

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BESSEL KAYMASININ DOĞURDUĞU BESSEL POTANSİYELLERİNİN BİR
GENELLEŞMESİ**

Sinem YÜCEL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

2017

**T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BESSEL KAYMASININ DOĞURDUĞU BESSEL POTANSİYELLERİNİN BİR
GENELLEŞMESİ**

Sinem YÜCEL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu tez 29/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İlham ALİYEV

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI

Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

ÖZET

BESSEL KAYMASININ DOĞURDUĞU BESSEL POTANSİYELLERİNİN BİR GENELLEŞMESİ

Sinem YÜCEL

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İlham ALİYEV

Haziran 2017, 48 sayfa

Bu tez çalışmasında, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel ve Flett potansiyellerinin her ikisini de genelleştiren, iki parametreye bağlı bir operatörler ailesi ele alınarak incelenmiş ve özel bir dalgacık tipli dönüşüm yardımıyla bu operatörlerin tersleri bulunmuştur.

ANAHTAR KELİMELELER: Laplace-Bessel diferansiyel operatörü, Bessel potansiyelleri, Flett potansiyelleri, Beta-yarıgrup, Dalgacık tipli dönüşüm.

JÜRİ: Prof. Dr. İlham ALİYEV (Danışman)

Doç. Dr. Simten BAYRAKÇI

Yrd. Doç. Dr. Zafer ŞANLI

ABSTRACT

A GENERALIZATION OF BESSEL POTENTIALS ASSOCIATED TO BESSEL TRANSLATION

Sinem YÜCEL

MSc Thesis in Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İlham ALİYEYEV

June 2017, 48 pages

In this thesis, a family of operators dependent on two parameters, which generalize both the Bessel and Flett potentials that caused by the generalized translation, has been examined and the inverse of these operators have been found with the help of a special wavelet-type transformation.

KEYWORDS: Laplace-Bessel differential operator, Bessel Potentials, Flett Potentials, Beta Semi-group, Wavelet Transform.

COMMITTEE: Prof. Dr. İlham ALİYEYEV (Supervisor)
Assoc. Prof. Dr. Simten BAYRAKÇI
Asst. Prof. Dr. Zafer ŞANLI

ÖNSÖZ

Klasik Fourier Harmonik Analizinin ve onun uygulamalarının çok önemli teknik araçlarından biri Bessel potansiyelleridir. Bessel potansiyelleri, I birim operatör ve Δ Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, $(I - \Delta)$ diferansiyel operatörünün negatif "kesirsel" kuvvetleri olarak yorumlanan, konvolusyon tipli integral operatörlerdir. Laplace-Bessel singüler diferansiyel operatörü ile ilintili olan Fourier-Bessel Harmonik Analizinin temel teknik araçlarından biri, Klasik Fourier Harmonik Analizinde olduğu gibi, genelleşmiş kaymanın (Bessel kaymasının) doğurduğu Bessel potansiyelleridir.

Bu çalışmada, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel ve Flett potansiyellerinin her ikisini de genelleyen ve iki parametreye bağlı olan potansiyel tipli integral operatörler ailesi tanımlanarak, özel bir yarıgrubun doğurduğu dalgacık (wavelet) tipli bir dönüşüm yardımıyla, söz konusu potansiyel tipli integral operatörlerin tersleri bulunmuştur.

Bu çalışma boyunca bilgisini ve zamanını benimle paylaşan, desteğini esirgemeyen danışmanım Sayın Prof. Dr. İlham ALİYEV'e teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMASI	3
2.1. Fourier Harmonik Analizinin Bazı Temel Kavram Ve Teoremleri	3
2.2. Fourier-Bessel Harmonik Analizinin Bazı Temel Kavram Ve Teoremleri: Tek Değişkenli Durum	10
2.3. Fourier-Bessel Harmonik Analizinin Bazı Temel Kavram Ve Teoremleri: Çok Değişkenli Durum	14
3. MATERYAL VE METOT	18
3.1. Klasik Bessel Potansiyelleri Ve Onların Genelleştirilmiş Versiyonları	18
3.2. Genelleştirilmiş Beta-Yarıgrup, İki Parametreye Bağlı Bessel-Tipli Potansi- yeller Ve Bir Dalgacık Tipli Dönüşüm	23
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	31
4.1. İki Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş Potansiyel Tipli $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ Operatörlerinin Terslerinin Bulunması	31
5. SONUÇ	46
6. KAYNAKLAR	47
ÖZGEÇMİŞ	

1. GİRİŞ

Harmonik Analizin fikir ve yöntemleri, çağdaş matematiğin birçok dallarında kullanım alanı bulduğu gibi, fizik ve mühendisliğin de çeşitli alanlarında uygulanmaktadır. Temelinde klasik Fourier Analizi yatan çağdaş Harmonik Analizin geliştirdiği teknik araçlar içerisinde Fourier serileri, Fourier dönüşümleri, potansiyel tipli integral operatörler, singüler integraller, maksimal operatörler, çeşitli fonksiyonel uzaylar v.b. önemli rol oynamaktadır.

Bazı ünlü diferansiyel operatörlerin negatif kesirsel kuvvetleri olarak yorumlanan potansiyel tipli operatörler içinde en ünlüleri Bessel potansiyelleri, Riesz potansiyelleri, parabolik Bessel potansiyelleri ve parabolik Riesz potansiyelleri olarak bilinmektedir. Klasik Bessel potansiyelleri Fourier dönüşümü dilinde,

$$(\mathfrak{S}^\alpha \varphi)^\wedge(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \hat{\varphi}(x), (x \in \mathbb{R}^n, 0 < \alpha < \infty)$$

eşitliği ile tanımlanmakta ve I birim operatör, $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ Laplace diferansiyel operatörü olmak üzere, $(I - \Delta)$ operatörünün $(-\frac{\alpha}{2})$ kuvveti olarak yorumlanmaktadır. Bu potansiyeller, Sobolev uzayları ve başka fonksiyonel uzayların incelenmesinde ve genelleştirilmesinde önemli rol oynamaktadır. Öklid kaymasının doğurduğu girişim tipli integral operatör şeklinde ifade edilebilen Bessel potansiyellerinin bir önemli versiyonu da, Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ile ilintili olan Fourier-Bessel Harmonik Analizinde ortaya çıkar. Bu Harmonik Analizde, Öklid kaymasının (ötelemesinin) yerini genelleşmiş kayma operatörü ve Fourier dönüşümünün de yerini Fourier-Bessel dönüşümü diye adlandırılan dönüşüm almaktadır. Böylece, F_ν Fourier-Bessel dönüşümü ve

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + B_{x_n}, \left(B_{x_n} = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n}, \nu > 0, x_n > 0 \right)$$

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü olmak üzere, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel potansiyelleri

$$F_\nu(\mathfrak{S}^\alpha f)(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} F_\nu(f)(x) \equiv (I - \Delta_B)^{-\frac{\alpha}{2}} f(x)$$

eşitliği ile tanımlanıyor. Bu potansiyel tipli operatörlerin çeşitli özellikleri ve terslerinin bulunması ile ilgili problemler, Gadjiev ve Aliev (1988b,a), Aliev ve Eryigit (2002), Aliev vd (2008) ve başka makalelerde incelenmiştir (Aşağıda, 3.1. Bölümde, hem klasik Bessel potansiyelleri ve hem de Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Bessel tipli potansiyeller ve onların çeşitli genelleşmeleri ile ilgili ayrıntılı bilgi veriyoruz).

Bu tez çalışmasında, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel potansiyelleri ve Flett potansiyellerinin her ikisini de genelleştiren ve formal olarak,

$$F_\nu(\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi)(\xi) = \left(1 + |\xi|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} F_\nu(\varphi)(\xi) \equiv \left(I + (-\Delta_\nu)^{\frac{\beta}{2}}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \varphi(\xi)$$

şeklinde tanımlanan, iki parametreye bağlı $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ operatörleri ailesi ele alınarak incelenmiştir.

Tez, Giriş dahil, yedi bölümden ibarettir. İkinci bölümde, Klasik Fourier Harmonik Analizinde temel kavram ve bilgiler verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde, Fourier-Bessel Harmonik Analizinin bazı temel kavram ve teoremleri, sırasıyla, tek değişkenli ve çok değişkenli durumlarda verilmiştir. Beşinci bölümde, Klasik Harmonik Analizdeki ve genelleşmiş kaymanın doğurduğu Harmonik Analizdeki potansiyeller ve onların çeşitli genelleştirilmiş versiyonları tanıtılarak, onlarla ilgili bilgiler kronolojik olarak verilmiştir. Tezin esas bölümlerinden biri olan altıncı bölümde, genelleşmiş kaymanın doğurduğu bir yarıgrup (beta-yarıgrup), bu yarı grubun doğurduğu bir dalgacık (wavelet) tipli dönüşüm ve iki parametreye bağlı Bessel tipli potansiyel operatörleri tanımlanmıştır. Yine, tezin esas bölümlerinden biri olan yedinci bölümde, bir önceki bölümde tanımlanmış olan dalgacık tipli dönüşüm yardımıyla, iki parametreye bağlı Bessel tipli potansiyellerin tersleri bulunmuştur. Yedinci bölümün sonunda dalgacık tipli dönüşümün tanımlanmasında önemli rol oynayan dalgacık tipli ölçüme, çeşitli örnekler verilmiştir.

2. KURAMSAL BİLGİLER VE KAYNAK TARAMASI

Bu bölümde, Fourier Harmonik ve Fourier-Bessel Harmonik Analizinin bazı temel kavram ve teoremlerine yer verilecektir.

2.1. Fourier Harmonik Analizinin Bazı Temel Kavram Ve Teoremleri

Öncelikle çok boyutlu Öklid uzayının ve onun bir alt kümesinin tanımını hatırlatalım:

$$\mathbb{R}^n = \{x : x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_k \text{ lar reel sayılardır}\};$$

$$\mathbb{R}_+^n = \{x : x \in \mathbb{R}^n \text{ ve } x_n > 0\}.$$

$\mathbb{R}^n$ 'de kayma (öteleme) operatörünü τ_x^y ile gösterelim:

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ bir n değişkenli fonksiyon olmak üzere,

$$\tau_x^y f(x) = f(x + y), (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

$\mathbb{R}^n$ 'de ölçülebilir fonksiyonların klasik Lebesgue uzayı şöyle tanımlanır: $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} L_p &\equiv L_p(\mathbb{R}^n) \\ &= \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, (dx = dx_1 \dots dx_n) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Benzer şekilde, $\mathbb{R}_+^n$ 'da ölçülebilir fonksiyonların ağırlıklı Lebesgue uzayını şöyle tanımlayalım: $0 < \nu < \infty$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere,

$$L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ f : \|f\|_{p,\nu} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x_n^{2\nu} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}. \quad (2.2)$$

$C(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'de sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayını gösterelim. Bilindiği gibi, $f \in C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, f 'in normu şöyle tanımlanır: $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.

$C_0(\mathbb{R}^n)$ ile $C(\mathbb{R}^n)$ 'nin aşağıdaki alt uzayını gösterelim:

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : f \in C(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0 \right\},$$

(Burada, $|x| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ Öklid normudur).

Benzer şekilde, $C(\mathbb{R}_+^n)$ ile $\mathbb{R}_+^n$ 'de sürekli ve sınırlı fonksiyonlar uzayını ve $C_0(\mathbb{R}_+^n)$ ile de, $C(\mathbb{R}_+^n)$ uzayının $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ sağlanan alt uzayını gösterelim.

$C^\infty \equiv C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ile $\mathbb{R}^n$ 'de her mertebeden kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayını ve $S \equiv S(\mathbb{R}^n)$ ile de aşağıdaki Schwarz test fonksiyonları uzayını gösterelim:

$$S = \left\{ f : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ ve } \forall_{\alpha, \beta} \in \mathbb{Z}_+^n \text{ için } \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) \right| < \infty \right\},$$

$$(\text{Burada, } x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \text{ ve } \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} f(x) = \frac{\partial^{\beta_1 + \dots + \beta_n}}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} f(x_1, \dots, x_n)).$$

Örneğin; $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \in S(\mathbb{R}^n)$.

Daha genel olarak, $P(x)$ herhangi n değişkenli polinom ve $k \geq 2$ çift tamsayı olmak üzere $f(x) = P(x)e^{-|x|^k}$ fonksiyonu $S(\mathbb{R}^n)$ uzayındandır.

$S(\mathbb{R}_+^n)$ ile $S(\mathbb{R}^n)$ 'nin, sonuncu x_n değişkenine göre çift olan fonksiyonlarından oluşan alt uzayını gösterelim. Örneğin, $k \geq 2$ çift tamsayı ve $P(x) = P(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ polinomu x_n 'e göre çift fonksiyon ise, $f(x) = P(x)e^{-|x|^k} \in S(\mathbb{R}_+^n)$ olur.

Şimdi de L_p ve $L_{p,\nu}$ uzaylarında iyi bilinen bazı eşitsizlikleri hatırlatalım.

a) Hölder Eşitsizliği

$f \in L_p, g \in L_q, 1 \leq p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$; Benzer şekilde, $f \in L_{p,\nu}, g \in L_{q,\nu}, 1 \leq p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ise $\|f \cdot g\|_{1,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu} \cdot \|g\|_{q,\nu}$

Not 2.1. Yukarıdaki eşitsizliklerde $p = \infty$ için

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| \text{ ve } \|f\|_{\infty,\nu} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}_+^n} |f(x)|$$

kullanılmıştır.

b) Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği

$\varphi(x, y)$ fonksiyonu, $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^m$ de ölçülebilir olmak üzere,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_y^m} \varphi(x, y) dy \right\|_{L_p(\mathbb{R}_x^n)} \leq \int_{\mathbb{R}_y^m} \|\varphi(x, y)\|_{L_p(\mathbb{R}_x^n)} dy$$

(bakınız: Folland (1984)).

Benzer şekilde, $\varphi(x, y)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^m$ de ölçülebilir olmak üzere,

$$\left\| \int_{\mathbb{R}_+^m} \varphi(x, y) y_n^{2\nu} dy \right\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} \leq \int_{\mathbb{R}_+^m} \|\varphi(x, y)\|_{L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)} dy \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

c) Young Eşitsizliği (Stein ve Weiss (1971), Folland (1984))

$p, q, r \geq 1$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$ olmak üzere, $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ ve $g \in L_r(\mathbb{R}^n)$ ise $h = f * g \in L_q(\mathbb{R}^n)$ sağlanır. Dahası,

$$\|h\|_q \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_r. \quad (2.4)$$

Burada, $f * g$ ifadesi, f ile g 'nin klasik girişimi (konvolusyonu) olup,

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy.$$

Biz, ileride, Öklid kayması (ötelemesi) olarak bilinen $\tau_x^y f(x) = f(x + y)$, ($x, y \in \mathbb{R}^n$) kaymasından farklı bir kayma kullanarak, yukarıdaki eşitsizliğin benzerini $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ ve $g \in L_{r,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonlarının genelleşmiş girişimi için vereceğiz.

d) Klasik Kayma Operatörünün L_p Uzaylarında Sürekliliği

$\tau_x^y f(x) = f(x + y)$ şeklinde tanımlanmış klasik kayma operatörünü kısaca τ^y ile gösterelim:

$$\tau^y f(x) = f(x + y).$$

$f \in L_p$ ise, $\|\tau^y f\|_p = \|f\|_p$ eşitliğinin sağlandığını, integralde değişken değiştirme ile gösterebiliriz (Yani, $\tau^y : L_p \rightarrow L_p$ sınırlı olup, normu 1'dir).

