



**T.C.
HALIÇ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

MATRİS GRUPLARININ LİE TEORİSİ AÇISINDAN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hazırlayan
Gökçe YILDIRIM**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Sultan SÜTLÜ**

**İSTANBUL
Haziran 2022**



**T.C.
HALIÇ ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK TEZLİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

MATRİS GRUPLARININ LİE TEORİSİ AÇISINDAN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Hazırlayan
Gökçe YILDIRIM**

**Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Sultan SÜTLÜ**

**İSTANBUL
Haziran 2022**

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ'NE

Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Yüksek Lisans Programı Öğrencisi
Gökçe YILDIRIM tarafından hazırlanan "*Matris Gruplarının Lie Teorisi Açısından
İncelenmesi.*" konulu çalışması jürimizce Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Savunma Tarihi: 28/06/2022

Jüri Üyesinin Ünvanı, Adı, Soyadı ve Kurumu:

İmzası

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üye. Sultan SÜTLÜ
(Haliç Üniversitesi)

Jüri Üyesi : Dr. Öğr. Üye. Tayfun YEGÜL
(Haliç Üniversitesi)

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Seda KIZILBUDAK ÇALIŞ
(Yıldız Teknik Üniversitesi)

Bu tez yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun kararıyla kabul edilmiştir.

(Enstitü Müdürünün Ünvanı, Adı, Soyadı)
Müdür

İNTİHAL RAPORU

MATRİS GRUPLARININ LİE TEORİSİ AÇISINDAN İNCELENMESİ

ORJİNALLİK RAPORU

% **9**

BENZERLİK ENDEKSİ

% **6**

İNTERNET KAYNAKLARI

% **6**

YAYINLAR

% **4**

ÖĞRENCİ ÖDEVLERİ

BİRİNCİL KAYNAKLAR

1 Warren B. Powell. "Reinforcement Learning and Stochastic Optimization", Wiley, 2022

Yayın

2 acikbilim.yok.gov.tr

İnternet Kaynağı

3 www.tbpe.state.tx.us

İnternet Kaynağı

4 libratez.cu.edu.tr

İnternet Kaynağı

5 Submitted to The Scientific & Technological Research Council of Turkey (TUBITAK)

Öğrenci Ödevi

28/06/2022

TEZ ETİK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Matris Gruplarının Lie Teorisi Açısından İncelenmesi” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Sultan SÜTLÜ’nün sorumluluğunda tamamladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim.

Gökçe YILDIRIM

ÖNSÖZ

Tez yazım süreci boyunca sabrıyla ve özverisiyle yanımda olan, engin bilgi ve birikimlerini benden esirgemeyen değerli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Sultan SÜTLÜ'ye teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Haliç Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dekanı Prof. Dr. Oya OĞUZ'a, Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Ömer Oğuz'a, Dr. Öğr. Üyesi Taygun YEGÜL'e teşekkürü bir borç bilirim. Hayatımın her anında sevgisini, inancını ve desteğini her zaman bana hissettiren aileme sonsuz minnettarım.

Haziran, 2022

Gökçe YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

TEZ ETİK BEYANI	i
ÖNSÖZ.....	ii
İÇİNDEKİLER	iii
KISALTMALAR	iv
SEMBOLLER	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. MATRİS GRUPLARI	2
2.1. Genel Lineer Grup	2
2.2. Özel Lineer Grup	4
2.3. Ortogonal Grup	6
2.4. Matris Gruplarının Topolojisi	9
3. MANİFOLDLAR, LİE CEBİRLERİ VE LİE GRUPLARI	12
3.1. Manifoldlar	12
3.2. Lie Cebirleri ve Üstel Tasvir	14
3.3. Lie Grupları	26
4. MATRİS LİE GRUPLARI	28
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	33
ÖZGEÇMİŞ.....	35

KISALTMALAR

$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklid Uzay
$M_n(\mathbb{R})$	: $n \times n$ tipindeki tüm reel matrislerin kümesi
$GL_n(\mathbb{R})$	: Genel Lineer Grup
$SL_n(\mathbb{R})$	: Özel Lineer Grup
$O_n(\mathbb{R})$	: Ortogonal Grup
$T_x(M)$	: M manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı
C^k	: k . mertebeden diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$o_n(\mathbb{R})$	: Ortogonal Grubun Lie cebiri
$sl_n(\mathbb{R})$	: Özel Lineer Grubun Lie cebiri

SEMBOLLER

det : Determinant
 İz : İz
 $\langle, \rangle$: İç çarpım
 A^T : A matrisinin transpozesi
 a_{ij} : A matrisinin i . Satırı ve j .sütunu



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No.

Şekil 3.1. $T_x M$ Tanjant uzayının şematize edilmiş hali.....15



ÖZET

MATRİS GRUPLARININ LİE TEORİSİ AÇISINDAN İNCELENMESİ

Matris grupları, matematiğin birçok alanında ve uygulamalarda önemli bir role sahiptir. Matris grupları özellikle cebirsel (soyut cebir ve lineer cebir anlamında) yapıları ile ele alınmakla birlikte, bu tez çalışmasında matris gruplarının topolojik yapısı da ele alınmıştır. Daha önceki yıllarda yapılan çalışmalarda da görülmüştür ki, matris grupları cebir ve geometrinin matematiksel olarak ilginç bir şekilde iç içe geçmiş bir örneği olarak görülebilir.

Lie teorisi, Lie grupları ve Lie cebirleri ile bunların uygulamalarından oluşan matematiğin bir alt dalıdır ve 19. yüzyılın sonlarında Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından ortaya atılmıştır. Temelde sürekli ya da diferansiyellenebilir soyut grupların teorisine dayanır. Bu tez çalışmasında n -boyutlu Euclid uzayı üzerinde lineer dönüşümlere karşılık gelen matrislerin gruplarını ele alınmıştır. Bunun için çeşitli kaynaklardan matris gruplarının yapıları ve bunlar üzerindeki ilgili önerme ve teoremleri kullanılmıştır. Diğer taraftan, Lie teorisi temel olarak topoloji ve diferansiyellenebilir manifoldların grup yapısına dayanmaktadır. Bu sebeple bütünlük açısından, diferansiyellenebilir manifoldların teorisindeki ilgili tanım ve teoremler ile ilgili topolojik temellere değinilmiştir. Bir Lie grubu kendisine ilişik bir yapı olan Lie cebiri kavramı ile birlikte anılır. Lie grupları ile Lie cebirleri arasındaki ilişki üstel tasvir ile sağlanır. Bazı çalışmalarda Lie grupları ile çalışırken, bunlar yerine Lie cebirleri ile çalışmak daha pratik ve uygun olabilir.

Herhangi bir matris grubunu, üzerinde kurduğumuz diferansiyellenebilir yapı ile birlikte bir manifold ve işlem ile birlikte bir Lie grup yapısına sahiptir. Bu tez çalışmasında özel olarak genel lineer grup, özel lineer grup ve ortogonal grup ele alınarak bunların Lie cebirleri de ayrıntılı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Lie grubu, Lie cebiri, matris grubu.*

ABSTRACT

A SURVEY OF MATRIX GROUPS IN LIE THEORY

Matrix groups have an important role in many fields of mathematics and its applications. Matrix groups are discussed especially with their algebraic structures (in the sense of abstract algebra and linear algebra), in this thesis the topological structure of matrix groups is also discussed. It has also been seen in previous studies that matrix groups can be seen as an interesting mathematically intertwined example of algebra and geometry.

Lie theory is a subbranch of mathematics consisting of Lie groups and Lie algebras and their applications, and was introduced by the Norwegian mathematician Sophus Lie in the late 19th century. It is basically based on the theory of continuous or differentiable abstract groups. In the thesis, groups of matrices corresponding to linear transformations on n -dimensional Euclidean space are discussed. For doing this, the structures of matrix groups from various sources and their related propositions and theorems are used. On the other hand, Lie theory is mainly based on topology and group structure of properly differentiable manifolds. For this reason, for the sake of completeness, topological foundations related to the related definitions and theorems in the theory of differentiable manifolds are mentioned.

A Lie group is associated with its associated structure, the concept of Lie algebra. The relationship between Lie groups and Lie algebras is provided by exponential map. In some studies, when working with Lie groups, it may be more practical and appropriate to work with Lie algebras instead. Any matrix group has a manifold and a Lie group structure with the operation, along with the differentiable structure we build on it. In this thesis, the general linear group, the special linear group and the orthogonal group have been dealt with and their Lie algebras have been examined in detail.

Keywords: *Lie groups, Lie algebras, matrix groups.*

1. GİRİŞ

Lie teorisi, Lie grupları teorisi ve Lie cebirleri teorisi ile bunların uygulamalarından oluşan matematiğin bir alt dalıdır ve 19. yüzyılın sonlarında Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından ortaya atılmıştır. Lie teorisi, klasik, diferansiyel ve cebirsel geometri, topoloji, adi ve kısmi diferansiyel denklemler gibi ihtiva ettiği zengin matematiksel içerikle ve yakın ilişki de olduğu fizik ve mühendislik alanlarıyla disiplinler arası bir konudur. Temelde sürekli ya da diferansiyellenebilir grupların yani sürekli ya da diferansiyellenebilir bir işlem ile birlikte soyut grupların teorisine dayanır. Bu tez çalışmasında özel olarak n -boyutlu Euclid uzayı üzerinde lineer dönüşümlere karşılık gelen matrislerin grupları ele alınmıştır. Bunun için çeşitli kaynaklardan matris gruplarının yapıları ve bunlar üzerindeki ilgili önerme ve teoremleri kullanıldı. Matris gruplarını Lie teorisi açısından incelenerek Lie grubu ve Lie cebiri yapılarını ortaya koymaktadır. Böylelikle matris gruplarının cebirsel yapısının yanında, topolojik yapısını da incelemek amaçlanmıştır. Ayrıca, Lie grubu ile Lie cebiri arasındaki ilişkiyi açıklamak ve bazı spesifik matris Lie grubu örneklerini incelemek tezin hedeflerinden biridir.

Tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmış ve Lie teorisinin matematikteki yeri ve önemine vurgu yapılmıştır. İkinci bölümde; matris grupları başlığında genel lineer grup, özel lineer grup, ortogonal grup incelenmiş ve ayrıca matris grupları için topolojik kavramlar ve özellikler irdelenmiştir.

