \in G, \quad 0 \leq s \leq 1$$

lokal operatörlerin sürekli bir kümesi yardımı ile düzgün hale getirilebilir. $s = 0$ "homotopi süresi" için $T_s = e$ 'ye eşittir. $s = 1$ için

$$\begin{aligned} T_1(x) F_1(x) &= H_1 = F_1(p), \quad x \in D^2, \\ T_1(\alpha(t)) F_2(\alpha(t)) &= h(t) H_2, \quad t \in I, \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir ve burada,

$$h(t) = f_1(\alpha(t))^{-1} f_2(t) \quad (4.10)$$

dır. Denklem 4.8 'e göre h yolu üzerindeki tüm noktalar H_1 de yer alır. $s = 1$ de kısmi düzen, $H_1 \in G / H_1$ değerli sabit bir alandır. Yarı-kusurun bu adı (based) homotopi sınıfı,

$$[t \mapsto h(t)H_2, 0 \leq t \leq 1] \in \Pi_1(H_1 / H_2, H_2). \quad (4.11)$$

ilmeğinin homotopi sınıfıdır. Üç-boyutlu uzaydaki lineer yarı-kusurlara ilişkin sınıflandırma, kolaylıkla n -boyutlu uzaydaki d -boyutlu yarı-kusurlara genelleştirilebilir. Bunun için, tekilliği enine kesen $(n-d)$ -boyutlu bir D^{n-d} diski

seçilir ve kısmi düzen yukarıda tanımlandığı gibi oluşturulur. $r=n-d-1$ boyutlu ∂D^{n-d} sınırı üzerindeki tam düzen parametresinin alanı sadece H_1 / H_2 yarı-kusur düzen parametre uzayında değere sahip bir alana dönüştürülür. Yarı-kusur için adi homotopi sınıfı

$$[(\partial D^{n-d}, p) \mapsto (H_1 / H_2, H_2)] \in \Pi_1 (H_1 / H_2, H_2). \quad (4.12)$$

şeklindedir.

Sınıflandırma şeması hala üzerinde D^{n-d} ve ∂D^{n-d} alanlarının yönelmiş olduğu özel $F_1(p)$ rigid düzen parametresine bağlıdır. Gelecek kesimde bu bağımlılığın nasıl ortadan kaldırılacağını belirteceğiz.

4.3.3. Bir Grup İşlemi Altındaki Adi Homotopi Sınıfları Yörüngesi Şeklinde Yarı-Kusur Sınıfları

4.3.3.1. Taban noktasının değişimi

Bir yarı-kusur çizgisinin sınıflandırılması işleminde tam düzen eğer bir değer boyunca sıralanıyor ise oldukça özel bir durum olarak kısmi düzenin özel bir $p \in \partial D^2$ noktasında oluşması mümkündür. p yerine referans olarak ortamdaki başka bir q noktası seçilebilir. p ve q noktalarını bir c eğrisiyle (yoluyla) birbirine bağlayalım.

p ve q daki düzen parametreleri bir $k \in G$ dönüşümü ile birbirinden farklılık gösterir:

$$F_i(q) = k F_i(p) \quad i = 1, 2, \quad (4.13)$$

Bu dönüşüm

$$k = c_2(q) c_2^{-1}(p), \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edilebilir ve burada c_2 , c yolu boyunca F_2 nin G 'ye yükselme işlemini temsil etmektedir.

Adi homotopi sınıflarını yeni $F_i(q)$ taban noktaları cinsinden tayin etmek için iki adım gereklidir: İlk olarak düzen parametre uzayları, $i = 1,2$ olmak üzere, $F_i(q)$ nın $K_i = k H_i k^{-1}$ simetrisi gruplu koset uzayları şeklinde tanımlanmalıdır. Daha sonra tam düzenin, kısmi düzenin $F_1(q)$ noktası boyunca yönelmesi (sıralanması) gerekir.

İlk adım için,

$$\Phi_i : G / H_i \rightarrow G / K_i \quad (4.15)$$

homomorfizmlerindeki kH_i kosetinin K_i kosetine, H_i kosetinin $k^{-1}K_i$ ye ve genel olarak her bir gH_i kosetinin $gk^{-1}K_i$ ye karşılık geldiği belirtilmelidir. Φ_i özdeşlik elemanının artık $F_i(p)$ yerine $F_i(q)$ üzerinde yer almasını sağlayacak şekilde, G grubunun düzen parametre uzayına göre $G \rightarrow G$, $g \rightarrow gk^{-1}$ ötelenmesini ifade eder. Bu durumda $F_1(x)$ alanı,

$$G_1(x) = f_1(x) k^{-1}K_1 \quad (4.16)$$

alanına ve $F_2(a(t))$ ilmeği,

$$G_2(\alpha(t)) = f_2(x) k^{-1}K_1 \quad (4.17)$$

ilmeğine dönüşür. Sıralama için gerekli olan, düzen parametre alanlarının G 'ye yükselme dönüşümleri artık,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= f_1(x) k^{-1} \\ g_2(x) &= f_2(x) k^{-1} \end{aligned} \quad (4.18)$$

halini alır. c yolu boyunca, hem kısmi hem de tam düzen için aynı $c_2(x)k^{-1}$ yükselme dönüşümü alınabilir.