Bundan başka,

$$\lim_{|y| \rightarrow 0} \|\tau^y f - f\|_p = 0 \quad (2.5)$$

sağlanır.

e) Hardy-Littlewood Maksimal Operatörü (fonksiyonu)(Stein (1970))

$L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ ile, $\mathbb{R}^n$ 'in her noktasının her δ -komşuluğunda integrallenen fonksiyonlar uzayını gösterelim. Ω_n ile $\mathbb{R}^n$ uzayında $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \leq 1\}$ birim yuvarının ölçü-

münü ("hacmini") gösterelim. $f \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,

$$(Mf)(x) = \sup_{0 < r < \infty} \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{|y| \leq r} |f(x-y)| dy \quad (2.6)$$

fonksiyonuna Hardy-Littlewood maksimal operatörü (fonksiyonu) denir. Yukarıdaki formülde, $x - y = z$ denirse,

$$(Mf)(x) = \sup_{\mathbb{Q}_x} \frac{1}{|\mathbb{Q}_x|} \int_{\mathbb{Q}_x} |f(z)| dz \quad (2.7)$$

yazabiliriz. Burada, supremum, x merkezli tüm $\mathbb{Q}_x$ yuvarları üzerinden alınmıştır ($|\mathbb{Q}_x|$ ile, x merkezli yuvarın hacmi gösterilmiştir).

Teorem 2.2. (Hardy-Littlewood, Stein (1970)) $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $(1 \leq p < \infty)$ olsun. O halde, öyle bir $A = A(n, p)$ sabiti vardır ki,

$$\|Mf\|_p \leq A \|f\|_p \quad (2.8)$$

sağlanır. Başka ifadeyle, M operatörü güçlü (p, p) tipli operatördür. $p = 1$ durumunda, M operatörü zayıf $(1, 1)$ tipli operatördür. Yani, her $\lambda > 0$ için

$$\mu \{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > \lambda\} \leq \frac{A \|f\|_1}{\lambda} \quad (2.9)$$

sağlanır. Burada, $E \subset \mathbb{R}^n$ bir ölçülebilir alt küme olmak üzere, $\mu(E)$ ile E kümesinin Lebesgue ölçümü ("hacmi") gösterilmiştir.

Not 2.3. Her $\lambda > 0$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$\mu \{x \in \mathbb{R}^n : (Mf)(x) > \lambda\} \leq \left(\frac{A \|f\|_p}{\lambda} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.10)$$

eşitsizliği de sağlanır. Yani, M operatörü, her $p \in [1, \infty)$ için zayıf (p, p) tiplidir (Hatırlatalım ki, güçlü (p, p) tipli bir operatör, hem de zayıf (p, p) tipli olur).

f) Klasik Fourier Dönüşümü

$f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü

$$(Ff)(x) \equiv \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix \cdot y} dy \quad (2.11)$$

şeklinde tanımlanıyor. Burada, $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \text{ 'dir.}$$

Ters Fourier dönüşümünün ifadesi şöyledir:

$$(F^{-1}f)(x) \equiv \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ix \cdot y} dy. \quad (2.12)$$

Not 2.4. Bazı kaynaklarda (örneğin, Stein (1970), Stein ve Weiss (1971)), f fonksiyonunun Fourier dönüşümü ve ters Fourier dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(Ff)(x) \equiv \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-i2\pi x \cdot y} dy, \quad (2.13)$$

$$(F^{-1}f)(x) \equiv \check{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i2\pi x \cdot y} dy. \quad (2.14)$$

Bazı kaynaklarda da, aşağıdaki gösterimler kullanılır.

$$(Ff)(x) \equiv \hat{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-ix \cdot y} dy, \quad (2.15)$$

$$(F^{-1}f)(x) \equiv \check{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{ix \cdot y} dy. \quad (2.16)$$

Fourier dönüşümünün aşağıdaki özellikleri iyi bilinmektedir (Stein ve Weiss (1971))

- (a) $\|\hat{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_1$
- (b) $f \in L_1$ ise $\hat{f}$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}^n$ 'de düzgün süreklidir.
- (c) $f \in L_1$ ise, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \hat{f}(x) = 0$ 'dır.

Yukarıdaki (b) ve (c) bir arada düşünülürse, $\hat{f} \in C_0$ olduğunu söyleyebiliriz.

- (d) $f \in L_1 \cap L_2$ ise, $\hat{f} \in L_2$ olup, $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ sağlanır (Plancherel-Parseval eşitliği).

Bundan yararlanılarak, Fourier dönüşümü, tüm L_2 'de izometri olacak şekilde, L_2 'ye devam ettirilebilir ve her $f \in L_2$ için $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ sağlanır.

(a) ve (d) yardımıyla (Riesz-Thorin interpolasyon teoremi kullanılarak) aşağıdaki Hausdorff-Young eşitsizliği kanıtlanabilir (Stein ve Weiss (1971)):

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p, 1 \leq p \leq 2, \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$$

Başka ifadeyle, Fourier dönüşümü, $1 \leq p \leq 2$ için L_p 'den $L_{p'}$ 'ye sınırlı olup, operatör normu 1'dir.

Harmonik Analizin en önemli formüllerinden birisi, Fourier dönüşümü ile girişim (konvolusyon) arasındaki ilişki formülüdür. Yukarıda da belirttiğimiz üzere, iki $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonunun girişimi şöyle tanımlanır:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x - y)dy.$$

Fourier dönüşümünün tanımı kullanılarak ve integralde değişken değiştirerek,

$$F(f * g)(x) = F(f)(x) \cdot F(g)(x)$$

kısaca,

$$(f * g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g} \quad (2.17)$$

olduğu gösterilir.

Yani, Fourier dönüşümü zor bir işlem olan $*$ işlemini (konvolusyon "çarpımını"), daha basit bir işlem olan, fonksiyonların noktasal çarpımına dönüştürür. (2.17)'dan, ters Fourier dönüşümü yardımıyla, $f * g = (\hat{f} \cdot \hat{g})^\vee$ elde edilebilir.

Harmonik Analizde, Fourier dönüşümünün bir diğer önemli özelliği de, türev alma işlemi (diferansiyel operatör) ile arasındaki ilişki formülünde ortaya çıkar.

$$F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)e^{-ix \cdot y} dy$$

eşitliğinde x_1 'e göre (formal) kısmi türevi alınırsa,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(-iy_1)e^{-ix \cdot y} dy,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(-y_1^2)e^{-ix \cdot y} dy$$

ve buradan,

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ (Laplace Diferansiyel operatörü) için

$$(-\Delta)F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) |y|^2 e^{-ix \cdot y} dy$$

olur.

Genel olarak, k herhangi pozitif tamsayı ise,

$$(-\Delta)^k F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |y|^{2k} f(y) e^{-ix \cdot y} dy \quad (2.18)$$

elde edilir.

Benzer şekilde, I birim operatörü olmak üzere,

$$(I - \Delta)F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^2) f(y) e^{-ix \cdot y} dy$$

ve genel olarak,

$$(I - \Delta)^k F(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |y|^2)^k f(y) e^{-ix \cdot y} dy \quad (2.19)$$

bulunur.

Yukarıdaki (2.18) ve (2.19) formüllerinin $f \in S(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları için doğru olduğu kanıtlanabilir.

Diferansiyel operatör ile Fourier dönüşümü arasındaki ilginç bağıntıları ifade eden daha genel formülleri vermek için kısa bir hazırlık yapalım.

$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ ve

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$$

gösterimlerini (kısaltmaları) kullanılarak, $P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ herhangi polinom (n değişkenli polinom) olmak üzere, $P(D)$ diferansiyel operatörünü şöyle tanımlayalım:

$$P(D) = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Örneğin, $x \in \mathbb{R}^3$ olup, $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $P(x) = x_1^5 x_2 x_3 - x_1 x_2^2 + x_3^7$ için

$$P(D) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^5 \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^7 \text{ olur.}$$

Fourier dönüşümü ile $P(D)$ diferansiyel operatörü arasındaki bağıntı formülleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Stein ve Weiss (1971)):

- (a) $P(D)\hat{f}(x) = (P(-y)f(y))^\wedge(x)$
- (b) $(P(D)f)^\wedge(x) = P(ix)\hat{f}(x), (f \in S(\mathbb{R}^n))$

2.2. Fourier-Bessel Harmonik Analizinin Bazı Temel Kavram Ve Teoremleri: Tek Değişkenli Durum

Analiz ve onun uygulamalarında, Bessel diferansiyel operatörü olarak bilinen aşağıdaki singüler diferansiyel operatör önemli rol oynamaktadır:

$$B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t} \frac{d}{dt}, (0 < t < \infty) \quad (2.20)$$

Burada, $\nu > 0$ verilmiş bir sabittir. Bu diferansiyel operatörün doğurduğu özel bir kayma (öteleme) operatörü ile ilgileneceğiz. Bilindiği gibi, tek değişkenli f fonksiyonu türevlenen ise, $\phi = \phi(x, y)$ olmak üzere,

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \phi = \frac{\partial}{\partial y} \phi \\ \phi|_{x=0} = f(y) \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

Probleminin çözümü $\phi = f(x + y)$ 'dir.

$\tau^y f(x) = f(x + y)$ dersek, söz konusu problemin çözümünün $\tau^y f(x)$ kayması (Öklid kayması) olduğu söylenebilir. Böylece, Öklid kayması ile $\frac{d}{dt}$ diferansiyel operatörü arasında sıkı bir bağlantı vardır. Aslında, bu sürpriz olmayıp, beklenen bir şeydir. Çünkü, türevin tanımında kayma operatörü iştirak ediyor:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\tau^h f(x) - f(x)). \quad (2.22)$$

Türevle Öklid kayması arasındaki başka bir derin ilişki de Taylor formülünde ortaya çıkar:

f, x 'in bir komşuluğunda analitik ise,

$$\tau^h f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k. \quad (2.23)$$

Yukarıda, (2.20) formülünde verdiğimiz Bessel diferansiyel operatörü için (2.21) probleme benzer bir sınır-değer problemi yazılırsa, bu problemin çözümü de bir kayma (ge-

nelleştirilmiş kayma veya Bessel kayması) operatörünü doğurur.

Daha doğrusu, $B_t = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{2\nu}{t} \frac{d}{dt}$, $(0 < t < \infty)$ ve $\phi = \phi(x, y)$ olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} B_x \phi &= B_y \phi, (0 < x, y < \infty) \\ \phi|_{x=0} &= f(y), \frac{\partial}{\partial x} \phi|_{x=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Sınır-değer probleminin çözümü,

$$\phi(x, y) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta}\right) \sin^{2\nu-1} \theta d\theta$$

şeklindedir (Delsarte (1938), Levitan (1951)).

Bu çözümü, $S^y f(x)$ ile gösterelim:

$$S^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \theta}\right) \sin^{2\nu-1} \theta d\theta. \quad (2.25)$$

(2.25) formülündeki gibi tanımlanmış S^y operatörüne genelleşmiş kayma (veya, Bessel kayması) denir. (2.25)'da $y = 0$ koyarsak,

$$\int_0^\pi \sin^{2\nu-1} \theta d\theta = \frac{\Gamma(\nu) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}$$

eşitliğinden, $S^0 f(x) = f(x)$ olur.

Bundan başka, (2.25) ifadesindeki integralde, $\theta = \pi - \varphi$, $(0 \leq \varphi \leq \pi)$ şeklinde değişken değiştirirsek, $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$ ve $\sin(\pi - \varphi) = \sin \varphi$ olduğundan,

$$\begin{aligned} S^y f(x) &= \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \varphi}\right) \sin^{2\nu-1} \varphi d\varphi \\ &= S^{-y} f(x) \end{aligned} \quad (2.26)$$

elde ederiz. Yani, $S^y f(x) = S^{-y} f(x)$ olur (Öklid kaymasında $\tau^y f(x) = f(x + y)$ fakat $\tau^{-y} f(x) = f(x - y)$ 'dir). Diğer taraftan, (2.25)'ya göre, $S^y f(x) = S^x f(y)$ sağlanır (Öklid kaymasında da, $\tau^y f(x) = f(x + y) = f(y + x) = \tau^x f(y)$ sağlandığı açıktır).

Genelleşmiş kayma operatörü S^y 'nin bilinen bazı diğer özellikleri aşağıdaki gibidir (Levitan (1951)):

- (a) Lineerlik: $S^y (af(x) + bg(x)) = aS^y f(x) + bS^y g(x)$;
- (b) Pozitiflik: $f \geq 0$ ise, $S^y f(x) \geq 0$ olur;

- (c) $S^y 1 = 1$
- (d) $x \geq a \geq 0$ için $f(x) = 0$ ise, $|x - y| \geq a$ sağlayan $x \geq 0, y \geq 0$ için $S^y f(x) = 0$ olur.
- (e) $|S^y f(x)| \leq S^y |f(x)| \leq \sup_{x \geq 0} |f(x)|$
- (f) Vermek istediğimiz özelliği ifade edebilmek için $S^y f(x)$ yerine $S_x^y f(x)$ gösterimini kullanacağız (Bu, özellikle, $S_x^y f(x, t)$ şeklindeki ifadede işe yarar ve genelleşmiş kayma operatörünün hangi değişkene uygulandığını gösterir). Söz konusu özellik şöyledir: $S_x^y S_x^z f(x) = S_x^z S_x^y f(x)$ ve $S_y^z S_x^y f(x) = S_x^z S_x^y f(x)$.
- İlk eşitlik, önce x 'e z kayması ve sonra da x 'e y kayması vermek ile, önce x 'e y kayması ve sonra da x 'e z kayması vermenin aynı sonuca getirdiğini söyler (Öklid kaymasında, bu, $f(x + y + z) = f(x + z + y)$ demek oluyor).
- İkinci eşitlik ise, önce x 'e y ve sonra da y 'ye z kayması vermek ile, önce x 'e y ve sonra da x 'e z kayması vermenin aynı sonuca getirdiğini söyler.
- (g) g ve f fonksiyonları $[0, \infty)$ 'da ölçülebilir olup,

$$\int_0^\infty |f(t)| t^{2\nu} dt < \infty \text{ ve } \int_0^\infty |g(t)| t^{2\nu} dt < \infty \text{ ise,}$$

$$\int_0^\infty S^y f(x) g(y) y^{2\nu} dy = \int_0^\infty f(y) S^y g(x) y^{2\nu} dy \quad (2.27)$$

sağlanır. f ve g 'den biri sınırlı ve diğeri için integral yakınsak ise, (2.27) eşitliği yine sağlanır. Özel halde, $g = 1$ alınırsa,

$$\int_0^\infty S^y f(x) y^{2\nu} dy = \int_0^\infty f(y) y^{2\nu} dy \quad (2.28)$$

olur. Yukarıdaki (2.27) eşitliği, klasik Öklid kaymasının doğurduğu girişim (konvolusyon) için $f * g = g * f$ eşitliğinin, yani açık yazılırsa,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x - y) g(y) dy = \int_{-\infty}^\infty f(y) g(x - y) dy$$

eşitliğinin genelleşmiş kayma (Bessel kayması) için benzeridir. Yani,

$$(f \circledast g)(x) = \int_0^\infty S^y f(x) g(y) y^{2\nu} dy \quad (2.29)$$

dersek, (2.27) şöyle yazılabilir: $f \circledast g = g \circledast f$. Yukarıdaki $f \circledast g$ fonksiyonuna, f ile g 'nin genelleşmiş (Bessel) girişimi denir.