Üçüncü bölümde; manifoldlar, Lie cebirleri ve Lie grupları ile üstel tasvir başlıkları altında, ikinci bölümde bahsi geçen matris gruplarının Lie cebirleri incelenmiştir. Matrisler için üstel tasvir tanımlanarak, üstel tasvir yardımıyla matris grupları ile Lie cebiri ilişkisi ortaya konmuştur.

Dördüncü bölüm olan matris Lie grupları başlığında ise Lie cebirinden alınan bir elemanın üstel tasvir vasıtasıyla Lie grubu elemanına nasıl dönüştürüldüğü konusu ayrıntılarıyla ispatlanmıştır. Sonuç olarak tüm matris gruplarının bir manifold yapısına sahip olduğu ve bu yapı ile birlikte Lie grubu olduğu ispatlanmıştır.

2. MATRİS GRUPLARI

Bu tez çalışmasının amaçları doğrultusunda, bileşenleri sadece reel sayılar olan matrisler ile çalışacağız. Benzer şekilde kompleks sayılar veya quaterniyonlar gibi değişik cisimler üzerinde matris grupları oluşturmak mümkün olmakla birlikte bunlar tez konumuz dışına kalmaktadır. Bileşenleri reel sayılar olan, $n \times n$ tipindeki tüm kare matrislerin kümesi $M_n(\mathbb{R})$ ile gösterilsin.

2.1. Genel Lineer Grup

Tanım: $\mathbb{R}$ üzerinde bir $GL_n(\mathbb{R})$ grubu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \exists B \in M_n(\mathbb{R}) AB = BA = I_n\}$$

Burada, I_n matrisi $n \times n$ boyutlu birim matristir. $GL_n(\mathbb{R})$ grubu tersi alınabilir $n \times n$ tipindeki tüm matrislerden oluşur.

Lemma: $GL_n(\mathbb{R})$ matris çarpma işlemi altında bir gruptur.

İspat: $n \in \mathbb{N}$ keyfi olsun ve $GL_n(\mathbb{R})$ grubunu düşünelim. $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ kare matrisleri için $\det(A)\det(B) = \det(AB)$ dir. Ayrıca, $X, Y \in GL_n(\mathbb{R})$ olduğunda $\det(X) \neq 0 \neq \det(Y)$ olup

$$\det(XY) = \det(X)\det(Y) \neq 0 \quad (2.1)$$

dir. Böylece $XY \in GL_n(\mathbb{R})$ olduğu gösterilir.

Dolayısıyla $GL_n(\mathbb{R})$ matris çarpma işlemi altında kapalıdır. Şimdi $GL_n(\mathbb{R})$ 'nin üç özellik ile grup olduğunu gösterelim.

Birleşme özelliği:

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ ve $C = (c_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ olsun.

$$\begin{aligned} (A * B) * C &= ((a_{ij}) * (b_{ij})) * (c_{ij}) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right) * (c_{ij}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{l=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_{lk} b_{kl} \right) * (c_{lj}) \right) \\
&= \left(\sum_{l=1}^n a_{il} * \left(\sum_{k=1}^n b_{lk} * c_{kj} \right) \right) \\
&= (a_{ij}) * \left(\sum_{k=1}^n b_{lk} * c_{kj} \right) \\
&= (a_{ij}) * ((b_{ij}) * (c_{ij})) \\
&= A * (B * C)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Böylece matris çarpma işlemi birleşmelidir. Bu nedenle bu özellik $GL_n(\mathbb{R})$ grubu için geçerlidir.

Birim eleman özelliği: $A \in GL_n(\mathbb{R})$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

I_n birim matrisi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ ve $\det(I_n) = 1$, $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ olur.

Ters eleman özelliği: $A \in GL_n(\mathbb{R})$ olduğundan $GL_n(\mathbb{R})$ grup tanımından A matrisinin tersi olduğu söylenir. Bu yüzden A matrisinin tersi vardır. A^{-1} matrisi tersi alınabilir olduğundan $(A^{-1})^{-1} = A$ olur.

Dolayısıyla $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ dir. Daha sonra, $GL_n(\mathbb{R})$ matris çarpma işlemi altında bir gruptur. Bir reel sayı dizisinin yakınsaklığının tanımına benzer şekilde $M_n(\mathbb{R})$ 'da bir matris dizisinin yakınsaklığı da tanımlanabilir.

Tanım: A_m dizisi $M_n(\mathbb{R})$ 'da matrislerin bir dizisi olsun. Eğer; m sonsuza yaklaşırken ($m \rightarrow \infty$) $1 \leq i, j \leq n$ için, A_m dizisinin her (ij) . elemanı yani $(A_m)_{ij}$ değeri, bir A matrisinin karşılık gelen (ij) . bileşenine yani $(A)_{ij}$ değerine yakınsıyor ise A_m matris dizisi A matrisine yakınsıyor denir.

Tanım: $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ herhangi bir alt grup olsun. Eğer A_m, G 'deki herhangi bir matris dizisiyse ve A_m bir A matrisine yakınsıyor ise, bu durumda $A \in G$ özelliğini sağlayan genel lineer grubun tüm alt gruplarına matris grubu denir.

Bu tanımdan bir matris grubunun topolojik anlamda kapalı bir küme olduğu sonucunu çıkartabiliriz. Bu ise matris gruplarının topolojisini incelediğimiz 2.4 nolu bölümdeki gibi matris gruplarının tüm limit noktalarını içerdiği anlamına gelir.

Böylece bu bölümü $GL_n(\mathbb{R})$ genel lineer grubun bir matris grubu olduğunu söyleyerek bitirebiliriz.

2.2. Özel Lineer Grup

Tanım: $\mathbb{R}$ üzerinde bir özel lineer grup $SL_n(\mathbb{R})$ ile gösterilen, determinantı 1 olan $n \times n$ boyutlu matrislerden oluşan kümedir.

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det = 1\} \quad (2.5)$$

Özel lineer grup bir matris grubudur. Bunu ispatlamak için öncelikle determinant fonksiyonunun sürekli olduğunu göstermek gerekir.

Teorem: Determinant fonksiyonu $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ süreklidir.

İspat: İspat n üzerinde tümevarımla gösterilecektir. $n = 1$ olsun. 1×1 boyutlu matrisin determinantı kendisidir. Bu nedenle girdileri kendisi olan determinant fonksiyonu süreklidir. Böylece $M_1(\mathbb{R})$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye determinant fonksiyonu süreklidir.

Şimdi $M_n(\mathbb{R})$ 'dan $\mathbb{R}$ 'ye determinant fonksiyonunun sürekli olduğunu varsayalım. Amacımız determinant fonksiyonunun $M_{n+1}(\mathbb{R})$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye sürekli olduğunu göstermektir.

$A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Determinantın tanımına göre;

$$\det A = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+j} a_{i,j} M_{i,j} \quad (2.7)$$

$M_{i,j}$ her i için bir $n \times n$ boyutlu matrisinin determinantı olduğundan, $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $\det A$ reel bir sayı ile çarpılan sürekli fonksiyonların toplamı olarak tanımlanabilir. Bu yüzden $\det A$ fonksiyonu süreklidir.

Böylece $M_{n+1}(\mathbb{R})$ 'den $\mathbb{R}$ 'ye tanımlanan determinant fonksiyonunun sürekli olduğu tümevarım yoluyla ispatlanmıştır.

Teorem: $SL_n(\mathbb{R})$ grubu bir matris grubudur.

İspat: $n \in \mathbb{N}$ keyfi olsun. İlk önce $SL_n(\mathbb{R})$ 'nin $GL_n(\mathbb{R})$ 'nin bir alt grubu olduğunu gösterelim. $A, B \in SL_n(\mathbb{R})$ olsun.

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \text{ ve } \det(A) = 1 = \det(B) \quad (2.8)$$

olduğundan $A, B \in SL_n(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 1 = 1$. Böylece $AB \in SL_n(\mathbb{R})$ olur.

Dolayısıyla $SL_n(\mathbb{R})$ matris çarpma işlemi altında kapalıdır. Ayrıca, $\det(I_n) = 1$ olduğundan $I_n \in SL_n(\mathbb{R})$ olur. Son olarak

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) \text{ ve } \det(A) = 1, \det(A^{-1}) = 1$$

olur. Bu yüzden $A^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$ olacaktır. Böylece $SL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{R})$ 'nin alt grubu olduğu görülür.

(A_m) dizisi her $m \in \mathbb{N}$ ve $A_m \rightarrow A$ için $A_m \in SL_n(\mathbb{R})$ matrisi dizisi olsun. $\det A_m = 1$ olduğunda her $m \in \mathbb{N}$ için determinant fonksiyonu sürekli olduğundan bir önceki teorem ve

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tüm $n \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizi olmak üzere

$x_n \in A$ için $x_n \rightarrow c$ yakınsıyor ise $f(x_n) \rightarrow f(c)$ ve $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ teoremi gereğince $\det(A) = 1$ dir. Böylece $A \in SL_n(\mathbb{R})$ olur. Böylece $SL_n(\mathbb{R})$ grubu bir matris grubudur.

2.3. Ortogonal Grup

Ortogonal grubu tanımlayabilmek için bazı terim, notasyon ve yardımcı teoremlere ihtiyaç vardır.

Tanım: $\mathbb{R}^n$ uzayındaki standart iç çarpım $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlanan fonksiyondur.

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle_{\mathbb{R}} := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots x_n \cdot y_n \quad (2.9)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım: $\mathbb{R}^n$ uzayındaki standart norm (boy) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ ile tanımlanan fonksiyondur.

$$|x|_{\mathbb{R}} = \sqrt{\langle x, x \rangle_{\mathbb{R}}} \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım: $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörler olmak üzere, eğer $\langle x, y \rangle = 0$ sağlanıyorsa ortogonal, $|x| = 1$ ise birim vektör olarak olarak adlandırılır. Ayrıca bir $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrisinin sütun vektörleri ortogonal birim vektörler ise A ya ortogonal denir.

