



T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KİSMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT
NOKTA TEOREMLERİ**

MELTEM KAYA

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KAHRAMANMARAŞ 2017

T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ KİSMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT
NOKTA TEOREMLERİ

MELTEM KAYA

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
DOKTORA
derecesi için hazırlanmıştır.

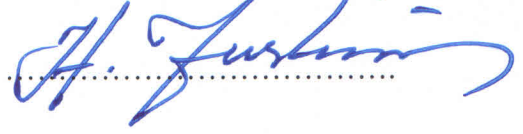
KAHRAMANMARAŞ 2017

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Meltem KAYA tarafından hazırlanan “GENELLEŞTİRİLMİŞ KISMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ” adlı bu tez, jürimiz tarafından 11/04/2017 tarihinde oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Hasan FURKAN (DANIŞMAN)

Matematik Anabilim Dalı

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi



Prof. Dr. Vatan KARAKAYA (ÜYE)

Matematik Anabilim Dalı

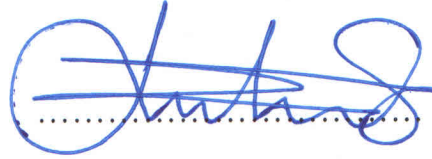
Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi



Prof. Dr. Seyit TEMİR (ÜYE)

Matematik Anabilim Dalı

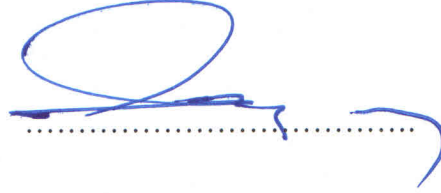
Adıyaman Üniversitesi



Doç. Dr. Cafer AYDIN (ÜYE)

Matematik Anabilim Dalı

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi



Doç. Dr. Kuddusi KAYADUMAN (ÜYE)

Matematik Anabilim Dalı

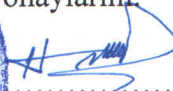
Gaziantep Üniversitesi



Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Mustafa ŞEKKELİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



Bu çalışma Tübitak-Bideb tarafından desteklenmiştir.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada, alıntı yapılan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Meltem KAYA

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

**GENELLEŞTİRİLMİŞ KİSİMİ METRİK UZAYLARDA BAZI SABİT NOKTA
TEOREMLERİ
(DOKTORA TEZİ)**

MELTEM KAYA

ÖZET

Üç bölüm olarak hazırlanan bu çalışmada, G_p -metrik uzaylar üzerinde bazı sabit nokta teoremleri incelenmiştir.

Birinci bölümde; sabit nokta teorisinin tarihçesinden ve bu tezde kullanılan bazı kavramlar ile ilgili yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; daha sonraki bölümlerde kullanılan temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Tezin orjinal kısmını oluşturan üçüncü bölüm ise üç ana başlıkta ele alınmıştır. İlk olarak, kısmi sıralı G_p -tam G_p -metrik uzaylarda f -daralma dönüşümü kavramı kullanılarak elde edilen çeşitli daralma şartlarını sağlayan tek ve çift dönüşümlerin sabit noktalarının ve ortak sabit noktalarının varlığı ve tekliği için gerekli olan şartlar incelenmiştir. İkinci kısımda, hemen hemen daralma dönüşümü ve (φ, L) -zayıf daralma dönüşümü kavramları kullanılarak bu kavramların bazı genelleştirmeleri için kısmi sıralı G_p -tam G_p -metrik uzaylarda ortak sabit nokta teoremleri ve bu teoremlerin sonuçları verilmiştir. Son olarak, metrik uzaylarda tanımlanan genişleyen dönüşüm kavramı G_p -metrik uzaylara genelleştirilmiştir ve bazı genişleme şartlarını sağlayan dönüşümler için sabit nokta sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca, tezin orjinal kısmını oluşturan bu bölümde elde edilen sonuçlar örneklerle açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, G_p -tam G_p -metrik uzay, Kısmi sıralama, f -daralma dönüşümü, Genelleştirilmiş Berinde-tipi daralma dönüşümleri, Genişleyen dönüşüm.

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Nisan/ 2017

Danışman: Doç. Dr. Hasan FURKAN

Sayfa sayısı: 88

SOME FIXED POINT THEOREMS IN GENERALIZED PARTIAL METRIC SPACES

(Ph.D. THESIS)

MELTEM KAYA

SUMMARY

In this study organized as three chapters, some fixed point theorems have been investigated on G_p -metric spaces.

In the first chapter, the history of fixed point theory and some studies related to some concepts used in this thesis have been mentioned briefly.

In the second chapter, some basic concepts and theorems, which are used in the next chapters, have been given.

The third chapter forming the original section of the thesis has been tackled as three main heading. Firstly, the sufficient conditions for the existence and uniqueness of fixed points and common fixed points of single and double mappings satisfying various contraction conditions obtained by using the notion of f -contraction mapping within the partially ordered G_p -complete G_p -metric spaces have been examined. In the second part, by using the concepts of almost contraction and (φ, L) -weak contraction mapping in the partially ordered G_p -complete G_p -metric spaces, some common fixed point theorems and their results have been given for some generalizations of these concepts. Finally, the concept of expansive mapping defined in metric spaces has been generalized to G_p -metric spaces and some fixed point results have been obtained for mappings satisfying some expansive type conditions. Also, the results obtained in this chapter forming the original section of the thesis have been supported with examples.

Key Words: Fixed point, G_p -complete G_p -metric space, Partially ordered, f -contraction mapping, Generalized Berinde-type contraction mappings, Expansive mapping.

Kahramanmaraş Sütçü İmam University

Institute for Graduate Studies in Science and Technology

Department of Mathematics, April/ 2017

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hasan FURKAN

Page number: 88

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve tamamlayıncaya kadar çalışmalarımın her safhasında gerekli maddi manevi imkânları sağlayarak bana yardımcı olan, hiç bir zaman yakın ilgi ve alâkalarını esirgemeyen, değerli hocam sayın Doç. Dr. Hasan FURKAN’a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Sakarya Üniversitesi öğretim üyelerinden Prof. Dr. Metin Başarır ve Doç. Dr. Mahpeyker Öztürk’e bilgi birikimime sundukları katkılardan dolayı hasseten teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince verdiği maddi destekten dolayı TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Meltem KAYA

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
SUMMARY	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	4
2.1. Temel Tanım ve Kavramlar	4
2.2. Sabit Nokta Kavramı	6
2.3. Dönüşüm Çiftleri ve Özellikleri	9
2.4. f -Daralma Dönüşümleri	10
2.5. Berinde-Tipi Daralma Dönüşümleri	10
2.6. G_P -Metrik Uzaylar ve Genel Özellikleri	12
3. G_P -METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ	17
3.1. Sıralı G_P -Metrik Uzaylarda Daralma Dönüşümleri İçin Bazı Ortak Sabit Nokta Teoremleri	17
3.2. Kısmi Sıralı G_P -Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş Berinde-Tipi Daralma Dönüşümleri	42
3.3. G_P -Metrik Uzaylarda Genişleyen Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri	68
KAYNAKLAR	80
ÖZGEÇMİŞ	87

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar aşağıda verildiği gibidir.

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi
(X, d)	:	Metrik uzay
(X, p)	:	Kısmi metrik uzay
(X, G)	:	G -metrik uzay
(X, G_p)	:	G_p -metrik uzay
$\{x_n\}$	:	Dizi
$B(x_0, r)$	:	x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\preceq$	:	Kısmi sıralama bağıntısı
T^n	:	T dönüşümünün n . iterasyonu
$T^n(x)$	:	x noktasının T dönüşümü altındaki n . iterasyonu
$F(T)$	:	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
Tx	:	x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
TS	:	$T \circ S$ (T ile S nin bileşkesi)
$\liminf(x_n)$	:	Alt limit
$\subset$	:	Alt küme
$\emptyset$	:	Boş küme
$ \cdot $	:	Mutlak değer
$\ \cdot\ $	:	Norm
I	:	Birim dönüşüm

1. GİRİŞ

Matematiğin çeşitli dallarında $Sx = 0$ veya $Tx = x$ gibi denklemleri çözmek için bazıları tam sonucu bazıları da yaklaşık sonucu veren metotlar vardır. Sabit nokta teorisi de bu metotlardan biridir. Sabit nokta teori çalışmaları bir dönüşümün sabit noktasının hangi şartlar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır. Sabit nokta teorisi; matematiğin diferensiyel denklemler teorisi, integral denklemler teorisi, potansiyel teori, yaklaşım teorisi, oyun teorisi ve kontrol sistemleri gibi çeşitli alanlarında uygulaması olması nedeniyle matematik dünyasında önemli bir yer tutmaktadır. Ayrıca istatistik, mühendislik, matematiksel ekonomi, esneklik teorisi gibi alanlarda da çalışma ve uygulamaları vardır.

Banach, 1922 yılında Banach Sabit Nokta Teoremi veya Banach Daralma Prensibi olarak bilinen bir teoremi tam metrik uzaylarda ispatlayarak sabit nokta teorisi çalışmalarını başlatmıştır [1]. Daha sonra, Banach daralma prensibi kullanılarak çözülemeyen problemler için daha genel sabit nokta teoremlerine ihtiyaç duyulmuştur. Bu nedenle metrik uzayın klasik tanımı çeşitli şekillerde metrik şartları değiştirilerek genelleştirilmiştir. Metrik uzay tanımının genelleştirilmesi Metrik Teoride son yıllarda çeşitli çalışmaların yapılmasına imkan sağlamıştır.

Matthews 1994 yılında metrik uzayın bir genelleştirilmesi olan kısmi metrik uzay kavramını tanımlamıştır [2]. Kısmi metrik uzayı, metrik uzaydan ayıran en önemli özellik bir noktanın kendisine olan uzaklığının her zaman sıfır olmamasıdır. Matthews'in bu tanımı kullanılarak metrik uzayda ispatlanan sabit nokta teoremleri kısmi metrik uzaya taşınmıştır ve bir çok yazar tarafından genelleştirilmiş ve örneklendirilmiştir [3–7].

Mustafa ve Sims yazar ikilisi 2006 yılında, genelleştirilmiş metrik uzayların yeni bir çeşidi olan G -metrik uzay kavramını tanımlamışlardır [8]. Daha sonra, G -metrik uzay kavramı kullanılarak farklı daralma şartları için birçok sabit nokta teoremi verilmiştir [9–15].

Son zamanlarda, Zand ve Nezhad hem kısmi metrik uzay hem de G -metrik uzay kavramlarını göz önünde bulundurarak yeni bir genelleştirilmiş metrik uzay olan G_p -metrik uzay kavramını tanımlamışlardır [16]. Bu çalışmanın ışığında birçok yazar G_p -metrik uzaylarda çeşitli sabit nokta teoremleri elde etmiştir [17–26].

Sabit nokta teorisindeki önemli bir gelişme de kısmi sıralı metrik uzay kavramını kul-

lanarak metrik uzaylarda tanımlı daralma dönüşümleri için verilen şartları zayıflatma eğiliminin ortaya çıkması olmuştur. Bu yaklaşıma göre ilk olarak 2004 yılında Hollandalı matematikçiler Ran ve Reurings yaptıkları bir çalışmada, Banach Daralma Prensibi olarak bilinen temel sabit nokta teoremini sıralı metrik uzaylarda ele almışlar ve elde ettikleri sonucu matris denklemlerinin çözümlerinin varlığı için kullanmışlardır [27]. Yazarlar bu çalışmada, daralma şartının uzayın tüm elemanları için sağlanmasının yerine uzay üzerinde verilen sıralama bağıntısına göre sadece karşılaştırılabilen elemanlar için daralma şartının sağlanmasını kullanarak sonuca ulaşmışlardır. Ancak elde edilen sonuç sabit noktanın sadece varlığını garanti etmiş, tekliği ve nasıl bulunabileceği hakkında bir bilgi vermemiştir. Ayrıca, Ran ve Reurings sabit noktanın varlığını göstermek için tanımlanan dönüşümün sürekli olduğunu kabul etmişlerdir. Fakat Nieto ve Lopez sürekli olmayan dönüşümlerin sabit noktasının varlığını gösterebilmek için X metrik uzay olmak üzere “ X uzayında $x_n \rightarrow z$ olacak şekildeki azalmayan her $\{x_n\}$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$ bağıntısını sağlar” şeklinde ilave bir şart kabul etmişlerdir [28]. Daha sonra bu çalışma temel alınarak çeşitli yazarlar tarafından sıralı metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri elde edilmiştir [29–31].

Son yıllarda, daralma dönüşümünün geliştirildiği diğer bir kavram ise Beiranvand ve arkadaşları tarafından metrik uzaylar üzerinde tanımlanan f -daralma dönüşümüdür [32]. Bu kavramın tanımlanması birçok yazar için ilham kaynağı olmuş ve daralma tipi dönüşümlerin geliştirilmesine fayda sağlamıştır. Sumitra ve arkadaşları, f -Hardy-Rogers tipi daralma şartını sağlayan Banach çifti dönüşümler için konik metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır [33]. Aynı zamanda Morales ve Rajos; f -Kannan, f -Zamfirescu ve f -zayıf daralma dönüşümleri için sabit nokta teoremlerini konik metrik uzaylarda ispatlayarak f -daralma dönüşümü kavramını geliştirmişlerdir [34,35]. Ayrıca, Abbas ve arkadaşları kısmi sıralı kısmi metrik uzay kapsamında f -Hardy-Rogers daralma şartını sağlayan dönüşümlerin sabit noktasının varlığı için gerekli şartlar üzerine çalışmışlardır [36].

Banach daralma prensibinin en önemli geliştirilmelerinden biri de 2004 yılında Berinde tarafından verilmiştir. Berinde, ilk olarak zayıf daralma (veya (δ, L) -zayıf daralma) kavramını tanımlamıştır [37]. Daha sonra bu kavramı daha uygun olan “hemen hemen daralma” olarak yeniden tanımlamıştır [38]. Aynı zamanda Berinde; Banach, Kannan, Chatterjea, Zamfirescu dönüşümlerinin ve $h \in [0, 1/2)$ için her sözde (quasi) daralma dönüşümünün hemen hemen daralma dönüşümü olduğunu göstermiştir [37]. Ayrıca Berinde hemen

hemen daralma dönüşümü kavramını kullanarak bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır. Berinde'nin bu çalışmasından sonra birçok matematikçi, Berinde'nin hemen hemen daralma dönüşümleri için ispatladığı sabit nokta teoreminin genelleştirmesi olan bazı sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri üzerine çalışmışlardır [39–47]. Daha sonra, Berinde kıyaslama fonksiyonu kavramını kullanarak hemen hemen daralma dönüşümlerinden çok daha genel olan (φ, L) -zayıf daralma (veya zayıf φ -daralma) dönüşümü kavramını tanımlamıştır ve bir sabit nokta teoremi ispatlamıştır [48]. Sonrasında Altun ve Acar hemen hemen daralma ve (φ, L) -zayıf daralma kavramlarını kısmi metrik uzaylarda tanımlamışlardır [49]. Shatanawi ve Postolache genelleştirilmiş (δ, L) -zayıf daralma dönüşümü ve genelleştirilmiş (φ, L) -zayıf daralma dönüşümü kavramlarını kısmi metrik uzaylara taşıyarak, Aydi ve arkadaşları da uzaklıkları değiştiren fonksiyon kavramını kullanarak Altun ve Acar'ın çalışmasında elde edilen sonuçları genelleştirmişlerdir [50, 51] .

1984 yılında, Wang ve arkadaşları genişleyen (expansive) dönüşüm kavramını tanımlamış ve tam metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremleri ispatlamışlardır [52]. 1992 yılında, Daffer ve Kaneko dönüşüm çiftleri için genişleme şartı tanımlayarak tam metrik uzaylarda iki dönüşüm için bazı ortak sabit nokta teoremleri elde etmişlerdir [53]. Daha sonra, Huang ve arkadaşları metrik uzaylarda verilen genişleyen dönüşüm kavramını kısmi metrik uzay kapsamında yeniden tanımlamış, Daffer ve Kaneko tarafından elde edilen bir sonucu kısmi metrik uzaylara genelleştirmişlerdir [54].

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1. [55] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için

$$M1) \ d(x, y) \geq 0,$$

$$M2) \ d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$M3) \ d(x, y) = d(y, x), \text{ (simetri özelliği)}$$

$$M4) \ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine ise metrik uzay denir.

Tanım 2.2. [56] (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$, X 'de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ noktasına yakınsaktır denir ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ veya $x_n \rightarrow x$ şeklinde gösterilir.

Lemma 2.1. [57] (X, d) bir metrik uzay olsun. O halde:

- i. X uzayındaki yakınsak bir dizinin limit noktası tektir.
- ii. Eğer X metrik uzayında $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ ve $y_n \rightarrow y$ ise $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$ dir.

Önerme 2.1. [57] (X, d) metrik uzayındaki bir $\{x_n\}$ dizisi yakınsak ise $\{x_n\}$ 'in her $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi de aynı noktaya yakınsaktır.

Tanım 2.3. [58] (X, d) bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ iken $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir n_0 sayısı bulunabiliyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.1. [57] Bir (X, d) metrik uzayında yakınsak her dizi Cauchy dizisidir.

Tanım 2.4. [57] (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X 'deki bir noktaya yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

Tanım 2.5. [57] (X, d) bir metrik uzay $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu taktirde

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine x_0 merkezli r yarıçaplı açık yuvar denir.

Tanım 2.6. [56] (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için $d(x, x_0) < \delta$ iken $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ veya $x \in B(x_0, \delta)$ iken $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X uzayının her noktasında sürekli ise, f fonksiyonu X 'de süreklidir denir.

Teorem 2.2. [59] (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu taktirde, f fonksiyonunun bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $x_n \rightarrow x_0$ iken $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ olmasıdır.

Tanım 2.7. [57] X herhangi bir küme olmak üzere X üzerindeki “ $\preceq$ ” bağıntısı, her $x, y, z \in X$ için

- i. $x \preceq x$ (Yansıma özelliği)
- ii. $x \preceq y$ ve $y \preceq x$ ise $x = y$ (Ters simetri Özelliği)
- iii. $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise $x \preceq z$ (Geçişme Özelliği)

özelliklerini sağlıyor ise bu bağıntıya X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir. Üzerinde kısmi sıralama bağıntısı tanımlanan X kümesine de kısmi sıralı küme denir.

Tanım 2.8. [60] $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. O halde

- i. $x, y \in X$ için $x \preceq y$ veya $y \preceq x$ ise x ve y elemalarına kıyaslanabilir elemanlar denir;
- ii. A, X 'in boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere A 'nın herhangi iki elemanı kıyaslanabilir ise A alt kümesine iyi sıralı küme denir;

- iii. $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere $x \preceq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $Tx \preceq Ty$ ise T dönüşümüne azalmayan dönüşüm denir.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Bundan sonraki kısımlarda $T(x)$ yerine Tx notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 2.9. [61] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T 'nin bir sabit noktası denir. Yani $Tx = x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T dönüşümünün sabit noktalarıdır ve T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1. [61]

- i. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = x^2 + 5x + 4$ eşitliği ile tanımlanan $T : X \rightarrow X$ dönüşümü için $F(T) = \{-2\}$ dir;
- ii. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = x^2 - x$ eşitliği ile tanımlanan $T : X \rightarrow X$ dönüşümü için $F(T) = \{0, 2\}$ dir;
- iii. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = x + 2$ eşitliği ile tanımlanan $T : X \rightarrow X$ dönüşümü için $F(T) = \emptyset$ dir;
- iv. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $Tx = x$ eşitliği ile tanımlanan $T : X \rightarrow X$ birim dönüşümü için $F(T) = \mathbb{R}$ dir.

Bu örnekten de anlaşıldığı üzere bir dönüşümün bir veya birden fazla sabit noktası olabileceği gibi hiçbir sabit noktası da olmayabilir.

Tanım 2.10. [61] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^n x$ dönüşümü $T^0 x = x$ ve $T^{n+1} x = T(T^n x)$ şeklinde tanımlanır. $T^n x$ dönüşümüne x noktasının T dönüşümü altındaki n . iterasyonu denir. T^n ($n \geq 1$) dönüşümüne de T dönüşümünün n . iterasyonu denir.

Bu tanımdan,

- i. her $n \geq 1$ için $F(T) \subset F(T^n)$,
- ii. keyfi bir $n \geq 1$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise $F(T) = \{x\}$

ifadeleri yazılabilir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Örneğin, $T : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ dönüşümü $T(1) = 3$, $T(2) = 2$, $T(3) = 1$ olarak tanımlanırsa, $F(T^2) = \{1, 2, 3\}$ olduğu halde $F(T) = \{2\}$ dir.

Tanım 2.11. [61] T^n ($n \geq 1$) dönüşümü T dönüşümünün n . iterasyonu olsun. Herhangi bir $x_0 \in X$ için

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \quad n = 1, 2, \dots$$

eşitliği ile verilen $\{x_n\} \subset X$ dizisine x_0 başlangıç noktası ile ardışık yaklaşımlar dizisi denir. Bu yöntem Picard iterasyonu olarak bilinir.

Tanım 2.12. [62] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) \quad (2.1)$$

olacak şekilde bir $\alpha \geq 0$ sabiti varsa, T dönüşümüne X üzerinde bir Lipschitzian dönüşümü denir. Burada (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük α değerine Lipschitz sabiti denir.

Tanım 2.13. [62] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir Lipschitzian dönüşümü olsun. Eğer $\alpha \in [0, 1)$ için (2.1) eşitsizliği sağlanıyorsa T dönüşümüne daralma veya büzülme (contraction) dönüşümü denir.

Teorem 2.3. [1] (Banach Sabit Nokta Teoremi) (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü olsun. Bu durumda T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir. Üstelik X uzayındaki herhangi bir başlangıç noktasından elde edilen Picard iterasyon dizisi T dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

Tanım 2.14. [62] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x \neq y$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise T dönüşümüne kesin daralma (contractive) dönüşümü denir.

Tanım 2.15. [62] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise T dönüşümüne genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Son yapılan dönüşüm tanımları ışığında aşağıdaki genelleştirme yazılabilir:

T daralma $\Rightarrow T$ kesin daralma $\Rightarrow T$ genişlemeyen $\Rightarrow T$ Lipschitzian dönüşümüdür.

Tanım 2.16. [62] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve $\beta > 1$ için

$$d(Tx, Ty) \geq \beta d(x, y)$$

ise T dönüşümüne genişleyen (expansive) dönüşüm denir.

Lipschitzian şartını sağlayan her dönüşüm, sürekli olduğundan daralma dönüşümleri de süreklidir. Bu nedenle bir dönüşüm sürekli değilse, daralma dönüşümü olamaz. Bu ise sürekliliği gerektirmeyen daralma şartlarının olup olmadığı sorusunu akla getirir. 1968 yılında Kannan; Banach daralma şartı yerine aşağıdaki gibi tanımladığı Kannan daralma şartını kullanarak, Banach Sabit Nokta Teoremi'ni sürekliliği gerektirmeyen dönüşümlere genelleştirmiştir.

