

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYDA RİBBON ÇATIYA
GÖRE FOKAL EĞRİLER**

Uğur ÜSTÜNDAĞ

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EKİM 2022

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

**3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYDA RİBBON ÇATIYA GÖRE
FOKAL EĞRİLER**

Tez Yazarı
Uğur ÜSTÜNDAĞ

Danışman
Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

EKİM, 2022
ELAZIĞ

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: 3-Boyutlu Minkowski Uzayda Ribbon Çatıya Göre Fokal Eğriler
Yazarı: Uğur ÜSTÜNDAĞ
İlk Teslim Tarihi: 6.10.2022
Savunma Tarihi: 21.10.2022

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

İmza

Danışman: Doç.Dr. Mustafa YENEROĞLU Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Başkan: Prof. Dr. Vedat ASİL Onayladım
Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi

Üye: Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR Onayladım
Muş Alparslan Üniversitesi, Fen Fakültesi

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza

Prof. Dr. Burhan ERGEN
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “3-Boyutlu Minkowski Uzayda Ribbon Çatıya Göre Fokal Eğriler” yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

ELAZIĞ, 2022
Uğur ÜSTÜNDAĞ



ÖNSÖZ

Manyetik eğriler diferansiyel geometri ve fizik gibi bilimsel alanlarında geniş bir çalışma olanağı sunmaktadır. Özellikle farklı çatılara göre bu eğrileri oluşturup bunlarla ilgili karakterizasyonlar yapmak mümkündür. Bu çatılarda en bilineni Frenet çatısıdır. Bu çatının tek dezavantajı eğrinin üçüncü mertebeye kadar türevin sürekli olmasıdır. Bundan dolayı yeni çatılara ihtiyaç duyulmuştur. Ribbon çatısı, eğrinin ikinci türevinin sıfır olması halinde bile çalışabilen bir çatıdır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç.Dr. Mustafa YENEROĞLU'na ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Vedat ASİL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme üzerimdeki emeklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Uğur ÜSTÜNDAĞ

ELAZIĞ, 2022

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	ix
1. Giriş	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR.....	2
3. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA RİBBON ÇATI	8
3.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Ribbon Çatı.....	8
4. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA RİBBON ÇATIYA GÖRE FOKAL EĞRİLER	11
4.1 3-Boyutlu Minkowski Uzayında time-like Ribbon Çatıya göre Fokal Eğriler.....	11
4.1.1 Time-like Darboux Vektörlü ribbon çatıya göre Fokal eğriler	11
4.1.2. Space-like Darboux Vektörlü ribbon çatıya göre Fokal eğriler	12
4.2 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Space-like Binormali Ribbon Çatıya göre Fokal Eğriler	14
4.3. Time-like binormali Ribbon çatıya göre fokal eğriler.....	16
4.3.1. Space-like Darboux vektörlü Ribbon çatıya göre Fokal Eğri.....	16
4.3.2 Time-like Darboux vektörlü Ribbon çatıya göre Fokal Eğri	17
5. SONUÇLAR	20
KAYNAKLAR.....	21
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

3-Boyutlu Minkowski Uzayda Ribbon Çatıya Göre Fokal Eğriler

Uğur ÜSTÜNDAĞ

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Ekim 2022, Sayfa ix+21

Minkowski uzayında eğriler teorisinde farklı çatılara göre birçok çalışma yapılmıştır. Birçok bilim adamı bu teoride Frenet çatı, Bishop çatı, Adapted çatı, gibi çatıları çalışmıştır. Bu çatılar eğriler ile ilgili karakterizasyonlarda bize yardımcı olur.

Bu tezin amacı, Minkowski uzayında ribbon çatıyı göre fokal eğrileri araştırmaktır. Bu amaç doğrultusunda, ilk önce ribbon çatı tanımlandı. Daha sonra bu çatıya bağlı olarak space-like ve time-like fokal eğriler verildi ve çeşitli karakterizasyonlar elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, Manyetik eğriler, Ribbon çatı, Öklid uzayı

ABSTRACT

Focal Curves According to the Ribbon Frame in 3-Dimensional Minkowski Space

Uğur ÜSTÜNDAĞ

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
October2022,Page ix+21

Many studies have been done according to different frames of the theory of curves in Minkowski Space. Many scientists have studied frames such as Frenet frame, Bishop frame, Adapted frame in this theory. These frame help us in the characterization of curves.

The goal of this thesis, the focal curves according to Ribbon frame in 3-dimensional Minkowski space are investigated. In line with this purpose, the ribbon roof was first defined.. Then, depending on this frame, space-like and time-like focal curves were given and various characterizations were obtained.

Keywords:Frenet Frame, Magnetic curves, Ribbon frame, Euclidean Space

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1 Darboux Vektörü.....	7
--------------------------------	---



SİMGELER VE KISALTMALAR

$C^\infty(M, \mathbb{R})$: Diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
∇	: Levi-Civita koneksiyonu
$\Phi(X)$: Lorentz kuvveti fonksiyonu
L	: Ribbon iç uzunluğu
\mathbb{R}	: Reel uzay
\mathbb{E}	: Öklid uzayı
s	: Birim hız parametresi
$R(s)$: Ortogonal matris
$\theta(s)$: Ribbon merkez eğrisi
$A(s)$: Birim vektör alanı
α	: \mathbb{E}^n uzayında birim hızlı eğri
$T(s)$: Teğet vektör alanı
$N(s)$: Normal vektör alanı
$B(s)$: Binormal vektör alanı
τ	: 3-boyutlu Öklid uzayında burulma noktası
κ	: 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik fonksiyonu

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride eğriler önemli konulardan biridir. Parametrik gösterimde tanımlanırlar ve geometrik özellikleri türev ve integral yardımıyla incelenir. Eğri analizinin en önemli konularından biri, eğrinin her noktasında bir koordinat sistemi oluşturan, kinematik özellikleri tanımlayan Frenet-Serret formülleridir. Frenet ve Serret bu formülleri, yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir eğri üzerinde ortonormal bir çatı olarak tanımladı. Bu çatı teğet, normal, binormal birim vektörlerine bağlı ifade edilir. Bu formüller iki bağımsız Fransız matematikçi Jean Frédéric Frenet ve Joseph Alfred Serret tarafından bulunmuşlardır [1,2]. Ancak bu formüller bazı durumlarda yetersiz kaldığından Bishop çatı, adapted çatı, ribbon çatı gibi başka çatılara ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla DNA ve Protein çalışmalarında uygulanabilen ribbon teorisi geliştirilmiştir[3,4]. Ayrıca polimerler için bir statik model olarak ribbonların diferansiyel geometrisi incelenmiştir [5]. Bu çalışmalara bağlı olarak Bohr ve Markvorsen ribbon çatıyı tanımlamışlardır [6].

Frenet çatısına göre Oskülatör kürenin merkezi fokal eğrisine göre tanımlanır. Eğrinin $\{t(s), n(s), b(s)\}$ bir Frenet Çerçevesi ise $\alpha(s)$ yay parametresi s ile, odak eğrisi şu şekilde verilir:

$$C_\alpha(s) = (\alpha + c_1 n + c_2 b)(s), \quad (1)$$

burda c_1, c_2 fonksiyonlarına fokal eğrinin eğrilikleridir. Bu gösterimi ilk olarak Vargas yapmıştır [7]. Daha sonra Arslan [8] ve Korpınar [9] tarafından çalışılmıştır.

