

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



HOMOTETİK HAREKETLERDE KAPALI DÜZLEMSEL EĞRİLERİN KİNETİK
ENERJİSİ ÜZERİNE

SERDAR SOYLU

DOKTORA TEZİ

TC
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HOMOTETİK HAREKETLERDE KAPALI DÜZLEMSEL EĞRİLERİN
KİNETİK ENERJİSİ ÜZERİNE

SERDAR SOYLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SAMSUN
2017

Her Hakkı Saklıdır

TEZ ONAYI

Serdar SOYLU tarafından hazırlanan “Homotetik Hareketlerde Kapalı Düzlemsel Eğrilerin Kinetik Enerjisi Üzerine” adlı tez çalışması .../.../2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman Prof. Dr. Ayhan TUTAR
Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri

Başkan Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU
İstanbul Gelişim Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Emin KASAP
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Mustafa DÜLDÜL
Yıldız Teknik Üniversitesi
Matematik Dalı

Üye Doç. Dr. M. Çağatay TUFAN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fizik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım. .../.../20..

.....

Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.



Tarih
İmza
Serdar SOYLU

ÖZET

Doktora Tezi

HOMOTETİK HAREKETLERDE KAPALI DÜZLEMSEL EĞRİLERİN KİNETİK ENERJİSİ ÜZERİNE

Serdar SOYLU

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan TUTAR

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Bu çalışmanın giriş bölümünde literatür özeti verilmiş olup, ikinci bölümde bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Çalışmanın orijinal kısmı olan üçüncü ve dördüncü bölümde; öncelikle düzlemsel hareketler için kapalı yörünge formülü, düzlemsel kinematikler ve en az eylem prensibi, minimal eylem noktası tanımları verilmiştir. Düzlemsel hareketler için en az eylem prensibi ve minimal eylem noktası kavramları kullanılarak düzlemsel homotetik ve ters düzlemsel homotetik hareket için en az eylem prensibi ve minimal eylem noktası ifade edilmiştir. Elde edilen teorik sonuçların uygulamadaki karşılıklarını belirlemek için çift mafsal hareketi örnek olarak seçilmiştir. Dördüncü bölümde, İzdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi hesaplanıp, izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi için Holdtich teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

Mayıs 2017, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Düzlemsel Hareketler, Homotetik Hareket, Ters Homotetik Hareket, Minimal Eylem Noktası, Kinetik Enerji, Kapalı Yörünge, İzdüşüm Eğrisi, Holdtich teoremi

ABSTRACT

Doctoral Dissertation

ON THE KINETIC ENERGY OF THE PROJECTIVE CURVES UNDER THE CLOSED HOMOTHETIC MOTIONS

Serdar SOYLU

Ondokuz Mayıs University
Graduate School of Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan TUTAR

This study consists of four chapters. In the introduction chapter, the summary of literature is given. In the second chapter, some basic concepts are given. The original part of the study are the third and fourth chapters. Firstly, The Principle of Least Action of The Closed Planar Motion and The Point of Minimal Action definitions are given. Then these definitions are investigated for Direct Homothetic Motion and Inverse Homothetic Motion and also two examples are expressed. The results and examples, which are stated, are expressed under these topics; The Principle of Least Action of the Closed Planar Homothetic Motions and the Point of Minimal action and also for the Inverse Motion. As an example, The Characteristic Points of Homothetic Direct Motion of the Double Hinge are given. At fourth part, the kinetic energy of the projection curve is calculated. The Holditch theorem are obtained for the kinetic energy of the projection curve.

May 2017, 50 pages

Key Words: Planar Motion, Principle of Least Action, kinetic energy, Homothetic Motion, Holditch theorem

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Prof. Dr. Ayhan TUTAR'a, bilgisini ve emeğini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Ayhan SARIOĞLUGİL'e, bu süreçte maddi ve manevi desteğini hiç bir şekilde esirgemeyen, her zaman yanımda olan alieme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2017

Serdar SOYLU

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
3. BULGULAR.....	14
3.1. Homotetik Düzlemsel Hareket ve En Az Eylem Prensibi.....	14
3.1.2 Homotetik Hareket İçin Minimal Eylem Noktası.....	16
3.1.3.Örnek: Doğrusal Homotetik Çift Mafsallı Hareketinin Karakteristik Noktaları	19
3.2. Ters Homotetik Hareket ve En Az Eylem Prensibi.....	21
3.2.1 Ters Homotetik Hareket İçin Minimal Eylem Noktası.....	22
3.2.2.Örnek: Ters Homotetik Çift Mafsallı Hareketinin Karakteristik Noktaları..	25
3.3.İzdüşüm Eğrisinin Kinetik Enerjisi Üzerine.....	28
3.3.1 İzdüşüm Eğrisinin Kinetik Enerjisi.....	28
3.3.2 İzdüşüm Eğrisinin Kinetik Enerjisi İçin Holditch Tipi Teorem.....	35
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	47
KAYNAKLAR.....	48
ÖZGEÇMİŞ.....	50

KISALTMALAR

E	Hareketli düzlem
E'	Sabit düzlem
E/E'	E düzleminin E' düzlemine göre hareketi
E'/E	E' düzleminin E düzlemine göre hareketi
α	Dönme açısı
u ve u'	Öteleme vektörleri
R	Dönme matrisi
X	Hareketli düzlemde bir nokta
X'	Sabit düzlemde bir nokta



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	1-Parametrelî Düzlemsel Hareket.....	6
Şekil 3.1.	Vinç Hareketi.....	19
Şekil 3.2.	Uzay Eğrisinin Bir Düzlem Üzerine Dik İzdüşümü.....	29
Şekil 3.3.	Hareketli Üçgen.....	43
	Uzayda Sabit	



1. GİRİŞ

En az eylem ilkesi diğer bir adıyla minimal eylem prensibi, mekanik sistemlerdeki eylem kavramına varyasyon prensipleri uygulandığında hareket denklemlerinin bulunması esasına dayanır. Görelilik teorisinde, görelilik etkileri fiziksel olarak dahil oldukları için, klasik mekanik sistemlere göre farklı eylem fonksiyonları tanımlanmalıdır. Bu prensip, Newton, Lagrange, Hamilton görelilik prensiplerini ve onlardan çıkartılan hareket denklemlerini türetmek için kullanılır. “En az” kavramı çözümlerde iki nokta arasındaki yollardan; çevre yollara göre değişimin en az olduğu yolu bulma probleminin irdelendiği durumlarda kullanılır (Feynmann vd, 1964). En az eylem ilkesi ve varyasyon prensipleri, kuantum mekaniğini de geliştirmiş olan doğanın en kapsamlı temel davranış yasalarını içerir (Feynmann, 1965). Bu prensip, modern fiziğin ve matematiğin merkezinde yer almış ve görelilik teorisi, kuantum mekaniği ve kuantum alan teorisi gibi genel alanlarda etkin olarak kullanılmıştır. Ayrıca modern matematikte, Morse teorisi ile ilişkili çalışmıştır. Maupertuis prensibi ve Hamilton prensibi de daha genel olan en az eylem ilkesinin birer alt örnekleridir. Eylem prensibi, matematiksel olarak geliştirilmeden önce topografi ve optik gibi alanlarda aslında gözlemleniyordu. Antik mısırdaki ipler etkili şekilde gerilerek iki nokta arasındaki mesafeyi ölçmekte kullanılıyordu. Çünkü bu durumda ipler, potansiyel enerjilerini en aza indirgeyecek şekilde davranış gösteriyorlardı. Ayrıca, ışığın kırınımında da benzer davranış gözükmektedir. Işık, farklı indislere sahip ortamlar boyunca ilerlerken farklı hızlara sahip olur ve bu farklı hızlarla karşı bir noktaya gitmek istediğinde bunu mümkün olabilecek en kısa yoldan yapar. Bu basit prensibi, geometrik olarak ispatlarken rahatça görelilik esasları ve temel kuantum mekaniği davranışları gözlenebilir. Esasen, ışığın ve elektronların davranışları bu temel fiziksel yasanın uzay-zaman/eğrisel geometrinin prensiplerinin bir sonucudur. Geçmişte ise maddelerin yapmaları gereken işleri, en kısa yoldan yaptıkları temel Öklid geometrisi gibi matematiksel yapıları kullanarak gözlenip gösterilebiliyordu. Genel olarak bilim insanları, en az eylem ilkesinin ilk formülasyonunu Pierre Louis Maupertuis’e atfederler. (Maupertuis, 1744; Maupertuis, 1746). Ancak Euler bu prensipten çeşitli yayınlarında bahsetmiş ve Leibniz de bu tartışmalarda yer almıştır (Euler, 1744). Bu prensibin daha iyi anlaşılabilmesi için kinetik enerji formülünden

faydalanılır. Kinetik enerji bir cismin hareketinden dolayı sahip olduğu enerjidir. Doğrusal bir yörüngeye sahip olan bir cismin enerjisine öteleme kinetik enerjisi, dairesel yörüngeye sahip cisimlerin enerjisine dönme kinetik enerjisi ve yüksek (ışık hızına yakın) hızdaki cisimlerin kinetik enerjisine de görelî kinetik enerji denir.

Kinematik, hareketi ortaya çıkaran sebeplerin göz ardı edildiği ve hareketin nasıl gerçekleştiğini ele alan mekaniğin bir dalıdır. Bu nedenle kinematik genel olarak hareketin geometrisi olarak adlandırılır. Hareket, bir cismin yer değiştirmesidir. Diğer taraftan kinematiğin en önemli kavramları vektörel büyüklük olan hız ve ivmedir. Bu iki kavram hareketin daha iyi anlaşılmasında önemli rol oynar. Kinematikte hareket noktalarının sahip olduğu yörünge eğrilerinin açık veya kapalı olmasına göre açık hareket veya kapalı hareket olarak adlandırılır. Bu nedenle yörünge eğrilerinin alanlarının hesabı ile ilgili birçok çalışma vardır. Örneğin, Steiner alan formülü ve Holditch Teoremi verilebilir (Steiner, 1881; Holditch, 1858). Bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve çok sayıda çalışmaya esin kaynağı olmuştur. Buna bağlı olarak, H. R. Müller kutupsal atalet momenti ile yörünge alanı hesaplanması arasındaki ilişkiyi incelemiş ve yörünge alan formülünü genelleştirmiştir (Müller, 1978). Tutar ve Kuruoğlu bir parametrelî düzlemsel homotetik hareket için kapalı eğrilerin yörünge alan formülünü ifade etmişlerdir (Kuruoğlu & Tutar, 1999). Döldül kapalı uzay eğrileri için Holditch teoremini genelleştirmiştir (Döldül vd, 2003). Yüce ve Kuruoğlu Steiner alan formülünü Holditch Teoreminde kullanmışlardır (Kuruoğlu & Yüce, 2007; Kuruoğlu & Yüce, 2009). Döldül ve Kuruoğlu 1-parametrelî kapalı homotetik hareket esnasında kompleks düzlemin yörünge eğrilerinin Holditch tipi teorem için kutupsal atalet momentini hesaplamışlardır (Kuruoğlu & Döldül, 2008). Döldül, Yüce ve Kuruoğlu Kapalı düzlemsel homotetik hareket altında zarf eğrilerinin kutupsal atalet momentini incelemişlerdir (Döldül vd, 2008). Döldül, 1-parametrelî kapalı düzlemsel homotetik uzay hareketinde, herhangi bir noktanın kapalı yörünge eğrisinin bir düzlem üzerine dik izdüşüm eğrisinin kutupsal atalet momentini ve daha sonra 3-parametrelî homotetik uzay hareketinde noktaların taradığı bölgenin hacmini hesaplamıştır. Böylece kutupsal atalet momenti ve hacim formülü kullanılarak, uzayda Holditch teoremine benzer sonuçlar elde etmiştir (Döldül, 2004). İnan, düzlemsel kinematikte homotetik hareketler altında kapalı yörüngeler için Steiner