Tanım 2.17. [63] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$$

olacak şekilde $b \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa T dönüşümüne Kannan dönüşümü denir.

Kannan Sabit Nokta Teoremi'nden sonra dönüşümün sürekliliğini gerektirmeyen daralma şartlarının çeşitli sınıfları için birçok sabit nokta ve ortak sabit nokta teoremleri elde edilmiştir. Chatterjea'de yeni bir şart altında aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 2.18. [64] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

olacak şekilde $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sayısı varsa T dönüşümüne Chatterjea dönüşümü denir.

Zamfirescu 1972 yılında, Banach, Kannan ve Chatterjea şartlarının hepsini kapsayan aşağıdaki sabit nokta teoremini elde etmiştir.

Teorem 2.4. [65] (X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $0 \leq a < 1, 0 \leq b < \frac{1}{2}, 0 \leq c < \frac{1}{2}$ olmak üzere $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve her $x, y \in X$ için

- i. $d(Tx, Ty) \leq ad(x, y)$
- ii. $d(Tx, Ty) \leq b[d(x, Tx) + d(y, Ty)]$
- iii. $d(Tx, Ty) \leq c[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$

şartlarından en az biri sağlanıyorsa T dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir.

Daha sonra en genel daralma şartlarından biri 1974 yılında Ciric tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.19. [66] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq h \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), d(x, Ty), d(y, Tx)\}$$

olacak şekilde $h \in [0, 1)$ sayısı varsa T dönüşümüne sözde (quasi) daralma dönüşümü denir.

2.3. Dönüşüm Çiftleri ve Özellikleri

Tanım 2.20. [67] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T, S : X \rightarrow X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $Tx = Sx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa bu x noktasına T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $F = F(T) \cap F(S)$ ile gösterilir.

Tanım 2.21. [68] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T, S : X \rightarrow X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer bazı $x \in X$ noktaları için $Tx = Sx = y$ ise x noktasına T ve S dönüşümlerinin çakışma (coincidence) noktası denir.

Tanım 2.22. [69] (X, d) bir metrik uzay ve $T, S : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için $d(STx, TSx) = 0$ ise S ve T dönüşümlerine değişmeli (commuting) dönüşümler denir.

Tanım 2.23. [70] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $T, S : X \rightarrow X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer T ve S dönüşümleri çakışma noktasında değişmeli ise yani bazı $x \in X$ noktaları için $Tx = Sx$ iken $TSx = STx$ ise T ve S dönüşümlerine zayıf uyumlu (weakly compatible) dönüşümler denir.

Tanım 2.24. [71] $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme ve $T, S : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x \in X$ için $Tx \preceq STx$ ve $Sx \preceq TSx$ ise T ve S dönüşümlerine zayıf olarak artan (weakly increasing) dönüşümler denir.

2.4. f -Daralma Dönüşümleri

Tanım 2.25. [32] (X, d) bir metrik uzay ve $T, f : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. Eğer $k \in [0, 1)$ reel sayısı ve her $x, y \in X$ için

$$d(fTx, fTy) \leq kd(fx, fy)$$

şartı sağlanıyorsa T dönüşümüne f -daralma dönüşümü denir.

Burada $f = I$ (birim dönüşüm) alınırsa daralma ve f -daralma dönüşümleri denk olur. Fakat, bir f -daralma dönüşümünün daralma dönüşümü olması gerekmez.

Subrahmanyam, Banach operatörü kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.26. [72] X normlu uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer bazı $k \geq 0$ değerleri ve her $x \in X$ için

$$\|f^2x - fx\| \leq k\|fx - x\|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f dönüşümüne Banach operatörü denir.

Daha sonra Chen ve Li yazar ikilisi bu kavramı aşağıdaki şekilde genelleştirdiler.

Tanım 2.27. [73] X bir normlu uzay ve $\emptyset \neq M \subset X$ olsun. $f, T : M \rightarrow M$ dönüşümleri verilsin. Eğer

- i. $f[F(T)] \subseteq F(T)$,
- ii. her $x \in F(T)$ için $Tfx = fx$,
- iii. her $x \in F(T)$ için $Tfx = fTx$,
- iv. bazı $k \geq 0$ değerleri için $\|fTx - Tx\| \leq k\|Tx - x\|$

şartlarından herhangi biri sağlanıyorsa (f, T) ikilisine Banach operatör çifti denir.

2.5. Berinde-Tipi Daralma Dönüşümleri

Berinde hemen hemen daralma dönüşümü kavramını aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.28. [38] (X, d) bir metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \delta d(x, y) + Ld(y, Tx) \quad (2.2)$$

olacak şekilde $\delta \in [0, 1)$ ve $L \geq 0$ sabitleri varsa T dönüşümüne hemen hemen daralma dönüşümü denir.

Tanım 2.29. [74] $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$i_{\varphi}) \quad \varphi \text{ monoton artan bir fonksiyon, yani } t_1 < t_2 \Rightarrow \varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$$

ve

$$ii_{\varphi}) \quad \text{her } t \geq 0 \text{ için } \{\varphi^n(t)\}_{n=0}^{\infty} \text{ sifıra yakınsak bir dizi}$$

ise φ fonksiyonuna bir kıyaslama (comparison) fonksiyonu denir. Ayrıca φ fonksiyonu (i_{φ}) şartı ile birlikte

$$iii_{\varphi}) \quad \text{her } t > 0 \text{ için } \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^n(t) < \infty$$

şartını sağlıyorsa φ fonksiyonuna (c)-kıyaslama fonksiyonu denir. Her (c)-kıyaslama fonksiyonu aynı zamanda kıyaslama fonksiyonudur.

Lemma 2.2. [61] Eğer φ kıyaslama fonksiyonu ise o halde her $t > 0$ için $\varphi(t) < t$ dir.

Berinde aynı zamanda kıyaslama fonksiyonunu kullanarak hemen hemen daralma dönüşümlerinden çok daha genel olan aşağıdaki (φ, L) -zayıf daralma dönüşümü kavramını da tanımlamıştır.

Tanım 2.30. [48] (X, d) metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y)) + Ld(y, Tx)$$

olacak şekilde φ kıyaslama fonksiyonu ve $L \geq 0$ sabiti varsa T dönüşümüne (φ, L) -zayıf daralma dönüşümü (veya zayıf φ -daralma dönüşümü) denir.

Kullanacağımız sonuçların ifadesinde gerekli olan uzaklıkları değiştiren fonksiyon kavramının tanımını verelim.

Tanım 2.31. [75] $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer ψ fonksiyonu sürekli, azalmayan ve $\psi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon ise bu fonksiyona uzaklıkları değiştiren fonksiyon (altering distance function) denir.

2.6. G_P -Metrik Uzaylar ve Genel Özellikleri

Matthews, metrik uzayların bir genelleştirmesi olan kısmi metrik uzay kavramını 1994 yılında aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.32. [2] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $p : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için

$$p_1) x = y \Leftrightarrow p(x, x) = p(x, y) = p(y, y),$$

$$p_2) p(x, x) \leq p(x, y)$$

$$p_3) p(x, y) = p(y, x),$$

$$p_4) p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) - p(z, z)$$

şartları sağlanıyorsa bu durumda p fonksiyonuna X üzerinde kısmi metrik, (X, p) ikilisine de kısmi metrik uzay denir.

Genelleştirilmiş metrik uzay kavramını, Mustafa ve Sims 2006 yılında, G -metrik uzay olarak tanımlamışlardır.

Tanım 2.33. [8] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $G : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda;

$$G_1) x = y = z \text{ ise } G(x, y, z) = 0,$$

$$G_2) \text{ her } x, y, z \in X \text{ için } x \neq y \text{ iken } G(x, y, z) > 0,$$

$$G_3) \text{ her } x, y, z \in X \text{ için } y \neq z \text{ iken } G(x, x, y) \leq G(x, y, z),$$

$$G_4) G(x, y, z) = G(x, z, y) = G(y, z, x) = \dots \text{ (Her üç değer için simetrik),}$$

$$G_5) \text{ her } x, y, z, a \in X \text{ için } G(x, y, z) \leq G(x, a, a) + G(a, y, z)$$

şartlarını sağlayan G fonksiyonuna X üzerinde G -metrik, (X, G) ikilisine de G -metrik uzay denir.

Zand ve Nezhad 2011 yılında, hem kısmi metrik hem de G -metrik uzay kavramlarını göz önünde bulundurarak G_p -metrik uzay kavramını tanımlamışlardır.

Tanım 2.34. [16] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $G_p : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ bir fonksiyon olsun.

Eğer G_p fonksiyonu her $x, y, z, a \in X$ için

$$G_{p_1}) G_p(x, y, z) = G_p(z, z, z) = G_p(y, y, y) = G_p(x, x, x) \Rightarrow x = y = z,$$

$$G_{p_2}) 0 \leq G_p(x, x, x) \leq G_p(x, x, y) \leq G_p(x, y, z),$$

$$G_{p_3}) G_p(x, y, z) = G_p(x, z, y) = G_p(y, z, x) = \dots \text{ (Her üç değer için simetrik),}$$

$$G_{p_4}) G_p(x, y, z) \leq G_p(x, a, a) + G_p(a, y, z) - G_p(a, a, a)$$

şartlarını sağlıyorsa G_p fonksiyonuna X üzerinde G_p -metrik, (X, G_p) ikilisine de G_p -metrik uzay denir.

Bu durumda (G_{p_2}) aksiyomu ile her $x, y \in X$ için simetri özelliği olarak bilinen

$$G_p(x, y, y) = G_p(x, x, y)$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 2.2. [16] $X = [0, \infty)$ olmak üzere $G_p : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda (X, G_p) bir G_p -metrik uzaydır.

Lemma 2.3. [17] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay olsun.

- i. Eğer $G_p(x, y, z) = 0$ ise $x = y = z$ dir.
- ii. Eğer $x \neq y$ ise $G_p(x, y, y) > 0$ dir.

Önerme 2.2. [16] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay olsun. O halde her $x, y, z, a \in X$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$i. G_p(x, y, z) \leq G_p(x, x, y) + G_p(x, x, z) - G_p(x, x, x);$$

$$ii. G_p(x, y, y) \leq 2G_p(x, x, y) - G_p(x, x, x);$$

$$iii. G_p(x, y, z) \leq G_p(x, a, a) + G_p(y, a, a) + G_p(z, a, a) - 2G_p(a, a, a);$$

$$\text{iv. } G_p(x, y, z) \leq G_p(x, a, z) + G_p(a, y, z) - G_p(a, a, a).$$

Önerme 2.3. [16] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay ve

$$d_{G_p}(x, y) = G_p(x, y, y) + G_p(y, x, x) - G_p(x, x, x) - G_p(y, y, y)$$

olsun. O halde (X, d_{G_p}) bir metrik uzaydır.

Tanım 2.35. [16] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay ve $\{x_n\}$, X 'de bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x, x_n, x_m) = G_p(x, x, x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktası varsa, x noktasına $\{x_n\}$ dizisinin limit noktası denir. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisi x noktasına G_p -yakınsaktır.

Eğer (X, G_p) bir G_p -metrik uzay olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi x noktasına G_p -yakınsak ise o halde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $l \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n, m > l$ için

$$|G_p(x, x_n, x_m) - G_p(x, x, x)| < \varepsilon$$

olur.

Önerme 2.4. [16] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay olsun. O halde, X 'deki her $\{x_n\}$ dizisi ve x noktası için aşağıdaki ifadeler denktir:

- i. $\{x_n\}$ dizisi x noktasına G_p -yakınsaktır,
- ii. $n \rightarrow \infty$ için $G_p(x_n, x_n, x) \rightarrow G_p(x, x, x)$,
- iii. $n \rightarrow \infty$ için $G_p(x_n, x, x) \rightarrow G_p(x, x, x)$.

Lemma 2.4. [17] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay ve $\{x_n\}$, X 'de bir dizi olsun. Bu durumda $\{x_n\}$ bir $x \in X$ noktasına G_p -yakınsak ve $G_p(x, x, x) = 0$ ise her $y \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, y, y) = G_p(x, y, y)$$

dir.

Tanım 2.36. [16] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay ve $\{x_n\}$, X 'de bir dizi olsun.

- i. $\{x_n\}$ dizisinin G_p -Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m)$ limitinin mevcut (sonlu) olmasıdır.

- ii. (X, G_p) G_p -metrik uzayının G_p -tam olması için gerek ve yeter şart X 'deki her $\{x_n\}$ G_p -Cauchy dizisinin

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = G_p(x, x, x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ noktasına G_p -yakınsak olmasıdır.

Lemma 2.5. [18] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay olsun.

- i. $\{x_n\}$ dizisinin (X, G_p) G_p -metrik uzayında bir G_p -Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter şart $\{x_n\}$ dizisinin (X, d_{G_p}) metrik uzayında Cauchy dizisi olmasıdır.
- ii. (X, G_p) G_p -metrik uzayının G_p -tam olması için gerek ve yeter şart (X, d_{G_p}) metrik uzayının tam olmasıdır. Ayrıca $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(x, x_n) = 0$ olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x, x) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = G_p(x, x, x)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 2.37. [16] (X_1, G_1) ve (X_2, G_2) iki G_p -metrik uzay ve $f : (X_1, G_1) \rightarrow (X_2, G_2)$ bir fonksiyon olsun. O halde f fonksiyonunun bir $a \in X_1$ noktasında G_p -sürekli olması için gerek ve yeter şart verilen her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyleki $x, y \in X_1$ ve $G_1(a, x, y) < \delta + G_1(a, a, a)$ iken $G_2(f(a), f(x), f(y)) < \varepsilon + G_2(f(a), f(a), f(a))$ olmasıdır. f fonksiyonunun X_1 üzerinde G_p -sürekli olması için gerek ve yeter şart her $a \in X_1$ noktasında G_p -sürekli olmasıdır.

Önerme 2.5. [16] (X_1, G_1) ve (X_2, G_2) iki G_p -metrik uzay olsun. O halde $f : X_1 \rightarrow X_2$ fonksiyonunun bir $x \in X_1$ noktasında G_p -sürekli olması için gerek ve yeter şart x noktasında G_p -dizisel sürekli olmasıdır. Yani, $\{x_n\}$ dizisi bir x noktasına G_p -yakınsadığında $\{f(x_n)\}$ dizisinin $f(x)$ noktasına G_p -yakınsak olmasıdır.

Önerme 2.6. [26] G_p -metrik uzayındaki bir fonksiyonun G_p -süreklilik ve d_{G_p} -süreklilik kavramları genelde kıyaslanamaz. Gerçekten de; $X = [0, \infty)$ kümesi üzerinde $G_p : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda her $x, y \in X$ için

$$d_{G_p}(x, y) = G_p(x, y, y) + G_p(y, x, x) - G_p(x, x, x) - G_p(y, y, y) = |x - y|$$

olup (X, d_{G_p}) bir metrik uzaydır. Ayrıca, f ve g fonksiyonları

$$fx = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x^2, & x > 0, \end{cases} \quad \text{ve} \quad gx = |\sin x|$$

eşitlikleri ile verilsin. Burada f fonksiyonu $x = 0$ noktasında G_p -süreklidir fakat d_{G_p} -sürekliliği değildir. Ayrıca g fonksiyonu $x = \pi$ noktasında d_{G_p} -süreklidir fakat G_p -sürekliliği değildir. Bundan dolayı, T dönüşümü hem (X, G_p) G_p -metrik uzayında sürekli hem de (X, d_{G_p}) metrik uzayında sürekli ise $T : X \rightarrow X$ dönüşümünün sürekli olduğu kabul edilir.

Tanım 2.38. [26] (X, G_p) bir G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun.

- i. Her $\{y_n\}$ dizisi için $\{Ty_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak iken $\{y_n\}$ dizisi de (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak ise T dönüşümüne dizisel yakınsaktır denir.
- ii. Her $\{y_n\}$ dizisi için $\{Ty_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak iken $\{y_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak bir alt diziye sahip ise T dönüşümüne alt dizisel yakınsaktır denir.

3. G_P -METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölüm üç başlık altında toplanmıştır ve tezin orjinal kısmını oluşturmaktadır.

3.1. Sıralı G_P -Metrik Uzaylarda Daralma Dönüşümleri İçin Bazı Ortak Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, G_P -tam G_P -metrik uzaylarda f -daralma dönüşümü kavramı kullanılarak elde edilen farklı daralma şartları için bazı ortak sabit nokta teoremleri ve bu teoremlerin sonuçları verilerek örneklerle desteklenmiştir

Teorem 3.1. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_P) G_P -tam G_P -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü “ $\preceq$ ” bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli, birebir ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun öyle ki

$$\begin{aligned} M(fx, fy, fy) = & \max\{G_P(fx, fTx, fy), G_P(fy, fT^2x, fTy), \\ & G_P(fTx, fT^2x, fTy), G_P(fy, fTx, fTy), G_P(fx, fy, fy), \\ & G_P(fx, fTx, fTx), G_P(fy, fTy, fTy), G_P(fy, fTx, fTx), \\ & G_P(fx, fTy, fTy)\} \end{aligned}$$

olmak üzere kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için

$$G_P(fTx, fTy, fTy) \leq kM(fx, fy, fy) \quad (3.1)$$

şartı sağlansın. Eğer $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ve

i. T, X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T 'nin sabit noktasının tek olmasıdır. Eğer (f, T) ikilisi Banach çifti ise f ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Her $n \geq 1$ için $x_n = Tx_{n-1}$ eşitliği ile tanımlı $\{x_n\}$ dizisini göz önüne alalım. Bu taktirde $x_0 \preceq Tx_0$ ve T azalmayan bir dönüşüm

olduğundan,

$$x_0 \preceq Tx_0 = x_1 \preceq Tx_1 = x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq Tx_n = x_{n+1} \preceq \cdots$$

sonucuna ulaşılır. Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ ise o zaman x_n , T dönüşümünün bir sabit noktası olur.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. O halde her $n \geq 1$ için $x_{n-1} \preceq x_n$ olduğundan (3.1) eşitsizliği ile

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) = G_p(fTx_{n-1}, fTx_n, fTx_n) \leq kM(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \quad (3.2)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} M(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) &= \max\{G_p(fx_{n-1}, fTx_{n-1}, fx_n), \\ &\quad G_p(fx_n, fT^2x_{n-1}, fTx_n), G_p(fTx_{n-1}, fT^2x_{n-1}, fTx_n), \\ &\quad G_p(fx_n, fTx_{n-1}, fTx_n), G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n), \\ &\quad G_p(fx_{n-1}, fTx_{n-1}, fTx_{n-1}), G_p(fx_n, fTx_n, fTx_n), \\ &\quad G_p(fx_n, fTx_{n-1}, fTx_{n-1}), G_p(fx_{n-1}, fTx_n, fTx_n)\} \\ &= \max\{G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n), G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}), \\ &\quad G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G_p(fx_n, fx_n, fx_{n+1}), \\ &\quad G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n), G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n), \\ &\quad G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}), G_p(fx_n, fx_n, fx_n), \\ &\quad G_p(fx_{n-1}, fx_{n+1}, fx_{n+1})\} \\ &= \max\{G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n), G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}), \\ &\quad G_p(fx_{n-1}, fx_{n+1}, fx_{n+1})\} \end{aligned}$$

olur. Eğer $M(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) = G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n)$ ise (3.2) ifadesi $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq kM(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) = kG_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \quad (3.3)$$

eşitsizliğine dönüşür.

Eğer $M(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) = G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1})$ ise (3.2) den

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq kG_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \quad (3.4)$$

eşitsizliği elde edilir ki, $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan bu bir çelişkidir.

Son olarak eğer $M(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) = G_p(fx_{n-1}, fx_{n+1}, fx_{n+1})$ alınırsa (3.2) eşitsizliği ve (G_{p_4}) aksiyomu ile

$$\begin{aligned} G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) &\leq kG_p(fx_{n-1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \\ &\leq k[G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) + G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1})] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için $h = \frac{k}{1-k} < 1$ olmak üzere

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq hG_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \quad (3.5)$$

eşitsizliğine denktir.

Sonuç olarak, (3.3)-(3.5) ifadelerinden $r \in \{h, k\}$ ve dolayısıyla $r \in [0, 1)$ olmak üzere

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq rG_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n)$$

elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edildiğinde

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq rG_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \leq \dots \leq r^n G_p(fx_0, fx_1, fx_1)$$

olduğu görülür.

Şimdi $\{fx_n\}$ dizisinin, X 'de G_p -Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. O halde $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} G_p(fx_n, fx_m, fx_m) &\leq G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) + G_p(fx_{n+1}, fx_m, fx_m) \\ &\quad - G_p(fx_{n+1}, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \\ &\leq G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) + G_p(fx_{n+1}, fx_{n+2}, fx_{n+2}) \\ &\quad + \dots + G_p(fx_{m-1}, fx_m, fx_m) \\ &\quad - \sum_{i=n+1}^{m-1} G_p(fx_i, fx_i, fx_i) \\ &\leq (r^n + r^{n+1} + \dots + r^{m-1})G_p(fx_0, fx_1, fx_1) \\ &= r^n(1 + r + \dots + r^{m-n-1})G_p(fx_0, fx_1, fx_1) \\ &= r^n \frac{1 - r^{m-n}}{1 - r} G_p(fx_0, fx_1, fx_1) \\ &\leq \frac{r^n}{1 - r} G_p(fx_0, fx_1, fx_1) \end{aligned}$$

olup bu son eşitsizlikte $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $G_p(fx_n, fx_m, fx_m) \rightarrow 0$ elde edilir. Bu ise $\{fx_n\}$ dizisinin G_p -Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Dolayısıyla Lemma 2.5'den $\{fx_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve (X, G_p) uzayının tamlığı (X, d_{G_p}) metrik uzayının tamlığını gerektirir. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_n, z) = 0 \quad (3.6)$$

olacak şekilde $z \in X$ noktası vardır. Böylece Lemma 2.5'den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(fx_n, z, z) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(fx_n, fx_m, fx_m) = G_p(z, z, z) = 0$$

elde edilir.

Diğer taraftan f dönüşümü (X, d_{G_p}) metrik uzayında alt dizisel yakınsak olduğundan, $\{x_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak bir alt diziye sahiptir. Dolayısıyla $u \in X$ noktası ve $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_{n_i}, u) = 0$$

olur. Ayrıca, f sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_{n_i}, fu) = 0$$

elde edilir. O halde (3.6) eşitliği ve metrik uzayda limit noktasının tekliği ile $fu = z$ olur. Sonuç olarak

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G_p(fx_{n_i}, fu, fu) = G_p(fu, fu, fu) = 0$$

yazılabilir.