Bu ayrıntılı hazırlıklardan sonra kısmi düzen, D^2 diskini ve c yolunun noktalarını içeren $D' = D^2 \cup c$ kümesi üzerinde sıralanır (yerleşir). D' , $c \alpha c^{-1}$ yolunun noktaları ile sınırlandırılmıştır. Denklem 4.10'a göre a ilmeğinin noktaları için tam düzen, sıralanma sonucu, $k(t)K_2$ olur ve $k(t)$.

$$\begin{aligned} k(t) &= g_1(\alpha(t))^{-1} g_2(t) = k f_1(\alpha(t))^{-1} f_2(t) k^{-1} \\ &= k h(t) k^{-1} \in K_1. \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklindedir. Hem kısmi hem de tam düzen için aynı yükselme işlemi seçildiğinden, c boyunca sıralanmış tam düzen, sabit K_2 değerine sahiptir. Dolayısıyla baz noktasının değişimi,

$$\begin{aligned} \Pi_1(H_1/H_2) &\rightarrow \Pi_1(K_1/K_2), \\ [h(t)H_2] &\mapsto [k h(t) k^{-1} K_2]. \end{aligned} \quad (4.20)$$

şeklinde bir yol izomorfizm dönüşümü ile ifade edilir.

4.3.3.2. $\Pi_1(G/H_2)$ in $\Pi_k(H_1/H_2)$ üzerine etkisi (işlemi)

Eğer p taban noktası, bir tam çizgi tekilliği boyunca tekrar aynı p noktasına gelinceye kadar takip ediliyorsa (veya taban noktası sabit tutulup yarı-kusur çizgisi tam çizgi tekilliği boyunca takip ediliyorsa) Denklem 4.20 deki yol izomorfizmi özel bir önem kazanır. Denklem 4.13 ve 14'e göre k , H_2 'nin bir elemanıdır ve Denklem 4.20 deki yol izomorfizmi $\Pi_1(H_1/H_2)$ in bir ilmek otomorfizmine dönüşür. Bu durumda, yarı-kusurları karakterize eden $\Pi_1(H_1/H_2)$ üzerinde tam çizgi tekilliğini karakterize eden bir $\Pi_1(G/H_2)$ işlemi mevcuttur.

Bu işlem, n -boyutlu uzaydaki d -boyutlu yarı-kusurlar için kolaylıkla genelleştirilebilir ve formüle edilebilir. İspata girmeksizin G 'nin basit bağlantılı Lie grubu olması durumunda, $\Pi_1(G/H_2)$ nin $\Pi_r(H_1/H_2)$ üzerindeki grup işlemini $r=n-d-1$ şeklinde belirteceğiz. Aşağıdaki işlemlerde de, hesaplamaları kolaylaştırdığı ve evrensel örtü grupları kullanılarak kolayca elde edilebildiği için, G 'nin bu özelliğe sahip olduğu kabul edilecektir.

G 'nin basit bağlantılı (connected) olması ile, $\Pi_1(G/H_2)$, H_2/H_2^0 bölüm grubu ile izomorfiktir. Burada H_2^0 , H_2 nin özdeşlikle bağlantılı olan bileşenini

göstermektedir. $\lambda \in \Pi_1(G/H_2)$ elemanı, $\ell \in H_2$ olmak üzere, $\ell H_2^o \in H_2/H_2^o$ kosetine karşılık geliyor olsun. F_2 oc ilmeğinin yükselme dönüşümü ℓ' de başlar e de sona erer veya (sağ öteleme ile) e de başlar ℓ'^{-1} de biter. Burada ℓ' , ℓH_2^o in keyfi bir elemanıdır. Buna göre Denklem 4.20 denklemi ile verilen yol izomorfizmindeki k elemanı ℓ'^{-1} e eşittir. $\Pi_1(G/H_2)$ nin $\Pi_1(H_1/H_2)$ üzerindeki işlemi,

$$[h(t)H_2] \rightarrow [\ell'^{-1}h(t)\ell' H_2]. \quad (4.21)$$

ile verilir. Genel olarak, $\Pi_r(H_1/H_2, H)$ nin herhangi bir elemanı,

$$[h(\alpha)H_2 \mid \alpha \in I^r] \quad (4.22)$$

dönüşümünün adi homotopi sınıfıyla temsil edilir. Buradaki

$$h : (I^r, \partial I^r) \rightarrow (H_1, H_2) \quad (4.23)$$

H_1 bir yükselme dönüşümünü gösterir. I^r r-boyutlu küp, ∂I^r ise bunun sınırındır. λ nın neden olduğu otomorfizm altında bu eleman,

$$[\ell'^{-1}g(\alpha)\ell' H_1 \mid \alpha \in I^r] \quad (4.24)$$

haline dönüşür.