Minkowski uzayı, uzay-zaman diyebileceğimiz fiziksel fenomeni açıklayan Hermann Minkowski tarafından yaratıldı . Einstein'ın boyutlarla ilgili yorumladığı, özel görelilik adı altında çalışmalarını sürdürdüğü ve bahsettiği tüm fizik yasaları bu uzayla ilgilidir. Matematikte Minkowski uzayı, farklı bir Tensör bağlamında yaratılmış bir uzaydır. Belli kuralları olan bu kurallar içerisinde farklı geometrik şekillere sahip bir mekandır. Minkowski uzayında eğrilerin çeşitli çatılara göre durumları bir çok bilim insanı tarafından incelenmiştir [10,11,12,13,14,15]. Turgut, Minkowski uzayında regle yüzeyleri araştırmıştır [16].

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1: $I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\alpha &\rightarrow E_1^3 \\ S &\rightarrow \alpha(s)\end{aligned}$$

Diferansiyellenebilir fonksiyonuna E_1^3 , 3 boyutlu Minkowski uzayında eğri adı verilir. Eğer $\alpha'(s)$ hız vektör alanı için

- 1) $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$ ise α 'ya birim hızlı space-like eğri
- 2) $\langle \alpha', \alpha' \rangle = -1$ ise α 'ya birim hızlı time-like eğri (2.1)
- 3) $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$ ise α 'ya null(light-like) eğri adı verilir[14] .

Tanım 2.2: \mathbb{R}_1^3 , Minkowski uzayında iki vektör v ve w olsun. $v=(v_1, v_2, v_3)$ ve $w=(w_1, w_2, w_3)$ olmak üzere

$$(v_3w_2 - v_2w_3, v_1w_3 - v_3w_1, v_1w_2 - v_2w_1) \quad (2.2)$$

vektörüne v ve w 'nin vektörel çarpımı denir. $v \times w$ şeklinde gösterilir.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{cases} \quad e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}) \quad (2.3)$$

olmak üzere

$$v \wedge w = -\det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

veya

$$v \wedge w = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

olarak hesaplanabilir. Burada $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = -e_1$, $e_3 \wedge e_1 = -e_2$ dir. Saat yönünün tersi pozitif yön olarak alınmıştır.

Saat yönünün tersi negatif yön olarak kabul edilirse $e_1 \wedge e_2 = -e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$ olur .Bu durumda

$$v \wedge w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

şeklindedir [16].

Tanım 2.3: $f: A \times A \rightarrow \mathbf{V}$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

Fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A ya \mathbf{V} ile birleşmiş afin uzayı denir.

i) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$ (2.7)

ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in \mathbf{V}$ olmak üzere $\alpha = \overrightarrow{PQ}$ olup, $Q \in A$ noktası vardır [18].

Tanım 2.4: A reel bir afin uzay ve bu afin uzayla birleşen bir vektör uzayı da \mathbf{V} olsun.

\mathbf{V} vektör uzayında x ve y vektör uzaylarını göz önüne alalım.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ve } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{V} \text{ olmak üzere}$$

$$\langle, \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (2.8)$$

dönüşümüne Öklid anlamında iç çarpım denir [18].

Tanım 2.5: I, \mathbb{R} de açık bir alt küme ve E^n de n- boyutlu Öklid uzayı olsun.

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^n$$

dönüşümü differansiyellenebilir ise α ya E^n de bir eğri ve $t \in I$ da α eğrisinin parametresi denir [18].

Tanım 2.6: (M, g) bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir afin koneksiyonu ∇ olsun.

Aşağıda verilen koşulları sağlaması durumunda ∇ ya M nin Levi Civita Koneksiyonu denir [18].

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere;

i $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ (2.9)

ii $Zg(X, Y) = +g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$ (2.10)

Tanım 2.7: (M, g) Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde Levi Civita Koneksiyonu olsun.

$$X, Y, Z \in \chi(M)$$

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (2.11)$$

dönüşümüne Riemann eğrilik tensörü denir [19].

Tanım 2.8: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir [20].

Tanım 2.9: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha = \alpha(t)$ olmak üzere $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir [20]

Tanım 2.10: α her mertebeden diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Bu durumda $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in \text{Sp}\{\Psi\}$ olmak üzere Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_r\}$ orthonormal sistemine, M eğrisinin Frenet $r -$ ayaklısı alanı denir [18].

Tanım 2.11: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, $t \in I$ için

Teğet vektörün alanı:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) \quad (2.12)$$

Normal vektör alanı:

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} \quad (2.13)$$

Binormal vektör alanı:

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|} \quad (2.14)$$

Verilen bu vektörlerin oluşturduğu $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ vektör alanlarına Frenet 3 – ayaklısı denir [18].

Tanım 2.12 : $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle \quad (2.15)$$

Fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [20].

Tanım 2.13: \mathbb{R}^3 uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\| \quad (2.16)$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriligi denir [20].

Tanım 2.14: s , yay parametresi olmak üzere, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{T}'(s) = k_1(s) \mathbf{N}(s) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{N}'(s) = -k_1(s) \mathbf{T}(s) + k_2(s) \mathbf{B}(s) \quad (2.18)$$

$$\mathbf{B}'(s) = -k_2(s) \mathbf{N}(s) \quad (2.19)$$

ve

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1$$

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 0$$

$$\kappa = \kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

$$\tau = \tau(s) = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{B}' \rangle$$

$k_1 = \kappa$ ve $k_2 = \tau$ bundan sonra yerlerine bu simgeleri kullanabiliriz [18].

Tanım 2.15: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. $\bar{\mathbf{w}} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$ vektör alanına γ eğrisinin Darboux vektör alanı denir.

$$\mathbf{w}(s) = \frac{\bar{\mathbf{w}}}{\|\bar{\mathbf{w}}(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s) \mathbf{T}(s) + \kappa(s) \mathbf{B}(s)) \quad (2.20)$$

vektörüne γ eğrisinin Darboux göstergesi denir [18].

Tanım 2.16: \mathbb{E}^{n+1} de M hiperyüzeyi üzerindeki bir eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü M hiper yüzeyine ortogonal ise α eğrisine M yüzeyinde geodezik eğri denir [18].

Tanım 2.17 (Ribbon Çatı): Ribbon ve merkez eğrisi $w(s)$ ve $\theta(s)$ gibi iki sürekli fonksiyon tarafından oluşturulur. Burada $s \in [0, L]$ aralığında tanımlıdır ve L Ribbonun iç uzunluğudur. Bu aralıkta her s için $\theta(s) \in [0, \pi]$ olduğunu varsayalım. Böylece s için $\sin(\theta(s)) > 0$ dır. Ribbona teğet bir alan olan ve Ribbon merkez eğrisini $\theta(s)$ açısı ile tanımlayacağız. Bu yapıda en önemli olan $\mathbf{A}(s)$ birim vektör alanıdır ve bu vektör alanı $\theta(s)$ açısına bağlı olarak tanımlanır. Böylece $\mathbf{A}(s)$ ve $w(s)$ birlikte

$$\mathbf{D}(s) = w(s)\mathbf{A}(s)$$

Darboux vektörünü oluşturur. Kabul edelim ki $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}$ bir ortonormal vektör sistemi olsun. Bu sistemimin diferensiyeli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(s) &= w(s)\mathbf{A}(s) \times \mathbf{e}(s) \\ \mathbf{f}'(s) &= w(s)\mathbf{A}(s) \times \mathbf{f}(s) \\ \mathbf{g}'(s) &= w(s)\mathbf{A}(s) \times \mathbf{g}(s) \end{aligned} \quad (2.21)$$

Burada $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{e}(s)$ ve $\mathbf{g}(s)$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathbf{A}(s) = \cos(\theta(s))\mathbf{e}(s) + \sin(\theta(s))\mathbf{g}(s) \quad (2.22)$$

