T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KUADRATİK FORMLAR VE KUATERNİYON CEBİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞULE ÇÜRÜK

DENİZLİ, MAYIS - 2017

T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KUADRATİK FORMLAR VE KUATERNİYON CEBİRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞULE ÇÜRÜK

DENİZLİ, MAYIS - 2017

KABUL VE ONAY SAYFASI

ŞULE ÇÜRÜK tarafından hazırlanan "**KUADRATİK FORMLAR VE KUATERNİYON CEBİRLERİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 25.05.2017 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Serpil HALICI	....
Üye Doç. Dr. Mustafa AŞÇI	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Bahar DEMİRTÜRK BİTİM	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 31.05.2017 tarih ve 21/20 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

ŞULE ÇÜRÜK

ÖZET

KUADRATİK FORMLAR VE KUATERNİYON CEBİRLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ŞULE ÇÜRÜK
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. SERPİL HALICI)

DENİZLİ, MAYIS - 2017

Bu çalışmada önce kuadratik formlar sınıflandırıldı. Sonra Clifford cebirleri ve kuadratik formlar arasındaki bağıntılar incelendi. Bu amaçla, kuadratik formlar ile ilgili temel bilgiler verildi. Hiperbolik düzlem ve hiperbolik uzay ve ayrıca hiperbolik uzaya karşılık gelen kuadratik form incelendi. İkinci bölümde ise, reel kuadratik formlar ele alındı. Bu kuadratik forma karşılık gelen matris çalışıldı. Örnekler verildi ve kuadratik formların gösterdiği eğriler çizildi. Üçüncü bölümde, kuaterniyon cebirleri çalışıldı ve temel özellikleri verildi. Bu konu ile ilgili bazı temel teorem ve sonuçlar verildi. Dördüncü bölümde, Clifford cebirinin yapısını oluşturan geometrik kavramlar tanıtıldı. Vektörler arasında bilinen skaler çarpımın yanı sıra, iç ve dış çarpım kullanılarak bu çarpımların geometrik anlamlarına değinildi. Ayrıca, geometrik çarpım yardımıyla da Clifford cebirinin nasıl oluşturulduğu açıklandı. Son olarak beşinci bölümde ise, genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları incelendi ve Clifford cebirleri yardımıyla, $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ yapısını bir bölüm cebiri yapacak şartlar incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Kuadratik Formlar, Kuaterniyonlar, Clifford Cebirleri, Fibonacci Kuaterniyonları

ABSTRACT

QUADRATIC FORMS AND QUATERNION ALGEBRAS
MSC THESIS
ŞULE ÇÜRÜK
PAMUKKALE UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOS. PROF. DR. SERPİL HALICI)

DENİZLİ, MAY 2017

In this study, quadratic forms were first classified. Later the relations between Clifford algebras and quadratic forms were tried. For this purpose, the basic information about quadratic forms is given. The hyperbolic plane and hyperbolic space and also the quadratic form corresponding to the hyperbolic space is investigated. In the second section, real quadratic forms are considered. The matrix corresponding to this quadratic form was studied. Examples are given, and curves of the quadratic forms were drawn. In third section quaternion algebra was studied and their basic properties were given. Some basic theorems and corollaries about this subject are given. In fourth section, the geometric concepts that related with the structure of the Clifford algebra are introduced. In addition to known scalar multiplication among vectors the geometric meanings of these products were mentioned by using the inner and outer product. Furthermore, it was explained how the Clifford algebra was created by using geometric multiplication. Finally, in the fifth section, Generalized Fibonacci quaternions were examined and the conditions related to the algebraic structure of $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ such that it can be a division algebra were investigated by Clifford algebras.

KEYWORDS: Quadratic Forms, Quaternions, Clifford Algebras, Fibonacci Quaternions

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

TABLO LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar
$\mathbb{H}$	:	Reel Kuaterniyon Cebiri
$\boldsymbol{K}$	:	Lokal Cisim
$\boldsymbol{M_f}$	:	Kuadratik Formun Matris Gösterimi
$\boldsymbol{Q_f}$	:	Kuadratik Dönüşüm
$\boldsymbol{D(f)}$	:	Kuadratik Formun Temsil Ettiği Elemanlar Kümesi
$\perp$	:	Diklik
$\boldsymbol{\varphi}$	:	İç Çarpım Uzayının Ortonormal Tabanı
$\left(\frac{a,b}{F}\right)$	:	Kuaterniyon Cebiri
$\times$	:	Vektörel Çarpım
$\wedge$	:	Dış Çarpım
$\cdot$	:	İç Çarpım
$\rfloor$	:	İç Çarpım
$\langle A \rangle_s$	:	Bir Çoklu Vektörün s dereceli Kısmı
$\vec{\boldsymbol{\nabla}}$	:	Vektör Türev
$\dot{\boldsymbol{F}}$	:	Çarpımsal Grup
$\boldsymbol{n\langle d \rangle}$	:	n- değişkenli Kuadratik Form
$\cong$	:	Denklik
$\oplus$	:	Direk Toplam
$\otimes$	:	Direk Çarpım
$\equiv$	:	Kongrüans
$\mathbb{R}_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{n}}$	:	Elemanları $\mathbb{R}$ de olan $n \times n$ Tipindeki Matris

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda, planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmesiyle çalışmamı bilimsel temeller ile şekillendiren, kullandığı her kelimenin hayatıma kattığı önemini asla unutmayacağım saygıdeğer hocam Doç. Dr. Serpil HALICI' ya, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımlarını esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

ŞULE ÇÜRÜK

1. GİRİŞ

1.1 Tarihçe

Kuadratik formlar, matematiğin bir çok alanında kullanılır. Belli bazı konuların sınıflandırması kuadratik formlara indirgeyerek yapılabilir. Mesela Clifford Cebirinden kuaterniyon cebirinin elde edilmesi ise buna bir örnektir. Kuadratik formlar, konikler ve kuadrik yüzeylerin sınıflandırılmasında da kullanılır. Kuadratik formları sınıflandırırken, aynı cisim üzerinde iki denk kuadratik formun bir lineer dönüşüm ile birbirlerinden elde edilip edilemeyeceği akla gelir. Bu sorunun cevabı $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ de çalışıyorken kolaydır, ancak $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ den farklı cisimlerde durum farklı olabilir.

Kuadratik formların temsil teorisinin uzun bir geçmişi vardır. Bu teori 1640'lı yılların başlarında $x^2 + y^2$ ile temsil edilen sayılar hakkında Fermat'ın iddiasıyla başladı. 18. yüzyılda, Euler bu gösterimlerin ispatını yaptı ve diğer ikili basit kuadratikler ile ilgili benzer iddiaları verdi. Lagrange,1770'de "Dört Kare Teoremi"ni ispatlayarak Evrensel Kuadratik Formlar Teorisinin temelini attı. 18. yüzyıl daha ayrıntılı bilgilerle sona erdi ve 1798'de Legendre "Üç Kare Teoremi"ni ele aldı. Aynı zamanda Legendre "Theorie des Numbers" çalışmasında ikili kuadratiklerin genel teorisinin temelini kurdu.1801'de bu teorinin modern teoriye uyarlanması Gauss tarafından yapıldı. N. Sloane ve J. H. Conwey, [N. Sloane ve J. H. Conwey 2000] daki çalışmalarında, ikili kuadratik formların sınıflandırılmasını verdiler. 19. yüzyıl sonlarında H.J.S. Smith, H. Minkowski Gauss'un çalışmasını daha yüksek boyutlara genişlettiler.1900'lü yıllarda, Ramanujan bu teoriye önemli katkılar yaptı. 1937' de Witt, her kuadratik form için bu kuadratik formların Clifford cebirlerini tanımladı ve bu yapının özelliklerini çalıştı. Witt çalışmasında basit cebirler ve kuadratik formlar arasındaki benzerlikleri verdi. Springer (1959), Serre(1964) ortogonal ve ilgili grupları çalıştılar. Delzant(1962), Scharlau(1967), Belskii(1968), Milnor(1970), Arason(1975) ve bir çok yazar kuadratik formları çalıştı. Durfee(1948) ve Springer(1955), ayrık değerlendirme halkası üzerinde kuadratik form teorisini geliştirdiler. Özellikle bu yazarlar, tam ayrık değerlendirme halkaları üzerinde kuadratik formları sınıflandırdılar. 1977' de Knebusch, bu kavramı keyfi halkalara genişletti. Ayrıca, kuadratik formların özelliklerini ve Witt halkalarını bir çok yazar çalıştı. Norm kurallarını ise Scharlau ve Knebusch verdi[N. Sloane ve J. H. Conwey 2000].

Kompleks sayılar ile 2-boyutlu düzlemin ilişkisini çok iyi bilen ve 4-boyutlu kuaterniyon cebirini tanımlayan William Rowan Hamilton, bu ilişkiyi 3-boyutlu uzaylarla ilişkilendirmek amacıyla, 3-boyutlu bir cebirsel yapı aradı. Hamilton 19. yüzyılda "2-boyutlu uzaylarda dönme varsa neden 3-boyutlu uzaylarda " diyerek başlattığı çalışmasında kuaterniyonları keşfetti. Bu keşfini, Brougham Köprüsü altında dinlenirken yaptı ve orada bulunan bir taşa yazdı. Ve aşağıdaki birim vektörleri tanımladı.

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Bu olay herkes tarafından bilindiği için, dünyanın dört bir yanından insanlar bu köprüyü "Hamilton Köprüsü" olarak bilir. Kuaterniyonlar, bilim dünyasında çok büyük etkiye sahiptir. Matematik dışında fizik, kuantum fiziği, metafizik, mühendislik gibi bir çok bilim dalında kullanılır.

Grassman ve Hamilton'un tanımladığı sayı sistemlerini Clifford tek bir cebirle birleştirdi ve William Kingdon Clifford bu cebire geometrik cebir adını verdi. Aynı zamanda adına ithafen, bu cebir Clifford cebiri olarak da bilinir. Clifford cebirleri her alanda ilgi görmektedir. Geometrik cebir, geometrik kavramların cebirsel gösterimidir. Clifford cebiri, geometri, fizik ve sayısal işlem alanlarının uygulamalarını içerir. Clifford cebiri kuaterniyon cebirlerinin direkt toplamı olarak ifade edilebilir. Bu sebeple, kuaterniyon cebirleri Clifford cebirinin özel halidir. Bu cebirler, değişmeli değildir fakat birleşmelidir.

1.2 Kuadratik Formlar

Tanım 1.2.1 F cismi üzerinde, n-değişkenli bir f polinomu 2.dereceden homojen ise, bu f polinomuna n-sıralı kuadratik form denir. Yani;

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i X_j \tag{1.1}$$

biçimindeki ifadeye kuadratik form denir(Lam, T.Y. 2004).

Not: 1) F cisim olduğundan; $X_i X_j = X_j X_i$ dir.

2) (1.1) eşitliğinde $n = 2$ alınırsa;

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2) &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} a_{ij} X_i X_j \\ &= a_{11}{X_1}^2 + a_{12} X_1 X_2 + a_{21} X_2 X_1 + a_{22}{X_2}^2 \\ &= a_{11}{X_1}^2 + X_1 X_2 (a_{12} + a_{21}) + a_{22}{X_2}^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

3) $f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) X_i X_j$ yazılabilir.

4) f kuadratik formu, bir tek M_f matrisini belirler. Yani;

$$\left(M_f\right)_{ij} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_{11} + a_{11} & a_{12} + a_{21} \\ a_{21} + a_{12} & a_{22} + a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) \\ \frac{1}{2}(a_{21} + a_{12}) & a_{22} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

5) f kuadratik formu, M_f matrisi yardımıyla aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$f = f(X) = f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X^t M_f X, \tag{1.4}$$

burada X sütun matrisidir.

Tanım 1.2.2 (İki Kuadratik Formun Denkliği): f ve g iki kuadratik form olsun. Eğer;

$$f(X) = g(CX) \tag{1.5}$$

olacak şekilde $C \in GL_n(F)$ varsa $f \cong g$, yani f ve g kuadratik formları denktir. Yani;

$$f(X) = g(CX) \Rightarrow (CX)^t M_g (CX) \Rightarrow X^t\left(C^t M_g C\right)X \tag{1.6}$$

dır(Lam, T.Y. 2004).

Sonuç 1.2.1

1) $M_f = C^t M_g C; \quad |C| \neq 0.$

2) Kuadratik formların denkliği $f \cong g$ olması için; $M_f \cong C^t M_g C$ olmalıdır.

3) $f \cong g$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

4) $Q_f\colon\ F^n \to F$

$x \to Q_f(x) = x^t M_f x$ olan Q_f fonksiyonuna kuadratik dönüşüm denir.

5) $f \cong g$ nin anlamı; $Q_f(x) = Q_g(Cx)$ dır. Yani;

$x^t M_f x = x^t\left(C^t M_g C\right)x$ eşitliğini sağlayan bir C lineer dönüşümü vardır.

6) Q_f kuadratik dönüşümü f kuadratik formunu tek olarak belirler.

7) $Q_f(ax) = (ax)^t M_f (ax) = a^2 x^t M_f x = a^2 Q_f(x)$

8) Kuadratik dönüşüme ek olarak, $B_f\colon\ F^n \times F^n \to F$

$$B_f(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q_f(x+y) - Q_f(x) - Q_f(y)\right]$$

olarak tanımlanan B_f dönüşümü, simetrik ve bilineerdir.

Ayrıca, bu dönüşüm

$B_f(x,y) = \frac{1}{2}\left[Q_f(x+y) - Q_f(x) - Q_f(y)\right]$; $Q_f(x) = x^t M_f x$ idi.

$$= \frac{1}{2}\left[(x+y)^t M_f (x+y) - x^t M_f x - y^t M_f y\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^t M_f x + x^t M_f y + y^t M_f x + y^t M_f y - x^t M_f x - y^t M_f y\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^t M_f y + y^t M_f x\right]$$

$= x^t M_f y$ olup,

$$B_f(x,y) = x^t M_f y \tag{1.7}$$

özelliğine sahiptir. Dolayısıyla,

$$B_f(x,x) = x^t M_f x = Q_f(x) \tag{1.8}$$

eşitliği yazılabilir.

Tanım 1.2.3 (Bilineer Form) V sonlu boyutlu F-uzay olsun.

$$B: V \times V \to F$$

dönüşümü $\forall u, v, w \in V$ ve $\lambda \in F$ için,

1) $B(u+v,w) = B(u,w) + B(v,w)$
2) $B(u,v+w) = B(u,v) + B(u,w)$
3) $B(\lambda u, v) = B(u, \lambda v) = \lambda B(u,v)$

özelliklerine sahip ise B dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde bilineer form denir(Sakatütüncü E. 2009).

Tanım 1.2.4 (Simetrik Bilineer Form) V sonlu boyutlu F-uzay olsun.

$$B: V \times V \to F$$

dönüşümü $\forall u, v, w \in V$ ve $a, b \in F$ için,

1) $B(u,v) = B(v,u)$
2) $B(au+bv,w) = aB(u,w) + bB(v,w)$
3) $B(u,av+bw) = aB(u,v) + bB(u,w)$
4) $B(\lambda u, v) = B(u, \lambda v) = \lambda B(u,v)$

şartlarını sağlarsa B dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form denir(Sakatütüncü E. 2009).

Tanım 1.2.5 (Kuadratik Uzay) V sonlu boyutlu F-uzay ve $B: V \times V \to F$ dönüşümü simetrik bilineer form olmak üzere; (V, B) cebirsel yapısına, kuadratik uzay denir(Lam, T.Y. 2004).

$q = q_B$ ile gösterilen kuadratik dönüşüm ile kuadratik uzay aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilir:

- $q(x) = B(x,x) = Q_f(x)$ (1.9)
- $q(ax) = B(ax,ax) = a^2 B(x,x) = a^2 q(x)$ (1.10)

- $q(x+y) - q(x) - q(y) = B(x+y, x+y) - B(x,x) - B(y,y)$

$$= B(x,y) + B(y,x)$$

$$= 2B(x,y) \quad (1.11)$$

(1.11) eşitliğinden;

$$B(x,y) = \frac{1}{2}[\, q(x+y) - q(x) - q(y)] \quad (1.12)$$

elde edilir.

- (V, B) yerine (V, q) yazılabilir.
- (V, B) kuadratik uzayı bir tek q kuadratik dönüşümü belirlerken, kuadratik formların bir tek denklik sınıfını belirler.
- $e_1, e_2, \dots, e_n$, V için bir taban ise (V, B) kuadratik uzayı, F üzerinde bir kuadratik form verir. Yani;

$$f = f(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B(e_i, e_j) X_i X_j \quad (1.13)$$

olup;

$$B(e_i, e_j) = (M_f)_{ij} \quad (1.14)$$

dir.

Tanım 1.2.6 (İzometrik Olan Kuadratik Uzaylar) (V, B) ve (V', B') iki kuadratik uzay olsun. Eğer; $\tau: V \to V'$ lineer izomorfizmi varsa yani;

$B(x,y) = B'(\tau(x), \tau(y))$ oluyorsa $(V, B) \cong (V', B')$ izometrik kuadratik uzay olur. (Lam, T.Y. 2004).

Not: V nin $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazına karşılık gelen kuadratik form f , V' nin $\tau(e_1), \tau(e_2), \dots, \tau(e_n)$ bazına karşılık gelen kuadratik form f' ise, o zaman;

$$(M_f)_{ij} = B(e_i, e_j) = B'\left(\tau(e_i), \tau(e_j)\right) = (M_{f'})_{ij} \quad (1.15)$$

olur.

Sonuç 1.2.2 İki uzayın izometrik olması için $\Leftrightarrow$ kuadratik formlarının denk olması gerekir. Yani;

$$(V,B) \cong (V',B') \Leftrightarrow f_B \cong f_{B'} \tag{1.16}$$

dir.

Tanım 1.2.7 (Regüler Kuadratik Uzay) Eğer (V,B) uzayı aşağıdaki şartlardan birini sağlıyorsa bu uzaya regüler kuadratik uzay denir(Lam, T.Y. 2004).

1) $|M| \neq O$ regüler matristir(M kuadratik forma karşılık gelen simetrik matris).

2) $\forall y \in V$ için $B(x,y) = 0$ olacak şekilde $x \in V$ varsa, o zaman $x = 0$ dır.

Not: $B \equiv 0$, yani sıfır kuadratik uzayı 1. şartı sağlamamasına rağmen düzgün kuadratik uzay olarak kabul edilir.

Tanım 1.2.8 (Ortogonal Tümleyen ve Radikal) (V,B) kuadratik uzay, $S \subset V$ alt uzay olsun. $(S, B|_{S\times S})$ uzayı bir kuadratik uzaydır. Ve $S^T = \{x \in V | B(x,s) = 0\}$ kümesine V nin ortogonal tümleyeni denir(Lam, T.Y. 2004).