Şimdi, u noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterelim.

- i. Eğer T , X üzerinde sürekli dönüşüm ise Önerme 2.6 ile $i \rightarrow \infty$ için $Tx_{n_i} \rightarrow Tu$ ve dolayısıyla $fTx_{n_i} \rightarrow fTu$ olur. Bu durumda, $i \rightarrow \infty$ için $fx_{n_i} \rightarrow fu$ olduğundan $fu = fTu$ elde edilir. O halde, f birebir dönüşüm olduğundan $Tu = u$ olur.
- ii. Eğer T dönüşümü X üzerinde sürekli değilse verilen hipotez ile $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi azalmayan bir dizi ve $i \rightarrow \infty$ iken $x_{n_i} \rightarrow u$ olduğundan $x_{n_i} \preceq u$ yazılabilir. Bu durumda (3.1) eşitsizliği ile

$$G_p(fx_{n_i+1}, fTu, fTu) = G_p(fTx_{n_i}, fTu, fTu) \leq kM(fx_{n_i}, fu, fu) \quad (3.7)$$

ve

$$\begin{aligned}
M(fx_{n_i}, fu, fu) &= \max\{G_p(fx_{n_i}, fTx_{n_i}, fu), G_p(fu, fT^2x_{n_i}, fTu), \\
&G_p(fTx_{n_i}, fT^2x_{n_i}, fTu), G_p(fu, fTx_{n_i}, fTu), \\
&G_p(fx_{n_i}, fu, fu), G_p(fx_{n_i}, fTx_{n_i}, fTx_{n_i}), \\
&G_p(fu, fTu, fTu), G_p(fu, fTx_{n_i}, fTx_{n_i}), \\
&G_p(fx_{n_i}, fTu, fTu)\} \\
&= \max\{G_p(fx_{n_i}, fx_{n_i+1}, fu), G_p(fu, fx_{n_i+2}, fTu), \\
&G_p(fx_{n_i+1}, fx_{n_i+2}, fTu), G_p(fu, fx_{n_i+1}, fTu), \\
&G_p(fx_{n_i}, fu, fu), G_p(fx_{n_i}, fx_{n_i+1}, fx_{n_i+1}), \\
&G_p(fu, fTu, fTu), G_p(fu, fx_{n_i+1}, fx_{n_i+1}), \\
&G_p(fx_{n_i}, fTu, fTu)\} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

olur.

Şimdi burada gerekli olacak bazı limit değerlerini bulalım. (G_{p_4}) aksiyomu ile

$$\begin{aligned}
G_p(fx_{n_i}, fx_{n_i+1}, fu) &\leq G_p(fx_{n_i}, fx_{n_i+1}, fx_{n_i+1}) \\
&+ G_p(fx_{n_i+1}, fx_{n_i+1}, fu)
\end{aligned}$$

olup $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G_p(fx_{n_i}, fx_{n_i+1}, fu) = 0$$

bulunur. Tekrar (G_{p_4}) aksiyomu ile

$$G_p(fu, fx_{n_i+2}, fTu) \leq G_p(fx_{n_i+2}, fu, fu) + G_p(fu, fu, fTu)$$

ve

$$G_p(fu, fu, fTu) \leq G_p(fu, fx_{n_i+2}, fx_{n_i+2}) + G_p(fx_{n_i+2}, fu, fTu)$$

yazılabilir. Son iki eşitsizlikte $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G_p(fu, fx_{n_i+2}, fTu) = G_p(fu, fu, fTu)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} G_p(fx_{n_i+1}, fx_{n_i+2}, fTu) &\leq G_p(fx_{n_i+1}, fx_{n_i+2}, fx_{n_i+2}) \\ &\quad + G_p(fx_{n_i+2}, fx_{n_i+2}, fTu) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G_p(fu, fu, fTu) &\leq G_p(fu, fu, fx_{n_i+1}) + G_p(fx_{n_i+1}, fx_{n_i+1}, fTu) \\ &\leq G_p(fu, fu, fx_{n_i+1}) + G_p(fx_{n_i+1}, fx_{n_i+2}, fx_{n_i+2}) \\ &\quad + G_p(fx_{n_i+2}, fx_{n_i+1}, fTu) \end{aligned}$$

olup bu iki eşitsizlikte $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G_p(fx_{n_i+1}, fx_{n_i+2}, fTu) = G_p(fu, fu, fTu)$$

elde edilir. Son olarak

$$G_p(fu, fx_{n_i+1}, fTu) \leq G_p(fu, fx_{n_i+1}, fx_{n_i+1}) + G_p(fx_{n_i+1}, fx_{n_i+1}, fTu)$$

ve

$$G_p(fu, fu, fTu) \leq G_p(fu, fx_{n_i+1}, fx_{n_i+1}) + G_p(fx_{n_i+1}, fu, fTu)$$

olup bu iki eşitsizlikte $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G_p(fu, fx_{n_i+1}, fTu) = G_p(fu, fu, fTu)$$

elde edilir. O halde (3.7) ve (3.8) ifadelerinde $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$G_p(fu, fTu, fTu) \leq kG_p(fu, fTu, fTu)$$

elde edilir ki bu $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan $G_p(fu, fTu, fTu) = 0$ olması ile mümkündür. Bu ise Lemma 2.3 ile $fu = fTu$ olması demektir. Bu taktirde f birebir dönüşüm olduğundan $u = Tu$ elde edilir.

Bu durumda (i) ve (ii) den u, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Şimdi, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olduğunu kabul edelim. T 'nin sabit noktasının tek olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim. Yani, $w \in X$ noktası T dönüşümünün diğer bir sabit noktası ve $u \neq w$ olsun. O halde T 'nin sabit noktalarının kümesi iyi sıralı olduğundan u ve w kıyaslanabilir elemanlardır. Bu durumda (3.1)

eşitsizliği kullanılarak,

$$G_p(fu, fw, fw) = G_p(fTu, fTw, fTw) \leq kM(fu, fw, fw) \quad (3.9)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} M(fu, fw, fw) &= \max\{G_p(fu, fTu, fw), G_p(fw, fT^2u, fTw), \\ &\quad G_p(fTu, fT^2u, fTw), G_p(fw, fTu, fTw), \\ &\quad G_p(fu, fw, fw), G_p(fu, fTu, fTu), \\ &\quad G_p(fw, fTw, fTw), G_p(fw, fTu, fTu), \\ &\quad G_p(fu, fTw, fTw)\} \\ &= \max\{G_p(fu, fu, fw), G_p(fw, fu, fw), G_p(fu, fu, fw), \\ &\quad G_p(fw, fu, fw), G_p(fu, fw, fw), G_p(fu, fu, fu), \\ &\quad G_p(fw, fw, fw), G_p(fw, fu, fu), G_p(fu, fw, fw)\} \\ &= G_p(fu, fw, fw) \end{aligned}$$

olur. O halde (3.9) eşitsizliğinden

$$G_p(fu, fw, fw) \leq kG_p(fu, fw, fw)$$

elde edilir. Bu ise $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ olduğundan bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u = w$ olmalıdır. O halde u, T dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

Aksine T dönüşümü tek sabit noktaya sahip olsun. Bu durumda, T 'nin sabit noktalarının kümesi tek elemanlı olup iyi sıralıdır.

Son olarak (f, T) ikilisinin bir Banach çifti olması durumunda f ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktaya sahip olduklarını göstereyim. O halde (f, T) Banach çifti olduğundan T dönüşümünün sabit noktasında f ile T değişmeli dönüşümlerdir. Bu ise $u \in F(T)$ için $fTu = Tfu$ olması demektir. Böylece $fu = Tfu$ elde edilir. Bu durumda fu, T dönüşümü için bir sabit noktadır. Fakat T dönüşümü tek sabit noktaya sahip olduğundan $fu = u$ olmalıdır. Dolayısıyla u noktası f dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Bu takdirde $Tu = fu = u$ olup u noktası f ve T dönüşümlerinin X 'deki tek ortak sabit noktasıdır.

Örnek 3.1. $X = [0, 1]$ olmak üzere her $x, y \in X$ için “ $x \preceq y \Leftrightarrow x \geq y$ ” ile tanımlı “ $\preceq$ ” sıralama bağıntısını göz önüne alalım. O halde $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir kümedir. Ayrıca

$G_p : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x, y, z \in X$ için $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda (X, G_p) , G_p -tam G_p -metrik uzaydır. Gerçekten de; her $x, y \in X$ için

$$d_{G_p}(x, y) = G_p(x, y, y) + G_p(y, x, x) - G_p(x, x, x) - G_p(y, y, y) = |x - y|$$

olup $(X, d_{G_p}) = ([0, 1], |\cdot|)$ tam metrik uzaydır. Dolayısıyla, Lemma 2.5 ile (X, G_p) , G_p -tam G_p -metrik uzaydır.

Her $x \in X$ için $T, f : X \rightarrow X$ dönüşümleri sırasıyla $Tx = \frac{x}{4}$ ve $fx = \frac{4x}{5}$ eşitlikleri ile tanımlansın. Bu durumda f dönüşümü birebir, alt dizisel yakınsak ve sürekli bir dönüşümdür. Gerçekten de; her $x_1 \neq x_2$ için $\frac{4x_1}{5} \neq \frac{4x_2}{5}$ olur. Bu ise $x_1 \neq x_2$ için $fx_1 \neq fx_2$ olması demektir. Dolayısıyla f dönüşümü birebirdir.

$\{fy_n\}$ dizisinin (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak bir dizi olduğunu kabul edelim. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} fy_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4y_n}{5} = y$$

olacak şekilde $y \in X$ noktası vardır. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \frac{5y}{4}$$

olup $\{y_n\}$, (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak bir dizidir. Dolayısıyla $\{y_n\}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahiptir. Bu da f dönüşümünün alt dizisel yakınsak olduğunu gösterir.

Şimdi f dönüşümünün hem (X, G_p) G_p -metrik uzayında hem de (X, d_{G_p}) metrik uzayında sürekli bir dönüşüm olduğunu gösterelim. $\{x_n\}$ dizisi (X, G_p) uzayında bir $x \in X$ noktasına G_p -yakınsak olsun. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x, x) = G_p(x, x, x) = x$$

olur. Ayrıca f dönüşümünün tanımı ile

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} G_p(fx_n, fx, fx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{fx_n, fx\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{\frac{4x_n}{5}, \frac{4x}{5}\right\} \\ &= \frac{4}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, x\} \\ &= \frac{4x}{5} \\ &= G_p(fx, fx, fx) \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $\{x_n\}$ dizisinin (X, d_{G_p}) metrik uzayında bir $x \in X$ noktasına yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$$

olur. O halde f dönüşümünün tanımı ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_n, fx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{4x_n}{5} - \frac{4x}{5} \right| = \frac{4}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0 \quad (3.11)$$

dır.

Dolayısıyla (3.10) ve (3.11) ile f dönüşümü süreklidir. Benzer şekilde T dönüşümünde sürekli olduğu gösterilebilir.

Ayrıca T dönüşümü X üzerinde tanımlanan kısmi sıralama bağıntısına göre azalmayan bir dönüşümdür. Bunun için $x \preceq y$ olduğunu kabul edelim. O halde $x \geq y$ olup $\frac{x}{4} \geq \frac{y}{4}$ elde edilir. Bu ise $Tx \geq Ty$, yani $Tx \preceq Ty$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla T azalmayan bir dönüşümdür. Aynı zamanda $x_0 = 0$ için $x_0 \preceq Tx_0$ olur.

Diğer taraftan $x \geq y$ için

$$\begin{aligned} M(fx, fy, fy) &= \max\left\{\frac{4x}{5}, \max\left\{\frac{4y}{5}, \frac{x}{20}, \frac{y}{5}\right\}, \frac{x}{5}, \max\left\{\frac{4y}{5}, \frac{x}{5}, \frac{y}{5}\right\}, \frac{4y}{5}, \right. \\ &\quad \left. \max\left\{\frac{4y}{5}, \frac{x}{5}, \frac{x}{5}\right\}\right\} \\ &= \frac{4x}{5} \end{aligned}$$

dir. Buradan $x \geq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $k = \frac{1}{4}$ için

$$G_p(fTx, fTy, fTy) = \max\left\{\frac{x}{5}, \frac{y}{5}\right\} = \frac{x}{5} \leq \frac{1}{4} M(fx, fy, fy)$$

olur. Böylece Teorem 3.1'in tüm şartları sağlanır ve 0 , T dönüşümünün tek sabit noktası olur.

Son olarak, $0 \in F(T)$ için $fT0 = Tf0 = 0$ olduğundan (f, T) ikilisi Banach çiftidir. Dolayısıyla 0 , f ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

Sonuç 3.1. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow$

X dönüşümü “ $\preceq$ ” bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun öyle ki

$$M(x, y, y) = \max\{G_p(x, Tx, y), G_p(y, T^2x, Ty), G_p(Tx, T^2x, Ty), \\ G_p(y, Tx, Ty), G_p(x, y, y), G_p(x, Tx, Tx), G_p(y, Ty, Ty), \\ G_p(y, Tx, Tx), G_p(x, Ty, Ty)\}$$

olmak üzere kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $k \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ için

$$G_p(Tx, Ty, Ty) \leq kM(x, y, y)$$

şartı sağlansın. Eğer $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ve

i. T, X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T 'nin sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: Teorem 3.1'de I birim dönüşüm olmak üzere $f = I$ alınırsa ispat elde edilir.

Teorem 3.2. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T, S : X \rightarrow X$ dönüşümleri “ $\preceq$ ” bağıntısına göre zayıf artan iki dönüşüm olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli, birebir ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun öyle ki kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ için

$$G_p(fTx, fSy, fSy) \leq k \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(fy, fSy, fSy) + G_p(fx, fSy, fSy), \\ 2G_p(fy, fTx, fTx) \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

şartı sağlansın. Eğer

i. T veya S, X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T ve S dönüşümleri X 'de bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T ve S 'nin ortak sabit noktasının tek olmasıdır. Eğer (f, T) ve (f, S) ikilileri Banach çifti ise f , T ve S dönüşümleri X uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi

$$x_{2n+1} = Tx_{2n} \quad \text{ve} \quad x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$$

şeklinde tanımlansın. Böylece T ve S zayıf artan dönüşümler olduğundan

$$x_1 = Tx_0 \preceq STx_0 = Sx_1 = x_2 \preceq TSx_1 = Tx_2 = x_3,$$

$$x_3 = Tx_2 \preceq STx_2 = Sx_3 = x_4 \preceq TSx_3 = Tx_4 = x_5$$

elde edilir. O halde tümevarım ile

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq x_{n+1} \preceq \cdots$$

yazılabilir. Eğer $G_p(fx_{2N}, fx_{2N+1}, fx_{2N+1}) = 0$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa x_{2N} , T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası olur. Gerçekten de; $G_p(fx_{2N}, fx_{2N+1}, fx_{2N+1}) = 0$ ise Lemma 2.3 ile $fx_{2N} = fx_{2N+1}$ olur. Bu taktirde f birebir dönüşüm olduğundan $x_{2N} = x_{2N+1} = Tx_{2N}$ bulunur. Ayrıca x_{2N} ve x_{2N+1} kıyaslanabilir elemanlar olduğundan teoremin daralma şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} G_p(fx_{2N+1}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2}) &= G_p(fTx_{2N}, fSx_{2N+1}, fSx_{2N+1}) \\ &\leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(fx_{2N+1}, fSx_{2N+1}, fSx_{2N+1}) + G_p(fx_{2N}, fSx_{2N+1}, fSx_{2N+1}), \\ 2G_p(fx_{2N+1}, fTx_{2N}, fTx_{2N}) \end{array} \right\} \\ &= k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(fx_{2N+1}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2}) + G_p(fx_{2N}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2}), \\ 2G_p(fx_{2N+1}, fx_{2N+1}, fx_{2N+1}) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} G_p(fx_{2N+1}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2}) &\leq k[G_p(fx_{2N+1}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2}) \\ &\quad + G_p(fx_{2N}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2})] \\ &= 2kG_p(fx_{2N+1}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2}) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $(1 - 2k)G_p(fx_{2N+1}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2}) \leq 0$ olur. Bu ise $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ olduğundan $G_p(fx_{2N+1}, fx_{2N+2}, fx_{2N+2}) = 0$, yani $x_{2N+1} = x_{2N+2} = Sx_{2N+1}$ olması ile mümkündür. Böylece $x_{2N+1} = x_{2N}$, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası olur.

Şimdi, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. (3.12) daralma şartı ile

$$\begin{aligned} G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) &= G_p(fTx_{2n}, fSx_{2n+1}, fSx_{2n+1}) \\ &\leq k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, fSx_{2n+1}) + G_p(fx_{2n}, fSx_{2n+1}, fSx_{2n+1}), \\ &2G_p(fx_{2n+1}, fTx_{2n}, fTx_{2n}) \end{aligned} \right\} \\ &= k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) + G_p(fx_{2n}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}), \\ &2G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \end{aligned} \right\} \\ &\leq k \max \left\{ \begin{aligned} &2G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) + G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}), \\ &2G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) &\leq 2kG_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \\ &\quad + kG_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \end{aligned}$$

olup bu ifade

$$G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \leq \frac{k}{1 - 2k} G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1})$$

eşitsizliğine denktir. Bu durumda $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ için $r = \frac{k}{1 - 2k} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ alınırsa

$$G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \leq rG_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \quad (3.13)$$

olur.

Benzer şekilde, $x_{2n-1} \preceq x_{2n}$ ve X uzayı simetrik olduğundan (3.12) daralma şartı ile

$$\begin{aligned} G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) &= G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n}, fx_{2n}) \\ &= G_p(fTx_{2n}, fSx_{2n-1}, fSx_{2n-1}) \\ &\leq k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fx_{2n-1}, fSx_{2n-1}, fSx_{2n-1}) + G_p(fx_{2n}, fSx_{2n-1}, fSx_{2n-1}), \\ &2G_p(fx_{2n-1}, fTx_{2n}, fTx_{2n}) \end{aligned} \right\} \\ &= k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fx_{2n-1}, fx_{2n}, fx_{2n}) + G_p(fx_{2n}, fx_{2n}, fx_{2n}), \\ &2G_p(fx_{2n-1}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \end{aligned} \right\} \\ &\leq k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fx_{2n-1}, fx_{2n}, fx_{2n}) + G_p(fx_{2n}, fx_{2n}, fx_{2n}), \\ &2[G_p(fx_{2n-1}, fx_{2n}, fx_{2n}) + G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1})] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

olup buradan

$$G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \leq \frac{2k}{1-2k} G_p(fx_{2n-1}, fx_{2n}, fx_{2n})$$

elde edilir. O halde $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ için $h = \frac{2k}{1-2k}$ alınırsa $h \in [0, 1)$ ve

$$G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \leq h G_p(fx_{2n-1}, fx_{2n}, fx_{2n}) \quad (3.14)$$

olur. Bu durumda (3.13) ve (3.14) eşitsizliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq h G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n)$$

yazılabilir. Böylece tümevarımdan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq h G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \leq \dots \leq h^n G_p(fx_0, fx_1, fx_1)$$

olur. Bu durumda Teorem 3.1'in ispatındaki gibi benzer işlemler yapılarak $n, m \rightarrow \infty$ için $G_p(fx_n, fx_m, fx_m) \rightarrow 0$ olduğu görülür. Bu ise $\{fx_n\}$ dizisinin X uzayında G_p -Cauchy dizisi olması demektir. Bu taktirde Lemma 2.5'den $\{fx_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve (X, G_p) uzayının tamlığı (X, d_{G_p}) metrik uzayının tamlığını gerektirir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_n, z) = 0 \quad (3.15)$$

olacak şekilde $z \in X$ noktası vardır ve Lemma 2.5 ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(fx_n, z, z) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(fx_n, fx_m, fx_m) = G_p(z, z, z) = 0$$

yazılabilir.

Diğer taraftan f dönüşümü (X, d_{G_p}) metrik uzayında alt dizisel yakınsak olduğundan, $\{x_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak bir alt diziye sahiptir. Dolayısıyla $u \in X$ noktası ve $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_{n_i}, u) = 0$$

olur. Ayrıca, f sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_{n_i}, fu) = 0$$

yazılabilir. O halde (3.15) eşitliği ve metrik uzayda limit noktasının tekliği ile $fu = z$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G_p(fx_{n_i}, fu, fu) = G_p(fu, fu, fu) = 0$$

yazılabilir.

Şimdi, u noktasının T ve S dönüşümlerinin bir ortak sabit noktası olduğunu gösterelim.

- i. Eğer T , X üzerinde sürekli bir dönüşüm ise Önerme 2.6 ile $i \rightarrow \infty$ için $Tx_{2n_i} \rightarrow Tu$ ve $fTx_{2n_i} \rightarrow fTu$ olur. Bu durumda, $i \rightarrow \infty$ için $fx_{n_i} \rightarrow fu$ olduğundan $fu = fTu$ olmalıdır. O halde, f birebir dönüşüm olduğundan $Tu = u$ elde edilir.

Şimdi $Su \neq u$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u \preceq u$ olduğundan (3.12) daralma şartı ile

$$\begin{aligned} G_p(fu, fSu, fSu) &= G_p(fTu, fSu, fSu) \\ &\leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(fu, fSu, fSu) + G_p(fu, fSu, fSu), \\ 2G_p(fu, fTu, fTu) \end{array} \right\} \\ &= 2kG_p(fu, fSu, fSu) \end{aligned}$$

elde edilir ki $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde kabulümüz yanlış olup $Su = u$ olmalıdır.

Eğer S , X üzerinde sürekli bir dönüşüm ise $i \rightarrow \infty$ için $Sx_{2n_i+1} \rightarrow Su$ ve $fSx_{2n_i+1} \rightarrow fSu$ olur. Ayrıca, $i \rightarrow \infty$ için $fx_{n_i} \rightarrow fu$ olduğundan $fu = fSu$ olmalıdır. O halde, f birebir dönüşüm olduğundan $Su = u$ elde edilir.

Şimdi $Tu \neq u$ olduğunu kabul edelim. Böylece teoremin daralma şartı ile

$$\begin{aligned} G_p(fTu, fu, fu) &= G_p(fTu, fSu, fSu) \\ &\leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(fu, fSu, fSu) + G_p(fu, fSu, fSu), \\ 2G_p(fu, fTu, fTu) \end{array} \right\} \\ &= 2kG_p(fTu, fu, fu) \end{aligned}$$

elde edilir. $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ için bu bir çelişki olup $Tu = u$ olmalıdır.