(2.1) ve (2.2) den

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(s) &= w(s)\sin(\theta(s))\mathbf{f}(s) \\ \mathbf{f}'(s) &= -w(s)\sin(\theta(s))\mathbf{e}(s) + w(s)\cos(\theta(s))\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}'(s) &= -w(s)\cos(\theta(s))\mathbf{f}(s) \end{aligned} \quad (2.23)$$

yazılabilir. Burada s yay parametresidir.

$$\mathbf{R}'(s) = \mathbf{R}(s) \mathbf{\Xi}(s)$$

Burada $\mathbf{R}(s)$ ortogonal matristir.

$$\mathbf{\Xi}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -w(s)\sin(\theta(s)) & 0 \\ w(s)\sin(\theta(s)) & 0 & -w(s)\cos(\theta(s)) \\ 0 & w(s)\cos(\theta(s)) & 0 \end{bmatrix}$$

(2.24) Ribbon merkez eğrisinin İki temel eğrilik $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$ ve iki temel doğrultmanı $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \kappa_1(s) &= \frac{-w(s)}{\sin(\theta(s))}, \quad \kappa_2(s) = 0 \\ \mathbf{t}_1(s) &= \sin(\theta(s))\mathbf{e}(s) - \cos(\theta(s))\mathbf{g}(s), \quad \mathbf{t}_2(s) = \mathbf{A}(s) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Euler teoremine göre merkez çizgisinin normal eğriliği

$$\kappa_n(s) = \kappa_1(s)\sin^2(\theta(s)) + \kappa_2(s)\cos^2(\theta(s)) = -w(s)\sin(\theta(s)) \quad (2.26)$$

Olur. Merkez eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir [10]:

$$\begin{aligned} \text{i} \quad \kappa(s) &= \|\mathbf{e}'(s)\| = |w(s)| \sin(\theta(s)) \\ \text{ii} \quad \tau(s) &= \langle (\mathbf{e}(s) \times \mathbf{e}'(s)), \mathbf{e}''(s) \rangle = w(s)\cos(\theta(s)) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Tanım 2.18 (Ribbon Çatı ile Frenet-Serret İlişkisi):

Ribbon çatı da $w(s) \neq 0$ olduğunda $\kappa(s)$ pozitif olur böylece bir tek $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ Frenet-Serret çatısı ve aynı şekilde bir tek Darboux vektörü vardır öyle ki

$$\mathbf{D}(s) = \tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s) = w(s)\mathbf{A}(s)$$

ve Frenet-Serret çatısı için bir ani dönme vektörüdür. Her zaman ribbon çatı da $\mathbf{T}(s) = \mathbf{e}(s)$ dir. Varsayalım ki $[0, L]$ aralığının bir $[a, b]$ alt aralıklarında ki tüm s için $w(s) \neq 0$ olsun. Sadece iki olasılık vardır [6]:

i Eğer $\mathbf{N}(a) = \mathbf{f}(a)$ ise $\mathbf{N}(s) = \mathbf{f}(s)$, $\mathbf{B}(s) = \mathbf{g}(s)$ ve $\mathbf{D}(s) = w(s)\mathbf{A}(s)$, $s \in [a, b]$ (2.28)

ii $\mathbf{N}(a) = -\mathbf{f}(a)$ ise $\mathbf{N}(s) = -\mathbf{f}(s)$, $\mathbf{B}(s) = -\mathbf{g}(s)$ ve $\mathbf{D}(s) = w(s)\mathbf{A}(s)$, $s \in [a, b]$ (2.29)

Tanım 2.19: M kesitsel eğriliği sabit olan uzay eğrisi $\gamma = \gamma(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. $\mathbf{T}(t)$, γ eğrisinin birim teğet vektör alanı ve hızı da $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ olmak üzere eğrinin Frenet formülleri Tanım 2.14 de verilmiştir. M de γ nin varyasyonu

$$\Gamma: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

$$(t, z) \rightarrow \Gamma(t, z)$$

$$\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$$

olarak tanımlanır.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \mathbf{V}(t) \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlı vektör alanı da varyasyon vektör alanıdır. Eğer

$$\left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \tau^2}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial \kappa^2}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.31)$$

şartını sağlıyorsa $\gamma(s)$ boyunca $\mathbf{V}(s)$ vektör alanına Killing vektör alanı denir. Burada $v = \|\mathbf{V}(s)\|$, s de yay parametresidir [23].

Tanım 2.20 : $\alpha = \alpha(s)$ regüler birim hızlı bir eğri ve Frenet vektörleri \mathbf{T} , \mathbf{N} ve \mathbf{B} olsun

(i) α timelike ise \mathbf{T} timelike, \mathbf{N} ve \mathbf{B} spacelike vektörlerdir. Bu durumda Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpımları sırasıyla

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)/\kappa(s), \quad \mathbf{B}(s) = -(\mathbf{T} \times \mathbf{N})(s),$$

$$\mathbf{T}' = \kappa\mathbf{N}, \quad \mathbf{N}(s) = \kappa\mathbf{T} - \tau\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \tau\mathbf{N},$$

$$\kappa(s) = \sqrt{|\langle \mathbf{T}'(s), \mathbf{T}'(s) \rangle|}$$

$$\tau(s) = (\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle / \|\alpha' \times \alpha''\|^2)(s),$$

$$\mathbf{T} \times \mathbf{N} = -\mathbf{B}, \quad \mathbf{N} \times \mathbf{B} = \mathbf{T}, \quad \mathbf{B} \times \mathbf{T} = -\mathbf{N} \quad (2.32)$$

dir.

(ii) α spacelike binormal bir spacelike eğri ise \mathbf{T} spacelike, \mathbf{N} timelike ve \mathbf{B} spacelike olur. Bu durumda Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpımları sırasıyla

$$\mathbf{T}(s) = \alpha'(s), \quad \mathbf{N}(s) = \mathbf{T}'(s)/\kappa(s), \quad \mathbf{B}(s) = -(\mathbf{T} \times \mathbf{N})(s),$$

$$\begin{aligned}
T' &= \kappa N, & N' &= \kappa T + \tau B, & B' &= \tau N, \\
\kappa(s) &= \sqrt{| \langle T'(s), T'(s) \rangle |} \\
\tau(s) &= (\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle / \| \alpha' \times \alpha'' \|^2)(s), \\
T \times N &= -B, & N \times B &= -T, & B \times T &= N,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

dir.

(iii) α timelike binormal bir spacelike eğri ise T ve N spacelike ve B timelike olur. Bu durumda Frenet vektörleri, Frenet formülleri, eğrilikleri ve vektörel çarpım sırasıyla

$$\begin{aligned}
T(s) &= \alpha'(s), & N(s) &= T'(s)/\kappa(s), & B(s) &= (T \times N)(s), \\
T' &= \kappa N, & N' &= -\kappa T + \tau B, & B' &= \tau N, \\
\kappa(s) &= \sqrt{| \langle T'(s), T'(s) \rangle |} \\
\tau(s) &= (\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle / \| \alpha' \times \alpha'' \|^2)(s), \\
T \times N &= B, & N \times B &= T, & B \times T &= N,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

dir [14].