V nin kendi kendisinin ortogonal tümleyeni(alt küme olmadan), V nin radikalı olarak adlandırılır, ve $V^T = rad(V)$ yazılır.

$$rad(V) = \{x \in V | B(x,x) = 0\} \tag{1.17}$$

Not:

1) (V,B) regüler kuadratik uzay $\Leftrightarrow rad(V) = 0$ dır.

2) (V,B) regüler iken $S \subset V$ alt uzayı regüler olmayabilir. Örneğin;

$$(\mathbb{R}^2, B), B\big((a,b),(c,d)\big) = bc + ad \text{ ve } S = span\{(0,1)\}, B|_{S\times S} = 0 \tag{1.18}$$

dır.

Sonuç 1.2.3 (V,B) regüler kuadratik uzay ve $S \subset V$ alt uzay olsun. O zaman;

1) $dim(V) = dim(S) + dim(S^T)$

2) $(S^T)^T = S$ dır.

Sonuç 1.2.4 F cismi üzerinde f kuadratik formu ve $d \in \dot{F}$ olsun. Eğer $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = d$, $d \in \dot{F}$ olacak şekilde $X_1, X_2, \dots, X_n \in F$ varsa f kuadratik formu d yi temsil eder. f nin temsil ettiği bu elemanların kümesi $D(f)$ ya da $D_F(f)$ ile gösterilir. Yani;

$$D(f) = \{d \in \dot{F} \big| d = f(X_1, X_2, \dots, X_n)\} \tag{1.19}$$

olur.

Sonuç 1.2.5 $D(f)$ nin Grup Yapısı:

$a, d \in \dot{F}$ olsun. $d \in D(f) \Leftrightarrow a^2 d \in D(f)$ dir, ve $D(f)$ kümesi ters işleme göre daima kapalıdır. Çünkü $d \in D(f) \Leftrightarrow d^{-1} = (d^{-1})^2 d \in D(f)$ tir. Ancak, f 1 i temsil etmeyebilir. Yani $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = 1$ olmayabilir. Bu yüzden $D(f)$ birimi içermez. O zaman $D(f)$ bir grup değildir. f birimi içermeyebilir. 1 i içerse bile çarpmaya göre kapalı olmayabilir. Q üzerinde $x^2 + y^2 + z^2$ formunu dikkate alırsak, $D(f)$ $1, 2, 2^{-1}, 14$ ü içerir. Ancak; $2^{-1}.14 = 7$ olur. Ama 7, Q da üç kare toplamı değildir. Dikkat edersek; eğer $D(f)$ çarpma işlemi altında kapalı ise, $D(f)$ 1 i içerir. Bu durumda $D(f), \dot{F}$ nın alt grubu olabilir. Böylece de f, F üzerinde bir grup formu olarak adlandırılır.

Tanım 1.2.9 Eğer (V_1, B_1) , (V_2, B_2) kuadratik uzaylar ise, $V_1 \perp V_2 = (V, B)$ ortogonal toplamı $V = V_1 \oplus V_2$ ile tanımlanır, ve $B: V_1 \times V_2 \to F$, herhangi $x_1, y_1 \in V_1$ ve $x_2, y_2 \in V_2$ için $B\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = B_1(x_1, y_1) + B_2(x_2, y_2)$ dır.

Açıktır ki, B simetrik ve bilineerdir. Yani (V, B) yi kuadratik uzay yapar. Eğer $\{(x, 0): x \in V_1\}$ ile V_1, $\{(0, x): x \in V_2\}$ ile V_2 yi tanımlarsak; $B(V_1, V_2) = 0$ elde ederiz. Hem de $B_2(0,0) = 0$ için $B|_{V_1 \times V_1} = B_1$, benzer olarak $B|_{V_2 \times V_2} = B_2$ dir.

Herhangi $x_1 \in V_1$ ve $x_2 \in V_2$ için ilgili kuadratik form aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} q_B(x_1, x_2) &= B\big((x_1, x_2), (x_1, x_2)\big) \\ &= B_1(x_1, y_1) + B_2(x_2, y_2) \\ &= q_{B_1}(x_1) + q_{B_2}(x_2) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Teorem 1.2.2 $(V, B) = V_1 \perp V_2$ kuadratik uzayı regülerdir $\Leftrightarrow$ (V_1, B_1) ve (V_2, B_2) kuadratik uzayları regülerdir(Lam, T.Y. 2004).

Teorem 1.2.3 (Gösterim Kriteri) (V, B) bir kuadratik uzay ve $d \in \dot{F}$ olsun. O zaman $d \in D(V)$ $\Leftrightarrow$ $V \cong \langle d \rangle \perp V'$ olacak şekilde (V', B') kuadratik uzayı vardır(Lam, T.Y. 2004).

Gösterim Kriterini tekrar tekrar uygularsak, ortogonal tabanın varlığını gösterebiliriz. Ve aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 1.2.6 Eğer (V, B), F cismi üzerinde bir kuadratik uzay ise, o zaman $V \cong \langle d_1 \rangle \perp \langle d_2 \rangle \perp \cdots \perp \langle d_n \rangle$ olacak şekilde $d_1, d_2, \ldots, d_n \in F$ skalerleri vardır. Başka bir ifadeyle, herhangi n-değişkenli kuadratik form $d_1 {x_1}^2 + \cdots + d_n {x_n}^2$ diagonal forma eşittir. Ayrıca $\langle d_1, \ldots, d_n \rangle$ ile gösterilir(Lam, T.Y. 2004).

Not: Özel olarak $\langle d, \ldots, d \rangle$ n-değişkenli kuadratik formu, $n\langle d \rangle$ ile gösterilir. Örneğin; $3\langle a \rangle \perp 4\langle b \rangle$ direkt toplamı $\langle a, a, a, b, b, b, b \rangle$ anlamına gelir.

Sonuç 1.2.7 Eğer (V, B) bir kuadratik uzay ve S bir düzgün alt uzay ise, o zaman;

1) $V = S \perp S^{\perp}$

2) Eğer T, $V = S \perp T$ olacak şekilde V nin bir alt uzayı ise, o zaman $T = S^{\perp}$ dir.

Sonuç 1.2.8 (V, B) bir regüler kuadratik uzay olsun.

S alt uzayı regüler ise $\Leftrightarrow$ $V = S \perp T$ olacak şekilde $T \subseteq V$ vardır.

İspat: Eğer S alt uzayı regüler ise $T = S^{\perp}$ alalım. Tersine eğer $V = S \perp T$, o zaman $radS \subseteq radV = 0$ dır. Böylece S regülerdir.

Tanım 1.2.10 f singüler olmayan kuadratik formun determinantı;

$d(f) = det(M_f)\dot{F}^2$ olarak adlandırılır, ki bu $\dot{F}/\dot{F}^2$ nın bir elemanıdır. Dikkat edersek eğer $f \cong g$ ise, o zaman $M_f = C^t M_g C$ olacak şekilde belli singüler olmayan C vardır. Ve

$$d(f) = det(M_f)\dot{F}^2 = det(M_g)det(C)^2\dot{F}^2 = d(g) \qquad (1.21)$$

dır. Yani, $d(f)$, f nin denklik sınıflarının bir sabitidir. Blok diagonal matrisleri düşünerek, aşağıdaki (1.22) eşitliği görülebilir.

$$d(f_1 \perp f_2) = d(f_1)d(f_2) \tag{1.22}$$

Böylece, eğer $f = V \cong \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ ve V, f ye karşılık gelirse,

$d(f) = d_1 \dots d_n . \dot{F}^2$ dir. Bu durumda $d(f)$, V nin determinantı olarak adlandırılır. Ve $d(V)$ ile belirtilir.

Teorem 1.2.4 $a, b, c, d \neq 0$ olmak üzere, $q = \langle a, b \rangle$ ve $q' = \langle c, d \rangle$ regüler ikili kuadratik form olsun. O zaman $q \cong q' \Leftrightarrow d(q) = d(q')$ ve q, q' bir ortak $e \in \dot{F}$ elemanını temsil eder(Lam, T.Y. 2004).

1.3 Hiperbolik Düzlem ve Hiperbolik Uzay

Tanım 1.3.1 v, kuadratik uzaydaki sıfır olmayan bir vektör olsun. Eğer $B(v, v) = q_B(v) = 0$ ise v bir isotropiktir, aksi halde anisotropiktir. Eğer (V, B) kuadratik uzayı bir isotropic vektör içerirse (V, B) isotropic olarak adlandırılır, aksi halde anisotropiktir. Ve eğer V de her sıfır olmayan vektör isotropik yani $B \equiv 0$ ise, (V, B) tam olarak isotropiktir.

Teorem 1.3.1 (V, q), 2-boyutlu kuadratik uzaylar olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir(Lam, T.Y. 2004).

1) V regüler ve isotropiktir.

2) $d(V) = -1\dot{F}^2$ olmak üzere V regülerdir.

3) V, $d = \langle 1, -1 \rangle$ e izometriktir.

4) V, iki değişkenli kuadratik form $X_1 X_2$ in denklik sınıfına karşılık gelir.

Not: Yukarıdaki ifadelerin herhangi birini sağlayan 2-boyutlu kuadratik uzaya hiperbolik düzlem denir. Ve $\mathbb{H}$ ile belirtilebilir. Split kuaterniyonlar hiperbolik düzlem oluşturur. Hiperbolik düzlemin bir ortogonal toplamına hiperbolik uzay denir.

Hiperbolik uzaya karşılık gelen kuadratik form;

$$X_1X_2 + \cdots + X_{2m-1}X_{2m} \text{ ya da } \left({X_1}^2 - {X_2}^2\right) + \cdots + \left({X_{2m-1}}^2 - {X_{2m}}^2\right) \quad (1.23)$$

dur.

İspat: $(\mathbf{3}) \Leftrightarrow (\mathbf{4})$ $g(X_1, X_2) = X_1X_2$ ve $C: (X_1, X_2) \to (X_1 + X_2,\ X_1 - X_2)$ ters çevrilebilir lineer dönüşüm olsun. O zaman,

$$g\big(C(X_1, X_2)\big) = (X_1 + X_2)(X_1 - X_2) = {X_1}^2 - {X_2}^2 = \langle 1, -1\rangle \quad (1.24)$$

olur.

$(\mathbf{3}) \Rightarrow (\mathbf{1})$ $\langle 1, -1\rangle = {X_1}^2 - {X_2}^2$ kuadratik formu için, $(1, -1)$ kuadratik uzayın izotropik bir vektörüdür.

Teorem 1.3.2 (V, B) bir regüler kuadratik uzay olsun. O zaman,

$\mathbf{1}$) r-boyutlu $U \subseteq V$ nun her izotropik alt uzayı, $2r$-boyutlu $T \subseteq V$ bir hiperbolik alt uzayını içerir.

$\mathbf{2}$) V izotropiktir $\Leftrightarrow$ V bir hiperbolik düzlem içerir(Lam, T.Y. 2004).

Teorem 1.3.3 (Witt'nin Ayrıştırma Teoremi) (V, q) bir kuadratik uzay olsun. O zaman;

$$(V, q) = (V_t, q_t) \perp (V_h, q_h) \perp (V_\alpha, q_\alpha) \quad (1.25)$$

dır.

Burada V_t toplam izotropik, V_h hiperbolik(ya da sıfır) ve V_α anizotropiktir(Lam, T.Y. 2004).

Teorem 1.3.4 (Witt'nin Sadeleştirme Teoremi) Eğer q, q_1, q_2 keyfi kuadratik formlar ise, o zaman

$$q \perp q_1 \cong q \perp q_2 \Rightarrow q_1 \perp q_2 \quad (1.26)$$

dir(Lam, T.Y. 2004).

Bir sonraki bölümde, reel kuadratik formları inceleyeceğiz.

2. REEL KUADRATİK FORMLAR

Tanım 2.1 a, b, c en az biri sıfırdan farklı olan belirli reel sayılar olmak üzere;

$$q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ q(u_1, u_2) = a(u_1)^2 + 2bu_1u_2 + c(u_2)^2 \tag{2.1}$$

biçiminde bir q fonksiyonuna ikinci dereceden bir reel kuadratik form denir.

Bu kesimde kısaca “kuadratik form” denildiğinde, “reel kuadratik form” anlaşılacaktır(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008).

$\mathbb{R}$ uzayının doğal tabanına göre h vektörünün bileşenlerinin matrisi $[h]_{1\times1}$ matrisidir. 1×1 biçimindeki reel bileşenli matrislerle reel sayılar arasında $[h]_{1\times1} \to h$ biçiminde doğal bir birebir eşleme vardır. Bundan dolayı $[h]_{1\times1}$ matrisi yerine h da yazılabilir.

$\mathbb{R}^2$ uzayının doğal tabanı e ile gösterilsin. $u = (u_1, u_2)$ ve $u \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere u vektörünün $\mathbb{R}^2$ uzayının e tabanına göre bileşenlerinin matrisi $[u]_e$ biçiminde gösterilebilir. $[u]_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ olduğu kolayca görülebilir. $[u]_e \in \mathbb{R}_1^2$ dir. $[u]_e$ matrisini $\boldsymbol{u}$ ile gösterelim. Kısaca $[u]_e = \boldsymbol{u}$ diyelim. Bir q kuadratik formu:

$$q(u_1, u_2) = [a(u_1)^2 + 2bu_1u_2 + c(u_2)^2]$$

$$= [u_1 \quad u_2]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = ([u]_e)^T A [u]_e = u^T A u \tag{2.2}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ matrisi *A* ile gösterilmiştir.

$$q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ q(u_1, u_2) = a(u_1)^2 + 2bu_1u_2 + c(u_2)^2 \tag{2.3}$$

biçiminde bir q kuadratik formu verildiğinde $\forall u \in \mathbb{R}^2$ için,

$$q(u) = ([u]_e)^T A [u]_e \tag{2.4}$$

olacak biçimde $\mathbb{R}_2^2$ uzayında bir A simetrik matrisi vardır. Buradaki A matrisine q kuadratik formunun matrisi denir. Karşıt olarak $A \in \mathbb{R}_2^2$ ve A simetrik bir matris olmak üzere A matrisi verildiğinde $q(u) = ([u]_e)^T A[u]_e$ eşitliğiyle belirli bir q kuadratik formu verilmiş olur. Bunun terside doğrudur.

Genel olarak $A \in \mathbb{R}_n^n$ ve A simetrik matris olmak üzere

$$q(u) = ([u]_e)^T A[u]_e \tag{2.5}$$

eşitliğiyle tanımlı q fonksiyonuna, $\mathbb{R}^n$ uzayında A matrisinin belirlediği kuadratik form denir(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008).

Uyarı 2.1 $n \times n$ biçiminde simetrik bir A matrisinin $\mathbb{R}^n$ uzayının e doğal tabanına göre belirttiği lineer dönüşüm $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olsun. $[L(u)]_e = A[u]_e$ dır. Bundan dolayı,

$$q(u) = ([u]_e)^T A[u]_e = \langle [u]_e, A[u]_e \rangle = \langle [u]_e, [L(u)]_e \rangle = \langle u, L(u) \rangle \tag{2.6}$$

olur. A matrisinin simetrik matris olduğu göz önüne alınarak,

$$q(u) = ([u]_e)^T A[u]_e = ([u]_e)^T A^T [u]_e = (A[u]_e)^T [u]_e$$

$$= \langle A[u]_e, [u]_e \rangle = \langle [L(u)]_e, [u]_e \rangle = \langle L(u), u \rangle \tag{2.7}$$

bulunur.

Not: 1) V bir iç çarpım uzayı ve φ bu uzayın ortonormal bir tabanı olsun. Bu durumda;

$$\langle u, v \rangle = \langle [u]_\varphi, [v]_\varphi \rangle \tag{2.8}$$

dır.

2) V sonlu boyutlu reel iç çarpım uzayı ve φ, V nin ortonormal bir tabanı olsun.

a) $L: V \to V$ lineer dönüşümü $\forall\, u, v \in V$ için;

$$\langle L(u), v \rangle = \langle u, L(v) \rangle \tag{2.9}$$

eşitliğini sağlarsa L_φ matrisi simetrik bir matristir.

b) $A \in \mathbb{R}_n^n$ ve A simetrik bir matris ise A matrisinin φ tabanına göre belirttiği $L: V \to V$ lineer dönüşümü $\forall\, u, v \in V$ için;

$$\langle L(u), v\rangle = \langle u, L(v)\rangle \tag{2.10}$$

eşitliğini sağlar.

Yukarıdaki Not 2) den $\langle u, L(u)\rangle = \langle L(u), u\rangle$ olduğunu da söyleyebiliriz. Demek ki q kuadratik formu

$$q(u) = \langle u, L(u)\rangle \text{ veya } q(u) = \langle L(u), u\rangle \tag{2.11}$$

biçiminde verilebilir.

$u \in \mathbb{R}^n$ için $[u]_e$ matrisini $\boldsymbol{u}$ ile gösterelim. Kısaca $[u]_e = \boldsymbol{u}$ diyelim. Bu gösterime göre $\mathbb{R}^n$ uzayında bir q kuadratik formu;

$$q(u) = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{u} \tag{2.12}$$

biçiminde yazılabilir.

$\mathbb{R}^3$ uzayında bir kuadratik form;

$$q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ q(u_1, u_2, u_3) = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

biçimindedir.

$$q(u_1, u_2, u_3) = a(u_1)^2 + b(u_2)^2 + c(u_3)^2 + 2du_1u_2 + 2eu_1u_3 + 2fu_2u_3 \tag{2.14}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Bir q kuadratik formunun A matrisi simetrik bir matristir. Simetrik matrislerin bütün öz değerleri reel sayıdır. A simetrik matrisinin, $\mathbb{R}^n$ uzayının e doğal tabanına göre belirttiği lineer dönüşüm $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olsun. L lineer dönüşümünün öz değerleri, A matrisinin öz değerlerine eşittir.

Sonuç 2.1 V, n-boyutlu reel iç çarpım uzayı olsun. $L: V \to V$ dönüşümü $\forall u, v \in V$ için $\langle u, L(v)\rangle = \langle L(u), v\rangle$ eşitliğini sağlayan lineer bir dönüşüm ise V nin ortonormal bir tabanı, bu tabandaki her bir vektör L dönüşümünün bir öz vektörü olacak şekilde bulunabilir(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008).

$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümü $\forall u, v \in V$ için $\langle u, L(v)\rangle = \langle L(u), v\rangle$ eşitliğini sağladığından sonuca göre $\mathbb{R}^n$ uzayının bir φ ortonormal tabanı, bu tabandaki her vektör L dönüşümünün bir öz vektörü olacak biçimde bulunabilir. Bu sonuçtan yararlanılarak kuadratik formlar, L dönüşümünün öz değerlerine ve u vektörünün φ tabanına göre bileşenlerine bağlı olarak yazılabilir.

