

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



q – OPERATÖRÜ VE STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Sariye AŞUT

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Erdal BAŞ

Nisan-2017

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q -OPERATÖRÜ VE STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sariye AŞUT

(141121115)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 05.04.2017

Tezin Savunulduğu Tarih : 19.04.2017

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Erdal BAŞ (F.Ü.)

Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Mustafa İNÇ (F.Ü.)

Y.Doç.Dr. Keziban TAŞ (M.Ü.)

Nisan-2017

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren saygıdeğer hocam Doç. Dr. Erdal BAŞ'a üzerimdeki emeklerinden dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Yanında çalışmaktan dolayı onur duyduğumu belirtmek ister, tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu sabır ve hoşgörüden dolayı ise özellikle teşekkür ederim.

Ayrıca desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sayın Arş. Gör. Ramazan ÖZARSLAN hocama da teşekkür ederim.

Sariye AŞUT
ELAZIĞ-2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
SEMBOLLER LİSTESİ.....	VI
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Temel Tanımlar ve Teoremler	3
3. q -STURM LIOUVILLE PROBLEMİNİN TEORİSİ.....	20
3.1. q -Sturm-Liouville Problemi	20
3.2. Self Adjoint Problem.....	28
3.3. Green Fonksiyonu	35
3.4. Özfonksiyonların Açılım Formülleri	41
4. SONUÇ	48
5. KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ	51

ÖZET

q –Operatörü ve Sturm-Liouville Problemi

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, q –fark operatörleri ile ilgili genel bir tarihçe verilmiştir.

İkinci bölümde, q – fark operatörü, q – fonksiyonlar ve q – fonksiyonlar uzaylarının özellikleri incelenmiştir. Konuyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $L_q^2(0, a)$ Hilbert uzayında q –Sturm-Liouville Problemi verilmiştir. Bu problem ile ilgili genel spektral özellikler incelenmiştir. Ayrıca $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonunun özellikleri verilir ve bununla ilgili temel tanım ve teoremler ispatlarıyla birlikte detaylı olarak verilmiştir. Özfonksiyonlarının açılım formülleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler. q –Fark operatörü, q –Sturm-Liouville problemi, $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonu, q –Lagrange özdeşliği, açılım formülü.

SUMMARY

q –Operator and Sturm Liouville Problem

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, a general history related to q – difference operators is given.

In the second chapter, properties of q – difference operator, q – functions and q – functions spaces are analyzed. Basic definitions and theorems related to the subject are given.

In the third chapter, q – Sturm-Liouville Problem in $L_q^2(0, a)$ Hilbert space is given. General spectral properties related to this problem are analyzed. Also, properties of $G(x, t, \lambda)$ Green functions are given and basic definitions and theorems related to this subject is given with proofs in detailed. Finally, expansion formulas of eigenfunctions of this problem are investigated.

Key words. q – Difference operator, q –Sturm-Liouville problem, $G(x, t, \lambda)$ Green's function, q –Lagrange's identity, expansion formula.

SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\cos_q$	: q -Cosinüs
$\sin_q$	: q -Sinüs
D_q	: q -Fark Operatörü
e_q	: q - Üstel Fonksiyon
Γ_q	: q -Gama Fonksiyonu
$L_{q,\eta}^p$	: Fonksiyon Uzayı
C_q^n	: Fonksiyon Uzayı
$\langle , \rangle$	: İç Çarpım
${}_r\Phi_s$	: q - Hipergeometrik Fonksiyon
$[n]_q!$	: q - Faktöriyel
$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	: q -Binom Katsayısı
D_q^n	: n. mertebeden q - türev
d_q	: q -Differensiyel
J_v	: q -Bessel Fonksiyonu
$\int$	: İntegral sembolü
$\sum$	: Toplam sembolü
$\prod$	: Çarpım Sembolü
W_q	: q -Wronskian Determinantı
B_q	: q - Beta Fonksiyonu
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar

1. GİRİŞ

Matematiksel fiziğin, mühendisliğin ve birçok bilimin pek çok probleminin modellenmesi diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemleri içermektedir. Bu problemlerin çözümü, 1830 'lu yıllara kadar analitik olarak ifade edilebilmesi ile sınırlı kalmıştır fakat 1836 yılında iki yakın arkadaş olan İsveçli matematikçi Charles François Sturm (1803-1855) ve Fransız matematikçi Joseph Liouville çözümlerin analitik olarak ifade edilemediği durumlarda bu çözümlerin özelliklerinin bulunması ile ilgili çalışmalar yapmış ve Sturm-Liouville teorisini kurmuşlardır.

Klasik bir Sturm-Liouville diferansiyel denklemi genel olarak sonlu veya sonsuz $a < x < b$ aralığında tanımlı y fonksiyonları için,

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda w(x)] y = 0,$$

şeklinde tanımlı ikinci mertebeden lineer bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemde $p(x)$, $q(x)$ ve $w(x)$ verilen fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların reel değerli ve ayrıca (a, b) aralığında parçalı sürekli olduğu varsayılmaktadır. Bununla birlikte $p(x)$ ve $w(x)$ fonksiyonlarının (a, b) aralığında daima pozitif olduğu varsayılmaktadır. Bu denklemdeki λ sayıları da parametrelerdir [21].

Sturm ve Liouville diklik, özdeğerlerin gerçelliği ve Fourier katsayılarının belirlenmesi gibi bazı teoremleri ortak kullanıyorlarsa da Sturm özdeğerlerin özellikleri, özdeğer ve özfonksiyonların nitel davranışlarına yönelirken, Liouville keyfi fonksiyonların, özfonksiyonların bir sonsuz seri açılımına ağırlık vermiştir. Sturm, homojen olmayan ince bir teldeki ısı iletimi problemini göz önüne almış ve bu problemin çözümü için kısmi diferansiyel denklemi değişkenlerine ayırma metodu kullanarak adi diferansiyel denkleme dönüştürmüştür. Sturm-Liouville kuramının gelişmesinde D'Alembert, Fourier ve Poisson'un çalışmaları öncülük etmiş ve katkı sağlamıştır. Fourier, homojen ortamlarda ısı iletim problemlerini silindirik ve küresel koordinatları kullanarak incelemiş ve ısı teorisi ile ilgili önemli sonuçlar elde etmiştir. Bu sonuçlar Poisson tarafından devam ettirilmiş ve geliştirilmiştir. Homojen ve homojen olmayan bir teldeki titreşim problemini ilk kez D'Alembert ve aynı dönemde Euler incelemiştir.

Sturm'un ikinci önemli çalışması spektral kuramı üzerine olmuştur. Liouville'nin çalışması ise keyfi fonksiyonların, özfonksiyonları cinsinden Fourier serisine açılımı,

ortogonallik özellikleri ile farklı tipteki ve yüksek mertebeden denklemlere, kuramın genelleştirilmesi üzerine olmuştur. Ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak bir diferansiyel denklemin çözümlerinin varlığını ilk kez Liouville kanıtlamıştır.

1880'lerde, L. Rayleigh ve G. Kirchhoff titreşim problemini incelerken Sturm'un teoremlerinin benzerini yüksek basamaktan sınır değer problemlerine uygulamışlardır. F. Klein diferansiyel denklemlerin polinom tipi çözümlerini sınır değer problemleri kuramı ile birleştirmiştir. 1908'de Birkoff özdeğer parametresine bağlı adi diferansiyel denklemlerin temel çözümleri için asimptotik eşitlikler elde etmiş, regüler sınır şartlarını tanımlamış ve regüler sınır-değer problemleri için özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sisteminin tamlığı ile ilgili teoremler ispatlamıştır. 1946 yılında Titchmarsh doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli $L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlere göre ayrışım formülünü vermiştir. Ayrıca Naimark, Atkinson, Rietsz, Neumann, Friedrichs, Wintner, Leighton, Levitan Tamarkin gibi birçok matematikçi bu teorinin gelişmesini sağlamıştır.

Eskiden beri fark denklemleri ve q -fark denklemlerinin incelenmesine matematikçiler ve fizikçiler tarafından büyük ilgi duyulmaktadır. q -fark denklemleri bir taraftan diferansiyel denklemleri diskritleştirerek (ayrıklaştırarak) yaklaşık çözerken, diğer taraftan da birçok pratik olayın matematiksel modelleri olarak kendi başına ortaya çıkarması açısından oldukça büyük önem taşımaktadır. q -fark denklemlerinin teorisi beraberinde çok çeşitli konuları getirmiştir. Bunlardan en önemlisi q -Sturm-Liouville Problemi olarak ele alınmıştır [3]. Daha sonra Al-Salam ve Agarwal q -Riemann Liouville integralini ve q kesirli türevlerini tanımladılar [3]. Daha sonra q kesirli hesaplamalar geliştirilmiş ve Caputo q kesirli türevi ve Weyl kesirli türevleri tanımlanmıştır [3]. Bunların ardından kesirli q Leibniz kuralı ve uygulamaları verilmiş q kesirli fark denklemleri için önemli bir parametre olan q Mittag-Leffler fonksiyonları tanımlanmıştır ve q kesirli fark denklemleri için varlık teklik teoremleri ispatlanmıştır. Annaby ve Mansour tarafından yazılan kitap [3] q -analizine önemli bir yön vermiştir. Bu konuda çalışmalar devam etmektedir [11-20]. Adi fark ve q -fark denklemleri kolaylıkla algoritmalaştırılarak, bilgisayarda çözmek için çok uygundur.

2. GENEL KAVRAMLAR

2.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 2.1.1. X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subset X$ olsun. D 'nin her elemanına Y 'nin bir elemanını karşılık getiren bir kurala D 'den Y 'ye bir operatör veya dönüşüm denir. A operatörünün x 'e karşılık getirdiği eleman $A(x)$ ile gösterilir. A operatörünün $x \in D$ 'yi $A(x) \in Y$ 'ye dönüştürdüğünü belirtmek için, $A : D \rightarrow Y$ gösterimi kullanılır [1].

Tanım 2.1.2. H bir Hilbert uzay ve $A, A^* \in L(H)$, ($L(H) = L(H, H)$) olsun. Eğer $A = A^*$ veya $\forall x, y \in H$ için $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ ise bu operatöre self adjoint operatör ya da Hilbert adjoint operatör denir [1].

Tanım 2.1.3. Bir $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzaydaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \| \cdot \|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya Banach uzay adı verilir [1].

Tanım 2.1.4. Bir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayına Hilbert uzay adı verilir [1].

Tanım 2.1.5. $q > 1$ bir sabit reel sayı ve

$$q^{\mathbb{Z}} = \{q^n : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, q^{-2}, q^{-1}, q^0, q^1, q^2, \dots\}$$

şeklinde tanımlanır [2].

Tanım 2.1.6. $0 < q < 1$ olmak üzere q pozitif bir sayıdır. $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $k \in \mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$, $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere q -rotasyon faktöriyeli

$$(a; q)_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i), & n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.1.1)$$

ile tanımlanır. Burada $n \rightarrow \infty$ iken $(a; q)_n$ nin limiti var ve $(a; q)_{\infty}$ ile tanımlanır. $a_1, a_2, \dots, a_k$ kompleks sayıları için q -rotasyonel faktöriyeli aşağıdaki gibi olur [3],

$$(a_1, a_2, \dots, a_k; q)_n = \prod_{j=1}^k (a_j; q)_n.$$

Tanım 2.1.7. α bir kompleks sayı olsun. q -binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha-1})\dots(1-q^{\alpha-k+1})}{(q; q)_k}, & k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

ya da daha genel bir ifadeyle

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[\alpha]_q!}{[\alpha - k]_q! [k]_q!}$$

şeklinde tanımlanır [4].

$(a; q)_n$ ve $(a; q)_\infty$, $(n \in \mathbb{N}_0)$ için aşağıdaki seri formları yazılabilir,

$$(a; q)_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} a^k, \quad (2.1.3)$$

$$(a; q)_\infty = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} \frac{a^k}{(q; q)_k}. \quad (2.1.4)$$

Tanım 2.1.8. $a_1, a_2, \dots, a_r$, $b_1, b_2, \dots, b_s$ kompleks sayıları için ${}_r\Phi_s$, q -hipergeometrik serileri

$${}_r\Phi_s(a_1, a_2, \dots, a_r; b_1, b_2, \dots, b_s; q, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1, a_2, \dots, a_r; q)_n}{(q, b_1, b_2, \dots, b_s; q)_n} z^n (-q^{\frac{n-1}{2}})^{n(s+1-r)} \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır.

${}_r\Phi_s$ fonksiyonunun seri açılımı eğer $r \leq s$ ise $\forall z \in \mathbb{C}$ için kesinlikle yakınsaktır.

Eğer $r = s + 1$ ise yalnızca $|z| < 1$ için yakınsaktır [3].

Tanım 2.1.9.

$$[k]_q = \frac{1 - q^k}{1 - q}, q \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \quad (2.1.6)$$

olmak üzere q - faktöriyel fonksiyonu

$$\begin{aligned} [n]_q! &= \prod_{k=1}^n [k]_q \\ &= [1]_q [2]_q \dots [n-1]_q [n]_q, \\ &= \frac{1-q}{1-q} \frac{1-q^2}{1-q} \dots \frac{1-q^{n-1}}{1-q} \frac{1-q^n}{1-q}, \\ &= 1(1+q) \dots (1+q+\dots q^{n-2}), \\ &= \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n}, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.10. $\mu \in \mathbb{R}$ sabit bir sayı ve her bir $z \in A$ için $\mu z \in A$ ise $\mathbb{C}$ nin A alt kümesi μ -geometrik olarak adlandırılır. Eğer $\mathbb{C}$ nin A alt kümesi μ -geometrik ise her $\{z\mu^n\}_{n=0}^{\infty}$ geometrik dizileri $z \in A$ yı kapsar [3].

Tanım 2.1.11. q -diferensiyel

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

şeklinde tanımlanır [5].

Tanım 2.1.12. f reel ya da kompleks değerli fonksiyonu $q^{\mathbb{Z}}$ üzerinde tanımlı olsun.

" q -fark operatörü" D_q

$$D_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{qz - z}, z \in q^{\mathbb{Z}} \quad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlanır [2].

$D_q f(z)$ fonksiyonuna $f(z)$ fonksiyonunun q -fark türevi denir, q -fark operatörü Jackson q -fark operatörü, Euler Jackson q -fark operatörü ya da Euler-Heine Jackson q -fark operatörü olarak adlandırılır. Eğer $0 \in A$ ise $|q| < 1$ için sıfırda q -türev,

$$D_q f(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(zq^n) - f(0)}{zq^n}, z \in A \setminus \{0\} \text{ için,}$$

olarak tanımlanır. Buna göre sıfırda q -türev $|q| > 1$ için

$$D_q f(0) = D_{q^{-1}} f(0)$$

olur.

Teorem 2.1.1. D_q , q -türev operatörü olmak üzere

$$D_q(f \mp g)(x) = D_q f(x) \mp D_q g(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned} D_q(f \mp g)(x) &= \frac{(f \mp g)(qx) - (f \mp g)(x)}{qx - x} \\ &= \frac{f(qx) \mp g(qx) - f(x) \mp g(x)}{qx - x} \\ &= \frac{f(qx) - f(x) \mp g(qx) - g(x)}{qx - x} \\ &= \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} - \frac{g(qx) - g(x)}{qx - x} \\ &= D_q f(x) \mp D_q g(x). \end{aligned}$$

Teorem 2.1.2. D_q , q -türev operatörü olmak üzere ve $c \in \mathbb{R}$ olsun, bu takdirde

$$D_q(cf)(x) = cD_qf(x)$$

eşitliği vardır.