Yukarıdaki (2.28) eşitliği de, klasik Öklid kayması durumunda iyi bilinen ve her

$x \in (-\infty, \infty)$ için sağlanan

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x \mp y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

eşitliğinin benzeridir.

(h) Klasik Fourier dönüşümü, girişim işlemini, noktasal çarpmaya dönüştürüyor. Yani,

$$f^\wedge(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixt} dx$$

dersek, $(f * g)^\wedge(t) = f^\wedge(t) g^\wedge(t)$ olur.

(2.29) ile tanımlanan Bessel girişimini, iki fonksiyonun noktasal çarpımına dönüştüren özel bir integral dönüşüm vardır. Fourier-Bessel dönüşümü diye adlandırılan bu integral dönüşümü tanımlayalım. f fonksiyonu için,

$\int_0^{\infty} |f(t)| t^{2\nu} dt < \infty$ sağlansın. O halde, onun Fourier-Bessel dönüşümü,

$$(F_B f)(x) = \int_0^{\infty} f(t) j_{\nu-\frac{1}{2}}(xt) t^{2\nu} dt, \quad (0 \leq x < \infty) \quad (2.30)$$

formülüyle tanımlanıyor.

Burada, $j_p(t)$, $(p > -\frac{1}{2})$ fonksiyonu, normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu olup, özel fonksiyonlar sınıfında iyi bilinen ve birinci tip Bessel fonksiyonu diye adlandırılan $J_p(t)$ fonksiyonu yardımıyla ifadesi şöyledir:

$$j_p(t) = 2^p \Gamma(p+1) \frac{J_p(t)}{t^p}, \quad (0 < t < \infty); j_p(0) = 1. \quad (2.31)$$

Normalleştirilmiş Bessel fonksiyonu $j_p(t)$, aslında, Bessel diferansiyel operatörünün, $j_p(0) = 1$, $j_p'(0) = 0$ koşullarını sağlayan özvektörüdür (öz fonksiyonudur). Başka ifadeyle her $\lambda > 0$ için

$$B_t j_p(\lambda t) = -\lambda^2 j_p(\lambda t), \quad j_p(0) = 1, \quad j_p'(0) = 0 \quad (2.32)$$

(bakınız: Levitan (1951))

Not 2.5. Klasik Fourier dönüşümünde integral operatörünün çekirdeği olan e^{-ixt} fonksiyonu, $\frac{d}{dt} e^{-ixt}$ diferansiyel operatörünün özvektörüdür:

$\frac{d}{dt} e^{-ixt} = (-ix) e^{-ixt}$. Ayrıca, $e^{-ixt} \big|_{x=0} = 1$ sağlanır. Dolayısıyla, klasik Fourier analizinde e^{-ixt} 'nin oynadığı rolü, Bessel Harmonik Analizinde $j_p(xt)$ fonksiyonu üstlenmektedir.

(2.30) formülüyle tanımlanan Fourier-Bessel dönüşümü, (2.29) ile tanımlanan Bessel girişimini noktasal çarpmaya dönüştürüyor (Levitan (1951)):

$$F_B(f \otimes g)(t) = F_B(f)(t) \cdot F_B(g)(t), (0 \leq t < \infty). \quad (2.33)$$

Bu formül, kısaca, şöyle yazılabilir: $F_B(f \otimes g) = F_B f \cdot F_B g$

2.3. Fourier-Bessel Harmonik Analizinin Bazı Temel Kavram Ve Teoremleri: Çok Değişkenli Durum

Bessel diferansiyel operatörü ile (veya, Bessel kayması ile) ilişkilendirilen ve Fourier Bessel Harmonik Analizi diye adlandırılan Harmonik Analizin çok boyutlu (çok değişkenli) versiyonu şöyle oluşturulabilir:

Tüm değişkenlere göre Bessel diferansiyel operatörü uygulanarak veya k tane değişkene göre Bessel ve $(n - k)$ değişkene göre klasik Laplace diferansiyel operatörü uygulanarak, uygun Harmonik Analiz oluşturulabilir.

Kayma (öteleme) operatörü dilinde dersek, girişim oluşturulduğu zaman, n değişkenin tamamına genelleşmiş (Bessel) kayması uygulanarak, veya, k değişkenine göre Bessel kayması ve $(n - k)$ değişkenine göre de klasik Öklid kayması uygulanarak "hibrit" girişim operatörü elde edilebilir.

Buna uygun olarak da, n boyutlu Fourier-Bessel dönüşümünü, değişkenlerin tamamına (2.30)'deki dönüşüm uygulayarak tanımlayabiliriz, veyahutta, k değişkene göre (2.30)'deki dönüşümü ve $(n - k)$ değişkene göre klasik Fourier dönüşümü uygulayarak, "hibrit" Fourier-Bessel dönüşümü tanımlarız.

Bahsi geçen genelleşmelerin her ikisi ile ilgili çok sayıda makale ve kitap yazılmıştır.

(bakınız: Kipriyanov (1967), Lyakhov (1983), Stempak (1986), Gadjiev ve Aliev (1988b), Kipriyanov (1997), Trimèche (1997), Aliev ve Bayrakci (1998), Guliev (2003))

Biz bu çalışmamızda, $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_n > 0\}$ uzayında tanımlanmış fonksiyonların, ilk $(n - 1)$ değişkeni olan $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ değişkenine klasik Öklid kayması ve sonuncu $x_n > 0$ değişkenine de Bessel kayması uygulayarak, ortaya çıkan genelleşmiş kayma (öteleme) operatörünü ve onun doğurduğu genelleşmiş girişim operatörünü kullanacağız.

Böylece, $1 \leq p < \infty$ ve $\nu > 0$ olmak üzere $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayı (2.2)'deki gibi tanımlanmış olsun ve $f \in L_{p,\nu}$ fonksiyonu verilsin. Bu f fonksiyonuna aşağıdaki şekilde

tanımlanmış genelleşmiş kayma ("hibrit" kayma) operatörünü uygulayacağız:

$$T^y f(x) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu) \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi f\left(x' - y', \sqrt{x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \cos \theta}\right) \sin^{2\nu-1} \theta d\theta \quad (2.34)$$

Görüldüğü gibi, genelleşmiş kayma operatörü diye adlandıracağımız T^y operatörü, $x = (x', x_n)$, $y = (y', y_n)$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $y' = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ olmak üzere, ilk $(n-1)$ değişken olan $x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ değişkenine klasik Öklid kayması ve sonuncu x_n değişkenine (2.25) ile tanımlanan Bessel kayması uygulanarak elde edilmiştir.

Öklid kaymasının ve Bessel kaymasının bilinen özellikleri kullanılarak, onların kompozisyonu (bileşkesi) olarak ortaya çıkan T^y -genelleşmiş öteleme operatörünün sağladığı özellikler yazılabilir.

Örneğin, f ve g fonksiyonlarının genelleşmiş girişimi, (2.34)'de tanımlanmış T^y genelleşmiş kayma operatörü yardımıyla

$$(f \otimes g)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) T^y g(x) y_n^{2\nu} dy, \quad (x \in \mathbb{R}_+^n) \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanırsa, $f \otimes g = g \otimes f$ olduğu ve $f \in L_{p,\nu}$, $g \in L_{q,\nu}$ için Young eşitsizliği denilen

$$\|f \otimes g\|_{r,\nu} \leq \|f\|_{p,\nu} \|g\|_{q,\nu}, \quad 1 \leq p, q, r < \infty, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \quad (2.36)$$

eşitsizliği sağlanır (Kipriyanov (1997), Aliev ve Bayrakci (1998)).

Bundan başka, $f \in L_{1,\nu}$ fonksiyonunun hibrit Fourier-Bessel dönüşümü de, ilk $(n-1)$ değişkene göre klasik Fourier dönüşümü ve sonuncu y_n değişkenine göre de (2.30)'de verilen Fourier-Bessel dönüşümü uygulanarak, aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$(F_\nu f)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) e^{-ix'y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) y_n^{2\nu} dy, \quad (x \in \mathbb{R}_+^n). \quad (2.37)$$

Burada, $x' \cdot y' = x_1 y_1 + \dots + x_{n-1} y_{n-1}$ olup, x' ve y' vektörlerinin iç çarpımıdır.

Uygun ters Fourier-Bessel dönüşümü de aşağıdaki şekilde tanımlanır: $x = (x', x_n)$ olmak üzere,

$$(F_\nu^{-1} f)(x) = c_\nu(n) (F_\nu f)(-x', x_n). \quad (2.38)$$

Burada,

$$c_\nu(n) = \left[(2\pi)^{n-1} 2^{2\nu-1} \Gamma^2 \left(\frac{2\nu+1}{2} \right) \right]^{-1}.$$

Yukarıdaki (2.37) formülüyle tanımlanan Fourier-Bessel dönüşümü, (2.35) yardımıyla tanımlanan genelleşmiş girişim işlemini, iki fonksiyonun noktasal çarpmasına dönüştürüyor:

$$F_\nu(f \otimes g)(x) = (F_\nu f)(x)(F_\nu g)(x), (x \in \mathbb{R}_+^n). \quad (2.39)$$

$F_\nu f = \hat{f}$ kısaltması kullanılırsa, yukarıdaki eşitlik, kısaca şöyle yazılabilir:

$$(f \otimes g)^\wedge = \hat{f} \cdot \hat{g}.$$

Fourier-Bessel dönüşümünün, diferansiyel operatörlerle ilişkisi de iyi bilinmektedir. $S(\mathbb{R}_+^n)$, $\mathbb{R}_+^n$ uzayında verilmiş Schwarz test fonksiyonları uzayı olmak üzere,

$F_\nu : S(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow S(\mathbb{R}_+^n)$ bir otomorfizm olduğu bilinmektedir (Kipriyanov (1967)). Bunun yanısıra, n değişkenli olup, sonuncu değişkene göre çift olan herhangi $P(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n^2)$ polinomu ele alınırsa ve $B_{y_n} = \frac{d^2}{dy_n^2} + \frac{2\nu}{y_n} \frac{d}{dy_n}$ notasyonu kullanılırsa, $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \in \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} & P \left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_{n-1}}, B_{y_n} \right) (F_\nu f)(y) \\ &= F_\nu \left[P(-ix_1, \dots, -ix_{n-1}, -x_n^2) f(x) \right] (y); \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} & F_\nu \left[P \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}, B_{x_n} \right) f(x) \right] (y) \\ &= P(iy_1, \dots, iy_{n-1}, iy_n^2) (F_\nu f)(y) \end{aligned} \quad (2.41)$$

eşitliklerinin sağlandığı bilinmektedir (Kipriyanov (1967), Aliev ve Bayrakci (1998)).

Özel halde,

$$\Delta_B = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Laplace-Bessel diferansiyel operatörü ve I da birim operatör olmak üzere, her $k \in \mathbb{N}$ ve $f \in S(\mathbb{R}_+^n)$ için

$$(-\Delta_B)^k = F_\nu^{-1} \left(|y|^{2k} (F_\nu f)(y) \right) (x) \quad (2.42)$$

ve

$$(I - \triangle_B)^k = F_\nu^{-1} \left((1 + |y|^2)^k (F_\nu f)(y) \right) (x) \quad (2.43)$$

eşitlikleri sağlanır.

Klasik Fourier Harmonik Analizinde Hardy-Littlewood maksimal operatörü önemli rol oynuyor. Fourier-Bessel Harmonik Analizinde de aynı rolü, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Hardy-Littlewood maksimal operatörü oynamaktadır.

Yukarıda verilmiş olan $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ uzayında, genelleşmiş Hardy-Littlewood maksimal operatörü şöyle tanımlanıyor: $f \in L_{p,\nu}$, $(1 \leq p < \infty)$ olmak üzere,

$$M_\nu f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+2\nu} \omega(n,\nu)} \int_{\Omega_r} |T^y f(x)| y_n^{2\nu} dy, \quad x \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.44)$$

Burada, $\Omega_r = \{y \in \mathbb{R}_+^n : |y| \leq r\}$ ve $\omega(n,\nu) = \int_{\Omega_r} y_n^{2\nu} dy$.

$1 < p < \infty$ için $\|M_\nu f\|_{p,\nu} \leq c_1 \|f\|_{p,\nu}$ ve $p = 1$ için

$$\mu \{x \in \mathbb{R}_+^n : |M_\nu f(x)| > \lambda\} \leq c_2 \frac{\|f\|_{1,\nu}}{\lambda}, \quad (\forall \lambda > 0)$$

sağlanır. Burada, $E \subset \mathbb{R}_+^n$ için $\mu E = \int_E x_n^{2\nu} dx$ olarak tanımlanır.

Yukarıdaki eşitsizliklerden anlaşılacağı üzere, klasik Fourier Harmonik Analizinde olduğu gibi, genelleşmiş M_ν maksimal operatörü de, $(1 < p < \infty)$ için güçlü (p, p) tipli ve $p = 1$ için zayıf $(1, 1)$ tipli operatördür (Guliev (2003)).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, Klasik Bessel potansiyelleri ve onların çeşitli genelleştirilmiş versiyonları tanıtilir, onlarla ilgili bilgiler yer alacaktır.

Genelleşmiş kaymanın doğurduğu bir yarıgrup (beta-yarıgrup), bu yarıgrupun doğurduğu bir dalgacık (wavelet) tipli dönüşüm ve iki parametreye bağlı Bessel tipli potansiyel operatörleri tanımlanacaktır.

3.1. Klasik Bessel Potansiyelleri Ve Onların Genelleştirilmiş Versiyonları

Klasik Harmonik Analizde önemli uygulamalara sahip olan Bessel potansiyelleri Fourier dönüşümü dilinde, formal olarak şöyle tanımlanır:

$$J^\alpha f = F^{-1} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} Ff, (0 < \alpha < \infty, \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (3.1)$$

Bu potansiyeller, Δ Laplace operatörü ve I birim operatör olmak üzere, $(I - \Delta)$ operatörünün negatif "kesirsel kuvvetleri" olarak yorumlanabilirler. Yani, formal olarak,

$$J^\alpha f = (I - \Delta)^{-\frac{\alpha}{2}} f, (0 < \alpha < \infty) \quad (3.2)$$

yazılabilir. Bunu da not etmek gerekir ki, $\alpha = 2k$, ($k \in \mathbb{N}$) ve $f \in S(\mathbb{R}^n)$ olursa, (3.1) ve (3.2) eşitliklerinin sağ tarafları gerçekten de çakışır.