Şimdi $\mathbb{R}^2$ uzayında $q(u) = ([u]_e)^T A[u]_e$ eşitliğiyle verilmiş q kuadratik formunu göz önüne alalım. A matrisi 2×2 biçiminde simetrik bir matris olduğundan $\mathbb{R}^2$ uzayının ortonormal bir φ tabanı, bu tabandaki her bir vektör L dönüşümünün bir öz vektörü olacak biçimde bulunabilir. $\varphi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ olsun. α_1, α_2 vektörlerini satır vektörleri olarak alınan $[\alpha_1 \quad \alpha_2]$ matrisine P diyelim. Bu matris, φ tabanından e tabanına geçiş matrisidir. P matrisi ortogonal bir matris olduğundan $P^{-1} = P^T$ dır. $P^T AP$ matrisi köşegen matris olur.

$$P^T AP = D \tag{2.15}$$

diyelim. D köşegen matrisinin köşegeninde A matrisinin öz değerleri bulunur. Daha açık olarak

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

$\mathbb{R}^2$ uzayının doğal tabanı e ile gösterilsin. φ tabanından e tabanına geçiş matrisi P olduğundan e tabanından φ tabanına geçiş matrisi P^{-1} matrisidir. $P^{-1} = P^T$ olduğundan e tabanından φ tabanına geçiş matrisi P^T olur.

$u \in \mathbb{R}^2$, $u = (u_1, u_2)$ olsun. u vektörünün e tabanına göre bileşenlerinin matrisini $[u]_e$ ile göstermiştik. Bu gösterime göre vektörünün φ tabanına göre bileşenlerinin matrisi $[u]_\varphi$ dir.

$[u]_e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ açıktır. $[u]_\varphi = \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix}$ olsun. $[u]_e = P[u]_\varphi$ dir. Buna göre,

$$q(u_1, u_2) = u^T Au = ([u]_e)^T A([u]_e) = \left(P[u]_\varphi\right)^T A\left(P[u]_\varphi\right)$$

$$= \left([u]_{\varphi}\right)^{T} P^{T} A P [u]_{\varphi} = \left([u]_{\varphi}\right)^{T} D [u]_{\varphi}$$

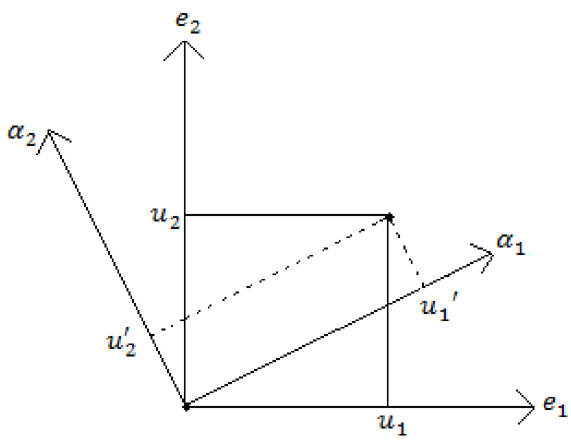
$$= \begin{bmatrix} u_1' & u_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \lambda_1 \, (u_1')^2 + \lambda_2 \, (u_2')^2$$

elde edilir. Böylece;

$$q(u_1, u_2) = \lambda_1 \, (u_1')^2 + \lambda_2 \, (u_2')^2 \qquad (2.16)$$

eşitliğini elde ederiz.

Not: Bu son eşitliğin sol tarafındaki u_1, u_2 sayıları, düzlemde bir noktanın e tabanına göre bileşenleridir. u_1', u_2' sayıları aynı noktanın φ tabanına göre bileşenleridir(Şekil 2.1).

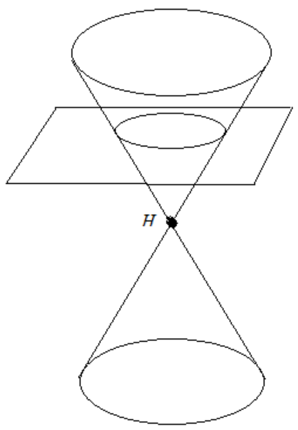


Şekil 2.1

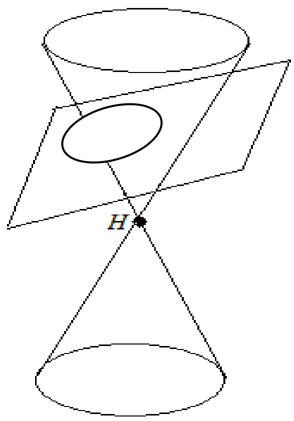
Tanım 2.2 u_1 ve u_2, $\mathbb{R}$ kümesinde değişkenler olsun. a, b, c en az biri sıfırdan farklı olan belirli reel sayılar ve $d, e, f \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$a(u_1)^2 + 2bu_1u_2 + c(u_2)^2 + du_1 + eu_2 + f = 0 \qquad (2.17)$$

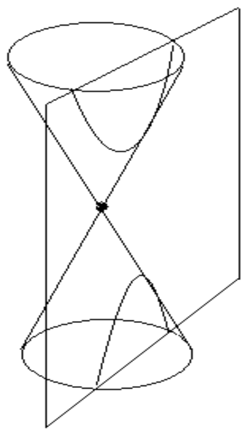
biçiminde bir denklemin $\mathbb{R}^2$ uzayında gösterdiği eğriye düzlemde bir konik eğrisi denir(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008). Düzlemdeki konik eğrilerinin, uzayda bir koni yüzeyi ile bir düzlemin arakesitleri olduğu gösterilebilir. Bu yüzden konik eğrilerine koni kesitleri adı da verilir. Bir koni yüzeyi ile bir düzlemin arakesitleri çember, elips, hiperbol, parabol, nokta, kesişen iki doğru, çakışık iki doğru da olabilir.



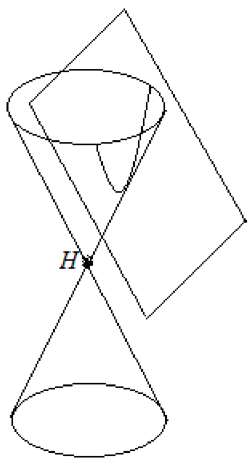
Şekil 2.2



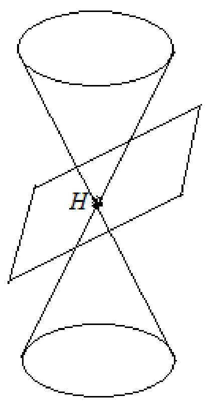
Şekil 2.3



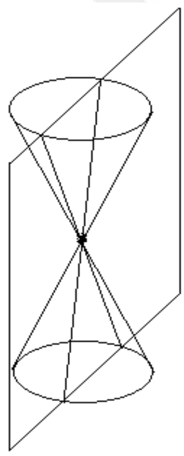
Şekil 2.4



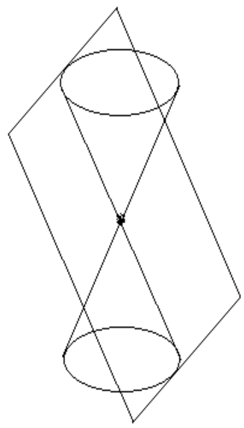
Şekil 2.5



Şekil 2.6



Şekil 2.7



Şekil 2.8

2.2, 2.3 ve 2.4 şekillerde çember, elips ve hiperbol eğrilerinin koni kesiti olarak nasıl elde edildiği gösterilmiştir. 2.5, 2.6, 2.7 ve 2.8 şekillerde de parabol, nokta, kesişen iki doğru ve çakışık iki doğrunun koni kesiti olarak nasıl elde edildiği gösterilmiştir.

Bu nokta kümelerinden her biri düzlemde bir konik eğrisidir. Bu eğrilerden nokta, kesişen iki nokta, kesişen iki doğru, çakışık iki doğru, yoz(bozulmayan) konik eğrileri olarak adlandırılır. Çember, elips, hiperbol, parabol, yoz olmayan konik eğrileridir.

Düzlemdeki konik eğrileriyle kuadratik formlar arasında yakın bir ilişki vardır. Kuadratik formu belirten A simetrik matrisinin özelliklerinden yararlanarak denklemi verilen konik eğrisinin çizimi kolaylaştırılabilir. Düzlemde,

$$a(u_1)^2 + 2bu_1u_2 + c(u_2)^2 + f = 0 \tag{2.18}$$

biçiminde bir denklem ile verilen eğrileri göz önüne alalım. Bu denklem

$$q(u_1, u_2) + f = 0$$

biçiminde bir denklemdir. Buradaki $q(u_1, u_2)$ yerine $\lambda_1\,(u_1{}')^2 + \lambda_2\,(u_2{}')^2$ konulduğunda (2.18) denklemi

$$\lambda_1\,(u_1{}')^2 + \lambda_2\,(u_2{}')^2 + f = 0 \tag{2.19}$$

denklemine dönüşür. Bu denklem (2.18) denkleminin gösterdiği eğrinin $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ tabanına göre yazılmış denklemidir. $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ tabanına göre (2.19) denkleminin gösterdiği eğri çizilebilir.

Örnek 2.1

$$(u_1)^2 - 4(u_2)^2 - 6u_1 + 16u_2 - 11 = 0 \tag{2.20}$$

denkleminin gösterdiği eğri C olsun. C eğrisini çiziniz(Sabuncuoğlu, A. 2008).

Çözüm: $(u_1)^2 - 4(u_2)^2 = q(u_1, u_2)$ diyelim. q kuadratik formunun matrisi A olsun. Bu matris,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

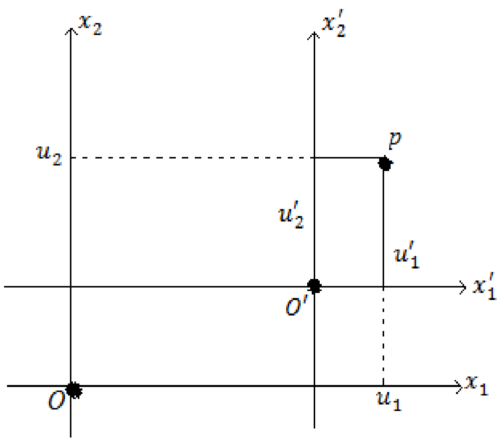
dir. A matrisi köşegen matristir. Öz değerleri 1 ve -4 tür. (2.20) denklemini düzenlersek;

$$(u_1)^2 - 6u_1 - 4[(u_2)^2 - 4u_2] - 11 = 0$$
$$[(u_1 - 3)^2 - 9] - 4[(u_2 - 2)^2 - 4] - 11 = 0$$
$$(u_1 - 3)^2 - 4(u_2 - 2)^2 = 4$$
$$\frac{(u_1-3)^2}{4} - \frac{(u_2-2)^2}{1} = 1 \qquad (2.21)$$

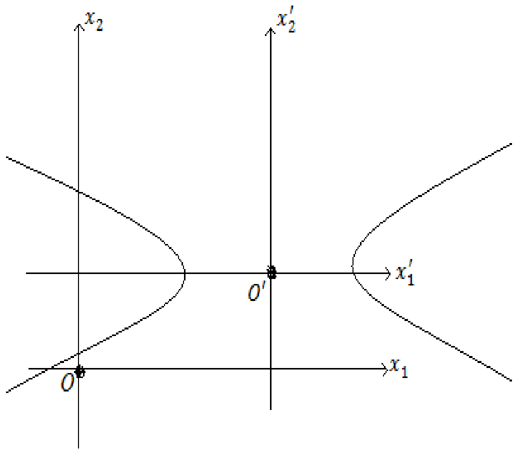
elde edilir. (2.21) denkleminde $u_1 - 3 = u_1{}'$ ve $u_2 - 2 = u_2{}'$ diyelim. Böylece

$$\frac{(u_1{}')^2}{4} - \frac{(u_2{}')^2}{1} = 1 \qquad (2.22)$$

elde edilir. $u_1 - 3 = u_1{}'$ ve $u_2 - 2 = u_2{}'$ eşitlikleri düzlemde, $x_1 O x_2$ koordinat sistemindeki bileşenleri 3 ve 2 olan noktada, doğal koordinat sisteminin eksenlerine paralel eksenler çizilerek yeni bir $x_1{}' O x_2{}'$ koordinat sistemi seçilsin. $p = (u_1, u_2)$ olmak üzere p noktasının $x_1{}' O x_2{}'$ koordinat sistemine göre bileşenleri $u_1{}'$ ve $u_2{}'$ sayıları olur.(Şekil 2.9)



Şekil 2.9



Şekil 2.10

(2.22) denkleminin gösterdiği eğri, $x_1' O x_2'$ koordinat sisteminde bir hiperbol eğrisidir. 2.10 şeklinde hiperbol eğrisi olduğunu görüyoruz.

Örnek 2.2

$$\frac{5}{4}(u_1)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} u_1 u_2 + \frac{7}{4}(u_2)^2 - 4 = 0 \qquad (2.23)$$

denkleminin gösterdiği eğri C olsun. C eğrisini çiziniz(Sabuncuoğlu, A. 2008).

Çözüm: $\frac{5}{4}(u_1)^2+\frac{\sqrt{3}}{2}u_1u_2+\frac{7}{4}(u_2)^2=q(u_1,u_2)$ diyelim. q kuadratik formunun matrisi A olsun.

$$A=\begin{bmatrix}\frac{5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

dır.

$$f_A=det(xI_2-A)=det\begin{bmatrix}x-\frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & x-\frac{7}{4}\end{bmatrix}=x^2-3x+2$$

dir. f_A polinomunun kökleri $\lambda_1=2$ ve $\lambda_2=1$ dir. $\lambda_1=2$ öz değerine karşılık gelen öz uzayı bulalım. $Ax=\lambda\ x$ eşitliğinden;

$\begin{bmatrix}2-\frac{5}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 2-\frac{7}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ olup,

$\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}\frac{3}{4}a-\frac{\sqrt{3}}{4}b\\ -\frac{\sqrt{3}}{4}a+\frac{b}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ bulunur. Buradan,

$$\frac{1}{4}\left(3a-\sqrt{3}b\right)=0 \qquad -\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}a-b\right)=0$$

$$3a-\sqrt{3}b=0 \qquad \sqrt{3}a-b=0$$

elde edilir. $a=t$ parametresine göre, $b=\sqrt{3}t$ dir. Yani $\lambda_1=2$ öz değerine karşılık gelen öz uzay $\{1,\sqrt{3}\}$ tür. Benzer şekilde $\lambda_2=1$ öz değerine karşılık gelen öz uzay $\{-\sqrt{3},1\}$ şeklinde bulunur. Buna göre, $|detP|=1$ olsun diye,

$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\alpha_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ vektörlerini ele alalım.

O zaman,

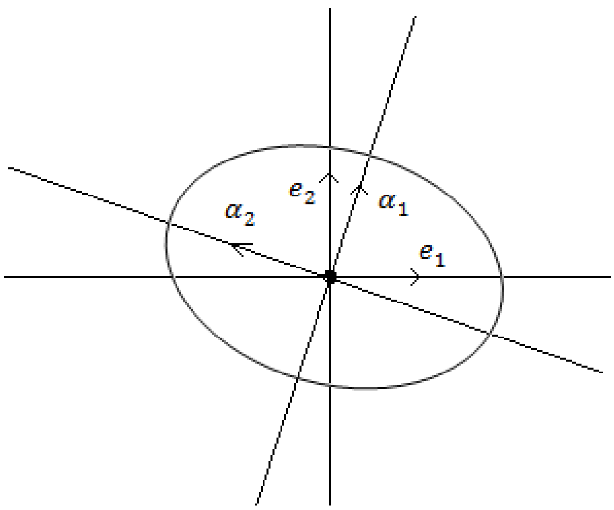
$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olur. P matrisi ortogonal bir matris olduğundan $|detP| = 1$ dir.

Not: $detP = -1$ ise λ_1 ve λ_2 öz değerlerinin sırasını değiştirerek $detP = 1$ olmasını sağlayabiliriz.

$$q(u_1, u_2) = \lambda_1 (u_1')^2 + \lambda_2 (u_2')^2 = 2(u_1')^2 + (u_2')^2$$

olduğundan (2.23) denklemi, $2(u_1')^2 + (u_2')^2 - 4 = 0$ denklemine dönüşür.
Bu denklem aranılan C eğrisinin $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ tabanına göre denklemidir.



Şekil 2.11

$2(u_1')^2 + (u_2')^2 - 4 = 0$ denklemi 4 sayısına bölünerek

$$\frac{(u_1')^2}{2}+\frac{(u_2')^2}{4}=1 \qquad (2.24)$$

denklemi elde edilir. (2.24) denklemi $\{\alpha_1,\alpha_2\}$ ortonormal tabanının gösterdiği koordinat sisteminde bir elips denklemidir(Şekil 2.11).

Teorem 2.1 $A \in \mathbb{R}_n^n$ ve A simetrik bir matris olmak üzere A nın öz değerleri

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1} \leq \lambda_n$$

biçiminde sıralanmış olsun. A matrisinin belirlediği kuadratik form q olduğuna göre

$\|u\| = 1$ olacak biçimdeki $\forall\, u \in \mathbb{R}^n$ için $\lambda_1 \leq q(u) \leq \lambda_n$

dir(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008).

Örnek 2.3

$$q(u)=\frac{19}{10}(u_1)^2+\frac{6}{10}u_1u_2+\frac{11}{10}(u_2)^2 \qquad (2.25)$$

olduğuna göre q kuadratik formunun $\mathbb{R}^2$ uzayındaki $\|u\| = 1$ çember üstündeki en büyük ve en küçük değerleri bulunuz. q kuadratik formunun en küçük ve en büyük değerlerini aldığı noktaları belirtiniz(Sabuncuoğlu, A. 2008).

Çözüm q kuadratik formunun matrisi A olsun.

$A=\begin{bmatrix} \frac{19}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{11}{10} \end{bmatrix}$ dır. Ve $f_A = det(xI_2 - A) = det\begin{bmatrix} x-\frac{19}{10} & -\frac{3}{10} \\ -\frac{3}{10} & x-\frac{11}{10} \end{bmatrix} = x^2-3x+2$

f_A polinomunun kökleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = 2$ dir. $\lambda_1 < \lambda_2$ olduğundan q kuadratik formunun $\|u\| = 1$ çember üstündeki en küçük değeri 1, en büyük değeri 2 dir.

λ_1 öz değerine karşılık gelen öz uzay $Sp\{(-1,3)\}$ dir. $Sp\{(-1,3)\}$ uzayının ortonormal tabanı $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)\right\}$ dır.