İspat.

$$D_q(cf)(x) = \frac{cf(qx) - cf(x)}{qx - x} = c \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} = cD_qf(x).$$

Teorem 2.1.3. D_q , q -türev operatörü olmak üzere

$$D_q(f.g)(x) = g(x)D_qf(x) + f(qx)D_qg(x)$$

ya da

$$D_q(f.g)(x) = f(x)D_qg(x) + g(qx)D_qf(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned} D_q(f.g)(x) &= \frac{(f.g)(qx) - (f.g)(x)}{qx - x}, \\ &= \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x) + f(qx)g(x) - f(x)g(qx)}{qx - x}, \\ &= \frac{f(qx)[g(qx) - g(x)] + g(x)[f(qx) - f(x)]}{qx - x}, \\ &= \frac{f(qx)[g(qx) - g(x)]}{qx - x} + \frac{g(x)[f(qx) - f(x)]}{qx - x}, \\ &= g(x)D_qf(x) + f(qx)D_qg(x), \end{aligned}$$

aynı zamanda aşağıdaki eşitlikler sağlanır,

$$\begin{aligned} D_q(f.g)(x) &= \frac{(f.g)(qx) - (f.g)(x)}{qx - x}, \\ &= \frac{f(qx)g(qx) - f(x)g(x) + f(x)g(qx) - f(x)g(qx)}{qx - x}, \\ &= \frac{f(x)[g(qx) - g(x)] + g(qx)[f(qx) - f(x)]}{qx - x}, \\ &= \frac{f(x)[g(qx) - g(x)]}{qx - x} + \frac{g(qx)[f(qx) - f(x)]}{qx - x}, \\ &= f(x)D_qg(x) + g(qx)D_qf(x). \end{aligned}$$

Teorem 2.1.4. (q - Leibniz Kuralı) D_q^n , n . mertebeden q - türev operatörü olmak üzere

$$D_q^n(f.g)(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (D_q^{n-k} f)(q^k x) D_q^k g(x),$$

eşitliği sağlanır.

$n = 1$ için yukarıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} D_q(f.g)(x) &= \sum_{k=0}^1 \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}_q (D_q^{1-k} f)(q^k x) D_q^k g(x), \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_q (D_q^1 f)(q^0 x) D_q^0 g(x) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_q (D_q^0 f)(q^1 x) D_q^1 g(x), \\ &= g(x) D_q f(x) + \frac{1-q}{1-q} f(qx) D_q g(x), \\ &= g(x) D_q f(x) + f(qx) D_q g(x), \end{aligned}$$

olup verilen eşitlik $n = 1$ için doğrudur.

Teorem 2.1.5. D_q , q -türev operatörü olmak üzere eğer $g(x) \neq g(qx) \neq 0$ ise

$$D_q(f/g)(x) = \frac{g(x) D_q f(x) - f(x) D_q g(x)}{g(x) g(qx)}$$

eşitliği vardır.

İspat.

$$\begin{aligned} D_q(f/g)(x) &= \frac{(f/g)(qx) - (f/g)(x)}{qx - x}, \\ &= \frac{\frac{f(qx)}{g(qx)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{qx - x}, \\ &= \frac{f(qx)g(x) - g(qx)f(x)}{g(qx)g(x)(qx - x)}, \\ &= \frac{f(qx)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - g(qx)f(x)}{g(qx)g(x)(qx - x)}, \\ &= \frac{[f(qx) - f(x)]g(x) - f(x)[g(qx) - g(x)]}{g(qx)g(x)(qx - x)}, \\ &= \frac{[f(qx) - f(x)]g(x)}{g(qx)g(x)(qx - x)} - \frac{[g(qx) - g(x)]f(x)}{g(qx)g(x)(qx - x)}, \\ &= \frac{g(x) D_q f(x)}{g(qx)g(x)} - \frac{f(x) D_q g(x)}{g(qx)g(x)}, \\ &= \frac{g(x) D_q f(x) - f(x) D_q g(x)}{g(x) g(qx)}. \end{aligned}$$

Teorem 2.1.6. D_q^n , n . mertebeden q -türev operatörü olmak üzere f fonksiyonunun n . mertebeden q -türevi

$$D_q^n f(x) = (-1)^{-n} (1-q)^{-n} x^{-n} q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^{\frac{r(r-1)}{2}} f(xq^{n-r})$$

şeklindedir.

Teorem 2.1.7. Eğer bir $y : q^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun q -fark türevi özdeş olarak sıfır ise bu fonksiyon sabittir.

İspat. $D_q y(x) = 0, \forall x \in q^{\mathbb{Z}}$ olsun. O halde

$$\frac{y(qx) - y(x)}{qx - x}, \forall x \in q^{\mathbb{Z}}$$

Buradan da

$$y(qx) - y(x) = 0, \text{ veya } y(qx) = y(x), \forall x \in q^{\mathbb{Z}}$$

elde edilir. Burada x yerine sırasıyla

$$q^0 = 1, q^1 = q, q^2, q^3, \dots$$

yazarsak

$$y(q) = y(1),$$

$$y(q^2) = y(q) = y(1),$$

$$y(q^3) = y(q^2) = y(q) = y(1), \dots, y(q^n) = y(1), \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

bulunur. x yerine

$$q^{-1}, q^{-2}, q^{-3}, q^{-4}, \dots$$

ifadeleri yazılarak

$$y(q^{-1}) = y(1)$$

$$y(q^{-2}) = y(q^{-1}) = y(1)$$

$$y(q^{-3}) = y(q^{-2}) = y(q^{-1}) = y(1), \dots, y(q^{-n}) = y(1), \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

bulunur. Böylece $\forall x \in q^{\mathbb{Z}}$ için $y(x) = y(1)$ olduğu ispatlanır. Bu ise $y(x)$ fonksiyonunun $q^{\mathbb{Z}}$ üzerinde sabit olması demektir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Tanım 2.1.13. $0 < a < b$ olsun. q -integral

$$\int_a^b f(x) d_q x = (1-q)b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j b) \quad (2.1.9)$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 2.1.14. Eğer $x > 0$ ve f , q - geometrik A kümesinde tanımlı bir fonksiyon ise $[x, \infty)$ aralığında f fonksiyonunun Hahn q -integrali

$$\int_x^{\infty} f(t) d_q t = \sum_{k=1}^{\infty} x q^{-k} (1-q) f(x q^{-k})$$

şeklinde tanımlanır.

$[0, \infty)$ aralığında f fonksiyonu için q - integrasyonu

$$\int_0^{\infty} f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=\infty}^{\infty} q^n f(q^n)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $[0, \infty)$ aralığında tanımlı

$$\int_0^{\frac{\infty}{b}} f(t) d_q t = \frac{1-q}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n)(b) , (b > 0)$$

ifadesine Matsuo q - integrasyonu denir.

$\mathbb{R}$ de tanımlı bir f fonksiyonunun q -integrasyonu

$$\int_{-\frac{\infty}{b}}^{\frac{\infty}{b}} f(t) d_q t = \frac{1-q}{b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n [f(q^n(b)) + f(-q^n(b))] (b > 0)$$

olarak tanımlanır. Bu seriler yakınsaktır [3].

Tanım 2.1.15. f fonksiyonu q -geometrik A kümesinde tanımlı iken, $0 \in A$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z q^n) = f(0) \quad \forall z \in A \text{ için}$$

ise f fonksiyonuna sıfırda q - regülerdir denir. Eğer, A kümesi q^{-1} - geometrik ise f sonsuzda q -regülerdir [3].

Tanım 2.1.16. Eğer $A \subseteq \mathbb{R}$ kümesi q -geometrik ve A' da tanımlı f fonksiyonu sıfırda q -regüler ise $f(0^+)$ ve $f(0^-)$

$$f(0^+) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ x > 0}} f(xq^k), f(0^-) = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ x < 0}} f(xq^k)$$

olarak tanımlanır [3].

Eğer f , sıfırda q -regüler ise

$$f(0) = f(0^+) = f(0^-) \text{ dir.}$$

Sıfırda q -regülerlik bazı yerlerde klasik anlamda sürekliliğin rolünü oynar. Sıfırda süreklilik sıfırda q -regülerliği gerektirir. Fakat tersi doğru olmayabilir. Örneğin;

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, n \text{ asal ise} \\ x & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

rasyonel q lar için sıfırda q -regülerdir. Fakat sıfırda sürekli değildir.

Tanım 2.1.17. q -geometrik A kümesinde tanımlı f fonksiyonunun q -türevi sıfırdır gerek ve yeter şart $\forall x \in A$ için $f(x) = f(qx)$ dir. Bu fonksiyonlar q -periyodik fonksiyonlardır.

Teorem 2.1.8. f sıfırı içeren q -geometrik A kümesinde tanımlı ve sıfırda q -regüler olsun, bu takdirde

$$F(z) = \int_c^z f(t) d_q t, (z \in A)$$

eşitliği vardır. Burada c , sabit bir noktadır. F fonksiyonu sıfırda q -regülerdir. Ayrıca $D_q F(z) \forall z \in A$ için vardır ve

$$D_q F(z) = f(z), \forall z \in A \quad (2.1.10)$$

ise

$$\int_a^b D_q f(t) d_q t = f(b) - f(a) \quad (2.1.11)$$

olur.

İspat. F fonksiyonunun sıfırda q -regüler olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(zq^n) = F(0)$$

eşitliğini göstermemiz yeterlidir.

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_c^z f(t) d_q t \\ F(zq^n) &= \int_c^{zq^n} f(t) d_q t \\ &= (1-q)z \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} f(zq^{n+k}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F(zq^n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q)z \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} f(zq^{n+k}) \\ &= (1-q)z \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+k} f(zq^{n+k}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F(zq^n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

$$F(0) = \int_c^0 f(t) d_q t = (1-q)0 \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(0q^n) = 0. \tag{2.1.13}$$

(2.1.12) ve (2.1.13) eşitliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(zq^n) = F(0)$$

elde edilir. Yani $F(z)$ fonksiyonu sıfırda q -regüler olduğunu söyleriz. Şimdi de (2.1.10) eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$F(z) = \int_c^z f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} zq^n f(zq^n)$$

$$\begin{aligned}
D_q F(z) &= \frac{F(zq) - F(z)}{qz - z}, \\
&= \frac{1}{z(q-1)} \left[\int_c^{zq} f(t) d_q t - \int_c^z f(t) d_q t \right], \\
&= \frac{1}{z(q-1)} \left[(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} zq q^n f(zq q^n) - (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} zq^n f(zq^n) \right], \\
&= \frac{1}{z(q-1)} (1-q) z \left[\sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(zq^{n+1}) - \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(zq^n) \right], \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(zq^n) - \sum_{n=0}^{\infty} q^{n+1} f(zq^{n+1}), \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(zq^n) - \sum_{n=1}^{\infty} q^n f(zq^n), \\
&= q^0 f(zq^0) + (q f(zq) + q^2 f(zq^2) + \dots) - (q f(zq) + q^2 f(zq^2) + \dots), \\
&= f(z),
\end{aligned}$$

$$D_q F(z) = f(z),$$

Dolayısıyla (2.1.10) eşitliği sağlanır. Şimdi de

$$D_q F(z) = f(z),$$

eşitliğinde her iki tarafın q -türevi alınırsa

$$\int_a^b D_q f(z) d_q z = \int_a^b D_q (D_q F(z)) d_q z = D_q F(z) = f(z) = f(b) - f(a),$$

$$\int_a^b D_q f(z) d_q z = f(b) - f(a),$$

yani (2.1.11) eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.9. $0 < q < 1$ olsun. $|f(x)x^\alpha|$, bazı $0 \leq \alpha < 1$ için $(0, A]$ aralığında sınırlıdır.

$$\int_0^x f(t) d_q t = (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} xq^n f(xq^n)$$

ile tanımlı Jackson q -integrali $(0, A]$ aralığında $F(x)$ 'e yakınsar ki bu ise $f(x)$ in q -türevini verir.

İspat. Farzedelim ki $|f(x)x^\alpha| < M, (0, 1]$ olsun. $x \in (0, A]$ için $\forall j \geq 0$ için

$$\begin{aligned} |f(q^j x)(q^j x)^\alpha| &< M \\ |f(q^j x)| &< M(q^j x)^{-\alpha} \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafı q^j ile çarparsak

$$|f(q^j x)q^j| < Mq^j(q^j x)^{-\alpha}$$

olur. $j = 0$ dan ∞ a toplam alınırsa

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} (q^j x)q^j \right| < \sum_{j=0}^{\infty} Mx^{-\alpha}(q^{1-\alpha})^j = \frac{Mx^{-\alpha}}{1 - q^{1-\alpha}}, 1 - \alpha > 0, 0 < q < 1 \text{ iken}$$

bulunur. Böylece Jackson integralindeki toplam yakınsak geometrik seri yardımıyla büyütülür. Bu toplam $F(x)$ e yakınsar.

Teorem 2.1.10. f fonksiyonu $0 \leq a \leq b, [a, b]$ aralığında tanımlı olsun. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere α vardır öyleki $x^\alpha f(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli ve

$$F(x) = \int_0^x f(t)d_q t, x \in [a, b]$$

eşitliği sağlar. Burada $c, [a, b]$ aralığında sabit bir noktadır. $F(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.

İspat. $g(x) = x^\alpha f(x)$, $\forall x \in [0, a]$ alalım. $x_0 \in [a, b]$ ve $x_0 \neq 0$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} xq^k f(xq^k) - (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} x_0q^k f(x_0q^k) \\ &= (1 - q)x^{1-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} xq^{k(1-\alpha)} [g(xq^k) - g(x_0q^k)] \\ &\quad + x_0^\alpha (x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}) (1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k g(x_0q^k) \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

elde edilir. $g(x)$, $[a, b]$ aralığında sürekli olduğunda $[a, b]$ aralığında düzgün sürekli. Buradan $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall x, y \in [a, b]$ için $\delta > 0$ vardır öyleki $|x - y| < \delta \rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon$ dir. Bu nedenle eğer $x \in [a, b]$ ise $|x - x_0| < \delta, |xq^k - x_0q^k| < \delta \forall k \in \mathbb{N}_0$ için ve $|g(xq^k) - g(x_0q^k)| < \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}_0$ için buradan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(xq^k) = g(x_0q^k)$$

olur. (2.1.14) koşulundaki serilerde $x \rightarrow x_0$ yaklaşırken limiti hesaplayabiliriz. Bu nedenle

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

elde edilir. $x_0 = 0$ olduğunu farzedelim,

$$F(x) - F(0) = \int_0^x f(t) d_q t = \int_0^x t^{1-\alpha} (g(t) - g(0)) d_q t + \frac{1-q}{1-q^{2-\alpha}} x^{2-\alpha} g(0) \text{ olur.}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$|F(x) - F(0)| \leq \left(\max_{k \in \mathbb{N}_0} |g(xq^k) - g(0)| + g(0) \right) \frac{1-q}{1-q^{2-\alpha}} x^{2-\alpha}$$

$0 < \alpha < 1$ olduğundan ve 0 da g fonksiyonun sürekliliğinden

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

elde edilir. Bu ise $F(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.11. $h(t, x)$, $[0, a] \times [0, a]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Öyleki her bir t sabiti için

$$D_{q,x}^j h(t, x), (j = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1)$$

fonksiyonları $[0, a]$ aralığında q -integrallenebilirdir. Eğer $x \in [0, a]$ ve $k \in \mathbb{N}$ için

$$h(xq^r, xq^j) = 0, (r = 0, 1, 2, 3, \dots, j-1; j = 1, 2, \dots, k)$$

$$D_{q,x}^k \int_0^x h(t, x) d_q t = \int_0^x D_{q,x}^k h(t, x) d_q t \quad (2.1.15)$$

dir.