alan formülünü ve kutupsal atalet momentini incelemiştir (İnan, 2015). Ayrıca, 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik ve ters homotetik hareket için kinetik enerji formülü Tutar ve İnan tarafından ele alınmıştır (Tutar & İnan, 2015a; Tutar & İnan, 2015b). Diğer taraftan Dathe ve Gezzi, insan yürüyüşü esnasında diz ve kalça eklemleri arasında hareketli ve sabit sistemlerden oluşan hareket için Steiner alan formülünü ve kutupsal atalet momentini hesaplamış ve yörünge alan formülü ile kutupsal atalet momenti arasında ilişki kurmuştur (Dathe & Gezzi, 2012; Dathe & Gezzi, 2014). Buna ek olarak düzlemsel kinematikte kinetik enerji formülünü kullanarak minimal eylem prensibini incelemiş ve karakteristik noktalarını belirlemişlerdir. Uygulama olarak ise minimal eylemi insan yürüyüş hareketi için incelemiş ve deneysel sonuçlarını elde etmişlerdir (Dathe vd, 2015)

Bu çalışmada ise, Dathe ve Gezzi tarafından ifade edilen düzlemsel hareketler için en az eylem prensibi ve minimal eylem noktası kavramları ve kinetik enerji formülü kullanılarak, 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket ve ters düzlemsel homotetik hareket için en az eylem prensibi tanımlanmış ve karakteristik noktalar bulunmuştur. Örnek olarak elde edilen sonuçlar vinç hareketi kullanılarak test edilmiştir ve vinç hareketinin kapalı düzlemsel homotetik ve ters düzlemsel homotetik hareketler altında karakteristik noktaları belirtilmiştir.

Ayrıca 1-parametrelili kapalı homotetik uzay hareketi altında izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi incelenmiş ve bir takım sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak izdüşüm eğrisinin için Holditch Teoremi ifade edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Tanım 2.1.

$A \neq \emptyset$ bir küme ve V de K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer

$$f: A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise A ya V vektör uzayı ile birleşen bir afin uzay denir.

$$(A1). \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(A2). $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P, Q) = \alpha$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.2.

V , n -boyutlu reel vektör uzayı ve A da V ile birleşen bir afin uzay olsun. Eğer V bir iç-çarpım uzayı ise A ya Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.3.

A_1 ve A_2 , sırası ile, V_1 ve V_2 vektör uzayları ile birleşen afin uzaylar olmak üzere $f: A_1 \rightarrow A_2$ bir dönüşümü verilsin. $P, Q \in A_1$ için

$$\psi_p: V_1 \rightarrow V_2$$

$$\overrightarrow{PQ} \rightarrow \psi_p(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{f(P)f(Q)}$$

biçiminde tanımlansın ψ_p dönüşümüne, f ile birleşen dönüşüm adı verilir. Eğer ψ_p dönüşümü lineer ise f ye bir afin dönüşüm adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1998).

Tanım 2.4.

E_1^n ve E_2^n , sırasıyla, V_1 ve V_2 n -boyutlu iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f: E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\alpha) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi: V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir izometri denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.5.

n -boyutlu bir E^n Öklid uzayının izometrilerinden biri f olsun. E^n deki bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi $A \in O(n)$, yani $\det A = \pm 1$ ve $C \in R^n$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

formundadır. f ye E^n de bir hareket adı verilir. f hareketine, $\det A = 1$ ise direkt hareket, $\det A = -1$ ise karşıt hareket denir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.6.

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi için $f(O) = O$ olacak şekilde bir $O \in E^n$ noktası varsa f ye O noktası etrafında E^n in bir dönmesi adı verilir. Eğer hareket direkt hareket ise f ye direkt dönme, karşıt hareket ise karşıt dönme denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $f: E^n \rightarrow E^n$ izometrisi O noktası etrafındaki bir dönme ise f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi $x' = Ax$ şeklindedir. Burada $A \in O(n)$ ve $x, x' \in R_1^n$ dir (Hacısalihoglu, 1998).

Tanım 2.7.

E^n , n -boyutlu Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$, için $f(X) = X + t$ olacak şekilde bir tek $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in E^n$ noktası varsa f ye E^n in t ile belirtilen bir ötelemesi denir.

E^n de başlangıç noktası O olan bir dik koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olsun. $f: E^n \rightarrow E^n$ izometrisi $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ noktası ile belli olan bir öteleme olsun. f nin bu dik koordinat sistemine göre ifadesi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

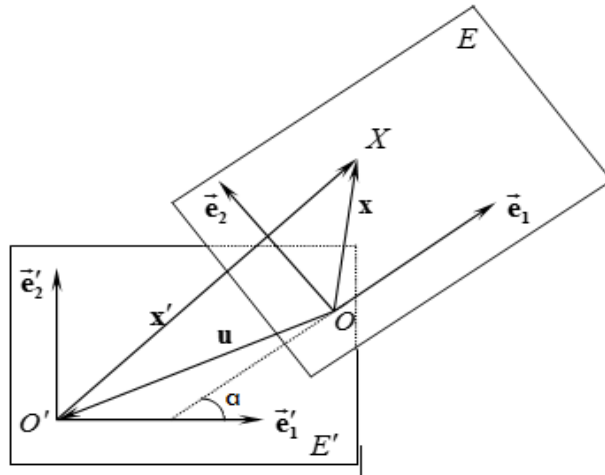
veya

$$x' = x + t$$

dir (Hacısalihoğlu, 1998).

Tanım 2.8.

E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B = E/E'$ ile gösterilmek üzere, B hareketinin φ dönme açısı ve u öteleme vektörünün u_1, u_2 bileşenleri $\varphi = \varphi(t)$, $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$ şeklinde bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonu iseler B hareketine 1-parametrelî düzlemsel hareket denir.



Şekil 2.1. 1-Parametrelî Düzlemsel Hareket

Tanım 2.9.

u_1, u_2 ve φ ; bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonları olmak üzere $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $\varphi = \varphi(t)$ fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlanmış olsun. Ayrıca

$$u_j(t + T) = u_j(t), \quad j = 1, 2$$

$$\varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi\nu$$

bağıntıları sağlanacak şekilde en küçük bir $T > 0$ sayısı varsa, $x' = x - u$ denklemi ile tanımlanan harekete T periyotlu ve v dönme sayılı 1-parametrelili kapalı düzlemsel hareket denir (Blaschke & Müller, 1956).

Tanım 2.10.

n -boyutlu Öklid uzayında bir cismin homotetik hareketi

$$\begin{bmatrix} x' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

dönüşümü ile ifade edilir. Burada A , $n \times n$ tipinde ortogonal bir matris, $h = hl_n$ skaler bir matris ve x, x', u birer $n \times 1$ -tipinde matrislerdir (Blaschke & Müller, 1956).

Tanım 2.11.

u_1, u_2, φ ve h bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilen fonksiyonları olmak üzere $u_1 = u_1(t), u_2 = u_2(t), \varphi = \varphi(t)$ ve $h = h(t)$ fonksiyonları aynı $t_0 \leq t \leq t_1$ aralığında tanımlanmış olsun.

Ayrıca

$$\begin{cases} u_j(t + T) = u_j(t), & j = 1, 2 \\ \varphi(t + T) = \varphi(t) + 2\pi v \end{cases}$$

bağıntıları sağlanacak şekilde en küçük bir $T > 0$ sayısı varsa, $x' = hx - u$ denklemi ile tanımlanan harekete T periyotlu ve v dönme sayılı 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket denir (Blaschke & Müller, 1956).

Tanım 2.12. (Düzlemsel Hareket İçin Kapalı Yörüngeler)

E Hareketli, E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında t -parametrelili $B = E/E'$ direkt hareketi ele alınsın. Sistemlerin orijinleri sırasıyla (O, O') , öteleme vektörleri $OO' = U$ ve $O'O = U'$, dönme açısı $\alpha(t)$ olmak üzere hareketli sisteme ait bir X noktasının sabit siteme göre yörüngesi

$$X'(t) = R(t)X + U'(t) \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada hareket, sabit ve hareketli sistem arasında zaman bağlı bir dönüşüm olarak düşünülebilir. X vektörü zamandan yani t parametresinden bağımsızdır.

(2.1) denkleminde $\alpha(t)$ toplam dönme açısı, $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, $U'(t)$ öteleme vektörüne karşılık gelen 2×1 tipinde öteleme matrisi olmak üzere, (2.1) denklemi matris formunda

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}$$

ve bileşen olarak ise

$$\begin{aligned} x'_1(t) &= \cos(\alpha(t)) x_1 - \sin(\alpha(t)) x_2 + u'_1(t) \\ x'_2(t) &= \sin(\alpha(t)) x_1 + \cos(\alpha(t)) x_2 + u'_2(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır. (Dathe vd, 2015)

Tanım 2.13 (Düzlemsel Kinematik ve En Az Eylem Prensibi)

E/E' düzlemsel hareketinde, E hareketli düzlemine ait bir X noktasının E' sabit düzlemindeki $X'(t)$ yörünge eğrisinin denklemi için

$$X'(t) = R(t)X + U'(t)$$

yazılabilir. Bu denklem dönme ve ötelemeden ibarettir. Burada t zaman parametresidir. Şimdi bu sisteme en az eylem prensibini uygulayalım. Bu sistemde m kütleli bir noktanın $X'(t)$ yörünge eğrisi için, kinetik enerji formülü

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (\dot{X}'(t))^2 \quad (2.3)$$

şeklinindedir. (2.3) denklemi hareketli sistemde başlangıç noktasının seçiminden bağımsız olup, hareketli sistemin seçilen noktasına bağımlıdır. Bu enerji,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m(\dot{X}'(t))^2 \quad (2.4)$$

denklemiyle verilir ve karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyoneli olarak adlandırılır. $m = 1$ için bu fonksiyonel

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{X}'^T(t)\dot{X}'(t))dt \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir.