Homogen bir G/H uzayının $\Pi_1(G/H)$ esas grubunun etkisi, eğer H_1, H ya ve H_2 ise $\{e\}$ aşikar gruba eşit alınırsa, Denklem 4.21 denkleminde türetilir.

Tekillikler, serbest homotopi sınıfları yardımıyla sınıflandırılır. Bunlar, $\Pi_1(G/H)$ işlemi altındaki adi $\Pi_r(G/H)$ homotopi grup yörüngeleridir. Benzer şekilde, n-boyutlu uzaydaki d-boyutlu yarı-kusurlar da, sembolik olarak $\Pi_r(H_1/H_2)/\Pi_1(G/H_2)$, $r=n-d-1$ şeklinde gösterilen, $\Pi_1(G/H_2)$ işlemi altındaki $\Pi_r(H_1/H_2)$ yörüngelerin kümesi ile sınıflandırılır.

4.4. Tam ve Kısmi Düzende Tekilliklerin Sınıflandırılması

Tam düzendeki tekillikler $\Pi_r(G/H_2)/\Pi_1(G/H_2)$ serbest homotopi sınıfları kümesi yardımıyla sınıflandırılır. Eğer sadece kısmi düzen gözlenebiliyorsa, bunun tekillikleri de $\Pi_r(G/H_1)/\Pi_1(G/H_1)$ ile belirtilir. Bununla birlikte, düzen parametresinin soft bileşenine ilişkin mevcut bilgiler ışığında bu sınıflandırmanın daha hassas hale getirilmesi gerekir. Bu durumda nitelendirici sınıflar $\Pi_r(G/H_1)/\Pi_1(G/H_2)$ yörüngelerinden (orbit) oluşacaktır. Herhangi bir $[g(\alpha)H_1: \alpha \in I^r]$ adi homotopi sınıfının verilmiş olması durumunda bir $\ell \in H_2^0 \in H_2/H_2^0 \cong \Pi_1(G/H_2)$ koseti sınıf üzerinde etki yaparak bu sınıfı,

$$[\ell'^{-1} g(\alpha) \ell' H_1 \mid \alpha \in I^r] \quad (4.25)$$

haline dönüştürür; burada ℓ' , $\ell \in H_2^0$ in keyfi bir elemanıdır. Bu işlem, Kesim 4.3.2. dekine tamamen eşdeğer biçimde gerçekleştirilir. Genelde $\Pi_r(G/H_1)/\Pi_1(G/H_2)$ yörüngeleri, $\Pi_r(G/H_1)/\Pi_1(G/H_1)$ yörüngelerinden çok daha hassas (ince) bir sınıflandırma içerir. Ancak tek eksenli-çift eksenli nematiklerde herhangi bir farklılık yoktur.

Bir $K \in \Pi_1(G/H_2)$ elemanının $\rho \in \Pi_2(G/H_1)$ üzerindeki işlemi, bir nokta tekiliği için, noktanın K ya karşılık gelen çizgi tekiliği etrafında hareket etmesi ile adi homotopi sınıfının değişmesi şeklinde yorumlanabilir. Bununla birlikte, kısmi düzendeki lineer topolojik solitonlar da $\Pi_2(G/H_1)$ elemanları ile tanımlanır. Dolayısıyla eğer böyle bir soliton bir tekil çizgi etrafında takip edilecek olursa, bunun adi homotopi sınıfı söz konusu işlem sonucu değişecektir.

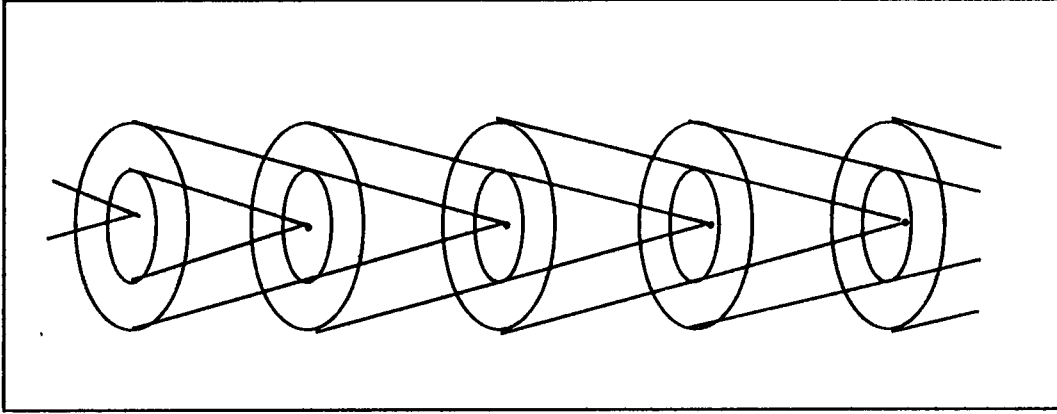
4.5. Tam ve Kısmi Düzendeki Kusurlar İle Yarı-Kusurlar Arasındaki İlişkiler