Tanım2.21 : Bir α eğrisi üzerinde $\alpha(s)$ noktası eğriyi çizerken bu noktadaki T, N, B Frenet 3-ayaklısı her s anında, (bir eksen etrafında) ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir ve bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki Darboux(ani dönme) eksenini denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = \tau T + \kappa B = N \times N' \tag{2.35}$$

şeklinde olur ve bu vektöre Darboux vektörü adı verilir. Bu vektör şekil 2.1 de gösterilmiştir. B ile W arasındaki açı φ ile gösterilirse,

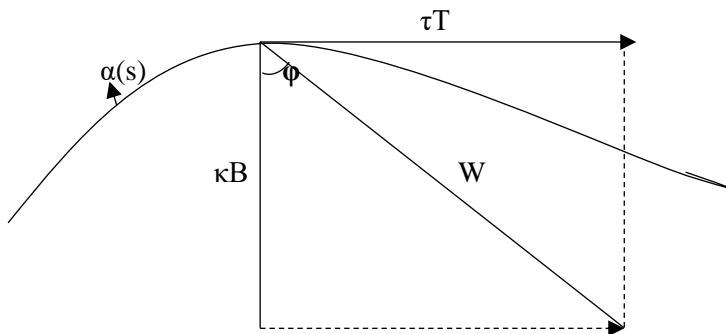
$$\kappa = \|W\| \cos\varphi$$

$$\tau = \|W\| \sin\varphi$$

dır. W Darboux vektörü yönündeki birim vektör C ile gösterilirse

$$C = \sin\varphi T + \cos\varphi B \tag{2.36}$$

bulunur [14].



Şekil 2.1 α eğrisinin Frenet vektörlerine göre Darboux Vektörü

3. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA RIBBON ÇATI

3.1. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Ribbon Çatı

3-boyutlu Minkowski uzayında bir γ eğrisinin frenet çatısı $\{t, n, b\}$ ve Ribbon çatısı $\{e, f, g\}$ olsun. Bu çatılardaki vektörler arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$e=t, f=n \text{ veya } -f=n, g=b \text{ yada } -g=b$$

Bu ifadelerle bağlı olarak Minkowski uzayında ribbon çatılar aşağıdaki gibi oluşturulur.

a) γ eğrisi Minkowski uzayında bir time-like teğetli eğri, $\theta(s)$, g ve $D(s)$ Darboux vektörü arasındaki time-like açı olsun.

i) $D(s)$ space like vektör ise o zaman

$$A = \sinh\theta(s)e - \cosh\theta(s)g \quad (3.1)$$

olmak üzere

$$e' = \omega(s)A \times e \Rightarrow e' = \omega \cosh\theta(s)g \times e = -\omega \cosh\theta(s)f$$

$$\begin{aligned} f' = \omega(s)A \times f &\Rightarrow f' = \omega \sinh\theta(s)e \times f - \omega \cosh\theta(s)g \times f \\ &= \omega \sinh\theta(s)g + \omega \cosh\theta(s)e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g' = \omega(s)A \times g &\Rightarrow g' = \omega \sinh\theta(s)e \times g \\ &= -\omega \sinh\theta(s)f \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{bmatrix} e' \\ f' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \cosh\theta & 0 \\ \omega \cosh\theta & 0 & \omega \sinh\theta \\ 0 & -\omega \sinh\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix}$$

ii) $D(s)$ time-like vektör ise o zaman

$$A = \cosh\theta(s)e + \sinh\theta(s)g \quad (3.2)$$

olmak üzere

$$e' = \omega A \times e \Rightarrow e' = \omega \sinh\theta(s)g \times e = \omega \sinh\theta(s)f$$

$$\begin{aligned} f' = \omega A \times f &\Rightarrow f' = \omega \cosh\theta(s)e \times f + \omega \sinh\theta(s)g \times f \\ &= \omega \cosh\theta(s)g - \omega \sinh\theta(s)e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g' = \omega A \times g &\Rightarrow g' = \omega \cosh\theta(s)e \times g \\ &= -\omega \cosh\theta(s)f \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemlerden aşağıdaki matris yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \sinh \theta & 0 \\ -\omega \sinh \theta & 0 & \omega \cosh \theta \\ 0 & -\omega \cosh \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

b) γ , time-like normalli bir eğri ve $\theta(s)$, \mathbf{g} ve D arasındaki açı olsun. \mathbf{g} ve D space like vektörler ise ozaman

$$\mathbf{A} = -\sin \theta(s) \mathbf{e} + \cos \theta(s) \mathbf{g} \quad (3.4)$$

olur. Bu son ifadeye göre

$$\mathbf{e}' = \omega(s) \mathbf{A} \times \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{e}' = \omega(s) \cos \theta(s) \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}' = \omega(s) \mathbf{A} \times \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}' = -\omega(s) \sin \theta(s) \mathbf{g} - \omega(s) \cos \theta(s) \mathbf{e}$$

$$\mathbf{g}' = \omega(s) \mathbf{A} \times \mathbf{g}$$

$$= \omega(s) \sin \theta(s) \mathbf{f}$$

bulunur. Bu son ifadeler matris formunda aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \cos \theta & 0 \\ -\omega \cos \theta & 0 & -\omega \sin \theta \\ 0 & \omega \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Eğer $\mathbf{b} = -\mathbf{g}$ ise

$$\mathbf{A} = -\sin \theta(s) \mathbf{e} - \cos \theta(s) \mathbf{g} \quad (3.6)$$

elde edilir. Buradan

$$\mathbf{e}' = \omega(s) \mathbf{A} \times \mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{e}' = -\omega \cos \theta(s) \mathbf{f}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}' = \omega(s) \mathbf{A} \times \mathbf{f} &\Rightarrow \mathbf{f}' = \omega(s) (-\sin \theta(s) \mathbf{e} - \cosh \theta(s) \mathbf{g}) \times \mathbf{f} \\ &= -\omega(s) \sin \theta(s) \mathbf{g} + \omega(s) \cos \theta(s) \mathbf{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}' = \omega(s) \mathbf{A} \times \mathbf{g} &\Rightarrow \mathbf{g}' = \omega(s) (-\sin \theta(s) \mathbf{e} - \cos \theta(s) \mathbf{g}) \times \mathbf{g} \\ &= \omega(s) \sin \theta(s) \mathbf{f} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemlerden aşağıdaki matris yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \cos \theta & 0 \\ \omega \cos \theta & 0 & -\omega \sin \theta \\ 0 & \omega \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

c) γ , time-like binormalli eğri olsun

i) $D(s)$ space-like vektör ise

$$\mathbf{A} = \cosh \theta(s) \mathbf{e} - \sinh \theta(s) \mathbf{g} \quad (3.8)$$

olur. Bu son ifadeye göre;

$$\begin{aligned} \mathbf{e}' = \omega(s) \mathbf{A} \times \mathbf{e} &\Rightarrow \mathbf{e}' = \omega(s) (\cosh \theta(s) \mathbf{e} - \sinh \theta(s) \mathbf{g}) \times \mathbf{e} \\ &= -\omega(s) \sinh \theta(s) \mathbf{f} \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}' = \omega(s) \mathbf{A} \times \mathbf{f} \Rightarrow \mathbf{f}' = \omega(s) (\cosh \theta(s) \mathbf{e} - \sinh \theta(s) \mathbf{g}) \times \mathbf{f}$$

$$= \omega(s)\cosh\theta(s)g + \omega(s)\sinh\theta(s)e$$

$$g' = \omega(s)A x g \Rightarrow g' = -\omega(s)\cosh\theta(s)f$$

elde edilir. Bu son denklemlerden aşağıdaki matris yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} e' \\ f' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega\sinh\theta & 0 \\ \omega\sinh\theta & 0 & \omega\cosh\theta \\ 0 & -\omega\cosh\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ii) $D(s)$ time-like vektör ise

$$A = \sinh\theta(s)e - \cosh\theta(s)g \quad (3.10)$$

olur. Bu son ifadeye göre;

$$e' = \omega(s)A x e \Rightarrow e' = \omega(s)(\sinh\theta(s)e - \cosh\theta(s)g) x e$$

$$= -\omega(s)\cosh\theta(s)f$$

$$f' = \omega(s)A x f \Rightarrow f' = \omega(s)\sinh\theta(s)g + \omega(s)\cosh\theta(s)e$$

$$g' = \omega(s)A x g \Rightarrow g' = -\omega(s)\sinh\theta(s)f$$

elde edilir. Bu son denklemlerden aşağıdaki matris yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} e' \\ f' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega\cosh\theta & 0 \\ \omega\cosh\theta & 0 & \omega\sinh\theta \\ 0 & -\omega\sinh\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

4. 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA RİBBON ÇATIYA GÖRE FOKAL EĞRİLER

4.1 3-Boyutlu Minkowski Uzayında time-like Ribbon Çatıya göre Fokal Eğriler

4.1.1 Time-like Darboux Vektörlü ribbon çatıya göre Fokal eğriler

γ , bir time-like eğri, $D(s)$ time-like Darboux vektörü ve ribbon çatı

$$\begin{bmatrix} e' \\ f' \\ g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \sinh \theta & 0 \\ w \sinh \theta & 0 & w \cosh \theta \\ 0 & -w \cosh \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

olsun. γ nın fokal eğrisi $C_{\gamma}^R(s)$ ile gösterilmek üzere

$$C_{\gamma}^R(s) = \gamma + c_1^R f(s) + c_2^R g(s) \quad (4.2)$$

yazılabilir.