İspat. Teorem 2.1.6 ifadesinden

$$D_q^n f(x) = (-1)^{-n} (1-q)^{-n} x^{-n} q^{\frac{-n(n-1)}{2}} \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q q^{\frac{r(r-1)}{2}} f(xq^{n-r})$$

denkleminde yararlanarak

$$\begin{aligned} D_{q,x}^k \int_0^x h(t, x) d_q t &= (-1)^{-k} (1-q)^{-k} x^{-k} q^{\frac{-k(k-1)}{2}} \sum_{j=0}^k (-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q \int_0^{xq^{k-j}} h(t, xq^{k-j}) d_q t, \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^{j+k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q \frac{q^{\frac{-k^2+k}{2}} q^{\frac{j^2-j}{2}}}{x^k (1-q)^k} \int_0^{xq^{k-j}} h(t, xq^{k-j}) d_q t, \\ &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q \frac{q^{\frac{j(j+1)}{2} - kj}}{x^k (1-q)^k} \int_0^{xq^j} h(t, xq^j) d_q t, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^{xq^j} h(t, xq^j) d_q t = \int_0^x h(t, xq^j) d_q t, j = 1, 2, \dots, k$$

eşitliğinin var olduğunu gösterebiliriz.

$$\begin{aligned} \int_0^{xq^j} h(t, xq^j) d_q t &= (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} xq^j q^n h(xq^j q^n, xq^j), \\ &= (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^{j+n} h(xq^{j+n}, xq^j), \\ &= (1-q)x \sum_{m=0}^{\infty} q^m h(xq^m, xq^j) = 0, \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

$$\int_0^x h(t, xq^j) d_q t = (1-q)x \sum_{n=0}^{\infty} q^n h(xq^n, xq^j) = 0 \quad (2.1.18)$$

bulunur. Dolayısıyla (2.1.17) ve (2.1.18) eşitliğinden

$$\int_0^{xq^j} h(t, xq^j) d_q t = \int_0^x h(t, xq^n) d_q t$$

yazılır. Şimdi bulduğumuz eşitliği (2.1.16) numaralı denklemde yerine yazarsak

$$\begin{aligned} D_{q,x}^k \int_0^x h(t, x) d_q t &= \sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q \frac{q^{\frac{j(j+1)}{2} - kj}}{x^k (1-q)^k} \int_0^x h(t, xq^j) d_q t, \\ &= \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{j=k} (-1)^j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q \frac{q^{\frac{j(j+1)}{2} - kj}}{x^k (1-q)^k} h(t, xq^j) \right) d_q t, \\ &= \int_0^x D_{q,x}^k h(t, x) d_q t, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (2.1.15) denkleminin sağlandığını gösterir.

Tanım 2.1.18. q pozitif bir sayı ve z de kompleks bir sayı olmak üzere q -üstel fonksiyon e_q^z

$$e_q^z = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - (1-q)q^k z)^{-1}, \quad (2.1.19)$$

şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.1.19. q pozitif bir sayı ve z de kompleks bir sayı olmak üzere q -üstel fonksiyon E_q^z

$$E_q^z = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + (1-q)q^k z), \quad (2.1.20)$$

şeklinde tanımlanır [6].

Tanım 2.1.20. e_q^z, q -üstel fonksiyonunun seri açılımı

$$e_q^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[n]!}, \quad (2.1.21)$$

şeklinde ifade edilir [6].

Tanım 2.1.21. E_q^z, q -üstel fonksiyonunun seri açılımı

$$E_q^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{[\tilde{n}]!}, \quad (2.1.22)$$

şeklinde ifade edilir [6]. Burada

$$[n]! = [1][2][3]\dots[n] \quad [k] = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}$$

$$[\tilde{n}]! = [\tilde{1}][\tilde{2}][\tilde{3}]\dots[\tilde{n}] \quad [\tilde{k}] = 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{k-1}}$$

eşitlikleri vardır. Burada $[n]!$ ve $[\tilde{n}]!$ arasındaki bağıntı

$$[\tilde{n}]! = q^{\frac{n(1-n)}{2}} [n]! \quad (2.1.23)$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.22. q -sinüs ve q -kosinüs fonksiyonları

$$\sin_q z = \frac{e_q^{iz} - e_q^{-iz}}{2i}, \quad \cos_q z = \frac{e_q^{iz} + e_q^{-iz}}{2}, \quad |z| < 1$$

$$\text{Sin}_q z = \frac{E_q^{iz} - E_q^{-iz}}{2i}, \quad \text{Cos}_q z = \frac{E_q^{iz} + E_q^{-iz}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 2.1.23. $\ln$ fonksiyonunun q analizdeki karşılığı

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}$$

şeklinde tanımlanır [7].

Teorem 2.1.12. x ve y 'nin çarpımının $\ln_q$ fonksiyonu

$$\ln_q(x.y) = \ln_q x + \ln_q y + (1-q)(\ln_q x)(\ln_q y)$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Eşitliğin sağ tarafının doğru olduğunu kabul edip sol tarafının doğruluğunu göstereyim,

$$\begin{aligned}
& \ln_q x + \ln_q y + (1-q)(\ln_q x)(\ln_q y), \\
&= \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} + \frac{y^{1-q} - 1}{1-q} + (1-q) \left(\frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \right) \left(\frac{y^{1-q} - 1}{1-q} \right), \\
&= \frac{x^{1-q} - 1 + y^{1-q} - 1}{1-q} + (1-q) \left(\frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \right) \left(\frac{y^{1-q} - 1}{1-q} \right), \\
&= \frac{x^{1-q} + y^{1-q} - 2}{1-q} + \frac{x^{1-q}y^{1-q} - x^{1-q} - y^{1-q} + 1}{1-q}, \\
&= \frac{x^{1-q}y^{1-q} - 1}{1-q} = \frac{(xy)^{1-q} - 1}{1-q} = \ln_q(xy).
\end{aligned}$$

Tanım 2.1.24. $1 \leq \rho < \infty, a > 0$ ve η bir reel sayı olsun. $L_{q,\eta}^\rho(0, a)$ uzayı

$$\int_0^a t^\eta |f(t)|^\rho d_q t < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonların tüm denklik sınıflarının uzayıdır. $L_{q,\eta}^\rho(0, a)$ uzayında bir f fonksiyonu alalım.

$$\|f\|_{\rho,\eta,a} = \left(\int_0^a t^\eta |f(t)|^\rho d_q t \right)^{\frac{1}{\rho}},$$

norm fonksiyonu ile birlikte $L_{q,\eta}^\rho(0, a)$ uzayı Banach uzayıdır. Eğer $\rho = 2$ ise

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a t^\eta f(t) \overline{g(t)} d_q t, (f, g \in L_{q,\eta}^2(0, a))$$

iç çarpım ile birlikte $L_{q,\eta}^2(0, a)$ uzayı ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır [3].

Tanım 2.1.25. Bir η reel sayısı ve bir pozitif ρ sayısı için

$$\|f\|_{\rho,\eta} = \sup_{x \in (0,a]} \left(\int_0^x t^\eta |f(t)|^\rho d_q t \right)^{\frac{1}{\rho}} < \infty,$$

şartını sağlayan $(0, a]$ aralığında tanımlı tüm f fonksiyonlarının uzayı olan $\mathcal{L}_{q,\eta}^\rho[0, a]$ uzayı tanımlanır [3].

Teorem 2.1.13. $(\mathcal{L}_{q,\eta}^\rho[0, a], \|\cdot\|_{\rho,\eta})$ uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat. $(\mathcal{L}_{q,\eta}^\rho[0, a], \|\cdot\|_{\rho,\eta})$ uzayı bir normlu uzaydır. Şimdi bu uzayın tam bir uzay olduğunu gösterelim. $(f_n)_n$, $(\mathcal{L}_{q,\eta}^\rho[0, a], \|\cdot\|_{\rho,\eta})$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Burada $\forall \varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$n, m > n_0 \rightarrow \sup_{x \in [0, a]} \sum_{k=0}^{\infty} (xq^k)^{\eta+1} (1-q) |f_n(xq^k) - f_m(xq^k)|^\rho < \varepsilon, \quad (2.1.24)$$

olur. Buradan $x^{\frac{\eta+1}{\rho}} f_n(x)$, $(0, a]$ aralığında Cauchy dizisi tektir. $(0, a]$ aralığında tanımlı bir f fonksiyonu vardır öyleki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{\eta+1}{\rho}} f_n(x) = x^{\frac{\eta+1}{\rho}} f(x),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{\eta+1}{\rho}} f_n(x) = x^{\frac{\eta+1}{\rho}} f(x),$$

bulunur. $M > 0$ ve $n > n_0$ olsun (2.1.24) den

$$m > n_0 \rightarrow \sum_{k=0}^M (xq^k)^{\eta+1} (1-q) |f_n(xq^k) - f_m(xq^k)|^\rho < \varepsilon, \forall x \in (0, a] \text{ için} \quad (2.1.25)$$

$m \rightarrow \infty$ yaklaşırken limit hesaplanırsa $\forall M > 0$ ve $n > n_0$

$$\sum_{k=0}^M (xq^k)^{\eta+1} (1-q) |f_n(xq^k) - f(xq^k)|^\rho \leq \varepsilon \forall x \in (0, a]$$

olmak üzere buradan $\|f_n - f\|_{\rho,\eta} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ iken $f_{n_0+1} - f \in (\mathcal{L}_{q,\eta}^\rho[0, a], \|\cdot\|_{\rho,\eta})$, $f_{n_0+1} \in (\mathcal{L}_{q,\eta}^\rho[0, a], \|\cdot\|_{\rho,\eta})$ olduğundan $f \in (\mathcal{L}_{q,\eta}^\rho[0, a], \|\cdot\|_{\rho,\eta})$ olur. Bu da ispatı tamamlar.

Tanım 2.1.26. $C_q^n[a, b]$, $[a, b]$ aralığında $(n-1)$. mertebeden sürekli q -türevlerle birlikte tüm sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $C_q^n[a, b]$ uzayı,

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n-1} \max_{0 \leq x \leq b} |D_q^k f(t)|, (f \in C_q^n[a, b])$$

norm fonksiyonu ile birlikte Banach uzayıdır [3].

Teorem 2.1.14. $(C_q^n[a, b], \|\cdot\|)$ uzayı Banach uzayıdır.

İspat. $(C_q^n[a, b], \|\cdot\|)$ uzayı bir normlu uzaydır. Şimdi $C_q^n[a, b]$ nin tam olduğunu gösterelim. $(f_m)_m$, $C_q^n[a, b]$ aralığında Cauchy dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $\forall l, m \in \mathbb{N}$ için

$$l, m > n_0 \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \max_{x \in [a, b]} |D_q^k f_l(x) - D_q^k f_m(x)| < \varepsilon$$

ifadesi sağlanır. Buradan

$$l, m > n_0 \rightarrow \max_{x \in [a, b]} |D_q^k f_l(x) - D_q^k f_m(x)| < \varepsilon$$

$(D_q^k f_m)_m$ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ için $C[a, b]$ de Cauchy dizisidir. Buna göre her bir $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ için bir $g_k \in C[a, b]$ fonksiyonu vardır öyleki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |D_q^k f(x) - g_k(x)| = 0, k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$$

$$g_k(x) = D_q^k g_0(x), x \in [a, b] \setminus \{0\}, (k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1) \quad (2.1.26)$$

tamdır. Eğer $0 \in (a, b)$ ise

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0} D_q^k g_0(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} D_q^k g_0(tq^r) \quad \forall t \in (a, b) \text{ için,}$$

$t \neq 0$ olsun. Gerçekten ,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g_k(x) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{D_q^{k-1} g_0(tq^r) - D_q^{k-1} g_0(tq^{r+1})}{tq^r(1-q)} \\ &= D_q^k g_0(0), \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

buradan ve $g_0 \in C_q^n[a, b]$ den dolayı (2.1.26) eşitliği her $x \in [a, b]$ için sağlanır. Eğer $a = 0$ ya da $b = 0$ ise sırasıyla (2.1.27) de $x \rightarrow 0$ yaklaşırken limit $x \rightarrow 0^+$ ya da $x \rightarrow 0^-$ ile yer değiştirebilir.

3. q -STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL TEORİSİ

3.1 q -Sturm-Liouville Problemi

Tanım 3.1.1. $L_q^2(0,a)$, $[0,a]$ aralığında tanımlı tüm kompleks değerli fonksiyonlar uzayı olsun öyleki,

$$\|f\| = \left(\int_0^a |f(x)|^2 d_q x \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

şeklinde tanımlanır. $L_q^2(0,a)$ uzayı

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a f(x) \overline{g(x)} d_q x, f, g \in L_q^2(0, a),$$

iç çarpım ile birlikte ayrılabilir Hilbert uzayıdır [8].

Tanım 3.1.2. $C_q^2[a, b]$, $[a, b]$ aralığında sürekli, birinci mertebeden q -türevlerle birlikte tüm sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $C_q^2[a, b]$ uzayı,

$$\|f\| = \sum_{k=0}^1 \max_{0 \leq x \leq b} |D_q^k f(t)|, (f \in C_q^2[a, b]),$$

norm fonksiyonu ile birlikte Banach uzayıdır. $C_q^2(0)$ uzayı $L_q^2(0,a)$ Hilbert uzayının bir alt uzayıdır [3].

Tanım 3.1.3. L herhangi bir elemanlar cümlesi üzerinde tanımlanmış bir operatör olsun. $y \neq 0$ olmak üzere $Ly = \lambda y$ eşitliğini sağlayan y, L operatörünün özfonksiyonu, λ ise özdeğeri olsun.

$$Ly = -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x) + v(x)y(x) = \lambda y(x), (0 \leq x \leq a < \infty; \lambda \in \mathbb{C}) \quad (3.1.1)$$

şeklinde tanımlı operatöre q -Sturm-Liouville operatörü denir. Burada $v(x)$, $[0,a]$ kapalı aralığında tanımlı ve 0'da sürekli olan bir fonksiyondur. Ayrıca $y(x) \in C_q^2(0)$ olmak üzere $y(x)$ ve $D_q y(x)$ fonksiyonları $[0,a]$ aralığında sürekli ve $Ly \in L_q^2(0,a)$ dir [8].