Schwarz uzayında (3.1) formülü ile tanımlanmış $J^\alpha f$, ($\alpha > 0$) Bessel potansiyellerinin aşağıdaki şekilde "açık" integral gösterimleri bilinmektedir (Stein (1970), Samko vd (1993), Rubin (1996), Samko (2002)):

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\lambda_n(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) G_\alpha(x - y) dy \quad (3.3)$$

Burada,

$$\lambda_n(\alpha) = 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ ve } G_\alpha(x) = \int_0^\infty t^{\frac{\alpha-n}{2}} e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{dt}{t}. \quad (3.4)$$

(3.3) formülünün sağ tarafı, yalnız Schwarz uzayından olan f 'ler için değil, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, ($1 \leq p \leq \infty$) için de anlamlıdır. Bundan yararlanılarak, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için f 'in Bessel potansiyeli (3.3) formülüyle tanımlanabilir. Girişim tipli integral operatör olan Bessel potansiyelinin L_p 'den L_p 'ye sınırlı operatör olduğu bilinir. Yani, her $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|J^\alpha f\|_p \leq c_p \|f\|_p, c_p > 0, 1 \leq p \leq \infty)$$

sağlanır (Stein (1970)).

Bessel potansiyellerinin, ünlü Gauss-Weierstrass integralleri yardımıyla, çok kullanışlı olan tek katlı integral gösterimi de vardır (bakınız: Flett (1971), Samko vd (1993), Rubin (1996)):

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} W_t f(x) dt, \quad (0 < \alpha < \infty) \quad (3.5)$$

Yukarıdaki formülde $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$ olup, f 'in Gauss-Weierstrass integrali (yarıgrubu) diye adlandırılan $W_t f$, $(0 < t < \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$W_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(|y|, t) f(x - y) dy. \quad (3.6)$$

Burada,

$$\omega(|y|, t) = F^{-1} \left(e^{-t|\xi|^2} \right) (y) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp \left(-\frac{|y|^2}{4t} \right). \quad (3.7)$$

Yukarıdaki (3.5) formülü, Bessel potansiyellerinin terslerini belirlemede önemli rol oynamaktadır (Rubin (1986), Samko vd (1993), Rubin (1996)).

Şimdi de, Fourier Bessel Harmonik Analizinde önemli rol oynayan ve Laplace-Bessel diferansiyel operatörü diye adlandırılan

$$\Delta_B = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \mathcal{B}_{x_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad (\nu > 0)$$

operatörü yardımıyla tanımlanan genelleştirilmiş Bessel potansiyellerini ve onun da genelleşmesi olan potansiyel tipli integral operatörleri tanımlayalım. Bu tez çalışmasının esas konusu da bu potansiyel tipli operatörlerin incelenmesi ile ilgilidir.

Biz yukarıdaki bölümlerde $\mathbb{R}_+^n$ ve $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ uzaylarını, genelleşmiş kayma (öteleme) ve genelleşmiş girişim (konvolusyon) operatörlerini; Fourier-Bessel ve ters Fourier-Bessel dönüşümlerini tanımlamıştık. Bu kavram ve gösterimleri kullanarak, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu genelleşmiş Bessel potansiyellerini (veya, başka isimle, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel potansiyellerini) tanımlayalım. Klasik Bessel potansiyellerinin tanımına benzer olarak, genelleşmiş Bessel potansiyelleri de, I birim operatör ve Δ_B Laplace-Bessel diferansiyel operatörü olmak üzere,

$(I - \Delta_B)$ diferansiyel operatörünün negatif "kesirsel" kuvvetleri olarak yorumlanıyor ve Fourier-Bessel dönüşümü dilinde

$$\mathfrak{S}^\alpha f = F_\nu^{-1} \left((1 + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} F_\nu f \right) \equiv (I - \Delta_B)^{-\frac{\alpha}{2}} f, \quad (0 < \alpha < \infty) \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanıyor. Burada, $f \in S(\mathbb{R}_+^n)$ ve $\xi \in \mathbb{R}_+^n$.

$f \in S(\mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonları için tanımlanmış $\mathfrak{S}^\alpha f$ potansiyel operatörü aşağıdaki integral gösterime sahiptir (Gadjiev ve Aliev (1988b)):

$$(\mathfrak{S}^\alpha f) = \frac{1}{\lambda_{n,\nu}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) (T^y G_\alpha(x)) y_n^{2\nu} dy, \quad (0 < \alpha < \infty). \quad (3.9)$$

Burada,

$$\lambda_{n,\nu}(\alpha) = 2^{n+2\nu-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

ve

$$G_\alpha(x) \equiv G_\alpha^{(\nu)}(x) = \int_0^\infty t^{\frac{\alpha-n-2\nu}{2}} e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{dt}{t}, \quad (x \in \mathbb{R}_+^n).$$

(3.9)'daki integral operatörünün çekirdeği olan $G_\alpha(x)$ fonksiyonunun $|x| \rightarrow 0$ ve $|x| \rightarrow \infty$ için asimptotik davranışı aşağıdaki şekildedir (Stein (1970)):

$$|x| \rightarrow 0 \text{ için } G_\alpha(x) = O(|x|^{-n-2\nu+\alpha}) \text{ ve } |x| \rightarrow \infty \text{ için } G_\alpha(x) = O(e^{-\frac{1}{2}|x|}).$$

$G_\alpha(x)$ 'in bu asimptotik davranışından anlaşılacağı üzere, (3.9) ile tanımlanan integral operatör, yalnız, $f \in S(\mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonları için değil, her $f \in L_{p,\nu}$ fonksiyonları için de geçerlidir.

Not 3.1. Genelleşmiş Bessel potansiyellerinin, klasik Bessel potansiyellerinde olduğu gibi, "tek boyutlu" integral gösterimi de vardır. Daha doğrusu,

$$\omega_\nu(|y|, t) = F_\nu^{-1}\left(e^{-t|\xi|^2}\right)(y) = \frac{2\pi^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} (4\pi t)^{-\frac{n+2\nu}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \quad (3.10)$$

olmak üzere, her $f \in L_{p,\nu}$ için f 'in genelleşmiş Gauss-Weierstrass integralini (yarıgrubunu) $W_t f$ ile gösterirsek,

$$W_t f(x) \equiv W_{\nu,t} f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu(|y|, t) (T^y f(x)) y_n^{2\nu} dy \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır. Bu yarıgrup yardımıyla, genelleşmiş Bessel potansiyelleri için başka bir (bir boyutlu) integral gösterim yazılabilir (Gadjiev ve Aliev (1988b), Aliev ve Uyhan-Bayrakci (2002), Aliev ve Eryigit (2002), Aliev vd (2008)):

$$\mathfrak{S}^\alpha f = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{2}-1} e^{-t} W_t f(x) dt, \quad (x \in \mathbb{R}_+^n, \alpha > 0). \quad (3.12)$$

Not 3.2. *Genelleşmiş Bessel potansiyelinin bu gösterimi, klasik Bessel potansiyeli için bilinen gösterime birebir benzer olup, operatörlerin kesirsel kuvvetleri için Balakrishnan formülü diye adlandırılan genel formülün benzeridir. Klasik Bessel potansiyellerinde olduğu gibi, genelleşmiş Bessel potansiyellerinin terslerinin belirlenmesinde (3.12) gösterimi önemli rol oynamaktadır (Gadjiev ve Aliev (1988b), Aliev ve Eryigit (2002), Aliev ve Rubin (2005), Aliev vd (2008)).*

Aliev vd (2008), Aliev (2009), Sezer ve Aliev (2010) makalelerinde beta-yarıgrup diye adlandırılan aşağıdaki integral operatör tanımlanmıştır:

$$W_t^{(\beta)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(\beta)}(|y|, t) f(x - y) dy, \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < \infty, 0 < \beta < \infty) \quad (3.13)$$

Burada, integral operatörünün radyal çekirdeği olan $\omega^{(\beta)}(|y|, t)$ fonksiyonu, $\exp(-t|x|^\beta)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümüdür:

$$\omega^{(\beta)}(|y|, t) = F^{-1} \left(\exp(-t|x|^\beta) \right) (y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|x|^\beta} e^{ix \cdot y} dx. \quad (3.14)$$

Bahsi geçen makalelerde, bu beta-yarıgrup yardımıyla, Klasik Riesz ve Bessel potansiyelleri uzaylarının yeni karakterizasyonları verilmiş ve Radon dönüşümü için yeni ters bulma formülleri elde edilmiştir.

Aliev ve Sağlık (2016) makalesinde, F_ν^{-1} operatörü ters Fourier-Bessel dönüşümü olmak üzere, $\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) = F_\nu^{-1} \left(\exp(-t|x|^\beta) \right) (y)$ çekirdeği yardımıyla tanımlanan ve genelleşmiş girişim (konvolusyon) operatörü olan

$$(W_t^{(\beta)} f)(x) = (\omega_\nu^{(\beta)}(|\cdot|, t) \otimes f)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) T^y f(x) y_n^{2\nu} dy \quad (3.15)$$

operatörü (genelleşmiş beta-yarıgrup) yardımıyla, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Riesz potansiyelleri için yeni bir ters bulma formülü elde edilerek, genelleşmiş Riesz potansiyelleri uzayının yeni bir karakterizasyonu verilmiştir.

Bu tez çalışmasında (3.15)'teki genelleşmiş beta-yarıgrubu kullanılarak, iki parametreye bağlı bir integral operatör tanımlıyoruz. Parametrelerden birinin özel seçimleriyle genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel potansiyelleri ve Flett potansiyelleri elde edilebilir.

Dolayısıyla, bizim tanımlayacağımız yeni operatörler ailesi, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel ve Flett potansiyellerinin genelleşmesidir. (3.15) formülündeki $W_t^{(\beta)}$ gösterimi yerine $\mathcal{B}_t^{(\beta)}$ notasyonunu kullanacağız. Bunun nedeni, (3.13)'te verilmiş yarıg-

rup ile (3.15)'teki yarıgrubun aynı notasyonla gösterilmemesidir.

Böylece,

$$\mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) \equiv \mathcal{B}_{\nu,t}^{(\beta)} \varphi(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) T^y \varphi(x) y_n^{2\nu} dy \quad (3.16)$$

diyelim. Burada, yukarıda da bahsedildiği üzere,

$$\begin{aligned} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) &= F_\nu^{-1} \left(\exp(-t |x|^\beta) \right) (y) \\ &\equiv c_\nu(n) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t|x|^\beta} e^{ix' \cdot y'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n y_n) x_n^{2\nu} dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

olup, $c_\nu(n)$ katsayısı yukarıda verilmiş (2.38) formülündeki gibidir.

$\beta = 1$ ve $\beta = 2$ özel durumlarında $\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t)$ çekirdeğinin açık ifadeleri bilinmektedir:

$$\omega_\nu^{(1)}(|y|, t) = \frac{2\Gamma\left(\frac{n+2\nu+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)} \frac{t}{(|y|^2 + t^2)^{\frac{n+2\nu+1}{2}}}; \quad (3.18)$$

$$\omega_\nu^{(2)}(|y|, t) = \frac{2\pi^{\frac{2\nu+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)} (4\pi t)^{-\frac{n+2\nu}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}}. \quad (3.19)$$

Burada, $0 < t < \infty$, $y \in \mathbb{R}_+^n$ olup, $\omega_\nu^{(1)}(|y|, t)$ genelleşmiş Abel-Poisson çekirdeğidir ve $\omega_\nu^{(2)}(|y|, t)$ de genelleşmiş Gauss-Weierstrass çekirdeğidir (Gadjiev ve Aliev (1988b,a), Aliev ve Bayrakci (1998), Aliev ve Rubin (2005), Aliev vd (2008)).

(3.16) formülüyle tanımladığımız $\mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x)$ genelleşmiş beta-yarıgrubu yardımıyla aşağıdaki integral operatörler ailesini tanımlayalım:

$$\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi(x) \equiv \mathfrak{S}_{\beta,\nu}^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-t} \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) \frac{dt}{t} \quad (3.20)$$

Bu integral operatörler ailesi, iki parametreye bağlı olup, β parametresinin özel seçimleriyle, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel ve Flett potansiyelleri elde edilir. Daha doğrusu, $\beta = 2$ alınırsa, $\mathfrak{S}_2^\alpha \varphi(x)$ operatörü elde edilir, bu da genelleşmiş Bessel potansiyelidir. Benzer şekilde, $\beta = 1$ için $\mathfrak{S}_1^\alpha \varphi(x)$ operatörü de genelleşmiş kaymanın doğurduğu Flett potansiyelidir (Klasik ve genelleştirilmiş Flett potansiyelleri ile ilgili Flett (1971), Aliev vd (2006) kaynaklarına bakılabilir).

Bizim bu çalışmadaki esas amacımız, $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$, operatörlerinin $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ uzaylarında davranışını incelemek ve onların tersini ifade eden formüller geliştirmektir. Bunun için, genelleştirilmiş beta-yarıgrup diye adlandırdığımız $\mathcal{B}_t^{(\beta)}$, ($t \geq 0$) yarıgrup vasıtasıyla bir dalgacık (wavelet) tipli dönüşüm tanımlayacağız ve ters bulma işlemini bu dalgacık dönüşümü yardımıyla elde edeceğiz.

3.2. Genelleştirilmiş Beta-Yarıgrup, İki Parametreye Bağlı Bessel-Tipli Potansiyeller Ve Bir Dalgacık Tipli Dönüşüm

Eğer $g \in L_{1,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonu radyal bir fonksiyon (yani, yalnız $|x|$ 'e bağlı) ise, onun Fourier-Bessel dönüşümü olan $F_\nu g$ fonksiyonu da radyaldır (Zasorin (1986), Kipriyanov (1997)). O halde, $F_\nu^{-1}(\exp(-t|x|^\beta))(y)$ fonksiyonu da radyaldır (Burada, $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ ve $t > 0$).

Söz konusu radyal fonksiyonu $\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t)$ ile gösterelim. Bu çekirdek fonksiyon ile $\varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonunun genelleşmiş girişimi de, yukarıda, (3.6) formülünde belirttiğimiz üzere, $\mathcal{B}_t^{(\beta)}\varphi$ ile gösterilsin:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_t^{(\beta)}\varphi(x) &= (\omega_\nu^{(\beta)}(|\cdot|, t) \otimes \varphi)(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) T^y \varphi(x) y_n^{2\nu} dy.\end{aligned}$$

Bahsi geçen $\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t)$, ($y \in \mathbb{R}_+^n$, $t > 0$) çekirdeğinin ve $\mathcal{B}_t^{(\beta)}\varphi$, ($t > 0$) operatörleri ailesinin özelliklerini bir lemma şeklinde verelim.