En az eylem prensibi, S nin minimum olmasını gerektirir. Bunun için δ varyasyonu göstermek üzere, $\delta S = 0$ şartı sağlanmalıdır. Bu durumu sağlayan noktaya sabit nokta veya karakteristik nokta adı verilir. Hız bir kuadratik form olduğundan, S enerji fonksiyoneli de X noktasında bir kuadratik formdur. Bundan dolayı X_0 noktasının minimumu tek ve hareketli sistemin karakteristiği olacaktır.

Tanım 2.14. (Minimal Eylem Noktası)

E/E' düzlemsel hareketinde minimal eylem noktasının elde edilebilmesi için E hareketli düzleminin noktalarının enerjisi hesaplanmalıdır. Bu durumda (2.1) denkleminin t zaman parametresine göre türevi alınır

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)X + \dot{U}'(t) \quad (2.6)$$

elde edilir.

(2.6) denklemini (2.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} (X^T \dot{R}(t)^T + \dot{U}'(t)^T) (\dot{R}(t)X + \dot{U}'(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (X^T \dot{R}(t)^T \dot{R}(t)X + X^T \dot{R}(t)^T \dot{U}'(t) + \dot{U}'(t)^T \dot{R}(t)X + \dot{U}'(t)^T \dot{U}'(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} X^T X \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t) dt + X \int_{t_1}^{t_2} \dot{U}'(t)^T \dot{R}(t) dt + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \dot{U}'(t)^2 dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

bulunur. Diğer taraftan I , 2×2 tipinde bir birim matris olmak üzere,

$$\dot{R}(t)^T \dot{R}(t) = \dot{R}(t) \dot{R}(t)^T = I \dot{\alpha}(t)^2$$

olduğundan

$$2S(X) = X^T X \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t) dt + 2 \left(X \int_{t_1}^{t_2} \dot{U}^T(t) R \dot{\alpha}(t) dt \right) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{U}'(t)^2 dt$$

elde edilir.

Elde edilen bu denklem X noktasının bileşenleri cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2S(x_1, x_2) &= (x_1^2 + x_2^2) \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} (\dot{u}'_1(t)^2 + \dot{u}'_2(t)^2) dt \\ &+ 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t) \sin \alpha(t) + \dot{u}'_2(t) \cos \alpha(t)) \dot{\alpha}(t) dt \\ &+ 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t) \cos \alpha(t) - \dot{u}'_2(t) \sin \alpha(t)) \dot{\alpha}(t) dt \end{aligned} \quad (2.8)$$

olarak bulunur.

(2.8) denkleminde,

$$I_R = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t) dt \quad (2.9)$$

$$I_T = \int_{t_1}^{t_2} (\dot{u}'_1(t)^2 + \dot{u}'_2(t)^2) dt \quad (2.10)$$

$$I_{x_1} = \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t) \sin \alpha(t) + \dot{u}'_2(t) \cos \alpha(t)) \dot{\alpha}(t) dt \quad (2.11)$$

$$I_{x_2} = \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t) \cos \alpha(t) - \dot{u}'_2(t) \sin \alpha(t)) \dot{\alpha}(t) dt \quad (2.12)$$

eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) I_R + I_T + x_1 I_{x_1} + x_2 I_{x_2} \quad (2.13)$$

denklemini elde edilir.

Eğer (2.8) eylemi t zaman parametresine bağlı olarak ifade edilirse (sabit ve hareketli düzlemler arasındaki α dönme açısıyla değil) araştırılan X_0 noktasının koordinatları minimal eylem prensibi yardımıyla aşağıda belirtildiği gibi hesaplanır.

(2.7) denkleminin X e göre türevi alınırsa ,

$$0 = \frac{\partial(2S)}{\partial X} \Big|_{X_0} = X_0 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{U}'(t) \dot{R}(t) dt \quad (2.14)$$

denkleminin çözümünden minimal eylem noktası bulunur. Bu durumda minimal eylem noktası

$$X_0 = -\frac{\int_{t_1}^{t_2} \dot{U}'(t)\dot{R}(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t)dt}. \quad (2.15)$$

olarak elde edilir. X_0 direkt hareketin bir karakteristik noktasıdır. Karakteristik noktayı bileşenler şeklinde ifade etmek için (2.8) denkleminin x_1 ve x_2 bileşenlerine göre türevleri alınır ve düzenlenirse,

$$\frac{2S(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t)dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t)\sin\alpha(t) + \dot{u}'_2(t)\cos\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)dt, \quad (2.16)$$

$$\frac{2S(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t)dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t)\cos\alpha(t) - \dot{u}'_2(t)\sin\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)dt$$

bulunur.

Hareketli düzlemin X noktasının aksine X_0 karakteristik noktası, integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanları olan t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. (2.16) ve (2.14) den

$$\frac{2S(x_1, x_2)}{\partial x_1} = 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t)dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t)\sin\alpha(t) + \dot{u}'_2(t)\cos\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)dt = 0$$

$$\frac{2S(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t)dt + 2 \int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t)\cos\alpha(t) - \dot{u}'_2(t)\sin\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)dt = 0$$

denklemler elde edilir. Bu denklemler sisteminde (2.9), (2.11) ve (2.12) eşitlikleri yerine yazılırsa, karakteristik noktanın bileşenleri

$$x_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t)\sin\alpha(t) + \dot{u}'_2(t)\cos\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t)dt} = -\frac{I_{x_1}}{I_R}, \quad (2.17)$$

$$x_2 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} (-\dot{u}'_1(t)\cos\alpha(t) - \dot{u}'_2(t)\sin\alpha(t)) \dot{\alpha}(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t)dt} = -\frac{I_{x_2}}{I_R}$$

olarak elde edilir. Ayrıca X_0 noktasının minimal nokta olması için $\left. \frac{\partial^2 S}{\partial X^2} \right|_{X_0} > 0$

olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2} I \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t) dt = \frac{1}{2} II_R \quad (2.18)$$

ifadesi her zaman sıfırdan büyük olduğundan dolayı, X_0 bir karakteristik noktadır. Karakteristik noktanın (2.17) de belirtilen bileşenleri (2.13) da yerlerine yazılırsa

$$2S_0(t_1, t_2) = \left[\left(-\frac{I_{x_1}}{I_R} \right)^2 + \left(-\frac{I_{x_2}}{I_R} \right)^2 \right] I_R + I_T - 2 \frac{I_{x_1}}{I_R} I_{x_1} - 2 \frac{I_{x_2}}{I_R} I_{x_2} \quad (2.19)$$

elde edilir. Buradan da minimal eylemin denklemi

$$2S_0(t_1, t_2) = I_T(t_1, t_2) - \frac{I_{x_1}^2(t_1, t_2) + I_{x_2}^2(t_1, t_2)}{I_R(t_1, t_2)} \quad (2.20)$$

bulunur. (Dathe vd, 2015)

Tanım 2.15. (1-Parametrelili Homotetik Uzay Hareketi)

3-boyutlu Öklid uzayında sabit uzay E' ve hareketli uzay E olsun. E uzayının E' uzayına göre 1-parametrelili homotetik hareketi

$$X' = hAX + C$$

dönüşümü ile tanımlanır. Burada X' ve X , bir $X \in E$ noktasının sırasıyla sabit ve hareketli uzaylardaki sütun matrisleri olarak ifade edilen konum vektörleri; h hareketin homotetik oranı, A bir ortogonal matris ve C sütun matrisi de öteleme vektörüdür. Ayrıca h ile A ve C matrislerinin bileşenleri bir t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonlarıdır. $t = 0$ başlangıç anında E ve E' uzaylarının orijin noktaları çakışık, yani $t = 0$ için $h = 1$, $A = I_3$ ve $C = 0$ dır.

Eğer 1-parametrelili homotetik uzay hareketinde,

$$h(t + T) = h(t), \quad A(t + T) = A(t), \quad C(t + T) = C(t)$$

eşitliklerini gerçekleyen bir $T > 0$ sayısı varsa, harekete 1-parametrelî kapalı homotetik uzay hareketi ve bu eşitlikleri sağlayan en küçük T sayısına da hareketin periyodu denir. (Blaschke & Müller, 1956).



3. BULGULAR

Bu çalışmada Dathe ve Gezzi tarafından ifade edilen düzlemsel hareketler için en az eylem prensibi ve en az eylem noktası kavramları ve kinetik enerji formülü kullanılarak, 1-parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareket ve ters düzlemsel homotetik hareket için en az eylem prensibi tanımlanmış ve karakteristik noktalar bulunmuştur. Örnek olarak elde edilen sonuçlar vinç hareketi kullanılarak test edilmiştir ve vinç hareketinin kapalı düzlemsel homotetik ve ters düzlemsel homotetik hareketler altında karakteristik noktaları ifade edilmiştir.

3.1. Homotetik Düzlemsel Hareket ve En Az Eylem Prensibi

E hareketli, E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında t -parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi ele alınsın. E hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi $B = E/E'$ direkt hareketi olsun. Sistemlerin orijinleri sırasıyla (O, O') , öteleme vektörleri $(OO' = U)$ ve $(O'O = U')$, toplam dönme açısı $\alpha(t)$ olmak üzere, hareketli sisteme ait sabit bir X noktasının sabit sisteme göre yörüngesi

$$X'(t) = h(t)R(t)X + U'(t) \quad (3.1)$$

olarak ifade edilir.

(3.1) denkleminde h , t reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonudur. Hareket, sabit ve hareketli sistem arasında zamana bağlı dönüşüm olarak düşünülebilir.

(3.1) denkleminde $\alpha(t)$ toplam dönme açısı, $R(t)$ 2×2 tipinde dönme matrisi, $U(t)$ ve $U'(t)$ öteleme vektörlerine karşılık gelen 2×1 tipinde matrisler, X' sabit sisteme ait bir nokta ve X hareketli sisteme ait bir nokta olmak üzere,

$$X'(t) = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix}, U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ u'_2(t) \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

ifadeleriyle birlikte matris formu

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = h(t) \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Sıfıf öteleme ve sıfıf dönme durumlarından kaçınmak için $\alpha \neq 0$, $h = h(t) \neq \text{sabit}$ kabul edilecektir. Ayrıca öteleme vektörleri arasında

$$U'(t) = -R(t)U(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (3.1) eşitliğinde yerine yazılırsa yörünge denklemi,

$$X'(t) = R(t)(h(t)X - U(t)) \quad (3.2)$$

olur. (3.2) hareketi bileşenler şeklinde ifade edilirse, yani vektörlerin ifadesi yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= \cos(\alpha(t)) (h(t)x_1 - u_1(t)) - \sin(\alpha(t)) (h(t)x_2 - u_2(t)) \\ x_2'(t) &= \sin(\alpha(t)) (h(t)x_1 - u_1(t)) + \cos(\alpha(t)) (h(t)x_2 - u_2(t)) \end{aligned} \quad (3.3)$$

olarak elde edilir.