- ii. Eğer T ve S dönüşümleri X üzerinde sürekli değilse verilen hipotez ile $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{2n_i}\}$ ve $\{x_{2n_i+1}\}$ alt dizileri için $x_{2n_i} \preceq u$ ve $x_{2n_i+1} \preceq u$ yazılabilir. Bu

durumda (3.12) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
G_p(fTu, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) &= G_p(fTu, fSx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}) \\
&\leq k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}) \\ &+ G_p(fu, fSx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}), \\ &2G_p(fx_{2n_i+1}, fTu, fTu) \end{aligned} \right\} \\
&= k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) + G_p(fu, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}), \\ &2G_p(fx_{2n_i+1}, fTu, fTu) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

olup $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$G_p(fTu, fu, fu) \leq 2kG_p(fu, fTu, fTu) = 2kG_p(fu, fu, fTu)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu taktirde $(1 - 2k)G_p(fTu, fu, fu) \leq 0$ olur. Bu ise $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ olduğundan $G_p(fTu, fu, fu) = 0$ olması ile mümkündür. O halde Lemma 2.3 ile $fu = fTu$ olup f birebir olduğundan $u = Tu$ elde edilir.

Benzer şekilde, (3.12) daralma şartından

$$\begin{aligned}
G_p(fx_{2n_i+1}, fSu, fSu) &= G_p(fTx_{2n_i}, fSu, fSu) \\
&\leq k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fu, fSu, fSu) + G_p(fx_{2n_i}, fSu, fSu), \\ &2G_p(fu, fTx_{2n_i}, fTx_{2n_i}) \end{aligned} \right\} \\
&= k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fu, fSu, fSu) + G_p(fx_{2n_i}, fSu, fSu), \\ &2G_p(fu, fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+1}) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

olup $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$G_p(fu, fSu, fSu) \leq 2kG_p(fu, fSu, fSu)$$

elde edilir. Bu ise $u = Su$ olması ile mümkündür.

Bu durumda (i) ve (ii) den u , T ve S dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır.

Şimdi, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olduğunu kabul edelim. T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktasının tek olduğunu göstereceğiz. Aksi kabul edelim. Yani, $w \in X$ noktası T ve S dönüşümlerinin bir ortak sabit noktası ve $u \neq w$ olsun. O halde, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi iyi sıralı

olduğundan u ve w kıyaslanabilir elemanlardır. Bu durumda (3.12) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} G_p(fw, fu, fu) &= G_p(fTw, fSu, fSu) \\ &\leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(fu, fSu, fSu) + G_p(fw, fSu, fSu), \\ 2G_p(fu, fTw, fTw) \end{array} \right\} \\ &= k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(fu, fu, fu) + G_p(fw, fu, fu), \\ 2G_p(fu, fw, fw) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

olup

$$G_p(fw, fu, fu) \leq 2kG_p(fu, fw, fw) = 2kG_p(fw, fu, fu)$$

elde edilir. O halde, $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u = w$ olmalıdır. Bu ise u noktasının T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğunu gösterir.

Aksine T ve S tek ortak sabit noktaya sahip olsun. Bu durumda T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi tek elemanlı olup iyi sıralıdır.

Son olarak, (f, T) ve (f, S) ikililerinin Banach çifti olduğunu kabul edelim. O halde, $u \in F(T)$ için $fTu = Tfu$ ve $u \in F(S)$ için $fSu = Sfu$ olur. Buradan $Tu = Su = u$ olup $fu = Tfu$ ve $fu = Sfu$ elde edilir. Bu durumda fu , T ve S dönüşümlerinin diğer bir ortak sabit noktasıdır. O halde T ve S tek ortak sabit noktaya sahip olduğundan $fu = u$ olmalıdır. Dolayısıyla u noktası f dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Yani $Tu = Su = fu = u$ olup, u noktası f , T ve S dönüşümlerinin X 'deki tek ortak sabit noktasıdır.

Sonuç 3.2. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T, S : X \rightarrow X$ dönüşümleri " $\preceq$ " bağıntısına göre zayıf artan iki dönüşüm olsun öyle ki kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $k \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$ için

$$G_p(Tx, Sy, Sy) \leq k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(y, Sy, Sy) + G_p(x, Sy, Sy), \\ 2G_p(y, Tx, Tx) \end{array} \right\}$$

şartı sağlansın. Eğer

- i. T veya S , X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T ve S dönüşümleri X 'de bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T ve S 'nin ortak sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: Eğer Teorem 3.2'de $f = I$ alınıp, benzer yöntem uygulanırsa ispat elde edilir.

Sonuç 3.3. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü " $\preceq$ " bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli, birebir ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun öyle ki kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ için

$$G_p(fTx, fTy, fTy) \leq k \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(fy, fTy, fTy) + G_p(fx, fTy, fTy), \\ 2G_p(fy, fTx, fTx) \end{array} \right\}$$

şartı sağlansın. Eğer $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ve

i. T, X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T 'nin sabit noktasının tek olmasıdır. Eğer (f, T) ikilisi Banach çifti ise f ve T dönüşümleri X uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Eğer Teorem 3.2'de $T = S$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Örnek 3.2. $X = [0, 1]$ olmak üzere her $x, y \in X$ için " $x \preceq y \Leftrightarrow x \geq y$ " ile tanımlı " $\preceq$ " sıralama bağıntısını göz önüne alalım. O halde $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir kümedir. Ayrıca $G_p : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x, y, z \in X$ için $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda (X, G_p) , G_p -tam G_p -metrik uzaydır.

Şimdi, her $x \in X$ için $Tx = \frac{x}{6}$ ve $fx = \frac{3x}{4}$ eşitlikleri ile tanımlanan $T, f : X \rightarrow X$ dönüşümlerini düşünelim. Böylece Örnek 3.1'deki gibi benzer işlemler yapılarak f dönüşümünün birebir, alt dizisel yakınsak ve sürekli bir dönüşüm olduğu gösterilebilir. Ayrıca

T dönüşümü sürekli ve X üzerinde tanımlanan kısmi sıralama bağıntısına göre azalmayan bir dönüşümdür. Dahası $x_0 = 0$ için $x_0 \preceq Tx_0$ olur.

Diğer taraftan $x \geq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için

$$\max \left\{ \frac{G_p(fy, fTy, fTy) + G_p(fx, fTy, fTy)}{2G_p(fy, fTx, fTx)}, \frac{3y}{4} + \frac{3x}{4} \right\} = \frac{3y}{4} + \frac{3x}{4}$$

elde edilir. Böylece, $x \geq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $k = \frac{1}{6}$ için

$$G_p(fTx, fTy, fTy) = \max \left\{ \frac{x}{8}, \frac{y}{8} \right\} = \frac{x}{8} \leq \frac{1}{6} \left(\frac{3y}{4} + \frac{3x}{4} \right)$$

yazılabilir. Dolayısıyla, Sonuç 3.3'ün tüm şartları sağlanır ve $0, T$ dönüşümünün tek sabit noktası olur.

Son olarak, $0 \in F(T)$ için $fT0 = Tf0 = 0$ olduğundan (f, T) ikilisi Banach çiftidir. Bu ise 0 noktasının f ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğunu gösterir.

Sonuç 3.4. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü " $\preceq$ " bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun öyle ki kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $k \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ için

$$G_p(Tx, Ty, Ty) \leq k \max \left\{ \frac{G_p(y, Ty, Ty) + G_p(x, Ty, Ty)}{2G_p(y, Tx, Tx)}, \right\}$$

şartı sağlansın. Eğer $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ve

i. T, X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T 'nin sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: Sonuç 3.3'de $f = I$ alındığında ispat elde edilir.

Teorem 3.3. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T, S : X \rightarrow X$ dönüşümleri " $\preceq$ " bağıntısına göre zayıf artan iki dönüşüm olsun. $f : X \rightarrow X$

dönüşümü sürekli, birebir ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun öyle ki kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $a + b + 4k < 1$ olacak şekilde $a, b, k \geq 0$ sayıları için

$$G_p(fTx, fSy, fSy) \leq aG_p(fx, fy, fy) + bG_p(fy, fSy, fSy) + k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(fx, fSy, fSy) + G_p(fy, fTx, fTx) + G_p(fy, fTx, fSy), \\ 2G_p(fy, fSy, fSy) + G_p(fx, fSy, fSy) \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

şartı sağlansın. Eğer

i. T veya S , X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T ve S dönüşümleri X 'de bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T ve S 'nin ortak sabit noktasının tek olmasıdır. Eğer (f, T) ve (f, S) ikilileri Banach çifti ise f , T ve S dönüşümleri X uzayında tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x_n\}$ dizisi

$$x_{2n+1} = Tx_{2n} \quad \text{ve} \quad x_{2n+2} = Sx_{2n+1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde T ve S zayıf artan dönüşümler olduğundan

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_{2n+1} \preceq x_{2n+2} \preceq \cdots$$

elde edilir. Eğer $G_p(fx_{2N}, fx_{2N+1}, fx_{2N+1}) = 0$ olacak şekilde $N \in \mathbb{N}$ varsa x_{2N} , T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktası olur. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu

kabul edelim. (3.16) daralma şartı ile

$$\begin{aligned}
& G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) = G_p(fTx_{2n}, fSx_{2n+1}, fSx_{2n+1}) \\
& \leq aG_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) + bG_p(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, fSx_{2n+1}) \\
& + k \max \left\{ \begin{aligned} & G_p(fx_{2n}, fSx_{2n+1}, fSx_{2n+1}) + G_p(fx_{2n+1}, fTx_{2n}, fTx_{2n}) \\ & + G_p(fx_{2n+1}, fTx_{2n}, fSx_{2n+1}), \\ & 2G_p(fx_{2n+1}, fSx_{2n+1}, fSx_{2n+1}) + G_p(fx_{2n}, fSx_{2n+1}, fSx_{2n+1}) \end{aligned} \right\} \\
& = aG_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) + bG_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \\
& + k \max \left\{ \begin{aligned} & G_p(fx_{2n}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) + G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \\ & + G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+1}, fx_{2n+2}), \\ & 2G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) + G_p(fx_{2n}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \end{aligned} \right\} \\
& \leq aG_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) + bG_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \\
& + k \max \left\{ \begin{aligned} & G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) + G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \\ & + G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}), \\ & 2G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) + G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \\ & + G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \end{aligned} \right\} \\
& = (a + k)G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) + (b + 3k)G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2})
\end{aligned}$$

olup buradan

$$G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \leq \frac{a + k}{1 - b - 3k} G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1})$$

eşitsizliği elde edilir. Bu durumda $a + b + 4k < 1$ için $r = \frac{a + k}{1 - b - 3k}$ alınırsa $r \in [0, 1)$ ve

$$G_p(fx_{2n+1}, fx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \leq rG_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \quad (3.17)$$

olur. Benzer şekilde,

$$G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \leq \frac{a + b + 2k}{1 - 2k} G_p(fx_{2n-1}, fx_{2n}, fx_{2n})$$

olduğu gösterilebilir. Burada $a + b + 4k < 1$ için $h = \frac{a + b + 2k}{1 - 2k}$ alınırsa $h \in [0, 1)$ ve

$$G_p(fx_{2n}, fx_{2n+1}, fx_{2n+1}) \leq hG_p(fx_{2n-1}, fx_{2n}, fx_{2n}) \quad (3.18)$$

elde edilir. Bu durumda (3.17) ve (3.18) eşitsizliklerinden $\lambda = \max\{r, h\}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq \lambda G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n)$$

yazılabilir. Böylece tümevarımdan her $n \in \mathbb{N}$ ve $\lambda = \max\{r, h\}$ için

$$G_p(fx_n, fx_{n+1}, fx_{n+1}) \leq \lambda G_p(fx_{n-1}, fx_n, fx_n) \leq \dots \leq \lambda^n G_p(fx_0, fx_1, fx_1)$$

olur. Şu halde Teorem 3.1'in ispatındaki benzer işlemler yapılarak $n, m \rightarrow \infty$ için

$G_p(fx_n, fx_m, fx_m) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Bu ise $\{fx_n\}$ dizisinin X uzayında G_p -Cauchy dizisi olması demektir. Bu taktirde Lemma 2.5 den $\{fx_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve (X, G_p) uzayının tamlığı (X, d_{G_p}) metrik uzayının tamlığını gerektirir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_n, z) = 0 \quad (3.19)$$

olacak şekilde $z \in X$ noktası vardır ve Lemma 2.5 ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(fx_n, z, z) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(fx_n, fx_m, fx_m) = G_p(z, z, z) = 0$$

yazılabilir.

Diğer taraftan f dönüşümü (X, d_{G_p}) metrik uzayında alt dizisel yakınsak olduğundan, $\{x_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında yakınsak bir alt diziye sahiptir. Dolayısıyla $u \in X$ noktası ve $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi için

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_{n_i}, u) = 0$$

olur. Ayrıca, f sürekli bir dönüşüm olduğundan

$$\lim_{i \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_{n_i}, fu) = 0$$

yazılabilir. O halde (3.19) eşitliği ve metrik uzayda limit noktasının tekliği ile $fu = z$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G_p(fx_{n_i}, fu, fu) = G_p(fu, fu, fu) = 0$$

yazılabilir.

Şimdi, u noktasının T ve S dönüşümlerinin bir ortak sabit noktası olduğunu gösterelim.

- i. Eğer T, X üzerinde sürekli bir dönüşüm ise $i \rightarrow \infty$ için $Tx_{2n_i} \rightarrow Tu$ ve $fTx_{2n_i} \rightarrow fTu$ olur. Bu durumda, $i \rightarrow \infty$ için $fx_{n_i} \rightarrow fu$ olduğundan $fu = fTu$ olmalıdır. O halde, f birebir dönüşüm olduğundan $Tu = u$ elde edilir.

Şimdi $Su \neq u$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $u \preceq u$ olduğundan (3.16) ile

$$\begin{aligned}
G_p(fu, fSu, fSu) &= G_p(fTu, fSu, fSu) \\
&\leq aG_p(fu, fu, fu) + bG_p(fu, fSu, fSu) \\
&+ k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fu, fSu, fSu) + G_p(fu, fTu, fTu) + G_p(fu, fTu, fSu), \\ &2G_p(fu, fSu, fSu) + G_p(fu, fSu, fSu) \end{aligned} \right\} \\
&= (b + 3k)G_p(fu, fSu, fSu)
\end{aligned}$$

elde edilir ki $a + b + 4k < 1$ için bu bir çelişkidir. O halde $Su = u$ olmalıdır. S dönüşümü sürekli olduğunda da benzer şekilde işlem yapılabilir.

- ii. Eğer T ve S dönüşümleri X üzerinde sürekli değilse verilen hipotez ile $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{2n_i}\}$ ve $\{x_{2n_i+1}\}$ alt dizileri için $x_{2n_i} \preceq u$ ve $x_{2n_i+1} \preceq u$ yazılabilir. Bu durumda (3.16) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
G_p(fTu, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) &= G_p(fTu, fSx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}) \\
&\leq aG_p(fu, fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+1}) + bG_p(fx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}) \\
&+ k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fu, fSx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}) \\ &+ G_p(fx_{2n_i+1}, fTu, fTu) \\ &+ G_p(fx_{2n_i+1}, fTu, fSx_{2n_i+1}), \\ &2G_p(fx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}) \\ &+ G_p(fu, fSx_{2n_i+1}, fSx_{2n_i+1}) \end{aligned} \right\} \\
&= aG_p(fu, fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+1}) + bG_p(fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) \\
&+ k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fu, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) + G_p(fx_{2n_i+1}, fTu, fTu) \\ &+ G_p(fx_{2n_i+1}, fTu, fx_{2n_i+2}), \\ &2G_p(fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) + G_p(fu, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi burada gerekli olacak bir limit değerini bulalım. (G_{p_4}) aksiyomu ile

$$\begin{aligned}
G_p(fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+2}, fTu) &\leq G_p(fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) \\
&+ G_p(fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}, fTu)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
G_p(fu, fu, fTu) &\leq G_p(fu, fu, fx_{2n_i+1}) + G_p(fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+1}, fTu) \\
&\leq G_p(fu, fu, fx_{2n_i+1}) + G_p(fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+2}) \\
&\quad + G_p(fx_{2n_i+2}, fx_{2n_i+1}, fTu)
\end{aligned}$$

olup bu eşitsizliklerde $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{i \rightarrow \infty} G_p(fx_{2n_i+1}, fx_{2n_i+2}, fTu) = G_p(fu, fu, fTu)$$

bulunur.

O halde (3.20) ifadesinde $i \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$G_p(fTu, fu, fu) \leq 2kG_p(fu, fu, fTu)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu taktirde $(1 - 2k)G_p(fTu, fu, fu) \leq 0$ olur. Bu ise $(1 - 2k) > 0$ olduğundan $G_p(fTu, fu, fu) = 0$ olması ile mümkündür. O halde Lemma 2.3 ile $fu = fTu$ olup f birebir olduğundan $u = Tu$ elde edilir. T dönüşümü için uygulanan işlemlerin benzerleri S dönüşümü için uygulandığında u noktasının S dönüşümü için de bir sabit nokta olduğu görülür.

Bu durumda (i) ve (ii) den u , T ve S dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır.

Şimdi, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olduğunu kabul edelim. T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktasının tek olduğunu göstereceğiz. Aksi kabul edelim. Yani, $w \in X$ noktası T ve S dönüşümlerinin bir ortak sabit noktası ve $u \neq w$ olsun. O halde, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi iyi sıralı olduğundan u ve w kıyaslanabilir elemanlardır. Bu durumda (3.16) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
G_p(fw, fu, fu) &= G_p(fTw, fSu, fSu) \\
&\leq aG_p(fw, fu, fu) + bG_p(fu, fSu, fSu) \\
&\quad + k \max \left\{ \begin{aligned} &G_p(fw, fSu, fSu) + G_p(fu, fTw, fTw) \\ &\quad + G_p(fu, fTw, fSu), \\ &2G_p(fu, fSu, fSu) + G_p(fw, fSu, fSu) \end{aligned} \right\} \\
&= (a + 3k)G_p(fw, fu, fu)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $a + b + 4k < 1$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $u = w$ olmalıdır. Bu ise u noktasının T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olduğunu gösterir.

İspatın devamında Teorem 3.2'nin ispatındaki yöntem kullanılarak f, T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktaya sahip olduğu gösterilebilir.

Örnek 3.3. $X = [0, 1]$ olmak üzere her $x, y \in X$ için " $x \preceq y \Leftrightarrow x \geq y$ " ile tanımlı " $\preceq$ " sıralama bağıntısını göz önüne alalım. O halde $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir kümedir. Ayrıca $G_p : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x, y, z \in X$ için $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda (X, G_p) , G_p -tam G_p -metrik uzaydır.

Şimdi $Tx = \frac{x^2}{4}$, $Sx = \frac{x^2}{5}$ ve $fx = \frac{x}{2}$ eşitlikleri ile tanımlı $T, S, f : X \rightarrow X$ dönüşümlerini ele alalım. Bu durumda Örnek 3.1'deki ile benzer işlemler yapılarak f dönüşümünün birebir, alt dizisel yakınsak ve sürekli bir dönüşüm olduğu gösterilebilir. Ayrıca T ve S dönüşümlerinin sürekli dönüşümler olduğunda benzer şekilde gösterilebilir.

Şimdi, T ve S dönüşümlerinin zayıf artan dönüşümler olduklarını gösterelim. Her $x \in X$ için

$$STx = S\left(\frac{x^2}{4}\right) = \frac{1}{80}x^4 \leq \frac{1}{4}x^2 = Tx$$

elde edilir. Bu ise $Tx \preceq STx$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde $Sx \preceq TSx$ olduğu gösterilebilir.

Diğer taraftan $x \geq y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $a = \frac{1}{4}, b = k = 0$ için

$$G_p(fTx, fSy, fSy) = \frac{x^2}{8} \leq \frac{x}{8} = \frac{1}{4}G_p(fx, fy, fy)$$

elde edilir. Böylece Teorem 3.3'ün tüm şartları sağlanır ve 0 noktası T ve S dönüşümlerinin tek ortak sabit noktası olur.

Son olarak, $0 \in F(T)$ için $fT0 = Tf0 = 0$ ve $0 \in F(S)$ için $fS0 = Sf0 = 0$ olduğundan (f, T) ve (f, S) ikilileri Banach çiftidir. Dolayısıyla f, T ve S dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir ve bu nokta 0 dır.

Sonuç 3.5. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T, S : X \rightarrow X$ dönüşümleri " $\preceq$ " bağıntısına göre zayıf artan iki dönüşüm olsun öyle ki kıyasla-

nabilir her $x, y \in X$ ve $a + b + 4k < 1$ olacak şekildeki $a, b, k \geq 0$ sayıları için

$$G_p(Tx, Sy, Sy) \leq aG_p(x, y, y) + bG_p(y, Sy, Sy) \\ + k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(x, Sy, Sy) + G_p(y, Tx, Tx) + G_p(y, Tx, Sy), \\ 2G_p(y, Sy, Sy) + G_p(x, Sy, Sy) \end{array} \right\}$$

şartı sağlansın. Eğer

i. T veya S , X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T ve S dönüşümleri X 'de bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T ve S dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T ve S 'nin ortak sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: Teorem 3.3'de $f = I$ alınırsa ispat elde edilir.

Sonuç 3.6. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü " $\preceq$ " bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun. $f : X \rightarrow X$ dönüşümü sürekli, birebir ve alt dizisel yakınsak bir dönüşüm olsun öyle ki kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $a + b + 4k < 1$ olacak şekildeki $a, b, k \geq 0$ sayıları için

$$G_p(fTx, fTy, fTy) \leq aG_p(fx, fy, fy) + bG_p(fy, fTy, fTy) \\ + k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(fx, fTy, fTy) + G_p(fy, fTx, fTx) + G_p(fy, fTx, fTy) \\ 2G_p(fy, fTy, fTy) + G_p(fx, fTy, fTy) \end{array} \right\}$$

şartı sağlansın. Eğer $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ve

i. T , X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T 'nin sabit noktasının tek olmasıdır. Eğer (f, T) ikilisi Banach çifti ise f ve T dönüşümleri X uzayında bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.3’de $T = S$ alınır ise ispat kolayca elde edilir.

Sonuç 3.7. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ dönüşümü “ $\preceq$ ” bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun öyle ki kıyaslanabilir her $x, y \in X$ ve $a + b + 4k < 1$ olacak şekilde $a, b, k \geq 0$ sayıları için

$$G_p(Tx, Ty, Ty) \leq aG_p(x, y, y) + bG_p(y, Ty, Ty) + k \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(x, Ty, Ty) + G_p(y, Tx, Tx) + G_p(y, Tx, Ty) \\ 2G_p(y, Ty, Ty) + G_p(x, Ty, Ty) \end{array} \right\}$$

şartı sağlansın. Eğer $x_0 \preceq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ var ve

i. T, X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X ’de azalmayan bir dizi ve $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise T dönüşümü X ’de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, T dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart T ’nin sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: Eğer Sonuç 3.6’da $f = I$ alınır ise ispat elde edilir.