Teorem 4.1.1: $C_{\gamma}^R(s) = \gamma + c_0^R e(s) + c_1^R f(s) + c_2^R g(s)$,

γ time-like eğrisinin fokal eğri olsun. $D(s)$, space-like Darboux vektörü olmak üzere c_i^R ($i=0,1,2$) katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$c_0^R = 0 \quad (4.3)$$

$$c_1^R = \frac{1}{w(s) \sinh \theta(s)} \quad (4.4)$$

$$c_2^R = \left(\frac{1}{w(s) \sinh \theta(s)} \right)' \frac{1}{w(s) \cosh \theta(s)} \quad (4.5)$$

İspat: 3-boyutlu Minkowski uzayında γ time-like eğrisinin fokal eğrisi oskülatör kürenin merkezinde tanımlıdır. Eğer $a(s)$, oskülatör kürenin merkezi ise r oskülatör kürenin yarıçapı olmak üzere

$$\langle a(s) - \gamma(s), a(s) - \gamma(s) \rangle = r^2 \quad (4.6)$$

olarak yazılabilir. Eğer (4.6) eşitliğinin her iki yanının s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle e, a(s) - \gamma(s) \rangle = 0 \quad (4.7)$$

bulunur. Ayrıca

$$a(s) - \gamma(s) = c_0^R e + c_1^R f + c_2^R g \quad (4.8)$$

olup, (4.7) ve (4.8) birlikte gözönüne alınırsa

$$c_0^R = 0 \quad (4.9)$$

bulunur. (4.7) denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$\langle w \sinh \theta f, a(s) - \gamma(s) \rangle = 1 \quad (4.10)$$

elde edilir. (4.8) ve (4.10) denklemlerinden

$$c_1^R = \frac{1}{w(s) \sinh \theta(s)} \quad (4.11)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.10) denkleminin türevi alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$c_2^R = \left(\frac{1}{w(s)\sinh\theta(s)} \right)' \frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)} \quad (4.12) \text{ elde}$$

edilir. (4.11) ve (4.12) den

$$c_1^{R'} = w(s)\cosh\theta(s)c_2^R \quad (4.13)$$

$$c_2^{R'} = -w(s)\cosh\theta(s)c_1^R \quad (4.14)$$

Sonuç olarak time-like eğrili space-like Darboux vektörlü eğrinin fokal eğrilikleri aşağıdaki matrisle ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ c_1^{R'} \\ c_2^{R'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w(s)\sinh\theta(s) & 0 \\ w(s)\sinh\theta(s) & 0 & w(s)\cosh\theta(s) \\ 0 & -w(s)\cosh\theta(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1^R \\ c_2^R \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Sonuç 4.1.2: γ time-like eğri, r oskülatör kürenin yarıçapı olsun. Denklem (4.6) dan

$$r = \sqrt{(c_1^R)^2 + (c_2^R)^2} \quad (4.16)$$

elde edilir.

Lemma 4.1.3: γ time-like eğrisinin $C_\gamma^R(s)$ fokal eğrisinin hız vektörü ribbon çatiya göre \mathbf{g} vektör alanıdır.

İspat: γ nin fokal eğrisi $C_\gamma^R(s)$ olsun. Eğer s 'ye göre $C_\gamma^R(s)$ nin türevi alınırsa o zaman,

$$C_\gamma^R = (1 + c_1^R w \sinh\theta) \mathbf{e} + (c_1^{R'} - c_2^R w \sinh\theta) \mathbf{f} + (c_2^{R'} + c_1^R w \cosh\theta) \mathbf{g} \quad (4.17)$$

elde edilir. Böylece

$$C_\gamma^{R'} = (c_2^{R'} + c_1^R w \cosh\theta) \mathbf{g} \quad (4.18)$$

bulunur.

Sonuç 4.1.4 γ time-like eğri, r oskülatör kürenin yarıçapı olsun. Lemma 4.1.3 ve teorem 4.1.1 e göre

$$c_2^{R'} - \frac{(r^2)'}{2c_2^R} = -c_1^R w(s)\cosh\theta(s) \quad (4.19)$$

bulunur.

4.1.2. Space-like Darboux Vektörlü ribbon çatiya göre Fokal eğriler

γ , bir time-like eğri, $\mathbf{D}(s)$ time-like Darboux vektörü ve bunlara göre ribbon çati

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w\cosh\theta & 0 \\ w\cosh\theta & 0 & w\sinh\theta \\ 0 & -w\sinh\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

olsun. γ nin fokal eğrisi $C_\gamma^R(s)$ ile gösterilmek üzere

$$C_\gamma^R(s) = \gamma + c_1^R \mathbf{f}(s) + c_2^R \mathbf{g}(s) \quad (4.21)$$

yazılabilir.

Teorem 4.1.5: $C_{\gamma}^R(s) = \gamma + c_0^R e(s) + c_1^R f(s) + c_2^R g(s)$, γ time-like eğrisinin fokal eğri olsun. $D(s)$, time-like Darboux vektörü olmak üzere c_i^R ($i=0,1,2$) katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$c_0^R = 0 \quad (4.22)$$

$$c_1^R = -\frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)} \quad (4.23)$$

$$c_2^R = -\left(\frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)}\right)' \frac{1}{w(s)\sinh\theta(s)} \quad (4.24)$$

İspat : 3-boyutlu Minkowski uzayında γ time-like eğrisinin fokal eğrisi oskülatör kürenin merkezinde tanımlıdır. Eğer $a(s)$, oskülatör kürenin merkezi ise r oskülatör kürenin yarıçapı olmak üzere ;

$$\langle a(s) - \gamma(s), a(s) - \gamma(s) \rangle = r^2 \quad (4.25)$$

olarak yazılabilir. Eğer (4.25) eşitliğinin her iki yanının s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle -e, a(s) - \gamma(s) \rangle = 0 \quad (4.26)$$

bulunur. Ayrıca

$$a(s) - \gamma(s) = c_0^R e + c_1^R f + c_2^R g \quad (4.27)$$

olup, (4.26) ve (4.27) birlikte gözönüne alınırsa

$$c_0^R = 0 \quad (4.28)$$

bulunur. (4.26) denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$\langle w\cosh\theta f, a(s) - \gamma(s) \rangle = -1 \quad (4.29)$$

elde edilir. (4.27) ve (4.29) denklemlerinden

$$c_1^R = -\frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)} \quad (4.30)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.29) denkleminin türevi alınıp gerekli işlemler yapılırsa

$$c_2^R = -\left(\frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)}\right)' \frac{1}{w(s)\sinh\theta(s)} \quad (4.31)$$

elde edilir. (4.30) ve (4.31) den

$$c_1^{R'} = w(s)\sinh\theta(s)c_2^R \quad (4.32)$$

$$c_2^{R'} = -w(s)\sinh\theta(s)c_1^R \quad (4.33)$$

Sonuç olarak time-like eğrili time-like Darboux vektörlü eğrinin fokal eğrilikleri aşağıdaki matrisle ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ c_1^{R'} \\ c_2^{R'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w\cosh\theta & 0 \\ -w\cosh\theta & 0 & w\sinh\theta \\ 0 & -w\sinh\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1^R \\ c_2^R \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Lemma 4.1.6: γ time-like eğrisinin $C_{\gamma}^R(s)$ fokal eğrisinin hız vektörü ribbon çatıya göre g vektör alanıdır.