Şimdi düzlem kinematiğine en az eylem prensibini uygulayalım. Bu sistemde m kütleli bir noktanın yörüngesi $X'(t)$ olmak üzere kinetik enerji formülü,

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m (\dot{X}'(t))^2 \quad (3.4)$$

şeklindedir.

(3.4) ifadesinde belirtilen enerji fonksiyonu, karakteristik fonksiyon veya enerji fonksiyonu olarak adlandırılan

$$S = \int_{t_1}^{t_2} E_{kin} dt = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m (\dot{X}'(t))^2 dt \quad (3.5)$$

hareketine karşılık gelir. $m = 1$ olması durumunda fonksiyonel

$$S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{X}'(t))^T \dot{X}'(t) dt \quad (3.6)$$

halini alır.

En az eylem prensibi $S = \text{minimal}$ olmasını gerektirir. Bunun için, δ değişimi göstermek üzere $\delta S = 0$ durumu sağlanmalıdır. Bu durumu sağlayan noktaya sabit veya karakteristik nokta adı verilir. Hız, kuadratik form olduğundan S enerji fonksiyoneli de X noktasında bir kuadratik formdur. Eylem hareketli düzlemin X koordinatlarının bir fonksiyonudur. Bundan dolayı X_0 notasının minimumu tek ve hareketli sistemin karakteristiği olacaktır.

3.1.2. Homotetik Hareket İçin Minimal Eylem Noktası

Bu bölümde homotetik hareket için minimal eylem noktasını inceleyeceğiz.

E/E' düzlemsel hareketinde minimal eylem noktasının elde edilebilmesi için E hareketli düzleminin noktalarının enerjisi hesaplanmalıdır. Öyleyse (3.2) denkleminin t parametresine göre türevi alınırsa

$$\dot{X}'(t) = \dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t)) \quad (3.7)$$

elde edilir. Bileşen formunda ise,

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1(t) &= -(h(t)x_1 - u_1')\sin\alpha(t)\dot{\alpha}(t) + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}_1')\cos\alpha(t) \\ &\quad - (h(t)x_2 - u_2')\cos\alpha(t)\dot{\alpha}(t) - (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}_2')\sin\alpha(t) \\ \dot{x}'_2(t) &= (h(t)x_1 - u_1')\cos\alpha(t)\dot{\alpha}(t) + (\dot{h}(t)x_1 - \dot{u}_1')\sin\alpha(t) \\ &\quad - (h(t)x_2 - u_2')\sin\alpha(t)\dot{\alpha}(t) + (\dot{h}(t)x_2 - \dot{u}_2')\cos\alpha(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

şeklinde yazılır. (3.7) ifadesi (3.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$2S(X) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \begin{aligned} &[\dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t))]^T \\ &[\dot{R}(t)(h(t)X - U'(t)) + R(t)(\dot{h}(t)X - \dot{U}'(t))] \end{aligned} \right\} dt \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} 2S(X) &= \int_{t_1}^{t_2} [(h^2 X^T X - hX^T U' - U'^T hX + U'^T U')I\dot{\alpha}^2 \\ &\quad + (h\dot{h}X^T X - \dot{h}\dot{U}X^T + \dot{U}'^T \dot{U}')I \\ &\quad + (h\dot{h}X^T X - hX^T \dot{U} - U'^T \dot{h}X + U'^T \dot{U}')\dot{R}^T R \\ &\quad + (\dot{h}hX^T X - \dot{h}X^T U' - \dot{U}'^T U')\dot{R}^T \dot{R}] dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur.

(3.10) eşitliği bileşen formunda ifade edilirse

$$\begin{aligned}
2S(x_1, x_2) = & (x_1^2 + x_2^2) \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt \\
& + \int_{t_1}^{t_2} [(u_1'^2 + u_2'^2) \dot{\alpha}^2 + \dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2 + 2u_1' \dot{u}_2' \dot{\alpha} - 2u_2' \dot{u}_1' \dot{\alpha}] dt \\
& + 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} [-hu_1' \dot{\alpha}^2 - \dot{h} \dot{u}_1' - h \dot{u}_2' \dot{\alpha} + \dot{h} u_2' \dot{\alpha}] dt \\
& + 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} [-hu_2' \dot{\alpha}^2 - \dot{h} \dot{u}_2' - h \dot{u}_1' \dot{\alpha} + \dot{h} u_1' \dot{\alpha}] dt
\end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir.

(3.11) denkleminde,

$$H_R = \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt \tag{3.12}$$

$$H_T = \int_{t_1}^{t_2} [(u_1'^2 + u_2'^2) \dot{\alpha}^2 + \dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2 + 2u_1' \dot{u}_2' \dot{\alpha} - 2u_2' \dot{u}_1' \dot{\alpha}] dt \tag{3.13}$$

$$H_{x_1} = \int_{t_1}^{t_2} [-hu_1' \dot{\alpha}^2 - \dot{h} \dot{u}_1' - h \dot{u}_2' \dot{\alpha} + \dot{h} u_2' \dot{\alpha}] dt \tag{3.14}$$

$$H_{x_2} = \int_{t_1}^{t_2} [-hu_2' \dot{\alpha}^2 - \dot{h} \dot{u}_2' - h \dot{u}_1' \dot{\alpha} + \dot{h} u_1' \dot{\alpha}] dt \tag{3.15}$$

eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)H_R + H_T + 2x_1H_{x_1} + 2x_2H_{x_2} \tag{3.16}$$

şeklinde elde edilir.

Eğer (3.11) eylemi, t zaman parametresine bağlı olarak ifade edilirse, araştırılan X_0 noktasının koordinatları minimal eylem prensibi yardımıyla aşağıda belirtildiği gibi hesaplanır.

(3.11) denkleminin X e göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse ,

$$0 = \frac{\partial(2S)}{\partial X} |_{X_0} \tag{3.17}$$

elde edilir. Bu eşitliği sağlayan noktalar karakteristik noktalardır. Karakteristik noktayı bileşenleri şeklinde elde etmek için (3.13) denkleminin x_1 ve x_2 bileşenlerine göre türevi alınır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \frac{2S(x_1, x_2)}{\partial x_1} &= 2x_1 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ 2 \int_{t_1}^{t_2} [-hu'_1 \dot{\alpha}^2 - \dot{h}u'_1 - hu'_2 \dot{\alpha} + \dot{h}u'_2 \dot{\alpha}] dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{2S(x_1, x_2)}{\partial x_2} &= 2x_2 \int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt \\ &+ 2 \int_{t_1}^{t_2} [-hu'_2 \dot{\alpha}^2 - \dot{h}u'_2 - hu'_1 \dot{\alpha} + \dot{h}u'_1 \dot{\alpha}] dt \end{aligned} \quad (3.19)$$

elde edilir.

Hareketli düzlemin X noktasının aksine, X_0 noktası integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanları olan t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. (3.18) ve (3.19) denklemleri sıfıra eşitlenir ve (3.12), (3.13), (3.15) denklemleri kullanılırsa karakteristik noktanın bileşenleri,

$$x_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} [-hu'_1 \dot{\alpha}^2 - \dot{h}u'_1 - hu'_2 \dot{\alpha} + \dot{h}u'_2 \dot{\alpha}] dt}{\int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt} = -\frac{H_{x_1}}{H_R} \quad (3.20)$$

$$x_2 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} [-hu'_2 \dot{\alpha}^2 - \dot{h}u'_2 - hu'_1 \dot{\alpha} + \dot{h}u'_1 \dot{\alpha}] dt}{\int_{t_1}^{t_2} (h^2 \dot{\alpha}^2 + \dot{h}^2) dt} = -\frac{H_{x_2}}{H_R} \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Ayrıca X_0 noktasının minimal nokta olması için $\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} > 0$ olmalıdır. O halde

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} = \frac{1}{2} I \int \dot{\alpha}^2 dt = \frac{1}{2} IH_R \quad (3.22)$$

ifadesi her zaman sıfırdan büyük olduğundan dolayı, X_0 bir karakteristik noktadır.

Karakteristik noktanın (3.19), (3.20) bileşenleri (3.16) da yerine yazılırsa

$$2S_0(t_1, t_2) = \left[\left(-\frac{H_{x_1}}{H_R} \right)^2 + \left(-\frac{H_{x_2}}{H_R} \right)^2 \right] H_R + H_T - 2 \frac{H_{x_1}}{H_R} H_{x_1} - 2 \frac{H_{x_2}}{H_R} H_{x_2} \quad (3.23)$$

bulunur.

Buradan da minimal eylem

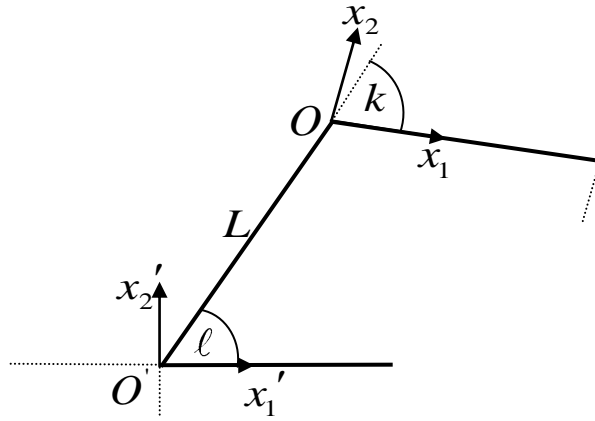
$$2S_0(t_1, t_2) = H_T(t_1, t_2) - \frac{H_{x_1}^2(t_1, t_2) + H_{x_2}^2(t_1, t_2)}{H_R(t_1, t_2)} \quad (3.24)$$

olarak ifade edilir.

3.1.3. Örnek: Homotetik Çift Mafsalsal Hareketinin Karakteristik Noktaları

Şimdi çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçları destekleyen bir örnek olarak çift mafsalsal hareketini inceleyelim.

Vinç hareketi, bir çift mafsalsal hareketidir. Bu hareket, biri vincin sabit kolu diğeri hareketli kolu olmak üzere iki unsurdan meydana gelmektedir. Sabit sistemin orijin noktasında bir kontrol paneli olduğu düşünülebilir ve bu kontrol paneli yardımıyla bu kolun uzatılıp kısaltılabildiği varsayılabilir. Bu hareketin denklemini aşağıdaki şekildeki gibi veririz.



Şekil 3.1 Vinç Hareketi

İlk olarak direkt hareket için hareketli sistemdeki sabit bir noktanın sabit sisteme göre koordinatları ifade edilsin. Sistemler arasındaki öteleme vektörlerini $U' = O'O$ ve $U = OO'$, toplam dönme açısı $\alpha = l - k$, homotetik oran h ve hareketin dönme matrisi

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(l(t) - k(t)) & -\sin(l(t) - k(t)) \\ \sin(l(t) - k(t)) & \cos(l(t) - k(t)) \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

olmak üzere hareket,

$$X'(t) = h(t)R(t)X + U'(t) \quad (3.26)$$

şeklindedir.