4.5.1. Homotopi Gruplarının Tıpatıp Dizisi

G/H_2 , baz uzayı G/H_1 ve lifi (fiberi) H_1/H_2 olan bir demet (bundle) uzayı olduğundan, $\Pi_r(G/H_2)$, $\Pi_r(G/H_1)$ ve $\Pi_r(H_1/H_2)$ homotopi grupları tam bir homomorfizm dizisi ile birbirine bağlıdır. Örnek olarak bu homomorfizmlerden birisini göz önüne alalım:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \Pi_2(G/H_2) & \xrightarrow{j_2} & \Pi_2(G/H_1) & \xrightarrow{\partial_2} & \Pi_1(H_1/H_2) \\ & & \xrightarrow{i_1} & \Pi_1(G/H_2) & \xrightarrow{j_1} & \Pi_1(G/H_1) & \rightarrow \dots \end{array} \quad (4.26)$$

Üç boyutlu uzayda gruplar ardışık olarak, tam düzendeki nokta tekilliklerini, kısmi düzendeki nokta tekilliklerini (veya lineer topolojik solitonları), lineer yarı-kusurları, lineer tam kusurları ve kısmi düzendeki çizgi tekilliklerini tanımlarlar. Şekil 4.6 da her bir grup bir disk ile sembolize edilmiş olup, disk merkezi grup özdeşliğini belirtecek şekilde yerleştirilmiştir. İçteki daha küçük diskin noktaları özdeşliğe dönüşür ve bu nedenle dönüşümün çekirdeğini (kernel) oluştururlar. Dizi tamdır, yani herbir homomorfizmin çekirdeği bir önceki homomorfizmin görüntüsüne eşittir. Daha açık ifade edilirse, tekillikleri nitelendiren adi homotopi sınıfı değil, $\Pi_1(G/H_2)$ grup işlemi altındaki bir yörüngedir. Bununla birlikte, dizi bu işlem yardımı ile bir dönüşüm dizisi elde edecek şekilde terimler halinde çarpanlarına ayrılabilir ve bu ayrılma sonucu, çekirdek ve görüntü anlam ve ilişkilerini sürdürdüğünden dolayı dizi yine tamdır.



$$\rightarrow \Pi_2(G/H_2) \xrightarrow{j_2} \Pi_2(G/H_1) \xrightarrow{\partial_2} \Pi_1(H_1/H_2) \xrightarrow{i_1} \Pi_1(G/H_2) \xrightarrow{j_1} \Pi_1(G/H_1) \rightarrow$$

Şekil 4.6. Tıpatıp homotopi dizisi

Homomorfizmler aşağıdaki şekilde yorumlanmalıdır:

(i) j_2 homomorfizmi, bir faz geçişinde olabileceği gibi, tam düzen parametresinin kısmi (rigit) düzen parametresine indirgendiği, bir nokta tekilliğin dönüşümünü tanımlar. Çek j_2 deki kusurlar geçiş sırasında yok olur, çek j_2 dışındaki kusurlar ise kendi görüntülerine dönüşürler.

(ii) ∂_2 homomorfizmi, kısmi düzenli nokta tekilliklerinin yarı-kusur çizgilerine bozulmasını tanımlar ve lineer yarı-kusurlar ile bunların muhtemel sınırları arasında bir ilişki kurar. Çek ∂_2 deki tekil noktalar sınır oluşturmazlar. Tıpatıp dizi olduğundan, bu noktalar bir ters görüntüye sahip noktalara karşılık gelir ve kısmi düzenden tam düzenin ortaya çıkması durumunda söz konusu noktalar bu ters görüntüye dönüşürler. Çekirdek dışındaki tekil noktalar kararlı yarı-kusur çizgilerinin sınırlarını oluştururlar. İm ∂_2 deki yarı-kusurlar sınırlandırılabilirler ve dolayısıyla hacim içerisinde son bulurlar. $\alpha \in \text{İm } \partial_2$ nin sınırları $\partial_2^{-1}(\alpha)$ kümesi içerisinde yer alır. α ve β yarı-kusurları arasındaki arayüzeyler

$\partial_2^{-1}(\alpha\beta^{-1})$ içinde bulunur, çünkü β nun geri katlanması ile sınırlı bir $\alpha\beta^{-1}$ yarı-kusur çizgisi elde edilir.