λ_2 öz değerine karşılık gelen öz uzay $Sp\{(3,1)\}$ dir. Bu uzayın ortonormal tabanı $\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$ dır.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right),\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ uzayının ortonormal bir tabanıdır.

$q\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)=1$ ve $q\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=2$

dir. q kuadratik formu en küçük değerini $\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$ noktasında alır.
En büyük değerini ise, $q\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ noktasında alır.

Tanım 2.3 $A \in \mathbb{R}_n^n$ ve A simetrik bir matris olmak üzere A matrisinin belirlediği kuadratik form q olsun.

1) $\forall u \in \mathbb{R}^n$ ve $u \neq 0$ için $q(u) \geq 0$ ise q kuadratik formuna pozitif tanımlıdır veya kesin pozitiftir denir.

2) $\forall u \in \mathbb{R}^n$ ve $u \neq 0$ için $q(u) < 0$ ise q kuadratik formuna negatif tanımlıdır veya kesin negatiftir denir.

3) $\forall u \in \mathbb{R}^n$ için $q(u) \geq 0$ ise q kuadratik formuna yarı-pozitif tanımlıdır denir.

4) $\forall u \in \mathbb{R}^n$ için $q(u) \leq 0$ ise q kuadratik formuna yarı-negatif tanımlıdır denir(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008).

Not: $\mathbb{R}^n$ uzayındaki bazı u vektörleri için $q(u)$ sayısı pozitif değerler alıyorsa bazı u vektörleri için negatif değerler alıyorsa bu durumda q kuadratik formu, pozitif tanımlı da değildir, negatif tanımlı da değildir.

Teorem 2.2 $A \in \mathbb{R}_n^n$ ve A simetrik bir matris olmak üzere A matrisinin belirlediği kuadratik form q olsun. q kuadratik formunun pozitif tanımlı olması için $\Leftrightarrow$ A matrisinin bütün öz değerlerinin pozitif olmasıdır(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008).

Sonuç 2.2

$$a(u_1)^2 + 2bu_1u_2 + c(u_2)^2 + f = 0 \tag{2.26}$$

denkleminin kuadratik formunun matrisi A olsun.

$\boldsymbol{a}$) (2.26) denkleminin bir elips göstermesi için $\Leftrightarrow$ A matrisinin öz değerlerinin her ikisinin de pozitif olmasıdır. Bu durumda q kuadratik formu pozitif tanımlıdır.

$\boldsymbol{b}$) (2.26) denkleminin bir hiperbol göstermesi için $\Leftrightarrow$ A matrisinin öz değerlerinden birinin negatif, birinin pozitif olmasıdır.

$\boldsymbol{c}$) (2.26) denkleminin bir parabol göstermesi için $\Leftrightarrow$ A matrisinin öz değerlerinden birinin sıfır olmasıdır(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008).

A matrisinin öz değerlerinden en az biri sıfırdan farklıdır. Her ikisi de sıfır olsaydı A matrisi simetrik matris olduğundan 0 öz değerine karşılık gelen uzay iki-boyutlu olurdu. Böyle olması $\forall u \in \mathbb{R}_1^n$ için $Au = 0$ olması anlamına gelir. Buradan da $A = 0$ sonucu çıkardı. Kuadratik formu tanımlarken, a, b, c sayılarından en az birinin sıfırdan farklı olduğunu varsaymıştık.

Tanım 2.4 u_1, u_2, u_3, $\mathbb{R}$ kümesinde değişkenler olsun.a, b, c, d, e, f en az biri sıfırdan farklı olan belirli reel sayılar olmak üzere

$$a(u_1)^2 + b(u_2)^2 + c(u_3)^2 + 2du_1u_2 + 2eu_1u_3 + 2fu_2u_3$$

$$+gu_1 + hu_2 + ku_3 + l = 0 \tag{2.27}$$

biçiminde bir denklemin $\mathbb{R}^3$ uzayında gösterdiği yüzeye uzayda bir kuadratik yüzey denir(Hacısalihoğlu H. H. 1983 ve Sabuncuoğlu, A. 2008).

$$A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

ve

$$q(u) = \boldsymbol{u}^T A \boldsymbol{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3].\begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \qquad (2.29)$$

olmak üzere kuadratik yüzeyin denkleminin

$$q(u) + [g \quad h \quad k]\boldsymbol{u} + l = 0 \qquad (2.30)$$

biçiminde yazılabileceği görülebilir. q kuadratik formunun A matrisi simetrik bir matristir. $\mathbb{R}^2$ uzayında konik eğrilerinin denklemleri için yapılan işlemler, $\mathbb{R}^3$ uzayında kuadratik yüzeylerin denklemleri için yapılabilir. Bu işlemlerde (2.30) denklemi kuadratik yüzeyin denkleminin standart formu denilen bir biçime dönüştürülebilir. Standart formdaki bir kuadratik yüzeyin şeklini görmek oldukça kolaydır. Uzayda bir yüzeyin biçimini tanımanın en kolay yolu, bu yüzeyin koordinat düzlemlerine paralel düzlemlerle arakesitlerini incelemektir.

Örnek 2.4

$$\frac{{u_1}^2}{A^2} + \frac{{u_2}^2}{B^2} + \frac{{u_3}^2}{C^2} = 1 \qquad (2.31)$$

denkleminin gösterdiği yüzeyi çizerek gösteriniz(Sabuncuoğlu, A. 2008).

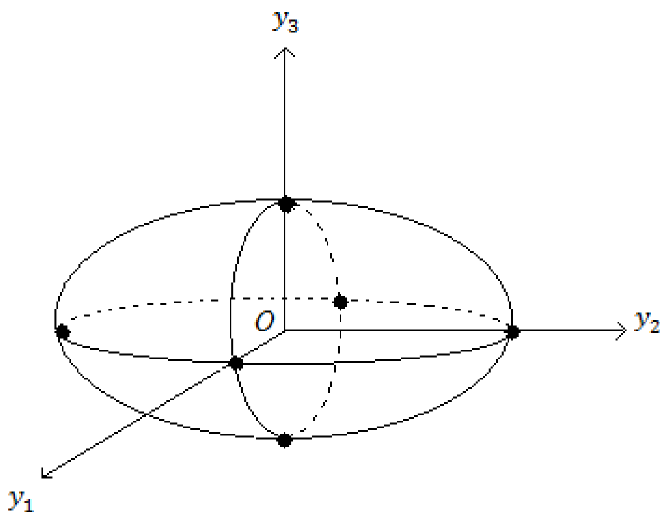
Çözüm: Uzayda, dik koordinat eksenlerini $O_{y_1}, O_{y_2}, O_{y_3}$ ile gösterelim. (2.31) denklemiyle verilen yüzeyin, $y_1 = k$ düzlemleriyle arakesitleri

$$\frac{{u_2}^2}{B^2} + \frac{{u_3}^2}{C^2} = 1 - \frac{k^2}{A^2} \qquad (2.32)$$

biçiminde yazılabilir. k sayısı, $-A < k < A$ olacak biçimde değiştiğinde (2.32) denklemi bir elips gösterir. $k < -A$ ve $A < k$ için arakesit boş kümedir. $k = A$ için arakesit $\{(A, 0,0)\}$ kümesidir. $k = -A$ için arakesit $\{(-A, 0,0)\}$ kümesidir. Bu elipslerin en büyüğü $k = 0$ için elde edilen

$$\frac{{u_2}^2}{B^2} + \frac{{u_3}^2}{C^2} = 1 \tag{2.33}$$

denklemi elipstir. (2.31) yüzeyinin, $y_2 = k$ ve $y_3 = k$ düzlemleriyle arakesitlerinin de yukarıdaki gibi elipsler olduğu bulunabilir. Bu gözlemlerin sonucu olarak (2.31) denkleminin gösterdiği yüzeyin kabaca 2.12 şeklindeki gibi olduğu görülür.



Şekil 2.12

(2.31) denkleminin gösterdiği yüzey bir elipsoiddir. (2.31) denkleminde,

$A = B = C$ ise elipsoid yüzeyi bir küredir. A, B, C sayılarından ikisi eşit ise, bu durumda elipsoid bir dönel yüzey olur. Böyle bir elipsoide dönel elipsoid denir.

Örnek 2.5

$$\frac{{u_1}^2}{A^2} + \frac{{u_2}^2}{B^2} - \frac{{u_3}^2}{C^2} = 1 \tag{2.34}$$

denkleminin gösterdiği yüzeyi çizerek gösteriniz(Sabuncuoğlu, A. 2008).

Çözüm: (2.34) denklemiyle verilen yüzeyin $y_1 = k$ düzlemleriyle arakesitleri

$$\frac{{u_2}^2}{B^2} - \frac{{u_3}^2}{C^2} = 1 - \frac{k^2}{A^2} \tag{2.35}$$

biçiminde yazılabilir. $k \neq A$ ve $k \neq -A$ için (2.35) denklemi bir hiperbol gösterir.

$k = -A$ için arakesit kesişen iki doğrudur.

$k = A$ için de kesişen iki doğrudur.

(2.34) yüzeyinin $y_2 = k$ düzlemiyle arakesiti;

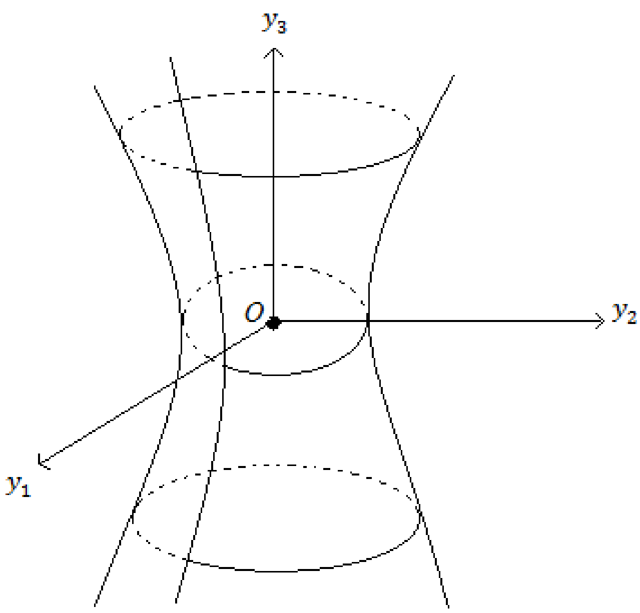
$$\frac{{u_1}^2}{A^2} - \frac{{u_3}^2}{C^2} = 1 - \frac{k^2}{B^2} \tag{2.36}$$

eğrisidir. $k \neq B$ ve $k \neq -B$ için (2.35) denklemi bir hiperbol gösterir. $k = -A$ için arakesit kesişen iki doğrudur. $k = B$ için de kesişen iki doğrudur.

(2.34) yüzeyinin $y_3 = k$ düzlemiyle arakesiti;

$$\frac{{u_1}^2}{A^2} + \frac{{u_2}^2}{B^2} = 1 + \frac{k^2}{C^2} \tag{2.37}$$

eğrisidir. Her k reel sayısı için bu eğrilerin bir elips olduğu açıktır. Yukarıdaki gözlemlerin sonucu olarak, (2.34) denkleminin gösterdiği yüzeyin kabaca 2.13 şeklindeki gibi görülebilir.



Şekil 2.13

(2.34) denkleminin gösterdiği bir tek kanatlı eliptik hiperboloiddir.

3. KUATERNİYON CEBİRLERİ

3.1 Kuaterniyon Cebirinin Temel Özellikleri

$\mathbb{H} = \{q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k | \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$ üzerinde 4 -boyutlu değişmeli olmayan bir cebirdir.

$\mathbb{R}$ üzerinde bu vektör uzayı için $\{1, i, j, k\}$ doğal bir bazdır.

Herhangi $\leftthreetimes, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta' \in \mathbb{R}$ için;

$$(+): \ (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) + (\alpha' + \beta' i + \gamma' j + \delta' k)$$

$$= (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')i + (\gamma + \gamma')j + (\delta + \delta')k \tag{3.1}$$

$$(.): \leftthreetimes (\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k) = \leftthreetimes \alpha + \leftthreetimes \beta i + \leftthreetimes \gamma j + \leftthreetimes \delta k \tag{3.2}$$

dır.

$\mathbb{H}$ bilinen dağılma ile;

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k \tag{3.3}$$

ile tanımlanan çarpmayla değişmeli olmayan bir halkadır(Lam, T.Y. 2004).

Eğer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ en az biri sıfırdan farklı ve $x = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ ise,

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k} = \frac{\alpha - \beta i - \gamma j - \delta k}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2} = \frac{eşlenik}{boy} \tag{3.4}$$

Bu ise $\mathbb{H}$ kümesinin bölüm cebiri olduğunu gösterir.

Eğer bir kuaterniyonun reel kısmı sıfır, yani $\alpha = 0$ ise bu kuaterniyon pür kuaterniyon olarak adlandırılır(Lam, T.Y. 2004).

$$\mathbb{H}' = \{q = \beta i + \gamma j + \delta k | \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \tag{3.5}$$

Reel sayılar, $\beta = \gamma = \delta = 0$ ile kuaterniyonların grubuyla özdeşleşen $\mathbb{H}$ ın bir alt halkasıdır. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar, $\mathbb{R} + \mathbb{R}i$ ile özdeşleşen $\mathbb{H}$ ın bir alt halkasıdır.

Genel olarak, kuaterniyonlar keyfi bir F cismi üzerinde tanımlanır. Yani $i^2 = -1$, $j^2 = -1$ olması gerekmez. Burada karakteristiği 2 den farklı olan cisimleri çalışacağız.

Tanım 3.1.1 Sıfırdan farklı $a, b \in F$ skalerleri için;

$A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ kuaterniyon cebiri, 4-boyutlu bir F cebiri olup i ve j üreteçlerine sahiptir. Yani,

$$i^2 = a$$

$$j^2 = b$$

$$ij = -ji \tag{3.6}$$

bağıntıları yardımıyla tanımlanır(Lam, T.Y. 2004).

$k = ij$ olup $k^2 = -ab$ dır, ve

$$ik = -ki = -(ij)i = -i(ji) = i(ij) = (ii)j = i^2 j = aj \tag{3.7}$$

$$kj = -jk = -j(ij) = j(ji) = (jj)i = j^2 i = bi \tag{3.8}$$

i, j, k elemanlarının herhangi ikisi değişmeli değildir. Ve burada A cebiri, F üzerinde 4-boyutlu olacak şekilde $\{1, i, j, k\}$ tabanına sahiptir.

Bu nedenle, $a = b = -1$ ve $F = \mathbb{R}$ olduğunda; $A = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ reel kuaterniyondur(Lam, T.Y. 2004).

3.2 İzomorfizm Türünü Belirleme

Bu bölümde bir F cismi üzerinde genel kuaterniyon A cebiri için, A nın izomorfizm tipini inceledik. A bir bölüm cebiri iken, bu cebir F den alınan elemanlarla oluşturulan tüm 2×2 lik matrislerin cebirine izomorfiktir.

Tanım 3.2.1 Eğer A cebirinin, 0 ve A dan başka ideali yoksa, A cebiri basit olarak adlandırılır(Cheung, D. 2015).

Tanım 3.2.2 Eğer A cebirinin merkezi k ya eşit ise yani $Z(A) = k$ ise, A cebiri bir k-cebirdir(Cheung, D. 2015).

Tanım 3.2.3 Eğer k basit ve merkezi ise sonlu boyutlu bir k-cebiri merkezi basit cebirdir(Cheung, D. 2015).

Teorem 3.2.1 Artin-Wedderburn Teoremi

Yarı-basit bir R halkası, bu halka belli n_k tam sayıları için D_k bölüm halkası üzerinde n_k matris halkalarıyla n_k nın bir çarpımına izomorfiktir. (Lam, T.Y. 2004).

Sonuç 3.2.1 F merkezli, sonlu boyutlu olan herhangi merkezi basit cebir, bir M_nD cebirine izomorfiktir. Burada n bir pozitif tam sayıdır ve D, F cismi üzerinde bir bölüm cebiridir(Lam, T.Y. 2004).

$\left(\frac{a,b}{F}\right)$ kuaterniyon cebirinde, $dim_F\left(\frac{a,b}{F}\right) = 4$ ve $dim_F M_n(D) = n^2$ dir. Bu yüzden $n = 1$ iken $D = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ ve $n = 2$ iken $D = F$ olur. Dikkat edilecek olursa, $n = 1$ iken $D = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ bir bölüm cebiridir. Halbuki $n = 2$ durumunda $\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong M_2D$ dir. Başka bir deyişle bu cebir, split bir cebirdir. (Eğer bir F-cebiri, F üzerinde bir matris cebirine izomorfik ise cebirin split olduğu söylenir.)

Tanım 3.2.4. $q \in \left(\frac{a,b}{F}\right)$ olsun. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ olacak şekilde $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ yazılır. $\bar{q} = \alpha - \beta i - \gamma j - \delta k$ ile q nun eşleniği tanımlanır.

Her $q \in \left(\frac{a,b}{F}\right)$ için $N(q) = q\bar{q}$ ile

$$N\colon \left(\frac{a,b}{F}\right) \to F$$

norm formu ve $T(q) = q + \bar{q}$ ile iz tanımlanır.

Dikkat edilirse, $q = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ iken,

$$N(q) = q\bar{q} = \bar{q}q = \alpha^2 - \alpha\beta^2 - b\gamma^2 + ab\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = \langle 1, 1, 1, 1\rangle$$

olur. Bu $N(q)$ değeri, değişkenleri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ olan bir kuadratik formdur. Bu yazılım $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$ ile gösterilir. Bu $\langle 1, -a, -b, ab \rangle$ kuadratik formun matris gösteriminde köşegene karşılık gelir. Gerçekte, $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ kuaterniyon cebiri bir kuadratik uzay olarak düşünülebilir. B simetrik bilineer çifti,

$$B(x, y) = (x\bar{y} + y\bar{x})/2 = T(x\bar{y})/2 \tag{3.9}$$

ile verilir(Lam, T.Y. 2004).

Not: Eşlenik fonksiyon bir involusyondur. Genelde, A cebirinin bir F-involusyonu bir $\sigma : A \to A$ dönüşümüdür, ki bu F-lineer ve aşağıdakileri sağlar.

1. $\forall\, x, y \in A$ için $\sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ dir.
2. $\forall\, x, y \in A$ için $\sigma(xy) = \sigma(y)\sigma(x)$ dir.
3. $\forall\, x \in A$ için $\sigma\big(\sigma(x)\big) = x$ dir.

$\mathbb{H}$ reel kuaterniyonlarında q elemanının tersinin $\frac{\bar{q}}{N(q)}$ olduğunu görmüştük.

$$N(q) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \tag{3.10}$$

Yukarıdaki $N(q)$ normu $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ gösterimi ile temsil edilir. Bu norm $\mathbb{R}$ de dört karenin toplamıdır. $\mathbb{R}$ kapalı bir cisim olduğundan $N(q) = 0 \Leftrightarrow q = 0$ dır. Bu demektir ki 0 hariç her elemanın tersi vardır.