Şekil 3.1 deki öteleme vektörü $U' = OO'$ ile L uzunluğu arasındaki açı incelendiğinde,

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L\cos(l(t)) \\ L\sin(l(t)) \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

bulunur. Ayrıca $U' = -RU$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L\cos(l(t)) \\ -L\sin(l(t)) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

elde edilir. Bu durumda hareket denklemi,

$$X'(t) = h(t)R(t)(X - U(t)) \quad (3.29)$$

şeklinde yazılabilir. (3.29) denkleminde (3.25), (3.28) eşitlikleri yerlerine yazılır ve hesaplanırsa,

$$x_1'(t) = \cos(l(t) - k(t)) (h(t)x_1 + L\cos(k)) - \sin(l(t) - k(t)) (h(t)x_2 + L\sin(k)), \quad (3.30)$$

$$x_2'(t) = \sin(l(t) - k(t)) (h(t)x_1 + L\cos(k)) + \cos(l(t) - k(t)) (h(t)x_2 + L\sin(k))$$

elde edilir.

(3.29) da elde edilen eşitliğin zamana bağlı türevi alındığında,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1' &= -(hx_1 + L\cos k) \sin(l - k) (\dot{l} - \dot{k}) + (\dot{h}x_1 - L\sin k \dot{k}) \cos(l - k) \\ &\quad - (hx_2 + L\sin k) \cos(l - k) (\dot{l} - \dot{k}) + (\dot{h}x_2 - L\cos k \dot{k}) \sin(l - k), \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2' &= (hx_1 + L\cos k) \cos(l - k) (\dot{l} - \dot{k}) + (\dot{h}x_1 - L\sin k \dot{k}) \sin(l - k) \\ &\quad - (hx_2 + L\sin k) \sin(l - k) (\dot{l} - \dot{k}) + (\dot{h}x_2 + L\cos k \dot{k}) \cos(l - k) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.29) denkleminde elde edilen bileşenler yardımıyla daha önce bahsedilen kinetik enerji formülü hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
2S = x_1 \int [2hL\cos k(i - \dot{k})^2 - 2\dot{h}L \sin k\dot{k} \\
- 2hL\cos k\dot{k}(i - \dot{k}) + 2\dot{h}L\sin k(i - \dot{k})]dt \\
+ x_2 \int [2hL\sin k(i - \dot{k})^2 - 2\dot{h}L \cos k\dot{k} \\
- 2hL\sin k\dot{k}(i - \dot{k}) + 2\dot{h}L\cos k(i - \dot{k})]dt \\
+ 2(x'_1 + x'_2) \int h^2(i - \dot{k})^2 dt + L^2 \int \dot{i}^2 dt
\end{aligned} \tag{3.32}$$

elde edilir. Kinetik enerji yardımıyla da karakteristik noktanın bileşen formu aşağıdaki şekliyle bulunur:

$$x_1 = - \frac{\int [2hL\cos k(i - \dot{k})^2 - 2\dot{h}L\sin k\dot{k} - 2hL\cos k\dot{k}(i - \dot{k}) + 2\dot{h}L\sin k(i - \dot{k})]dt}{\int h^2(i - \dot{k})^2 dt}, \tag{3.33}$$

$$x_2 = - \frac{\int [2hL\sin k(i - \dot{k})^2 - 2\dot{h}L\cos k\dot{k} - 2hL\sin k\dot{k}(i - \dot{k}) + 2\dot{h}L\cos k(i - \dot{k})]dt}{\int h^2(i - \dot{k})^2 dt}$$

3.2. Ters Homotetik Hareket ve En Az Eylem Prensibi

E hareketli, E' sabit olmak üzere iki düzlemin koordinat sistemleri arasında

$$X'(t) = h(t)R(t)X + U'(t)$$

t -parametrelili kapalı düzlemsel homotetik hareketi düşünölsün. E' sabit düzleminin E hareketli düzlemine göre hareketi E'/E ters hareketi olsun. Sistemlerin orijinleri sırasıyla (O', O) , öteleme vektörleri $OO' = U$ ve $O'O = U'$, dönme matrisi $R(t)$ (dönme matrisi ortogonal bir matristir yani, $R^{-1} = R^T$ dir), dönme açısı $\alpha(t)$ olsun.

Sabit sisteme ait bir X' noktasının hareketli bir sisteme göre yörüngesini bulmak için (3.2) eşitliğinden X çekilirse,

$$X(t) = \frac{1}{h(t)} [R(t)^T X' + U(t)], \quad h(t) \neq 0 \quad (3.34)$$

bulunur. Burada h , t -reel parametresinin sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonudur. Hareket, sabit ve hareketli sistem arasında zamana bağlı olarak düşünülebilir. X' vektörü zamandan bağımsızdır. Ayrıca öteleme vektörleri arasında

$$U(t) = -R(t)^T U'(t)$$

bağıntısı vardır. Bu bağıntı (3.34) eşitliğinde yerine yazılırsa ters hareket için yörünge denklemi,

$$X(t) = \frac{1}{h(t)} (R(t))^T (X' - U'(t)), \quad h(t) \neq 0 \quad (3.35)$$

halini alır.

(3.34) denklemi bileşenleri cinsinden ifade edilirse,

$$x_1(t) = \frac{1}{h(t)} [\cos(\alpha(t))(x'_1 - u'_1(t)) + \sin(\alpha(t))(x'_2 - u'_2(t))] \quad (3.36)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{h(t)} [-\sin(\alpha(t))(x'_1 - u'_1(t)) + \cos(\alpha(t))(x'_2 - u'_2(t))]$$

şeklinde yazılır.

3.2.1. Ters Homotetik Hareket İçin Minimal Eylem Noktası

Minimal eyleme sahip olan tek nokta X_0 'ı elde etmek için hareketli düzlemin noktalarının eylemleri bir parametrelili düzlemsel ters hareket için hesaplanmalıdır. (3.35) denkleminin türevi alınır,

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{\dot{h}(t)} (\dot{R}(t))^T (X' - U'(t)) + \frac{1}{h(t)} (R(t))^T (-\dot{U}'(t)) \quad (3.37)$$

olarak elde edilir. (3.37) ifadesini Karakteristik fonksiyon veya Enerji fonksiyonu olarak adlandırılan,

$$2S = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \dot{X}(t)^T \dot{X}(t) dt \quad (3.38)$$

eşitliğinde yerine yazarsak bu durumda eylem,

$$2S = \frac{\dot{\alpha}^2}{\dot{h}^2} (X' - U')^2 + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h\dot{h}} (\dot{U}'(t))^T J(X' - U'(t)) + \frac{1}{h^2(t)} (\dot{U}'(t))^2 \quad (3.39)$$

olur. Bu ifade bileşenleri cinsinden ifade edilirse,

$$\begin{aligned} 2S = & (x_1'^2 + x_2'^2) \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\dot{h}^2}{h^3} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left[(u_1'^2 + u_2'^2) \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) + \frac{1}{h^2} (\dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2) \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} (-\dot{u}_1' u_1' - \dot{u}_2' u_2') \right] dt \quad (3.40) \\ & + x_1' \int_{t_1}^{t_2} \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u_1' + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} \dot{u}_2' + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}_1' \right] dt \\ & + x_2' \int_{t_1}^{t_2} \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u_2' + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} \dot{u}_1' + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}_2' \right] dt \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Eylemin katsayıları aşağıdaki şekilde belirtilirse,

$$\bar{H}_R = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\dot{h}^2}{h^3} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt \quad (3.41)$$

$$\bar{H}_T = \int_{t_1}^{t_2} \left[(u_1'^2 + u_2'^2) \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) + \frac{1}{h^2} (\dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2) \right. \\ \quad \left. - 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} (-\dot{u}_1' u_1' - \dot{u}_2' u_2') \right] dt \quad (3.42)$$

$$\bar{H}_{x_1} = \int_{t_1}^{t_2} \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u_1' + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} \dot{u}_2' + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}_1' \right] dt \quad (3.43)$$

$$\bar{H}_{x_2} = \int_{t_1}^{t_2} \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u_2' + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} \dot{u}_1' + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}_2' \right] dt \quad (3.44)$$

bu katsayılarla birlikte (3.40) denklemi,

$$2S(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2) \bar{H}_R + \bar{H}_T + 2x_1 \bar{H}_{x_1} + 2x_2 \bar{H}_{x_2} \quad (3.45)$$

halini alır.

Elde edilen eylemi, t zaman skaleri ile parametrize edersek (sabit ve hareketli düzlemler arasındaki α dönme açısıyla değil), araştırılan karakteristik noktanın koordinatları, minimal eylem prensibinden faydalanılarak aşağıda belirtildiği gibi hesaplanır. Eylemin X' e göre türevi hesaplanır ve sifıra eşitlenirse,

$$0 = \frac{\partial(2S)}{\partial X'} \Big|_{x_0'} \quad (3.46)$$

elde edilir.

Bu eşitliği sağlayan noktalar karakteristik noktalardır. Karakteristik noktayı bileşenleri şeklinde ifade etmek için x_1' ve x_2' ye göre türevi alınır, bu durumda

$$\frac{2S(x_1', x_2')}{\partial x_1'} = 2x_1' \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u_1' + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} \dot{u}_2' + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}_1' \right] dt \quad (3.47)$$

$$\frac{2S(x_1', x_2')}{\partial x_2'} = 2x_2' \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u_2' + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} \dot{u}_1' + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}_2' \right] dt$$

elde edilir.

Hareketli düzlemin X' noktasının aksine X_0' karakteristik noktası, integral sınırlarını temsil eden başlangıç ve bitiş zamanları olan t_1 ve t_2 zamanlarının bir fonksiyonudur. (3.47) da elde edilen bileşenler sifıra eşitlenirse, karakteristik noktanın bileşenleri,

$$x_1 = \frac{\int \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u_1' + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} \dot{u}_2' + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}_1' \right] dt}{\int \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt} = -\frac{\bar{H}_{x_1}}{\bar{H}_R}, \quad (3.48)$$

$$x_2 = \frac{\int \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u_2' + 2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} \dot{u}_1' + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}_2' \right] dt}{\int \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt} = -\frac{\bar{H}_{x_2}}{\bar{H}_R} \quad (3.49)$$

olur.

Eylemin X' e göre ikinci dereceden türevi alınır,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X'^2} = \frac{1}{2} I \int_{t_1}^{t_2} \dot{\alpha}^2(t) dt = \frac{1}{2} I \bar{H}_R \quad (3.50)$$

şeklinde bulunur.