(iii) i_1 homomorfizmi yarı-kusurları tam kusurlara bağlar. Çek i_1 içindeki yarı-kusur çizgileri tam tekillikler gibi kararsızdırlar. Bu çizgiler, kısmi düzendeki bir tekilliğin ara durum olarak ortaya çıkmasına izin verilmesi durumunda, kusur olmayan bir yapıya dönüşebilirler (relax). İm $\partial_2 =$ çek i_1 olduğundan, dönüşebilir yarı-kusur çizgileri tam olarak sınırlandırılabilen çizgilerdir. Çek i_1 dışındaki yarı-kusurlar hacim (bulk) içerisinde sona ermezler, dolayısıyla tam tekillikler olarak kararlıdırlar. İm $i_1 / \{e\}$ deki tam kusurlara düzen parametresinin rijit bileşeninde tekil olmayan çekirdekler bağlanabilir. Dolayısıyla bu kusurların en düşük enerjiye sahip olduğu kabul edilir.

(iv) j_1 homomorfizmi, tam düzenden kısmi düzene bir faz geçişi sırasında çizgi tekilliklerinin dönüşümünü tanımlar. Ters geçişte çek j_1 in kusurları keyfi biçimde oluşturulabilir. çek $j_1 = \text{Im } i_1$ olduğundan bunlar tam tekillikler olup yarı-kusurlar olarak göz önüne alınabilirler.

Denklem 4.26 'yı izleyen $j_1, \partial_1, i_0, j_0$ homomorfizm serisi de aynı biçimde yorumlanır. Sadece tekilliklerin boyutu 1 arttırılmalıdır. Önceki

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \Pi_3(G/H_2) \xrightarrow{j_3} \Pi_3(G/H_1) \xrightarrow{\partial_3} \Pi_2(H_1/H_2) \\ \xrightarrow{i_2} \Pi_2(G/H_2) \xrightarrow{j_2} \Pi_2(G/H_1) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

serilerinin yorumu daha güçtür (bir nokta tekilliğin sınırı nedir?) ve ilk terim, yarı-kusur soliton süreçlerine ait değişik görüşlerin göz önüne alınmasını gerektirir.

4.6. Yarı-Kusurlar İle İlgili Alıştırmalar

Çizelge 4.1 de değişik düzenli ortamlar için simetri grupları, homotopi grupları ve tıpatıp dizinin parçaları gösterilmiştir. Burada birkaç örnek göz önüne alınacaktır.

4.6.1. Çift Eksenli -Tek Eksenli Nematik Sıvı Kristaller

Çift eksenli nematik sıvı kristallerdeki yarı-kusur çizgileri, u sarmal tamsayıları ile nitelendirilir. Bir yarı-kusur çizgisi etrafındaki herhangi bir ilmek üzerinde kenar eksenleri $2\pi u$ açısı kadar dönerler. Bir yarı-kusur çizgisinin kısmi düzendeki 180° lik bir disklinasyon hattı boyunca takip edilmesi durumunda sarmal sayı (winding number) $-u$ olur. Bu durumda yarı-kusurlar $\{u, -u\}$ çiftleri ile belirtilir. Tam çizgi tekillikleri $Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ quaterniyon grubun elemanlarına karşılık gelirler. Burada i , ana eksen etrafında π kadar dönme yapan bir disklinasyonu göstermektedir. u ile gösterilen bir yarı-kusur çizgisi i^{2u} ile gösterilen bir tam çizgi tekilliğine karşılık gelir. Eğer bir yarı-kusur çizgisinin u sarmal sayısı çift ise, bu durumda çizgi, tam tekillik olarak kararsızdır ve indisli kısmi düzendeki bir nokta tekilliği ile sınırlandırılabilir. 1 indisli nokta tekilliği ise, $+1$ ve -1 sarmal sayılarına sahip yarı kusur çizgilerine ayrılabilir. (Şekil 4.4.c)

$$\begin{aligned} \Pi_1(G/H_2) \text{ nin } \Pi_1(H_1/H_2) \text{ üzerindeki işlemi,} \\ Q \times Z \rightarrow Z \\ (q, u) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -u, \quad q \in \{\pm j, \pm k\} \\ u, \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

ile verilir. $\pm 1, \pm i$ türündeki tam kusurları, ek kusur ve nokta tekillikleri oluşturmaksızın, her yarı-kusur çizgisini kesebilirler. $\pm j, \pm k$ türü kusurlar içinse, eğer bunlar, $u \in \{\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \dots\}$ kesirli sarmal sayılara sahip yarı-kusurları kesiyor ise, topolojik bir engel söz konusudur. Bu kusurların tam sarmal sayılı

yarı-kusurları kesmesi durumunda, $\pm u$, $u \in Z$ ile verilen iki nokta tekilliği ortaya çıkar.