Bu tanımın tüm $x, y \in \mathbb{R}$ için $\langle xA, yA \rangle = \langle x, y \rangle$ ile eşdeğer olduğu söylenebilir. Bu durum izometri koşulu olarak bilinir, bu ise bir ortogonal matrisin uzaklık koruyan lineer transformasyon olduğu anlamına gelir. Tanımdan her $A \in M_n(\mathbb{R})$ ortogonal matris için

$$A^T \cdot A = I_n = A \cdot A^T \quad (2.11)$$

eşitliği sağlanır. Burada A^T , A matrisinin transpozesi olarak gösterilir. a_{ij} , A matrisinin i .satırı ve j .sütünü olmak üzere o halde a_{ij} A^T matrisinin i .sütünü ve j .satırı olarak ifade edilir.

Bir sonraki tanım ortogonalliği farklı üzerinde genelleştirir.

Tanım: $\mathbb{R}$ üzerinde ortogonal grup aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \langle xA, yA \rangle = \langle x, y \rangle \text{ tüm } x, y \in \mathbb{R}^n \text{ için}\} \quad (2.12)$$

$O_n(\mathbb{R})$ grubunun bir matris grubu olduğunun ispatı bölüm sonunda gösterilecektir. Bu ispattan önce birkaç temel tanım ve kavram verilecektir.

Tanım: $\mathbb{R}^n$ uzayının bir kümesi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere, eğer $i = j$ olduğunda $\langle x_i, x_j \rangle = 1$, $i \neq j$ olduğunda $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ sağlanıyorsa kümesi ortonormal olarak adlandırılır.

Yardımcı Teorem: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ise $(AB)^T = B^T A^T$ eşitliği sağlanır.

İspat: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlı olup aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \right)^T \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= B^T A^T \end{aligned} \quad (2.14)$$

Yardımcı Teorem: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ise $(A^n)^T = (A^T)^n$

Tümevarım kullanalım. $n = 1$ için $(A^1)^T = A^T = (A^T)^1$ olduğu görülür.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $(A^n)^T = (A^T)^n$ olduğunu varsayalım. $(AB)^T = B^T A^T$ eşitliğinden

$$(A^T)^{n+1} = (A^T)^n \cdot A^T = (A^n)^T \cdot A^T = (A \cdot A^n)^T = (A^{n+1})^T \quad (2.15)$$

elde edilir. Daha sonra,

$(A^n)^T = (A^T)^n$ eşitliğinin matematiksel tümevarım ilkesine göre doğru olduğu gösterilmiş olur.

Teorem: Tüm $A \in GL_n(\mathbb{R})$ için $A \in O_n(\mathbb{R})$ olması için gerek ve yeter koşul $A \cdot A^T = I_n$ dur.

İspat: İspata başlamadan önce, $A \in M_n(\mathbb{R})$ ve tüm $x \in \mathbb{R}^n$ için $R_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$R_A(x) = x \cdot A \quad (2.16)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $A = [a_{ij}]_n \in GL_n(\mathbb{R})$ keyfi matrisini ele alalım.

Gerek koşul için; $A \in O_n(\mathbb{R})$ olsun. $\mathbb{R}^n$ uzayının bir ortonormal bazı

$\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$ ve $\langle x \cdot A, y \cdot A \rangle = \langle x, y \rangle$ olduğundan;

$$\{R_A(e_1), R_A(e_2), \dots, R_A(e_n)\} \quad (2.17)$$

bir ortonormal vektörler kümesidir. Ayrıca $\{R_A(e_1), R_A(e_2), \dots, R_A(e_n)\}$ vektörleri A matrisinin satır kümesidir. Yani $R_A(e_i)$ A matrisinin i .satırına karşılık gelir.

$$\begin{aligned} (A \cdot A^T)_{ij} &= (A \text{ nın } i. \text{ satırı}) \cdot (A^T \text{ nın } j. \text{ sütunu}) \\ &= (A \text{ nın } i. \text{ satırı}) \cdot (A \text{ nın } j. \text{ satırı}) \\ &= \langle (A \text{ nın } i. \text{ satırı}), (A \text{ nın } j. \text{ satırı}) \rangle \end{aligned} \quad (2.18)$$

Böylece, $i = j$ olduğunda;

$$\langle (A \text{ nın } i. \text{ satırı}), (A \text{ nın } i. \text{ satırı}) \rangle = \langle R_A(e_i), R_A(e_i) \rangle = 1 \quad (2.19)$$

eşitliklerinden $(A \cdot A^T)_{ij} = 1$ ve $i \neq j$ olduğunda;

$$\langle (A \text{ nın } i. \text{ satırı}), (A \text{ nın } j. \text{ sütunu}) \rangle = \langle R_A(e_i), R_A(e_j) \rangle = 0 \quad (2.20)$$

eşitliklerinden $(A \cdot A^T)_{ij} = 0$ ve böylece, $A \cdot A^T = I_n$ bulunur.

Yeter koşul için; $A \cdot A^T = I_n$ olsun. Bu $i = j$ olduğunda $\langle R_A(e_i), R_A(e_i) \rangle = 1$ ve $i \neq j$ olduğunda $\langle R_A(e_i), R_A(e_j) \rangle = 0$ olduğu anlamına gelir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ keyfi elemanlar olsun.

$$\langle x \cdot A, y \cdot A \rangle = \langle R_A(x), R_A(y) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i (A \text{ nın } i. \text{ satırı}), \sum_{j=1}^n y_j (A \text{ nın } j. \text{ satırı}), \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \langle (A \text{ nın } i. \text{ satırı}), (A \text{ nın } i. \text{ satırı}) \rangle y_i \\
&= x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \cdots x_n \cdot y_n \\
&= \langle x, y \rangle
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Dolayısıyla $A \in O_n(\mathbb{R})$ olduğu görülür.

2.4. Matris Gruplarının Topolojisi

n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid metriği tarafından indirgenen metrik uzay, $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid topolojisi olarak bilinir. Şimdi amacımız $\mathbb{R}^n$ ile $M_n(\mathbb{R})$ matris kümesi arasında bir bağlantı oluşturmaktır. Bu bağlantı için de $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklid topolojisini kullanacağız.

$\mathbb{R}^n$ ile $M_n(\mathbb{R})$ matris kümesi arasında bir ilişki kurabilmek için bu kümeler arasında aşağıdaki bir birebir eşleme tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
\varphi: \mathbb{R}^{n^2} &\rightarrow M_n(\mathbb{R}) \\
x &\rightarrow \varphi(x) = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{nn}) \\
\varphi(x) &= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Bu eşlemenin birebir ve örten bir fonksiyon olduğu açıktır. Bu fonksiyon sayesinde matrisler üzerinde çalışırken, $\mathbb{R}^{n^2}$ Öklid uzayı içinde kalarak Öklid metriği ve Öklid topolojisine uygulanan altuzay topolojisi kullanarak matris gruplarının geometrisi ve topolojisini inceleyebileceğiz.

Topolojik uzaylardan birkaç tanım ve yardımcı teoremi hatırlayalım.

Yardımcı Teorem: (X, τ) bir topolojik uzay, $Y \subseteq X$ ve $\tau_Y = \{Y \cap U \mid U \in \tau\}$ altuzay topoloji olsun. Y de bir A alt kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter koşul A nın Y ile X in bir kapalı alt kümesinin kesişimine eşit olmasıdır.

İspat: Gerek koşul için, (Y, τ_Y) ikilisi (X, τ) topolojik uzayının alt uzayı ve A kümesi Y de bir kapalı küme olsun. Böylece $Y - A$ bir açık küme olup $Y - A \in \tau_Y$ olur ve τ_Y tanımından $Y - A = Y \cap U$ olacak şekilde $U \in \tau$ vardır. $X - U$ kümesi X de kapalı olduğundan $A = Y \cap (X - U)$ olup A kapalı kümesi Y ile X in bir kapalı alt kümesinin kesişimine eşit bulunur.

Yeter koşul için, C kümesi X de kapalı bir küme olmak üzere $A = C \cap Y$ olsun. Buradan $X - C \in \tau$ ve $Y \cap (X - C) = Y - A \in \tau_Y$ çıkar. $(X - C) \cap Y = Y - A$ olduğundan $Y - A \in \tau_Y$ ve böylece Y nin kapalı olduğu bulunmuş olur.

Tanım: (X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzaylar olsun. Y nin her açık V alt kümesi için $f^{-1}(V)$ kümesi X de açık ise $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonuna sürekli denir.

Yardımcı Teorem: (X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f sürekli ise Y nin her B kapalı alt kümesi için, $f^{-1}(B)$ kümesi X de kapalıdır.

İspat: (X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f in sürekli olduğunu ve B kümesinin Y de kapalı olduğunu varsayalım. $Y - B \in \tau'$ ve f sürekli olduğundan $f^{-1}(Y - B)$ kümesi X de açıktır. $f^{-1}(Y - B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(B) = X - f^{-1}(B)$ olduğundan $f^{-1}(B)$ kümesi X de kapalıdır.

Teorem: $O_n(\mathbb{R})$ kümesi bir matris grubudur.

İspat: $n \in \mathbb{N}$ sabit bir sayı olsun. Önce $O_n(\mathbb{R})$ kümesinin bir grup olduğunu gösterelim. Bunun için grup olma aksiyomlarını inceleyelim.

- i) $O_n(\mathbb{R})$ matris çarpma işlemine göre kapalıdır. Gerçekten $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ için $(AB)^T = B^T A^T$ olduğundan aşağıdaki eşitlikler gerçekleşir.

$$AB(AB)^T = ABB^T A^T = AI_n A^T = AA^T = I_n$$

$$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T I_n B = B^T B = I_n \quad (2.23)$$

- ii) Herhangi $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle xI_n, yI_n \rangle = \langle x, y \rangle$ olduğundan $O_n(\mathbb{R})$ birim matrisi içerir.

iii) Her $M \in O_n(\mathbb{R})$ için $M^{-1} = M^T$ olduğundan ve

$$M^{-1}(M^{-1})^T = M^T(M^T)^T = M^T M = I_n$$

$$(M^{-1})^T M^{-1} = (M^T)^T M^T = M M^T = I_n \quad (2.24)$$

eşitliklerinden $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ dir.

iv) Birleşme özelliği matris çarpma işlemi için aşıkardır.