İspat: γ nın fokal eğrisi $C_{\gamma}^R(s)$ olsun. Eğer s 'ye göre $C_{\gamma}^R(s)$ nin türevi alınırsa o zaman,

$$C_{\gamma}^{R'} = (1 + c_1^R w\cosh\theta)e + (c_1^{R'} - c_2^R w\sinh\theta)f + (c_2^{R'} + c_1^R w\sinh\theta)g \quad (4.35)$$

elde edilir. Böylece

$$\mathbf{C}_\gamma^{R'} = (c_2^{R'} + c_1^R w \sinh \theta) \mathbf{g} \quad (4.36)$$

bulunur.

Sonuç 4.1.7 γ time-like eğri, r oskülatör kürenin yarıçapı olsun. Lemma 4.1.3 ve teorem 4.1.1 e göre

$$c_2^{R'} - \frac{(r^2)'}{2c_2^R} = -c_1^R w(s) \cosh \theta(s) \quad (4.37)$$

bulunur.

Sonuç 4.1.8 γ time-like eğri, r oskülatör kürenin yarıçapı olsun. Lemma 4.1.3 ve teorem 4.1.5 e göre

$$c_2^{R'} + c_1^R w(s) \sinh \theta(s) = -\frac{r^2}{2c_2^R} \quad (4.38)$$

4.2. 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Space-like Binormali Ribbon Çatıya göre Fokal Eğriler

γ , bir time-like eğri, $\mathbf{D}(s)$ space-like Darboux vektörü ve ribbon çatı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \cos \theta & 0 \\ -\omega \cos \theta & 0 & -\omega \sin \theta \\ 0 & \omega \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

olsun. γ nın fokal eğrisi $\mathbf{C}_\gamma^R(s)$ ile gösterilmek üzere

$$\mathbf{C}_\gamma^R(s) = \gamma + c_1^R \mathbf{f}(s) + c_2^R \mathbf{g}(s) \quad (4.40)$$

yazılabilir.

Teorem 4.2.1: $\mathbf{C}_\gamma^R(s) = \gamma + c_0^R \mathbf{e}(s) + c_1^R \mathbf{f}(s) + c_2^R \mathbf{g}(s)$, space-like binormali γ eğrisinin fokal eğri olsun. $\mathbf{D}(s)$, space-like Darboux vektörü olmak üzere c_i^R ($i=0,1,2$) katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$c_0^R = 0 \quad (4.41)$$

$$c_1^R = \frac{1}{w(s) \cos \theta(s)} \quad (4.42)$$

$$c_2^R = -\left(\frac{1}{w(s) \cosh \theta(s)}\right)' \frac{1}{w(s) \sinh \theta(s)} \quad (4.43)$$

İspat : 3-boyutlu Minkowski uzayında γ time-like eğrisinin fokal eğrisi oskülatör kürenin merkezinde tanımlıdır. Eğer $\mathbf{a}(s)$, oskülatör kürenin merkezi ise r oskülatör kürenin yarıçapı olmak üzere ;

$$\langle \mathbf{a}(s) - \gamma(s), \mathbf{a}(s) - \gamma(s) \rangle = r^2 \quad (4.44)$$

olarak yazılabilir. Eğer (4.44) eşitliğinin her iki yanının s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{a}(s) - \gamma(s) \rangle = 0 \quad (4.41)$$

bulunur. Ayrıca

$$\mathbf{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) = c_0^R \mathbf{e} + c_1^R \mathbf{f} + c_2^R \mathbf{g}$$

$$\langle \mathbf{e}, c_0^R \mathbf{e}(s) + c_1^R \mathbf{f}(s) + c_2^R \mathbf{g}(s) \rangle = 0 \quad (4.42)$$

$$c_0^R = 0 \quad (4.43)$$

olarak bulunur. (4.41) denkleminin s ye göre türevi alınır

$$\langle \mathbf{e}', \mathbf{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle + \langle \mathbf{e}, -\boldsymbol{\gamma}'(s) \rangle = 0 \quad (4.44)$$

elde edilir. Buradan

$$\langle w(s)\cos\theta(s)\mathbf{f}, \mathbf{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle = 1 \quad (4.45)$$

$$\langle w(s)\cos\theta(s)\mathbf{f}, c_1^R \mathbf{f} + c_2^R \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{e}, -\mathbf{e} \rangle = 0 \quad (4.46)$$

$$w(s)\cos\theta(s)c_1^R \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle - 1 = 0 \quad (4.47)$$

$$w(s)\cos\theta(s)c_1^R = 1 \quad (4.48)$$

$$c_1^R = \frac{1}{w(s)\cos\theta(s)} \quad (4.49)$$

olarak bulunur. (4.46) denkleminin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$c_2^R = \left(\frac{1}{w(s)\cos\theta(s)} \right)' \frac{1}{w(s)\sin\theta(s)} \quad (4.50)$$

elde edilir.

$$c_1^{R'} = -w(s)\sin\theta(s)c_2^R \quad (4.51)$$

$$c_2^{R'} = w(s)\sin\theta(s)c_1^R \quad (4.52)$$

Sonuç olarak time-like eğrili space-like Darboux vektörlü eğrinin fokal eğrilikleri aşağıdaki matrisle ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ c_1^{R'} \\ c_2^{R'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w(s)\cos\theta(s) & 0 \\ w(s)\cos\theta(s) & 0 & -w(s)\sin\theta(s) \\ 0 & w(s)\sin\theta(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ c_1^R \\ c_2^R \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Lemma 4.2.2: $\boldsymbol{\gamma}$ time-like eğrisinin $C_{\boldsymbol{\gamma}}^R(s)$ fokal eğrisinin hız vektörü ribbon çatiya göre \mathbf{g} vektör alanıdır.

İspat: $\boldsymbol{\gamma}$ nin fokal eğrisi $C_{\boldsymbol{\gamma}}^R(s)$ olsun. Eğer s 'ye göre $C_{\boldsymbol{\gamma}}^R(s)$ nin türevi alınır o zaman,

$$C_{\boldsymbol{\gamma}}^R = (1 - c_1^R w \cos\theta) \mathbf{e} + (c_1^{R'} + c_2^R w \sin\theta) \mathbf{f} + (c_2^{R'} - c_1^R w \sin\theta) \mathbf{g} \quad (4.54)$$

elde edilir. Böylece

$$C_{\boldsymbol{\gamma}}^{R'} = (c_2^{R'} - c_1^R w \sin\theta) \mathbf{g} \quad (4.55)$$

bulunur.

Sonuç 4.2.3: $\boldsymbol{\gamma}$ time-like eğri, r oskülatör kürenin yarıçapı olsun. Lemma 4.2.2 ve teorem 4.2.1 e göre

$$c_2^{R'} - c_1^R w \sin\theta = \frac{(r^2)'}{2c_2^R} \quad (4.56)$$

elde edilir.