4.6.2. Smektik C Sıvı Kristalleri

Smektik C sıvı kristalleri, moleküllerin kütle merkezlerinin oluşturduğu rigid bir katman yapısını moleküllerin uzun eksenlerinin yönelim düzeni ile birleştirir. Smektik A sıvı kristallerin tersine yönlendiriciler (direktörler), sabit bir açı ile katmanların normalerine göre eğim oluştururlar. Düzen parametresinin soft bileşeni yönlendiricinin katman üzerindeki izdüşümüdür ve bu çoğunlukla düzlemsel (planar) yönlendirici olarak adlandırılır. Çizelge 4.1 de verilen tıpatıp diziden, çek $\partial_2 = 0$ olduğundan dolayı katman düzeni içerisindeki her bir kararlı nokta tekilliğinin kararlı bir yarı-kusur çizgisi sınırladığı görülmektedir. Yarı-kusur çizgileri, $w \in Z$ olmak üzere, $2\pi w$ sarmal açılı düzlemsel yönlendiricideki disklinasyonlardır. Tam çizgi tekillikleri, Z nin (dislokasyonların) Z_4 ile (sarmal açısı π ile çarpım sonucu bulunan disklinasyonlar ile) yarı-direkt çarpımın elemanları yardımıyla belirlenir. Sadece tam sayılı saf disklinasyonlar yarı-kusur olarak göz önüne alınabilir. Bir faz geçişi esnasında herhangi bir yarı-kusur çizgisinin nasıl ortaya çıktığı ve bir yarı-kusur çizgi çiftinin bir nokta tekilliğe nasıl yol açtığı kutuplayıcı mikroskoplar yardımıyla gözlenebilir.

Tam kusurların yarı-kusurlar üzerindeki işlemi,

$$\begin{aligned} (Z \wedge Z_4) \times Z &\rightarrow Z \\ (\{t|r\}, w) &\rightarrow (-1)^r w \end{aligned} \quad (4.29)$$

ile verilir. Sadece yarı tamsayı disklinasyonlar yarı-kusurların sarmal sayısını değiştirir. Tam sayılı disklinasyonlar, yarı-kusurları, herhangi bir topolojik engelleme olmaksızın keserken, yarı tamsayı disklinasyonlar noktaların çift oluşumu ile keserler.

4.6.3. Şiral (Chiral) Smektik C Sıvı Kristaller

Şiral Smektik C fazı (SmC^*) normal smektik C yapıdan, düzlemsel yönlendiricinin (yani yönlendiricinin katman üzerindeki izdüşümünün) katman normaline paralel bir helis eksenini etrafında spiral oluşturması ile farklılık gösterir. Bu yapının simetri grubu, inversiyonunun olmaması dışında, SmC ninki ile izomorfiktir. Dolayısıyla, rigid düzen olarak SmA nın yer aldığı tıpatıp homotopi dizisi (sağa ve sola yönelimli helis bölgelerini birbirinden ayıran duvar kusurlarının ortaya çıkma olasılığı dışında) değişmez kalır. Tam çizgi kusurları yine $Z \wedge Z_4$ ile nitelendirilir ancak bu kusurların farklı biçimde yorumlanması gerekir. Herhangi bir $(t, r) \in Z \wedge Z_4$ simetri elemanı, t katmanı kadar bir öteleme, $r \in Z_4 \cong \bar{C}_2 \subset SU(2)$ şeklinde bir dönme, ayrıca (düzlemsel yönlendiricinin helis düzenlenmesi nedeniyle) adım eksenini etrafında $2\pi \frac{td}{p}$ açısı kadar ek bir dönme içerecektir. Burada P (helisin) adımı ve d tam katman uzaklığını gösterir. Eğer bu açı π 'nin bir tam katı değil ise, bu durumda kusur “dispirasyon” olarak tanımlanır ve bunun dönme kısmı “mükemmel olmayan (imperfect) disklinasyon” olarak adlandırılır. Dispirasyonlar, bir uyumsuzluk (mismatch) duvarı çevreler; ancak bu duvar topolojik olarak kararsızdır. Yarı-kusur çizgileri, t nin sıfıra gittiği tam kusurlara karşılık gelirler, dolayısıyla saf, mükemmel disklinasyonlardır.