Lemma 3.3. (Aliev ve Sağlık (2016)) $\omega_\nu^{(\beta)}(|\cdot|, t)$ fonksiyonunun ve $\mathcal{B}_t^{(\beta)}\varphi$, ($t > 0$) operatörleri ailesinin aşağıdaki özellikleri vardır:

(a) Her $\lambda > 0$ için

$$\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) = \lambda^{\frac{n+2\nu}{\beta}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(\lambda^{\frac{1}{\beta}}|y|, \lambda t\right).$$

Özel halde, $\lambda = \frac{1}{t}$ için

$$\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) = t^{-\frac{n+2\nu}{\beta}} \omega_\nu^{(\beta)}\left(t^{-\frac{1}{\beta}}|y|, 1\right). \quad (3.21)$$

(b) $0 < \beta \leq 2$ için $\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t)$ çekirdeği pozitifdir.

(c) $\beta = 2k$, ($k \in \mathbb{N}$) ise $\omega_\nu^{(\beta)}(|\cdot|, t) \in S(\mathbb{R}_+^n)$. Burada, $S(\mathbb{R}_+^n)$ ile Schwartz test fonksiyonları uzayı gösterilmektedir. (Bundan sonraki önermelerde, $0 < \beta \leq 2$ veya $\beta = 2k$, ($k \in \mathbb{N}$) olduğu varsayılacaktır).

(d) Her $t > 0$ için

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \omega_\nu^{(\beta)}(|y|, t) y_n^{2\nu} dy = 1 \quad (3.22)$$

(e) Eğer $\varphi \in L_{p,\nu}$, ($1 \leq p \leq \infty$; $L_{\infty,\nu} \equiv C_0$) ise,

$$\left\| \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi \right\|_{p,\nu} \leq c(\beta; \nu) \|\varphi\|_{p,\nu} \quad (3.23)$$

sağlanır. Burada,

$$c(\beta, \nu) = \int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, 1)| y_n^{2\nu} dy < \infty$$

olup, $0 < \beta \leq 2$ için $c(\beta, \nu) = 1$ 'dir. Bundan başka, $C_0 \equiv C_0(\mathbb{R}_+^n)$ ile, $S(\mathbb{R}_+^n)$ uzayının, sub-norma göre kapanışı gösterilmektedir.

(f) Her $\varphi \in L_{p,\nu}$, ($1 \leq p \leq \infty$) için

$$\sup_{t>0} \left| \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) \right| \leq c M_\nu \varphi(x), \quad (x \in \mathbb{R}_+^n) \quad (3.24)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, c bir sabit olup, $M_\nu \varphi$ ile, φ fonksiyonunun genelleştirilmiş Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu (operatörü) gösterilmektedir (Aliev ve Bayrakci (1998), Guliev (2003)):

$$M_\nu \varphi(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{r^{n+2\nu} \omega(n, \nu)} \int_{B_r^+} |T^x \varphi(y)| y_n^{2\nu} dy; \quad (3.25)$$

burada, $B_r^+ = \{x \in \mathbb{R}_+^n : |x| \leq r\}$ ve $\omega(n, \nu) = \int_{B_1^+} x_n^{2\nu} dx$.

(g) Her $\varphi \in L_{p,\nu}$, ($1 \leq p < \infty$) ve her $t > 0$ için

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} \left| \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) \right| \leq c t^{-\frac{n+2\nu}{\beta p}} \|\varphi\|_{p,\nu} \quad (3.26)$$

(burada, $c = c(n, \beta, \nu, p)$ bir sabittir).

(h) (Yarıgrup özelliği)

Her $\varphi \in L_{p,\nu}$, ($1 \leq p \leq \infty$, $L_{\infty,\nu} \equiv C_0$) ve her $t, \tau \in (0, \infty)$ için

$$\mathcal{B}_t^{(\beta)} (\mathcal{B}_\tau^{(\beta)} \varphi) = \mathcal{B}_{t+\tau}^{(\beta)} \varphi. \quad (3.27)$$

(i) $\varphi \in L_{p,\nu}$, ($1 \leq p \leq \infty$; $L_{\infty,\nu} \equiv C_0$) olsun. O halde,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) = \varphi(x) \quad (3.28)$$

sağlanır. Burada, limit $L_{p,\nu}$ uzayının metriğinde, veya, noktasal (h.h $x \in \mathbb{R}_+^n$ için) olarak düşünülmektedir. $\varphi \in L_{\infty,\nu} \equiv C_0$ durumunda, yakınsama tüm $\mathbb{R}_+^n$ 'da düzgündür.

Not 3.4. (3.28) eşitliğini dikkate alarak, $\mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi$ operatörünü, $t = 0$ için şöyle tanımlayabiliriz: $\mathcal{B}_0^{(\beta)} \varphi = \varphi$.

Yukarıda, (3.20) formülüyle tanımladığımız, iki parametreye bağlı potansiyel tipli operatörler ailesi olan $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$, ($0 < \beta < \infty$, $0 < \alpha < \infty$) integral operatörleri ailesinin bazı temel özelliklerini, aşağıdaki teoremden ifade ederek kanıtlayalım.

Teorem 3.5. $\varphi \in L_{p,\nu}$ ($1 \leq p \leq \infty$; $L_{\infty,\nu} \equiv C_0$) olsun. O halde,

a) $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$ integral operatörleri ailesi iyi tanımlanmıştır ve bundan başka,

$$\|\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi\|_{p,\nu} \leq c(\beta, \nu) \|\varphi\|_{p,\nu} \quad (3.29)$$

eşitsizliği sağlanır (yani, $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi : L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$ sınırlıdır). Burada,

$$c(\beta, \nu) = \int_{\mathbb{R}_+^n} |\omega_\nu^{(\beta)}(|y|, 1)| y_n^{2\nu} dy$$

olup, $0 < \beta \leq 2$ için $c(\beta, \nu) = 1$ 'dir.

b) $\alpha > 0$, $\beta > 0$ parametrelerinin sabit tutulmuş her değeri için $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ operatörü genelleşmiş kaymanın doğurduğu girişim (konvolusyon) tipli operatör olup, Fourier-Bessel çarpanı (multiplier)

$$m(\xi) = \left(1 + |\xi|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}}, \quad (\xi \in \mathbb{R}_+^n)$$

şeklindedir. Yani, F_ν Fourier-Bessel dönüşümü olmak üzere,

$$F_\nu (\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi) (\xi) = \left(1 + |\xi|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} F_\nu (\varphi) (\xi), \quad (\xi \in \mathbb{R}_+^n). \quad (3.30)$$

c) Her $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ için $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ operatörü $S(\mathbb{R}_+^n)$ Schwarz uzayında bir otomorfizmdir, yani, $\mathfrak{S}_\beta^\alpha : S(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow S(\mathbb{R}_+^n)$.

d) Sabit tutulmuş her $\beta \in (0, \infty)$ parametresi için $\{\mathfrak{S}_\beta^\alpha\}_{\alpha \geq 0}$ ailesi aşağıdaki ya-

rıgrup özelliğine sahiptir: her $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \infty)$ ve $\varphi \in L_{p,\nu}$ için

$$\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1}(\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}\varphi) = \mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi \quad (3.31)$$

(Burada, $\mathfrak{S}_\beta^0 = I$ birim operatörüdür).

Kanıt. a)

$$\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-t} \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) \frac{dt}{t}$$

ifadesine, integral için genelleşmiş Minkowski eşitsizliğini uygulayalım:

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi\|_{p,\nu} &\leq \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-t} \left\| \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi \right\|_{p,\nu} \frac{dt}{t} \\ &\stackrel{(3.23)}{\leq} c(\beta, \nu) \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dt \right) \|\varphi\|_{p,\nu} \\ &= c(\beta, \nu) \|\varphi\|_{p,\nu} \end{aligned}$$

Lemma 3.3'deki (b) ve (d) ifadeleri dikkate alınır, $0 < \beta \leq 2$ için $c(\beta, \nu) = 1$ olduğu görülür.

b) $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. Bir $g \in S(\mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonunun Fourier-Bessel dönüşümünü $F_\nu g$ yerine, kısaca, $g^\wedge$ ile gösterelim. Fubini teoremini kullanırsak,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ix' \cdot \xi'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n \xi_n) \mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi(x) x_n^{2\nu} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ix' \cdot \xi'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n \xi_n) x_n^{2\nu} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-t} \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) \frac{dt}{t} \right) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} e^{-ix' \cdot \xi'} j_{\nu-\frac{1}{2}}(x_n \xi_n) \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) x_n^{2\nu} dx \right) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} \varphi^\wedge(\xi) (\omega_\nu^{(\beta)}(|\cdot|, t))^\wedge(\xi) dt \\ &\stackrel{(3.14)}{=} \varphi^\wedge(\xi) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} e^{-t|\xi|^\beta} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi^\wedge(\xi) \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty t^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t(1+|\xi|^\beta)} dt \\
&= \dots \left(t = \frac{\tau}{1+|\xi|^\beta} \text{ şeklinde de\u0131işken de\u0131iştirelim} \right) \dots \\
&= \varphi^\wedge(\xi) (1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} d\tau \\
&= (1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \varphi^\wedge(\xi).
\end{aligned}$$

Böylece, $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ için

$$(\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \varphi^\wedge(\xi)$$

olup, $(1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha}{\beta}}$, $(\xi \in \mathbb{R}_+^n)$ fonksiyonunun $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ operatörü için Fourier-Bessel çarpanı olduğu görülür.

c) $F_\nu : S(\mathbb{R}_+^n) \rightarrow S(\mathbb{R}_+^n)$ bir otomorfizma olduğunu yukarıda yazmıştır. $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ için (3.30) formülüne göre,

$$(\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi)^\wedge(\xi) = (1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \varphi^\wedge(\xi), (\xi \in \mathbb{R}_+^n)$$

sağlanır. Buradan, her $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ için

$$\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi(x) = F_\nu^{-1}[(1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha}{\beta}} (F_\nu \varphi)(\xi)](x) \quad (3.32)$$

sağlanır.

Yukarıdaki formülde, $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ olduğundan, $F_\nu \varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ ve buradan da, $(1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha}{\beta}} (F_\nu \varphi)(\xi) \in S(\mathbb{R}_+^n)$ olur. Sonuç olarak,

$$F_\nu^{-1}[(1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha}{\beta}} (F_\nu \varphi)(\xi)](x) \in S(\mathbb{R}_+^n)$$

olur.

d) Yukarıdaki (3.30) formülü dikkate alınır, $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ olması halinde, (3.31) eşıtliğinin Fourier-Bessel çarpanları dilinde doğru olduğu açık şekilde görülür. Gerçekten, (3.31) eşıtliğinin sol tarafına Fourier-Bessel dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1}(\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2} \varphi))^\wedge(\xi) &= (1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha_1}{\beta}} (\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2} \varphi)^\wedge(\xi) \\
&= (1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha_1}{\beta}} (1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha_2}{\beta}} \varphi^\wedge(\xi) \\
&= (1+|\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta}} \varphi^\wedge(\xi);
\end{aligned}$$

Şimdi de (3.31) eşitliğinin sağ tarafına Fourier-Bessel dönüşümü uygularsak,

$$(\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi)^\wedge(\xi) = (1 + |\xi|^\beta)^{-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta}} \varphi^\wedge(\xi).$$

Bu iki eşitlikten istenen çıkar.

Böylece her $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ ve $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, \infty)$ için

$$\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1}(\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}\varphi) = \mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğin, $\varphi \in L_{p,\nu}$ durumunda sağlanması, $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ operatörlerinin $L_{p,\nu}$ 'den $L_{p,\nu}$ 'ye sınırlı olmasının ve $S(\mathbb{R}_+^n)$ uzayının $L_{p,\nu}$ uzaylarında yoğun olmasının (yani, $S(\mathbb{R}_+^n)$ uzayının $L_{p,\nu}$ normunda kapanışının $L_{p,\nu}$ uzayı ile çakışmasının) bir sonucudur.

Gerçekten, bir $(\varphi_n) \subset S(\mathbb{R}_+^n)$ dizisi, $L_{p,\nu}$ normunda $f \in L_{p,\nu}$ fonksiyonuna yakınsasın:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - f\|_{p,\nu} = 0.$$

O halde, $\mathfrak{S}_\beta^\alpha : L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$ sınırlı olduğundan, $L_{p,\nu}$ -normunda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi_n = \mathfrak{S}_\beta^\alpha f$$

olur.

O halde, (3.31) eşitliğini,

$$\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1}(\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}\varphi_n) = \mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1+\alpha_2}\varphi_n, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.33)$$

şeklinde yazarsak, sağ tarafın $L_{p,\nu}$ limiti $\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1+\alpha_2}f$ olur.

(3.32)'nin sol tarafına bakalım. $L_{p,\nu}$ normunda $\varphi_n \rightarrow f$ olduğundan, $\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}\varphi_n \rightarrow \mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}f$ olacaktır. $g_n = \mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}\varphi_n$ dersek, her n için $g_n \in S(\mathbb{R}_+^n)$ olup, $L_{p,\nu}$ normunda $g_n \rightarrow \mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}f$ sağlanır.

$\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1} : L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$ sınırlı (süreklili) olduğundan, $L_{p,\nu}$ -normunda, $\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1}g_n \rightarrow \mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1}(\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}f)$ sağlanacaktır. Buradan, $\forall f \in L_{p,\nu}$ için $\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1}(\mathfrak{S}_\beta^{\alpha_2}f) = \mathfrak{S}_\beta^{\alpha_1+\alpha_2}f$ olur. $\square$

Not 3.6. (3.30) eşitliği dikkate alınırsa, iki parametreye bağlı $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ operatörler ailesi, $\left(I + (-\Delta_\nu)^{\frac{\beta}{2}}\right)$ kesirsel diferansiyel operatörünün $\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)$ mertebeden negatif kesirsel kuvveti olarak yorumlanabilir. Yani, formal olarak, her $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ için

$$\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi = \left(I + (-\Delta_\nu)^{\frac{\beta}{2}}\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \varphi$$

yazılabilir. Burada, I birim operatör ve

$$\Delta_\nu = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \frac{2\nu}{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

operatörü de Laplace-Bessel diferansiyel operatörüdür.

Bu formülde, $\beta = 2$ alınırsa, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel potansiyeli ve $\beta = 1$ alınırsa, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Flett potansiyeli elde edilir. Dolayısıyla, bizim tanımladığımız $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$ operatörleri, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Bessel ve Flett potansiyellerinin her ikisini de genelleştiren, potansiyel tipli operatörlerdir.

Şimdi de, (3.16) formülüyle tanımlanmış ve genelleşmiş beta-yarıgrup diye adlandırılan $\mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi$, ($t > 0$) ailesi yardımıyla, bir dalgacık (wavelet) tipli operatör tanımlayalım. Tanımlayacağımız bu dalgacık tipli dönüşüm, bir sonraki bölümde, $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$ potansiyellerinin terslerini bulmak için kullanılacaktır.