4.3. Time-like binormali Ribbon çatıya göre fokal eğriler

4.3.1. Space-like Darboux vektörlü Ribbon çatıya göre Fokal Eğri

$\boldsymbol{\gamma}$, bir time-like binormali eğri, $\boldsymbol{D}(s)$ space-like Darboux vektörü ve ribbon çatı

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}' \\ \boldsymbol{f}' \\ \boldsymbol{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \sinh \theta & 0 \\ \omega \sinh \theta & 0 & \omega \cosh \theta \\ 0 & -\omega \cosh \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e} \\ \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

olsun. $\boldsymbol{\gamma}$ nın fokal eğrisi $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\gamma}}^R(s)$ ile gösterilmek üzere

$$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\gamma}}^R(s) = \boldsymbol{\gamma} + c_1^R \boldsymbol{f}(s) + c_2^R \boldsymbol{g}(s) \quad (4.58)$$

yazılabilir.

Teorem 4.3.1: $\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{\gamma}}^R(s) = \boldsymbol{\gamma} + c_0^R \boldsymbol{e}(s) + c_1^R \boldsymbol{f}(s) + c_2^R \boldsymbol{g}(s)$, $\boldsymbol{\gamma}$ time-like eğrisinin fokal eğri

olsun. $\boldsymbol{D}(s)$, space-like Darboux vektörü olmak üzere c_i^R ($i=0,1,2$) katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$c_0^R = 0 \quad (4.59)$$

$$c_1^R = \frac{-1}{w(s) \sinh \theta(s)} \quad (4.60)$$

$$c_2^R = -\left(\frac{1}{w(s) \sinh \theta(s)}\right)' \frac{1}{w(s) \cosh \theta(s)} \quad (4.61)$$

İspat: 3-boyutlu Minkowski uzayında $\boldsymbol{\gamma}$ time-like binormali eğrisinin fokal eğrisi oskülör kürenin merkezinde tanımlıdır. Eğer $\boldsymbol{a}(s)$, oskülör kürenin merkezi ise r oskülör kürenin yarıçapı olmak üzere ;

$$\langle \boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle = r^2 \quad (4.62)$$

olarak yazılabilir. Eğer (4.62) eşitliğinin her iki yanının s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle -\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle = 0 \quad (4.63)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) &= c_0^R \boldsymbol{e} + c_1^R \boldsymbol{f} + c_2^R \boldsymbol{g} \\ \langle \boldsymbol{e}, c_0^R \boldsymbol{e}(s) + c_1^R \boldsymbol{f}(s) + c_2^R \boldsymbol{g}(s) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$c_0^R \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle + c_1^R \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \rangle + c_2^R \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{g} \rangle = 0 \quad (4.65)$$

$$c_0^R = 0 \quad (4.66)$$

olarak bulunur.(4.63) denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$\langle \boldsymbol{e}', \boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle + \langle \boldsymbol{e}, -\boldsymbol{\gamma}'(s) \rangle = 0 \quad (4.67)$$

$$\langle -w(s) \sinh \theta(s) \boldsymbol{f}, \boldsymbol{a}(s) - \boldsymbol{\gamma}(s) \rangle - 1 = 0 \quad (4.68)$$

$$\langle -w(s) \sinh \theta(s) \boldsymbol{f}, c_1^R \boldsymbol{f}(s) + c_2^R \boldsymbol{g}(s) \rangle = 1 \quad (4.69)$$

$$-w(s) \sinh \theta(s) c_1^R \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{f} \rangle = 1 \quad (4.70)$$

$$c_1^R = \frac{-1}{w(s) \sinh \theta(s)} \quad (4.71)$$

olarak bulunur.(4.68) denkleminin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$c_2^R = (-w(s)\sinh\theta(s))' \frac{-1}{w(s)\sinh\theta(s)} \frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)w(s)\sinh\theta(s)} \quad (4.72)$$

elde edilir. Buradan

$$c_2^R = \left(\frac{1}{w(s)\sinh\theta(s)}\right)' \frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)} \quad (4.73)$$

bulunur. (4.71) ve (4.73) ün türevleri aşağıdaki gibidir:

$$c_1^{R'} = w(s)\cosh\theta(s)c_2^R \quad (4.74)$$

$$c_2^{R'} = -w(s)\cosh\theta(s)c_1^R \quad (4.75)$$

Sonuç olarak time-like eğrili space-like Darboux vektörlü eğrinin fokal eğrilikleri aşağıdaki matrisle ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ c_1^{R'} \\ c_2^{R'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w(s)\sinh\theta(s) & 0 \\ w(s)\sinh\theta(s) & 0 & w(s)\cosh\theta(s) \\ 0 & -w(s)\cosh\theta(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1^R \\ c_2^R \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

Lemma 4.3.2: γ time-like eğrisinin $C_\gamma^R(s)$ fokal eğrisinin hız vektörü ribbon çatıya göre g vektör alanıdır.

İspat: γ nın fokal eğrisi $C_\gamma^R(s)$ olsun. Eğer s 'ye göre $C_\gamma^R(s)$ nin türevi alınırsa o zaman,

$$C_\gamma^R = (1 + c_1^R w \sinh\theta) \mathbf{e} + (c_1^{R'} - c_2^R w \cosh\theta) \mathbf{f} + (c_2^{R'} + c_1^R w \cosh\theta) \mathbf{g}$$

elde edilir. Böylece

$$C_\gamma^{R'} = (c_2^{R'} + c_1^R w \cosh\theta) \mathbf{g} \quad (4.77)$$

bulunur.

Sonuç 4.3.3 : γ time-like eğri, r oskülatör kürenin yarıçapı olsun. Lemma 4.3.2 ve teorem 4.3.1 e göre

$$c_2^{R'} + c_1^R w \cosh\theta = -\frac{(r^2)'}{2c_2^R} \quad (4.78)$$

elde edilir.

4.3.2 Time-like Darboux vektörlü Ribbon çatıya göre Fokal Eğri

γ , bir time-like binormali eğri, $D(s)$ time-like Darboux vektörü ve ribbon çatı

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \cosh\theta & 0 \\ \omega \cosh\theta & 0 & \omega \sinh\theta \\ 0 & -\omega \sinh\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

olsun. γ nın fokal eğrisi $C_\gamma^R(s)$ ile gösterilmek üzere

$$C_\gamma^R(s) = \gamma + c_1^R \mathbf{f}(s) + c_2^R \mathbf{g}(s) \quad (4.80)$$

yazılabilir.

Teorem 4.3.4 : $C_{\gamma}^R(s) = \gamma + c_0^R e(s) + c_1^R f(s) + c_2^R g(s)$, γ time-like binormal eğrisinin fokal eğri olsun. $D(s)$, time-like Darboux vektörü olmak üzere c_i^R ($i=0,1,2$) katsayıları aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$c_0^R = 0 \quad (4.81)$$

$$c_1^R = \frac{-1}{w(s)\cosh\theta(s)} \quad (4.82)$$

$$c_2^R = -\left(\frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)}\right)' \frac{1}{w(s)\sinh\theta(s)} \quad (4.83)$$