3.2. Kısmi Sıralı G_p -Metrik Uzaylarda Genelleştirilmiş Berinde-Tipi Daralma Dönüşümleri

Bu kısımda, Berinde tarafından tanımlanan hemen hemen daralma dönüşümü ve (φ, L) -zayıf daralma dönüşümü kavramları göz önüne alınarak bu kavramların bazı genelleştirmeleri için kısmi sıralı G_p -tam G_p -metrik uzaylarda ortak sabit nokta teoremleri ve bu teoremlerin sonuçları incelenmiştir. Aynı zamanda, elde edilen sonuçları destekleyen bazı örnekler verilmiştir. Bu kısımda elde edilen orjinal sonuçlar literatürde bulunan bir çok çalışmayı ve özellikle [47, 49–51] referanslı çalışmaları genelleştirir.

Teorem 3.4. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri “ $\preceq$ ” bağıntısına göre zayıf artan iki dönüşüm olsun. Ayrıca ψ uzaklıkları değiştiren bir fonksiyon ve $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu “ $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ” şartını sağlayan alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki

$$u(x, y, y) \in \left\{ \begin{array}{c} G_p(x, y, y), G_p(x, fx, fx), G_p(y, gy, gy), \\ \frac{1}{2}[G_p(x, gy, gy) + G_p(y, fx, fx)] \end{array} \right\}$$

ve

$$N(x, y) = \min\{d_{G_p}(x, y), d_{G_p}(x, fx), d_{G_p}(y, gy), d_{G_p}(x, gy), d_{G_p}(y, fx)\}$$

olmak üzere kıyaslanabilir her $x, y \in X$ için

$$\psi(G_p(fx, gy, gy)) \leq \psi(\lambda u(x, y, y)) - \phi(\lambda u(x, y, y)) + LN(x, y) \quad (3.21)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ sabitleri var olsun. Eğer

i. f veya g , X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi olmak üzere $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise f ve g dönüşümleri X 'de bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart f ve g 'nin ortak sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{2n+1} = fx_{2n} \text{ ve } x_{2n+2} = gx_{2n+1}$$

olacak şekilde X uzayında bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Böylece f ve g dönüşümleri “ $\preceq$ ” bağıntısına göre zayıf artan dönüşümler olduğundan

$$x_1 = fx_0 \preceq gfx_0 = gx_1 = x_2 \preceq fgx_1 = fx_2 = x_3,$$

$$x_3 = fx_2 \preceq gfx_2 = gx_3 = x_4 \preceq fgx_3 = fx_4 = x_5$$

yazılabilir. O halde tümevarım ile

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq x_{n+1} \preceq \cdots$$

elde edilir. Şimdi bazı n doğal sayıları için $G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda genelliği bozmaksızın $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k$ alınabilir. Böylece

$G_p(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}) = 0$ olur. Bu ise $x_{2k} = x_{2k+1} = fx_{2k}$ olması demektir. Ayrıca

kabul edelim ki $G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) > 0$ olsun. Bu taktirde x_{2k} ve x_{2k+1} terimleri kıyaslanabilir olduğundan (3.21) daralma şartı ile

$$\begin{aligned} u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}) &\in \left\{ \begin{array}{c} G_p(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}), G_p(x_{2k}, f x_{2k}, f x_{2k}), \\ G_p(x_{2k+1}, g x_{2k+1}, g x_{2k+1}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_{2k}, g x_{2k+1}, g x_{2k+1}) + G_p(x_{2k+1}, f x_{2k}, f x_{2k})] \end{array} \right\} \\ &= \left\{ 0, G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}), \frac{1}{2}G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) \right\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N(x_{2k}, x_{2k+1}) &= \min \left\{ \begin{array}{c} d_{G_p}(x_{2k}, x_{2k+1}), d_{G_p}(x_{2k}, f x_{2k}), d_{G_p}(x_{2k+1}, g x_{2k+1}), \\ d_{G_p}(x_{2k}, g x_{2k+1}), d_{G_p}(x_{2k+1}, f x_{2k}) \end{array} \right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})) &= \psi(G_p(f x_{2k}, g x_{2k+1}, g x_{2k+1})) \\ &\leq \psi(\lambda u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1})) \\ &\quad - \phi(\lambda u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1})) + LN(x_{2k}, x_{2k+1}) \\ &= \psi(\lambda u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1})) \\ &\quad - \phi(\lambda u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1})) \end{aligned} \tag{3.22}$$

elde edilir.

Şimdi (3.22) eşitsizliğini $u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1})$ ifadesinin üç farklı durumu için inceleyelim.

Eğer $u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}) = 0$ ise (3.22) eşitsizliğinden

$$\psi(G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})) \leq 0$$

elde edilir. Böylece $G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

Eğer $u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}) = G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})$ ise (3.22) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})) &\leq \psi(\lambda G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})) \\ &\quad - \phi(\lambda G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})) \\ &< \psi(\lambda G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})) \end{aligned}$$

elde edilir. ψ azalmayan bir dönüşüm olduğundan

$$G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) < \lambda G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})$$

yazılabilir. Bu ise imkansızdır.

Eğer $u(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}) = \frac{1}{2}G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})$ ise (3.22) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})) &\leq \psi\left(\frac{\lambda}{2}G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})\right) \\ &\quad - \phi\left(\frac{\lambda}{2}G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})\right) \\ &\leq \psi\left(\frac{\lambda}{2}G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda ψ azalmayan bir dönüşüm olduğundan

$$G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) \leq \frac{\lambda}{2}G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})$$

elde edilir. $\lambda \in [0, 1]$ olduğu için bu bir çelişkidir.

Dolayısıyla üç durumda da çelişki elde ettiğimiz için kabulümüz yanlış olup

$G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) = 0$ yani $x_{2k+1} = x_{2k+2} = gx_{2k+1}$ olduğu sonucuna varılır. Bu durumda $x_{2k} = x_{2k+1}$ noktası g dönüşümünün bir sabit noktası olur. Böylece $x_{2k} = x_{2k+1}$ noktası f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) \leq G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})$$

olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim. Yani

$$G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) > G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})$$

olsun. O halde (3.21) daralma şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} u(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) &\in \left\{ \begin{array}{l} G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}), G_p(x_{2n}, fx_{2n}, fx_{2n}), \\ G_p(x_{2n+1}, gx_{2n+1}, gx_{2n+1}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_{2n}, gx_{2n+1}, gx_{2n+1}) + G_p(x_{2n+1}, fx_{2n}, fx_{2n})] \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}), G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+1}, x_{2n+1})] \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ve

$$N(x_{2n}, x_{2n+1}) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_{G_p}(x_{2n}, x_{2n+1}), d_{G_p}(x_{2n}, fx_{2n}), d_{G_p}(x_{2n+1}, gx_{2n+1}), \\ d_{G_p}(x_{2n}, gx_{2n+1}), d_{G_p}(x_{2n+1}, fx_{2n}) \end{array} \right\} \\ = 0$$

için

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})) &= \psi(G_p(fx_{2n}, gx_{2n+1}, gx_{2n+1})) \\ &\leq \psi(\lambda u(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \\ &\quad - \phi(\lambda u(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) + LN(x_{2n}, x_{2n+1}) \\ &= \psi(\lambda u(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \\ &\quad - \phi(\lambda u(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir.

Eğer $u(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) = G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})$ ise (3.23) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})) &\leq \psi(\lambda G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \\ &\quad - \phi(\lambda G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \\ &< \psi(\lambda G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda ψ azalmayan bir dönüşüm olduğundan

$$G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) < \lambda G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})$$

yazılabilir. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Eğer $u(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) = G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})$ ise (3.23) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})) &\leq \psi(\lambda G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})) \\ &\quad - \phi(\lambda G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})) \\ &< \psi(\lambda G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) < \lambda G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})$$

bulunur. Bu ise imkansızdır.

Son olarak

$$u(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) = \frac{1}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+1}, x_{2n+1})]$$

ise (3.23) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \psi(G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})) \\ & \leq \psi\left(\frac{\lambda}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+1}, x_{2n+1})]\right) \\ & - \phi\left(\frac{\lambda}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+1}, x_{2n+1})]\right) \\ & \leq \psi\left(\frac{\lambda}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+1}, x_{2n+1})]\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ψ azalmayan bir dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) & \leq \frac{\lambda}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+1}, x_{2n+1})] \\ & \leq \frac{\lambda}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})] \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) \leq \frac{\lambda}{2 - \lambda} G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})$$

eşitsizliği elde edilir. Fakat $G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) > G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır, yani

$$G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) \leq G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})$$

olmalıdır. Benzer şekilde

$$G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) \leq G_p(x_{2n-1}, x_{2n}, x_{2n})$$

olduğu gösterilebilir.

Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) \leq G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$$

yazılabilir. Buradan azalan ve alttan sınırlı $\{G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$ reel sayı dizisi elde edilir. Bu ise $\{G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})\}$ dizisinin yakınsak olduğunu gösterir. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = r \quad (3.24)$$

olacak şekilde $r \geq 0$ sayısı vardır. Şimdi $r > 0$ olduğunu kabul edelim. Eğer n çift ise (3.21) daralma şartından

$$u(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \in \left\{ \begin{array}{l} G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})] \end{array} \right\}$$

ve

$$N(x_n, x_{n+1}) = \min \left\{ \begin{array}{l} d_{G_p}(x_n, x_{n+1}), d_{G_p}(x_{n+1}, x_{n+2}), \\ d_{G_p}(x_n, x_{n+2}), d_{G_p}(x_{n+1}, x_{n+1}) \end{array} \right\} = 0$$

için

$$\psi(G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) \leq \psi(\lambda u(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})) - \phi(\lambda u(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})) \quad (3.25)$$

elde edilir. n tek olduğu durumda da benzer şekilde (3.25) eşitsizliği elde edilir.

Eğer $u(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \in \{G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})\}$ ise ψ sürekli ve ϕ alttan yarı sürekli fonksiyon olduğu için (3.24) eşitliği kullanılarak (3.25) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için alt limit alınırsa

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(\lambda u(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(\lambda u(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})) \\ &\leq \psi(\lambda r) - \phi(\lambda r) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lambda = 0$ ise $\psi(r) = 0$ dolayısıyla $r = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. $\lambda \neq 0$ ise

$$\phi(\lambda r) \leq \psi(\lambda r) - \psi(r) \leq 0$$

elde edilir. O halde $\phi(\lambda r) = 0$ yani $r = 0$ olur. $r > 0$ olduğundan bu bir çelişkidir.

$$\begin{aligned} \text{Eğer } u(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) &= \frac{1}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})] \text{ ise} \\ \psi(G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) &\leq \psi\left(\frac{\lambda}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})]\right) \\ &\quad - \phi\left(\frac{\lambda}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})]\right) \\ &\leq \psi\left(\frac{\lambda}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})]\right) \\ &\leq \psi\left(\frac{\lambda}{2}[G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})]\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

elde edilir. Burada λ için iki farklı durumu incelememiz gerekir.

Eğer $\lambda < 1$ ise ψ sürekli bir fonksiyon olduğundan (3.26) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\psi(r) \leq \psi(\lambda r)$$

bulunur. $r > 0$ olduğu için bu bir çelişkidir.

Eğer $\lambda = 1$ ise (3.26) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) &\leq \psi\left(\frac{G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})}{2}\right) \\ &\leq \psi\left(\frac{G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned} \psi(r) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})}{2}\right) \\ &\leq \psi(r) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})}{2}\right) = \psi(r)$$

olması demektir. ψ sürekli bir fonksiyon olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})] = 2r \quad (3.27)$$

yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) &\leq \psi\left(\frac{1}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})]\right) \\ &\quad - \phi\left(\frac{1}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})]\right) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ için alt limit alınır ve (3.27) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi(G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2})) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \psi\left(\frac{1}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})]\right) \\ &\quad - \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\frac{1}{2}[G_p(x_n, x_{n+2}, x_{n+2}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1})]\right) \\ &\leq \psi(r) - \phi(r) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\phi(r) \leq 0$ olması demektir. Dolayısıyla $\phi(r) = 0$ yani $r = 0$ olup bu bir çelişkidir.

O halde bütün durumlarda çelişki elde ettiğimiz için kabulümüz yanlıştır. Bu taktirde $r = 0$ olmalıdır. Böylelikle

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0 \quad (3.28)$$

yazılabilir.

Ayrıca $G_p(x_n, x_n, x_n) \leq G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$ olduğu için (3.28) eşitliği ile her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_n, x_n) = 0 \quad (3.29)$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned} d_{G_p}(x_n, x_{n+1}) &= G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G_p(x_{n+1}, x_n, x_n) - G_p(x_n, x_n, x_n) \\ &\quad - G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_{n+1}) \end{aligned}$$

eşitliğinde (3.28) ve (3.29) göz önünde bulundurularak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_n, x_{n+1}) = 0$$

olur.

Şimdi, $\lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$\lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x_{2n}, x_{2m}, x_{2m}) = 0$, yani $\{x_{2n}\}$ dizisinin X uzayında G_p -Cauchy dizisi olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $\{x_{2n}\}$ dizisi X uzayında G_p -Cauchy dizisi olmasın. O halde en az bir $\varepsilon > 0$ vardır öyle ki her k tam sayısı için $m(k) > n(k) \geq k$ ve

$$G_p(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \geq \varepsilon \quad (3.30)$$

olacak şekilde $\{x_{2n}\}$ dizisinin $\{x_{2n(k)}\}$ ve $\{x_{2m(k)}\}$ alt dizileri bulunabilir. Burada $m(k)$ sayısını (3.30) eşitsizliğini sağlayan $m(k) > n(k)$ olacak şekildeki en küçük pozitif tam sayı olarak seçebiliriz. Dolayısıyla

$$G_p(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) < \varepsilon \quad (3.31)$$

yazılabilir. Böylece (3.30), (3.31) ve dikdörtgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq G_p(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \\
&\leq G_p(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) + G_p(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \\
&\leq G_p(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}) + G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) \\
&\quad + G_p(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \\
&\leq G_p(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}) + G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \\
&\quad + G_p(x_{2m(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) + G_p(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \\
&\leq G_p(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}) + G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)}, x_{2n(k)}) \\
&\quad + G_p(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) + G_p(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \\
&\quad + G_p(x_{2m(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) + G_p(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \\
&< 2G_p(x_{2n(k)}, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}) + \varepsilon + 3G_p(x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)})
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınıp (3.28) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} G_p(x_{2n(k)}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) &= \lim_{k \rightarrow \infty} G_p(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) \\
&= \lim_{k \rightarrow \infty} G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)}) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $u(x, y, y)$ ve $N(x, y)$ tanımları ile birlikte yukarıda elde edilen limit değerleri göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
&u(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) \in \\
&\left\{ \begin{aligned} &G_p(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}), G_p(x_{2n(k)}, f x_{2n(k)}, f x_{2n(k)}), \\ &G_p(x_{2m(k)-1}, g x_{2m(k)-1}, g x_{2m(k)-1}), \\ &\frac{1}{2}[G_p(x_{2n(k)}, g x_{2m(k)-1}, g x_{2m(k)-1}) + G_p(x_{2m(k)-1}, f x_{2n(k)}, f x_{2n(k)})] \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

ve

$$N(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}) = \min \left\{ \begin{aligned} &d_{G_p}(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}), d_{G_p}(x_{2n(k)}, f x_{2n(k)}), \\ &d_{G_p}(x_{2m(k)-1}, g x_{2m(k)-1}), d_{G_p}(x_{2n(k)}, g x_{2m(k)-1}), \\ &d_{G_p}(x_{2m(k)-1}, f x_{2n(k)}) \end{aligned} \right\}$$

olmak üzere $k \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1}) \in \{\varepsilon, 0\}$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}) = 0$$

elde edilir. Ayrıca, $x_{2n(k)}$ ve $x_{2m(k)-1}$ kıyaslanabilir elemanlar olduğundan (3.21) daralma şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} \psi(G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)})) &= \psi(G_p(fx_{2n(k)}, gx_{2m(k)-1}, gx_{2m(k)-1})) \\ &\leq \psi(\lambda u(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1})) \\ &\quad - \phi(\lambda u(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1})) \\ &\quad + LN(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ϕ fonksiyonunun alttan yarı sürekli olduğu ve yukarıda elde edilen limit değerleri göz önünde bulundurularak $k \rightarrow \infty$ için alt limit alınır

$$\begin{aligned} \psi(\varepsilon) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \psi(G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2m(k)}, x_{2m(k)})) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \psi(\lambda u(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1})) \\ &\quad - \liminf_{k \rightarrow \infty} \phi(\lambda u(x_{2n(k)}, x_{2m(k)-1}, x_{2m(k)-1})) \\ &\leq \psi(\lambda \varepsilon) - \phi(\lambda \varepsilon) \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\lambda = 0$ ise $\psi(\varepsilon) = 0$ ve dolayısıyla $\varepsilon = 0$ olur. Bu ise $\varepsilon > 0$ olmasıyla çelişir. $\lambda \neq 0$ ise

$$\phi(\lambda \varepsilon) \leq \psi(\lambda \varepsilon) - \psi(\varepsilon) \leq 0$$

olur. Buradan $\phi(\lambda \varepsilon) = 0$ ve dolayısıyla $\varepsilon = 0$ elde edilir. Bu ise imkansızdır.

Sonuç olarak kabulümüz yanlış olup $\lim_{n,m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = 0$ elde edilir. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin X uzayında G_p -Cauchy dizisi olması demektir. Dolayısıyla Lemma 2.5 den $\{x_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve ayrıca (X, G_p) uzayının tamlığı (X, d_{G_p}) uzayının tamlığını gerektirir. Bu ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_n, z) = 0 \quad (3.32)$$

olacak şekilde bir $z \in X$ noktasının var olduğunu gösterir. Böylece Lemma 2.5 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, z, z) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = G_p(z, z, z) = 0$$

elde edilir.

Şimdi z noktasının f ve g dönüşümlerinin bir ortak sabit noktası olduğunu gösterelim.

- i. Eğer f, X üzerinde sürekli bir dönüşüm ise (3.32) eşitliğinden $n \rightarrow \infty$ iken $fx_{2n} \rightarrow fz$ olur. Ayrıca $x_{2n+1} \rightarrow z$ olduğundan metrik uzayda limit noktasının tekliği ile $fz = z$ bulunur.

Şimdi $gz \neq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z \preceq z$ olduğu için (3.21) şartı ile

$$u(z, z, z) \in \left\{ 0, G_p(z, gz, gz), \frac{G_p(z, gz, gz)}{2} \right\} \quad \text{ve} \quad N(z, z) = 0$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi(G_p(z, gz, gz)) &= \psi(G_p(fz, gz, gz)) \\ &\leq \psi(\lambda u(z, z, z)) - \phi(\lambda u(z, z, z)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $u(z, z, z) = 0$ ise $\psi(G_p(z, gz, gz)) = 0$ olur. Buradan $G_p(z, gz, gz) = 0$, yani $z = gz$ elde edilir. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Eğer $u(z, z, z) = G_p(z, gz, gz)$ veya $u(z, z, z) = \frac{G_p(z, gz, gz)}{2}$ ise

$$\psi(G_p(z, gz, gz)) < \psi(\lambda G_p(z, gz, gz))$$

veya

$$\psi(G_p(z, gz, gz)) < \psi\left(\frac{\lambda}{2} G_p(z, gz, gz)\right)$$

elde edilir. Bu ise imkansızdır.

Dolayısıyla her üç durum için de çelişki elde ettiğimizden kabulümüz yanlıştır. O halde $z = gz$ olmalıdır. g sürekli olduğunda da benzer şekilde ispat yapılabilir.

- ii. Şimdi f ve g dönüşümlerinin sürekli olmadığını kabul edelim. Şu halde hipotezden her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$ olur. Bu durumda x_n dizisinin $\{x_{2n(k)}\}$ ve $\{x_{2n(k)+1}\}$ alt dizileri için $x_{2n(k)} \preceq z$ ve $x_{2n(k)+1} \preceq z$ yazılabilir. Dolayısıyla (3.21) şartından

$$\begin{aligned} \psi(G_p(fz, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2})) &= \psi(G_p(fz, gx_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1})) \\ &\leq \psi(\lambda u(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1})) \\ &\quad - \phi(\lambda u(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1})) \\ &\quad + LN(z, x_{2n(k)+1}) \end{aligned} \quad (3.33)$$

elde edilir. Burada

$$u(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}) \in \left\{ \begin{array}{c} G_p(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}), G_p(z, fz, fz), \\ G_p(x_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}), \\ \frac{1}{2}[G_p(z, gx_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}) + G_p(x_{2n(k)+1}, fz, fz)] \end{array} \right\}$$

ve

$$N(z, x_{2n(k)+1}) = \min \left\{ \begin{array}{c} d_{G_p}(z, x_{2n(k)+1}), d_{G_p}(x_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}), \\ d_{G_p}(z, fz), d_{G_p}(z, gx_{2n(k)+1}), \\ d_{G_p}(x_{2n(k)+1}, fz) \end{array} \right\}$$

olur. Bu ifadelerde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}) \in \left\{ 0, G_p(z, fz, fz), \frac{G_p(z, fz, fz)}{2} \right\}$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N(z, x_{2n(k)+1}) = 0$$

elde edilir. Şu halde ψ fonksiyonunun sürekli ve ϕ fonksiyonunun alttan yarı sürekli olduğu göz önünde bulundurularak (3.33) eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ için alt limit alınırsa

$$\begin{aligned} \psi(G_p(fz, z, z)) &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \psi(G_p(fz, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2})) \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \psi(\lambda u(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1})) \\ &\quad - \liminf_{k \rightarrow \infty} \phi(\lambda u(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1})) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $G_p(z, fz, fz) \neq 0$ ise

$$\psi(G_p(fz, z, z)) < \psi(\lambda G_p(fz, z, z))$$

veya

$$\psi(G_p(fz, z, z)) < \psi\left(\frac{\lambda}{2} G_p(fz, z, z)\right)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $G_p(z, fz, fz) = 0$, yani $z = fz$ olmalıdır.

Benzer şekilde (3.21) şartında her n için $x = x_{2n(k)}$ ve $y = z$ alınırsa $z = gz$ elde edilir. Şu halde z , f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Şimdi f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olduğunu kabul edelim. Şu halde f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktası tektir. Aksini iddia edelim. Yani w , f ve g dönüşümlerinin z noktasından farklı bir ortak sabit noktası olsun. Bu durumda z ve w kıyaslanabilir elemanlar olduğundan (3.21) şartı kullanılarak

$$u(z, w, w) \in \{0, G_p(z, w, w)\} \quad \text{ve} \quad N(z, w) = 0$$

için

$$\begin{aligned} \psi(G_p(z, w, w)) &= \psi(G_p(fz, gw, gw)) \\ &\leq \psi(\lambda u(z, w, w)) - \phi(\lambda u(z, w, w)) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $u(z, w, w)$ ifadesinin her iki durumu için de çelişki olacağından kabulümüz yanlıştır. Bu durumda $z = w$ olmalıdır.