Burada ikinci türev her zaman sıfırdan büyük olduğundan, karakteristik noktanın (3.48) ve (3.49) bileşenleri (3.45) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$2S_0(t_1, t_2) = \left[\left(-\frac{\bar{H}_{x_1}}{\bar{H}_R} \right)^2 + \left(-\frac{\bar{H}_{x_2}}{\bar{H}_R} \right)^2 \right] \bar{H}_R + \bar{H}_T - 2 \frac{\bar{H}_{x_1}}{\bar{H}_R} \bar{H}_{x_1} - 2 \frac{\bar{H}_{x_2}}{\bar{H}_R} \bar{H}_{x_2} \quad (3.51)$$

bulunur. Buradan da Minimal eylem,

$$2S_0(t_1, t_2) = \bar{H}_T(t_1, t_2) - \frac{\bar{H}_{x_1}^2(t_1, t_2) + \bar{H}_{x_2}^2(t_1, t_2)}{\bar{H}_R(t_1, t_2)} \quad (3.52)$$

olarak elde edilir.

3.2.2. Örnek2: Ters Homotetik Hareket İçin Çift Mafsal Hareketinin Karakteristik Noktaları

Ters hareket için vinç hareketi incelenirse vinç hareketi iki sistemli bir çift menteşe hareketine sahiptir. Bunlardan bir tanesi vincin sabit kolu, bir diğeri ise vincin hareketli koludur. Sabit sistemin orijin noktasında bir kontrol paneli olduğu düşünülebilir ve bu kontrol paneli yardımıyla bu kolun uzatılıp kısaltıldığı varsayılabilir. Bu hareketin denklemi aşağıdaki şekliyle verilebilir.

Sistemler arasındaki öteleme vektörleri $U' = O'O$ ve $U = OO'$, toplam dönme açısı $\alpha = l - k$ ve hareketin dönme matrisi,

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos(l(t) - k(t)) & -\sin(l(t) - k(t)) \\ \sin(l(t) - k(t)) & \cos(l(t) - k(t)) \end{pmatrix}$$

olmak üzere ters homotetik hareket,

$$X(t) = \frac{1}{h(t)} (R(t))^T (X' - U'(t)) \quad (3.53)$$

şeklinindedir. Ters homotetik hareketin bileşenleri ise,

$$x_1(t) = \frac{1}{h(t)} [\cos(l(t) - k(t)) (x'_1 - L\cos l(t)) + \sin(l(t) - k(t)) (x'_2 - L\sin l(t))] \quad (3.54)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{h(t)} [-\sin(l(t) - k(t)) (x'_1 - L\cos l(t)) + \cos(l(t) - k(t)) (x'_2 - L\sin l(t))]$$

olarak ifade edilir. (3.54) eşitliğinde ifade edilen bileşenlerin zamana bağlı yani t ye bağlı türevi alındığında ,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -\frac{h}{h^2} [\cos(l - k)(x'_1 - L\cos l) + \sin(l - k)(x'_2 - L\sin l)] \\ & + \frac{1}{h} \left[\sin(l - k) [-(\dot{l} - \dot{k})(x'_1 - L\cos l) - L\cos l \dot{l}] \right. \\ & \left. + \cos(l - k) [(\dot{l} - \dot{k})(x'_2 - L\sin l) - L\sin l \dot{l}] \right] \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\frac{h}{h^2} [\sin(l - k)(L\cos l - x'_1) + \cos(l - k)(L\sin l - x'_2)] \\ & + \frac{1}{h} \left[\cos(l - k) [-(\dot{l} - \dot{k})(x'_1 - L\cos l) - L\cos l \dot{l}] \right. \\ & \left. - \sin(l - k) [(\dot{l} - \dot{k})(x'_2 - L\sin l) - L\sin l \dot{l}] \right] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buradan (3.55) de elde edilen bileşenlerden faydalanarak kinetik enerji

$$\begin{aligned} 2S' = & (x_1'^2 + x_2'^2) \int \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt \\ & + \int \left[(u_1'^2 + u_2'^2) \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) + \frac{1}{h^2} (\dot{u}_1'^2 + \dot{u}_2'^2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\dot{\alpha}}{h^2} (-\dot{u}'_1 u'_2 + \dot{u}'_2 u'_1) + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} (-\dot{u}'_1 u'_1 - \dot{u}'_2 u'_2) \Big] dt \quad (3.56) \\
& + x'_1 \int \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u'_1 + 2 \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \dot{u}'_2 + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}'_1 \right] dt \\
& + x'_2 \int \left[-2 \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u'_2 - 2 \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \dot{u}'_1 + 2 \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}'_2 \right] dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Kinetik enerji yardımıyla da karakteristik noktanın bileşen formu aşağıdaki şekliyle bulunur,

$$\begin{aligned}
\dot{x}'_1 &= \frac{\int \left[\left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u'_1 - \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \dot{u}'_2 - \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}'_1 \right] dt}{\int \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt}, \\
\dot{x}'_2 &= \frac{\int \left[\left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) u'_2 + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \dot{u}'_1 - \frac{\dot{h}}{h^3} \dot{u}'_2 \right] dt}{\int \left(\frac{\dot{h}^2}{h^4} + \frac{\dot{\alpha}^2}{h^2} \right) dt}
\end{aligned} \quad (3.57)$$

3.3. İzdüşüm Eğrisinin Kinetik Enerjisi Üzerine

Bu bölümde 1-parametrelili kapalı homotetik uzay hareketi altında izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi için Holditch Teoremi ifade edilmiştir.

3.3.1.İzdüşüm Eğrisinin Kinetik Enerjisi

X , hareketli uzayda sabit bir nokta olsun. X noktasının $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ sistemine göre koordinatları x_1, x_2, x_3 olmak üzere

$$\overrightarrow{OX} = x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

yazılabilir.

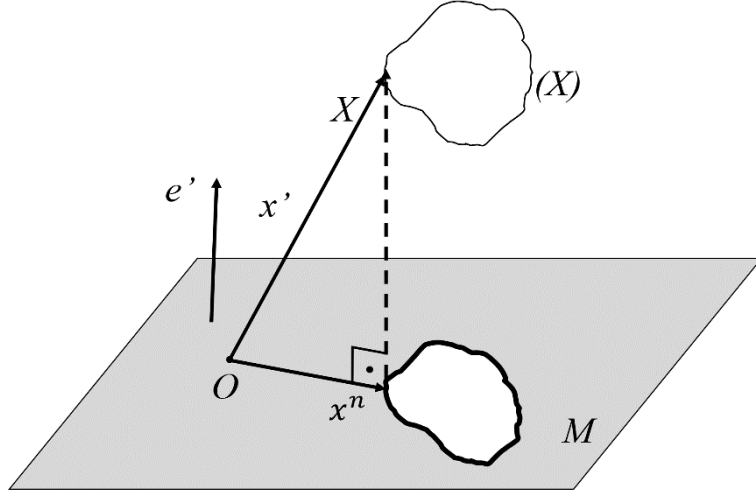
$$\overrightarrow{OO'} = u = u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3$$

ile ifade edilirse 1-parametrelili kapalı homotetik uzay hareketinde X noktasının sabit uzaydaki konum vektörü için

$$x' = hx - u \quad (3.58)$$

yazılır.

$X \in E$ sabit noktası hareket esnasında sabit uzayda kapalı bir (X) eğrisi çizer. Bu kapalı eğrinin sabit bir e' birim vektörü doğrultusunda bir M düzlemi üzerine izdüşümü yine bir kapalı eğridir (şekil 3.2). Bu eğriyi (X^n) ile ve X noktasının düzlem üzerine dik izdüşüm noktasını X^n ile gösterelim ve M düzlemi sabit uzayın O' başlangıç noktasından geçsin.



Şekil 3.2. Uzak Eğrisinin Bir Düzlem Üzerine Dik İzdüşümü

Şekil 3.2. den

$$\overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'X^n} + \overrightarrow{X^nX}$$

veya

$$x^n = x' - \langle e', x' \rangle e' \quad (3.59)$$

elde edilir. Bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} \|x^n\|^2 &= \|x'\|^2 - 2\langle x', \langle e', x' \rangle e' \rangle + \|\langle e', x' \rangle e'\|^2 \\ &= \|x'\|^2 - 2\langle e', x' \rangle \langle e', x' \rangle + \langle e', x' \rangle^2 \|e'\|^2 \\ &= \|x'\|^2 - 2\langle e', x' \rangle^2 + \langle e', x' \rangle \\ &= \|x'\|^2 - \langle e', x' \rangle^2 \end{aligned} \quad (3.60)$$

elde edilir. (3.59) un türevi alınır,

$$\begin{aligned} \dot{x}^n &= \dot{x}' - (\langle \dot{e}', x' \rangle + \langle e', \dot{x}' \rangle) e' - \langle e', x' \rangle \dot{e}' \\ &= \dot{x}' - \langle e', \dot{x}' \rangle e' \end{aligned} \quad (3.61)$$

olur ve (3.61) eşitliğinin de normu alınır,

$$\|\dot{x}^n\|^2 = \|\dot{x}'\|^2 - 2\langle \dot{x}', \langle e', \dot{x}' \rangle e' \rangle + \langle e', \dot{x}' \rangle^2 \|\dot{x}'\|^2$$

$$\begin{aligned}
&= \|\dot{x}'\|^2 - 2\langle \dot{x}', e' \rangle \langle e', \dot{x}' \rangle + \langle e', \dot{x}' \rangle^2 \\
&= \|\dot{x}'\|^2 - \langle e', \dot{x}' \rangle^2
\end{aligned} \tag{3.62}$$

elde edilir.