Teorem 3.2.2 $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ kuaterniyon cebiri bir bölüm cebiridir $\Leftrightarrow N\colon \left(\frac{a,b}{F}\right) \to F$ norm formu $N(q) = 0 \Rightarrow q = 0$ karşılık gelir. Yani norm formu anisotropiktir(Lam, T.Y. 2004).

$\left(\frac{a,b}{F}\right)$ bir bölüm cebiridir $\Leftrightarrow N\colon \left(\frac{a,b}{F}\right) \to F$ norm formu $N(q) = 0 \Rightarrow q = 0$ dır. Yani norm formu anisotropiktir ifadesine göre aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 3.2.2 $\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong M_2(F)$ yani splittir. $\Leftrightarrow q \neq 0$ iken $N(q) = 0$ dır. Yani norm formu isotropiktir.

Teorem 3.2.3 (Kuaterniyon Cebirleri için Özdeşleme Teoremi)

$B,\ F\ (Kar(F) \neq 2)$ cismi üzerinde 4-boyutlu bir cebir , $c, d \in \dot{F}$ ve $u, v \in B$ olsun. Öyle ki;

$$u^2 = c,\ \ v^2 = d \text{ ve } uv = -vu. \tag{3.11}$$

O zaman $B \cong \left(\frac{c,d}{F}\right)$ dır(Lam, T.Y. 2004).

İspat: $A = \left(\frac{c,d}{F}\right)$ ve $h: A \to B$ F-lineer fonksiyon olsun. Öyle ki;

$$h(1) = 1, h(i) = u, h(j) = v, h(k) = uv \tag{3.12}$$

olacak şekilde alalım.

Açıktır ki F lineer olduğundan, h fonksiyonu toplamayı, çarpmayı ve $uv = -vu$ eşitliğini korur. Bir homomorfizmanın çekirdeği tanım kümesindeki yapının bir idealidir. Burada A merkezi basit bir cebirdir. Bu nedenle h sıfır olmayan çekirdek içermez, ve h açık olarak örtendir. Böylece h bir izomorfizmdir.

Tanım 3.2.5 A bir kuaterniyon cebiri olsun. $v \in A,\ v = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ alalım. Eğer $\alpha = 0$ ise $v = \beta i + \gamma j + \delta k$ eşitliğine pür kuaterniyon denir, ve pür kuaterniyonların kümesi A_0 ile gösterilir(Lewis, D. W. 2006).

Teorem 3.2.4 $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ cebir ve v, A nın sıfır olmayan elemanı olsun. O zaman, $v \in A_0 \Leftrightarrow v \notin F$ ve $v^2 \in F$ dır(Lewis, D. W. 2006).

İspat: ($\Rightarrow$): Eğer $v = \alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ ise

$v^2 = (\alpha^2 + a\beta^2 + b\gamma^2 - ab\delta^2) + 2\alpha(\beta i + \gamma j + \delta k)$

dır. Bu nedenle $\alpha = 0$ iken, $v^2 = \ a\beta^2 + b\gamma^2 - ab\delta^2 \in F$ dır.

$'\Leftarrow'$: Tersine, $v \notin F$ ise, $\exists\ \beta, \gamma, \delta \neq 0$ olmalıdır.

$v^2 \in F$ olabilmesi için $\alpha = 0$ olmalıdır, ve böylece v pür kuaterniyondur.

Sonuç 3.2.3 Eğer $A = \left(\frac{a,b}{F}\right), A' = \left(\frac{a',b'}{F}\right)$ ve $\varphi: A \to A'$ bir F-cebir izomorfizmi ise o zaman $\varphi(A_0) = A_0{}'$ dır. Özel olarak, A_0 kümesi A nın herhangi F -cebir endomorfizmi altında değişmezdir(Lewis, D. W. 2006).

İspat: φ, F-cebir izomorfizmi olduğundan bir önceki teoremden;

$$v \in A_0 \Leftrightarrow v \notin F, v^2 \in F$$

$$\Leftrightarrow \varphi(v) \notin F, \varphi(v^2) \in F$$

$$\Leftrightarrow \varphi(v) \in A_0{}'$$

A merkezi basit bir cebir ve A nın F-cebir endomorfizmi bir otomorfizm olduğundan sonuç görülür.

Teorem 3.2.5 $A = \left(\frac{a,b}{F}\right), A' = \left(\frac{a',b'}{F}\right)$ cebirleri için, aşağıdaki ifadeler denktir.

1. A ve A', F-cebirleri olarak izomorfiktir.
2. A ve A', kuadratik uzaylar olarak izometriktir.
3. A_0 ve $A_0{}'$, kuadratik uzaylar olarak izometriktir.

Başka bir deyişle iki kuaterniyon cebirlerinin izomorfik olup olmadığını anlamak için, kuaterniyon cebirlerinin norm formlarının izometrik olduğunu karşılaştırmak yeterlidir. Bu durum kuaterniyon cebirinin izomorfizm sınıfını bulmakta önemli olacaktır(Lewis, D. W. 2006).

İspat: (1) ⇒ (2): Varsayalım ki $\varphi: A \to A'$ bir F-cebir homomorfizmi olsun. O zaman bir önceki sonuç yardımıyla $\varphi(A_0) = A_0{}'$ dır. Eğer $x = \alpha + x_0$, $\alpha \in F$ ve $x_0 \in A_0$ ise, o zaman $\bar{x} = \alpha - x_0$ dır. Ve buradan $\varphi(x) = \alpha + \varphi(x_0)$ ve $\varphi(\bar{x}) = \alpha - \varphi(x_0)$ dır. $\varphi(x_0) \in A_0{}'$ olduğundan $\overline{\varphi(x_0)} = \varphi(\bar{x})$ dır. Bu nedenle,

$$N(\varphi(x)) = \varphi(x)\overline{\varphi(x)} = \varphi(x)\varphi(\bar{x}) = \varphi(N(x)) = N(x). \tag{3.13}$$

Bu yüzden φ, A dan A' ne bir izometridir.

$(2) \Rightarrow (3)$: Eğer $A = \langle 1 \rangle \perp A_0$ ve $A' = \langle 1 \rangle \perp A_0{}'$ izometrik ise, o zaman Witt's Sadeleştirme teoreminden, A_0 ve $A_0{}'$ izometriktir.

$(3) \Rightarrow (1)$: $\sigma: A_0 \to A_0{}'$ bir izometri olsun(Bu bir lineer izomorfizmdir). O zaman,

$$N\big(\sigma(i)\big) = N(i) = -a \qquad (3.14)$$

ve

$$N\big(\sigma(i)\big) = \sigma(i)\overline{\sigma(i)} = \sigma(i)\sigma(\bar{\imath}) = -\sigma(i)^2 \qquad (3.15)$$

dır. Açıktır ki $\sigma(i)^2 = a$, ve benzer olarak $\sigma(j)^2 = b$ dir.

Son olarak;

$$0 = B(i,j) = B\big(\sigma(i),\sigma(j)\big) = \big(-\sigma(i)\sigma(j) - \sigma(j)\sigma(i)\big)/2 \qquad (3.16)$$

$\sigma(i)\sigma(j) = -\sigma(j)\sigma(i)$ dır. Ve buradan kuaterniyon cebirleri için özdeşleme teoreminden $A' \cong \left(\frac{a,b}{F}\right) = A$ dır.

İzomorfik kuaterniyon cebirleri kuadratik uzaylar olarak izometriktirler. Ve bu uzaylar için $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$, $\langle 1, -a, -b, ab\rangle$ veya norm formu olan ${X_1}^2 - a{X_2}^2 - b{X_3}^2 + ab{X_4}^2$ gösterimlerinden biri kullanılır. Burada $\langle 1, -a, -b, ab\rangle$ daima bir regüler form olacak şekilde a ve b elemanları sıfırdan farklıdır. Şimdi aşağıdaki kuaterniyon cebirleri için bazı örnekler verelim.

Örnekler 1

1) $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ kuaterniyon cebiri, $B = \left(\frac{b,a}{F}\right)$ ye izomorfiktir. Çünkü A ve B norm formları, $\langle 1, -a, -b, ab\rangle$ ve $\langle 1, -b, -a, ab\rangle$ izometriktir. Gerçekten, izometri $X_2 \to X_3$ ve $X_3 \to X_2$ dir.

2) Herhangi $x, y \in \dot{F}$ için $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ kuaterniyon cebiri, $B = \left(\frac{ax^2,by^2}{F}\right)$ ye izomorfiktir. A daki $u = xi$ ve $v = yj$ elemanları $u^2 = ax^2, v^2 = by^2$ ve $uv = -vu$ yi sağlar. Böylece Kuaterniyon Cebirleri için Özdeşleme Teoreminden A ve B izomorfiktir.

3) $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ cebirinde $u = i$ ve $v = k$ elemanları $u^2 = a, v^2 = -ab$ ve $uv = -vu$ eşitliklerini sağladığından, Özdeşleme Teoreminden $A \cong \left(\frac{a,-ab}{F}\right)$ dır.

4) $a^2X^2, X \to aX$ lineer izomorfizmi yardımıyla X^2 ye izometrik olduğu için $\langle 1, -a, 1, -a\rangle \cong \langle 1, -a, a^2, -a\rangle \cong \langle 1, -a, -a, a^2\rangle$ dır.
Bu nedenle $\left(\frac{a,a}{F}\right) \cong \left(\frac{a,-1}{F}\right)$ dır.

5) $A = M_2(F)$, $u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman $u^2 = -I$ ve $v^2 = I$ dır. Burada I, 2×2 lik birim matristir. Bu nedenle Özdeşleme Teoreminden $A \cong \left(\frac{1,-1}{F}\right)$ dır.

Teorem 3.2.6 $A = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ cebiri için aşağıdaki ifadeler denktir(Szymiczek, K. 1997).

1. $A \cong \left(\frac{1,-1}{F}\right)$

2. A, bir kuadratik uzay olarak izotropiktir.(Bu yüzden Teorem 3.2.2 den $A \cong M_2(F)$ dır.)

3. A, bir kuadratik uzay olarak hiperboliktir.

4. $\langle a, b\rangle$ ikili formu 1 i temsil eder.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$: $\left(\frac{1,-1}{F}\right) \cong \langle 1, -1, 1, -1\rangle$ izotropiktir. Çünkü $N(1 + i) = 0$ dır.

$(2) \Rightarrow (1)$: Eğer A izotropik ise $A \cong M_2(F)$ dır, ve böylece Örnekler 1 5 den; $A \cong \left(\frac{1,-1}{F}\right)$ dır.

$(1) \Leftrightarrow (3)$, ilişkili formu $\langle 1, -1, 1, -1\rangle$ olan 4 -boyutlu bir hiperbolik uzayın tanımıdır.

$(1) \Rightarrow (4)$: Varsayalım ki $A \cong \left(\frac{1,-1}{F}\right)$ olsun. O zaman

$$\langle 1, -a, -b, ab \rangle \cong \langle 1, -1, 1, -1 \rangle \tag{3.17}$$

dır.

$q = \langle 1, -1 \rangle$ i göz önüne alalım. q, 1 i temsil eder. Böylece Teorem 1.2.4 den

$$q \cong \langle a, 1, -1, a \rangle \cong \langle a, -a \rangle \tag{3.18}$$

dır.

Benzer şekilde; $q \cong \langle b, -b \rangle$ dır. Bu nedenle,

$$\langle 1, -a, -b, ab \rangle \cong \langle 1, -1, 1, -1 \rangle \cong \langle a, -a, b, -b \rangle \tag{3.19}$$

dır.

Witt's Sadeleştirme Teoreminden, $-a$ ve $-b$ yi sadeleştirebiliriz ve

$$q' = \langle 1, -ab \rangle \cong \langle a, b \rangle = q'' \tag{3.20}$$

alabiliriz. Çünkü $q'(1,0) = 1$ olacak şekilde $(1,0)$ bir vektördür. Ayrıca q' ve q'' izometriktir. Böylece $q''(x, y) = ax^2 + by^2 + 1$ olacak şekilde $(x, y) \in F \times F$ vardır.

$(4) \Rightarrow (1)$: Eğer $\langle a, b \rangle$, 1 i temsil ederse, o zaman Teorem 1.2.4 den $\langle a, b \rangle \cong \langle 1, ab \rangle$ dır.

$$\langle 1, -a, -b, ab \rangle \cong \langle 1, -1, -ab, ab \rangle \cong \langle 1, -1, 1, -1 \rangle \tag{3.21}$$

dır. Buradan

$$\left(\frac{a,b}{F}\right) \cong \left(\frac{1,-1}{F}\right) \tag{3.22}$$

olur.

Not: Yukarıdaki teoremde $1 \Leftrightarrow 4$ denkliği Hilbert Kriteri olarak adlandırılır. $ax^2 + by^2 = 1$ ise $\langle a, b \rangle$ formu 1 ile gösterilir.

Eğer $(a, b) = 1$ ise $\left(\frac{a,b}{F}\right)$ split cebir, $(a, b) = -1$ ise bir bölüm cebiridir. Burada split kuaterniyon cebirlerinin bazı örnekleri vardır.

Örnekler 2

1. Hilbert Kriteri yardımıyla herhangi $a \in \dot{F}$ için $\left(\frac{a,-a}{F}\right)$ split cebir olur. $\langle a, -a\rangle$ ikili formu için,
   $a\left(\frac{1+a}{2a}\right)^2 - a\left(\frac{1-a}{2a}\right)^2 = 1$
   olur.

2. $a \in \dot{F}$ ise $\langle 1, a\rangle$, 1 i açık olarak gösterir. Bu yüzden $\left(\frac{1,a}{F}\right)$ splittir.

3. Eğer $a \neq 0{,}1$, $u = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $v = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ olsun. O zaman

   $u^2 = aI,\ v^2 = (1-a)I$ ve $uv = -vu$

dır. Böylece Özdeşleme Teoreminden $M_2(F) \cong \left(\frac{a,(1-a)}{F}\right)$ dır.

Sonuç 3.2.4 $A = \left(\frac{-1,a}{F}\right)$ cebiri splittir $\Leftrightarrow a, F$ de iki uzayın toplamıdır(Yang, C.T. 1960).

İspat: Eğer, $i \in F$ sanal sayı ise, o zaman a daima iki uzayın toplamı biçiminde olacak şekilde;

$$\left(\frac{1+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{2}i\right)^2 = a \tag{3.23}$$

dır. Bu nedenle eğer belli $X, Y \in F$ için,

$$a = X^2 + Y^2 \text{ ise, } \quad X^2 + Y^2 - a(1)^2 - a(0)^2 = 0$$

dır. Buradan $\langle 1,1,-a,-a\rangle$ norm formunun izotropik olduğu söylenir. A cebiri daima splittir. $i \notin F$ ise,

$\left(\frac{-1,a}{F}\right)$ splitleri $\Leftrightarrow \langle -1, a\rangle$, 1 i temsil eder.

$\Leftrightarrow -X^2 + aY^2 = 1$, burada Y sıfırdan farklı olacak şekilde $X, Y \in F$ vardır.

$\Leftrightarrow a = Y^{-2} + X^2 Y^{-2}$ olacak şekilde $X, Y \in F$ vardır.

Yani a, F de iki uzayın bir toplamıdır.

Sonuç 3.2.5 Herhangi asal $p \equiv 1 mod 4$ için;

$\left(\frac{-1,-p}{\theta}\right) \cong \left(\frac{-1,-1}{\theta}\right)$ bir bölüm cebiridir ve $\left(\frac{-1,-p}{\theta}\right) \cong M_2(\theta)$ dır(Lewis, D. W. 2006).

İspat: $\left(\frac{-1,-p}{\theta}\right)$ norm formu ${X_1}^2 + {X_2}^2 + p{X_3}^2 + p{X_4}^2$ tir ki bu sıfır olmayan rasyonel üzerinde pozitiftir, ve böylece anisotropiktir, bu yüzden Teorem 3.2.2 den $\left(\frac{-1,-p}{\theta}\right)$ bir bölüm cebiridir.

Fermat Teoreminden p, iki uzayın toplamıdır. $p = c^2 + d^2$ dir. $u = i$ ve $v = (cj + dk)/p$ olsun. O zaman $u^2 = -1$, $v^2 = (-pc^2 - pd^2)/p = -1$ ve $uv = -vu$ dır.

$$\left(\frac{-1,-p}{\theta}\right) \cong \left(\frac{-1,-1}{\theta}\right) \tag{3.24}$$

denkliğini elde etmek için Özdeşleme Teoremine başvurabiliriz.

Zaten $p = c^2 + d^2$ dir. $\left(\frac{-1,p}{\theta}\right) \cong M_2(\theta)$ elde etmek için Sonuç 3.2.4 e başvurabiliriz.

4. CLİFFORD CEBİRLERİ

Geometrik cebir, geometrik kavramların cebirsel temsilidir. Vektör, tensör, Pauli ve Dirac cebirlerinin her biri geometrik cebirlerdir.

Fiziksel olayların tümünü birden tanımlayabilen geometrik cebir, Clifford Cebiri'dir.

Geometrik cebirlerin en eskilerinden biri Grassman Cebiri'dir.

Hamilton aynı zamanda 3-boyutlu dönme özelliğini temsil etmek için kuaterniyon cebirini keşfetti.

Clifford ise daha sonra Grassman ve Hamilton'nun tanımladığı sistemleri tek bir cebir ile birleştirdi ve bu cebire Geometrik Cebir adını verdi.

Clifford cebiri, kendine has geometrik yapısından dolayı katıların simetri işlemlerinde kullanılmıştır. Katılardaki tüm yansıma ve dönme işlemleri kapalı bir biçimde bu cebirle ifade edilebilmiştir.

Kuantum mekaniğinde yer alan spinörler, sütun matrislerdir.

Clifford cebirinin, kuaterniyon cebirlerinin direk toplamları olarak ifade edilebileceği bilinmektedir. Kuaterniyon cebirleri Clifford cebirinin özel hali olarak ele alınabilir. Bu cebirler değişimli değildir, fakat birleşimlidir. Yine birleşim özelliğine sahip olmasa bile, oktonyon cebirleri de Clifford cebirinin baz elemanları ve baz çarpımlarının benzerliği ile dikkat çekmişlerdir.

Şüphesiz, Clifford cebirinin en faydalı olduğu uygulama alanlarından biri elektromanyetik teoridir. Bir diğer uygulama alanı ise kuantum mekaniğidir. Clifford cebiri fiziğin tüm alanlarına uygulanabilmektedir. Matematiksel fizik, kuantum dolaşıklık, genel relativite, istatistik mekanik, string teorisi bunların temel alanlarıdır. Proca alan ve Proca-Maxwell denklemleri ilk defa hiperbolik oktonyonlarla ifade edilmiştir.