Tersine, f ve g dönüşümlerinin tek ortak sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda, f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi tek elemanlı olup iyi sıralıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.8. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri “ $\preceq$ ” bağıntısına göre zayıf artan iki dönüşüm olsun. Ayrıca ψ uzaklıkları değiştiren bir fonksiyon ve $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu “ $\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ ” şartını sağlayan alttan yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki

$$M(x, y, y) = \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(x, y, y), G_p(x, fx, fx), G_p(y, gy, gy), \\ \frac{1}{2}[G_p(x, gy, gy) + G_p(y, fx, fx)] \end{array} \right\}$$

ve

$$N(x, y) = \min\{d_{G_p}(x, y), d_{G_p}(x, fx), d_{G_p}(y, gy), d_{G_p}(x, gy), d_{G_p}(y, fx)\}$$

olmak üzere kıyaslanabilir her $x, y \in X$ için

$$\psi(G_p(fx, gy, gy)) \leq \psi(\lambda M(x, y, y)) - \phi(\lambda M(x, y, y)) + LN(x, y)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ sabitleri var olsun. Eğer

i. f veya g , X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi olmak üzere $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise f ve g dönüşümleri X 'de bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart f ve g 'nin ortak sabit noktasının tek olmasıdır.

Örnek 3.4. $X = [0, 1]$ kümesi üzerinde " $x \preceq y \Leftrightarrow y \leq x$ " ile tanımlı " $\preceq$ " sıralama bağıntısını göz önüne alalım. O halde $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir kümedir. Ayrıca $G_p : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x, y, z \in X$ için $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzaydır ve her $x, y \in X$ için $d_{G_p}(x, y) = |x - y|$ olur.

Şimdi, sırasıyla

$$\psi(t) = t \quad \text{ve} \quad \phi(t) = \frac{t}{1+t}$$

eşitlikleri ile tanımlanan $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ve $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonlarını ele alalım. Açık olarak ψ uzaklıkları değiştiren bir fonksiyon ve ϕ fonksiyonu " $\phi(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$ " özelliğini sağlayan alttan yarı sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri sırasıyla

$$fx = \frac{x^2}{1+x} \quad \text{ve} \quad gx = 0$$

eşitlikleri ile tanımlansın. Bu durumda her $x \in X$ için

$$f(gx) = f(0) = 0 \leq gx$$

olduğundan $gx \preceq fgx$ elde edilir. Aynı zamanda

$$g(fx) = g\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = 0 \leq \frac{x^2}{1+x} = fx$$

olduğundan $fx \preceq gfx$ bulunur. Böylece f ve g , zayıf artan iki dönüşümdür. Dahası f dönüşümü standart metriğe ve G_p -metriğe göre X uzayında sürekli bir dönüşümdür. Gerçekten de; $\{x_n\}$, (X, G_p) uzayında $x \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x, x) = G_p(x, x, x) = x$$

elde edilir. Bu durumda f fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(fx_n, fx, fx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{fx_n, fx\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{\frac{x_n^2}{1+x_n}, \frac{x^2}{1+x}\right\} \\ &= \frac{x^2}{1+x} \\ &= G_p(fx, fx, fx)\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\{fx_n\}$, (X, G_p) uzayında fx noktasına yakınsar.

Diğer taraftan, $\{x_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) uzayında $x \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$$

olur. O halde f fonksiyonunun tanımı ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_n, fx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n^2}{1+x_n} - \frac{x^2}{1+x} \right| = 0$$

bulunur. Bu ise $\{fx_n\}$ dizisinin (X, d_{G_p}) metrik uzayında fx noktasına yakınsadığını gösterir.

Ayrıca $y \leq x$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$M(x, y, y) = \max\left\{x, x, y, \frac{x + \max\{y, \frac{x^2}{1+x}\}}{2}\right\}$$

olup $M(x, y, y) = x$ bulunur. Böylece her $L \geq 0$ ve $\lambda = 1$ için

$$\begin{aligned}\psi(G_p(fx, gy, gy)) &= \max\left\{\frac{x^2}{1+x}, 0\right\} = \frac{x^2}{1+x} = x - \frac{x}{1+x} \\ &= \psi(M(x, y, y)) - \phi(M(x, y, y)) \\ &\leq \psi(M(x, y, y)) - \phi(M(x, y, y)) + LN(x, y)\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla Sonuç 3.8'in bütün şartları sağlanır. O halde f ve g dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahiptir. Açıkça görüldüğü gibi 0, f ve g dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

Sonuç 3.8'de özel olarak $L = 0$ ve $\lambda = 1$ alınırsa Barakat ve Zidan tarafından hazırlanan [23] referanslı çalışmanın bir sonucu olan Teorem 2.1, her $t \in [0, \infty)$ için $\psi(t) = t$, $L = 0$ ve $\lambda = 1$ alınırsa Sonuç 2.1 ve $\psi(t) = t$, $k \in [0, 1)$ için $\phi(t) = (1 - k)t$, $L = 0$ ve $\lambda = 1$ alınırsa Sonuç 2.4 elde edilir.

Sonuç 3.9. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri “ $\preceq$ ” bağıntısına göre zayıf artan iki dönüşüm olsun. Kabul edelim ki

$$u(x, y, y) \in \left\{ \begin{array}{l} G_p(x, y, y), G_p(x, fx, fx), G_p(y, gy, gy), \\ \frac{1}{2}[G_p(x, gy, gy) + G_p(y, fx, fx)] \end{array} \right\}$$

ve

$$N(x, y) = \min\{d_{G_p}(x, y), d_{G_p}(x, fx), d_{G_p}(y, gy), d_{G_p}(x, gy), d_{G_p}(y, fx)\}$$

olmak üzere kıyaslanabilir her $x, y \in X$ için

$$G_p(fx, gy, gy) \leq \alpha u(x, y, y) + LN(x, y)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ sabitleri var olsun. Eğer

i. f veya g , X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi olmak üzere $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise f ve g dönüşümleri X 'de bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart f ve g 'nin ortak sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: Teorem 3.4'ün ifadesinde $\psi(t) = t$ ve $k \in [0, 1)$ için $\phi(t) = (1 - k)t$ alınıp benzer metot uygulanarak ispat elde edilir.

Sonuç 3.10. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ dönüşümü “ $\preceq$ ” bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki

$$u(x, y, y) \in \left\{ \begin{array}{l} G_p(x, y, y), G_p(x, fx, fx), G_p(y, fy, fy), \\ \frac{1}{2}[G_p(x, fy, fy) + G_p(y, fx, fx)] \end{array} \right\}$$

ve

$$N(x, y) = \min\{d_{G_p}(x, y), d_{G_p}(x, fx), d_{G_p}(y, fy), d_{G_p}(x, fy), d_{G_p}(y, fx)\}$$

olmak üzere kıyaslanabilir her $x, y \in X$ için

$$G_p(fx, fy, fy) \leq \alpha u(x, y, y) + LN(x, y)$$

olacak şekilde $L \geq 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ sabitleri var olsun. Eğer $x_0 \in X$ için $x_0 \preceq fx_0$ ve

i. f, X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi olmak üzere $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise f dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca f dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart f dönüşümünün sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: Eğer Sonuç 3.9'da $f = g$ alınırsa ispat elde edilir.

Teorem 3.5. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri " $\preceq$ " bağıntısına göre zayıf artan iki dönüşüm olsun. Kabul edelim ki φ bir (c) -kıyaslama fonksiyonu, $L \geq 0$ ve

$$M(x, y, y) = \max \left\{ G_p(x, y, y), G_p(x, fx, fx), G_p(y, gy, gy), \frac{1}{2}[G_p(x, gy, gy) + G_p(y, fx, fx)] \right\}$$

olmak üzere kıyaslanabilir her $x, y \in X$ için

$$G_p(fx, gy, gy) \leq \varphi(M(x, y, y)) + L \min \left\{ d_{G_p}(x, y), d_{G_p}(x, fx), d_{G_p}(y, gy), d_{G_p}(x, gy), d_{G_p}(y, fx) \right\} \quad (3.34)$$

şartı sağlansın. Eğer

i. f veya g , X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi olmak üzere $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$

ise f ve g dönüşümleri X 'de bir ortak sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart f ve g 'nin ortak sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_{2n+1} = fx_{2n} \text{ ve } x_{2n+2} = gx_{2n+1}$$

olacak şekilde X 'de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Böylece, f ve g dönüşümleri “ $\preceq$ ” bağıntısına göre zayıf artan dönüşümler olduğundan tümevarım ile

$$x_1 \preceq x_2 \preceq \cdots \preceq x_n \preceq x_{n+1} \preceq \cdots$$

bulunur. Şimdi bazı n doğal sayıları için $G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda genelliği bozmaksızın $k \in \mathbb{N}$ için $n = 2k$ alınabilir. O halde

$G_p(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}) = 0$ olur. Bu ise $x_{2k} = x_{2k+1} = fx_{2k}$ olması demektir. Ayrıca $G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde x_{2k} ve x_{2k+1} terimleri kıyaslanabilir olduğundan (3.34) şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) &= G_p(fx_{2k}, gx_{2k+1}, gx_{2k+1}) \\ &\leq \varphi(M(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1})) \\ &\quad + L \min \left\{ \begin{array}{l} d_{G_p}(x_{2k}, x_{2k+1}), d_{G_p}(x_{2k}, fx_{2k}), \\ d_{G_p}(x_{2k+1}, gx_{2k+1}), d_{G_p}(x_{2k}, gx_{2k+1}), \\ d_{G_p}(x_{2k+1}, fx_{2k}) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} &M(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}) \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}), G_p(x_{2k}, fx_{2k}, fx_{2k}), \\ G_p(x_{2k+1}, gx_{2k+1}, gx_{2k+1}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_{2k}, gx_{2k+1}, gx_{2k+1}) + G_p(x_{2k+1}, fx_{2k}, fx_{2k})] \end{array} \right\} \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(x_{2k}, x_{2k+1}, x_{2k+1}), G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_{2k}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) + G_p(x_{2k+1}, x_{2k+1}, x_{2k+1})] \end{array} \right\} \\ &= G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) \end{aligned}$$

için (3.35) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) &\leq \varphi(G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2})) \\ &< G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) \end{aligned}$$

olur ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. O halde

$G_p(x_{2k+1}, x_{2k+2}, x_{2k+2}) = 0$ ve böylece $x_{2k+1} = x_{2k+2} = gx_{2k+1}$ bulunur. Bu ise $x_{2k} = x_{2k+1}$ noktasının f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğu anlamına gelir.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. (3.34) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) &= G_p(fx_{2n}, gx_{2n+1}, gx_{2n+1}) \\
&\leq \varphi(M(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \\
&\quad + L \min \left\{ \begin{array}{c} d_{G_p}(x_{2n}, x_{2n+1}), d_{G_p}(x_{2n}, fx_{2n}), \\ d_{G_p}(x_{2n+1}, gx_{2n+1}), d_{G_p}(x_{2n}, gx_{2n+1}), \\ d_{G_p}(x_{2n+1}, fx_{2n}) \end{array} \right\} \\
&= \varphi(M(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \\
&\quad + L \min \left\{ \begin{array}{c} d_{G_p}(x_{2n}, x_{2n+1}), d_{G_p}(x_{2n+1}, x_{2n+2}), \\ d_{G_p}(x_{2n}, x_{2n+2}), d_{G_p}(x_{2n+1}, x_{2n+1}) \end{array} \right\} \\
&= \varphi(M(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \tag{3.36}
\end{aligned}$$

elde edilir ki burada

$$\begin{aligned}
&M(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) \\
&= \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}), G_p(x_{2n}, fx_{2n}, fx_{2n}), \\ G_p(x_{2n+1}, gx_{2n+1}, gx_{2n+1}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_{2n}, gx_{2n+1}, gx_{2n+1}) + G_p(x_{2n+1}, fx_{2n}, fx_{2n})] \end{array} \right\} \\
&= \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}), G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+1}, x_{2n+1})] \end{array} \right\} \\
&\leq \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}), G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}), \\ \frac{1}{2}[G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) + G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})] \end{array} \right\} \\
&= \max\{G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}), G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})\}
\end{aligned}$$

olur. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $M(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) = G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})$ ise (3.36) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) &\leq \varphi(G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})) \\
&< G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2})
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Şu halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$M(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) = G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})$$

olmalıdır. Böylece (3.36) eşitsizliği kullanılarak

$$G_p(x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+2}) \leq \varphi(G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1})) \quad (3.37)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$G_p(x_{2n}, x_{2n+1}, x_{2n+1}) \leq \varphi(G_p(x_{2n-1}, x_{2n}, x_{2n})) \quad (3.38)$$

olduğu gösterilebilir. O halde (3.37) ve (3.38) eşitsizlikleri göz önünde bulundurularak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \varphi(G_p(x_{n-1}, x_n, x_n))$$

yazılabilir. Bu durumda tümevarım ile

$$G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq \varphi^n(G_p(x_0, x_1, x_1))$$

bulunur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) = 0 \quad (3.39)$$

olur.

Şimdi $n, m \in \mathbb{N}$ için $m > n$ olsun. O halde

$$\begin{aligned} G_p(x_n, x_m, x_m) &\leq \sum_{k=n}^{m-1} G_p(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) - \sum_{k=n+1}^{m-1} G_p(x_k, x_k, x_k) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} G_p(x_k, x_{k+1}, x_{k+1}) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \varphi^k(G_p(x_0, x_1, x_1)) \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \varphi^k(G_p(x_0, x_1, x_1)) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu durumda φ bir (c) -kıyaslama fonksiyonu olduğundan $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(G_p(x_0, x_1, x_1))$

serisi yakınsaktır ve dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ için $\sum_{k=n}^{\infty} \varphi^k(G_p(x_0, x_1, x_1)) \rightarrow 0$ olur. Bu ise

$\lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = 0$ olması demektir. Bu taktirde $\{x_n\}$, G_p -Cauchy dizisidir.

Dolayısıyla Lemma 2.5 den $\{x_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) merik uzayında da bir Cauchy dizisidir

ve ayrıca (X, G_p) uzayının tamlığı (X, d_{G_p}) metrik uzayının tamlığını gerektirir. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_n, z) = 0 \quad (3.40)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, z, z) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = G_p(z, z, z) = 0 \quad (3.41)$$

olacak şekilde bir $z \in X$ noktası vardır.

Şimdi z noktasının f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğunu gösterelim.

- i. Eğer f, X üzerinde sürekli bir dönüşüm ise (3.40) eşitliğinden $n \rightarrow \infty$ için $fx_{2n} \rightarrow fz$ olur. Ayrıca $n \rightarrow \infty$ için $x_{2n+1} \rightarrow z$ ve metrik uzayda limit noktası tek olduğundan $fz = z$ bulunur.

Şimdi $gz \neq z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z \preceq z$ olduğundan (3.34) şartı ile

$$\begin{aligned} G_p(z, gz, gz) &= G_p(fz, gz, gz) \\ &\leq \varphi(M(z, z, z)) \\ &\quad + L \min\{d_{G_p}(z, z), d_{G_p}(z, fz), d_{G_p}(z, gz)\} \\ &= \varphi(M(z, z, z)) \\ &= \varphi(G_p(z, gz, gz)) \\ &< G_p(z, gz, gz) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir, yani kabulümüz yanlıştır. Böylece $z = gz$ olur. g sürekli bir dönüşüm olduğunda da benzer şekilde ispat yapılabilir.

- ii. Eğer f ve g sürekli dönüşüm değilse hipotezden her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$ yazılabilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisinin $\{x_{2n(k)}\}$ ve $\{x_{2n(k)+1}\}$ alt dizileri için $x_{2n(k)} \preceq z$ ve $x_{2n(k)+1} \preceq z$ olur. O halde $x_{2n(k)+1} \preceq z$ için (3.34) şartı kullanılarak

$$\begin{aligned} G_p(fz, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2}) &= G_p(fz, gx_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}) \\ &\leq \varphi(M(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1})) \\ &\quad + L \min \left\{ \begin{array}{c} d_{G_p}(z, x_{2n(k)+1}), d_{G_p}(z, fz), \\ d_{G_p}(x_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}), d_{G_p}(z, gx_{2n(k)+1}), \\ d_{G_p}(x_{2n(k)+1}, fz) \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
& M(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}) \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}), G_p(z, fz, fz), \\ G_p(x_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}), \\ \frac{1}{2}[G_p(z, gx_{2n(k)+1}, gx_{2n(k)+1}) + G_p(x_{2n(k)+1}, fz, fz)] \end{array} \right\} \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}), G_p(z, fz, fz), \\ G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2}), \\ \frac{1}{2}[G_p(z, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2}) + G_p(x_{2n(k)+1}, fz, fz)] \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

olur. Kabul edelim ki $G_p(z, fz, fz) > 0$ olsun. O halde (3.39) ve (3.41) eşitlikleri sağlandığından bir n_0 doğal sayısı vardır öyle ki her $n > n_0$ için

$$G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) < \frac{1}{2}G_p(z, fz, fz) \quad (3.43)$$

ve n_1 doğal sayısı vardır öyle ki her $n > n_1$ için

$$G_p(x_n, z, z) < \frac{1}{2}G_p(z, fz, fz) \quad (3.44)$$

yazılabilir. Bu taktirde her $n > \max\{n_0, n_1\}$ için (3.43), (3.44) ve dikdörtgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}[G_p(z, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2}) + G_p(x_{2n(k)+1}, fz, fz)] \\
& \leq \frac{1}{2}[G_p(z, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2}) + G_p(x_{2n(k)+1}, z, z) + G_p(z, fz, fz)] \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}G_p(z, fz, fz) + \frac{1}{2}G_p(z, fz, fz) + G_p(z, fz, fz) \right] \\
& = G_p(z, fz, fz)
\end{aligned} \quad (3.45)$$

elde edilir. O halde her $n > \max\{n_0, n_1\}$ için (3.43), (3.44) ve (3.45) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
& M(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}) \\
&= \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(z, x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+1}), G_p(z, fz, fz), \\ G_p(x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2}), \\ \frac{1}{2}[G_p(z, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2}) + G_p(x_{2n(k)+1}, fz, fz)] \end{array} \right\} \\
&= G_p(z, fz, fz)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.42) eşitsizliğinden her $n > \max\{n_0, n_1\}$ için

$$G_p(fz, x_{2n(k)+2}, x_{2n(k)+2}) \leq \varphi(G_p(z, fz, fz)) \\ + L \min \left\{ \begin{array}{c} d_{G_p}(z, x_{2n(k)+1}), d_{G_p}(z, fz), \\ d_{G_p}(x_{2n(k)+1}, x_{2n(k)+2}), d_{G_p}(z, x_{2n(k)+2}), \\ d_{G_p}(x_{2n(k)+1}, fz) \end{array} \right\}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$G_p(fz, z, z) \leq \varphi(G_p(z, fz, fz)) < G_p(z, fz, fz) = G_p(fz, z, z)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $z = fz$ bulunur.

Benzer şekilde (3.34) daralma şartında her $n \in \mathbb{N}$ için $x = x_{2n(k)}$ ve $y = z$ alınırsa $z = gz$ elde edilir.

Şu halde z , f ve g dönüşümlerinin bir ortak sabit noktasıdır.

Şimdi f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olduğunu kabul edelim. Bu durumda f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktasının tek olduğunu göstereceğiz. Aksini kabul edelim. Yani, $w \in X$ noktası f ve g dönüşümlerinin bir ortak sabit noktası ve $z \neq w$ olsun. Bu taktirde z ve w kıyaslanabilir elemanlar olduğundan teoremin daralma şartı kullanılarak

$$G_p(z, w, w) = G_p(fz, gw, gw) \\ \leq \varphi(M(z, w, w)) \\ + L \min \left\{ \begin{array}{c} d_{G_p}(z, w), d_{G_p}(z, fz), \\ d_{G_p}(w, gw), d_{G_p}(z, gw), d_{G_p}(w, fz) \end{array} \right\} \\ = \varphi(M(z, w, w))$$

elde edilir. O halde

$$M(z, w, w) = \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(z, w, w), G_p(z, fz, fz), G_p(w, gw, gw), \\ \frac{1}{2}[G_p(z, gw, gw) + G_p(w, fz, fz)] \end{array} \right\} \\ = \max \left\{ \begin{array}{c} G_p(z, w, w), G_p(z, z, z), G_p(w, w, w), \\ \frac{1}{2}[G_p(z, w, w) + G_p(w, z, z)] \end{array} \right\} \\ = G_p(z, w, w)$$

için Lemma 2.2 ile

$$G_p(z, w, w) \leq \varphi(M(z, w, w)) = \varphi(G_p(z, w, w)) < G_p(z, w, w)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Bu durumda kabulümüz yanlış olup $z = w$ olmalıdır.

Tersine, f ve g dönüşümleri tek ortak sabit noktaya sahip olsun. Şu halde f ve g dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi tek elemanlı olup iyi sıralıdır.

Örnek 3.5. $X = [0, 1]$ kümesi üzerinde “ $x \preceq y \Leftrightarrow y \leq x$ ” ile tanımlı “ $\preceq$ ” sıralama bağıntısını göz önüne alalım. Böylece $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir kümedir. Ayrıca $G_p : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu her $x, y, z \in X$ için $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ eşitliği ile tanımlayalım. Bu durumda (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzaydır ve her $x, y \in X$ için $d_{G_p}(x, y) = |x - y|$ olur.

Şimdi $\varphi(t) = \frac{t}{2}$ eşitliği ile tanımlı $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunu ele alalım. O halde tümevarım ile her $n \geq 1$ için $\varphi^n(t) = \frac{t}{2^n}$ olacağından φ bir (c) -kıyaslama fonksiyonudur. Ayrıca $f, g : X \rightarrow X$ dönüşümleri sırasıyla

$$fx = \frac{x}{3} \text{ ve } gx = \frac{x}{4}$$

eşitlikleri ile tanımlansın. Bu durumda her $x \in X$ için

$$f(gx) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{x}{12} \leq \frac{x}{4} = gx$$

olup $gx \preceq fgx$ elde edilir. Aynı zamanda

$$g(fx) = g\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{12} \leq \frac{x}{3} = fx$$

olduğundan $fx \preceq gfx$ bulunur. Bu taktirde f ve g , zayıf artan iki dönüşümdür. Dahası f dönüşümü standart metriğe ve G_p -metriğe göre X uzayında sürekli bir dönüşümdür. Gerçekten de; $\{x_n\}$, X uzayında $x \in X$ noktasına G_p -yakınsak bir dizi olsun. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x, x) = G_p(x, x, x) = x$$

elde edilir. Bu durumda, f fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(fx_n, fx, fx) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{fx_n, fx\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{\frac{x_n}{3}, \frac{x}{3}\right\} \\
&= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \max\{x_n, x\} \\
&= \frac{x}{3} \\
&= G_p(fx, fx, fx)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\{fx_n\}$ dizisi (X, G_p) uzayında fx noktasına yakınsar.