Her $N, M \in M_n(\mathbb{R})$ matrisleri için $\det(N) = \det(N^T)$ ve $\det(NM) = \det(N)\det(M)$ olduğundan, eğer $A \in O_n(\mathbb{R})$ ise

$$(\det(A))^2 = \det A \det A = \det(AA) = \det(A)^2 = \det(AA^T) = \det(I_n) = 1$$

olup $\det A = \pm 1$ dir. Şimdi,

$$T: GL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}) \quad (2.25)$$

$$X \rightarrow T(X) = XX^T$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda T süreklidir, gerçekten her $X \in GL_n(\mathbb{R})$ $X = [x_{ij}]$ olmak üzere $T(X)$ in ij . bileşeni

$$\sum_{k=1}^n x_{ik} x_{jk} \quad (2.26)$$

şeklinde olup, bu da $\mathbb{R}$ de bir polinom fonksiyonudur.

$$T^{-1}(\{I_n\}) = O_n(\mathbb{R}) \quad (2.27)$$

olduğu görülür. $\mathbb{R}^{n^2}$ de tek nokta kümeler kapalı olduğundan ve yardımcı teorem ile $\{I_n\}$ kümesi de $G_n(\mathbb{R})$ de kapalı olduğu söylenir. Yardımcı teoremden $O_n(\mathbb{R})$ grubu $G_n(\mathbb{R})$ de kapalıdır. Sonuç olarak $O_n(\mathbb{R})$ bir matris grubudur.

3. MANİFOLDLAR, LİE CEBİRLERİ VE LİE GRUPLARI

Bir Lie grubu kısaca, cebirsel grup yapısına sahip diferansiyellenebilir bir manifoldtur. Bir manifold ise kabaca, her noktasının komşuluğunda Öklid uzayına benzeyen bir topolojik bir uzaydır. Dolayısıyla üzerinde çalıştığımız matris gruplarının Lie grubu olduğunu gösterebilmek için, öncelikle manifold, Lie grubu ve bunlarla ilgili kavram, tanım ve teoremleri inceleyeceğiz.

3.1. Manifoldlar

Tanım: $\mathbb{R}^n$, n boyutlu Öklid uzayında bir açık küme U olmak üzere, $U \subset \mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun, $\alpha \leq k$ ve k negatif olmayan tam sayı olmak üzere, k. mertebeden bütün kısmi türevleri $\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$ var ve bu türevler sürekli ise, f fonksiyonuna C^k -sınıfından diferansiyellenebilirdir denir ve bu fonksiyonların kümesi $C^k(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir.

Özel olarak, f sadece sürekli ise C^0 -sınıfındandır ve eğer f tüm $k \geq 0$ için C^k -sınıfından diferansiyellenebilir ise f , C^∞ - sınıfındandır denir ve $C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Warner, 1983).

Tanım: (X, τ) , (Y, τ') iki topolojik uzay ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer f fonksiyonu birebir, örten, f ve f^{-1} fonksiyonları sürekli ise f fonksiyonuna homeomorfizm (topolojik eş yapı dönüşümü) adı verilir. Bu durumda (X, τ) ve (Y, τ') topolojik uzaylarına da homeomorf (topolojik eş yapı) uzaylar denir.

Tanım: $a \neq b$ olmak üzere, her $a, b \in (X, \tau)$ için a ve b noktalarının açık komşulukları sırasıyla $a \in V$, $b \in U$ olmak üzere, $V \cap U = \emptyset$ olacak şekilde $V, U \in \tau$ varsa (X, τ) uzayına T_2 -uzayı (Hausdorff uzayı), τ topolojisine de T_2 - (Hausdorff) topolojisi denir.

Tanım: M bir Hausdorff topolojik uzayı olsun. Eğer M nin her p noktasının $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü bir homeomorfizma olacak şekilde bir U komşuluğu var ise, yani M nin her noktasının $\mathbb{R}^n$ e veya bir açık alt kümesine homeomorf olan bir komşuluğu var ise, M uzayına n-boyutlu yerel Öklid uzayı denir. Burada U kümesine koordinat

komşuluğu, φ tasvirine koordinat tasviri ve (U, φ) ikilisine de koordinat sistemi denir (Warner, 1983).

Tanım: M bir yerel Öklid uzayı, $\alpha \in A$ için F ; $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ koordinat sistemlerinin bir koleksiyonu olsun. Eğer bu koleksiyon aşağıdaki üç özelliği sağlıyor ise, M üzerinde C^∞ - sınıfından bir diferansiyellenebilir yapı denir (Warner, 1983).

- i. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
- ii. Her $\alpha, \beta \in A$ için $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ bileşkesi C^∞ - sınıfındandır.
- iii. Bu koleksiyon maksimaldir.

Tanım: M n -boyutlu yerel Öklid uzayı ve ikinci sayılabilir bir Hausdorff uzayı olmak üzere, diferansiyellenebilir bir yapıya sahip ise C^∞ - sınıfından diferansiyellenebilir manifold denir (Arvanitogeorgos, 2003).

Önerme: Diferansiyellenebilir bir manifoldun açık alt kümeleri de diferansiyellenebilir manifoldtur.

İspat: M n -boyutlu bir manifold olsun. M nin açık bir alt kümesi A alalım. $x \in A$ olsun. $U_x \subset M$ olmak üzere x in bir U_x komşuluğu vardır, öyle ki $U_x, \mathbb{R}^n$ nin açık bir V alt kümesine homeomorfik olur. $h : U_x \rightarrow V$ olmak üzere

$$h|_{A \cap U_x} : A \cap U_x \rightarrow V \quad (3.1)$$

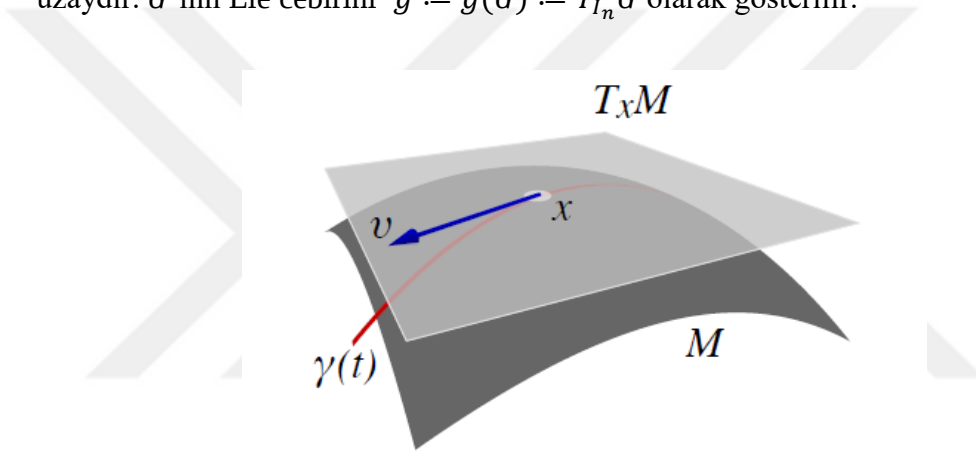
h ın $A \cap U_x$ ile kısıtlanışını düşünelim. Burada U_x ve A kümeleri açık olduğundan $U_x \cap A$ kümesi de açıktır. $x \in A$, $x \in U_x$ ve $x \in A \cap U_x$ olduğundan $A \cap U_x$ de x 'in bir komşuluğudur. Eğer $h(A \cap U_x)$ 'in $\mathbb{R}^n$ 'in bir açık alt kümesi olduğunu gösterirsek ispat biter. U_x açık, $A \cap U_x$ de açık, h da bir homomorfizm olduğundan açık kümeleri açık kümelere taşır. $h(A \cap U_x)$ $\mathbb{R}^n$ nin açık bir alt kümesidir.

3.2. Lie Cebirleri ve Üstel Tasvir

Tanım: $M \subset \mathbb{R}^m$ ve $x \in M$ olsun. M manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı $T_x M := \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M, \gamma(0) = x \text{ olmak üzere, diferansiyellenebilir bir tasvir}\}$ şeklinde tanımlanır.

Burada $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ eğrisi genel olarak bir x noktasından geçen bir yoldur. Yani, $M \subset \mathbb{R}^m$ manifoldunun x noktasındaki tanjant uzayı, bu şekildeki tüm yolların eğimlerinin bir koleksiyonudur, öyle ki her γ bileşen fonksiyonu, $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığından $\mathbb{R}$ ye bir diferansiyellenebilirdir. Tanjant uzay teğet uzay olarak da adlandırılabilir.

Tanım: $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ matris grubunun Lie cebiri I_n birim matristeki teğet uzaydır. G 'nin Lie cebirini $g := g(G) := T_{I_n} G$ olarak gösterilir.



Şekil 3.1. $T_x M$ Tanjant Uzayının Şematize Edilmiş Hali

Teoremden Matris gruplarının Lie cebirlerinin $M_n(\mathbb{R})$ 'nin alt uzayları olduğunu ispatlanacaktır. Bu ispat için $M_n(\mathbb{R})$ daki eğriler için çarpım kuralına ihtiyaç vardır, aşağıdaki teoremden kısaca bu konu isplanmıştır.

Teorem: $\gamma, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ diferansiyellenebilir olsun. O halde

$(\gamma, \beta)(t) := \gamma(t) \cdot \beta(t)$ çarpımı da diferansiyellenebilirdir. Öyle ki;

$$(\gamma \cdot \beta)'(t) = \gamma(t) \cdot \beta'(t) + \gamma'(t) \cdot \beta(t) \quad (3.2)$$

İspat: $\gamma, \beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ türevlenebilir olsun. $n = 1$ olduğunda analizdeki türevin çarpımı kuralından aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$((\gamma \cdot \beta)'(t))_{ij} = \sum_{l=1}^n \gamma(t)_{il} \cdot \beta'(t)_{lj} \quad (3.3)$$

ve $\gamma(t)_{il} \cdot \beta(t)_{lj} (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ olan fonksiyonların çarpımıdır. Bur

$$((\gamma \cdot \beta)'(t))_{ij} = \sum_{l=1}^n \gamma(t)_{il} \cdot \beta'(t)_{lj} + \gamma'(t)_{il} \cdot \beta(t)_{lj} \quad (3.4)$$

$$= (\gamma(t) \cdot \beta'(t))_{ij} + ((\gamma'(t) \cdot \beta(t)))_{ij} \quad (3.5)$$

Teorem: $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ matris grubunun Lie cebiri $\mathfrak{g}$, $M_n(\mathbb{R})$ 'nin bir reel alt uzayıdır.