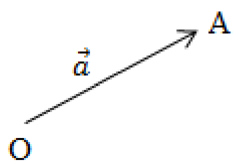
Geometrik cebir, yön kavramını da içeren reel sayı sisteminin bir doğal genişlemesidir. Bu nedenle de geometrik cebir vektör uzayının bilinen kavramlarına bazı özel kurallar ve tanımlamalar getirilerek oluşturulur.

4.1 Vektör(Lineer) Uzaylar

4.1.1 Skaler ve Vektörler

Vektör uzaylar iki nesneye göre tanımlanır. Bunlar uzayda yönler olarak gösterilen vektörler ve genellikle reel sayılar olarak anılan skalerlerdir.

Vektörler $\vec{a}, \vec{b}, \vec{r}, \ldots$ ile temsil edilebilir ve grafik olarak Şekil 4.1 de gösterilebilirler.



Şekil 4.1 $\vec{a}$ vektörü

4.1.2 Bazlar ve Boyut

Bir vektör uzayının boyutunu tanımlamak için şu işlemler uygulanır:

i. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skaler ve $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektör olmak üzere, $\vec{b}$ vektörü;

$$\vec{b} = \lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_n \overrightarrow{a_n} \tag{4.1}$$

ile gösteriliyorsa, $\vec{b}$ vektörü $\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}$ vektörlerinin lineer birleşimidir denir.

ii. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ skalerleri sıfır olmadığı halde,

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = 0 \tag{4.2}$$

oluyor ise, $\{\overrightarrow{a_1}, \ldots, \overrightarrow{a_n}\}$ vektörleri lineer bağımlıdır.

iii. Vektör uzayındaki her eleman lineer bağımsız $\{\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$ vektörlerin lineer birleşimi olarak ifade edilebiliyorsa, $\{\overrightarrow{a_1}, \dots, \overrightarrow{a_n}\}$ vektörlerine vektör uzayın bazı denir(Lounesto, P. 2001).

Bu tanımlamalara düzlemde 3-boyutlu uzayda vektörler düşünülerek daha da açıklık getirilebilir. Örneğin; düzlemde herhangi üç vektör lineer bağımlı iken düzlemde bağımsız iki vektör düzlemdeki tüm vektörler için bazları sağlar. Kısacası vektör uzayın tüm bazları uzayda birbirlerinden bağımsız elemanların sayısı ile aynıdır. Bu sayıya uzayın boyutu denir(Lounesto, P. 2001).

4.2 Skaler Çarpım

- Herhangi bir vektörün uzunluğu;

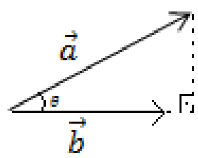
$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}\vec{a})} \tag{4.3}$$

ile gösterilir.

- $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki açı θ ise;

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \tag{4.4}$$

ile tanımlanır. Bu çarpım grafiksel olarak aşağıdaki gibi gösterilir(Lounesto, P. 2001).



Şekil 4.2 Skaler Çarpım

İki vektörün skaler çarpımı sıfır ise, vektörler birbirlerine diktir. Baz vektörlerin tümü birim uzunluğa sahip ise bu baz vektörlerine ortonormal bazlar denir. Genellikle, bazlar $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektörleri ile gösterilir. Bu bazlar ile herhangi bir $\vec{a}$ vektörü;

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \tag{4.5}$$

olarak ifade edilir. Burada n uzayın boyutunu gösterir.

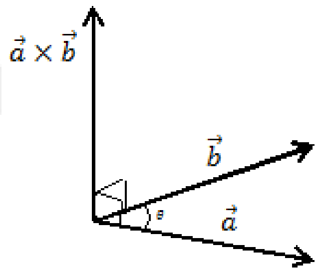
4.3 Vektörel Çarpım

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektörün vektörel çarpımı $\vec{a} \times \vec{b}$ ile gösterilir ve

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \tag{4.6}$$

ile tanımlanır. (Şekil 4.3) Özellikleri;

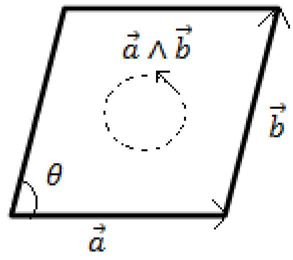
1. $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ ile tanımlanan düzleme diktir.
2. $\vec{a} \times \vec{b}$, $|\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$ büyüklüğüne sahiptir.
3. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ve $\vec{a} \times \vec{b}$ sağ el kuralı ile şekillenir.



Şekil 4.3 $\vec{a} \times \vec{b}$ vektörel çarpım

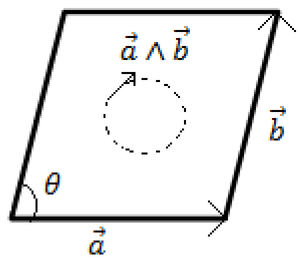
4.4 Dış Çarpım

Vektörel çarpım sadece 3 -boyutlu uzayda tanımlanmaktadır. Tüm uzayda tanmlanabilen vektörel çarpım fikri ile farklı bir çarpım tanımlanmıştır. Bu çarpıma ise dış çarpım adı verilir. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ iki vektör olmak üzere, bunların dış çarpımı $\vec{a} \wedge \vec{b}$ şeklinde gösterilir. Ve vektör cebirinde olmayan yeni bir matematiksel nicelik tanımlar. Bu matematiksel niceliğe iki-vektör denir(Lounesto, P. 2001).



Şekil 4.4 $\vec{a}$ vektörünün $\vec{b}$ vektörüne uzanımı

İki-vektör Şekil 4.4'den anlaşılacağı üzere paralelkenardır. Ve yönlü bir büyüklüktür. $\vec{a} \wedge \vec{b}$ nin büyüklüğü $|\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta$ dır. Bu büyüklük, vektörlerin oluşturduğu düzlem parçasının alanı ile de aynıdır. Yani, iki-vektör bir yönlü alanı tanımlar.



Şekil 4.5 $\vec{b}$ vektörünün $\vec{a}$ vektörüne uzanımı

$\vec{b} \wedge \vec{a}$ iki-vektörü ise, şekildeki gibi aynı büyüklükteki alana karşılık gelir. Ancak ters yönlüdür. Matematiksel ifade ile dış çarpım değişimli değildir.

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \tag{4.7}$$

Ayrıca $\forall\, \vec{a}$ vektörü için;

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = 0 \tag{4.8}$$

verir. Bunun anlamı, vektörün kendisi boyunca uzanarak bir alan oluşturamadığıdır.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektörler ve ⋋ skaler olmak üzere dış çarpım için şu özellikler vardır;

- Skaler ile birleşimlidir.

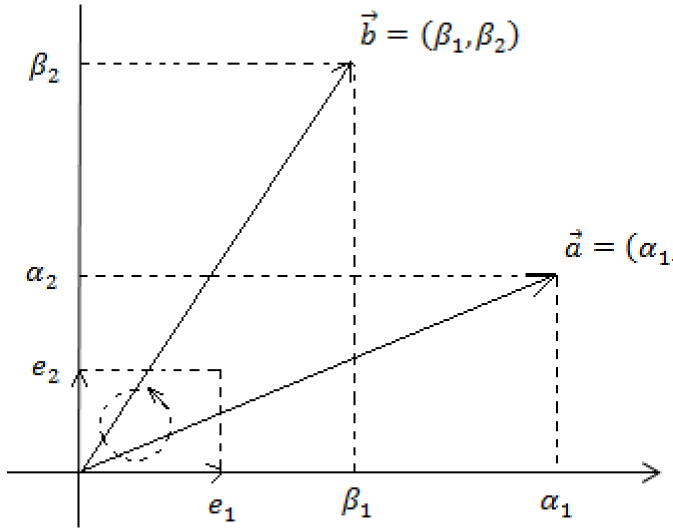
$$(\lambda\, \vec{a}) \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\lambda\, \vec{b}) \tag{4.9}$$

- Dış çarpım vektörlerin toplanması üzerine dağılımlıdır.

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{c}) \tag{4.10}$$

4.4.1 İki Boyut

n-boyutlu uzayda verilen bir vektör $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ birim baz vektörleri ile temsil edilsin. İki-vektörleri de lineer kombinasyon şeklinde ifade etmek mümkündür.



Şekil 4.6 İki boyutlu uzayın bazları

$\mathbb{R}^2$ Öklid düzleminde $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerini ele alalım. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ skalerler olmak üzere; $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri e_1 ve e_2 baz vektörlerinin lineer birleşimi olarak;

$$\vec{a} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

$$\vec{b} = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} = (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) I \tag{4.11}$$

şeklinde ifade edilsin.

$\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin dış çarpımı;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2) \wedge (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) \tag{4.12}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 e_1 \wedge \beta_1 e_1) + (\alpha_1 e_1 \wedge \beta_2 e_2) + (\alpha_2 e_2 \wedge \beta_1 e_1) + (\alpha_2 e_2 \wedge \beta_2 e_2)$$

olup dış çarpımın dağılma özelliğinden yararlanırsak;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_1 e_1 \wedge e_1) + (\alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2) + (\alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1) + (\alpha_2 \beta_2 e_2 \wedge e_2) \tag{4.13}$$

yazabiliriz. $\vec{a} \wedge \vec{a} = 0$ eşitliğinden (4.8);

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2) + (\alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1) \tag{4.14}$$

ifadesi bulunur. $e_1 \wedge e_2$ dış çarpımını I ile temsil edersek;

$$e_1 \wedge e_2 = I, e_2 \wedge e_1 = -I \tag{4.15}$$

yazılabilir. Bu durumda (4.14) eşitliği;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) I \tag{4.16}$$

şeklinde yazılabilir.

4.4.2 Üç Boyut

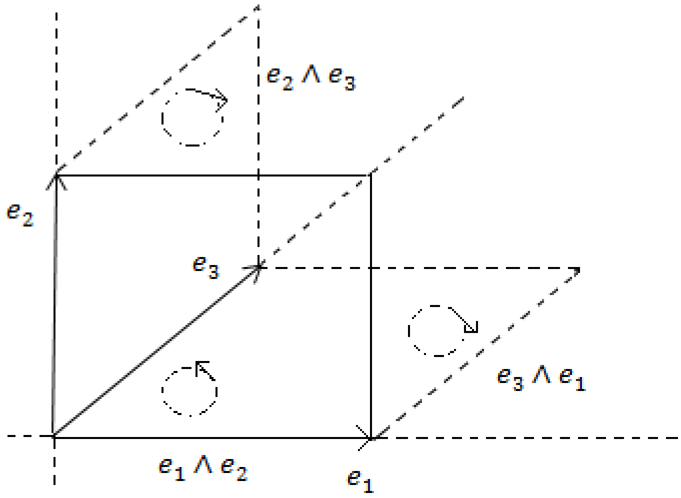
Üç-boyutlu uzayın birim baz vektörleri e_1, e_2, e_3 tür. Bu durumda, üç tane birim baz iki-vektör tanımlıdır.

$$e_1 \wedge e_2 = e_{12} \tag{4.17}$$

$$e_3 \wedge e_1 = e_{31} \tag{4.18}$$

$$e_2 \wedge e_3 = e_{23} \tag{4.19}$$

Üç-boyutlu uzayın birim baz vektörleri ve iki-vektörleri Şekil 4.7'de verilmiştir.



Şekil 4.7 Üç-boyutlu uzayın iki-vektör bazları

Birim baz iki-vektörler için genellikle $\{e_{12}, e_{23}, e_{31}\}$ döngüsel gösterimi kullanılır. Ancak 4-boyutlu ve daha büyük boyutlarda böyle döngüsel gösterim yoktur.

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ için;

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \\ \vec{b} &= \beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 \end{aligned}\right\} \text{ ise,} \tag{4.20}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \wedge (\beta_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3) \tag{4.21}$$

ile ifade edilebilir. Dış çarpımın dağılma özelliğinden,

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} = {} & \alpha_1 e_1 \wedge \beta_1 e_1 + \alpha_1 e_1 \wedge \beta_2 e_2 + \alpha_1 e_1 \wedge \beta_3 e_3 + \alpha_2 e_2 \wedge \beta_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \wedge \beta_2 e_2 \\ & + \alpha_2 e_2 \wedge \beta_3 e_3 + \alpha_3 e_3 \wedge \beta_1 e_1 + \alpha_3 e_3 \wedge \beta_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \wedge \beta_3 e_3 \end{aligned} \tag{4.22}$$

yazılabilir. Yeniden düzenlersek;

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} = {} & \alpha_1 \beta_1 e_1 \wedge e_1 + \alpha_1 \beta_2 e_1 \wedge e_2 + \alpha_1 \beta_3 e_1 \wedge e_3 + \alpha_2 \beta_1 e_2 \wedge e_1 \\ & + \alpha_2 \beta_2 e_2 \wedge e_2 + \alpha_2 \beta_3 e_2 \wedge e_3 + \alpha_3 \beta_1 e_3 \wedge e_1 \\ & + \alpha_3 \beta_2 e_3 \wedge e_2 + \alpha_3 \beta_3 e_3 \wedge e_3 \end{aligned} \tag{4.23}$$

(4.7) ve (4.8) den $i = j$ ve $i \neq j$ için;

$e_i \wedge e_i = 0$ (Birim baz vektörün kendisi ile dış çarpımı sıfırdır.) (4.24)

$e_i \wedge e_j = e_{ij}$ (Farklı baz vektörlerin dış çarpımı iki-baz vektöre eşittir.) (4.25)

$e_j \wedge e_i = -e_{ij}$ (Baz vektörlerin dış çarpımının değişme özelliği yoktur.) (4.26)

Yani (4.23) eşitliğinden;

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_{12} + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)e_{13} + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)e_{23} \qquad (4.27)$$

şeklindedir. Bu eşitlik 3-boyutlu Öklid uzayında, iki vektörün dış çarpım ifadesidir.

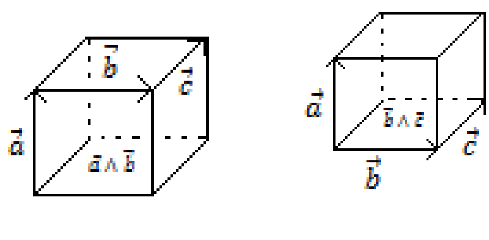
4.5 Üç-Vektörler

3-boyutlu uzayda, üç adet 1-boyutlu alt uzayların dış çarpımı sonucu yönlü bir hacim elemanı elde edilir. Buna üç-vektör denir. Buna göre $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ gibi üç vektörün dış çarpımlarının sonucu 3-boyutlu bir alt uzay oluşur.

$\mathbb{R}^3$ de baz vektörler;

$$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = e_{123} \qquad (4.28)$$

şeklindedir. Şekil 4.8'de görüldüğü gibi bir iki-vektörün, üçüncü bir diğer vektöre uzanımı sonucu üç-vektör oluşmaktadır. Bu üç-vektör Euclidean uzayında ***I*** ile gösterilir. Ve sanki skaler (pseudo scalar) adını alır. Bu gösterim ve isim, n-boyutlu uzayda uzayın boyutuna sahip her eleman için kullanılır.



Şekil 4.8 Üç-vektör: $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$

4.6 Çoklu vektörler

Bir çoklu vektör, k-dereceli bazların farklı lineer birleşimidir. Örneğin 2-boyutlu $\mathbb{R}^2$ de tüm k-dereceli elemanlara sahip A çokluvektörü α_u reel katsayılar olmak üzere;

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 I \tag{4.29}$$

ile verilir(Lounesto, P. 2001).

İki-boyutlu uzayda tüm elemanları olan bir çoklu vektörü göstermek için $2^2 = 4$ reel katsayı gereklidir. Üç-boyutlu uzayda tüm elemanları olan bir çoklu vektör $2^3 = 8$ reel katsayıları ile tanımlanabilir. Ve;

$$A = \alpha_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_{12} + \alpha_5 e_{13} + \alpha_6 e_{23} + \alpha_7 e_{123} \tag{4.30}$$

şeklindedir. Benzer olarak, 4-boyutlu uzayda $2^4 = 16$ bileşene ihtiyaç duyulur.

4.7 Geometrik Çarpım

Farklı dereceli çoklu vektörlerin geometrik çarpımı ile oluşturdukları cebire Clifford Cebiri ya da Geometrik Cebir denir. Çoklu vektörlere aynı zamanda Clifford elemanı ya da Clifford sayısı da denilecektir.

Geometrik çarpım, iç ile dış çarpımın birleşimidir. Yani;

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}[(ab + ba) + (ab - ba)] \tag{4.31}$$

Bu çarpım;

$$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}\right) \tag{4.32}$$

şeklinde simetrik ve,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} - \vec{b}\vec{a}\right) \tag{4.33}$$

şeklinde simetrik olmayan iki kısımdan oluşur. Bu ayrım $\vec{a}$ vektörü ile k-dereceli A_k çoklu vektörün geometrik çarpımı;

$$\vec{a}A_k = \vec{a}.A_k + \vec{a} \wedge A_k \tag{4.34}$$

olmak üzere;

$$\vec{a}.A_k = \frac{1}{2}(\vec{a}A_k - (-1)^k A_k \vec{a}) \qquad (4.35)$$

ve

$$\vec{a} \wedge A_k = \frac{1}{2}(\vec{a}A_k + (-1)^k A_k \vec{a}) \qquad (4.36)$$

şeklinde genelleştirilebilir.

Genel olarak A, B, C çoklu vektörlerin geometrik toplam ve çarpımları için;

- Toplam değişmelidir.

$$A + B = B + A \qquad (4.37)$$

- Toplam ve çarpma birleşimlidir.

$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad (4.38)$$

$$(AB)C = A(BC) \qquad (4.39)$$

- Çarpma, toplama üzerine dağılımlıdır.

$$A(B + C) = AB + AC \qquad (4.40)$$

$$(B + C)A = BA + CA \qquad (4.41)$$

- Her A çoklu vektörü $-A$ tersine sahiptir.

$$A + (-A) = 0 \qquad (4.42)$$

4.7.1 İç Çarpım

Geometrik cebirde iki vektörün iç çarpımı geometrik çarpımın simetrik kısmı olarak görülebilir.

$$\vec{a}.\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{a}\right) \qquad (4.43)$$

İç çarpım $\rfloor$ sembolü ile gösterilir. İç çarpımın geometrik anlamı vardır. $A \rfloor B$ anlamı, A nın B üzerindeki iz düşümü B nin alt uzayında temsil edilen çokluvektördür(Lounesto, P. 2001).