Farklı bir açıdan bakıldığında, öteleme periyodu nd olan SmC^* düzende bir süperyapıdan söz etmek mümkündür; burada n , nd/p nin bir tamsayı olmasını sağlayan en küçük tamsayıdır. Bu durumda söz konusu kusur yapısı, şiral olmayan duruma özdeştir. Kısmi düzen olarak H^{super} smetrlili süper yapı ve tam düzen olarak SmC^* düzenlenmesi alınacak olursa, $\Pi_0(H^{SmC^*} / H^{super}) = Z_n$

olduğundan, kararlı yarı-kusur duvarları oluşabilir. Bu duvar kusurları tam olarak, yukarıda söz edilen uyumsuzluk düzlemleridir.

4.6.4. Smektik A_1 - A_2 Sıvı Kristalleri

Smektik A_2 çift katmanlı yapıda dislokasyonlar, t Burgers sayısı yardımıyla katmanlar arası uzaklık cinsinden, disklinasyonların sarmal açısı ise r yarı-tamsayısı yardımıyla 2π cinsinden ölçülür. t yarı tamsayı değerine sahip dislokasyon çizgileri, disklinasyon indisinden bağımsız olup çek ∂_1 içerisinde yer almazlar. Dolayısıyla bu çizgileri kararlı yarı-kusur duvarlarını çevrelemek zorundadır. Bu duvarlar $z \in \Pi_0(H_1/H_2) = Z_2$ ile temsil edilirler ve çeki $i_0 = \Pi_0(H_1/H_2)$ olduğundan hacim içerisinde (bulk) sona erebilirler.

4.6.5.3He-A Süperakışkan

Düzen parametresinin rigid kısmı olarak Cooper çiftlerinin d spin vektörünü, soft kısmı olaraksa, yörüngesel durumu karakterize eden $1, e_1, e_2$ tripodunu göz önüne alacağız. Dipolsüz fazda sadece tek bir kararlı yarı-kusur çizgisi, tripod alanındaki 2π disklinasyonu mevcuttur. Dipol-kilitlenmiş (dipol-locked) fazda ise, d ve l birbirine ya paralel veya iparalel olmayıp, d içindeki nokta tekillikleri, $z \in Z$ şeklinde bir tamsayı olmak üzere, 2π sarmal açısına sahip yarı-kusur çizgilerini kuşatırlar. [14]

Çizelge 4.1. Bilinen bazı yoğun madde sistemlerinin simetri grupları, yan-kusur ile tam kusurları arasındaki homotopi grupları dizileri

Düzen	Simetri Gruplar $H_2 < H_1 < G$				Tam Diziler			
	G	H_1	H_2	n	$\Pi_{\text{per}}(G/H_2) \xrightarrow{j_{n+1}} \Pi_{\text{per}}(G/H_1) \xrightarrow{\partial_{n+1}} \Pi_n(A) \rightarrow$	$\Pi_{\text{per}}(V, A) \rightarrow$	$\Pi_n(H_1/H_2) \xrightarrow{h_n} \Pi_n(A) \rightarrow$	$\Pi_n(G/H_2) \xrightarrow{h_n} \Pi_n(V)$
Tek Eksenli Çift Eksenli-Nematikler	$O(3)$	$D_{\infty h}$	D_{2h}	1	$0 \rightarrow$	$Z \rightarrow$ $Z \rightarrow$	$\frac{1}{2}Z \rightarrow$ $Z \rightarrow$ $2Z \rightarrow$ $u \rightarrow$	Q i^{2n}
Nematikler - Simetrik A	$E = T(3) \wedge O(3)$	$T(3) \wedge D_{\infty h}$	$(T(2) \wedge Z) \wedge D_{\infty h}$	1	$Z \rightarrow$ $Z \rightarrow$	$Z \rightarrow$ $Z \rightarrow$	Distokasyonlar 0 $b \rightarrow$	$Z \wedge Z_4$ (b,0)
Simetrik A1-Simetrik C	E	$(T(2) \times Z) \wedge D_{\infty h}^Z$	$(T(2) \times Z) \wedge C_{2v}^X$	1	0 \rightarrow	$Z \rightarrow$ $Z \rightarrow$	2z Distokasyon, $w \rightarrow$	$Z \wedge Z_4$ Distokasyon (0,2w mod 4)
Simetrik A1-Simetrik A2	E	$(T(2) \times Z) \wedge D_{\infty h}$	$(T(2) \times Z) \wedge D_{\infty h}$	0	$2Z \wedge Z_2 \rightarrow$ (tr) \rightarrow	$Z \wedge Z_2 \rightarrow$ (tr) \rightarrow	$Z_2 \rightarrow$ $t' \text{ mod } Z$	0
Süper aşkan $^3\text{He-A}$ kilitli-loced	$SO(3) \times (SO(3) \times U(1))$	$SO(2) \times (SO(3) \times U(1))$	$SO(2) \times (SO(3) \times U(1)) \times Z_2$	1	$Z \rightarrow$ $Z \rightarrow$	$Z \rightarrow$ $Z \rightarrow$	$Z_2 \rightarrow$ 0 $Z \rightarrow$	Z_4 2z
Süper aşkan $^3\text{He-A}$ kilitli-loced	$SO(3)$	$SO(2)$	0	1	0 \rightarrow	$Z \rightarrow$ $Z \rightarrow$	$Z \rightarrow$ 2z $u \rightarrow$	Z_2 $u \text{ mod } 2$
Süperörgü-Altörgü	$E_0 = T(3) \wedge SO(3)$	$Z_3 \wedge O$ O: Oktagonel grup	$(3Z)^3 \wedge O$	0	$(3Z)^3 \wedge \bar{O} \rightarrow$ (x,y,z,0) \rightarrow	$Z^3 \wedge \bar{O} \rightarrow$ (x,y,z,0) \rightarrow (x',y',z',0') \rightarrow	$Z_3 \times Z_3 \times Z_3 \rightarrow$ (x' mod 3, y' mod 3, z' mod 3)	0
Kristal	$E(2) = T(2) \wedge SO(3)$	$B \wedge C_{3v}$ $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} + Z \times Z \right\}$	$(Z \times Z) \wedge C_{3v}$	0	$(Z \times Z) \wedge Z \rightarrow$ (Distokasyon) (v,z) \rightarrow	$B \wedge Z \rightarrow$ diskinasyon (v,z) (b,z) \rightarrow	$(B \text{ mod } Z \times Z) \wedge Z_2 \rightarrow$	0
Monoclinik kristal	E(2)	$B \wedge C_{2v}$ $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \right\} + Z \times Z$	$(Z \times Z) \wedge C_{2v}$	0	$(Z \times Z) \wedge Z \rightarrow$ (v,z) \rightarrow z Π nin birimindeki diskinasyon	$B \wedge Z \rightarrow$ (v,z) (b,z) \rightarrow	$(b \text{ mod } Z \times Z, z' \text{ mod } 2) \rightarrow$ $B \text{ mod } Z \times Z \rightarrow$ $b \text{ mod } Z \times Z$	0