İspat : 3-boyutlu Minkowski uzayında γ time-like binormal eğrisinin fokal eğrisi oskülör kürenin merkezinde tanımlıdır. Eğer $a(s)$, oskülör kürenin merkezi ise r oskülör kürenin yarıçapı olmak üzere ;

$$\langle a(s) - \gamma(s), a(s) - \gamma(s) \rangle = r^2 \quad (4.84)$$

olarak yazılabilir. Eğer (4.84) eşitliğinin her iki yanının s ye göre türevi alınırsa,

$$\langle -e, a(s) - \gamma(s) \rangle = 0 \quad (4.85)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} a(s) - \gamma(s) &= c_0^R e + c_1^R f + c_2^R g \\ \langle e, c_0^R e(s) + c_1^R f(s) + c_2^R g(s) \rangle &= 0 \\ c_0^R \langle e, e \rangle + c_1^R \langle e, f \rangle + c_2^R \langle e, g \rangle &= 0 \\ c_0^R &= 0 \end{aligned} \quad (4.86)$$

olarak bulunur.(4.84) denkleminin s ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \langle e', a(s) - \gamma(s) \rangle + \langle e, -\gamma'(s) \rangle &= 0 \\ \langle -w(s)\cosh\theta(s)f, a(s) - \gamma(s) \rangle - 1 &= 0 \\ -w(s)\cosh\theta(s)c_1^R \langle f, f \rangle &= 1 \\ c_1^R &= \frac{-1}{w(s)\cosh\theta(s)} \end{aligned} \quad (4.87)$$

olarak bulunur.(4.87) denkleminin türevi alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$c_2^R = -\left(\frac{1}{w(s)\cosh\theta(s)}\right)' \frac{1}{w(s)\sinh\theta(s)} \quad (4.89)$$

elde edilir.

$$c_1^{R'} = w(s)\sinh\theta(s)c_2^R \quad (4.90)$$

$$c_2^{R'} = -w(s)\sinh\theta(s)c_1^R \quad (4.91)$$

Sonuç olarak time-like eğrili space-like Darboux vektörlü eğrinin fokal eğrilikleri aşağıdaki matrisle ifade edilebilir:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ c_1^{R'} \\ c_2^{R'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w(s)\cosh\theta(s) & 0 \\ -w(s)\cosh\theta(s) & 0 & w(s)\sinh\theta(s) \\ 0 & -w(s)\sinh\theta(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ c_1^R \\ c_2^R \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

elde edilir.

Lemma 4.3.5: γ time-like eğrisinin $C_{\gamma}^R(s)$ fokal eğrisinin hız vektörü ribbon çatıya göre g vektör alanıdır.

İspat: γ nın fokal eğrisi $C_{\gamma}^R(s)$ olsun. Eğer s 'ye göre $C_{\gamma}^R(s)$ nin türevi alınırsa o zaman,

$$C_{\gamma}^R = (1 + c_1^R w \cosh \theta) \mathbf{e} + (c_1^{R'} - c_2^R w \sinh \theta) \mathbf{f} + (c_2^{R'} + c_1^R w \sinh \theta) \mathbf{g}$$

elde edilir. Böylece

$$C_{\gamma}^{R'} = (c_2^{R'} + c_1^R w \sinh \theta) \mathbf{g} \quad (4.93)$$

bulunur.

Sonuç 4.3.6: γ time-like eğri, r oskülatör kürenin yarıçapı olsun. Lemma 4.3.5 ve teorem 4.3.4 e göre

$$c_2^{R'} + c_1^R w \sinh \theta = -\frac{(r^2)'}{2c_2^R} \quad (4.94)$$

elde edilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada Minkowski uzayında ribbon çatı tanımlanmıştır. Bir ribbon eğrinin Ribbon çatı yardımıyla doğrultman eğrisi tanımlanarak, bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilmiştir.

Minkowski uzayında ribbon çatıya göre fokal eğriler incelemiştir. Fokal eğrinin eğrilikleri elde edilerek bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Oskülatör kürenin yarıçapıyla bunlar arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Son olarak benzer düşünceyle Dual Minkowski Uzayında Ribbon çatıya göre ribbon eğrisiyle ilişkili yeni fokal eğriler tanımlanarak, bu eğriler arasındaki ilişkiler araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] Frenet, F. (1847). Sur les courbes à double courbure, Thèse, Toulouse. Abstract in Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **17**, 1852.
- [2] Serret, J. A. (1851), Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, **16**.
- [3] Chirikjian, G.S. (2013). Framed curves and knotted DNA, Biochem Soc. Trans. 41, 635-638.
- [4] Hu, S., Lundgren, M., Niemi, AJ. (2011). Discrete frenet frame, inflection point solutions, and curve visualization with applications to folded proteins, Phys. Rev. E. 83.
- [5] Rappaport, S.M., Rabin, Y. (2007). Differential geometry of polymer models: worm-like chains, ribbons and Fourier knots, Journal of Physics A, 40, 4455-4466.
- [6] Bohr, J. and Markvorsen, S. (2013). Ribbon Crystals, Plos one, Vol:8, No:10.
- [7] Uribe-Vargas, R. (2005). On vertices, focal curvatures and differential geometry of space curves, Bull. Brazilian Math. Soc. 36 (3), 285—307.
- [8] Alegre, P., Arslan, K., Carriazo, A., Murathan, C. and Öztürk, G. (2010). Some special types of the developable ruled surface, Hacettepe J. Math. and Statis., 39(3), (2010).
- [9] Körpınar, T., Başı, S., Asil, V. (2020). New Characterization of D- Focal Curves in Minkowski 3-space, Bol. Soc. Paran. Math. , 38(2), 115-123.
- [10] Yılmaz, S., Savcı, Ü.Z., Ünlütürk, Y. (2014). Spacelike Curves of Constant Breadth According to Bishop Frame in E_1^3 , Math. Combin. Book Ser., 4, 01-06.
- [11] Soylu, D., Bektaş, M., Ergüt, M. (1999). Characterizations for osculator hypersphere in Lorentzian space, Jour. of Inst. of Math. & Comp. Sci.(Math. Ser.), 12(3).
- [12] Ayyıldız, N., Coken, A.C., Yucesan, A. (2002). Differential-geometrical conditions between geodesic curves and ruled surfaces in the Lorentz space, Balkan Journal of Geometry and Its Applications, 7(1), 1-6.
- [13] Korpinar, T. (2014). A New Method for Inextensible Flows of Timelike Curves in Minkowski Space-Time E_1^4 , International Journal of Partial Differential Equations, 2014, 1-7.
- [14] Zeybek,D.(2019).Smarandache eğrileri üzerine.Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- [15] Korpinar, T. and Bas, S. (2013). On Characterization Of B- Focal Curves In E^3 , Bol. Soc. Paran. Math., Vol:31, No:1, 175-178.
- [16] Turgut, A. (1995). 3-boyutlu Minkowski uzayında space-like ve time-like regle yüzeyler, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri.
- [17] Uzun, M., Şenyurt, S. (2020). Salkowski Eğrisinin birim Darboux vektörünün Sabban çatısından elde edilen Smarandache eğrileri, Iğdır Üniversitesi Fen Bilimleri Enst. Dergisi, 10(3), 1966-1974.
- [18] Hacısalihoğlu, H.H.,(2000).Diferansiyel Geometri.Erten Matbaası, Ankara.
- [19] O'Neill, B.(1996).Elementary Differential Geometry. New York, London, Usa: Academic Press.
- [20] Sabucuoğlu, A.,(2006). Diferansiyel Geometri. Nobel yayınları. Ankara. 264-277.
- [21] Hacısalihoğlu, H.H.,(1980).Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. Elazığ.
- [22] N.Gürhan, (2013).Frenet eğrisi ile bağlantılı eğriler ve uygulamaları. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek lisans Tezi.
- [23] Barros, M.,(1997).General helices and a theorem of lancret, Proceeding of the American Mathematical Society. 125(5),1503-1509.

ÖZGEÇMİŞ

Uğur ÜSTÜNDAĞ

[Redacted]

[Redacted] | [Redacted]
[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]

[Redacted]

[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]

[Redacted]

[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]

[Redacted]

[Redacted] [Redacted] [Redacted] [Redacted] [Redacted] [Redacted] [Redacted] [Redacted]
[Redacted]

[Redacted] [Redacted] [Redacted] [Redacted]
[Redacted] [Redacted]