Diğer taraftan, $\{x_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) uzayında $x \in X$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_n, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$$

olur. O halde f fonksiyonunun tanımı ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(fx_n, fx) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x_n}{3} - \frac{x}{3} \right| = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| = 0$$

bulunur. Bu ise $\{fx_n\}$ dizisinin (X, d_{G_p}) metrik uzayında fx noktasına yakınsadığını gösterir.

Dolayısıyla f sürekli bir dönüşümdür. Ayrıca $y \leq x$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ ve $L \geq 0$ için $M(x, y, y) = x$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
G_p(fx, gy, gy) &= \max\left\{\frac{x}{3}, \frac{y}{4}\right\} \\
&= \frac{x}{3} \\
&\leq \frac{x}{2} \\
&= \varphi(M(x, y, y)) \\
&\leq \varphi(M(x, y, y)) + L \min\{d_{G_p}(x, y), d_{G_p}(x, fx), \\
&\quad d_{G_p}(y, gy), d_{G_p}(x, gy), d_{G_p}(y, fx)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 3.5'in bütün şartları sağlanır. O halde, 0 noktası f ve g dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

Sonuç 3.11. $(X, \preceq)$ kısmi sıralı bir küme, (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ dönüşümü " $\preceq$ " bağıntısına göre azalmayan bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki φ bir

(c)-kıyaslama fonksiyonu, $L \geq 0$ ve

$$M(x, y, y) = \max \left\{ \begin{array}{l} G_p(x, y, y), G_p(x, fx, fx), G_p(y, fy, fy), \\ \frac{1}{2}[G_p(x, fy, fy) + G_p(y, fx, fx)] \end{array} \right\}$$

olmak üzere kıyaslanabilir her $x, y \in X$ için

$$G_p(fx, fy, fy) \leq \varphi(M(x, y, y)) + L \min \left\{ \begin{array}{l} d_{G_p}(x, y), d_{G_p}(x, fx), d_{G_p}(y, fy), \\ d_{G_p}(x, fy), d_{G_p}(y, fx) \end{array} \right\}$$

şartı sağlansın. Eğer $x_0 \in X$ için $x_0 \preceq fx_0$ ve

i. f, X üzerinde sürekli bir dönüşüm

ya da

ii. $\{x_n\}$, X 'de azalmayan bir dizi olmak üzere $x_n \rightarrow z$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq z$ ise f dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca, f dönüşümünün sabit noktalarının kümesinin iyi sıralı olması için gerek ve yeter şart f dönüşümünün sabit noktasının tek olmasıdır.

İspat: Teorem 3.5'de $f = g$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

3.3. G_p -Metrik Uzaylarda Genişleyen Dönüşümler İçin Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda, genişleyen dönüşüm kavramı G_p -metrik uzay çerçevesinde yeniden tanımlanmıştır. Ayrıca, bazı genişleme şartlarını sağlayan dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ve bu teoremlerin sonuçları elde edilmiştir. Bu sonuçlar Huang ve arkadaşları tarafından elde edilen kıyaslanabilir sonuçları genelleştirir.

Tanım 3.1. (X, G_p) bir G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için

$$G_p(Tx, Ty, Tz) \geq \lambda G_p(x, y, z)$$

olacak şekilde $\lambda > 1$ sayısı varsa T dönüşümüne genişleyen (expansive) dönüşüm denir.

Teorem 3.6. (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ örten bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $a, b, c, d \geq 0$ ve $a + b + c + d > 1$ olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

$$G_p(Tx, Ty, Tz) \geq aG_p(x, y, z) + bG_p(x, x, Tx) + cG_p(y, y, Ty) + dG_p(z, z, Tz) \quad (3.46)$$

şartı sağlansın. Bu durumda T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X uzayında keyfi bir nokta olsun. Bu durumda T örten bir dönüşüm olduğundan $x_0 = Tx_1$ olacak şekilde $x_1 \in X$ noktası ve $x_1 \in X$ için $x_1 = Tx_2$ olacak şekilde $x_2 \in X$ noktası vardır. Böylece tümevarım ile $n \geq 1$ için $x_{n-1} = Tx_n$ olacak şekilde $\{x_n\}$ dizisi tanımlanabilir. Eğer bazı $n \geq 1$ sayıları için $x_n = x_{n-1}$ ise $x_n = Tx_n$ olur. Dolayısıyla x_n, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır. Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin ardışık iki teriminin farklı olduğunu kabul edelim. Yani her $n \geq 1$ için $x_n \neq x_{n-1}$ olsun. O halde (3.46) eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} G_p(x_{n-1}, x_n, x_n) &= G_p(Tx_n, Tx_{n+1}, Tx_{n+1}) \\ &\geq aG_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + bG_p(x_n, x_n, Tx_n) \\ &\quad + cG_p(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1}) + dG_p(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1}) \\ &= aG_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + bG_p(x_n, x_n, x_{n-1}) \\ &\quad + cG_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) + dG_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n), \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(1 - b)G_p(x_{n-1}, x_n, x_n) \geq (a + c + d)G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$$

elde edilir. Eğer $a + c + d = 0$ ise hipotezden $b > 1$ olur. Bu durumda son eşitsizlikten negatif bir sayının sıfırdan daha büyük veya sıfıra eşit olduğu görülür. Bu ise imkansızdır. Dolayısıyla $a + c + d \neq 0$ ve $(1 - b) > 0$ olmalıdır. Böylece $q = \frac{1 - b}{a + c + d}$ olmak üzere

$$G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq qG_p(x_{n-1}, x_n, x_n)$$

elde edilir. Burada $a + b + c + d > 1$ olduğu için $q < 1$ dir. Şu halde tümevarımdan her $n \in \mathbb{N}$ ve $q < 1$ için

$$G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q^n G_p(x_0, x_1, x_1) \quad (3.47)$$

bulunur.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin X 'de G_p -Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. O halde $m > n$ olacak şekilde her $n, m \in \mathbb{N}$ için dikdörtgen eşitsizliğinin ve (3.47) denkleminin tekrarlı

kullanımı ile

$$\begin{aligned}
G_p(x_n, x_m, x_m) &\leq G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+2}) + \dots \\
&\quad + G_p(x_{m-1}, x_m, x_m) \\
&\leq q^n[1 + q^1 + \dots + q^{m-n-1}]G_p(x_0, x_1, x_1) \\
&\leq \frac{q^n}{1-q}G_p(x_0, x_1, x_1)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n, m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $G_p(x_n, x_m, x_m) \rightarrow 0$ olduğu görülür. Bu ise $\{x_n\}$ dizisinin X uzayında G_p -Cauchy dizisi olması demektir. O halde (X, G_p) uzayı G_p -tam olduğundan bir $z \in X$ noktası vardır öyle ki $\{x_n\}$ dizisi z noktasına G_p -yakınsaktır. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_n, z) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = G_p(z, z, z) = 0$$

olur. Bu durumda, T örten bir dönüşüm olduğundan $Tu = z$ olacak şekilde $u \in X$ noktası vardır. Şimdi $z = u$ olduğunu gösterelim. (3.46) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
G_p(x_n, z, z) &= G_p(Tx_{n+1}, Tu, Tu) \\
&\geq aG_p(x_{n+1}, u, u) + bG_p(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1}) \\
&\quad + (c + d)G_p(u, u, Tu) \\
&= aG_p(x_{n+1}, u, u) + bG_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) + (c + d)G_p(u, u, z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafında $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$0 = G_p(z, z, z) \geq aG_p(z, u, u) + (c + d)G_p(u, u, z) = (a + c + d)G_p(u, u, z)$$

bulunur. Bu ise $G_p(u, u, z) = 0$, yani $u = z = Tu$ olması demektir. Dolayısıyla z noktası T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Eğer $a < 1$ alınırsa ise T dönüşümünün birden fazla sabit noktası olabilir. Fakat, $a > 1$ ise sabit noktanın tek olduğu görülür.

Sonuç 3.12. (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ örten bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\lambda > 1$ olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

$$G_p(Tx, Ty, Tz) \geq \lambda G_p(x, y, z) \quad (3.48)$$

şartı sağlansın. Bu durumda T dönüşümü X 'de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Teorem 3.6 da $b = c = d = 0$ ve $a = \lambda$ alındığında T dönüşümünün bir sabit noktaya sahip olduğu görülür. Şimdi, T dönüşümünün tek sabit noktaya sahip olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim. Yani $u \neq w$ ve $Tw = w$ olacak şekilde $w \in X$ noktası var olsun. O halde (3.48) eşitsizliği ile

$$G_p(u, w, w) = G_p(Tu, Tw, Tw) \geq \lambda G_p(u, w, w)$$

elde edilir. $\lambda > 1$ olduğu için bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $u = w$ olmalıdır. Bu ise sabit noktanın tek olduğunu gösterir.

Sonuç 3.13. (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ örten bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $\lambda > 1$ olmak üzere her $x, y, z \in X$ için

$$G_p(T^n x, T^n y, T^n z) \geq \lambda G_p(x, y, z)$$

olacak şekilde bir n pozitif tam sayısı mevcut olsun. Bu durumda T dönüşümü X 'de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: Sonuç 3.12 den dolayı T^n dönüşümü tek sabit noktaya sahiptir, yani $T^n u = u$ olacak şekilde bir tek $u \in X$ noktası vardır. Ayrıca $T^n(Tu) = T(T^n u) = Tu$ olacağından Tu, T^n dönüşümü için bir sabit noktadır. Fakat T^n dönüşümünün sabit noktası tek olduğundan $Tu = u$ olmalıdır. Bu ise $u \in X$ noktasının T dönüşümünün bir sabit noktası olduğunu gösterir. Bu durumda T nin sabit noktası aynı zamanda T^n dönüşümü için de bir sabit nokta olduğundan bu nokta tektir.

Teorem 3.7. (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ örten ve sürekli bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki

$$u = \min\{G_p(x, y, z), G_p(x, x, Tx), G_p(y, y, Ty), G_p(z, z, Tz)\}$$

olmak üzere her $x, y, z \in X$ ve $\lambda > 1$ için

$$G_p(Tx, Ty, Tz) \geq \lambda u \quad (3.49)$$

şartı sağlansın. Bu durumda T dönüşümü X 'de bir sabit noktaya sahiptir.

İspat: $\{x_n\}$, X uzayında $n \geq 1$ için $x_{n-1} = Tx_n$ eşitliği ile tanımlanan bir dizi olsun. Eğer $x_{n-1} = x_n$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ varsa o zaman $x_n = Tx_n$ olur. Böylece ispat tamamlanır. Şimdi her $n \geq 1$ için $x_{n-1} \neq x_n$ olduğunu kabul edelim. (3.49)

eşitsizliğinden

$$G_p(x_{n-1}, x_n, x_n) = G_p(Tx_n, Tx_{n+1}, Tx_{n+1}) \geq \lambda u$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} u &= \min\{G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G_p(x_n, x_n, Tx_n), G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1})\} \\ &= \min\{G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}), G_p(x_{n-1}, x_n, x_n)\} \end{aligned}$$

olur. Eğer $u = G_p(x_{n-1}, x_n, x_n)$ ise

$$G_p(x_{n-1}, x_n, x_n) \geq \lambda G_p(x_{n-1}, x_n, x_n)$$

bulunur. $\lambda > 1$ olduğu için bu imkansızdır.

Bu durumda $u = G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$ olmalıdır. Böylece

$$G_p(x_{n-1}, x_n, x_n) \geq \lambda G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1})$$

elde edilir. Şu halde $q = \frac{1}{\lambda} < 1$ olmak üzere

$$G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q G_p(x_{n-1}, x_n, x_n)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$G_p(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq q G_p(x_{n-2}, x_{n-1}, x_{n-1})$$

olduğu gösterilebilir. Bu taktirde tümevarım ile

$$G_p(x_n, x_{n+1}, x_{n+1}) \leq q G_p(x_{n-1}, x_n, x_n) \leq \dots \leq q^n G_p(x_0, x_1, x_1)$$

olur.

Böylece Teorem 3.6'nın ispatındaki gibi $\{x_n\}$ dizisinin X uzayında bir G_p -Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. O halde Lemma 2.5 den $\{x_n\}$ dizisi (X, d_{G_p}) metrik uzayında bir Cauchy dizisidir ve (X, G_p) uzayının tamlığı (X, d_{G_p}) metrik uzayının tamlığını gerektirir. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{G_p}(x_n, z) = 0 \quad (3.50)$$

olacak şekilde $z \in X$ noktası vardır ve Lemma 2.5 ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_n, z) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_m, x_m) = G_p(z, z, z) = 0$$

yazılabilir. Şu halde T sürekli bir dönüşüm olduğundan Önerme 2.6 ile $n \rightarrow \infty$ için $Tx_{n+1} \rightarrow Tz$ olur. Bu durumda (3.50) eşitliği ve metrik uzayda limit noktasının tekliği ile $Tz = z$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.8. (X, G_p) G_p -tam G_p -metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ örten bir dönüşüm olsun. Kabul edelim ki $a, b \geq 0$, $c > 1$ ve $a + 2b + c > 1$ olmak üzere $G_p(x, x, y) > 0$ olacak şekilde her $x, y \in X$ için

$$G_p(Tx, Tx, Ty) \geq a \frac{G_p(x, x, Tx)G_p(y, y, Ty)}{G_p(x, x, y)} + b[G_p(x, x, Tx) + G_p(y, y, Ty)] + cG_p(x, x, y) \quad (3.51)$$

şartı sağlansın. Bu durumda T dönüşümü X 'de tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi her $n \geq 1$ için $x_{n-1} = Tx_n$ eşitliği ile tanımlansın. Eğer $x_{n-1} = x_n$ olacak şekilde $n \geq 1$ sayısı varsa o zaman $x_n = Tx_n$ olur. Dolayısıyla x_n, T dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Şimdi, her $n \geq 1$ için $x_{n-1} \neq x_n$ olduğunu kabul edelim. Böylece $G_p(x_n, x_n, x_{n+1}) > 0$ olup (3.51) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} G_p(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) &= G_p(Tx_n, Tx_n, Tx_{n+1}) \\ &\geq a \frac{G_p(x_n, x_n, Tx_n)G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1})}{G_p(x_n, x_n, x_{n+1})} \\ &\quad + b[G_p(x_n, x_n, Tx_n) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1})] \\ &\quad + cG_p(x_n, x_n, x_{n+1}) \\ &= a \frac{G_p(x_n, x_n, x_{n-1})G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n)}{G_p(x_n, x_n, x_{n+1})} \\ &\quad + b[G_p(x_n, x_n, x_{n-1}) + G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n)] \\ &\quad + cG_p(x_n, x_n, x_{n+1}) \\ &= (a + b)G_p(x_n, x_n, x_{n-1}) + (b + c)G_p(x_n, x_n, x_{n+1}) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde yukarıdaki eşitsizlikten

$$(1 - a - b)G_p(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n) \geq (b + c)G_p(x_n, x_n, x_{n+1})$$

bulunur. Burada $c > 1$ için $b + c > 0$ olduğundan $a + b < 1$ olmalıdır. Bu taktirde

$$q = \frac{1 - a - b}{b + c} < 1 \text{ için}$$

$$G_p(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq qG_p(x_{n-1}, x_{n-1}, x_n)$$

yazılabilir. Bu şekilde işlemlere devam edildiğinde

$$G_p(x_n, x_n, x_{n+1}) \leq q^n G_p(x_0, x_0, x_1)$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_n, x_{n+1}) = 0$$

olur.

Ayrıca, Teorem 3.6'nın ispatındaki yöntem kullanılarak $\{x_n\}$ dizisinin X uzayında G_p -Cauchy dizisi olduğu gösterilebilir. O halde (X, G_p) uzayı G_p -tam olduğundan bir $z \in X$ noktası vardır öyle ki $\{x_n\}$ dizisi z noktasına G_p -yakınsaktır. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_n, z) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(x_n, x_n, x_m) = G_p(z, z, z) = 0$$

olur. Bu durumda T örten bir dönüşüm olduğundan $Tu = z$ olacak şekilde $u \in X$ vardır. Şimdi $z = u$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim, yani $z \neq u$ olsun. Bu taktirde (3.51) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} G_p(x_n, x_n, z) &= G_p(Tx_{n+1}, Tx_{n+1}, Tu) \\ &\geq a \frac{G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1})G_p(u, u, Tu)}{G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, u)} \\ &\quad + b[G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, Tx_{n+1}) + G_p(u, u, Tu)] \\ &\quad + cG_p(x_{n+1}, x_{n+1}, u) \\ &= a \frac{G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n)G_p(u, u, z)}{G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, u)} \\ &\quad + b[G_p(x_{n+1}, x_{n+1}, x_n) + G_p(u, u, z)] + cG_p(x_{n+1}, x_{n+1}, u) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$0 = G_p(z, z, z) \geq (b + c)G_p(u, u, z)$$

bulunur. Böylece $G_p(u, u, z) = 0$, yani $z = u$ elde edilir. Bu ise $z \neq u$ olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup $z = u$ olmalıdır.

Son olarak z noktasının T dönüşümünün tek sabit noktası olduğunu gösterelim. Aksini

kabul edelim, yani $z \neq w$ ve $Tw = w$ olsun. O halde (3.51) şartı kullanılarak

$$\begin{aligned}
G_p(z, z, w) &= G_p(Tz, Tz, Tw) \\
&\geq a \frac{G_p(z, z, Tz)G_p(w, w, Tw)}{G_p(z, z, w)} \\
&\quad + b[G_p(z, z, Tz) + G_p(w, w, Tw)] + cG_p(z, z, w) \\
&= cG_p(z, z, w)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle $(c-1)G_p(z, z, w) \leq 0$ olur. O halde $c > 1$ olduğundan $G_p(z, z, w) = 0$ dır. Fakat bu kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla $z = w$ olmalıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Örnek 3.6. $X = [0, \infty)$ ve $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ olsun. Bu taktirde (X, G_p) , G_p -tam G_p -metrik uzaydır. $T : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x \in X$ için $Tx = 2x$ eşitliği ile tanımlansın. Şu halde her $y \in X$ için $y = 2x$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ noktası var olduğundan T örten bir dönüşümdür. Genelliği bozmaksızın $x > y$ olduğunu kabul edelim. Böylece $x > y$ olacak şekildeki her $x, y \in X$ için $a = b = \frac{1}{32}$ ve $c = \frac{3}{2}$ alınırsa

$$\begin{aligned}
G_p(Tx, Tx, Ty) = 2x &> \frac{7x}{4} \\
&> a \frac{G_p(x, x, Tx)G_p(y, y, Ty)}{G_p(x, x, y)} \\
&\quad + b[G_p(x, x, Tx) + G_p(y, y, Ty)] + cG_p(x, x, y)
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla Teorem 3.8'in bütün şartlarının sağlandığı ve 0 noktasının T dönüşümünün tek sabit noktası olduğu görülür.

Şimdi G_p -metrik uzaylarda zayıf uyumluluk kavramını kullanarak genişleyen dönüşümler için bir ortak sabit nokta teoremi verelim.

Teorem 3.9. (X, G_p) G_p -metrik uzay ve $S, T : X \rightarrow X$ zayıf uyumlu iki dönüşüm olsun. Kabul edelim ki her $x, y, z \in X$ ve $a + b + c + d > 1$ olacak şekildeki $b, c, d \geq 0$ ve $a > 1$ sayıları için

$$\begin{aligned}
G_p(Sx, Sy, Sz) &\geq aG_p(Tx, Ty, Tz) + bG_p(Tx, Tx, Sx) + cG_p(Ty, Ty, Sy) \\
&\quad + dG_p(Tz, Tz, Sz)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

şartı sağlansın. Eğer $T(X) \subseteq S(X)$ ve $T(X)$ veya $S(X)$, X uzayının G_p -tam alt uzayı ise S ve T dönüşümleri X 'de tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat: $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun. Bu taktirde $T(X) \subseteq S(X)$ olduğundan $Tx_0 = Sx_1 = y_1$ olacak şekilde bir $x_1 \in X$ noktası seçilebilir. Benzer şekilde x_1 noktası için $Tx_1 = Sx_2 = y_2$ olacak şekilde $x_2 \in X$ noktası vardır. Böylece $Tx_n = Sx_{n+1} = y_{n+1}$ olacak şekilde X 'de bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlanabilir. Eğer $Tx_n = Tx_{n-1}$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ sayısı varsa o zaman $Tx_n = Sx_n$ olur. O halde x_n, T ve S dönüşümlerinin bir çakışma noktasıdır.

Şimdi her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq y_{n+1}$ olduğunu kabul edelim. (3.52) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} G_p(y_{n-1}, y_n, y_n) &= G_p(Sx_{n-1}, Sx_n, Sx_n) \\ &\geq aG_p(Tx_{n-1}, Tx_n, Tx_n) + bG_p(Tx_{n-1}, Tx_{n-1}, Sx_{n-1}) \\ &\quad + cG_p(Tx_n, Tx_n, Sx_n) + dG_p(Tx_n, Tx_n, Sx_n) \\ &= aG_p(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) + bG_p(y_n, y_n, y_{n-1}) \\ &\quad + cG_p(y_{n+1}, y_{n+1}, y_n) + dG_p(y_{n+1}, y_{n+1}, y_n) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ise

$$(1 - b)G_p(y_{n-1}, y_n, y_n) \geq (a + c + d)G_p(y_n, y_{n+1}, y_{n+1})$$

ifadesine denktir. Burada $a > 1$ için $a + c + d > 0$ olduğundan $b < 1$ olmalıdır. Bu taktirde $q = \frac{1 - b}{a + c + d} \in (0, 1)$ için

$$G_p(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq qG_p(y_{n-1}, y_n, y_n)$$

bulunur. Böylece tümevarım ile

$$G_p(y_n, y_{n+1}, y_{n+1}) \leq q^n G_p(y_0, y_1, y_1)$$

elde edilir. Buradan Teorem 3.6'nın ispatındaki yöntem kullanılarak $n, m \rightarrow \infty$ için $G_p(y_n, y_m, y_m) \rightarrow 0$ olduğu gösterilebilir. Dolayısıyla $\{y_n\}$ dizisi bir G_p -Cauchy dizisi olur. Kabul edelim ki $T(X), X$ uzayının G_p -tam alt uzayı olsun. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} G_p(y_n, y_n, z) = \lim_{n, m \rightarrow \infty} G_p(y_n, y_m, y_m) = G_p(z, z, z) = 0$$

olacak şekilde $z \in T(X) \subseteq S(X)$ vardır. O halde $u \in X$ noktası için $Su = z$

yazılabilir. Şimdi $Tu = z$ olduğunu gösterelim. (3.52) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
G_p(Tx_{n-1}, Su, Su) &= G_p(Sx_n, Su, Su) \\
&\geq aG_p(Tx_n, Tu, Tu) + bG_p(Tx_n, Tx_n, Sx_n) \\
&\quad + cG_p(Tu, Tu, Su) + dG_p(Tu, Tu, Su) \\
&= aG_p(y_{n+1}, Tu, Tu) + bG_p(y_{n+1}, y_{n+1}, y_n) \\
&\quad + cG_p(Tu, Tu, z) + dG_p(Tu, Tu, z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafında $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$0 = G_p(z, z, z) \geq (a + c + d)G_p(z, Tu, Tu)$$

olur. Şu halde $a + c + d \neq 0$ olduğu için $G_p(z, Tu, Tu) = 0$ olmalıdır. Bu ise $z = Tu$ olması demektir. Böylece $z = Su = Tu$ elde edilir. Bu taktirde S ve T dönüşümleri zayıf uyumlu olduğu için $STu = TSu$ yazılabilir. Buradan $Sz = Tz$ bulunur.