KAYNAKLAR

- 1-KITTEL, C., Çeviren: KARAOĞLU, B., 1996. Katıhal Fiziğine Giriş. Bilgi Tek Yayınları. İstanbul.
- 2-DURHAN, T. N., 1989. Katıhal Fiziğine Giriş. Ankara Üniversitesi Yayınları. Ankara
- 3-BALCI, S.,1978. Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu Yüksek Lisans Tezi , Ankara Üniversitesi
- 4-KOSNIOWSKI, C. 1980. A First Course In Algebraic Topology. Cambridge University Press. Cambridge.
- 5-NAKAHARA, M. , 1990. Geometri ,Topology and Physics. Adam Hilger. New York .
- 6-NASH, C. D.R., ve SEN, S., 1983. Topology and Geometri for Physicists. Academic Press. London.
- 7-KLEMAN, M., Relationship between Burgers circuit, Volterra process and homotopy groups. J. Physique Lett. 1977. 38:L 199 .
- 8-MERMİN, N.D., 1979. The topological theory of defects in ordered media . Rev. Mod. Phys. 51 (3) : 591-648.
- 9-NABARRO, F.R.N., 1992. Dislocations in Solids Volume 9. North-Holland Publishing Company.
- 10-POENARU, V. and TOULOUSE, G., The crossing of defects in ordered edia and the topology of 3-manifolds. J.Physique. 1977. 39:887.
- 11-TOULOUSE, G. and KLEMAN, M., Principles of a classification of defects in ordered media. J. Phys. Lett. 1976. 37:L-149.
- 12-KLEMAN, M., Defects in liquid crystals. Rep. Prog. Phys. 1989. 52:555.
- 13-KLEMAN, M., The topological classifacion of defects. in Formation and Interactions of Topological Defects. Edited by DAVIS, A.C. and Brandenberger, 1995. R. Plenum Press. New York .

14-KUTKA, R., TREBÍN, H.R. and KIEMES, M., The topological theory of semidefects in ordered media. *J.Physique*. 1989. 50:861.

15-VERÇİN, A., 1987. Doktora Tezi , Ankara Üniversitesi.



ÖZGEÇMİŞ

Naim TUĞLU , 1972 yılında Gümüşhane ili Kelkit ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Samsun Bozkurt İlkokulunda, ortaokul ve lise öğrenimini Samsun Mithat Paşa Lisesi'nde 1989-90 öğretim yılının sonunda tamamladı. 1990-91 öğretim yılında Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 1993-1994 öğretim yılı sonunda mezun oldu. Şubat 1995 yılında Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğretimine başladı. 28 Kasım 1996 yılından itibaren Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.