Tanım 3.7. μ , $[0, \infty)$ aralığında verilmiş sonlu Borel ölçümü olup, $\mu\{[0, \infty)\} = 0$ olsun. Böyle μ ölçümüne, $[0, \infty)$ 'da verilmiş bir dalgacık (wavelet) ölçümü diyeceğiz.

Tanım 3.8. μ bir dalgacık ölçümü ve $\mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi$, ($t > 0$) ailesi de (3.16)'da tanımlanmış, genelleşmiş beta-yarıgrup olsun. Aşağıdaki şekilde tanımlanmış operatöre (dönüşüme) bir dalgacık tipli dönüşüm denir:

$$(\mathcal{A}\varphi)(x, \eta) \equiv (\mathcal{A}_{\mu, \nu}^{(\beta)} \varphi)(x, \eta) = \int_0^\infty e^{-t\eta} \mathcal{B}_{t\eta}^{(\beta)} \varphi(x) d\mu(t). \quad (3.34)$$

Burada, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $\eta \in [0, \infty)$ olup,

$$\int_a^b (...) d\mu(t) = \int_{[a, b)} (...) d\mu(t) \quad (3.35)$$

olarak tanımlanır.

Doğal olarak, ortaya şöyle bir soru çıkar: (3.35) ile tanımlanan dalgacık tipli dönüşümün iyi tanımlı olması için φ üzerine hangi koşullar konulmalıdır? Biz, $L_{p, \nu}(\mathbb{R}_+^n)$, ($1 \leq p \leq \infty$; $L_\infty \equiv C_0$) uzaylarında çalıştığımız için, $\varphi \in L_{p, \nu}$ durumunda $\mathcal{A}\varphi$ dönüşümünün anlamlı olup olmadığını inceleyelim. $\varphi \in L_{p, \nu}$ olsun. O halde, genelleşmiş Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{A}\varphi)(\cdot, \eta)\|_{p, \nu} &= \left\| \int_0^\infty e^{-t\eta} \mathcal{B}_{t\eta}^{(\beta)} \varphi(x) d\mu(t) \right\|_{p, \nu} \\ &\leq \int_0^\infty e^{-t\eta} \left\| \mathcal{B}_{t\eta}^{(\beta)} \varphi(\cdot) \right\|_{p, \nu} d|\mu|(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.23)}{\leq} c(\beta, \nu) \|\varphi\|_{p,\nu} \int_0^\infty e^{-t\eta} d|\mu|(t) \\
& \leq c(\beta, \nu) \|\varphi\|_{p,\nu} |\mu|([0, \infty)) < \infty
\end{aligned}$$

Burada, $|\mu|([0, \infty)) = \int_0^\infty d|\mu|(t)$ olup, μ ölçümünün $[0, \infty)$ aralığındaki tam varyasyonudur.

Örneğin, $E \subset [0, \infty)$ olmak üzere, $\mu(E) = \int_E h(t)dt$ şeklinde tanımlanırsa, μ ölçümünün $[0, \infty)$ 'daki tam varyasyonu $|\mu|([0, \infty)) = \int_0^\infty |h(t)| dt$ olur.

Örnek olarak,

$$h(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t \leq 2\pi \text{ ise} \\ 0, & 2\pi < t < \infty \text{ ise} \end{cases}$$

alınırsa ve $[a, b] \subset [0, \infty)$ olursa, $\mu([a, b]) = \int_a^b h(t)dt$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, $\mu([0, \pi]) = \int_0^\pi \sin t dt = 2$, $\mu([\pi, 2\pi]) = -2$; $\mu([0, \infty)) = 0$ ve μ 'nün $[0, \infty)$ 'daki tam varyasyonu $|\mu|([0, \infty)) = \int_0^\infty |h(t)| dt = \int_0^{2\pi} |\sin t| dt = 4$ olur.

Çoğu kaynakta, μ 'nün tam varyasyonu $\|\mu\|$ ile gösterilir. Yani, $\|\mu\| = |\mu|([0, \infty))$.

Not 3.9. Yukarıda elde ettiğimiz

$$\|(\mathcal{A}\varphi)(\cdot, \eta)\|_{p,\nu} \leq c(\beta, \nu) \|\varphi\|_{p,\nu} \int_0^\infty e^{-t\eta} d|\mu|(t)$$

eşitsizliğinde, $\eta \rightarrow \infty$ için limite geçerse, Lebesgue baskın yakınsama teoremine göre, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \|(\mathcal{A}\varphi)(\cdot, \eta)\|_{p,\nu} = 0$ olur.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, bir önceki bölümde tanımlanmış olan dalgacık tipli dönüşüm yardımıyla, iki parametreye bağlı Bessel tipli potansiyellerin tersleri bulunacaktır.

4.1. İki Parametreye Bağlı Genelleştirilmiş Potansiyel Tipli $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ Operatörlerinin Terslerinin Bulunması

Bu bölümde biz $L_{p,\nu}$, $(1 \leq p < \infty)$ uzaylarında potansiyel tipli $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$ operatörlerinin terslerinin bulunması ile ilgileneceğiz. Kullanacağımız esas teknik araç, yukarıda Bölüm 3.1’de tanımladığımız dalgacık tipli dönüşüm olacaktır.

Potansiyel tipli operatördeki $\beta \in (0, \infty)$ parametresinin ve μ ölçümünün seçimi bizim elimizde olduğundan, onları çeşitli şekilde seçerek farklı ters dönüşüm formülleri elde edebiliriz.

Söz konusu potansiyel tipli operatörlerinin terslerini bulmak için aşağıdaki Lemma çok önemlidir. Bu Lemma, Rubin’in (1999) makalesindeki Lemma 1.3’ün özel halidir.

Lemma 4.1. μ , $[0, \infty)$ aralığında sonlu Borel ölçümü olsun ve bu ölçümün $(\theta + 1)$ mertebeden Riemann-Liouville kesirsel integrali şöyle tanımlansın:

$$(I^{\theta+1}\mu)(s) = \frac{1}{\Gamma(\theta+1)} \int_0^s (s-t)^\theta d\mu(t), \quad (s > 0, \theta > 0). \quad (4.1)$$

$$K_\theta(s) = \frac{1}{s} (I^{\theta+1}\mu)(s), \quad (0 < s < \infty) \quad (4.2)$$

diyelim. μ ölçümü aşağıdaki özelliklere sahip olsun:

Bir $\gamma > \theta$ sayısı için

$$\int_1^\infty t^\gamma d|\mu|(t) < \infty \quad (4.3)$$

$$\int_0^\infty t^j d\mu(t) = 0; \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, [\theta] \quad (4.4)$$

(burada, $[\theta]$ ile θ sayısının tam kısmı gösterilmiştir.)

Bu durumda, $K_\theta(s)$ fonksiyonu, azalan ve integrallenen majoranta sahip olup,

$$C_{\theta,\mu} \equiv \int_0^\infty K_\theta(s)ds = \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma(-\theta) \int_0^\infty \eta^\theta d\mu(\eta), & \theta \neq 1, 2, 3, \dots \text{ise} \\ (-1)^{\theta+1} \frac{1}{\theta!} \int_0^\infty \eta^\theta \ln \eta d\mu(\eta), & \theta = 1, 2, 3, \dots \text{ise} \end{array} \right\} \quad (4.5)$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $\tilde{\mu}$ ile μ ölçümünün Laplace dönüşümü gösterilirse, yani,

$$\tilde{\mu}(t) = \int_0^\infty e^{-t\eta} d\mu(\eta)$$

şeklinde tanımlanırsa,

$$C_{\theta,\mu} \equiv \int_0^\infty t^{-1-\theta} \tilde{\mu}(t) dt \quad (4.6)$$

eşitliği sağlanır.

Not 4.2. Özel durumda, $0 < \theta < 1$ alırsak, yukarıdaki (4.3), (4.4) koşulları ve (4.5) ifadesi çok daha basit şekil alır:

$$\int_1^\infty t d|\mu|(t) < \infty; \quad (4.7)$$

$$\int_0^\infty d\mu(t) = 0; \quad (4.8)$$

$$C_{\theta,\mu} \equiv \int_0^\infty K_\theta(s)ds = \Gamma(-\theta) \int_0^\infty \eta^\theta d\mu(\eta). \quad (4.9)$$

Not 4.3. Aşağıda, her yerde $C_{\theta,\mu} \neq 0$ olduğunu varsayacağız. Bu koşulu sağlayan μ ölçümlerine çeşitli örnekler bu bölümün sonunda verilecektir.

Lemma 4.4. $\eta > 1, \alpha > 0, \beta > 0$ olsun. O halde,

$$\int_1^\eta t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\eta - t)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)} \frac{1}{\eta} (\eta - 1)^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

(Bu eşitlik, Gradshteyn ve Ryzhik (1994) kaynağındaki 3.238(3) numaralı formülden elde edilebilir.)

Lemma 4.5. $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ ve $\mathcal{B}_t^{(\beta)}$ operatörleri $L_{p,\nu} \equiv L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$, ($1 \leq p \leq \infty$; $L_{\infty,\nu} \equiv C_0$) uzaylarında komütatif operatörlerdir (yani, değişme özellikleri vardır: $\forall f \in L_{p,\nu}$ için $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \mathcal{B}_t^{(\beta)} f = \mathcal{B}_t^{(\beta)} \mathfrak{S}_\beta^\alpha f$)

Kanıt. Her $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ için $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi = \mathcal{B}_t^{(\beta)} \mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$ eşitliği, her iki tarafa Fourier-Bessel dönüşümü uygulayarak elde edilebilir. Gerçekten,

$$(\mathfrak{S}_\beta^\alpha f)^\wedge(x) = \left(1 + |x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \hat{f}(x)$$

ve

$$(\mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi)^\wedge(x) = e^{-t|x|^\beta} \hat{\varphi}(x)$$

olduğundan,

$$\left(\mathfrak{S}_\beta^\alpha \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi\right)^\wedge(x) = \left(1 + |x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} e^{-t|x|^\beta} \hat{\varphi}(x)$$

ve

$$\left(\mathcal{B}_t^{(\beta)} \mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi\right)^\wedge(x) = e^{-t|x|^\beta} \left(1 + |x|^\beta\right)^{-\frac{\alpha}{\beta}} \hat{\varphi}(x)$$

sağlanır. Yukarıdaki iki eşitliğin sağ tarafları aynı olduğundan, sol tarafları da aynı olacaktır.

Buradan da, her $\varphi \in S(\mathbb{R}_+^n)$ için $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi = \mathcal{B}_t^{(\beta)} \mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$ sağlanır.

Söz konusu eşitliğin, her $\varphi \in L_{p,\nu}$ için sağlanması, Schwartz'ın $S(\mathbb{R}_+^n)$ uzayının, $L_{p,\nu}$ 'de yoğun olmasının bir sonucudur. Yani, $A = \mathfrak{S}_\beta^\alpha \mathcal{B}_t^{(\beta)}$ ve $B = \mathcal{B}_t^{(\beta)} \mathfrak{S}_\beta^\alpha$ operatörlerini tanımlarsak, $\mathfrak{S}_\beta^\alpha : L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$ ve $\mathcal{B}_t^{(\beta)} : L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$ sınırlı olduğundan, A ve B 'nin her ikisi de $L_{p,\nu}$ 'den $L_{p,\nu}$ 'ye sınırlı operatörlerdir.

O halde, fonksiyonel Analizin bilinen teoreminden, $L_{p,\nu}$ 'nün yoğun alt kümesi olan $S(\mathbb{R}_+^n)$ 'dan alınmış her φ için $A\varphi = B\varphi$ sağlandığına göre, her $\varphi \in L_{p,\nu}$, ($1 \leq p \leq \infty$; $L_{\infty,\nu} \equiv C_0$) için $A\varphi = B\varphi$ sağlanır. $\square$

Şimdi, çalışmamızın esas teoremlerinden birini ifade edelim.

Bu teoremden, potansiyel tipli $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$ operatörleri ailesinin tersleri, Bölüm 3.2’te tanımladığımız $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\beta)}$ dalgacık tipli dönüşümler ailesi yardımıyla bulunacaktır..

Söz konusu teoremin ispatı, I.Aliev ve B.Rubin tarafından Aliev ve Rubin (2005) makalesinde geliştirilmiş olan genel bir metoda dayanacaktır (Bu metodun başka uygulamaları için Aliev vd (2008), Aliev (2009), Aliev ve Sağlık (2016) makalelerine bakılabilir).

Söz konusu teoremin ispatında, Reel Analizin, noktasal yakınsama ile ilgili aşağıdaki ünlü lemmasına ihtiyacımız olacaktır.

Lemma 4.6. (Stein ve Weiss (1971), Duoandikoetxea (2001)) (X, m) bir ölçüm uzayı olsun. $\{T_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ lineer operatörler ailesi $L_p(X, m)$, $(1 \leq p < \infty)$ uzayında tanımlanmış olsun. $f \in L_p(X, m)$ olmak üzere,

$$\sup_{\varepsilon>0} |(T_\varepsilon f)(x)| = (T^* f)(x)$$

diyelim. T^* sub-linear operatörünün zayıf (p, q) tipli olduğunu, yani, her $\lambda > 0$ için

$$\mu \{y \in X : (T^* f)(y) > \lambda\} \leq \left(\frac{c \|f\|_p}{\lambda} \right)^q$$

sağlandığını varsayalım. Eğer X ’in yoğun bir alt kümesinden alınmış her x için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon f)(x) = f(x)$$

sağlanırsa, o halde, hemen hemen her $x \in X$ için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon f)(x) = f(x)$$

sağlanır.

Teorem 4.7. $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$ ifadesi, $\varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş ve iki parametreye bağlı potansiyeli olsun. Dalgacık tipli dönüşüm olarak adlandırılan $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mu,\nu}^{(\beta)}$ operatörü (3.34) formülündeki gibi tanımlansın. Ayrıca, $[0, \infty)$ aralığında verilmiş sonlu Borel ölçümü μ Lemma 4.1’deki (4.3) ve (4.4) koşullarını sağlasın.

O halde, $C = C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu}$ sayısı (4.5)-(4.6) formülleriyle tanımlanmak üzere,

$$\int_0^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}} (\mathcal{A} \mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi)(x, t) \frac{dt}{t} = C \varphi(x) \quad (4.10)$$

eşitliği sağlanır. Burada,

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha}\varphi)(x, t) \frac{dt}{t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha}\varphi)(x, t) \frac{dt}{t} \quad (4.11)$$

olup, söz konusu limit $L_{p,\nu}$ uzayının normu anlamında, veya, $h.h.x \in \mathbb{R}_+^n$ için noktasal limit olarak düşünülmektedir. Bundan başka, $\varphi \in C_0$ ise, yakınsama tüm $\mathbb{R}_+^n$ uzayında düzgün yakınsamadır.