İspat: $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ keyfi bir matris grubu olsun. $\mathfrak{g}$ 'nin $M_n(\mathbb{R})$ 'nin bir alt uzayı olduğunu göstermek için $\mathfrak{g}$ 'nin skalerle çarpma ve matris toplama işlemi altında kapalı olduğunu göstermemiz gerekiyor.

İlk adımda skaler ile çarpmayı gösterelim. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $A \in \mathfrak{g}$ olsun. $\gamma(0) = I_n$ olmak üzere, $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferansiyellenebilir eğrisi için $\gamma'(0) = A$ dır.

Şimdi, $\sigma : (-\lambda\varepsilon, \lambda\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi bütün $t \in (-\lambda\varepsilon, \lambda\varepsilon)$ için $\sigma(t) := \gamma(\lambda \cdot t)$ şeklinde tanımlansın. $\sigma'(t) = \lambda \cdot \gamma'(\lambda \cdot t)$ olduğundan $t = 0$ için; $\sigma'(0) = \lambda \cdot A$ bulunur. Ayrıca $\sigma(0) = \gamma(\lambda \cdot 0) = I_n$ dır. Böylece $\lambda \cdot A \in \mathfrak{g}$ sonucuna varabiliriz. İkinci adımda matris toplama işlemi altında kapalı olduğunu gösterelim. $A, B \in \mathfrak{g}$ olsun. Yani $\gamma : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $\beta : (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferansiyellenebilir eğriler olmak üzere $\gamma'(0) = A$ ve $\beta'(0) = B$ dir, öyle ki $\gamma(0) = \beta(0) = I_n$ dir.

Şimdi $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ olsun ve $\pi : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi ise tüm $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için

$\pi(t) := \gamma(t) \cdot \beta(t)$ şeklinde eğrilerin çarpımı olarak tanımlansın.

Teoremden π eğrisinin G grubunda diferansiyellenebilir bir eğri olduğunu biliyoruz.

Ayrıca,

$$\pi'(0) = \gamma(0) \cdot \beta'(0) + \gamma'(0) \cdot \beta(0) = I_n \cdot B + A \cdot I_n = A + B$$

olur. Öyleyse

$A + B \in \mathfrak{g}$ dir. Bu ise $\mathfrak{g}$ nin $M_n(\mathbb{R})$ 'nin bir alt uzayı olduğunu göstermiş olur.

Lie cebirleri $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayları olduğundan matris gruplarını ve onların Lie cebirlerini vektör uzaylarının bazıları yardımıyla sınıflandırabiliriz.

Tanım: Bir G matris grubunun boyutu onun Lie cebirinin boyutu ile tanımlanır.

$G \subset GL_n(\mathbb{R})$ matris grubunun Lie cebiri $\mathfrak{g}$ ye örnekler verebilmek adına, her $A \in G$ için $\gamma(0) = I_n$ ve $\gamma'(0) = A$ eşitliklerini sağlayan $\gamma_A: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ eğrileri oluşturmak gerekir. Bunu yapmanın en kolay yolu ise, matrisler için üstel tasvir olarak adlandırılan fonksiyonu kullanacağız. Fakat bunun için de birkaç kavram tanımlayacağız.

Tanım: π : izdüşüm fonksiyonu olmak üzere, $\pi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ şeklinde tanımlansın.

$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ eğrisi boyunca F vektör alanı $\pi \circ F = \alpha$ olacak şekilde

$F: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ şeklinde tanımlı bir sürekli fonksiyondur.

Eğer $F: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu C^∞ - sınıfından ise, F vektör alanına C^∞ - sınıfından (düzgün veya diferansiyellenebilir) vektör alanı denir (Warner, 1983).

Kısaca bir vektör alanı, her noktaya bir tanjant vektörü karşılık getiren bir fonksiyondur.

Tanım: F vektör alanı $\mathbb{R}^m$ manifoldu üzerinde C^∞ - sınıfından bir vektör alanı olsun. F vektör alanının bir integral eğrisi, her $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için,

$\alpha'(t) = F(\alpha(t))$ olacak şekilde

$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$ şeklinde tanımlı diferansiyellenebilir bir eğridir.

Bu tanımlardan anlaşılacağı gibi, bir vektör alanı bir eğri veya yol üzerindeki her noktaya bir teğet vektör karşılık getirir. Benzer şekilde, matrisler için üstel tasvir de matris grubunun Lie cebiri içindeki her eleman için bir integral eğrisi karşılık getirir. Bu ise bize bunlar arasındaki ilişkiyi kurmamız için bir yol gösterici olur.

Matrisler için üstel tasvir konusu matrislerin kuvvet serileri yardımıyla tanımlandığı için $M_n(\mathbb{R})$ deki serileri için gerekli sonuç ve terimleri açıklanacaktır.

Tanım: $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrisi

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

şeklinde verilsin. A matrisinin $|A|$ ile gösterilen Öklidyen normu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$|A| = \sqrt{(a_{11})^2 + \cdots + (a_{1n})^2 + (a_{21})^2 + \cdots + (a_{2n})^2 + \cdots + (a_{n1})^2 + \cdots + (a_{nn})^2}$$

Yani, bir matrisin Öklidyen normu matris girdilerinin karelerinin toplamının karekökü olarak açıklanabilir.

Tanım: Tüm $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. Tüm $i, j \in \mathbb{N}$ için,

$(A_0)_{ij} + (A_1)_{ij} + (A_2)_{ij} + \dots$ toplamı herhangi bir $A_{(ij)} \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsıyor (mutlak yakınsıyor) ise,

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i = A_0 + A_1 + A_2 + \dots \quad (3.7)$$

serisi yakınsaktır (mutlak yakınsaktır) denir ve

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i = A \quad (3.8)$$

şeklinde gösterilir.

Bir serinin mutlak yakınsaklığına ilişkin sonucu göstermek için aşağıdaki lemmayı kullanacağız.

Lemma: Tüm $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ için $|XY| \leq |X| \cdot |Y|$.

İspat: $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ herhangi matrisler olsun. Tüm $x, y \in \mathbb{R}^n$ için $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$ Schwarz eşitsizliğini kullanarak tüm i, j indisleri için ,

$$\begin{aligned} |(XY)_{ij}|^2 &= \left| \sum_{l=1}^n X_{il} Y_{lj} \right|^2 \\ &= |\langle (X \text{ i. satırı}), (Y \text{ j. sütunu})^T \rangle|^2 \\ &\leq |(X \text{ i. satırı})|^2 \cdot |(Y \text{ j. sütunu})^T|^2 \\ &= \left(\sum_{l=1}^n |X_{il}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n |Y_{lj}|^2 \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} |XY|^2 &= \sum_{i,j=1}^n |(XY)_{ij}|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \left(\left(\sum_{l=1}^n |X_{il}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n |Y_{lj}|^2 \right) \right) \\ &= \left(\sum_{l=1}^n |X_{il}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n |Y_{lj}|^2 \right) \end{aligned}$$

$$= |X|^2 |Y|^2 \quad (3.10)$$

elde ederiz. Bu denklemin de karekökünü alırsak $|XY| \leq |X| \cdot |Y|$ istediğimiz eşitsizliği buluruz.

Teorem: $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$

serisi,

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

kuvvet serisinin $|x - x_0| < R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı denir.

Yakınsaklık yarıçapı R ve katsayıları $c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir kuvvet serisi olsun. Eğer $A \in M_n(\mathbb{R})$ matrisi için $|A| < R$ eşitsizliği sağlanıyorsa

$$f(A) = c_0 I_n + c_1 A + c_2 A^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} c_i A^i$$

serisi mutlak yakınsaktır.

İspat: $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$ serisi, yakınsaklık yarıçapı R ve katsayıları $c_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere bir kuvvet serisi olsun. $|A| < R$ olmak üzere $A \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. Herhangi bir i, j indisi için

$$|(c_0 I_n)_{ij}| + |(c_1 A)_{ij}| + |(c_2 A^2)_{ij}| + \dots \quad (3.11)$$

toplamının yakınsak olduğunu göstermeliyiz. Herhangi $k \in \mathbb{N}$ için Tüm $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ için Lemması kullanılarak

$$|(c_k A^k)_{ij}| \leq |c_k A^k| = |c_k| \cdot |A^k| \leq |c_k| \cdot |A|^k \quad (3.12)$$

olur. $|A| < R$ olduğundan $|(c_0 I_n)_{ij}| + |(c_1 A)_{ij}| + |(c_2 A^2)_{ij}| + \dots$ toplamı yakınsaktır. Bu yüzden $f(A) = c_0 I_n + c_1 A + c_2 A^2 + \dots$ mutlak yakınsak olur.

Bu teoremi kullanarak matrislerde üstel tasvir tanımlanabilir.

Tanım: $A \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. A matrisinin üstel tasviri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$e^A = \exp(A) = I_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}A^i \quad (3.13)$$

Temel analiz bilgilerimizden e^x kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının sonsuz olduğunu biliyoruz. Böylece Teorem kullanılarak tüm $A \in M_n(\mathbb{R})$ için e^A serisi mutlak yakınsaktır diyebiliriz.

$\gamma(t) = e^{tA} = I_n + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots$ şeklinde tanımlanan $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n$ eğrisi göz önüne alındığında $t = 0$ için

$$\gamma(0) = e^{0A} = I_n + 0A + \frac{1}{2!}(0A)^2 + \frac{1}{3!}(0A)^3 + \dots = I_n \quad (3.14)$$

olur. Böylece $\gamma(t) = e^{tA}$ eğrisi bir yol olarak düşünülebilir. Aslında matris gruplarının Lie cebirlerini tanımlamak için en kullanışlı yollardan biri $\gamma(t) = e^{tA}$ eğrisini kullanmaktır. Şimdi aşağıda verilen teoremler matrislerde üstel tasvirin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olacaktır.