Şimdi z noktasının S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktası olduğunu gösterelim. (3.52) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
G_p(Sz, Sx_n, Sx_n) &\geq aG_p(Tz, Tx_n, Tx_n) + bG_p(Tz, Tz, Sz) \\
&\quad + cG_p(Tx_n, Tx_n, Sx_n) + dG_p(Tx_n, Tx_n, Sx_n) \\
&= aG_p(Tz, y_{n+1}, y_{n+1}) + bG_p(Tz, Tz, Sz) \\
&\quad + cG_p(y_{n+1}, y_{n+1}, y_n) + dG_p(y_{n+1}, y_{n+1}, y_n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer bu eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\begin{aligned}
G_p(Sz, z, z) &\geq aG_p(Tz, z, z) + bG_p(Tz, Tz, Sz) \\
&\geq aG_p(Tz, z, z) = aG_p(Sz, z, z)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $a > 1$ olduğu için $G_p(Sz, z, z) = 0$ olması ile mümkündür. Dolayısıyla $Sz = z$ olur. Böylece $Sz = Tz = z$ olup z , S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır.

Son olarak bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. O halde $z \neq w$ için $Sw = Tw = w$ olduğunu kabul edelim. Böylece (3.52) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
G_p(z, w, w) &= G_p(Sz, Sw, Sw) \\
&\geq aG_p(Tz, Tw, Tw) + bG_p(Tz, Tz, Sz) + cG_p(Tw, Tw, Sw) \\
&\quad + dG_p(Tw, Tw, Sw) \\
&= aG_p(z, w, w)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $z = w$ olmasını gerektirir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi bu teoremi bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek 3.7. $X = [0, 1]$ ve $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ olsun. O halde (X, G_p) bir G_p -metrik uzaydır. $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri her $x \in X$ için $S(x) = \frac{x}{2}$ ve $T(x) = \frac{x}{6}$ eşitlikleri ile tanımlansın. Bu taktirde $T(X) \subseteq S(X)$ ve $S(X)$, X uzayının G_p -tam alt uzayıdır. Ayrıca $x \geq y \geq z$ olacak şekildeki her $x, y, z \in [0, 1]$ için $a = 2$ ve $b = c = d = \frac{2}{27}$ alınırsa

$$\begin{aligned} G_p(Sx, Sy, Sz) &= \max\left\{\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right\} = \frac{x}{2} \\ &\geq \frac{4x}{9} \\ &\geq aG_p(Tx, Ty, Tz) + bG_p(Tx, Tx, Sx) + cG_p(Ty, Ty, Sy) \\ &\quad + dG_p(Tz, Tz, Sz) \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı zamanda S ve T dönüşümleri $x = 0$ noktasında zayıf uyumludur. Sonuç olarak Teorem 3.9'un bütün şartları sağlanır. Böylece 0 noktası S ve T dönüşümlerinin tek ortak sabit noktasıdır.

Teorem 3.9'da $a = \lambda$ ve $b = c = d = 0$ alınırsa Daffer ve Kaneko [53] ve Rhoades [76]'in sonucunu G_p -metrik uzaydaki zayıf uyumlu dönüşümlere genelleştiren aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.14. (X, G_p) bir G_p -metrik uzay ve $S, T : X \rightarrow X$ zayıf uyumlu iki dönüşüm olsun. Kabul edelim ki her $x, y, z \in X$ ve $\lambda > 1$ için

$$G_p(Sx, Sy, Sz) \geq \lambda G_p(Tx, Ty, Tz)$$

şartı sağlansın. Eğer $T(X) \subseteq S(X)$ ve $T(X)$ veya $S(X)$, X uzayının G_p -tam alt uzayı ise S ve T dönüşümleri X 'de tek ortak sabit noktaya sahiptir.

Şimdi Teorem 3.9 ve Sonuç 3.14'deki zayıf uyumluluk şartının kaldırılamayacağını gösteren bir örnek verelim.

Örnek 3.8. $X = [0, 1]$ ve $G_p(x, y, z) = \max\{x, y, z\}$ olsun. O halde (X, G_p) bir G_p -metrik uzaydır. $S, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri her $x \in X$ için

$$S(x) = 1 - x \text{ ve } T(x) = \frac{1 - x}{2}$$

eşitlikleri ile tanımlansın. Bu taktirde $T(X) \subseteq S(X)$ ve $S(X)$, X uzayının G_p -tam alt uzayıdır. Ayrıca her $x, y, z \in [0, 1]$ ve $1 < a \leq 2, b = c = d = 0$ sayıları için

$$\begin{aligned} G_p(Sx, Sy, Sz) &= \max\{1 - x, 1 - y, 1 - z\} \\ &\geq a \max\left\{\frac{1 - x}{2}, \frac{1 - y}{2}, \frac{1 - z}{2}\right\} \\ &= aG_p(Tx, Ty, Tz) \end{aligned}$$

elde edilir ve $S1 = T1 = 0$ olur. Fakat $ST1 = 1$ ve $TS1 = \frac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla S ve T dönüşümleri zayıf uyumlu değildir. O halde S ve T dönüşümlerinin zayıf uyumluluk şartı hariç Teorem 3.9'un ve Sonuç 3.14'ün diğer bütün şartları sağlanır. Fakat S ve T dönüşümleri bir ortak sabit noktaya sahip değildir. Bu ise Teorem 3.9 ve Sonuç 3.14'de S ve T dönüşümlerinin zayıf uyumluluk şartının gerekli olduğunu gösterir.

KAYNAKLAR

- [1] S. Banach, *Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales*, Fundamenta Mathematicae, 3, 133-181,(1922).
- [2] S. G. Matthews, *Partial metric topology*, Proc. 8th Summer Conference on General Topology and Applications, Ann New York Acad Sci, 728, 183–197, (1994).
- [3] S. Oltra and O. Valero, *Banachs fixed point theorem for partial metric spaces*, Rendiconti dell' Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, 3(1-2), 17–26, (2004).
- [4] O. Valero, *On Banach fixed point theorems for partial metric spaces*, Applied General Topology, 6(2), 229–240, (2005).
- [5] I. Altun, F. Sola, H. Şimşek, *Generalized contractions on partial metric spaces*, Topology and Its Applications, 157(18), 2778– 2785, (2010).
- [6] I. Altun and A. Erduran, *Fixed Point Theorems for Monotone Mappings on Partial Metric Spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 2011, 10 pages, (2010).
- [7] E. Karapınar, *Generalizations of Caristi Kirk' s Theorem on Partial Metric Spaces*, Fixed Point Theory Applications, 2011:4, 7 pages, (2011).
- [8] Z. Mustafa, B. Sims, *A new approach to generalized metric spaces*, Journal of Nonlinear Convex Analaysis, 7(2), 289–297, (2006).
- [9] M. Abbas, T. Nazir, P. Vetro, *Common fixed point results for three maps in G -metric spaces*, Filomat, 25:4, 1–7, (2011).
- [10] H. Aydi, W. Shatanawi, C. Vetro, *On generalized weak G -contraction mapping in G -metric spaces*, Computers & Mathematics with Applications, 62, 4223–4229, (2011).

- [11] Z. Mustafa, H. Obiedat, *A fixed point theorem of Reich in G -metric spaces*, CUBO, 12 (1), 83–93, (2010).
- [12] Z. Mustafa, W. Shatanawi, M. Bataineh, *Existence of fixed point results in G -metric spaces*, International Journal of Mathematics and Mathematical Science, 2009, 1–10, (2009).
- [13] Z. Mustafa, B. Sims, *Fixed point theorems for contractive mappings in complete G -metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 2009, 1–10, (2009).
- [14] S. Radenović, P. Salimi, S. Pantelic, J. Vujaković, *A note on some tripled coincidence point results in G -metric spaces*, 2012, International Journal of Mathematical Science and Industrial Applications, 6, 23–38, (2012).
- [15] R. Saadati, S. M. Vaezpour, P. Vetro, B. E. Rhoades, *Fixed point theorems in generalized partially ordered G -metric spaces*, Mathematical and Computer Modelling, 52, 797–801, (2010).
- [16] M. R. A. Zand, A. D. Nezhad, *A generalization of partial metric spaces*, Journal of Contemporary Applied Mathematics, 24, 86–93, (2011).
- [17] H. Aydi, E. Karapınar, P. Salimi, *Some fixed point results in G_p -metric spaces*, Journal of Applied Mathematics, 2012, Article ID 891713, 16 pages, doi:10.1155/2012/891713, (2012).
- [18] V. Parvaneh, J. R. Roshan, Z. Kadelburg, *On generalized weakly GP -contractive mappings in ordered GP -metric spaces*, Gulf Journal of Mathematics, 1, 78–97, (2013).
- [19] N. Bilgili, E. Karapınar and P. Salimi, *Fixed point theorems for generalized contractions on G_p -metric spaces*, Journal of Inequalities and Applications 2013:39, 1–13, (2013).
- [20] Lj. Ćirić, S. M. Alsulami, V. Parvaneh and R. Roshan, *Some fixed point results in ordered G_p -metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., 2013:317, 1–25, (2013).
- [21] V. Parvaneh, P. Salimi, P. Vetro, A. D. Nezhad, S. Radenović, *Fixed point results for $GP_{(\Lambda\Theta)}$ -contractive mappings*, J. Nonlinear Sci. Appl., 7, 150–159, (2014).

- [22] P. Salimi and P. Vetro, *A result of Suzuki type in partial G -metric spaces*, Acta Mathematica Scientia, 34B (2):274-284, (2014).
- [23] M.A. Barakat and A.M. Zidan, *A common fixed point theorem for weak contractive maps in G_p -metric spaces*, J. Egyptian Math. Soc., 23, 309-314, (2015).
- [24] V. Popa and A. M. Patriciu, *Two general fixed point theorems for a sequence of mappings satisfying implicit relations in G_p -metric spaces*, Appl. Gen. Topol. 16(2), 225-231, (2015).
- [25] L. Gajić, Z. Kadelburg, S. Radenović, *G_p -metric spaces-Symmetric and Asymmetric*, Submitted.
- [26] M. Kaya, M. Öztürk and H. Furkan, *Some Common Fixed Point Theorems for (F, f) -Contraction Mappings in 0 - G_p -Complete G_p -Metric Spaces*, British Journal of Mathematics & Computer Science, 16(2), 1–23, (2016).
- [27] A. C. M., Ran, M. C. B., Reurings, *A Fixed Point Theorem in Partially Ordered Sets and Some Applications to Matrix Equations*, Proc. Am. Math. Soc. 132, 1435-1443, (2004).
- [28] J. J., Nieto, R. R., Lopez, *Contractive Mapping Theorems in Partially Ordered Sets and Applications to Ordinary Differential Equations*, 22, 223-239, (2005).
- [29] Y. J., Cho, R., Saadati, S., Wang, *Common Fixed Point Theorems on Generalized Distance in Order Cone Metric Spaces*, Comput. Math. Appl. 61, 1254-1260, (2011).
- [30] E., Graily, S. M., Vaezpour, R., Saadati, Y. J., Cho, *Generalization of Fixed Point Theorems in Ordered Metric Spaces Concerning Generalized Distance*, Fixed Point Theory Appl. 2011, 30, (2011).
- [31] W., Sintunavarat, Y. J., Cho, P., Kumam, *Common Fixed Point Theorems for c -distance in Ordered Cone Metric Spaces*, Comput. Math. Appl. 62, 1969-1978, (2011).
- [32] A. Beiranvand, S. Moradi, M.omid, H. Pazandeh, *Two Fixed Point Theorems For Special Mappings*, arxiv:0903.1504v1 math.FA, (2009).

- [33] R., Sumitra, V.R., Uthariaraj, R., Hemavathy, *Common Fixed Point Theorem For T-Hardy-Rogers Contraction Mapping in a Cone Metric Space*, International Mathematical Forum, 5, 1495-1506, (2010).
- [34] J., Morales, E., Rojas, *Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems For T-Kannan contractive Mappings*, Int. Journal of Math., 4, 175-184, (2010).
- [35] J., Morales, E., Rojas, *T-Zamfirescu and T-Weak Contraction Mappings on Cone Metric Spaces*, arxiv:0909.1255v1.math.FA, (2009).
- [36] M. Abbas, H. Aydi, S. Radenović, *Fixed Point of T-Hardy-Rogers Contractive Mappings in Partially Ordered Partial Metric Spaces*, Internat. J. Math. Math. Sci. Volume 2012, Article ID 313675, 11 pages, (2012).
- [37] V. Berinde, *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Analysis Forum, 9(1), 43–53, (2004).
- [38] V. Berinde, *General constructive fixed point theorems for Ćirić-type almost contractions in metric spaces*, Carpathian Journal of Mathematics, 24(2), 10–19, (2008).
- [39] M. Abbas, G.V.R. Babu, G.N. Alemayehu, *On common fixed points of weakly compatible mappings satisfying generalized condition (B)*, Filomat, 25(2), 9–19, (2011).
- [40] G.V.R. Babu, M.L. Sandhya, M.V.R. Kameswari, *A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions*, Carpathian J. Math., 24(1), 8–12, (2008).
- [41] V. Berinde, *Approximating common fixed points of noncommuting discontinuous weakly contractive mappings in metric spaces*, Carpathian J. Math., 25(1), 13–22, (2009).
- [42] V. Berinde, *Some remarks on a fixed point theorem for Ćirić-type almost contractions*, Carpathian J. Math., 25(2), 157–162, (2009) .
- [43] V. Berinde, *Approximating common fixed points of noncommuting almost contractions in metric spaces*, Fixed Point Theory, 11(2), 179–188, (2010).
- [44] V. Berinde, *Common fixed points of noncommuting discontinuous weakly contractive mappings in cone metric spaces*, Taiwanese J. Math., 14(5), 1763–1776, (2010).

- [45] M. Abbas, D. Illic, *Common fixed points of generalized almost nonexpansive mappings*, Filomat, 24, 11–18, (2010).
- [46] L. Ćirić, M. Abbas, R. Saadati, N. Hussian, *Common fixed points of almost generalized contractive mappings in ordered metric spaces*, Appl. Math. Comput., 217, 5784–5789, (2011).
- [47] F. Shaddad, M.S.M. Noorani, S.M. Alsulami, *Common fixed-points results for generalized-Berinde type contractions which involve altering distance functions*, Fixed Point Theory and Applications, 2014:24, 10 pages, (2014).
- [48] V. Berinde, *Approximating fixed points of weak ϕ -contractions using the Picard iteration*, Fixed Point Theory, 4(2), 131–142, (2003).
- [49] I. Altun, Ö. Acar, *Fixed point theorems for weak contractions in the sense of Berinde on partial metric spaces*, Topology and its Applications, 159, 2642–2648, (2012).
- [50] W. Shatanawi, M. Postolache, *Coincidence and fixed point results for generalized weak contractions in the sense of Berinde on partial metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., 2013, 54, (2013).
- [51] H. Aydi, S.H. Amor, E. Karapınar, *Berinde-Type Generalized Contractions on Partial Metric Spaces*, Abstract and Applied Analysis, 2013, 10 pages, (2013).
- [52] S. Z. Wang, B. Y. Li, Z. M. Gao, K. Iseki, *Some fixed point theorems for expansion mappings*, Math. Japonica, 29, 631–636, (1984).
- [53] P. Z. Daffer, H. Kaneko, *On expansive mappings*, Math. Japonica, 37, 733–735, (1992).
- [54] X. Huang, C. Zhu, X. Wen, *Fixed point theorems for expanding mappings in partial metric spaces*, Analele Universitatii Ovidius Constanta-Seria Matematica, 20(1), 213–224, (2012).
- [55] E. Şuhubi, *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları, 2001.
- [56] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, 1970.
- [57] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons. Inc., Newyork, 1978.

- [58] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.
- [59] P. K. Jain, *Metric Spaces*, Narosa Publishing House, New Delhi, 2009.
- [60] Vesna Ć. Rajić, S. Randevonić, W. Shatanawi, N. Tahat, *Common fixed point results for weakly isotone increasing mappings in partially ordered partial metric spaces*, Le Matematiche Vol. LXVIII (2013), Fasc. II, 191–204, doi: 10.4418/2013.68.2.14
- [61] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.
- [62] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Monographs in Mathematics, 2002.
- [63] R. Kannan, *Some results on fixed points*, Bull. Calcutta Math. Soc., 10, 71-76, 1968.
- [64] S.K., Chatterjea, *Fixed-point theorems*, C.R. Acad. Bulgare Sci., 25, 727-730, 1972.
- [65] T., Zamfirescu, *Fix point theorems in metric spaces*, Arch. Math. (Basel), 23, 292-298, 1972.
- [66] Lj. B., Ćirić, *A generalization of Banach's contraction principle*, Proc. Am. Math. Soc., 45, 267-273, 1974.
- [67] C. Klin-eam, C. Suanoom, *Some Common Fixed-Point Theorems for Generalized-Contractive-Type Mappings on Complex-Valued Metric Spaces*, Abstract and Applied Analysis, volume 2013, Article ID D 604215, 6 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/604215>.
- [68] M. Abbas and G. Jungck, *Common fixed point results for noncommuting mappings without continuity in cone metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 341, 416–420, (2008).
- [69] G. Jungck, *Commuting Mappings and Fixed Points*, Amer. Math. Monthly, 83, 261-263, (1976).
- [70] G. Jungck, *Compatible mappings and common fixed points*, Internat. J. Math. Math. Sci., 9, 771–779, (1986).

- [71] M. Abbas, T. Nazir, S. Radenovic, *Common fixed point of generalized weakly contractive maps in partially ordered G -metric spaces*, Appl. Math. Comput., 218, 9383–9395, (2012).
- [72] P. V. Subrahmanyam, *Remarks on Some Fixed Point Theorems Related to Banach's Contraction Principle*, J. Math. Phys. Sci., 8, 445–457, (1974).
- [73] J. Chen, Z. Li, *Common Fixed Points For Banach Operator Pairs in Best Approximation*, J. Math. Anal. Appl., 336, 1466–1475, (2007).
- [74] V. Berinde, *Generalized Contractions and Applications*, (in Romanian), Editura Cub Press 22, Baia Mare, 1997.
- [75] M. S. Khan, M. Swaleh, S. Sessa, *Fixed point theorems for altering distances between the points*, Bull. Aust. Math. Soc., 30(1), 1–9, (1984).
- [76] B. E. Rhoades, *An expansion mapping theorem*, Jnanabha, 23, 151–152, (1993).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı, soyadı : Meltem KAYA
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 17.09.1990- SAMSUN
Telefon : +90 554 478 9569
e-posta : meltemkaya55@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek lisans	KSÜ/Matematik Bölümü	2014
Lisans	KSÜ/Matematik Bölümü	2012
Lise	Gebze Atatürk Lisesi	2007

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Meltem KAYA ve Hasan FURKAN, “ λ -Core of a Sequence and Related Inequalities”, General Mathematics Notes, Vol. 22, No. 2, 123-132, (2014).
2. Meltem KAYA ve Hasan FURKAN, “Some Topological and Geometric Properties of Some New Spaces of λ -Convergent and Bounded Series”, Journal of Function Spaces, Vol. 2015, Article ID 458324, 10 pages, (2015).
3. Meltem KAYA, Mahpeyker ÖZTÜRK and Hasan FURKAN, “Some Common Fixed Point Theorems for (F, f) -Contraction Mappings in 0 - G_p -Complete G_p -Metric Spaces”, British Journal of Mathematics & Computer Science, 16(2), 1-23, (2016).
4. Meltem KAYA ve Hasan FURKAN, “Some Common Fixed Point Results For Contractive Mappings in Ordered G_p -Metric Spaces”, İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, Yıl: 15, Sayı: 30, (2016).

5. Meltem KAYA, Hasan FURKAN ve Metin BAŞARIR, “*Common Fixed Point Results for the (F, L) -Weak Contraction on Complete Weak Partial Metric Spaces*”, British Journal of Mathematics & Computer Science, 21(4): 1-15, 2017.
6. Meltem KAYA ve Hasan FURKAN, “*Fixed Point Theorems for Expansive Mappings in G_p -Metric Spaces*”, Creative Mathematics and Informatics, (Kabul edildi).
7. Meltem KAYA ve Hasan FURKAN, “*Generalized Berinde-Type Contractions in Partially Ordered G_p -Metric Spaces*”, Open Mathematics, (Yazışma Safhasında).

Bildiriler

1. Meltem KAYA ve Hasan FURKAN, “On the Spaces of Lambda Convergent and Bounded Series”, Algerian-Turkish International days on Mathematics (ATIM 2013), 2013, İstanbul, Türkiye.
2. Meltem KAYA, Mahpeyker ÖZTÜRK ve Hasan FURKAN, “Common Fixed Point Results for $(\mathcal{F}, \psi)$ -Contractions in Ordered Partial Metric Spaces”, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM -2014), 2014, Antalya, Türkiye.
3. Meltem KAYA, Mahpeyker ÖZTÜRK ve Hasan FURKAN, “Some Fixed Point Results for F -Contractions on 0-Complete Partial Metric Spaces”, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM -2015), 2015, İstanbul, Türkiye.
4. Meltem KAYA, Mahpeyker ÖZTÜRK ve Hasan FURKAN, “Some Common Fixed Point Theorems for (F, f) -Contraction Mappings in 0- G_p -Complete G_p -Metric Spaces”, The 11th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications (ICFPTA 2015), 2015, İstanbul, Türkiye.
5. Meltem KAYA, Mahpeyker ÖZTÜRK ve Hasan FURKAN, “On Some Common Fixed Point Theorems for $(\mathcal{F}, \psi)_f$ -Contraction Mappings in Ordered Partial Metric Spaces”, International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), 2016, Elazığ, Türkiye.
6. Meltem KAYA ve Hasan FURKAN, “Generalized Berinde Type Contractions in Partially Ordered G_p -Metric Spaces”, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM -2016), 2016, Bodrum, Türkiye.
7. Meltem KAYA ve Hasan FURKAN, Fixed Point Theorems for Expansive Mappings in G_p -Metric Spaces, International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA- 2016), 2016, Kırşehir, Türkiye.