Tanım 3.1.4. L , q - Sturm-Liouville operatörü için (3.1.1) denklemini ve

$$\begin{aligned} U_1(y) &= a_{11}y(0) + a_{12}D_{q^{-1}}y(0) = 0, \\ U_2(y) &= a_{21}y(a) + a_{22}D_{q^{-1}}y(a) = 0, \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

sınır şartlarını göz önüne alalım. (3.1.1) ve (3.1.2) sınır değer problemi literatürde q -Sturm-Liouville problemi olarak bilinir. Burada $v(\cdot)$ reel değerli fonksiyonu 0'da sürekli ve $\{a_{ij}\}$, $i, j \in \{1, 2\}$ keyfi reel sayılardır [3].

Tanım 3.1.5. f ve g fonksiyonları sürekli ve ikinci mertebeden q - türevli fonksiyonlar olsun. $f, g \in C_q^2[0, a]$ ve f ve g fonksiyonlarının q -Wronskian determinanı

$$W_q(f, g)(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ D_q f(x) & D_q g(x) \end{vmatrix}, x \in [0, a] \quad (3.1.3)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Tanım 3.1.6. Terimleri herhangi bir $X \subseteq D$ bölgesinde tanımlı olan $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ fonksiyon serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_n(x)\}$,

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$$

olsun. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $n_0(\varepsilon, x) > 0$ olmak üzere, $\forall x \in X$ için,

$$|s_n(x) - s(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $n > n_0(\varepsilon)$ sayıları bulunabiliyorsa,

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

serisine, X kümesinde düzgün yakınsak fonksiyon serisi ve $s(x)$ ' e de serinin limiti denir [9].

Tanım 3.1.7. $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasında $f'(z_0)$ türevi mevcut ve z_0 noktasının bir $D_\varepsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \varepsilon\}$ komşuluğundaki her noktada türevi varsa bu durumda f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [10].

Tanım 3.1.8. Kompleks düzlemin tamamında analitik olan bir fonksiyona tam fonksiyon denir [10].

Teorem 3.1.1. (3.1.1) denkleminin,

$$\phi(0, \lambda) = c_1, D_{q^{-1}}\phi(0, \lambda) = c_2, \lambda \in \mathbb{C}, c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad (3.1.4)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü $\phi(x, \lambda)$ olsun. Bu takdirde $x \in [0, a]$ olacak biçimde $C_q^2(0)$ uzayında bir tek $\phi(x, \lambda)$ çözümü vardır. Ayrıca, $\forall x \in [0, a]$ için $\phi(x, \lambda)$ çözümü λ' ya göre bir tam fonksiyondur.

Teorem 3.1.2. $0 \leq \gamma < 1$ olsun. Eğer (3.1.1) denkleminde tanımlanan $v(x)$ fonksiyonu $[0, a]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ise (3.1.1) denklemin (3.1.4) başlangıç şartlarını sağlayan bir tek $\phi(x, \lambda)$ çözümüne sahiptir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Ayrıca, $\forall x \in [0, a]$ için $\phi(x, \lambda)$ çözümü λ' ya göre bir tam fonksiyondur.

İspat. $\varphi_1(x, \lambda) = \cos(sx; q)$ ve $\varphi_2(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin(sx; q)}{s}, & \lambda \neq 0 \\ x, & \lambda = 0 \end{cases}$

fonksiyonlarını ele alalım. Burada $s = \sqrt{\lambda}$ olarak tanımlandı. $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları

$$\frac{1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x) + \lambda y(x) = 0$$

denkleminin çözümleridir ve $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarının q -Wronskianı $W_q(\varphi_1(\cdot, \lambda), \varphi_2(\cdot, \lambda)) \equiv 1$ olduğunu gösterelim.

$\lambda = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} W_q(\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda)) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \lambda) & \varphi_2(x, \lambda) \\ D_q \varphi_1(x, \lambda) & D_q \varphi_2(x, \lambda) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(sx; q) & x \\ D_q \cos(sx; q) & D_q x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(sx; q) & x \\ \frac{\cos(sqx; q) - \cos(sx; q)}{qx - x} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \cos(sx; q) - x \left(\frac{\cos(sqx; q) - \cos(sx; q)}{qx - x} \right) \\ &= \cos(sx; q) - \frac{(\cos(sqx; q) - \cos(sx; q))}{q - 1} \\ &= \frac{q \cos(sx; q) - \cos(sx; q) - \cos(sqx; q) + \cos(sx; q)}{q - 1} \\ &= \frac{q \cos(sx; q) - \cos(sqx; q)}{q - 1}, \quad \lambda = 0, \quad s = \sqrt{\lambda} \Rightarrow s = 0 \\ &= \frac{q - 1}{q - 1} = 1. \end{aligned}$$

$\lambda \neq 0$ olsun.

$$\begin{aligned}
W_q(\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda)) &= \begin{vmatrix} \varphi_1(x, \lambda) & \varphi_2(x, \lambda) \\ D_q \varphi_1(x, \lambda) & D_q \varphi_2(x, \lambda) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos(sx; q) & \frac{\sin(sx; q)}{s} \\ D_q \cos(sx; q) & D_q \frac{\sin(sx; q)}{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(sx; q) & \frac{\sin(sx; q)}{s} \\ \frac{\cos(sqx; q) - \cos(sx; q)}{qx - x} & \frac{\frac{\sin(sqx; q)}{s} - \frac{\sin(sx; q)}{s}}{qx - x} \end{vmatrix} \\
&= \cos(sx; q) \left(\frac{\frac{\sin(sqx; q)}{s} - \frac{\sin(sx; q)}{s}}{qx - x} \right) - \frac{\sin(sx; q)}{s} \left(\frac{\cos(sqx; q) - \cos(sx; q)}{qx - x} \right) \\
&= \frac{\cos(sx; q) \sin(sqx; q) - \cos(sx; q) \sin(sx; q) - \sin(sx; q) \cos(sqx; q) + \sin(sx; q) \cos(sx; q)}{s(qx - x)} \\
&= \frac{\cos(sx; q) \sin(sqx; q) - \sin(sx; q) \cos(sqx; q)}{s(qx - x)} \\
&= \frac{\sin(sqx - sx; q)}{s(qx - x)} \equiv 1,
\end{aligned}$$

Buradan $\lambda = 0$ ve $\lambda \neq 0$ olması durumunda $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarının q -Wronskianı $W_q(\varphi_1(\cdot, \lambda), \varphi_2(\cdot, \lambda)) \equiv 1$ olduğu gösterildi. Şimdi

$$y_1(x, \lambda) = c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda) \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned}
y_{m+1}(x, \lambda) &= c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda) \\
&- q \int_0^x \{ \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(qt, \lambda) \} v(qt) y_m(qt, \lambda) d_q t. \quad (3.1.6)
\end{aligned}$$

şeklinde olsun. $\{y_m(\cdot, \lambda)\}_{m=1}^\infty$ ardışık yaklaşımlar dizisi için $m \rightarrow \infty$ iken y_m 'nin her bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sabitlenmiş için düzgün limitinin var olduğunu ve (3.1.1) ve (3.1.4) Sturm-Liouville probleminin bir çözümü olduğunu ispatlıyoruz. $\lambda \in \mathbb{C}$ sabitlenmiş olsun. $v(x) \in [0, a]$ aralığında sürekli olduğu için sınırlıdır.

Yani $|v(x)| \leq A$ dır. $|y_1(x, \lambda)| \leq \tilde{K}(\lambda)$ ve $|\varphi_i(x, \lambda)| \leq \sqrt{\frac{K(\lambda)}{2}}$, ($i = 1, 2$; $x \in [0, a]$) olacak şekilde $K(\lambda)$, $\tilde{K}(\lambda)$ ve A pozitif sayıları vardır.

Böylece $m = 1$ için (3.1.6) denklemi

$$y_2(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) - q \int_0^x \{ \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(qt, \lambda) \} v(qt) y_1(qt, \lambda) d_q t$$

şeklinde olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
& |y_2(x, \lambda) - y_1(x, \lambda)| \\
&= \left| -q \int_0^x \{\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)\} v(qt) y_1(qt, \lambda) d_q t \right| \\
&\leq q \int_0^x |\{\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)\}| |v(qt)| |y_1(qt, \lambda)| d_q t \\
&\leq q \int_0^x \{|\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda)| + |\varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)|\} |v(qt)| |y_1(qt, \lambda)| d_q t \\
&\leq qK(\lambda)A\tilde{K}(\lambda) \int_0^x d_q t \\
&= qK(\lambda)A\tilde{K}(\lambda)(1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j = qK(\lambda)A\tilde{K}(\lambda)x \tag{3.1.7}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$m = 2$ için

$$y_3(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) - q \int_0^x \{\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)\} v(qt) y_2(qt, \lambda) d_q t \tag{3.1.8}$$

$$y_2(x, \lambda) = y_1(x, \lambda) - q \int_0^x \{\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)\} v(qt) y_1(qt, \lambda) d_q t \tag{3.1.9}$$

(3.1.8) eşitliğinden (3.1.9) çıkarılıp eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
& |y_3(x, \lambda) - y_2(x, \lambda)| \\
&= \left| -q \int_0^x \{\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)\} v(qt) [y_1(qt, \lambda) - y_2(qt, \lambda)] d_q t \right| \\
&\leq |q| \int_0^x |\{\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)\}| |v(qt)| |[y_1(qt, \lambda) - y_2(qt, \lambda)]| d_q t \\
&\leq |q| \int_0^x \{|\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda)| + |\varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)|\} \\
&\quad \times A \left| q \int_0^x \{\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(qt, \lambda)\} v(qt) y_1(qt, \lambda) d_q t \right| \\
&\leq q^3 K^2(\lambda) A^2 \tilde{K}(\lambda) \int_0^x x d_q t \\
&= q^3 K^2(\lambda) A^2 \tilde{K}(\lambda) (1-q)x \sum_{j=0}^{\infty} q^j q^j x \\
&= q^3 K^2(\lambda) A^2 \tilde{K}(\lambda) (1-q)x^2 \frac{1}{1-q^2} \\
&= q^3 K^2(\lambda) A^2 \tilde{K}(\lambda) x^2 \frac{1}{1+q}
\end{aligned}$$

olur. Böylece bu süreci devam ettirirsek,

$$|y_{m+1}(x, \lambda) - y_m(x, \lambda)| \leq \tilde{K}(\lambda) q^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(AK(\lambda)x(1-q))^m}{(q; q)_m}, (m \in \mathbb{N}). \quad (3.1.10)$$

sonucu bulunur. Buradan Weierstrass M- testi'nden

$$y_1(x, \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} y_{m+1}(x, \lambda) - y_m(x, \lambda) \quad (3.1.11)$$

serileri $[0, a]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Serinin m . kısmi toplamı yalnızca y_{m+1} olduğundan $y_{m+1}(\cdot, \lambda)$, $m \rightarrow \infty$ iken $[0, a]$ aralığında yakınsak bir $\phi(\cdot, \lambda)$ fonksiyonuna yaklaşır. Burada $\phi(\cdot, \lambda)$ serilerin toplamıdır. Teorem 2.1.10 'u kullanarak $y_m(x, \lambda)$ ve $D_q y_m(x, \lambda)$ fonksiyonlarının $[0, a]$ aralığında sürekli olduğunu m de tümevarım ile ispatlayabiliriz.

$$\begin{aligned} D_q y_{m+1}(x, \lambda) &= c_1 D_q \varphi_1(x, \lambda) + c_2 D_q \varphi_2(x, \lambda) \\ &\quad - q \int_0^x \{D_q \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(qt, \lambda) - D_q \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(qt, \lambda)\} y_m(qt, \lambda) d_q t, \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}$. Bu nedenle hem $\phi(x, \lambda)$ hem de $D_q \phi(x, \lambda)$ fonksiyonları $[0, a]$ aralığında sürekli dir. Buna göre $\phi(\cdot, \lambda) \in C_q^2(0)$ dir. Düzgün yakınsaklıktan dolayı (3.1.6) ' da $m \rightarrow \infty$ olursa

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda) \\ &\quad - q \int_0^x \{\varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(qt, \lambda)\} v(qt, \lambda) d_q t, \end{aligned}$$

elde edilir. Açıkça $\phi(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) ve (3.1.4)' i sağlar. Tek çözüme sahip (3.1.1) ve (3.1.4) problemini ispatlamak için $\psi_i(\cdot, \lambda)$, $i = 1, 2$ fonksiyonunun (3.1.1) ve (3.1.4)' nin iki çözümü olduğunu varsayalım.

$$\chi(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda) - \psi_2(x, \lambda), x \in [0, a]$$

olsun. $\chi(x, \lambda)$ fonksiyonu

$$\chi(0, \lambda) = D_{q^{-1}} \chi(0, \lambda) = 0$$

başlangıç şartlarına bağlı (3.1.1) ' in bir çözümüdür. (3.1.1)' de iki defa q - integral alınırsa,

$$\chi(x, \lambda) = -q \int_0^x (x - qt)(\lambda - v(qt)) \chi(qt, \lambda) d_q t \quad (3.1.12)$$

elde edilir. $\chi(x, \lambda)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $[0, a]$ aralığında sürekli olduğundan M_λ , N_λ pozitif sayıları vardır öyleki

$$N_\lambda = \max_{0 \leq x \leq a} |\chi(x, \lambda)|, \quad M_\lambda = \max_{0 \leq x \leq a} |\lambda - v(x)|. \quad (3.1.13)$$

Buradan (3.1.12) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınır

$$\begin{aligned} |\chi(x, \lambda)| &= \left| -q \int_0^x (x - qt)(\lambda - v(qt))\chi(qt, \lambda) d_q t \right| \\ &\leq | -q | \left| \int_0^x (x - qt)(\lambda - v(qt))\chi(qt, \lambda) d_q t \right| \\ &\leq q \int_0^x |x - qt| |\lambda - v(qt)| |\chi(qt, \lambda)| d_q t \\ &\leq q M_\lambda N_\lambda \int_0^x x d_q t \\ &= q M_\lambda N_\lambda \frac{x^2}{1 + q}, \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeyi k için genelleştirirsek

$$|\chi(x, \lambda)| \leq N_\lambda M_\lambda^k q^{k^2} (1 - q)^{2k} \frac{x^{2k}}{(q; q)_{2k}}, \quad (k \in \mathbb{N}_0; x \in [0, a]) \quad (3.1.14)$$

bulunur.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_\lambda M_\lambda^k q^{k^2} (1 - q)^{2k} \frac{x^{2k}}{(q; q)_{2k}} = 0$$

olduğunda $\forall x \in [0, a]$ için $\chi(x, \lambda) = 0$ dir. Bu da teklifi ispatlar. Şimdi keyfi ve sabit bir $M > 0$ sayısını alalım. $\phi(x, \lambda)$ çözümünü $x \in [0, a]$, $\phi(x, \lambda)$ 'nın her bir Ω_M diskinde analitik için λ ' da tam olduğunu göstermek yeterlidir. $\Omega_M = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}$ dir.

$$\forall x \in [0, a] \text{ için } y_m(x, \lambda), \quad \Omega_M \text{ diskinde analitiktir.} \quad (3.1.15)$$

$$\forall \lambda \in \Omega_M \text{ için } \frac{\partial}{\partial \lambda} y_m(x, \lambda), \quad (0, \lambda) \text{ aralığında süreklidir.} \quad (3.1.16)$$