Teorem: $A \in M_n(\mathbb{R})$ olmak üzere $\gamma(t) = e^{tA} = I_n + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots$ eğrisi diferansiyellenebilirdir ve türevi $\gamma'(t) = A \cdot e^{tA}$ dir.

İspat: $A \in M_n(\mathbb{R})$ olsun ve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ eğrisi tüm $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için

$$\gamma(t) = e^{tA} = I_n + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots \quad (3.15)$$

fonksiyonu şeklinde tanımlansın. Teorem gereğince $\gamma(t)$ eğrisinin mutlak yakınsak olduğunu biliyoruz. Böylece $\gamma(t)$ 'nin türevini alabiliriz. Yani terim terim türev alınırsa, tüm $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için,

$$\gamma'(t) = \frac{d}{dt} \left(I_n + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \dots \right) = A + tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 = A \cdot e^{tA}$$

olur.

Teorem: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. Eğer $AB = BA$ ise $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ olur.

İspat : $AB = BA$ olacak şekilde $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. A ve B değişmeli olduğundan

$$\begin{aligned} (A + B)^k &= (A + B)(A + B)(A + B) \dots (A + B) \\ &= (A^2 + AB + BA + B^2)(A + B) \dots (A + B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) \dots (A + B) \\
&= (A^3 + A^2B + 2ABA + 2AB^2 + B^2A + B^3) \dots (A + B) \\
&\quad \vdots \\
&= A^k + kA^{k-1}B + \binom{k}{2}A^{k-2}B^2 + \dots + \binom{k}{k-1}AB^{k-1} \\
&= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} A^{k-r} B^r
\end{aligned}$$

Bu eşitliği kullanarak

$$e^{A+B} = I_n + A + B + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3 + \dots \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (A+B)^i \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^i \binom{i}{j} A^{i-j} B^j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \left(\sum_{j=0}^i \frac{i!}{(i-j)!} A^{i-j} B^j \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^i \frac{1}{(i-j)! j!} A^{i-j} B^j \right)
\end{aligned}$$

$$= I_n + A + B + \frac{1}{2!}A^2 + AB + \frac{1}{2!}B^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{2!}A^2B + \frac{1}{2!}AB^2 + \frac{1}{3!}B^3 + \dots$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right)$$

$$= e^A e^B \quad (3.17)$$

Şimdi teorem kullanarak $GL_n(\mathbb{R})$, $SL_n(\mathbb{R})$ ve $O_n(\mathbb{R})$ matris grupları için Lie cebirini bulacağız. Bir matris grubunun Lie cebiri gösterilirken küçük harf kullanılır. Örneğin, $GL_n(\mathbb{R})$ 'nin Lie cebiri $gl_n(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Teorem: $GL_n(\mathbb{R})$ 'nin Lie cebiri $M_n(\mathbb{R})$ dir.

İspat: $A \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. Teorem kullanılarak $e^A \cdot e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I_n$, bu yüzden e^A matrisi terslenebilirdir ve böylece $e^A \in GL_n(\mathbb{R})$ olur.

Tüm $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ eğrisi $\gamma(t) = e^{tA}$ şeklinde tanımlansın. Teorem kullanılarak

$$e^{tA} \cdot e^{-tA} = e^{tA-tA} = e^0 = I_n$$

eşitliği yazılabilir böylece, $e^{tA} \in GL_n(\mathbb{R})$ olur. $\gamma(0) = I_n$ ve $\gamma'(0) = A$ olduğundan, buradan $A \in gl_n(\mathbb{R})$ olduğunu gösterilmiş olur. Böylece $M_n(\mathbb{R}) \subset gl_n(\mathbb{R})$ olur.

Diğer kapsamayı göstermek için, $\gamma(t)$ eğrisi tüm $n \times n$ matrislerden oluşur. Bu matrislerin $t = 0$ noktasındaki türevleri de $n \times n$ matrislerdir. Böylece $g(GL_n(\mathbb{R})) \subset M_n(\mathbb{R})$ elde edilir. Dolayısıyla $M_n(\mathbb{R}) = gl_n(\mathbb{R})$ olduğu gösterilmiş olur.

Teorem:

$$o_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) | A + A^T = 0 \} \quad (3.18)$$

şeklinde tanımlanmak üzere eğer $A \in o_n(\mathbb{R})$ ise $e^A \in O_n(\mathbb{R})$ dir.

$$O(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^T = I_n \} \quad (3.19)$$

kümesi matris çarpma işlemi altında bir Lie gruptur. Bu gruba “ortogonal grup” denir.

İspat: Bu teoremin ispatında iki bilgiden faydalanacağız.

Lemma: $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- $(AB)^T = B^T A^T$ eşitliği sağlanır.
- $(A^n)^T = (A^T)^n$

İspat:

- $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ olsun.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlı olup aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
(AB)^T &= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \left(\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \right)^T \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1n} + \cdots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1n} + \cdots + a_{2n}b_{nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{11} + \cdots + a_{nn}b_{n1} & a_{n1}b_{12} + \cdots + a_{nn}b_{n2} & \cdots & a_{n1}b_{1n} + \cdots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= B^T A^T
\end{aligned} \tag{3.21}$$

b. Tümevarım kullanalım. $n = 1$ için $(A^1)^T = A^T = (A^T)^1$ olduğu görülür.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $(A^n)^T = (A^T)^n$ olduğunu varsayalım. $(AB)^T = B^T A^T$ eşitliğinden

$$(A^T)^{n+1} = (A^T)^n \cdot A^T = (A^n)^T \cdot A^T = (A \cdot A^n)^T = (A^{n+1})^T \tag{3.22}$$

elde edilir. Daha sonra,

$(A^n)^T = (A^T)^n$ eşitliğinin matematiksel tümevarım ilkesine göre doğru olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi Teorem ispatına dönersek $A \in o_n(\mathbb{R})$ için

$$(e^A)^T = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right)^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^n)^T}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A^T)^n}{n!} = e^{A^T} \tag{3.23}$$

$A \in o_n(\mathbb{R})$, $A^T = -A$. Böylece,

$e^A (e^A)^T = e^A \cdot e^{A^T} = e^{A-A} = e^0 = I_n$. Teorem kullanılarak $e^A \in O_n(\mathbb{R})$ olduğu gösterilir.

Teorem: $O_n(\mathbb{R})$ matris grubunun Lie cebiri $o_n(\mathbb{R})$ dir.

İspat: $A \in o_n(\mathbb{R})$ olsun. Lemması kullanılarak $\gamma(t) = e^{tA} \in O_n(\mathbb{R})$. $\gamma(0) = I_n$ ve $\gamma'(0) = A$, $A \in g(O_n(\mathbb{R}))$. Böylece $o_n(\mathbb{R}) \subset g(O_n(\mathbb{R}))$ olur.

Daha sonra $B \in g(O_n(\mathbb{R}))$ olsun. $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O_n(\mathbb{R})$ olacak şekilde tüm $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için $\sigma(t) \in O_n(\mathbb{R})$ eğrisi vardır. $\sigma(0) = I_n$ ve $\sigma'(0) = B$ olduğunu kabul edelim. Teorem ile çarpımın türev kuralı kullanılarak;

$$\frac{d}{dt}(\sigma(t) \cdot \sigma(t)^T) = \sigma'(t) \cdot \sigma(t)^T + \sigma(t) \cdot \sigma'(t)^T \quad (3.24)$$

bulunur. $\sigma(t) \cdot \sigma(t)^T = I_n$ olduğundan,

$$\frac{d}{dt}(\sigma(t) \cdot \sigma(t)^T) = \frac{d}{dt}(I_n) = 0 \quad (3.25)$$

$t = 0$ için,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\sigma(0) \cdot \sigma(0)^T) \\ &= \sigma'(0) \cdot \sigma(0)^T + \sigma(0) \cdot \sigma'(0)^T \\ &= B \cdot I_n + I_n \cdot B^T \\ &= B + B^T \end{aligned} \quad (3.26)$$

bulunur. Böylece $B \in o_n(\mathbb{R})$, $g(O_n(\mathbb{R})) \subset o_n(\mathbb{R})$ olur. Bu da bize $O_n(\mathbb{R})$ matris grubunun Lie cebirinin $o_n(\mathbb{R})$ olduğunu gösterir.

Sıradaki Lemma kullanılarak $SL_n(\mathbb{R})$ matris grubunun Lie cebiri bulunacaktır. İlk olarak aşağıda verilen notasyon Lemmanın ispatında kullanılacaktır.

Öncelikle lemma ve ispatına başlamadan önce minör ve iz kavramlarını tanımlayacağız. A karesel bir matris olmak üzere,

a_{ij} bileşeninin minörü M_{ij} ile gösterilir ve A matrisinden i .sıtrı ve j .sütun silindikten sonra kalan alt matrisin determinanı olarak tanımlanır.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ olsun. $A \in [i, j] \in M_n(\mathbb{R})$ matrisi minör ile elde edilen i sıtrı ve j sütundan oluşan matris olarak gösterilir.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot [1,1] = \begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix}$$

Daha sonra, iz kavramı tanımlanacaktır.

A $n \times n$ bir matris olmak üzere, A matrisinin $iz(A)$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$iz(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \cdots + a_{nn}$$

olarak tanımlanır. Bu kavramlardan sonra Lemma verilecektir.

Lemma: $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ eğrisi diferansiyellenebilir ve $\gamma(0) = I_n$ ise

$$\left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \det(\gamma(t)) = iz(\gamma'(0)) \quad (3.27)$$

eşitliği sağlanır.

(Burada $iz(\gamma'(0))$, $\gamma'(0)$ köşegen elemanlarının toplamı demektir.)