(X^n) kapalı izdüşüm eğrisinin $O' \in E'$ noktasına göre kinetik enerjisi

$$E_{kin} = S = \frac{1}{2} \oint \|\dot{X}^n\|^2 dt \tag{3.63}$$

olup, burada integral kapalı izdüşüm eğrisi boyunca, yani 0'dan T 'ye kadar alınmaktadır. (3.62) eşitliği (3.63) da yerine yazılır ve (3.58) göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
E_{kin} = S &= \frac{1}{2} \oint (\|\dot{x}'\|^2 - \langle e', \dot{x}' \rangle^2) dt \\
&= \frac{1}{2} \oint (\|\dot{h}x - \dot{u}\|^2 - \langle e', \dot{h}x - \dot{u} \rangle^2) dt \\
&= \frac{1}{2} \oint \left[\|\dot{h}x\|^2 - 2\dot{h}\langle x, \dot{u} \rangle + \|\dot{u}\|^2 \right. \\
&\quad \left. - (\langle e', \dot{h}x \rangle - \langle e', \dot{u} \rangle)^2 \right] dt \\
&= \frac{1}{2} \oint \left[\|\dot{h}x\|^2 - 2\dot{h}\langle x, \dot{u} \rangle + \|\dot{u}\|^2 - \dot{h}^2 \langle e', x \rangle^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\dot{h}\langle e', x \rangle \langle e', \dot{u} \rangle - \langle e', \dot{u} \rangle^2 \right] dt \\
2S &= \oint \dot{h}^2 \|x\|^2 dt - \oint \dot{h}^2 \langle e', x \rangle^2 dt \\
&\quad + \oint (\dot{h}\langle e', x \rangle \langle e', \dot{u} \rangle - \dot{h}\langle \dot{u}, x \rangle) dt \\
&\quad + \oint (\|\dot{u}\|^2 - \langle e', \dot{u} \rangle^2) dt
\end{aligned} \tag{3.64}$$

olarak bulunur. O orijin noktasının çizdiği kapalı yörüngenin P düzlemi üzerine dik izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi, (3.64) den

$$2S_0 = \oint (\|\dot{u}\|^2 - \langle e', \dot{u} \rangle^2) dt \tag{3.65}$$

olur.

$$\sum_{i=1}^3 a_i e_i = e', \quad a_i = a_i(t), \quad \sum_{i=1}^3 a_i^2 = 1$$

şeklinde ifade edilirse,

$$\dot{h}\langle e', x \rangle \langle e', \dot{u} \rangle - \dot{h}\langle \dot{u}, x \rangle = \dot{h} \sum_{i=1}^3 \left(-\dot{u}_i + a_i \sum_{j=1}^3 a_j \dot{u}_j \right) x_i \quad (3.66)$$

ve

$$\langle e', x \rangle^2 = \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j x_i x_j \quad (3.67)$$

olarak bulunur. Bu durumda (3.65), (3.66) ve (3.67) eşitlikleri (3.64) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2S &= \|x\|^2 \oint \dot{h}^2 dt - \oint \dot{h}^2 \left(\sum_{i,j=1}^3 a_i a_j x_i x_j \right) dt \\ &+ \oint \dot{h} \sum_{i=1}^3 \left(-\dot{u}_i + a_i \sum_{j=1}^3 a_j \dot{u}_j \right) x_i dt + 2S_0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

elde edilir. Burada,

$$\eta = \oint \dot{h}^2 dt$$

$$\sigma_{ij} = \oint \dot{h}^2 a_i a_j dt$$

$$\tau_i = \oint \dot{h} \left\{ -\dot{u}_i + a_i \sum_{j=1}^3 a_j \dot{u}_j \right\} dt$$

olmak üzere $X \in E$ sabit noktasının kapalı yörünge eğrisinin P düzlemi üzerine dik izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi

$$2S = 2S_0 + \eta \sum_{i=1}^3 x_i^2 - \sum_{i,j=1}^3 \sigma_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^3 \tau_i x_i \quad (3.69)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen (3.69) denklemi, x_i bileşenlerine göre kuadratik formda bir denklem elde edilir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.

İzdüşüm eğrileri eşit kinetik enerjiye sahip olan E hareketli uzayının bütün sabit noktaları aynı küre üzerinde bulunurlar.

$$\eta = \oint \dot{h}^2(t) dt$$

integralini ele alalım. Burada $\dot{h}^2(t)$ fonksiyonu sürekli olacak şekilde seçelim. İntegral hesabının ortalama değer teoremine göre,

$$\oint \dot{h}^2(t) dt = \int_0^T \dot{h}^2(t) dt = \dot{h}^2(t_0) t \Big|_0^T = \dot{h}^2(t_0) T \quad (3.70)$$

olacak şekilde $\exists t_0 \in [0, T]$ vardır. Hareketli koordinat sistemini $i \neq j$ için $\sigma_{ij} = 0$ olacak seçildiği takdirde,

$$\sigma_{ii} = \oint \dot{h}^2 a_i^2 dt = \int_0^T \dot{h}^2 a_i^2 dt = \dot{h}^2 a_i^2 t \Big|_0^T$$

integraline ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$b_{ii} = \dot{h}^2(t_i) a_i^2(t_i) T, i = 1, 2, 3 \quad (3.71)$$

eşitliğini sağlayan $t_i \in [0, T]$ bulunabilir. Bu durumda (3.69) eşitliğinden,

$$2S = 2S_0 + \dot{h}^2(t_0) T \sum_{i=1}^3 x_i^2 - \sum_{i=1}^3 \dot{h}^2(t_i) a_i^2(t_i) T x_i^2 + \sum_{i=1}^3 \tau_i x_i$$

$$= 2S_0 + T \sum_{i=1}^3 \left(\dot{h}^2(t_0) - \dot{h}^2(t_i) a_i^2(t_i) \right) x_i^2 + \sum_{i=1}^3 \tau_i x_i \quad (3.72)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\sum_{i=1}^3 a_i^2 = 1$$

olduğundan, $\forall t \in [0, T]$ için

$$a_i^2(t) \leq 1$$

olur. Ayrıca (3.69) eşitliğinin her iki tarafı $\dot{h}^2(t)T$ ile çarpılırsa

$$\dot{h}^2(t) a_i^2(t) T \leq \dot{h}^2(t) T$$

elde edilir ve eşitliğin her iki tarafının integrali alınır,

$$\int_0^T \dot{h}^2(t) a_i^2(t) T dt \leq \int_0^T \dot{h}^2(t) T dt$$

olacağından,

$$\dot{h}^2(t_{1i}) a_i^2(t_i) T \leq \dot{h}^2(t_4) T$$

veya $T > 0$ olduğundan,

$$\dot{h}^2(t_i) a_i^2(t_i) T \leq \dot{h}^2(t_0) \quad (3.73)$$

olarak elde edilir. $\dot{h}^2(t)$ fonksiyonunun $[0, T]$ kapalı aralığındaki en büyük değerinin L olsun. Bu durumda, $\forall t \in [0, T]$ için,

$$0 \leq \dot{h}^2(t) \leq L$$

olup

$$0 \leq \dot{h}^2(t_i) \leq L, \quad i = 1, 2, 3$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $a_i^2(t) \leq 1$ olduğundan,

$$0 \leq \dot{h}^2(t_i) a_i^2(t_i) \leq L$$

olur. (3.73) denklemini göz önüne alınırsa,

$$0 \leq \dot{h}^2(t_0) - \dot{h}^2(t_i)a_i^2(t_i) \leq B$$

elde edilir. $\dot{h}^2(t)$ fonksiyonu $[0, T]$ aralığında sürekli olduğundan

$$\dot{h}^2(t_0) - \dot{h}^2(t_i)a_i^2(t_i) = \dot{h}^2(t_{ii}), i = 1, 2, 3$$

olacak şekilde $t_{ii} \in [0, T]$ bulunabilir. O halde

$$\sum_{i=1}^3 \left(\dot{h}^2(t_0) - \dot{h}^2(t_i)a_i^2(t_i) \right) x_i^2 = \sum_{i=1}^3 \dot{h}^2(t_{ii})x_i^2 \quad (3.74)$$

olur. $0 \leq \dot{h}^2(t) \leq L$ olduğundan

$$0 \leq \dot{h}^2(t_{11})x_1^2 \leq Lx_1^2,$$

$$0 \leq \dot{h}^2(t_{22})x_2^2 \leq Lx_2^2,$$

$$0 \leq \dot{h}^2(t_{33})x_3^2 \leq Lx_3^2$$

yazılabilir. Bu ifadeler taraf tarafa toplanırsa,

$$0 \leq \dot{h}^2(t_{11})x_1^2 + \dot{h}^2(t_{22})x_2^2 + \dot{h}^2(t_{33})x_3^2 \leq L(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

elde edilir.

$$0 \leq \frac{\dot{h}^2(t_{11})x_1^2 + \dot{h}^2(t_{22})x_2^2 + \dot{h}^2(t_{33})x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \leq L$$

veya

$$\frac{\dot{h}^2(t_{11})x_1^2 + \dot{h}^2(t_{22})x_2^2 + \dot{h}^2(t_{33})x_3^2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = \dot{h}^2(t_4) \quad (3.75)$$

olacak şekilde $\exists t_4 \in [0, T]$ bulunur. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^3 \dot{h}^2(t_{ii})x_i^2 = \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i^2$$

olur ve, (3.74) eşitliğinden faydalanılarak,

$$\sum_{i=1}^3 \left(\dot{h}^2(t_0) - \dot{h}^2(t_i) a_{1i}^2(t_0) \right) x_i^2 = \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i^2 \quad (3.76)$$

elde edilir. (3.76) eşitliği (3.72) de yerine yazıldığında 1-parametrelili kapalı uzay hareketlerinde, hareketli uzayda alınan sabit bir noktanın kapalı yörünge eğrisinin M düzlemi üzerine dik izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi,

$$S = S_0 + \frac{1}{2} T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_i x_i \quad (3.77)$$

olarak ifade edilir.

3.3.2. İzdüşüm Eğrisinin Kinetik Enerjisi İçin Holditch Tipi Teorem

Hareketli uzaydan seçilen farklı iki sabit nokta X, Y ve bu noktaları birleştiren doğru parçası üzerinde diğer bir nokta Z olsun. Bu durumda,

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i, \quad \lambda + \mu = 1 \quad (3.78)$$

yazılabilir. Z noktasının yörünge eğrisinin kinetik enerjisi (3.77) den

$$S_Z = S_0 + \frac{1}{2} T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 z_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 c_i z_i \quad (3.79)$$

olarak ifade edilir. (3.78) ifadesi, (3.79) de yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} 2S_Z &= 2S_0 + T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 (\lambda x_i + \mu y_i)^2 + \sum_{i=1}^3 c_i (\lambda x_i + \mu y_i) \\ &= 2S_0 + \lambda^2 \left(T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i^2 \right) + 2\lambda\mu \left(T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i y_i \right) \\ &\quad + \mu^2 \left(T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 y_i^2 \right) + \lambda \sum_{i=1}^3 c_i x_i + \mu \sum_{i=1}^3 c_i y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2S_0 + \lambda^2 \left(2S_X - 2S_0 - \sum_{i=1}^3 c_i x_i \right) + 2\lambda\mu \left(T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i y_i \right) \\
&\quad + \mu^2 \left(2S_Y - 2S_0 - \sum_{i=1}^3 c_i y_i \right) + \lambda \sum_{i=1}^3 c_i x_i + \mu \sum_{i=1}^3 c_i y_i \\
&= \lambda^2 2S_X + \mu^2 2S_Y + 2S_0(1 - \lambda^2 - \mu^2) + 2\lambda\mu \left(T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i y_i \right) \\
&\quad + (\lambda - \lambda^2) \sum_{i=1}^3 c_i x_i + (\mu - \mu^2) \sum_{i=1}^3 c_i y_i \\
&= \lambda^2 2S_X + \mu^2 2S_Y + 4S_0\lambda\mu + 2\lambda\mu \left(T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i y_i \right) \\
&\quad + \lambda\mu \sum_{i=1}^3 c_i (x_i + y_i) \\
&= \lambda^2 2S_X + \mu^2 2S_Y + 2\lambda\mu \left(2S_0 + T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i y_i \right) \\
&\quad + \lambda\mu \sum_{i=1}^3 c_i (x_i + y_i)
\end{aligned}$$

$$S_Z = \lambda^2 S_X + 2\lambda\mu S_{XY} + \mu^2 S_Y \quad (3.80)$$

elde edilir.