α, β skaler, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektör ve A, B, C çoklu vektör olmak üzere bu elemanların iç çarpımları;

Skalerler $\alpha \rfloor \beta = \alpha\beta,$ (4.44)

Vektör ve skalerler $\vec{a} \rfloor \beta = 0,$ (4.45)

Skaler ve vektörler $\alpha \rfloor \vec{b} = \alpha\vec{b},$ (4.46)

Vektörler $\vec{a} \rfloor \vec{b} = \vec{a}\vec{b}$ (skaler çarpım) (4.47)

Vektör, çoklu vektörler $\vec{a} \rfloor \left(\vec{b} \wedge C\right) = \left(\vec{a} \rfloor \vec{b}\right) \wedge C - \vec{b} \wedge (\vec{a} \rfloor C)$ (4.48)

Dağılma $(A \wedge B) \rfloor C = A \rfloor (B \rfloor C)$ (4.49)

Yani, iki çoklu vektörün iç çarpım sonucu;

$$derece(A \rfloor B) = derece(B) - derece(A) \quad (4.50)$$

dereceye sahip çoklu vektördür. Başka bir deyişle iç çarpımda birinci çarpanın derecesi ikinci çarpanın derecesinden küçük ya da eşit olabilir. Birinci çarpanın derecesi büyük olduğunda sonuç sıfır olur. Çarpanların her ikisinin vektör olması halinde iç çarpım skaler çarpıma döner. Skaler çarpım iç çarpımın özel halidir.

4.8 Bir Çoklu Vektörün Derecesi

Bir alt uzayın boyutu derecesi ile temsil edilebilir. Bir çoklu vektör farklı derecelerin lineer birleşimidir. Bir çoklu vektörün s dereceli kısmını göstermek için $\langle A \rangle_s$ gösterimi kullanılır. Örneğin A çoklu vektörü; $A = (1,8,3,4,5,9,7,2) \in Cl_3$ ise,

$$\langle A \rangle_0 = 1 \text{ skaler}$$

$$\langle A \rangle_1 = 8,3,4 \text{ vektör}$$

$\langle A \rangle_2 = 5{,}9{,}7$ iki-vektör

$\langle A \rangle_3 = 2$ üç-vektör

kısımlarından oluşur.

Clifford cebirinde A çokluvektörü,

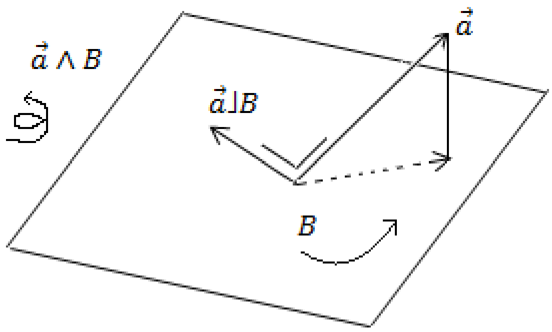
$$\sum_{s=0}^{n} \langle A \rangle_s = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \cdots + \langle A \rangle_n \tag{4.51}$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\vec{a}, \vec{b}$ vektörlerinin $\vec{a}.\vec{b}$ iç çarpımı, vektörün derecesi 1, skalerlerin derecesi 0 olduğu için,

$$\langle \vec{a} \rangle_1 . \langle \vec{b} \rangle_1 = \langle \vec{a}\vec{b} \rangle_0 \tag{4.52}$$

dır.



Şekil 4.9 $\vec{a}$ vektörü ile B iki-vektörün iç çarpımı

$\vec{a}$ vektörü ile B iki-vektörün iç çarpımı; $\langle \vec{a} \rangle_1 . \langle B \rangle_2 = \langle \vec{a} B \rangle_{2-1}$

Bu kural genişletilerek;

$$\langle A \rangle_s . \langle B \rangle_t = \langle AB \rangle_u \quad u = \begin{cases} s > t, & 0 \\ s \leq t, & t - s \end{cases} \tag{4.53}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan iç-çarpım derece azaltan bir işlemdir diyebiliriz. $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektörlerinin dış çarpım sonucu;

$$\langle \vec{a} \rangle_1 \wedge \langle \vec{b} \rangle_1 = \langle \vec{a}\vec{b} \rangle_2 \tag{4.54}$$

dır. Bu ifadeyi genelleştirirsek;

$$\langle A\rangle_s \wedge \langle B\rangle_t = \langle AB\rangle_{s+t} \tag{4.55}$$

Derece kavramına göre, her A çokluvektörü $\langle A\rangle_+$ çift kısım ve $\langle A\rangle_-$ tek kısmın toplamı olarak;

$$A = \langle A\rangle_+ + \langle A\rangle_- \tag{4.56}$$

şeklinde de yazılabilir.

4.8.1 n-vektörün derecesi

n-boyutlu uzayda k-dereceli eleman sayısı;

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{4.57}$$

binom çarpanıyla hesaplanır. Örneğin 3-boyutlu uzayda iki-vektör bazların sayısı için $n = 3$, $k = 2$ olduğundan;

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3.$$

Clifford cebirinin birim bazlarının toplam sayısı, tüm derecelerin birim bazlarının toplanmasıyla hesaplanabilir.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \tag{4.58}$$

4.9 Vektör Türev

Vektör türev $\vec{\nabla}$ sembolü ile gösterilir. $\vec{\nabla}$ ile bir $\vec{a}$ vektörünün iç çarpımı $\vec{a}$ yönündeki yönlü türev ile sonuçlanır. Matematiksel olarak;

$$\vec{a}\vec{\nabla}F(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{F(x-\epsilon a)-F(x)}{\epsilon} \tag{4.59}$$

şeklinde yazılabilir(Yönlü türev) (Lounesto, P. 2001).

Bazlardan bağımsız vektör türev ise;

$$\vec{\nabla} = e_k \partial_k \tag{4.60}$$

ile verilir. Burada;

$$\partial_k = e_k \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_k},\ k = 1, \dots, n \tag{4.61}$$

olup, k-ıncı koordinata göre skaler kısmi türevdir. Burada $x_k = \vec{x} e_k$ dır.

$F = F(\vec{x})$ ve $G = G(\vec{x})$ çokluvektör fonksiyonları ve α skaler sabit olmak üzere vektör diferansiyelin özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

- $\vec{a}\vec{\nabla}(F + G) = \vec{a}\vec{\nabla}F + \vec{a}\vec{\nabla}G$ Toplam kuralı, (4.62)

- $\vec{a}\vec{\nabla}(FG) = \left(\vec{a}\vec{\nabla}F\right)G + F\left(\vec{a}\vec{\nabla}G\right)$ Çarpım kuralı, (4.63)

- $\vec{a}\vec{\nabla}(\alpha F) = \alpha\left(\vec{a}\vec{\nabla}F\right)$ Sabit ile çarpım kuralı, (4.64)

- $\vec{a}\vec{\nabla}F = \left(\vec{a}\vec{\nabla}\lambda\right)\frac{\partial F}{\partial \lambda}$ Zincir kuralı, (4.65)

Zincir kuralında $\lambda = \lambda(\vec{x})$, $\vec{x}$ in skaler fonksiyonudur ve $F = F\big(\lambda(\vec{x})\big)$ olarak yeniden tanımlanmıştır. Ancak $F = \langle f \rangle_1 = \vec{f}$ ise, $\vec{f}$ nin türevi;

$$\vec{\nabla}\vec{f} = \vec{\nabla}.\vec{f} + \vec{\nabla} \wedge \vec{f} \tag{4.66}$$

$\vec{\nabla}.\vec{f}$ ye f nin diverjansı denir. Bu işlemin sonucu skalerdir. $\vec{\nabla} \wedge \vec{f}$ ye f nin rotasyoneli denir. $\vec{\nabla} \wedge \vec{f}$ iki-vektördür.

$F = F(\vec{x})$ ve $G = G(\vec{x})$ çoklu vektör fonksiyonlarının toplam ve çarpımlarının türevleri;

$$\vec{\nabla}(F + G) = \vec{\nabla}F + \vec{\nabla}G \tag{4.67}$$

$$\vec{\nabla}(FG) = \left(\vec{\nabla}F\right)G + \sum_{k=1}^{n} e_k F \partial_k G \tag{4.68}$$

özelliklerine uyar. $\vec{\nabla}$ işlemcisinin Clifford karesi;

$$\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \tag{4.69}$$

dir. Bu ifadeye, diferansiyel Laplace işlemcisi denir. Ancak, integrali alınabilen fonksiyonlar için;

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{\nabla} - \vec{\nabla}\vec{\nabla}\right) = 0 \tag{4.70}$$

dır. Bu nedenle diferansiyel Laplace işlemcisi; $\vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla}$ olur.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ FİBONACCİ KUATERNİYONLARI VE CLİFFORD CEBİRLERİ

Bu bölümde, Clifford cebirlerinin yapısı kullanılarak Fibonacci kuaterniyonları ile Clifford cebirleri arasındaki ilişki çalışılacaktır.

Teorem 5.1 Eğer $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, V nin bir bazı ise, o zaman $\left\{1, e_{j_1} e_{j_2} \ldots e_{j_s}, 1 \leq s \leq n, 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_s \leq n\right\}$ kümesi $C(V, q)$ da bir bazdır(Flaut, C. 2014).

En önemli Clifford Cebirleri, nondejenere($det \neq 0$) kuadratik formlarla reel ve kompleks vektör uzayları üzerinde tanımlanır. Bir reel vektör uzayında nondejenere kuadratik form, aşağıdaki standart diagonal forma eşittir.

$$q(x) = {x_1}^2 + \cdots + {x_r}^2 - {x_{r+1}}^2 - \cdots - {x_s}^2. \tag{5.1}$$

Burada $n = r + s$, vektör uzayının boyutudur. (r, s) tamsayı çifti, kuadratik formun imzası denir. Bu kuadratik form ile reel vektör uzayı genellikle $\mathbb{R}_{r,s}$ ile belirtilir ve $\mathbb{R}_{r,s}$ üzerinde Clifford Cebiri $Cl_{r,s}(\mathbb{R})$ ile belirtilir(El Kinani, E. H. and A. Ouarab 1999).

Örnek:

i. $p = q = 0$ için; $Cl_{0,0}(K) \cong K$ dır.

ii. $p = 0, q = 1$ için; ${e_1}^2 = -1$ olacak şekilde $Cl_{0,1}(K)$ bir tek vektör ile üretilen 2-boyutlu bir cebirdir. Ve bu nedenle $Cl_{0,1}(K) \cong K(e_1)$ dir. $K = \mathbb{R}$ için, $Cl_{0,1}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}$ sağlanır.

iii. $p = 0, q = 2$ için, $Cl_{0,2}(K)$ cebiri, $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ ile gerilen 4-boyutlu bir cebirdir. ${e_1}^2 = {e_2}^2 = (e_1 e_2)^2 = -1$ ve $e_1 e_2 = -e_2 e_1$ olduğu için bu cebir $\mathbb{H}$ bölüm kuaterniyonları cebirine izomorfiktir.

iv. $p = 1,\ q = 1$ ya da $p = 2,\ q = 0$ için, $Cl_{1,1}(K) \cong Cl_{2,0}(K)$ elde edilir, bu split kuaterniyon cebiri ile izomorfiktir.

$\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ genelleştirilmiş reel kuaterniyon cebiri,

$$\alpha = \alpha_1 1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$$

formunun elemanlarının cebiridir. Burada $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3,4\}$ dır. Ve $\{1, e_2, e_3, e_4\}$ baz elemanları aşağıdaki çarpım tablosunu sağlar.

Tablo 5.1: Baz elemanlarının çarpım tablosu

.	1	e_2	e_3	e_4
1	1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-\beta_1$	e_4	$-\beta_1 e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-\beta_2$	$\beta_2 e_2$
e_4	e_4	$\beta_1 e_3$	$-\beta_2 e_2$	$-\beta_1 \beta_2$

α reel kuaterniyonun normunu $nr(\alpha)$ ile göstereceğiz. α nın kuaterniyon normu;

$$nr(\alpha) = {\alpha_1}^2 + \beta_1 {\alpha_1}^2 + \beta_2 {\alpha_3}^2 + \beta_1 \beta_2 {\alpha_4}^2 \qquad (5.2)$$

olur.

$\beta_1 = \beta_2 = 1$ için; $\{1, i, j, k\}$ bazı olacak şekilde,

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \; ve \;\; ij = -ji, ik = -ki, jk = -kj$$

şartlarını sağlayan $\mathbb{H}$ reel bölüm cebiri elde edilir. Böylece aşağıdaki çarpım tablosunu sağlar.

Tablo 5.2: $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ise baz elemanlarının çarpım tablosu

.	1	e_2	e_3	e_4
1	1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	-1	e_4	$-e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	-1	e_2
e_4	e_4	e_3	$-e_2$	-1

Önerme 5.1 $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ kuaterniyon cebiri, $\mathbb{H}(x^2\beta_1, y^2\beta_2)$ kuaterniyon cebirine izomorfiktir. Burada $x, y \in K^*$ dır(Lam, T. Y. 2004).

$\beta_1, \beta_2 \in K^*$ olmak üzere $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ kuaterniyon cebiri ya bir bölüm cebiri ya da $\mathbb{H}(-1, -1) \approx M_2(K)$ ya izomorfiktir.

$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

Fibonacci sayılarıdır. n. terimi bulmak için verilen formül;

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\,, \quad n \geq 2 \tag{5.2}$$

olup, burada $f_0 = 0, f_1 = 1$ dır.

Fibonacci sayılarının genelleştirilmiş hali olarak;

$$h_n = h_{n-1} + h_{n-2}\,, \quad n \geq 2 \tag{5.3}$$

dir. Burada p ve q keyfi tam sayılar olmak üzere $h_0 = p,\ h_1 = q$ dur(Horadam, A.F. 1961).

Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş Fibonacci sayıları arasında aşağıdaki bağıntı elde edilir(Horadam, A.F. 1961).

$$h_{n+1} = pf_n + qf_{n+1} \tag{5.4}$$

Genelleştirilmiş reel kuaterniyon cebiri için, Fibonacci kuaterniyonları ve genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları aynı şekilde tanımlanır.

n. Fibonacci kuaterniyonları için,

$$Q_n = F_n = f_n 1 + f_{n+1}e_2 + f_{n+2}e_3 + f_{n+3}e_4 \tag{5.5}$$

ve n. genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonları için,

$$H_n = h_n 1 + h_{n+1}e_2 + h_{n+2}e_3 + h_{n+3}e_4 = pF_n + qF_{n+1} \tag{5.6}$$

yani,

$$H_n = pQ_n + qQ_{n+1} \tag{5.7}$$

şeklindedir. n. genelleştirilmiş Fibonacci sayısını ve n. genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyon elemanını sırasıyla $h_n^{p,q}$ ve $H_n^{p,q}$ ile göstereceğiz. Bu şekilde, p ve q başlangıç tam sayıları vurgulanır.

Bir Fibonacci elemanının n. terimi için aşağıdaki ifade bilinir.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\alpha^n - \beta^n] = \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\left[1 - \frac{\beta^n}{\alpha^n}\right] \tag{5.8}$$

Burada

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \tag{5.9}$$

şeklindedir(Halici, S. 2013).

Buradan aşağıdaki limit elde edilir.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} nr(F_n) &= \lim_{n\to\infty}(f_n^2 + \beta_1 f_{n+1}^2 + \beta_2 f_{n+2}^2 + \beta_1\beta_2 f_{n+3}^2) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^{2n}}{5} + \beta_1\frac{\alpha^{2n+2}}{5} + \beta_2\frac{\alpha^{2n+4}}{5} + \beta_1\beta_2\frac{\alpha^{2n+6}}{5}\right) \\ &= sgnE(\beta_1,\beta_2)\infty \end{aligned} \tag{5.10}$$

Burada $\alpha^2 = \alpha + 1$ olduğu için;

$$E(\beta_1,\beta_2) = \frac{1}{5}[1 + \beta_1 + 2\beta_2 + 5\beta_1\beta_2 + \alpha(\beta_1 + 3\beta_2 + 8\beta_1\beta_2)] \tag{5.11}$$

dir(Flaut, C. and Shpakivskyi V. 2013).

Eğer $E(\beta_1,\beta_2) > 0$ ise, $\forall\, n \geq n_1$ için, $nr(F_n) > 0$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Aynı şekilde, eğer $E(\beta_1,\beta_2) < 0$ ise, $\forall\, n \geq n_2$ için, $nr(F_n) < 0$ olacak şekilde $n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu nedenle, $E(\beta_1,\beta_2) \neq 0$ olmak üzere $\forall\, \beta_1,\beta_2 \in \mathbb{R}$ için $nr(F_n) \neq 0$ olacak şekilde $\mathbb{H}(\beta_1,\beta_2)$ cebirinde bir $n_0 = max\{n_1,n_2\}$ doğal sayısı vardır. Böylece F_n, $\forall\, n \geq n_0$ için tersinir bir elemandır. Aynı kanıtı kullanarak aşağıdaki limit hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\left(nr\left(H_n^{p,q}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}(h_n^2 + \beta_1 h_{n+1}^2 + \beta_2 h_{n+2}^2 + \beta_1\beta_2 h_{n+3}^2) \\ &= sgnE'(\beta_1,\beta_2).\infty \end{aligned} \tag{5.12}$$

Burada eğer $E'(\beta_1, \beta_2) \neq 0$ ise

$$E'(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{5}(p + \alpha q)^2 E(\beta_1, \beta_2) \tag{5.13}$$

dır(Flaut, C. and Shpakivskyi V. 2013). Bu nedenle, $E'(\beta_1, \beta_2) \neq 0$ olmak üzere $\forall\, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ için, $nr\left(H_n^{p,q}\right) \neq 0$ olacak şekilde $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ cebirinde bir n_0' doğal sayısı vardır. Böylece $H_n^{p,q}$, $\forall\, n \geq n_0'$ için tersinir bir elemandır.

Teorem 5.2 $E'(\beta_1, \beta_2) \neq 0$ olmak üzere $\forall\, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ için, $\forall\, n \geq n'$ olacak şekilde bir n' doğal sayısı vardır. F_n Fibonacci elemanları ve $H_n^{p,q}$ genelleştirilmiş Fibonacci elemanları, $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ cebirinde tersinir elemanlardır(Flaut, C. and Shpakivskyi V. 2013).

Teorem 5.3 $\mathcal{H}_n = \left\{H_n^{p,q} \middle| p, q \in \mathbb{Z}, n \geq m, m \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ bir $\mathbb{Z}$-modüldür(Flaut, C. and Shpakivskyi V. 2013).

Sonuç 5.1 Belirtelim ki Teorem 5.3 den $\mathbb{Z}$-modülü rankı 2 olan serbest $\mathbb{Z}$-modülüdür. Gerçekten; $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathcal{H}_n$, $\varphi\big((p, q)\big) = H_n^{p,q}$ bir $\mathbb{Z}$ -modül izomorfizmidir ve $\{\varphi(1,0) = F_n, \varphi(0,1) = F_{n+1}\}$, $\mathcal{H}_n$ de bir bazdır(Flaut, C. 2014).