Açıkça , her bir sabit $x \in [0, a]$ için $\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları λ 'nın tam fonksiyonlarıdır. Üstelik $\frac{\partial}{\partial \lambda} \phi_i(x, \lambda)$, her bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $(0, \lambda)$ aralığında süreklidir. $m = 1$ için (3.1.15) ve (3.1.16) sağlar. Şimdi $m \in \mathbb{N}$ için (3.1.15) ve (3.1.16) ifadelerinin sağlandığını farzedelim. Sonra $x \in [0, a]$, $\lambda_0 \in \Omega_M$ için (3.1.6) denkleminin her iki tarafının λ ' ya göre türevi alınır

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \lambda} y_{m+1}(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial \lambda} y_1(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\
& -q \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_2(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \int_0^{x_0} \varphi_1(qt, \lambda) y_m(qt, \lambda) d_q t \\
& +q \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_1(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \int_0^{x_0} \varphi_2(qt, \lambda) y_m(qt, \lambda) d_q t \\
& -q \varphi_2(x_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_0^{x_0} \varphi_1(qt, \lambda) y_m(qt, \lambda) d_q t \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\
& +q \varphi_1(x_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_0^{x_0} \varphi_2(qt, \lambda) y_m(qt, \lambda) d_q t \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \tag{3.1.17}
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1.16) ifadesinden

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_i(qt, \lambda) y_m(qt, \lambda)), \quad (i=1,2)$$

sonucuna ulaşılır. Bu $(0, \lambda_0)$ aralığında süreklidir. Dolayısıyla öyle bir C sabiti ve $\delta > 0$ sayıları vardır

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_i(x_0 q^n, \lambda) y_m(x_0 q^n, \lambda)) \right| \leq C, \quad (n \in \mathbb{N}; |\lambda - \lambda_0| \leq \delta)$$

olur. Buradan $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ diskinde $\forall \lambda$ için

$$x_0(1-q)q^n \left| \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_i(x_0 q^{n+1}, \lambda) y_m(x_0 q^{n+1}, \lambda)) \right| \leq x_0 A(1-q)q^n, \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

dir. Yani q integrallere karşılık gelen seriler

$$\int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_i(qt, \lambda) y_m(qt, \lambda)) d_q t, \quad (i = 1, 2) \tag{3.1.18}$$

$\lambda = \lambda_0$ ' ın bir komşuluğunda düzgün yakınsaktır. Böylece, türev ve (3.1.17) de q -integrallerin yeri değiştirebilir. x_0, λ_0 keyfi olduğundan $\forall x \in [0, a], \lambda \in \Omega_M$ için

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} y_{m+1}(x, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} y_1(x, \lambda) - q \int_0^x \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_2(x, \lambda) \varphi_1(qt, \lambda) y_m(qt, \lambda)) v(qt) d_q t \\
&+ q \int_0^x \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_1(x, \lambda) \varphi_2(qt, \lambda) y_m(qt, \lambda)) v(qt) d_q t \tag{3.1.19}
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.16) ifadesinden (3.1.19) eşitliğindeki integraller $(0, \lambda)$ aralığında sürekli-
lidirler. Buna göre $\frac{\partial}{\partial \lambda} y_{m+1}(x, \lambda)$ fonksiyonları da $(0, \lambda)$ aralığında sürekli-
dirlir. $x_0 \in [0, a]$ keyfi noktasını alalım. Sonra $B(x_0)$, $\tilde{B}(x_0) > 0$ vardır öyleki

$$|\varphi_i(x_0, \lambda)| \leq \sqrt{\frac{B(x_0)}{2}}, (i = 1, 2), y_1(x, \lambda) \leq \tilde{B}(x_0), (\lambda \in \Omega_M) \text{ dır.}$$

olur. Son olarak (3.1.6) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değerini alıp, tümevarım
metodu kullanarak bu eşitsizliği bütün $m \in \mathbb{N}$ sayıları için genelleştirsek

$$|y_{m+1}(x_0, \lambda) - y_m(x_0, \lambda)| \leq \tilde{B}(x_0) q^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{(AB(x_0)\lambda(1-q))^m}{(q; q)_m}, (m \in \mathbb{N}). \quad (3.1.20)$$

eşitsizliği bulunur. Buna göre (3.1.11) serileri $x = x_0$ noktasında Ω_M diskinde $\phi(x_0, \lambda)$
fonksiyonuna düzgün yakınsaktır. Buradan $\phi(x_0, \lambda)$ fonksiyonu Ω_M diskinde analitiktir.
Yani $\phi(x_0, \lambda)$ fonksiyonu λ 'ya göre tam fonksiyondur.

3.2. Self Adjoint Problem

Tanım 3.2.1. $\forall y, z \in L_q^2(0, a)$ fonksiyonlarını ele alalım. q -Lagrange özdeşliği

$$\langle Ly, z \rangle - \langle y, Lz \rangle = \int_0^a \left(Ly(x) \overline{z(x)} - y(x) \overline{Lz(x)} \right) d_q x = [y, z]_a - \lim_{n \rightarrow \infty} [y, z](aq^n) \quad (3.2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$[y, z]_x = y(x) \overline{D_{q^{-1}} z(x)} - D_{q^{-1}} y(x) \overline{z(x)} \quad (3.2.2)$$

şeklindedir [8].

Teorem 3.2.1. $L_q^2(0, a)$ uzayında $f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ fonksiyonlarını alalım. Bu fonksiyonlar
 $[0, q^{-1}a]$ aralığında tanımlı olsun. $x \in (0, q^{-1}a]$ için aşağıdaki bağıntılar mevcuttur.

$$D_q g(xq^{-1}) = D_{q, xq^{-1}} g(xq^{-1}) = D_{q^{-1}} g(x), \quad (3.2.3)$$

$$\langle D_q f, g \rangle = f(a) \overline{g(aq^{-1})} - \lim_{n \rightarrow \infty} f(aq^n) \overline{g(aq^{n-1})} + \langle f, \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} g \rangle, \quad (3.2.4)$$

$$\langle \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} f, g \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} f(aq^{n-1}) \overline{g(aq^n)} - f(aq^{-1}) \overline{g(a)} + \langle f, D_q g \rangle. \quad (3.2.5)$$

İspat. Şimdi (3.2.3) eşitliğini ispatlayalım.

$$\begin{aligned} D_{q^{-1}}g(x) &= \frac{g(qxq^{-1}) - g(xq^{-1})}{qxq^{-1} - xq^{-1}} = \frac{g(x) - g(xq^{-1})}{x(1 - q^{-1})} \\ &= \frac{g(xq^{-1}) - g(x)}{xq^{-1}(1 - q)} = D_qg(xq^{-1}) = D_{q,xq^{-1}}g(xq^{-1}). \end{aligned}$$

Şimdi (3.2.4) eşitliğini kısmi q -integrasyon formülü olan

$$\int_0^a g(t) D_q f(t) d_q t = (f.g)(a) - \lim_{n \rightarrow \infty} (f.g)(aq^n) - \int_0^a D_q g(t) f(qt) d_q t$$

eşitliğinden yararlanarak ispatlayalım.

$$\begin{aligned} < D_q f, g > &= \int_0^a D_q f(x) \overline{g(x)} d_q x \\ &= f(a) \cdot \overline{g(a)} - \lim_{n \rightarrow \infty} f(aq^n) \cdot \overline{g(aq^n)} - \int_0^a f(qt) \overline{D_q g(t)} d_q t \\ &= f(a) \cdot \overline{g(a)} - \lim_{n \rightarrow \infty} f(aq^n) \cdot \overline{g(aq^n)} - \int_0^{qa} f(t) \frac{1}{q} \overline{D_{q^{-1}} g(t)} d_q t \\ &= f(a) \cdot \overline{g(a)} - \lim_{n \rightarrow \infty} f(aq^n) \cdot \overline{g(aq^n)} + aq^{-1}(1 - q) f(a) \overline{D_{q^{-1}} g(a)} + \int_0^a f(t) \frac{-1}{q} \overline{D_{q^{-1}} g(t)} d_q t \\ &= f(a) \overline{g(aq^{-1})} - \lim_{n \rightarrow \infty} f(aq^n) \cdot \overline{g(aq^{n-1})} + < f, \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} g > \end{aligned}$$

Dolayısıyla (3.2.4) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.2. (3.1.1) ve (3.1.2) Sturm-Liouville özdeğer problemi $C_q^2(0) \cap L_q^2(0, a)$ uzayında self adjointtir.

İspat. $L_q^2(0, a)$ uzayında $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ gibi iki fonksiyonları için şunu ispatlayalım. $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ fonksiyonları için q -Lagrange özdeşliği

$$\begin{aligned} < Ly(x), z(x) > - < y(x), Lz(x) > &= \int_0^a (Ly(x) \overline{z(x)} - y(x) \overline{Lz(x)}) d_q x \\ &= [y, z]_a - \lim_{n \rightarrow \infty} [y, z](aq^n) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.2.5) eşitliğinde $f(x)$ yerine $D_q y(x)$, ve $g(x)$ yerine $z(x)$ yazarsak

$$\begin{aligned} < \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x), z(x) > \\ &= -(D_q y(aq^{-1})) \overline{z(a)} + \lim_{n \rightarrow \infty} (D_q y(aq^{n-1})) \overline{z(aq^n)} + < D_q y, D_q z > \\ &= -D_{q^{-1}} y(a) \overline{z(a)} + \lim_{n \rightarrow \infty} D_{q^{-1}} y(aq^n) \overline{z(aq^n)} + < D_q y, D_q z > \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

elde edilir. (3.2.4) eşitliğinde $f(x)$ yerine $y(x)$ ve $g(x)$ yerine $D_q z(x)$ yazarsak

$$\begin{aligned} < D_q y, D_q z > = y(a) \overline{D_q z(aq^{-1})} - \lim_{n \rightarrow \infty} y(aq^n) \overline{D_q z(aq^{n-1})} + < y, \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q z > \\ = & y(a) \overline{D_{q^{-1}} z(a)} - \lim_{n \rightarrow \infty} y(aq^n) \overline{D_{q^{-1}} z(aq^n)} + < y, \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q z > \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$< \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x), z(x) > = [y, z]_a - \lim_{n \rightarrow \infty} [y, z](aq^n) + < y(x), \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q z(x) > \quad (3.2.7)$$

elde edilir. (3.2.1) q -Lagrange özdeşliği (3.2.7) eşitliğinin ve $v(x)$ fonksiyonunun reel olmasının sonucudur. $C_q^2(0)$ uzayında $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ gibi iki fonksiyon alalım. Farzedelim ki bu fonksiyonlar (3.1.2) sınır şartlarını sağlam. Dolayısıyla

$$a_{11}y(0) + a_{12}D_{q^{-1}}y(0) = 0, a_{11}z(0) + a_{12}D_{q^{-1}}z(0) = 0 \quad (3.2.8)$$

eşitliğini buluruz. $\lim_{n \rightarrow \infty} [y, z](aq^n) = [y, z](0)$, olması demek $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ fonksiyonlarının sürekli olduğunu gösterir. Bunu (3.2.7) eşitliğinde göz önüne aldığımızda

$$< \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x), z(x) > = [y, z]_a - [y, z](0) + < y(x), \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q z(x) >$$

eşitliğini elde edilir. a_{11} ve a_{12} aynı anda sıfır olmadığından

$$[y, z](0) = y(0) \overline{D_{q^{-1}} z(0)} - D_{q^{-1}} y(0) \overline{z(0)} = 0$$

eşitliği (3.2.8)'den açıkça görülür. Benzer şekilde $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ fonksiyonlarını (3.1.2) sınır şartlarında yerine yazdığımızda

$$a_{21}y(a) + a_{22}D_{q^{-1}}y(a) = 0, a_{21}z(a) + a_{22}D_{q^{-1}}z(a) = 0$$

bulunur. Buradan da

$$[y, z](a) = y(a) \overline{D_{q^{-1}} z(a)} - D_{q^{-1}} y(a) \overline{z(a)} = 0$$

olur. $v(x)$ fonksiyonu reel olduğundan

$$\begin{aligned} < Ly, z > &= < \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x) + v(x)y(x), z(x) > \\ &= < \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x), z(x) > + < v(x)y(x), z(x) > \\ &= < y, \frac{-1}{q} D_{q^{-1}} D_q z(x) > + < y, v(x)z(x) > = < y, Lz > . \end{aligned}$$

bulunur. Bu da L operatörünün self adjoint operatör olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.2. (3.1.1) ve (3.1.2) problemini sağlayan λ^* kompleks sayısı için eğer $\phi^*(.)$ aşikar olmayan çözüm var ise λ^* sayısına (3.1.1) ve (3.1.2) probleminin özdeğeri denir. $\phi^*(.)$ fonksiyonuna ise λ^* özdeğerine karşılık gelen q -Sturm-Liouville probleminin öz-fonksiyonu denir [3].

Teorem 3.2.3. (3.1.1) – (3.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat. Bu teoremi, olmayana ergi metoduna göre ispatlayalım. Buna göre kabul edelim ki $\lambda_1 = u + iv$ kompleks bir özdeğer olsun. $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da özdeğer olur. Bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon $y(x, \overline{\lambda_1}) = \overline{y(x, \lambda_1)}$ dir. Bu takdirde farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonal olduğundan

$$\int_0^a y(x, \lambda_1) \overline{y(x, \lambda_1)} d_q x = 0,$$

olur. Yani,

$$\int_0^a |y(x, \lambda_1)|^2 d_q x = 0,$$

olduğundan $y(x, \lambda_1) = 0$ olur. Halbuki $y(x, \lambda_1) \neq 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. O halde özdeğer kompleks olamaz. Bu da teoremin ispatının tamamlar.

Teorem 3.2.4. Farklı λ, μ özdeğerlerine karşılık gelen $y(.)$ ve $z(.)$ özfonksiyonları ortogonaldır.

İspat. λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon $y(.)$ ve μ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon $z(.)$ olsun. Bu takdirde

$$\langle \lambda y(x), z(x) \rangle = \langle y(x), \mu z(x) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^a y(x) \overline{z(x)} d_q x &= \mu \int_0^a y(x) \overline{z(x)} d_q x, \\ \lambda \int_0^a y(x) \overline{z(x)} d_q x - \mu \int_0^a y(x) \overline{z(x)} d_q x &= (\lambda - \mu) \int_0^a y(x) \overline{z(x)} d_q x, \\ &= 0, \end{aligned}$$

olur. Buradan $\lambda \neq \mu$ olduğundan

$$\int_0^a y(x) \overline{z(x)} d_q x = 0,$$

bulunur. Bu da $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ fonksiyonlarının ortogonal olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.5. Tüm özdeğerler basittir.