İspat: $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ eğrisi diferansiyellenebilir ve $\gamma(0) = I_n$ olsun.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \det(\gamma(t)) &= \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \cdot \gamma(t)_{1j} \cdot \det(\gamma(t)[1, j]) \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \cdot \left(\gamma'(0)_{1j} \cdot \det(\gamma(0)[1, j]) + \gamma(0)_{1j} \cdot \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \det(\gamma(0)[1, j]) \right) \\ &= \gamma'(0)_{11} + \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \det(\gamma(0)[1, 1]) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aynı $\left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \det(\gamma(0))[1, 1]$ determinant alma işlemi n kez uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)_{t=0} \det(\gamma(t)) &= \gamma'(0)_{11} + \gamma'(0)_{22} + \cdots + \gamma'(0)_{nn} \\ &= iz(\gamma'(0)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Teorem: $SL_n(\mathbb{R})$ nin Lie cebiri

$sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | iz(A) = 0\}$ şeklindedir.

İspat: $A \in g(SL_n(\mathbb{R}))$ olsun. Bu durumda $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ $\gamma(0) = I_n$ ve $\gamma'(0) = A$ olacak şekilde bir γ eğrisi vardır. Lemmadan $iz(\gamma'(0)) = iz(A) = 0$ olur. Buradan $A \in sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | iz(A) = 0\}$. Dolayısıyla $g(SL_n(\mathbb{R})) \subset sl_n(\mathbb{R})$ dır. Diğer taraftan,

$iz(B) = 0$ olacak şekilde $B \in M_n(\mathbb{R})$ alalım. Şimdi $\sigma: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ şeklinde tanımlansın.

$$\sigma(t) = \begin{bmatrix} \frac{ta_{11} + 1}{\det(I_n + tB)} & \frac{ta_{12} + 1}{\det(I_n + tB)} & \cdots & \frac{ta_{1n} + 1}{\det(I_n + tB)} \\ ta_{21} & ta_{22} + 1 & \cdots & ta_{2n} + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} + 1 & \cdots & ta_{nn} + 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın.

Buradan türev alırsak,

$$\begin{aligned} \sigma'(t) &= \begin{bmatrix} \frac{a_{11}(\det(I_n + tB) - (ta_{11} + 1)(\frac{d}{dt}\det(I_n + tB))}{\det(I_n + tB)^2} & \cdots & \frac{a_{1n}(\det(I_n + tB) - (ta_{1n} + 1)(\frac{d}{dt}\det(I_n + tB))}{\det(I_n + tB)^2} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$\sigma(0) = I_n$ ve lemma kullanılarak

$$\begin{aligned} \sigma'(0) &= \begin{bmatrix} \frac{a_{11}(\det(I_n + (0)B) - ((0)a_{11} + 1)(iz(B)))}{\det(I_n + (0)B)^2} & \cdots & \frac{a_{1n}(\det(I_n + (0)B) - ((0)a_{1n} + 1)(iz(B)))}{\det(I_n + (0)B)^2} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\sigma'(0) = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}(1) - ((0)a_{11} + 1)(0)}{1^2} & \cdots & \frac{a_{1n}(1) - ((0)n + 1)(0)}{1^2} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\sigma'(0) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = A$$

bulunur. Ayrıca

$$\det(I_n + tB) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \cdot (I_n + tB)_{1j} \cdot \det((I_n + tB)[1, j])$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \det(\sigma(t)) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \cdot (I_n + tB)_{1j} \cdot \frac{1}{\det(I_n + tB)} \cdot \det((I_n + tB)[1, j]) \\ &= \frac{1}{\det(I_n + tB)} \cdot \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \cdot (I_n + tB)_{1j} \cdot \det((I_n + tB)[1, j]) \right) \\ &= \frac{1}{\det(I_n + tB)} \cdot (\det(I_n + tB)) \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Böylece, her $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için $\sigma(t) \in SL_n(\mathbb{R})$ ve $\sigma'(0) = A$, $A \in \mathfrak{g}(SL_n(\mathbb{R}))$.
Sonuç olarak, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{g}(SL_n(\mathbb{R}))$ olur ve $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{g}(SL_n(\mathbb{R}))$ elde edilir.

3.3. Lie Grupları

Tanım: G diferansiyellenebilir C^∞ -sınıfından bir manifold ve soyut bir grup olmak üzere, aşağıdaki C^∞ -sınıfından

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G & i : G &\rightarrow G \\ (a, b) &\rightarrow ab & a &\rightarrow a^{-1} \end{aligned} \tag{3.31}$$

tasvirleri var ise G ye bir Lie grubu denir.

Bir G Lie grubu cebirsel, topolojik ve geometrik yapıları bir arada bulunduran bir kümedir (Warner, 1983).

Tanım: G ve H iki Lie grup olmak üzere,

$\gamma : G \rightarrow H$ tasviri eğer diferansiyellenebilir bir grup homomorfizması ise, bu tasvire Lie grubu homomorfizması denir (Warner, 1983).

Tanım: G bir Lie grubu, $H \subset G$ nin boştan farklı bir alt kümesi ve $\gamma : H \rightarrow G$ bir tasvir olsun. Eğer H kümesi, G nin bir alt manifoldu ve γ tasviri de bir grup homomorfizması ise H ye bir Lie alt grubu denir ve (H, γ) ile gösterilir.

(H, γ) , G nin kapalı alt grubu ve $\gamma(H)$ de G nin kapalı alt kümesidir (Warner, 1983).

4. MATRİS LİE GRUPLARI

Matris grupları, Lie cebirleri, manifold ve Lie grubu tanımlarını inceledikten sonra bu bölümde matrisler için üstel tasvir yardımı ile herhangi bir Lie cebirden ilgili Lie grubuna nasıl geçiş yapılabildiğini inceleyeceğiz.

Teorem: $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ bir matris grubu olsun. $\mathfrak{g} \subset gl_n(\mathbb{R})$ Lie cebiri olmak üzere, her $X \in \mathfrak{g}$ için $e^X \in G$ olur.

Bu teoremin ispatı için temel analiz derslerinden birkaç hatırlama ile başlayacağız.

Tanım: $\mathbb{R}^n$ üzerindeki standart topolojide $U \subset \mathbb{R}^n$ açık küme olsun ve $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu verilsin. $p \in U$ ve $v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, f fonksiyonunun p noktasında, v yönündeki yönlü türevi şu şekilde tanımlanır.

$$df_p(v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} \quad (4.1)$$

Ayrıca, $\mathbb{R}^n$ uzayında herhangi bir $\gamma(t)$ diferansiyellenebilir bir eğrisi, $\gamma(0) = p$ ve $\gamma'(0) = v$ olmak üzere, $df_p(v)$, $\gamma(t)$ nin f altındaki görüntüsünün başlangıç hız vektörüdür.

Teorem (Ters fonksiyon teoremi) : $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}^n$ in bir komşuluğunda C^r sınıfından ($r \geq 1$) ve df_x terslenebilir lineer bir tasvir ise $V = f(U)$ ve $f: U \rightarrow V$ terslenebilir ve C^r sınıfındandır.

İspat: $\mathfrak{g}$ Lie cebiri olduğundan bir alt uzay yapısına sahiptir. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ $\mathfrak{g}$ 'nin bir bazı olsun. Her $i = 1, 2, \dots, k$ için $\alpha_i: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$, $\alpha_i(0) = I$, $\alpha_i'(0) = X_i$ şeklinde tanımlı α_i diferansiyellenebilir eğrisini seçelim. Şimdi

$$F_g : (\mathfrak{g} \text{ de } 0 \text{ in bir komşuluğu}) \rightarrow G \quad (4.2)$$

$$F_g(c_1 X_1 + \dots + c_k X_k) = \alpha_1(c_1) \cdot \alpha_2(c_2) \cdots \alpha_k(c_k)$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda,

$$F_g(0) = F_g(0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + \cdots + 0 \cdot X_k) = \alpha_1(0) + \alpha_2(0) + \cdots + \alpha_k(0) = I$$

olur. Ayrıca $d(F_g)_0$ birim fonksiyondur. Gerçekten

$$\begin{aligned} d(F_g)_0(X_i) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_g(0 + tX_i) - F_g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_g(t(0 \cdot X_1 + \cdots + X_i + \cdots + 0 \cdot X_k)) - I}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_1(t \cdot 0) \cdots \alpha_i(t \cdot 1) \cdots \alpha_k(t \cdot 0) - I}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_i(0 + t) - \alpha_i(0)}{t} \\ &= \alpha'_i(0) \\ &= X_i \quad (1 \leq i \leq k \text{ olacak şekilde tüm } i\text{'ler için}) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Şimdi $\rho \subset M_n(\mathbb{R})$ alt uzayını seçelim. ρ tamamlayıcı uzayı şöyle tanımlansın. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ kümesini $M_n(\mathbb{R})$ 'nin bir bazına tamamlayalım ve ρ eklenen baz elemanlarının gerdiği uzay olsun. Böylece $M_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{g} \times \rho$ olur.

$F_g: \rho \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ fonksiyonu her $V \in \rho$ için $F_g(0) = I$ ve $d(F_g)_0(V) = V$ şeklinde tanımlansın. Örneğin, $F_\rho(V) := I + V$ fonksiyonu bu özellikleri sağlar. Buradan her $X \in \mathfrak{g}$ ve $Y \in \rho$ için

$$F: (\mathfrak{g} \times \rho = M_n(\mathbb{R}) \text{ de } 0\text{'ın bir komşuluğu}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}) \tag{4.4}$$

$$X + Y \rightarrow F(X + Y) = F_g(X) \cdot F_\rho(Y)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $F(0) = I$ ve dF_0 ın birim olduğunu kullanırsak

$$dF_0 = d(F_g \cdot F_\rho)_0 = d(F_g)_0 \cdot F_\rho(0) + F_g(0) \cdot dF_\rho(0) = d(F_g)_0 + dF_\rho(0)$$

eşitliğini elde ederiz ve böylece

$$dF_0(X + Y) = d(F_g)_0(X) + d(F_\rho)_0(Y) = X + Y \tag{4.5}$$

olur. Burada F in, iki diferansiyellenebilir fonksiyonun çarpımı olduğu için diferansiyellenebilir ve dF_0 ın da lineer ve terslenebilir olduğunu gördük. Ters

fonksiyon teoreminden F in I nin bir komşuluğunda tanımlı bir ters fonksiyonu olduğunu söyleyebiliriz. Bu ters fonksiyonu, $A \in M_n(\mathbb{R})$ için

$$F^{-1}(A) = u(A) + v(A) \in g \times \rho \quad (4.6)$$

şeklinde tanımlayalım. Tanımdan 0 'ın komşuluğunda tüm $X \in g, Y \in \rho$ için

$$u(F(X + Y)) = X \text{ ve } v(F(X + Y)) = Y \quad (4.7)$$

olur. Bu ise v 'nin, I 'nin bir komşuluğundaki $A \in M_n(\mathbb{R})$ elemanının G 'de olup olmadığını test ettiği anlamına gelir. Yani, $v(A) = 0$ ise $F^{-1}(A) = u(A) \in g$ ise olur. Bu ise $F(u(A)) = A \in G$ olur.