Sonuç 5.2 Skalerlerin genişletilmesiyle, $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n$, 2-boyutlu bir $\mathbb{R}$-vektör uzayı elde edilir. Bir bazı $\{\bar{e_1} = 1 \otimes F_n, \bar{e_2} = 1 \otimes F_{n+1}\}$ dır. $\mathbb{R}$-vektör uzayı olmak üzere $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n \cong \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}} = \left\{H_n^{p,q} \middle| p, q \in \mathbb{R}\right\} \cup \{0\}$ izomorfiktir. $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ de bir baz $\{F_n, F_{n+1}\}$ dır.

$T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$, $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R}$-vektör uzayına ilgili tensör cebiri olsun. Ve $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$, $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili Clifford cebiri olsun. Teorem 5.1 den $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri 4-boyutludur.

Durum 1: **$\mathbb{H}(\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2})$ bir bölüm cebiridir.**

Sonuç 5.3 $\forall\, n \geq n'$ için $E(\beta_1, \beta_2) > 0$ olduğu için, $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ bir Öklid vektör uzayıdır. Gerçekten,

$z, w \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$, $z = x_1 F_n + x_2 F_{n+1}$, $w = y_1 F_n + y_2 F_{n+1}$ olsun ve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ dır. İç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\langle z, w \rangle = x_1 y_1 nr(F_n) + x_2 y_2 nr(F_{n+1}) \tag{5.14}$$

Böylece iç çarpımın bütün özellikleri sağlanır. Gerçekten; $\forall\, n \geq n'$ için, $nr(F_n) > 0$ ve $nr(F_{n+1}) > 0$ dır, bu $\langle z, z\rangle = {x_1}^2 nr(F_n) + {x_2}^2 nr(F_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$ dır. Bu nedenle $z = 0$ olur.

$\{F_n, F_{n+1}\}$ bazı ile $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ üzerinde,

$$q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}: \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R};$$

$$q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(x_1 F_n + x_2 F_{n+1}) = nr(F_n){x_1}^2 + nr(F_{n+1}){x_2}^2 \tag{5.15}$$

kuadratik formu tanımlanır.

$Q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$, $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik forma ilgili bir bilineer form olsun.

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(x, y) &= \frac{1}{2}\Big(q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(x + y) - q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(x) - q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(y)\Big) \\ &= nr(F_n)x_1 y_1 + nr(F_{n+1})x_2 y_2 \end{aligned} \tag{5.16}$$

$q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik forma ilgili matris;

$$A = \begin{pmatrix} nr(F_n) & 0 \\ 0 & nr(F_{n+1}) \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

dır. Belirtelim ki $\forall\, n \geq n'$ için $detA = nr(F_n)nr(F_{n+1}) > 0$ dır. $E(\beta_1, \beta_2) > 0$ olduğundan $\forall\, n \geq n'$ için $nr(F_n) > 0$ dır. $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik formunun pozitif tanmlı olduğu ve $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{2,0}(K)$ ya izomorfik olduğu elde edilir. Burada $Cl_{2,0}(K)$ bir split kuaterniyon cebirine izomorfiktir.

Yukarıdaki sonuçlar ve Önerme 5.1 i kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.4 Eğer $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ bir bölüm cebiri ise, bir n' doğal sayısı vardır öyle ki $\forall\, n \geq n'$ için $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayına ilgili Clifford cebiri $\mathbb{H}(-1, -1)$ split kuaterniyon cebiriyle izomorfiktir(Flaut, C. 2014).

Durum 2: **$\mathbb{H}(\boldsymbol{\beta_1}, \boldsymbol{\beta_2})$ bir bölüm cebiri değildir.**

Sonuç 5.4 i. Eğer $E(\beta_1, \beta_2) > 0$ ise, o zaman Teorem 5.2 deki gibi $\forall\, n \geq n'$ için; $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ bir Öklid vektör uzayıdır. Gerçekten,

$$z, w \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}},\ z = x_1 F_n + x_2 F_{n+1},\ w = y_1 F_n + y_2 F_{n+1}$$

olsun ve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ dır. İç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\langle z, w\rangle = x_1 y_1 nr(F_n) + x_2 y_2 nr(F_{n+1}) \tag{5.18}$$

ii. Eğer $E(\beta_1, \beta_2) < 0$ ise, o zaman Teorem 5.2 deki gibi $\forall\, n \geq n'$ için; $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ bir Öklid vektör uzayıdır. Gerçekten,

$z, w \in \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}, z = x_1 F_n + x_2 F_{n+1}, w = y_1 F_n + y_2 F_{n+1}$

olsun ve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ dır. İç çarpım aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\langle z, w\rangle = -x_1 y_1 nr(F_n) - x_2 y_2 nr(F_{n+1}) \tag{5.19}$$

$$\langle z, z\rangle = -{x_1}^2 nr(F_n) - {x_2}^2 nr(F_{n+1})$$

olduğu bilinir. $\forall\, n \geq n'$ olduğu için $nr(F_n) < 0$ ve $nr(F_{n+1}) < 0$ dır.

$\langle z, z\rangle = -{x_1}^2 nr(F_n) - {x_2}^2 nr(F_{n+1}) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$ ile sonuçlanır. Bu nedenle $z = 0$ dır.

$\{F_n, F_{n+1}\}$ bazı ile $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ üzerinde,

$$q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}: \mathcal{H}_n^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R};$$

$$q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(x_1 F_n + x_2 F_{n+1}) = nr(F_n){x_1}^2 + nr(F_{n+1}){x_2}^2 \tag{5.20}$$

kuadratik form tanımlanır.

$Q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$, $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik forma ilgili bir bilineer form olsun.

$$Q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(x, y) = \frac{1}{2}\left(q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(x + y) - q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(x) - q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}(y)\right)$$

$$= nr(F_n) x_1 y_1 + nr(F_{n+1}) x_2 y_2 \tag{5.21}$$

$q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik forma ilgili matris;

$$A = \begin{pmatrix} nr(F_n) & 0 \\ 0 & nr(F_{n+1}) \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

dır. Belirtelim ki $\forall\, n \geq n'$ için $detA = nr(F_n) nr(F_{n+1}) > 0$ dır.

Eğer $E(\beta_1, \beta_2) > 0$ ise, $n > n'$ için $nr(F_n) > 0$ dır. $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik formunun pozitif tanmlı olduğu ve $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{2,0}(K)$ ya izomorfik olduğu elde edilir. Burada $Cl_{2,0}(K)$ bir split kuaterniyon cebirine izomorfiktir.

Eğer $E(\beta_1, \beta_2) < 0$ ise, $n > n'$ için $nr(F_n) < 0$ dır. O zaman $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik formu negatif tanmlı ve $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{0,2}(K)$ ya izomorfiktir. Burada $Cl_{0,2}(K)$, $\mathbb{H}$ kuaterniyon bölüm cebirine izomorfiktir.

Yukarıdaki sonuçlardan ve Önerme 5.1 i kullanarak aşağıdaki teoremi elde edilir.

Teorem 5.5 Eğer $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ bir bölüm cebiri değil ise, $\forall\, n \geq n'$ olacak şekilde bir n' doğal sayısı vardır(Flaut, C. 2014).

Eğer $E(\beta_1, \beta_2) > 0$ ise, o zaman $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayına ilgili Clifford cebiri, $\mathbb{H}(-1, -1)$ split kuaterniyon cebiriyle izomorfiktir.

Eğer $E(\beta_1, \beta_2) < 0$ ise, o zaman $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ reel vektör uzayına ilgili Clifford cebiri, $\mathbb{H}(1,1)$ bölüm kuaterniyon cebirine izomorfiktir.

Örnek 5.1 1. $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -1$ için, $\mathbb{H}(1, -1)$ split kuaterniyon cebiri elde edilir. Bu durumda, $E(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{5}(-5 - 10\alpha) < 0$ dır. Ve $n' = 0$ için;

$$nr(F_n) = f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 < 0, \tag{5.23}$$

$\forall\, n \geq 0$ için;

$$nr(F_{n+1}) = f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 < 0 \tag{5.24}$$

elde edilir. $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik formu negatif tanımlıdır, bu nedenle $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{0,2}(K)$ ya izomorfiktir. Böylece $\mathbb{H}(1,1)$ kuaterniyon bölüm cebirine izomorfiktir.

2. $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = -3$ için, $\mathbb{H}(-2, -3)$ split kuaterniyon cebirini elde edilir. Bu durumda, $E(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{5}(23 + 43\alpha) > 0$ dır. Ve $n' = 0$ için;

$$nr(F_n) = f_n^2 - f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 > 0, \tag{5.25}$$

$\forall\, n \geq 0$ için;

$$nr(F_{n+1}) = f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 + f_{n+4}^2 > 0 \qquad (5.26)$$

elde edilir. $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik formu pozitif tanımlıdır, bu nedenle $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{2,0}(K)$ ya izomorfiktir. Böylece $\mathbb{H}(-1,-1)$ split kuaterniyon cebirine izomorfiktir.

3. $\beta_1 = 2, \beta_2 = -3$ için, $\mathbb{H}(2,-3)$ split kuaterniyon cebiri elde edilir. Bu durumda,

$$E(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{5}(-33 - 44\alpha) < 0$$

dır. Ve $n' = 0$ için;

$$nr(F_n) = f_n^2 + 2f_{n+1}^2 - 3f_{n+2}^2 - 6f_{n+3}^2 < 0, \qquad (5.27)$$

$\forall\, n \geq 0$ için;

$$nr(F_{n+1}) = f_{n+1}^2 + 2f_{n+2}^2 - 3f_{n+3}^2 - 6f_{n+4}^2 > 0 \qquad (5.28)$$

elde edilir. $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik formu negatif tanımlıdır, bu nedenle $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{0,2}(K)$ ya izomorfiktir. Böylece $\mathbb{H}(1,-1)$ bölüm kuaterniyon cebirine izomorfiktir.

4. $\beta_1 = \beta_2 = -\frac{1}{2}$ için, $\mathbb{H}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ split kuaterniyon cebirini elde edilir.

Bu durumda,

$$E(\beta_1, \beta_2) = \frac{3}{20} > 0$$

dır. Ve $n' = 1$ için;

$$nr(F_n) > 0 \text{ ve } nr(F_{n+1}) > 0$$

elde edilir. $q_{\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}}$ kuadratik formu pozitif tanımlıdır, bu nedenle $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{2,0}(K)$ ya izomorfiktir. Böylece $\mathbb{H}(-1,-1)$ split kuaterniyon cebirine izomorfiktir.

5.1 Algoritma

1) $\mathbb{H}(\beta_1, \beta_2)$ bir kuaterniyon cebiri olsun. $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve

$E(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{5}[1 + \beta_1 + 2\beta_2 + 5\beta_1\beta_2 + \alpha(\beta_1 + 3\beta_2 + 8\beta_1\beta_2)]$ dır.

2) V, $\mathbb{R}$-vektör uzayı olsun. $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}} = \{H_n^{p,q} | p, q \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$.

3) Eğer $E(\beta_1, \beta_2) > 0$ ise, o zaman $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{2,0}(K)$ ya izomorfiktir. Böylece $\mathbb{H}(-1, -1)$ split kuaterniyon cebirine izomorfiktir.

4) Eğer $E(\beta_1, \beta_2) < 0$ ise, o zaman $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri $Cl_{0,2}(K)$ ya izomorfiktir. Böylece $\mathbb{H}(1,1)$ bölüm kuaterniyon cebirine izomorfiktir.

Sonuç olarak bu bölümde, $\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}}$ bir reel vektör uzayına genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyonlarının $\mathbb{Z}$-modülü genişletildi.

Eğer $(\beta_1, \beta_2) = \frac{1}{5}[1 + \beta_1 + 2\beta_2 + 5\beta_1\beta_2 + \alpha(\beta_1 + 3\beta_2 + 8\beta_1\beta_2)]$ pozitif veya negatif ise $T(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ tensör cebirine ilgili $C(\mathcal{H}_n^{\mathbb{R}})$ Clifford cebiri bir split kuaterniyon cebiri ya da bir bölüm cebirine izomorfik olduğunu ispatlandı.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada birinci bölümde kuadratik formlar ile ilgili bazı temel bilgiler verilmiştir. Hiperbolik uzaya karşılık gelen kuadratik form incelenmiştir.

İkinci bölümde, reel kuadratik formun tanımı verildikten sonra, örnekler ile reel kuadratik formların eğrileri çizilmeye çalışılmıştır. Üçüncü bölümde kuaterniyon cebirlerinin tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. Dördüncü bölümde Clifford cebirinin yapısını oluşturan geometrik tanım ve kavramlar verilmiştir. Vektörler arasındaki skaler çarpım, iç çarpım ve dış çarpım tanımlanmıştır, bu çarpımlar ile oluşturulan geometrik anlamlar incelenmiştir.

Son olarak Genelleştirilmiş Fibonacci Kuaterniyonları ve Clifford Cebirleri arasındaki ilişki verilmiştir.

Bu çalışma kuadratik formlar ve kuaterniyon cebirleri ile ilgili bilgi edinmek isteyenlere temel bilgi ve özellikleri sunan bir çalışma olmuştur.

7. KAYNAKLAR

Birula, A. B., "On Subfields of Coundable Codimension", *Proceedings of AMS*, Volume 35, Number 2, October (1972).

Candemir, N., "Clifford Cebirleri ve Fizikteki Bazı Özel Problemler", (Doktora Tezi), *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Anadolu Üniversitesi, Eskişehir, (2007).

Cheung, D., "Classification of Quadratic Forms with Clifford Algebras",(Yüksek Lisans Tezi), (2015).

Clark, P. L. , "Sum of Two Squares[online]", http://math.uga.edu/~pete/4400twosquares.pdf.

El Kinani, E. H., and A. Ouarab. "The Embedding of U q (sl (2)) and Sine Algebras in Generalized Clifford Algebras.", *Advances in Applied Clifford Algebras* 9.1, 103-108, (1999).

Flaut, C. and Shpakivskyi V., "Some Identities in Algebras Obtained by the Cayley-Dickson Process." *Advances in Applied Clifford Algebras*, 1-14, (2013).

Flaut, C. and Shpakivskyi V., "On generalized Fibonacci Quaternions and Fibonacci-Narayana Quaternions.", *Advances in Applied Clifford Algebras*, 673-688, (2013).

Flaut, C., "A Clifford Algebra Associated to Generalized Fibonacci Quaternions", *Advances in Difference Equations*, 10.1186/1687-1847-2014-279, (2014).

Flaut C. and Savin D., "Quaternion Algebras and the Generalized Fibonacci-Lucas Quaternions." *arXiv preprint arXiv:1501.01772* (2015).

Hacısalihoğlu, H., *Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi*. Gazi Üniversitesi, (1983).

Halici, S., "On Fibonacci Quaternions." *Advances in Applied Clifford Algebras* 22.2, 321-327, (2012).

Halici, S., "On Complex Fibonacci Quaternions." *Advances in Applied Clifford Algebras*, 1-8, (2013).

Horadam, A. F. "A Generalized Fibonacci Sequence.", *The American Mathematical Monthly* 68.5, 455-459, (1961).

Jacobson, N., "*Lectures in Abstract Algebra , Theory of Fields and Galois Theory*", Vol. 3, NJ: Van Nostrand, Princeton, (1964).

Jacobson, N., "*Basic Algebra II, Second Edition*", New York : W.H. Freeman and Company, (1989).

Kaplansky, I., *Linear Algebra and Geometry,* A Second Course, Oston: Allyn and Bacon, (1969).

Kılıç, A., "Platonik Katıların ve Moleküllerin Clifford Cebirleriyle İncelenmesi" , (Doktora Tezi), *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, (2004).

Lam, T. Y., *A First Course in Noncommutative Rings,* Graduate Texts in Mathematics, Vol. 131, 2nd ed., XIX, 385 p, (2001).

Lam, T. Y., *Introduction to Quadratic Forms over Fields,* Graduate Studies in Math. 67, Rhode Island : AMS, Providence, (2004).

Lang, S., "*Algebra*", Reading, Mass.: Addison-Wesley, (1965).

Lewis, D. W., "Quaternion Algebras and the Algebraic Legacy of Hamilton's Quaternions", *Irish Math. Soc. Bulletin*, 57, 41-64, (2006).

Lounesto, P., *Clifford Algebras and Spinors*, Second Edition,United Kingdom: Cambridge University Press, (2001)

Sabuncuoğlu, A., *Lineer Cebir*, Ankara : Nobel Yayınevi, 3.Baskı, (2008).

Sakatütüncü, E. E., "Galile Uzaylarında Hareketlerin Geometrisi", (Doktora Tezi), *Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, (2009).

Sloane, N. and Conwey J. H., *Quadratic Forms and Their Applications*, 272, Dublin: Published as Contemporary Mathematic, 23-25, 229-232, (2000).

Szymiczek, K., *Bilinear Algebra: An Introduction to the Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Algebra, Logic and Applications Series Volume 7, Gordon and Breach Science Publishers, (1997).

Yang, C. T. and Gerstenhaber, M., "Division Rings Containing a Real Closed Field", *Duke Math. J.,* Volume 27, Number 4 , 461-465. MR0114830, (1960).

8. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : ŞULE ÇÜRÜK

Doğum Yeri ve Tarihi : DENİZLİ/ 12.10.1992

Lisans Üniversite : PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ

Elektronik posta : sule9220@gmail.com

İletişim Adresi : Topraklık mahallesi, 619 sokak, No:15, Kat:1.

Yayın Listesi :

• Halıcı, S. and Çürük Ş., "On Geometry of Quaternions", Kitap bölümü, Chapter 33, 469-476. (2016).

• Halıcı, S. and Çürük Ş., "On k-Conjugate of Quaternions", MAYFEB Journal of Mathematics - ISSN 2371-6193 Vol 4, Pages 23-28, (2016).

Konferans listesi :

• 4. Cemal Koç Cebir Günleri, Bildirisiz, ODTÜ ANKARA, 23-24 Nisan 2015.

• Serpil Halıcı, Şule Çürük, Sözlü Bildiri, " The Geometry of Quaternions", 14. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Pamukkale Üniversitesi, 25-28 Mayıs 2016.

• Serpil Halıcı, Adnan Karataş, Şule Çürük, Sözlü Bildiri, " On Consimilarity of Quaternion Matrices", 14. Uluslararası Geometri Sempozyumu, Pamukkale Üniversitesi, 25-28 Mayıs 2016.

• Serpil Halıcı, Şule Çürük, " On k- Conjugate of Quaternions" 5 th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Belgrade, Serbia, 16-19 August 2016.