Sonuç 4.8. $\beta > \alpha$ olsun. Bu durumda, $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] = 0$ olacağından (4.10) formülü, μ üzerine daha az koşul konularak sağlanır:

$$a) \int_1^{\infty} t d|\mu|(t) < \infty;$$

$$b) \int_0^{\infty} d\mu(t) = 0.$$

Sonuç 4.9. (4.10) formülünün bir başka yorumu, integral denklemler ile ilgilidir:

Sonlu Borel ölçümü μ , Lemma 4.1'deki (4.3) ve (4.4) koşullarını sağlasın. $\mathcal{B}_t^{(\beta)}\varphi$ yarıgrubu da (3.16) formülüindeki gibi tanımlansın. Aşağıdaki şekilde integral denklemine bakalım:

$$\int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{-t} \mathcal{B}_t^{(\beta)}\varphi(x) \frac{dt}{t} = f(x), \quad (x \in \mathbb{R}_+^n).$$

Burada, $f \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ verilmiş fonksiyon olup,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}} (\mathcal{A}f)(x, t) \frac{dt}{t}$$

limiti $h.h.x \in \mathbb{R}_+^n$ için var olsun. O halde, $C = C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu}$ olmak üzere, $h.h.x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\varphi(x) = \frac{1}{C} \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}} (\mathcal{A}f)(x, t) \frac{dt}{t}$$

sağlanır.

Sonuç 4.10. Teoremden $\beta = 2$ koyarsak, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Bessel potansiyelleri ve $\beta = 1$ koyarsak, yine Laplace-Bessel diferansiyel ope-

ratörünün doğurduğu Flett potansiyelleri için ters bulma formülü elde edilir.

Not 4.11. $0 < \alpha, \beta < \infty$ olmak üzere, μ ölçümü için

$$\int_0^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}} d|\mu|(t) < \infty \text{ ve } C_{-\frac{\alpha}{\beta}, \mu} \equiv \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(t) \neq 0$$

koşulları sağlandığında, iki parametreye bağlı $\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi$, ($\varphi \in L_{p,\nu}$, $1 \leq p \leq \infty$) potansiyeller ailesi, yukarıda (3.34) formülünde tanımladığımız dalgacık tipli dönüşümün kullanıldığı bir integral gösterime sahiptir. Daha doğrusu, $\mathcal{A}$ operatörü, (3.34) formülündeki dalgacık tipli dönüşüm olmak üzere, h.h. $x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi(x) = \frac{1}{C_{-\frac{\alpha}{\beta}, \mu}} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}} (\mathcal{A}\varphi)(x, \eta) \frac{d\eta}{\eta} \quad (4.12)$$

eşitliği sağlanır.

Gerçekten (3.34) formülü ve Fubini teoremi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\varphi)(x, \eta) d\eta &= \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_0^\infty e^{-t\eta} \mathcal{B}_{t\eta}^{(\beta)} \varphi(x) d\mu(t) \right) d\eta \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-t\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \mathcal{B}_{t\eta}^{(\beta)} \varphi(x) d\eta \right) d\mu(t) \\ &\quad (\eta \text{ yerine } \eta/t \text{ koyuyoruz}) \\ &= \left(\int_0^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(t) \right) \left(\int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \mathcal{B}_\eta^{(\beta)} \varphi(x) d\eta \right) \\ &= \left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(t) \right) \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-\eta} \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \mathcal{B}_\eta^{(\beta)} \varphi(x) d\eta \right) \\ &= C_{-\frac{\alpha}{\beta}, \mu} \mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi(x) \end{aligned}$$

Şimdi de Fubini teoreminin uygulanabilirliğini gösterelim.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_0^\infty e^{-t\eta} \left| \mathcal{B}_{t\eta}^{(\beta)} \varphi(x) \right| d|\mu|(t) \right) d\eta \\ &\leq \sup_{s>0} \left| \mathcal{B}_s^{(\beta)} \varphi(x) \right| \int_0^\infty \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_0^\infty e^{-t\eta} d|\mu|(t) \right) d\eta \\ &\leq ((3.24) \text{ eşitsizliğini kullanıyoruz ve } \eta \text{ yerine } \eta/t \text{ yazıyoruz}) \\ &\leq cM_\nu \varphi(x) \Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}} d|\mu|(t) < \infty, \text{ (h.h. } x \in \mathbb{R}_+^n \text{ için)}. \end{aligned}$$

Böylece, yukarıda katlı integral yakınsak oldu. Dolayısıyla, Fubini teoremi uygulanabilir.

Not 4.12. (4.12) formülü ile (4.10) formülü kıyaslanırsa, (4.10) formülünün, (4.12)'de, α parametresi yerine, formal olarak $(-\alpha)$ koyarak elde edildiği gözlemlenebilir.

Şimdi, çalışmamızın esas teoremlerinden biri Teorem 4.7'nin kanıtına geçelim.

Kanıt. $\varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ olsun. Lemma 4.5 'i kullanarak, aşağıdakileri yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi)(x, t) &= \int_0^\infty e^{-st} \mathcal{B}_{st}^{(\beta)} \mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi(x) d\mu(s) \\
 &= \int_0^\infty e^{-st} \mathfrak{S}_\beta^\alpha \mathcal{B}_{st}^{(\beta)} \varphi(x) d\mu(s) \\
 &\stackrel{(3.20)}{=} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} \mathcal{B}_\tau^{(\beta)} \mathcal{B}_{st}^{(\beta)} \varphi(x) d\tau \right) d\mu(s) \\
 &\stackrel{(3.27)}{=} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} \mathcal{B}_{\tau+st}^{(\beta)} \varphi(x) d\tau \right) d\mu(s) \\
 &\text{(değişken değiştirme: } \tau \text{ yerine, } \tau - st \text{ koyuyoruz.)} \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty \left(\int_0^\infty (\tau - st)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-\tau} \mathcal{B}_\tau^{(\beta)} \varphi(x) d\tau \right) d\mu(s).
 \end{aligned}$$

Burada, $\tau > st$ ise, $(\tau - st)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} = (\tau - st)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}$ ve $\tau \leq st$ ise, $(\tau - st)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} = 0$ olarak tanımlanmıştır.

Şimdi, Fubini teoremi kullanılırsa, verilmiş $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
 &\int_\varepsilon^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_\beta^\alpha \varphi)(x, t) dt \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty \left\{ \int_0^\infty e^{-\tau} \mathcal{B}_\tau^{(\beta)} \varphi(x) \left(\int_\varepsilon^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\tau - st)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dt \right) d\tau \right\} d\mu(s) \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-\tau} \mathcal{B}_\tau^{(\beta)} \varphi(x) \left\{ \int_0^\infty s^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_\varepsilon^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\frac{\tau}{s} - t \right)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dt \right) d\mu(s) \right\} d\tau \\
 &\quad \left(\left(\frac{\tau}{s} - t \right)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \text{ fonksiyonunun tanımını kullanıyoruz} \right) \\
 &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-\tau} \mathcal{B}_\tau^{(\beta)} \varphi(x) \left\{ \int_0^{\frac{\tau}{\varepsilon}} s^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_\varepsilon^{\frac{\tau}{s}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\frac{\tau}{s} - t \right)_+^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dt \right) d\mu(s) \right\} d\tau \\
 &\quad (\tau \text{ yerine } \varepsilon\tau \text{ koyuyoruz})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon\tau} \mathcal{B}_{\varepsilon\tau}^{(\beta)} \varphi(x) \left\{ \int_0^\tau s^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_{\varepsilon}^{\frac{\varepsilon\tau}{s}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\frac{\varepsilon\tau}{s} - t \right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dt \right) d\mu(s) \right\} d\tau \\
&\quad (t \text{ yerine } \varepsilon t \text{ koyuyoruz}) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-\varepsilon\tau} \mathcal{B}_{\varepsilon\tau}^{(\beta)} \varphi(x) \left\{ \int_0^\tau s^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_1^{\frac{\tau}{s}} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\frac{\tau}{s} - t \right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1} dt \right) d\mu(s) \right\} d\tau \\
&\quad (\text{Lemma 4.4'yi kullanıyoruz}) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\infty e^{-\tau\varepsilon} \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi(x) \left\{ \int_0^\tau s^{\frac{\alpha}{\beta}-1} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)} \frac{s}{\tau} \left(\frac{\tau}{s} - t \right)^{\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(s) \right\} d\tau \\
&\quad ((4.1) \text{ ve } (4.2) \text{ ifadelerini kullanıyoruz}) \\
&= \int_0^\infty e^{-\tau\varepsilon} \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \tag{4.13}
\end{aligned}$$

olur. Burada, (4.2) tanımlamasına uygun olarak,

$$K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) = \frac{1}{\tau} \frac{1}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)} \int_0^\tau (\tau - s)^{\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(s).$$

Teoremin ispatının kalan kısmı; Lemma 3.3'i kullanarak elde edilir. Daha doğrusu, (4.5) ve (4.6) formülündeki

$$C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} = \int_0^\infty K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau$$

notasyonuna dayanarak (4.13) formülünden şunları yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
&\int_{\varepsilon}^\infty t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha} \varphi)(x, t) dt - C \varphi(x) \\
&= \int_0^\infty e^{-\tau\varepsilon} \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau - \int_0^\infty \varphi(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^\infty (e^{-\tau\varepsilon} \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi(x) - \varphi(x)) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \\
&= \int_0^\infty e^{-\tau\varepsilon} (\mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi(x) - \varphi(x)) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau + \varphi(x) \int_0^\infty (1 - e^{-\tau\varepsilon}) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{AS}_{\beta}^{\alpha} \varphi)(\cdot, t) dt - C\varphi(x) \right\|_{p,\nu} \\
& \leq \int_0^{\infty} e^{-\tau\varepsilon} \left\| \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi - \varphi \right\|_{p,\nu} \left| K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) \right| d\tau \\
& \quad + \|\varphi\|_{p,\nu} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\tau\varepsilon}) \left| K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) \right| d\tau.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Bundan sonraki aşamada, Lebesgue Baskın Yakınsama Teoremini kullanacağız (Folland (1984)).

$$0 < e^{-\tau\varepsilon} < 1; |1 - e^{-\tau\varepsilon}| < 2;$$

$$\int_0^{\infty} \left| K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) \right| d\tau < \infty,$$

$$\left\| \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi - \varphi \right\|_{p,\nu} \leq \left\| \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi \right\|_{p,\nu} + \|\varphi\|_{p,\nu} \stackrel{(3.23)}{\leq} C_{\beta} \|\varphi\|_{p,\nu}$$

olduğundan ve $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi - \varphi \right\|_{p,\nu} = 0$; $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - e^{-\tau\varepsilon}) = 0$ eşitlikleri sağlandığından, Lebesgue teoremine göre, (4.14) eşitsizliğinin sağ tarafının $\varepsilon \rightarrow 0$ için limiti sıfıra eşit olur. O halde,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{AS}_{\beta}^{\alpha} \varphi)(\cdot, t) dt - C\varphi \right\|_{p,\nu} = 0 \tag{4.15}$$

sağlanır.

Bu sonuncu eşitlik şöyle de yazılabilir:

$$(L_{p,\nu}) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{AS}_{\beta}^{\alpha} \varphi)(x, t) dt = C\varphi(x).$$

Burada, $p = \infty$ durumunda, $L_{\infty,\nu} \equiv C_0$ kabul ettiğimizden, (4.15)'e göre $\varphi \in C_0$ için yakınsama düzgün yakınsamadır.

Şimdi de, $\varepsilon > 0$ parametresine bağlı olan

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha}\varphi)(x, t) dt, (x \in \mathbb{R}_+^n; \varphi \in L_{p,\nu})$$

fonksiyonlar ailesinin $\varepsilon \rightarrow 0$ için $C\varphi(x)$ değerine noktasal yakınsaklığını inceleyelim.

Reel analizin temel teoremlerinden bilindiği üzere, böyle durumlarda maksimal operatör tekniği uygulanır. Daha doğrusu, Lemma 4.6'yı uygulayacağız.

Lemma 4.6'yı uygulayabilmemiz için, Lemmada bahsi geçen $\{T_{\varepsilon}\}_{\varepsilon>0}$ lineer operatörler ailesini şöyle tanımlayalım:

$$(T_{\varepsilon}\varphi)(x) = \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha}\varphi)(x, t) dt, (x \in \mathbb{R}_+^n; \varphi \in L_{p,\nu}).$$

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon>0} |(T_{\varepsilon}\varphi)(x)| &= \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha}\varphi)(x, t) dt \right| \\ &\stackrel{(4.13)}{=} \sup_{\varepsilon>0} \left| \int_0^{\infty} e^{-\tau\varepsilon} \mathcal{B}_{\tau\varepsilon}^{(\beta)} \varphi(x) K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{t>0} \left| \mathcal{B}_t^{(\beta)} \varphi(x) \right| \int_0^{\infty} \left| K_{\frac{\alpha}{\beta}}(\tau) \right| d\tau \\ &\stackrel{(3.24)}{\leq} cM_{\nu}\varphi(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

Burada, $M_{\nu}\varphi$, genelleşmiş kaymanın doğurduğu Hardy-Littlewood maksimal operatörüdür.

$M_{\nu} : L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$, ($1 < p \leq \infty$) güçlü ve $M_{\nu} : L_{1,\nu} \rightarrow L_{1,\nu}$ zayıf tipli olduğundan,

$$T^*\varphi(x) = \sup_{\varepsilon>0} |(T_{\varepsilon}\varphi)(x)|$$

dersek, T^* operatörünün $L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$ güçlü tipli, $L_{1,\nu} \rightarrow L_{1,\nu}$ zayıf tipli ve dolayısıyla, $1 \leq p \leq \infty$ için $L_{p,\nu} \rightarrow L_{p,\nu}$ zayıf tipli operatör olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi, $L_{p,\nu}$, ($1 \leq p < \infty$) uzayının yoğun alt kümesi olan $C_0 \cap L_{p,\nu}$ uzayında $T_{\varepsilon}\varphi$, ($\varepsilon > 0$) ailesi φ 'ye düzgün (dolayısıyla, noktasal) yakınsadığından, Lemma 4.4'e göre bu

aile $\varepsilon \rightarrow 0$ için φ 'ye h.h.her yerde yakınsak olacaktır.

Yani, h.h. $x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha} \varphi)(x, t) dt = C \varphi(x), \quad \left(C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} = \int_0^{\infty} K_{\frac{\alpha}{\beta}}(s) ds \right)$$

sağlanacaktır. Teoremin ispatı bitti. $\square$

Not 4.13. *Teorem 4.7'nin kullanışlı olması için, oradaki μ ölçümü, $C = C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu}$ katsayısı sıfırdan farklı olacak şekilde alınmalıdır. Biz burada, bu teoremin tüm koşullarını ($C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} \neq 0$ dahil) sağlayan μ ölçümüne örnekler verelim.*

(a) m tamsayısını, $m > \frac{\alpha}{\beta}$ olacak şekilde seçelim. $h = h(t)$ Schwarz test fonksiyonunu öyle alalım ki,

a) her $k = 0, 1, 2, \dots$ için $h^{(k)}(0) = 0$ olsun;

b) $\int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}-m} h(t) dt \neq 0$ olsun.