İspat. λ_0 özdeğer olsun. Bu özdeğere karşılık gelen iki özfonksiyon ise $y_1(\cdot)$ ve $y_2(\cdot)$ olsun. $\{y_1(\cdot), y_2(\cdot)\}$ fonksiyonları, $x = 0$ noktasında q -Wronskianı sıfırlandığı takdirde bunların lineer bağımlı oldukları ispatlanabilir. Gerçekten, $y_1(\cdot)$ ve $y_2(\cdot)$ fonksiyonları (3.1.2) şartlarını sağladığından dolayı

$$\begin{aligned} W_q(y_1, y_2)(0) &= y_1(0)D_q y_2(0) - y_2(0)D_q y_1(0) \\ &= y_1(0)D_{q^{-1}} y_2(0) - y_2(0)D_{q^{-1}} y_1(0) \\ &= [y_1, y_2] = 0 \end{aligned}$$

dir. Aşağıda özfonksiyonlara karşılık gelen özdeğerlerin nasıl elde edildiğini göstereceğiz. $\phi_1(\lambda)$ ve $\phi_2(\lambda)$ fonksiyonları

$$D_q^{j-1} \phi_i(0, \lambda) = \delta_{ij}, (i, j = 1, 2; \lambda \in \mathbb{C})$$

başlangıç şartları ile belirli (3.1.1)'in lineer bağımsız çözümleri olsun. Böylece,

$$\phi_1(\cdot, \lambda), c_1 = 1, c_2 = 0, \text{ olarak (3.1.5) ile belirtilir.}$$

$$\phi_2(\cdot, \lambda), c_1 = 0, c_2 = 1, \text{ olarak (3.1.5) ile belirtilir.}$$

Sonra (3.1.1) denkleminin her çözümü

$$y(x, \lambda) = A_1 \phi_1(x, \lambda) + A_2 \phi_2(x, \lambda)$$

formundadır. Burada A_1 ve A_2 , x 'e bağlı değildir. (3.1.1) denkleminin $y(\cdot, \lambda)$ çözümü eğer (3.1.1) ve (3.1.2) sınır şartlarını sağlarsa yani,

$$\begin{aligned} A_1 U_1(\phi_1) + A_2 U_1(\phi_2) &= 0, \\ A_1 U_2(\phi_1) + A_2 U_2(\phi_2) &= 0, \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

lineer sistemin aşıkâr olmayan çözümünü bulabilirsek $y(., \lambda)$ çözümü bir özfonksiyon olacaktır. Buradan $\lambda \in \mathbb{R}$ bir özdeğer olması için gerek ve yeter şart

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & U_1(\phi_2) \\ U_2(\phi_1) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix} = 0, \quad (3.2.10)$$

olmasıdır. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) ve (3.1.2) Temel Sturm-Liouville Problemi ile ilişkili karakteristik determinant anlamındadır. $\Delta(\lambda)$ 'nın sıfırları problemin tam özdeğerleridir. $\phi_1(x, \lambda)$ ve $\phi_2(x, \lambda)$ alındığında, her bir $x \in [0, a]$ için λ' da analitiktir. O zaman $\Delta(\lambda)$ analitiktir. Böylece, (3.1.1) ve (3.1.2) temel Sturm-Liouville sisteminin özdeğerleri sonlu olmayan limit noktalarında sayılabilirler. Tüm bu özdeğerler geometrik nokta açısından basittir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.6. (3.1.1) ve (3.1.2), q -Sturm Liouville probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ 'nın basit sıfırlarıdır.

İspat. $\theta_1(., \lambda)$ ve $\theta_2(., \lambda)$

$$\begin{aligned} \theta_1(x, \lambda) &= U_1(\phi_2)\phi_1(x, \lambda) - U_1(\phi_1)\phi_2(x, \lambda), \\ \theta_2(x, \lambda) &= U_2(\phi_2)\phi_1(x, \lambda) - U_2(\phi_1)\phi_2(x, \lambda). \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

bağıntıları ile tanımlansın. Böylece $\theta_1(., \lambda)$ ve $\theta_2(., \lambda)$ (3.1.1)'in çözümleridir. Buna göre

$$\theta_1(0, \lambda) = a_{12}, D_{q^{-1}}\theta_1(0, \lambda) = -a_{11}; \quad \theta_2(a, \lambda) = a_{22}, D_{q^{-1}}\theta_2(a, \lambda) = -a_{21} \quad (3.2.12)$$

dir. Ayrıca

$$W_q(\theta_1(., \lambda), \theta_2(., \lambda))(x) = \Delta(\lambda)W_q(\phi_1(., \lambda), \phi_2(., \lambda))(x) = \Delta(\lambda) \quad (3.2.13)$$

eşitliği de vardır. λ_0 (3.1.1) ve (3.1.2) q -Sturm-Liouville probleminin özdeğeri olsun. λ_0 reel bir sayıdır. $\theta_i(x, \lambda_0)$, ($i = 1, 2$) reel değerli fonksiyonları ele alalım. (3.2.13) bağıntısından $\theta_1(x, \lambda_0)$, $\theta_2(x, \lambda_0)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı özfonksiyonlar olduğu açıktır. Dolayısıyla sıfırdan farklı k_0 sabitleri için

$$\theta_1(x, \lambda_0) = k_0\theta_2(x, \lambda_0) \quad (3.2.14)$$

eşitliği yazılabilir. (3.2.11) ve (3.2.12) bağıntılarından

$$\begin{aligned}\theta_1(a, \lambda_0) &= k_0 a_{22} = k_0 \theta_2(a, \lambda) \\ D_{q^{-1}} \theta_1(a, \lambda_0) &= -k_0 a_{21} = k_0 D_{q^{-1}} \theta_2(a, \lambda)\end{aligned}\quad (3.2.15)$$

elde edilir. (3.2.1) q -Lagrange bağıntısında $y(x)$ yerine $\theta_1(x, \lambda)$ ve $z(x)$ yerine $\theta_1(x, \lambda_0)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}& \int_0^a (L\theta_1(x, \lambda)\theta_1(x, \lambda_0) - \theta_1(x, \lambda)L\theta_1(x, \lambda_0))d_q x \\&= \int_0^a (\lambda\theta_1(x, \lambda)\theta_1(x, \lambda_0) - \theta_1(x, \lambda)\lambda_0\theta_1(x, \lambda_0))d_q x \\&= (\lambda - \lambda_0) \int_0^a \theta_1(x, \lambda)\theta_1(x, \lambda_0)d_q x \\&= \theta_1(a, \lambda)D_{q^{-1}}\theta_1(a, \lambda_0) - D_{q^{-1}}\theta_1(a, \lambda)\theta_1(a, \lambda_0) \\&= \theta_1(a, \lambda)k_0 D_{q^{-1}}\theta_2(a, \lambda) - k_0 \theta_2(a, \lambda)D_{q^{-1}}\theta_1(a, \lambda) \\&= k_0 (\theta_1(a, \lambda)D_{q^{-1}}\theta_2(a, \lambda) - \theta_2(a, \lambda)D_{q^{-1}}\theta_1(a, \lambda)) \\&= k_0 W_q(\theta_1(\cdot, \lambda), \theta_2(\cdot, \lambda))(q^{-1}a) = k_0 \Delta(\lambda).\end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$, λ 'da tam iken

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_0) \int_0^a \theta_1(x, \lambda)\theta_1(x, \lambda_0)d_q x &= k_0 \Delta(\lambda) \\ \Delta'(\lambda_0) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{1}{k_0} \int_0^a \theta_1^2(x, \lambda_0)d_q x \neq 0\end{aligned}\quad (3.2.16)$$

dir. Dolayısıyla λ_0 , $\Delta(\lambda)$ 'nın basit sıfırıdır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

3.3 Green Fonksiyonu

$f(\cdot) \in L_q^2(0, a)$ olmak üzere

$$-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x) + \{-\lambda + v(x)\}y(x) = f(x), x \in [0, a]; \lambda \in \mathbb{C} \quad (3.3.1)$$

şeklindeki homojen olmayan denkleminin bir çözümü bulunurken q -Green fonksiyonundan faydalanılır. Bu Green fonksiyonu (3.1.2) sınır şartlarını sağlar.

Lemma 3.3.1. Eğer λ , (3.1.1) ve (3.1.2) q -Sturm-Liouville probleminin bir özdeğeri değilse bu takdirde (3.3.1) denkleminin çözümü varsa tektir.

İspat. Farzedelim $\chi_1(x, \lambda)$ ve $\chi_2(x, \lambda)$ (3.3.1) homojen olmayan denkleminin iki çözümü olsun. Dolayısıyla $\chi_1(x, \lambda) - \chi_2(x, \lambda)$ da (3.1.1) ve (3.1.2) probleminin bir çözümüdür. Bu yüzden λ bir özdeğer değilse $\chi_1(x, \lambda) - \chi_2(x, \lambda) = 0$ dir. İspatı bir sonraki teoremin ispatında yer alır.

Lemma 3.3.2. λ 'nın (3.1.1) ve (3.1.2) probleminin bir özdeğeri olmadığını kabul edelim. $\phi(., \lambda)$ fonksiyonu homojen olmayan q -fark denklemini sağlasın ve (3.1.2)' in sınır şartları olsun. Burada $f(.) \in L_q^2(0, a)$ dir. Böylece

$$\phi(x, \lambda) = \int_0^a G(x, t, \lambda) f(t) d_q t, \{x \in aq^m; m \in \mathbb{N}_0\} \quad (3.3.2)$$

eşitliği vardır. Burada $G(x, t, \lambda)$ fonksiyonu (3.1.1) ve (3.1.2) q - Sturm-Liouville probleminin Green fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$G(x, t, \lambda) = \frac{-1}{\Delta(\lambda)} \begin{cases} \theta_2(x, \lambda)\theta_1(t, \lambda), 0 \leq t \leq x, \\ \theta_1(x, \lambda)\theta_2(t, \lambda), x < t \leq a, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

tersine (3.3.2) ile tanımlanan $\phi(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.3.1) ve (3.1.1) ve (3.1.2)'i sağlar. Eğer bu şekilde tanımlı bir başka $\tilde{G}(x, t, \lambda)$ fonksiyonu varsa $G(x, t, \lambda)$ tektir yani

$$G(x, t, \lambda) = \tilde{G}(x, t, \lambda), \forall x, t \in \{aq^m : m \in \mathbb{N}_0\}$$

dir. Eğer $f(.)$ fonksiyonu sıfır noktasında q -regüler ise bu takdirde (3.3.2) denklemini her x için sağlar.

İspat. Sabitlerin değişimi metodunun bir q benzerini kullanarak, homojen olmayan (3.3.1) denkleminin özel bir çözümü

$$\phi(x, \lambda) = c_1(x)\theta_1(x, \lambda) + c_2(x)\theta_2(x, \lambda)$$

şeklinde verilebilir. Burada $c_1(x)$, $c_2(x)$ birinci derece q -fark denklemlerinin çözümleridir. Burada $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} D_{q,x}c_1(x) &= \frac{-q}{\Delta(\lambda)}\theta_2(qx, \lambda)f(qx), \\ D_{q,x}c_2(x) &= \frac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_1(qx, \lambda)f(qx), \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

eşitliklerinin var olduğunu kabul edelim. Eğer $D_{q,x}c_i(x)$, $i = 1, 2$ fonksiyonları $[0, t]$ aralığında q -integrallenebilir ise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} tq^n \theta_i(tq^{n+1}, \lambda) f(tq^{n+1}) = 0, (i = 1, 2)$$

dir. q -geometrik A_f kümesi

$$A_f = \{x \in [0, a]; \lim_{n \rightarrow \infty} xq^n |f(xq^n)|^2 = 0\} \quad (3.3.5)$$

şeklinde tanımlanır. A_f kümesi $\{aq^m; m \in \mathbb{N}_0\}$ kümesini kapsayan q -geometrik bir kümedir. Burada $f \in L_q^2(0, a)$ dir. Buradan $D_{q,x}c_i(\cdot)$, $i = 1, 2$, $\forall x \in A_f$ için $[0, x]$ aralığında q -integrallenebilirdir ve (3.3.4) denkleminde eşitliğin her iki tarafının q -integralini alırsak, (3.3.4) denkleminin uygun çözümleri

$$\begin{aligned} \int_0^x D_{q,x}c_1(x)d_qx &= \int_0^x \frac{-q}{\Delta(\lambda)} \theta_2(qx, \lambda) f(qx) d_qx, (x \in A_f) \\ c_1(x) &= c_1(0) + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^x \theta_2(qt, \lambda) f(qt) d_qt, \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} \int_x^a D_{q,x}c_2(x)d_qx &= \int_x^a \frac{-q}{\Delta(\lambda)} \theta_1(qx, \lambda) f(qx) d_qx, (x \in A_f), \\ c_2(x) &= c_2(a) + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_x^a \theta_1(qt, \lambda) f(qt) d_qt \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

şeklinde dir. (3.3.1) denkleminin genel çözümü

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= c_1 \theta_1(x, \lambda) + c_2 \theta_2(x, \lambda) + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_1(x, \lambda) \int_0^x \theta_2(qt, \lambda) f(qt) d_qt \\ &\quad + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_2(x, \lambda) \int_x^a \theta_1(qt, \lambda) f(qt) d_qt \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

olur. Burada $x \in A_f$ ve c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. c_1, c_2 sabitlerini göz önüne aldığımızda $\phi(x, \lambda)$ çözümünde (3.1.2) sınır şartlarını yazarsak

$$\phi(0, \lambda) = c_1 \theta_1(0, \lambda) + (c_2 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^a \theta_1(qt, \lambda) f(qt) d_qt) \theta_2(0, \lambda),$$

$$\begin{aligned}
D_{q^{-1}}\phi(0, \lambda) &= \lim_{n \rightarrow \infty, x \in A_f} \frac{\phi(xq^n, \lambda) - \phi(0, \lambda)}{xq^n} \\
&= c_1 D_{q^{-1}}\theta_1(0, \lambda) + \left(c_2 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^a \theta_1(qt, \lambda) f(qt) d_q t \right) D_{q^{-1}}\theta_2(0, \lambda),
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$a_{11}\phi(0, \lambda) + a_{12}D_{q^{-1}}\phi(0, \lambda) = 0,$$

sınır şartı

$$\left(c_2 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^a \theta_1(qt, \lambda) f(qt) d_q t \right) W_q(\theta_1, \theta_2)(0) = 0,$$

eşitliğini gerektirir. Böylece

$$c_2 = -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^a \theta_1(qt, \lambda) f(qt) d_q t,$$

bulunur. Buradan

$$\phi(x, \lambda) = c_1 \theta_1(x, \lambda) + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^x (\theta_1(x, \lambda) \theta_2(qt, \lambda) - \theta_2(x, \lambda) \theta_1(qt, \lambda)) f(qt) d_q t, \quad (3.3.9)$$

dir. Şimdi $\phi(a, \lambda)$ ve $D_{q^{-1}}\phi(a, \lambda)$ 'yı hesaplayalım. Gerçekten, Tanım 2.1.14 q -integralleme ve (3.3.8) bağıntısından

$$\begin{aligned}
\phi(a, \lambda) &= c_1 \theta_1(a, \lambda) + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^a (\theta_1(a, \lambda) \theta_2(qt, \lambda) - \theta_2(a, \lambda) \theta_1(qt, \lambda)) f(qt) d_q t, \\
&= c_1 \theta_1(a, \lambda) + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^{q^{-1}a} (\theta_1(a, \lambda) \theta_2(qt, \lambda) - \theta_2(a, \lambda) \theta_1(qt, \lambda)) f(qt) d_q t,
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
D_{q^{-1}}\phi(a, \lambda) &= D_{q^{-1}}\theta_1(a, \lambda) \left(c_1 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^{q^{-1}a} \theta_2(qt, \lambda) f(qt) d_q t \right) \\
&\quad - \frac{q}{\Delta(\lambda)} D_{q^{-1}}\theta_2(a, \lambda) \int_0^{q^{-1}a} \theta_1(qt, \lambda) f(qt) d_q t,
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$a_{21}\phi_2(a, \lambda) + a_{22}D_{q^{-1}}\phi_2(a, \lambda) = 0,$$

sınır şartı

$$\left(c_1 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^{q^{-1}a} \theta_2(qt, \lambda) f(qt) d_q t \right) W_q(\theta_1, \theta_2)(a) = 0,$$

eşitliğini gerektirir. Böylece

$$c_1 = -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^{q^{-1}a} \theta_2(qt, \lambda) f(qt) d_q t,$$

elde edilir. Buna göre $x \in A_f$ için

$$\begin{aligned} \phi(x, \lambda) &= -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_2(x, \lambda) \int_0^x \theta_1(qt, \lambda) f(qt) d_q t - \frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_1(x, \lambda) \int_x^{q^{-1}a} \theta_2(qt, \lambda) f(qt) d_q t, \\ &= -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \theta_2(x, \lambda) \int_0^{qx} \theta_1(t, \lambda) f(t) d_q t - \frac{1}{\Delta(\lambda)} \theta_1(x, \lambda) \int_{qx}^a \theta_2(t, \lambda) f(t) d_q t, \\ &= -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \theta_2(x, \lambda) \int_0^x \theta_1(t, \lambda) f(t) d_q t - \frac{1}{\Delta(\lambda)} \theta_1(x, \lambda) \int_x^a \theta_2(t, \lambda) f(t) d_q t, \end{aligned}$$

(3.3.2)- (3.3.3) sağlar. Diğer taraftan doğrudan hesaplama ile eğer $\phi(x, \lambda)$ (3.3.2) eşitliği ile verilirse (3.3.1) denkleminin bir çözümü olur ve (3.1.1) sınır şartlarını sağlar.