Şimdi $X \in g$ ve $A(t) = e^{tX}$ olsun. Herhangi bir t için $v(A(t)) = 0$ olduğunu göstererek $A(t)$ 'nin G içinde olduğunu göstermek istiyoruz.

$A(0) = I \in G$ olduğundan $v(A(0)) = 0$ olduğu açıktır. $\frac{d}{dt}v(A(t)) = 0$ eşitliğinin sağlandığını göstermeliyiz. Bunun için,

$$\frac{d}{dt}v(A(t)) = dv_{A(t)}(A'(t)) = dv_{A(t)}(X \cdot A(t)) \quad (4.8)$$

eşitliğinden ve aşağıdaki Lemmadan istenen sonucu buluruz.

Lemma: I 'nin komşuluğunda her $A \in M_n(\mathbb{R})$ ve her $X \in g$ için $dv_A(X \cdot A) = 0$ dir.

İspat: Her $Z \in g, Y \in \rho$ için A matrisini

$$A = F(Z + Y) = F_g(Z) \cdot F_\rho(Y) \quad (4.9)$$

olarak gösterelim. Bu durumda her $W \in g$ için

$$v(F_g(Z + tW) \cdot F_\rho(Y)) = Y \quad (4.10)$$

olur. Bu ise v nin A yı bu yönde değiştirmedığı anlamına gelir. Yani,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}_{t=0} v(F_g(Z + tW) \cdot F_\rho(Y)) \\ &= dv_A\left(\left(d(F_g)_Z(W)\right) \cdot F_\rho(Y)\right) \\ &= dv_A((d(F_g)_Z(W)) \cdot F_g(Z)^{-1} \cdot A) \end{aligned}$$

$$= dv_A(X \cdot A) \quad (4.11)$$

olur. Burada, $X := dv_A((d(F_g)_Z(W)) \cdot F_g(Z)^{-1})$ olarak tanımlandı. Şimdi, geriye bu X in g nin keyfi bir elemanı olduğunu göstermek kaldı. Yönlü türevin tanımından X vektörü

$$t \rightarrow F_g(Z + tW) \cdot F_g(Z)^{-1} \quad (4.12)$$

eğrisinin teğet vektörüdür. $g \rightarrow g$ lineer tasviri, $Z = 0$ için $d(F_g)_0(X_i) = X_i$ ve $F_g(0) = I$ olduğundan

$$W \rightarrow (d(F_g)_Z(W)) \cdot F_g(Z)^{-1} \quad (4.13)$$

birim tasvirdir. Lineer tasvirin sürekliliğinden, determinantı 1 e yakınsar ve $Z \rightarrow 0$ iken bir izomorfizma olur. Dolayısıyla W , g nin herhangi bir elemanı olan X olarak seçilebilir.

Bu lemma ile, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ için eğer $X \in g$ ise $e^{tX} \in G$ olduğu görülür. Bu sonuç tüm reel sayılara genelleştirilebilir ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$e^{ntX} = e^{tX+tX+\dots+tX} = e^{tX} \cdot e^{tX} \cdot \dots \cdot e^{tX} \in G \quad (4.14)$$

olur ve böylece her $t \in \mathbb{R}$ ve $X \in g$ için $e^{tX} \in G$ bulunur ki bu da ispatı bitirir.

Şimdi her matris grubunun bir Lie grubu olduğu ispatlanacaktır. Bunun için öncelikle her hangi bir matris grubunun manifold olduğunu göstermek gerekir. Dolayısıyla birkaç tanım ve kavram açıklanacaktır.

Tanım: $X \subset \mathbb{R}^n$ ve $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f: X \rightarrow Y$ birebir-örten ve diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer f in tersi de diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna bir difeomorfizma denir. Ayrıca X ve Y kümelerine de difeomorfiktir denir.

Lemma: $B_r := \{W \in M_n(\mathbb{R}) \mid |W| < r\}$ kümesi tanımlansın. $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ bir matris grubu ve $g \subset gl_n(\mathbb{R})$ Lie cebiri olmak üzere;

Yeteri kadar küçük bir $r > 0$ için $V := \exp(B_r \cap g)$ kümesi G içinde I_n nin bir komşuluğudur ve $\exp: B_r \cap g \rightarrow V$ fonksiyonu bir difeomorfizmadır.

Teorem: Herhangi bir matris grubu manifoldtur.

İspat: $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ bir matris grubu ve $g \subset gl_n(\mathbb{R})$ Lie cebiri olsun. Herhangi bir $x \in G$ ve tüm $A \in G$ için $L_x: G \rightarrow G$, $L_x(A) = x \cdot A$ fonksiyonu tanımlansın. L_x birebirdir. Çünkü $A, B \in G$ için eğer $x \cdot A = x \cdot B$ ise, soldan x^{-1} ile çarparsak $A = B$ dir. Ayrıca L_x örtendir. Çünkü tüm $C \in G$ için $L_x(x^{-1} \cdot C) = C$ dir. Bu yüzden L_x fonksiyonu birebir ve örtendir.

$M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ matris çarpımı n^2 bileşenli fonksiyonların bir fonksiyonu olarak düşünülebileceğinden L_x her bileşen fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir polinom olarak diferansiyellenebilir. Dolayısıyla tüm r .dereceden kısmi türevler mevcuttur ve G üzerinde süreklidir. Ayrıca G bir grup olduğundan x^{-1} de mevcuttur. Böylece L_x fonksiyonunun tersi $L_x^{-1}(B) = x^{-1} \cdot B$ olur ki, aynı sebeplerden L_x^{-1} de diferansiyellenebilir. Buradan hareketle L_x fonksiyonu G den G ye bir difeomorfizmadır ve özellikle $L_x(V)$ G içinde x in bir komşuluğudur öyle ki L_x bir difeomorfizma olarak açık komşulukları açık komşulukları tasvir eder. Sonuç olarak $(L_x \circ \exp): B_r \cap g \rightarrow L_x(V)$ fonksiyonu, difeomorfizmaların bir bileşkesi olarak difeomorfizmadır, bu ise G nin bir manifold olduğunu ispatlar.

Teorem: Tüm matris grupları Lie grubudur.

İspat : $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ bir matris grubu ise teoremden G nin bir manifold olduğunu biliyoruz. Ayrıca yine teoremin ispatından, matris grupları üzerinde matris çarpımı bir diferansiyellenebilir. Yani G nin grup işlemi diferansiyellenebilir.

Şimdi G nin grup yapısını oluşturacak ters fonksiyonu tanımlamak için, $A \in G$ ve $adj(A) = \overline{A}^T$ olmak üzere, $t: G \rightarrow G$ ters fonksiyonu

$$t(A) = \frac{1}{\det(A)} adj(A) \quad (4.15)$$

şeklinde tanımlanırsa; $t(A)$ değeri $\mathbb{R}$ de bir polinom olarak diferansiyellenebilir. Bu lineer cebirin standart bir sonucudur. Sonuç olarak G nin bir Lie grup olduğu ispatlanır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Matris grupları en genel anlamda terslenebilir matrislerin grubu olarak tanımlanır. Bu tanım tamamen cebirsel olmakla birlikte geometrik olarak da birçok özelliklere sahip olduğundan matematikte önemli bir yeri vardır. Bu tez çalışmasında, temel analiz derslerinden, lineer cebir ve topolojiden bilinen süreklilik, yakınsaklık, limit noktaları, üstel tasvir gibi kavramlar elemanları matrisler olan matris grupları için tanımlanmıştır. Matris gruplarının manifold yapısına ve üzerindeki cebirsel işlemle birlikte Lie grubu yapısına sahip olduğu ispatlanmıştır. Herhangi bir matris grubunun Lie cebiri ile Lie grubu arasındaki ilişki ortaya konmuştur.

Tüm bu çalışmalar reel sayılar üzerinde tanımlı matris grupları için yapılmıştır. Ayrıca kompleks sayılar veya quaterniyonlar üzerinde de benzer çalışmalar yapılabilir. Son olarak, herhangi bir Lie grubunun Lie cebiri ile bir matris grubunun Lie cebiri arasında bir izomorfizma kurulabileceği ileri çalışma önerileri olarak verilebilir.

KAYNAKLAR

- Arvanitogeorgos A.** (2003). *An Introductions to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*. Amer Mathematical Society, Rhode Island, U.S.A.
- Baker A.** (2000). *An Introductions to Matrix Groups and Their Applications*. Department of Mathematics, University of Glasgow, Scotland.
- Collins B.** (2014). *An Introduction to Lie Theory through Matrix Groups*.
- Hall B.** (2000). *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*. Department of Mathematics University of Notre Dame, U.S.A.
- Lang S.** (2000). *Introductions to Linear Algebra*. Department of Mathematics Yale University, New Haven, U.S.A.
- Loyd M.** (2015). *An Introduction to Matrix Lie Groups and Matrix Lie Algebras*. Whitman College.
- Munkers J.** (2000). *Topology*. Prentice Hall, U.S.A.
- Soria E.** (2016). *Matrix Group and Their Algebras*. Saint Mary's College Mathematics, (Danışman: Dr. Keely Machmer-Wessels).
- Tapp K.** (2005). *Matrix Groups for Undergraduates*. American Mathematical Society, U.S.A.
- Tu L.W.** (2011). *An Introduction to Manifolds*. Springer, New York, U.S.A.
- Warner F.W.** (1983). *Foundations of Differantiable Manifolds and Lie Groups*. Springer New York, U.S.A.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Gökçe YILDIRIM

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2017, Namık Kemal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.
- **Yüksek Lisans** : 2022, Haliç Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Tezli Yüksek Lisans Programı.