(Örneğin, $h(t) = \exp(-t^2 - \frac{1}{t^2})$, $h(0) = 0$ fonksiyonu bunu sağlar).

Şimdi, μ ölçümünü şöyle tanımlayalım: $d\mu(t) = h^{(m)}(t) dt$

(Yani, örneğin, her $[a, b] \in \mathbb{R}^1$ aralığı için $\mu\{[a, b]\} = \int_a^b h^{(m)}(t) dt$).

Kısmi integralleme uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^k d\mu(t) &= \int_0^{\infty} t^k h^{(m)}(t) dt = t^k h^{(m-1)} \Big|_0^{\infty} - k \int_0^{\infty} t^{k-1} h^{(m-1)}(t) dt \\ &= -k \int_0^{\infty} t^{k-1} h^{(m-1)}(t) dt \\ &= \dots = 0, \end{aligned}$$

Yani, her $k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta} \right\rfloor$ için $\int_0^{\infty} t^k d\mu(t) = 0$ olur. $C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} \neq 0$ olduğunu gös-

terelim. Bunun için, $C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu}$ 'nin (4.6) ifadesini kullanacağız: $C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} = \int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \tilde{\mu}(t) dt$;

$$\tilde{\mu}(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\eta} d\mu(\eta).$$

Şimdi,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(t) &= \int_0^{\infty} e^{-t\eta} d\mu(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-t\eta} h^{(m)}(\eta) d\eta \\ &= \dots (m \text{ defa kısmi integralleme uyguluyoruz}) \dots \end{aligned}$$

$$= t^m \int_0^{\infty} e^{-t\eta} h(\eta) d\eta$$

ifadesini, yukarıdaki formülde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} t^m \left(\int_0^{\infty} e^{-t\eta} h(\eta) d\eta \right) dt \\ &= \int_0^{\infty} h(\eta) \left[\int_0^{\infty} t^{m-\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t\eta} dt \right] d\eta \\ &\quad (\text{içerideki integralde, } t \text{ yerine } t/\eta \text{ koyalım}) \\ &= \int_0^{\infty} h(\eta) \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-m} d\eta \int_0^{\infty} t^{m-\frac{\alpha}{\beta}-1} e^{-t} dt \\ &= \Gamma\left(m - \frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^{\infty} h(\eta) \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-m} d\eta \neq 0. \end{aligned}$$

Sonuç: μ ölçümü, yukarıdaki gibi, $d\mu(t) = h^{(m)}(t)dt$ olarak tanımlansın. O halde, $C = \Gamma\left(m - \frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^{\infty} h(\eta) \eta^{\frac{\alpha}{\beta}-m} d\eta$ olmak üzere, her $\varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ için

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\mathcal{S}_{\beta}^{\alpha}\varphi)(x, t) dt = C\varphi(x)$$

eşitliği $h.h.x \in \mathbb{R}_+^n$ için sağlanır.

(b) Şimdi, μ ölçümü olarak, Dirac δ -fonksiyonelinin kullanıldığı ünlü bir ayrık ölçüm alalım: $m > \frac{\alpha}{\beta}$ olmak üzere,

$$\mu = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j \delta_j;$$

burada, δ_j fonksiyoneli, her sürekli f fonksiyonuna şöyle etki ediyor:

$$\langle \delta_j, f \rangle = f(j), (j = 0, 1, 2, \dots, m).$$

Her $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ için $\int_0^{\infty} g(t) d\mu(t) \equiv \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j g(j)$ olduğunu kullanalım.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t^k d\mu(t) &\equiv \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j \langle \delta_j, t^k \rangle \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j j^k = 0 \end{aligned}$$

olduğu iyi biliniyor (Samko vd (1993)).

Şimdi, $C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} \neq 0$ olduğunu görelim.

Yine, (4.6) formülünü kullanacağız.

$$\begin{aligned}
 C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \tilde{\mu}(t) dt \\
 &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\int_0^{\infty} e^{-\eta t} d\mu(\eta) \right) dt \\
 &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j e^{-tj} \right) dt \\
 &= \int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (1 - e^{-t})^m dt > 0
 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani, Teorem 4.7'nin tüm koşulları sağlanır.

O halde,

$$C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} = \int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (1 - e^{-t})^m dt$$

olmak üzere, her $\varphi \in L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ için

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} (\mathcal{A}\mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha}\varphi)(x, t) dt = C\varphi(x), (h.h. x \in \mathbb{R}_+^n) \quad (4.16)$$

olur.

Yukarıdaki μ ölçümünün doğurduğu dalgacık tipli dönüşüm, (3.34) formülüne göre,

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}f)(x, t) &= \int_0^{\infty} e^{-t\eta} \mathcal{B}_{t\eta}^{(\beta)} f(x) d\mu(\eta) \\
 &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j e^{-jt} \mathcal{B}_{jt}^{(\beta)} f(x), (\mathcal{B}_0^{(\beta)} f(x) = f(x))
 \end{aligned}$$

olur. Bunu, (4.16)'da kullanırsak, h.h. $x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$\int_0^{\infty} t^{-\frac{\alpha}{\beta}-1} \left(\sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j e^{-jt} \mathcal{B}_{jt}^{(\beta)} \mathfrak{S}_{\beta}^{\alpha}\varphi(x) \right) dt = C\varphi(x)$$

sağlanır.

- (c) $\beta > \alpha$ olması durumunda, $\left[\frac{\alpha}{\beta} \right] = 0$ olduğundan, Sonuç 4.8'de belirtildiği üzere, μ üzerine konulan koşullar çok daha zayıf olur:

$$(i) \int_1^{\infty} t d|\mu|(t) < \infty,$$

$$(ii) \int_0^{\infty} d\mu(t) = 0.$$

Buna uygun olarak, (4.9) formülüne göre, C sabiti de

$$C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} = \Gamma\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}} d\mu(t)$$

formülüyle hesaplanır.

Bu özelliğe sahip μ ölçümü örnekleri çok sayıda kurulabilir.

Örneğin,

1) $d\mu(t) = (1-t)e^{-t}dt$, ($0 \leq t < \infty$) şeklinde tanımlanmış ölçüm yukarıdaki özellikleri sağlar.

2) $0 < a < b < \infty$ ve $h(t)$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli, pozitif fonksiyon olmak üzere,

$$g(t) = h(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b h(s) ds, \quad (a \leq t \leq b)$$

ve $t \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ için $g(t) = 0$ tanımlanırsa, $d\mu(t) = g(t)dt$ şeklindeki ölçüm de söz konusu özellikleri sağlar (Başka örnekler için Aliev ve Sağlık (2016) makalesine bakılabilir).

Örneğin, $d\mu(t) = (1-t)e^{-t}dt$, ($0 \leq t < \infty$) ölçümü alınırsa, Teorem 4.7'deki C katsayısı, $\beta > \alpha$ koşulu altında aşağıdaki gibi olur:

$$C \equiv C_{\frac{\alpha}{\beta}, \mu} = \Gamma\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right) \int_0^{\infty} t^{\frac{\alpha}{\beta}} (1-t)e^{-t} dt \neq 0.$$

3) $\int_0^{\infty} d\mu(t) = 0$ ve $\int_1^{\infty} d|\mu|(t) < \infty$ koşullarını sağlayan ölçüm örneklerinin geniş sınıfını şöyle elde edebiliriz:

$0 \leq t < \infty$ olmak üzere, $a(t) \geq 0$ ve $b(t) \geq 0$ fonksiyonları sürekli olup $\int_0^{\infty} a(t)dt = a < \infty$; $\int_0^{\infty} b(t)dt = b < \infty$ sağlansın. $\varphi(t) = ba(t) - ab(t)$ diyelim. O halde,

$$d\mu(t) = (ba(t) - ab(t)) dt, \quad (0 \leq t < \infty)$$

dersek, $\int_0^\infty d\mu(t) = 0$ ve $\int_1^\infty d|\mu|(t) \leq b \int_0^\infty a(t)dt + a \int_0^\infty b(t)dt = 2ab$ sağlanır.

Örneğin, $a(t) = e^{-t}$; $b(t) = e^{-2t}$ alınırsa, $\int_0^\infty a(t)dt = 1$; $\int_0^\infty b(t)dt = \frac{1}{2}$ olduğundan

$d\mu(t) = (\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t}) dt$ ölçümü için $\int_0^\infty d\mu(t) = 0$ ve $\int_1^\infty d|\mu|(t) < 1$ sağlanır.



5. SONUÇ

Bu çalışma kapsamında, Laplace-Bessel diferansiyel operatörünün doğurduğu Bessel potansiyellerinin genelleşmesi olan, iki parametreye bağlı $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ operatörleri ailesi tanımlanarak, ağırlıklı $L_{p,\nu}(\mathbb{R}_+^n)$ uzaylarında davranışı incelenmiş ve onların tersini ifade eden formüller geliştirilmiştir. Bunun için, genelleştirilmiş beta-yarıgrup diye adlandırılan $\mathcal{B}_t^{(\beta)}$, $(t \geq 0)$ yarıgrubu vasıtasıyla bir dalgacık (wavelet) tipli dönüşüm tanımlanmıştır. Tanımlanan bu dalgacık tipli dönüşüm, $\mathfrak{S}_\beta^\alpha$ potansiyellerinin terslerini bulmak için kullanılmıştır.



6. KAYNAKLAR

- ALIEV, I. A. and BAYRAKCI, S. 1998. On inversion of B-elliptic potentials by the method of Balakrishnan-Rubin. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 1(4):365–384.
- ALIEV, I. A. and UYHAN-BAYRAKCI, S. 2002. On inversion of Bessel potentials associated with the Laplace–Bessel differential operator. *Acta Mathematica Hungarica*, 95(1-2):125–145.
- ALIEV, I. A. 2009. Bi-parametric potentials, relevant function spaces and wavelet-like transforms. *Integral Equations and Operator Theory*, 65(2):151–167.
- ALIEV, I. A. and ERYIGIT, M. 2002. Inversion of Bessel potentials with the aid of weighted wavelet transforms. *Mathematische Nachrichten*, 242(1):27–37.
- ALIEV, I. A. and RUBIN, B. 2003. Spherical harmonics associated to the Laplace–Bessel operator and generalized spherical convolutions. *Analysis and Applications*, 1:81–109.
- ALIEV, I. A. and RUBIN, B. 2005. Wavelet-like transforms for admissible semi-groups; inversion formulas for potentials and Radon transforms. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 11(3):333–352.
- ALIEV, I. A., RUBIN, B., SEZER, S. and UYHAN, S. B. 2008. Composite wavelet transforms: applications and perspectives, in: Gestur Olafsson, et al.(Eds), Radon transforms, Geometry and Wavelets, in: Contemp, Math., Amer. Math. Soc. 1-27
- ALIEV, I. A. and SAGLIK, E. 2016. Generalized Riesz Potential Spaces and their Characterization via Wavelet-Type Transform. *Filomat*, 30(10):2809–2823.
- ALIEV, I. A., SEZER, S. and ERYIGIT, M. 2006. An integral transform associated to the Poisson integral and inversion of Flett potentials. *Journal of mathematical analysis and applications*, 321(2):691–704.
- BALAKRISHNAN, A. 1960. Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them. *Pacific J. Math*, 10(2):419–437.
- DELSARTE, J. 1938. Sur une extension de la formule de Taylor. *J. Math. Pure Appl*, 17:213–231.
- DUOANDIKOETXEA, J. 2001. Fourier analysis, graduate Studies in Mathematics. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 29.
- FLETT, T. 1971. Temperatures, Bessel potentials and Lipschitz spaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3):385–451.
- FOLLAND, G. B. 1984. *Real analysis: modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons.

- GADJIEV, A. D. and ALIEV, I. A. 1988a. On a class of potential type operator generated by a generalized shift operator. In *Reports of Enlarged Session of the Seminars of IN Vekua Inst. Appl. Math.(Tbilisi)*, 3, 21–24 pp.
- GADJIEV, A. D. and ALIEV, I. A. 1988b. Riesz and Bessel potentials generated by a generalized translation and their inverses. In *Proc. IV All-Union Winter Conf., Theory of functions and approximation*, Saratov (Russia) 47–53 pp.
- GRADSHTEYN, I. and RYZHIK, I. 1994. *Table of integrals, series and products*. Academic press, 5th edition.
- GULIEV, V. S. 2003. On maximal function and fractional integral, associated with the Bessel differential operator. *Mathematical Inequalities and Applications*, 6:317–330.
- KIPRIYANOV, I. A. 1997. *Singular elliptic boundary problems*, Nauka. Mirovozzrenie Zhizn Moscow, Fizmatlit, (Russian).
- KIPRIYANOV, I. A. 1967. Fourier–Bessel transforms and imbedding theorems for weight classes. *Trudy Matematicheskogo Instituta imeni VA Steklova*, 89:130–213.
- LEVITAN, B. M. 1951. Expansion in Fourier series and integrals with Bessel functions. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 6(2):102–143.
- LYAKHOV, L. N. 1983. On classes of spherical functions and singular pseudodifferential-operators. *Dokl. Akad. Nauk. (In Russian)*, 272(4):781–784.
- RUBIN, B. 1986. A method of characterization and inversion of Bessel and Riesz potentials. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 30(5):78–89.
- RUBIN, B. 1996. Fractional integrals and potentials, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. *Longman, Harlow*, 86.
- RUBIN, B. 1999. Fractional integrals and wavelet transforms associated with Blaschke-Levy representations on the sphere. *Israel Journal of Mathematics*, 114(1):1–27.
- RUBIN, B. 2004. Reconstruction of functions from their integrals over k-planes. *Israel Journal of Mathematics*, 141(1):93–117.
- SAMKO, S. G., KILBAS, A. A. and MARICHEV, O. I. 1993. *Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers.
- SAMKO, S. G. 2002. Hypersingular integrals and their applications. *Internat. Ser. Monogr. Math.*, 5.
- SEZER, S. and ALIEV, I. A. 2010. A new characterization of the Riesz potential spaces with the aid of a composite wavelet transform. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 372(2):549–558.
- STEIN, E. M. 1970. *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton University Press.

- STEIN, E. M. and WEISS, G. 1971. *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press.
- STEMPAK, K. 1986. La théorie de Littlewood-Paley pour la transformation de Fourier-Bessel. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 303(1):15–18.
- TRIMÈCHE, K. 1997. *Generalized wavelets and hypergroups*, Gordon and Breach Sci. New-York-London.
- ZASORIN, Y. V. 1986. On the Symetry properties of the Fourier-Bessel transform. *Non-classical Equations of Mathematical Physics, Inst. Mat., Novosibirsk*, 52–58 pp.



ÖZGEÇMİŞ



Sinem Yücel, 1991 yılında Muğla'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Antalya'da tamamladı. 2009 yılında başladığı Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden, 2013 yılında mezun oldu. 2014 yılı Eylül ayında Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans öğrenimini 2017 yılında tamamladı.