$G(x, t, \lambda)$ fonksiyonunun tekliğini ispatlamak için farzedelimki $\tilde{G}(x, t, \lambda)$ gibi başka bir fonksiyon var olsun. Buna göre,

$$\psi(x, \lambda) = \int_0^a \tilde{G}(x, t, \lambda) f(t) d_q t, \quad (3.3.10)$$

fonksiyonu (3.1.1) sınır şartlarını sağlayan (3.3.1) denkleminin bir çözümüdür. Buna göre,

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} G_1(x, t, \lambda), & 0 \leq t \leq x, \\ G_2(x, t, \lambda), & x \leq t \leq a, \end{cases}, \quad \tilde{G}(x, t, \lambda) = \begin{cases} \tilde{G}_1(x, t, \lambda), & 0 \leq t \leq x, \\ \tilde{G}_2(x, t, \lambda), & x \leq t \leq a, \end{cases}$$

olsun. Çıkarma işlemi ile her $f(t) \in L_q^2(0, a)$ fonksiyonları için

$$\int_0^a \left(G(x, t, \lambda) - \tilde{G}(x, t, \lambda) \right) f(t) d_q t = 0, \forall x \in \{aq^m; m \in \mathbb{N}_0\} \quad (3.3.11)$$

elde edilir.

$$f(t) = \overline{G(x, t, \lambda) - \tilde{G}(x, t, \lambda)}, (x = aq^m; m \in \mathbb{N}_0)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \left| G(aq^m, t, \lambda) - \tilde{G}(aq^m, t, \lambda) \right|^2 d_q t \\
&= \int_0^{aq^m} \left| G_1(aq^m, t, \lambda) - \tilde{G}_1(aq^m, t, \lambda) \right|^2 d_q t \\
&\quad + \int_{aq^m}^a \left| G_2(aq^m, t, \lambda) - \tilde{G}_2(aq^m, t, \lambda) \right|^2 d_q t \\
&= (1-q)aq^m \sum_{j=0}^{\infty} q^j \left| G_1(aq^m, aq^{j+m}, \lambda) - \tilde{G}_1(aq^m, aq^{j+m}, \lambda) \right|^2 \\
&\quad + (1-q)a \sum_{j=0}^{\infty} q^j \left| G_1(aq^m, aq^j, \lambda) - \tilde{G}_1(aq^m, aq^j, \lambda) \right|^2
\end{aligned}$$

$j + m = n$ alırsak ,

$$= (1-q)a \sum_{n=0}^{\infty} q^n \left| G(aq^m, aq^n, \lambda) - \tilde{G}(aq^m, aq^n, \lambda) \right|^2 = 0 \quad (3.3.12)$$

bulunur. Bu nedenle (3.3.12) eşitliğinden

$$G(aq^m, aq^n, \lambda) = \tilde{G}(aq^m, aq^n, \lambda), \{m, n \in \mathbb{N}_0\}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu da gösteriyor ki $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonu tektir. Eğer $f(\cdot)$ fonksiyonu sıfır noktasında q -regüler ise $A_f = [0, a]$ olmak üzere (3.3.2) denklemi her $x \in [0, a]$ için tanımlanır.

Teorem 3.3.3. $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonu $(0, 0)$ noktasında süreklidir.
- ii. $G(x, t, \lambda) = G(t, x, \lambda)$ dir.
- iii. Her bir $t \in [0, qa]$ noktası için x 'in bir fonksiyonu $G(x, t, \lambda)$ fonksiyonu $[0, t], [t, a]$ aralıklarında (3.1.1) q -Sturm denklemini ve (3.1.2) sınır şartlarını sağlar.
- iv. $\lambda_0, \Delta(\lambda)$ karakteristik denkleminin sıfırı olsun. $\lambda_0, G(x, t, \lambda)$ fonksiyonunun bir basit kutbu olabilir ve bu durumda

$$G(x, t, \lambda) = -\frac{\psi_0(x)\psi_0(t)}{\lambda - \lambda_0} + \tilde{G}(x, t, \lambda),$$

eşitliği vardır. $\tilde{G}(x, t, \lambda)$, λ_0 'ın bir komşuluğunda λ 'nın analitik fonksiyonudur ve $\psi_0(\cdot)$, λ_0 'a karşılık gelen bir normal özfonksiyondur.

İspat.

i. Her bir $\lambda \in \mathbb{C}$ noktası için $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonunun $(0, 0)$ noktasında sürekli olduğu $\theta_1(\cdot, \lambda), \theta_2(\cdot, \lambda)$ fonksiyonlarının o noktasındaki sürekliliğinden açıktır.

ii. $G(x, t, \lambda) = G(t, x, \lambda)$ eşitliği (3.3.3.) denkleminde kolayca görülür.

iii. Bir $t \in [0, qa]$ noktası alalım. Eğer $x \in [0, t]$ ise,

$$G(x, t, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \theta_1(x, \lambda) \theta_2(t, \lambda)$$

dir. Buna göre

$$\ell G(x, t, \lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)} \theta_2(t, \lambda) \ell \theta_1(x, \lambda) = \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \theta_2(t, \lambda) \theta_1(x, \lambda) = \lambda G(x, t, \lambda)$$

dir. Eğer $x \in [t, a]$ ise yine benzer işlemler yapılır. (3.2.12) ve (3.3.3) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & a_{11}G(0, t, \lambda) + a_{12}D_{q^{-1}}G(0, t, \lambda) \\ &= \frac{\theta_2(t, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \{a_{11}\theta_1(0, \lambda) + a_{12}D_{q^{-1}}\theta_1(0, \lambda)\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & a_{21}G(a, t, \lambda) + a_{22}D_{q^{-1}}G(a, t, \lambda) \\ &= \frac{\theta_1(t, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \{a_{21}\theta_1(a, \lambda) + a_{22}D_{q^{-1}}\theta_1(a, \lambda)\} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

iv. λ_0 , $G(x, t, \lambda)$ fonksiyonunun bir kutbu olsun ve $\lambda = \lambda'_0$ da $R(x, t)$, $G(x, t, \lambda)$ fonksiyonunun bir kalanı olsun. (3.2.14) (3.2.16) bağıntılarından yararlanarak

$$\begin{aligned} R(x, t) &= \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (\lambda - \lambda_0) G(x, t, \lambda) = k_0^{-1} \theta_1(t, \lambda_0) \theta_1(x, \lambda_0) \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\lambda - \lambda_0}{\Delta(\lambda)} \\ &= -\frac{\theta_1(x, \lambda_0) \theta_1(t, \lambda_0)}{\int_0^a |\theta_1(u, \lambda)|^2 d_q u} = -\psi_0(x, \lambda_0) \psi_1(t, \lambda_0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece **iv** ispatlanmış olur.

3.4 Özfonksiyonların Açılım Formülleri

Tanım 3.4.1.

$$\mathcal{L} : D_{\mathcal{L}} \rightarrow L_q^2(0, a)$$

operatörü

$$\mathcal{L}y = \ell y, \forall y \in D_{\mathcal{L}} \text{ için}$$

tanımlanır. Burada $D_{\mathcal{L}}$, (3.1.2) şartlarını sağlayan y kompleks değerli fonksiyonlardan oluşan $L_q^2(0, a)$ uzayının alt uzayıdır.

Buna göre $D_q y(\cdot)$ fonksiyonu 0' da regülerdir ve $D_q^2 y(\cdot)$ fonksiyonu $L_q^2(0, a)$ uzayında tanımlıdır. Böylece $\mathcal{L}$, q - fark operatörü ve (3.1.2) sınır şartları ile ℓ , q - fark operatörünü üretir. $\mathcal{L}y = \lambda y$ eşitliği, (3.1.2) sınır şartlarını sağlayan y fonksiyonu, $\ell y = \lambda y$ anlamındadır. $\mathcal{L}$ operatörü (3.1.1)-(3.1.2) Temel Sturm-Liouville Problemi ile benzer özdeğerlere sahiptir. Böylece $\ker \mathcal{L} = \{0\}$ 'dir.

Tanım 3.4.2.

$$(\mathcal{L}y)(x) = f(x), (f \in L_q^2(0, a)) \quad (3.4.1)$$

probleminin çözümü $L_q^2(0, a)$ uzayında

$$y(x) = \int_0^a G(x, t) f(t) d_q t, \quad (3.4.2)$$

olarak verilir. Burada (3.4.1) denkleminde $f(\cdot)$ fonksiyonu $\lambda y(\cdot)$ ile yer değiştirirse,

$$G(x, t) = G(x, t, 0) = \begin{cases} c\theta_1(t)\theta_2(x), & 0 \leq t \leq x, \\ c\theta_1(x)\theta_2(t), & x \leq t \leq a, \end{cases} \quad c = -\frac{1}{W_q(\theta_1, \theta_2)}.$$

Tanım 3.4.3.

$$(\mathcal{L}y)(x) = \lambda y(x) \quad (3.4.3)$$

özdeğer problemi

$$y(x) = \lambda \int_0^a G(x, t) y(t) d_q t, x \in \{aq^m; m \in \mathbb{N}_0\}. \quad (3.4.4)$$

şeklinde ikinci tür Fredholm integral denklemine denktir.

Teorem 3.4.1. $\wp$ - integral operatörü olmak üzere

$$\wp : L_q^2(0, a) \rightarrow L_q^2(0, a), (\wp f)(x) = \int_0^a G(x, t) f(t) d_q t, \quad (3.4.5)$$

olsun. Bu takdirde

$$(\mathcal{L}\wp)f = f, (f \in L_q^2(0, a)), \quad (3.4.6)$$

$$(\wp \mathcal{L})(y) = y, (y \in D_{\mathcal{L}}), \quad (3.4.7)$$

ifadeleri mevcuttur.

İspat. Öncelikle $y \in \wp$, $f \in D_{\mathcal{L}}$ alalım. (3.4.4) ve (3.4.5)'den

$$y(x) = (\wp f)(x) = \theta_2(x)y_1(x) + \theta_1(x)y_2(x),$$

yazılır. Buradan

$$y_1(x) = c \int_0^x \theta_1(t)f(t)d_q t, \text{ ve } y_2(x) = c \int_x^a \theta_2(t)f(t)d_q t,$$

dir. $\forall x \in A_f$ için

$$\begin{aligned} D_q y(x) &= D_q \theta_2(x)y_1(qx) + D_q \theta_1(x)y_2(qx), \\ D_q^2 y(x) &= -qv(qx)y(qx) - qf(qx) \in L_q^2(0, a), \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

elde edilir. $D_q \theta_i(x, \lambda)$, $y_i(x)$, $i = 1, 2$ fonksiyonları 0 noktasında q - regülerdir. Bu nedenle $D_q y(\cdot)$ ve

$$D_{q^{-1}} y(0) = D_q y(0) = \lim_{n \rightarrow \infty, x \in A_f} \frac{y(xq^n) - y(0)}{xq^n} = D_{q^{-1}} \theta_2(0)y_2(0),$$

bulunur.

$$y_1(0) = 0, y_2(a) = 0$$

olarak alınır

$$(a_{11}y(0) + a_{12}D_{q^{-1}}y(0)) = (a_{11}\theta_1(0) + a_{12}D_{q^{-1}}\theta_1(0))y_2(0) = 0$$

ve

$$(a_{21}y(a) + a_{22}D_{q^{-1}}y(a)) = (a_{21}\theta_2(a) + a_{22}D_{q^{-1}}\theta_2(a))y_1(a) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $y \in D_{\mathcal{L}}$ ' dir. (3.4.8) ifadesinden

$$\mathcal{L}y = (\mathcal{L}\wp)(f) = f$$

eşitliğini buluruz. Şimdi de (3.4.6) ifadesinden yararlanarak (3.4.7) ifadesini ispatlayalım. Dolayısıyla (3.4.6) ifadesinde $\mathcal{L}y$ yerine f yazılırsa $\mathcal{L}y = \mathcal{L}\wp \mathcal{L}y$ elde edilir. $\mathcal{L}$ 'nin birebir olduğu kabul edilirse $y = \wp \mathcal{L}y$ elde edilir.

(3.4.6) ve (3.4.7) ifadelerinden $\ker \wp = \{0\}$ olduğu görülür. ϕ , μ özdeğeri ile birlikte $\wp'$ 'nin özfonksiyonudur gerek ve yeter şart ϕ , $\frac{1}{\mu}$ özdeğeri ile birlikte $\mathcal{L}'$ 'nin bir özfonksiyonudur.

Tanım 3.4.4. $T : X \rightarrow X$ sınırlı lineer bir operatör, X Banach uzayı olmak üzere eğer X uzayındaki $T(S)$ kümesinin vektörlerinin cümlesi sınırlı ise T operatörüne kompakt operatör denir. Yani $\{Ts : s \in S\}$ cümlesi kompakttır.

Tanım 3.4.5. H bir Hilbert uzayı olmak üzere T operatörü $T : H \rightarrow H$ şeklinde tanımlı olsun. Eğer T operatörü

$$T = \sum_{k=1}^N \lambda_k \langle f_k, g_k \rangle$$

şeklinde yazılabilirse T operatörü kompakttır denir. Burada $1 \leq N \leq \infty$ 'dır. $f_1, f_2, \dots, f_N$ ve $g_1, g_2, \dots, g_N$ ortonormal cümlelerdir. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ pozitif sayılardır.

Teorem 3.4.2. $\wp$ - integral operatörü kompakt ve self adjointtir.

İspat. $f, h \in L_q^2(0, a)$ olsun. $[0, a] \times [0, a]$ aralığında tanımlanan reel değerli $G(x, t)$ fonksiyonu $G(x, t) = G(t, x)$ olduğunu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \langle \wp(f), h \rangle &= \int_0^a (\wp f)(x) \overline{h(x)} d_q x = \int_0^a \int_0^a G(x, t) f(t) \overline{h(x)} d_q t d_q x \\ &= \int_0^a f(t) \left(\int_0^a G(t, x) h(x) d_q x \right) d_q t = \langle f, \wp(h) \rangle, \end{aligned}$$

$\wp$ operatörünün self adjoint olduğunu görürüz. Şimdi de $\wp$ integral operatörünün kompakt olduğunu gösterelim.

$$\phi_{ij}(x, t) = \phi_i(x) \phi_j(t), (i, j \in \mathbb{N})$$

$L_q^2((0, a) \times (0, a))$ uzayının bir ortonormal tabanı olsun. Bu nedenle

$$G = \sum_{i,j=1}^{\infty} \langle G, \phi_{ij} \rangle \phi_{ij}$$

$$G_n = \sum_{i,j=1}^n \langle G, \phi_{ij} \rangle \phi_{ij}, (n \in \mathbb{N}),$$

ve $\wp_n, L_q^2(0, a)$ uzayında tanımlı sonlu rank integral operatörü olsun.

$$\wp_n(f)(x) = \int_0^a G_n(x, t) f(t) d_q t, x \in \{0, a q^m; m \in \mathbb{N}_0\}$$

şeklindedir. Buradan da $\wp_n$ operatörünün $\forall n \in \mathbb{N}$ için kompakttır. Cauchy Schwartz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\|(\wp - \wp_n)(f)\| &= \left(\int_0^a |(\wp - \wp_n)f(x)|^2 d_q x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^a \left| \int_0^a (G - G_n)(x, t) f(t) d_q t \right|^2 d_q x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^a \int_0^a |(G - G_n)(x, t)|^2 d_q t d_q x \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^a |f(x)|^2 d_q x \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|G - G_n\|_2 \|f\|,
\end{aligned}$$

$n \rightarrow \infty$ halinde ,

$$\|(\wp - \wp_n)(f)\| \leq \|G - G_n\|_2 \rightarrow 0$$

dır. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Uygulama 1.

$$-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x) = \lambda y(x), \quad (3.4.9)$$

q - Sturm-Liouville sınır değer problemini

$$U_1(y) = y(0) = 0, U_2(y) = y(1) = 0, \quad (3.4.10)$$

q -Dirichlet şartları ile göz önüne alalım. (3.4.9) probleminin çözümlerinin temel kümesi

$$\begin{aligned}
\phi_1(x, \lambda) &= \cos(\sqrt{\lambda}x; q), \\
\phi_2(x, \lambda) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x; q)}{\sqrt{\lambda}},
\end{aligned} \quad (3.4.11)$$

şeklindedir. (3.4.9) probleminin özdeğerleri

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & U_2(\phi_1) \\ U_1(\phi_2) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix} = \phi_2(1, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}; q)}{\sqrt{\lambda}},$$

determinantının sıfırlarıdır. Burada $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri, $\sin(\sqrt{\lambda}; q)$ fonksiyonunun özdeğerleridir.

$$\lambda_n = y_n^2 = \frac{q^{-2n}}{(1-q)^2} (1 + O(q^n)), (n \in \mathbb{N}),$$

cümlesi $\left\{ \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}x; q)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ özfonksiyonlarının kümesine karşılık gelen ve yeterince büyük n için $L_q^2(0, 1)$ uzayının bir ortogonal tabanıdır.

$$\begin{aligned}\theta_1(x, \lambda) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x; q)}{\sqrt{\lambda}}, \\ \theta_2(x, \lambda) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda}; q)}{\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}x; q) + \cos(\sqrt{\lambda}; q) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x; q)}{\sqrt{\lambda}},\end{aligned}$$

fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer λ bir özdeğer değilse Green fonksiyonu

$$\begin{aligned}G(x, t, \lambda) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t; q)}{\sin(\sqrt{\lambda}; q)} \left(\sqrt{\lambda}x; q) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}; q)}{\sqrt{\lambda}} - \cos(\sqrt{\lambda}; q) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x; q)}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad 0 \leq t \leq x, \\ G(x, t, \lambda) &= \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x; q)}{\sin(\sqrt{\lambda}; q)} \left(\cos(\sqrt{\lambda}t; q) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}; q)}{\sqrt{\lambda}} - \cos(\sqrt{\lambda}; q) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}t; q)}{\sqrt{\lambda}} \right), \quad x \leq t \leq 1,\end{aligned}$$

şeklinde verilir. $\lambda = 0$ bir özdeğer değil iken $G(x, t)$ Green fonksiyonu sıfırdır fakat

$$G(x, t) = G(x, t, 0) = \begin{cases} t(1-x), & 0 \leq t \leq x \\ x(1-t), & x \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde dir. Dolayısıyla (3.4.9)-(3.4.10) sınır değer problemi

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, t) y(t) d_q t$$

temel Fredholm integral denkleminde dir.

Uygulama 2. (3.4.9) q - Sturm-Liouville sınır değer problemini

$$U_1(y) = D_{q^{-1}}y(0) = 0, U_2(y) = D_{q^{-1}}y(1) = 0 \quad (3.4.12)$$

q - Neumann sınır şartları ile birlikte göz önüne alalım. Bu durumda uygun

$$\begin{aligned}\theta_1(x, \lambda) &= \cos(\sqrt{\lambda}x; q) \\ \theta_2(x, \lambda) &= \cos(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q) \cos(\sqrt{\lambda}x; q) + \sqrt{q} \sin(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q) \sin(\sqrt{\lambda}x; q)\end{aligned}$$

fonksiyonlarını alalım.

$$\Delta(\lambda) = \sqrt{q\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q)$$

iken, $\lambda_0 = 0$ olmak üzere özdeğerler

$$\lambda_n = q^{-1}y_n^2 = \frac{q^{-2n+1}}{(1-q)^2} (1 + O(q^n)), \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklinde verilir. Böylece $\{1, \cos(\sqrt{\lambda_n}x; q)\}_{n=1}^{\infty}$ cümlesi $L_q^2(0, 1)$ uzayının bir ortogonal tabanıdır. Eğer λ bir özdeğer değilse $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonu $x, t \in [0, 1]x[0, 1]$ olmak üzere

$$G(x, t, \lambda) = -\frac{\cos(\sqrt{\lambda}t; q)}{\sqrt{q}\lambda \sin(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q)} \left(\cos(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q) \cos(\sqrt{\lambda}x; q) + \sqrt{q} \sin(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q) \sin(\sqrt{\lambda}x; q) \right), 0 \leq t \leq x,$$

$$G(x, t, \lambda) = -\frac{\cos(\sqrt{\lambda}x; q)}{\sqrt{q}\lambda \sin(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q)} \left(\cos(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q) \cos(\sqrt{\lambda}t; q) + \sqrt{q} \sin(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q) \sin(\sqrt{\lambda}t; q) \right), x \leq t \leq 1,$$

şeklinde verilir.

Uygulama 3. (3.4.9) q - Sturm-Liouville sınır değer problemini

$$U_1(y) = y(0) = 0, U_2(y) = y(1) + D_{q^{-1}}y(1) = 0 \quad (3.4.13)$$

sınır şartları ile beraber göz önüne alalım.

$$\Delta(\lambda) = \phi_2(1, \lambda) + D_{q^{-1}}\phi_2(1, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}; q)}{\sqrt{\lambda}} + \cos(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q)$$

şeklindedir. Bu sınır değer probleminin $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri

$$\frac{\sin(\sqrt{\lambda}; q)}{\sqrt{\lambda}} = -\cos(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q)$$

denkleminin çözümleridir ve özfonksiyonlara karşılık gelenler $\left\{ \frac{\sin(\sqrt{\lambda_n}; q)}{\sqrt{\lambda_n}} \right\}_{n=1}^{\infty}$ cümlesidir.

$\theta_1(x, \lambda)$ ve $\theta_2(x, \lambda)$ fonksiyonlarını ele alırsak

$$\theta_1(x, \lambda) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x; q)}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\theta_2(x, \lambda) = (\cos(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q) + \frac{\sin(\sqrt{\lambda}; q)}{\sqrt{\lambda}}) \cos(\sqrt{\lambda}x; q) - (-\sqrt{\lambda}q \sin(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q) + \cos(\sqrt{\lambda}; q)) \frac{\sin(\sqrt{\lambda}x; q)}{\sqrt{\lambda}}$$

ifadeleri göz önüne alalım. Eğer λ bir özdeğer değilse $G(x, t, \lambda)$ Green fonksiyonu

$$G(x, t, \lambda) = \frac{-1}{\sin(\sqrt{\lambda}; q) + \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}q^{\frac{-1}{2}}; q)} \begin{cases} \sin(\sqrt{\lambda}t; q)\theta_2(x, \lambda), 0 \leq t \leq x, \\ \sin(\sqrt{\lambda}x; q)\theta_2(t, \lambda), x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

ve

$$G(x, t) = -\frac{1}{2} \begin{cases} t(2-x), 0 \leq t \leq x, \\ x(2-t), x \leq t \leq 1. \end{cases}$$

olarak tanımlanır. (3.4.9) sınır değeri problemi (3.4.13) sınır şartları ile birlikte

$$y(x) = \lambda \int_0^1 G(x, t) y(t) d_q t$$

temel Fredholm integral denkleminde denktir.



4. SONUÇ

- Bu tez, Annaby ve Mansour'un yazmış oldukları kitaptan ve farklı kaynaklardan derlenerek hazırlanmıştır [3]. İkinci bölümde q - fark operatörü ile ilgili detaylı bir araştırma yapılmıştır. q - analizinin reel analiz ve fonksiyonel analiz ile ilişkileri irdelenmiştir. q - fark denklemlerine fizik, mühendislik, teknik bilimlerde sıkça karşılaşılmış olup, bu denklemler uygulamalı bilimcilerin çalıştıkları bir dal olarak ortaya çıkmıştır.
- Son bölümün birinci kısmında q - Sturm Liouville problemi ele alınmıştır. q - Sturm Liouville teorisinde potansiyel fonksiyonun fiziksel olarak önemi büyüktür. Bu anlamda tezde ele alınan problem ileride yapılacak olan çalışmalarda etkili sonuçlar alınabilecek düzeydedir.
- İkinci kısımda q - Sturm Liouville probleminin self adjointliği gösterilmiştir. Ayrıca spektral teoride temel teşkil eden özdeğerlerin reelliği, özfonksiyonların ortogonalitesi ve özdeğerlerin basitliği bu operatör için ispatlanmıştır.
- Üçüncü kısımda homojen olmayan q - Sturm Liouville denkleminin bir çözümünü ararken q - Green fonksiyonunun nasıl elde edildiği gösterilmiştir. Ayrıca bu fonksiyonun bazı özellikleri irdelenmiş, işlemler detaylandırılmıştır.
- Bu bölümün son kısmında ise q - fark denklemlerinin çözümlerini bulmaya çalışmak uzun uğraşlar gerektirdiğinden çözümlerin spektral analizi hakkında bilgiler paylaşılmıştır. Genel bir derleme yapılmıştır.

5. KAYNAKLAR

1. **B. Musayev, M. Alp**, Fonksiyonel Analiz, Balcı Yay., Kütahya, Kasım, (2000).
2. **A. Hüseyinov**, q - Fark Denklemlerinin İkinci Derece Demetleri için Özdeğer Problemi ve Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ankara, (2006).
3. **M. H. Annaby, Z. S. Mansour**, q -Fractional Calculus And Equations, Springer, (2012).
4. **M. H. Annaby, Z. S. Mansour**, q -Taylor and Interpolation Series for Jackson q -Difference Operators, J.Math. Anal Appl 344, 472-483, (2008).
5. **S. Oney**, The Jackson İntegral, <http://from.so/papers/JacksonIntegral.pdf>, (2007).
6. **J. L. Cieřliński**, Improved q -Exponential and q -Trigonometric Functions, arXiv:1006.5652 [math.CA], Jun 19, (2010).
7. **T. Yamano**, Some Properties Of q -Logarithm and q -Exponential Functions In Tsallis Statistics, Physica A. 305, 486-496, (2002).
8. **H. Tuna, A. Eryılmaz**, Completeness Of The System Of Root Functions Of q -Sturm Liouville Operators, May 30, (2013).
9. **Ö. L. Değirmenci**, İleri Matematik 1 Ders Notları, 401,.(2006).
10. **G. Z., Dennis , D. S. Patrick ,çeviri: A. Dernek**, Complex Analysis with Applications, nobel, (2013).
11. **M. H. Annaby, Z. S. Mansour, I. A. Soliman**, q -Titchmarsh-Weyl Theory: Series Expansion, Nagoya Math. J. 205, 67-118, (2012).
12. **M. E. H. Ismail, S. Lin, S. Roan**, Bethe Ansatz Equations Of XXZ Model and q -Sturm Liouville Problems, arXiv:math-ph/0407033, Jul 16, (2004).
13. **B. Malcolm Brown, W. Desmond Evans, M. E. H. Ismail**, The Askey-Wilson Polynomials and q -Sturm Liouville Problems, August 14, (1994).
14. **A. Nemri, A. Fitouhi**, Polynomials Expansions For Solution Of Wave Equation in Quantum Calculus, (2010).

15. **L. Dhaouadi**, q -Sturm Liouville Theory and The Corresponding Eigenfunction Expansions, Jul 16, (2008).
16. **L. D. Abreu**, Sampling Theory Associated With q -Difference Equations Of The Sturm-Liouville Type J. Phys. A 38(48), 10311–10319 (2005).
17. **R. P. Agarwal**, Fractional q -Derivative and q -Integrals and Certain Hypergeometric Transformations, Ganita 27(1–2), 25–32 (1976).
18. **M. H. Annaby, Z. S. Mansour**, Asymptotic Formulae For Eigenvalues And Eigenfunctions Of q -Sturm-Liouville Problems Math. Nachr. 284(4), 443–470 (2011).
19. **W. A. Al-Salam, A. Verma**, A Fractional Leibniz q -Formula Pac. J. Math. 60(2), 1–9 (1975).
20. **M. H. Annaby, Z. S. Mansour**, Basic Sturm Liouville Problems. J. Phys. A Math. Gen. 38(17), 3775–3797 (2005).
21. **B.M.Levitan, I.S.Sargsjan**, 1975. Introduction to Spektral Theory: Selfadjoint Ordinary Differential Operators, American Math. Soc., Pro., R.I.1975.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Diyarbakır’da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Diyarbakır’da tamamladım. 2010 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik bölümüne girdim. 2014 yılında Matematik bölümünden mezun olarak aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisansa başladım. Halen Fırat Üniversitesi Matematik bölümünde yüksek lisans öğrencisiyim.