(3.80) de

$$S_{XY} = S_{YX} = S_0 + \frac{1}{2} T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i y_i + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^3 c_i (x_i + y_i). \quad (3.81)$$

X ve Y noktalarının yörünge eğrilerinin izdüşüm eğrilerinin karışık kinetik enerjisidir.

Öyleyse,

$$\begin{aligned}
2S_X - 4S_{XY} + 2S_Y &= 2S_0 + T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \sum_{i=1}^3 c_i x_i \\
&\quad - 4S_0 - T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i y_i - \sum_{i=1}^3 c_i (x_i + y_i) \\
&\quad + 2S_0 + T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 y_i^2 + \sum_{i=1}^3 c_i y_i \\
&= T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2
\end{aligned}$$

olacağından X ve Y noktaları arası uzaklık d_{xy} ile gösterilirse,

$$2S_X - 4S_{XY} + 2S_Y = T\dot{h}^2(t_4)d_{xy}^2$$

elde edilir. Böylece,

$$S_{XY} = \frac{1}{2}(S_X + S_Y - T\dot{h}^2(t_4)d_{xy}^2) \quad (3.82)$$

olur. (3.82) eşitliği (3.80) de yerine yazılır ve karışık kinetik enerji ifadesi olan S_{XY} ifadesi yok edilirse,

$$\begin{aligned}
S_Z &= \lambda^2 S_X + 2\lambda\mu S_Y + \mu^2 S_Y \\
&= \lambda^2 S_X + 2\lambda\mu \frac{1}{2}(S_X + S_Y - T\dot{h}^2(t_4)d_{xy}^2) + \mu^2 S_Y \\
&= (\lambda^2 + \lambda\mu)S_X + (\mu^2 + \lambda\mu)S_Y - \lambda\mu T\dot{h}^2(t_4)d_{xy}^2
\end{aligned}$$

olarak elde edilir ve buradan,

$(\lambda^2 + \lambda\mu) = \lambda$, $(\mu^2 + \lambda\mu) = \mu$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$S_Z = \lambda S_X + \mu S_Y - \lambda\mu T\dot{h}^2(t_4)d_{xy}^2 \quad (3.83)$$

bulunur.

X, Y, Z doğruduş üç nokta olduğundan,

$$d_{XZ} + d_{ZY} = d_{XY}$$

olup,

$$\lambda = \frac{d_{ZY}}{d_{XY}} = \frac{b}{d}, \quad \mu = \frac{d_{XZ}}{d_{XY}} = \frac{a}{d}$$

olarak seçilirse, (3.82) eşitliğinden,

$$S_Z = \frac{1}{d} \{bS_X + aS_Y\} - T\dot{h}^2(t_4) \frac{b}{d} \frac{a}{d} d^2$$

veya

$$S_Z = \frac{1}{d} \{bS_X + aS_Y\} - T\dot{h}^2(t_4)ab \quad (3.84)$$

olarak ifade edilir.

E deki sabit X ve Y noktaları 1-parametrelili kapalı homotetik hareket boyunca aynı eğriyi çizdiklerinden $S_X = S_Y$ olacağından, (3.80) eşitliğinden

$$S_X - S_Z = T\dot{h}^2(t_4)ab$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi için Holditch-tipi Teorem aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem.3.2

Sabit uzunluklu bir doğru parçasının X ve Y uç noktaları 1-parametrelili kapalı uzay hareketinde aynı kapalı uzay eğrisini çizerse, bu eğri ile doğru parçası üzerindeki diğer bir Z noktasının çizdiği eğrinin izdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi arasında

$$S_X - S_Z = T\dot{h}^2(t_4)ab \quad (3.85)$$

bağıntısı vardır.

Aynı doğru üzerinde bulunan iki nokta yerine doğrudan olmayan üç nokta olarak sonucumuzu genişletelim.

$$x_1 = (x_i), x_2 = (y_i), z_3 = (z_i) \quad i = 1,2,3$$

noktaları E hareketli uzayında doğrudan olmayan sabit üç nokta olsun. Bu üç noktanın tanımladığı düzlem üzerindeki bir $Q = (q_i)$ noktası için

$$q_i = \lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \quad (3.86)$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
2S_Q &= 2S_0 + T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 q_i + \sum_{i=1}^3 c_i q_i \\
&= 2S_0 + T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 (\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i)^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^3 c_i (\lambda_1 x_i + \lambda_2 y_i + \lambda_3 z_i) \\
&= 2S_0 + T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 [(\lambda_1^2 x_i^2 + \lambda_2^2 y_i^2 + \lambda_3^2 z_i^2)] \\
&\quad + T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 2(\lambda_1 \lambda_2 x_i y_i + \lambda_1 \lambda_3 x_i z_i + \lambda_2 \lambda_3 y_i z_i) \\
&\quad + \lambda_1 \sum_{i=1}^3 c_i x_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^3 c_i y_i + \lambda_3 \sum_{i=1}^3 c_i z_i \\
&= 2S_0 + \lambda_1^2 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i^2 + \lambda_2^2 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 y_i^2 \\
&\quad + \lambda_3^2 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 z_i^2 \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i y_i + 2\lambda_2 \lambda_3 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 y_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_3 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=1}^3 x_i z_i + \lambda_1 \sum_{i=1}^3 c_i x_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^3 c_i y_i \\
&\quad + \lambda_3 \sum_{i=1}^3 c_i z_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2S_0 + \lambda_1^2 \left(2S_{X_1} - 2S_0 - \sum_{i=1}^3 c_i x_i \right) + \lambda_2^2 \left(2S_{X_2} - 2S_0 - \sum_{i=1}^3 c_i y_i \right) \\
&\quad + \lambda_3^2 \left(2S_{X_3} - 2S_0 - \sum_{i=1}^3 c_i z_i \right) + 2\lambda_1 \lambda_2 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i y_i \\
&\quad + 2\lambda_2 \lambda_3 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 y_i z_i + 2\lambda_1 \lambda_3 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i z_i \\
&= 2\lambda_1^2 S_{X_1} + 2\lambda_2^2 S_{X_2} + 2\lambda_3^2 S_{X_3} + 2S_0(1 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2) \\
&\quad - \lambda_1^2 \sum_{i=1}^3 c_i x_i - \lambda_2^2 \sum_{i=1}^3 c_i y_i - \lambda_3^2 \sum_{i=1}^3 c_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i y_i + 2\lambda_2 \lambda_3 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 y_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_3 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i z_i \\
&\quad + \lambda_1 \sum_{i=1}^3 c_i x_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^3 c_i y_i + \lambda_3 \sum_{i=1}^3 c_i z_i \\
&= 2\lambda_1^2 S_{X_1} + 2\lambda_2^2 S_{X_2} + 2\lambda_3^2 S_{X_3} + 4S_0(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3) \\
&\quad + (\lambda_1 - \lambda_1^2) \sum_{i=1}^3 c_i x_i + (\lambda_2 - \lambda_2^2) \sum_{i=1}^3 c_i y_i \\
&\quad + (\lambda_3 - \lambda_3^2) \sum_{i=1}^3 c_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_2 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i y_i + 2\lambda_2 \lambda_3 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 y_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1 \lambda_3 T \dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i z_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\lambda_1^2 S_{X_1} + 2\lambda_2^2 S_{X_2} + 2\lambda_3^2 S_{X_3} + 4S_0(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) \\
&\quad + (\lambda_1(1 - \lambda_1)) \sum_{i=1}^3 c_i x_i + (\lambda_2(1 - \lambda_2)) \sum_{i=1}^3 c_i y_i \\
&\quad + (\lambda_3(1 - \lambda_3)) \sum_{i=1}^3 c_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1\lambda_2 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i y_i + 2\lambda_2\lambda_3 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 y_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1\lambda_3 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i z_i \\
&= 2\lambda_1^2 S_{X_1} + 2\lambda_2^2 S_{X_2} + 2\lambda_3^2 S_{X_3} + 4S_0(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) \\
&\quad + (\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3)) \sum_{i=1}^3 c_i x_i + (\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3)) \sum_{i=1}^3 c_i y_i \\
&\quad + (\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)) \sum_{i=1}^3 c_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1\lambda_2 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i y_i + 2\lambda_2\lambda_3 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 y_i z_i \\
&\quad + 2\lambda_1\lambda_3 T\dot{h}^2(t_4) \sum_{i=3}^3 x_i z_i \\
&= 2\lambda_1^2 S_{X_1} + 2\lambda_2^2 S_{X_2} + 2\lambda_3^2 S_{X_3} + 4S_0(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3) \\
&\quad + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) \sum_{i=1}^3 c_i x_i + (\lambda_2\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3) \sum_{i=1}^3 c_i y_i \\
&\quad + (\lambda_3\lambda_1 + \lambda_3\lambda_2) \sum_{i=1}^3 c_i z_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\lambda_1\lambda_2T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=3}^3x_iy_i+2\lambda_2\lambda_3T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=3}^3y_iz_i \\
& +2\lambda_1\lambda_3T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=3}^3x_iz_i \\
& =2\lambda_1^2S_{X_1}+2\lambda_2^2S_{X_2}+2\lambda_3^2S_{X_3}+4S_0(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3) \\
& +(\lambda_1\lambda_2)\sum_{i=1}^3c_ix_i+(\lambda_1\lambda_3)\sum_{i=1}^3c_ix_i \\
& +(\lambda_2\lambda_1)\sum_{i=1}^3c_iy_i+(\lambda_2\lambda_3)\sum_{i=1}^3c_iy_i \\
& +(\lambda_3\lambda_1)\sum_{i=1}^3c_iz_i+(\lambda_3\lambda_2)\sum_{i=1}^3c_iz_i \\
& +2\lambda_1\lambda_2T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=3}^3x_iy_i+2\lambda_2\lambda_3T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=3}^3y_iz_i \\
& +2\lambda_1\lambda_3T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=3}^3x_iz_i \\
& =2\lambda_1^2S_{X_1}+2\lambda_2^2S_{X_2}+2\lambda_3^2S_{X_3} \\
& +2\lambda_1\lambda_2\left\{2S_0+T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=1}^3x_iy_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3c_i(x_i+y_i)\right\} \\
& +2\lambda_1\lambda_3\left\{2S_0+T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=1}^3x_iz_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3c_i(x_i+z_i)\right\} \\
& +2\lambda_2\lambda_3\left\{2S_0+T\dot{h}^2(t_4)\sum_{i=1}^3y_iz_i+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^3c_i(y_i+z_i)\right\}
\end{aligned}$$

olup (3.81) kullanılırsa,

$$S_Q = \lambda_1^2S_{X_1} + \lambda_2^2S_{X_2} + \lambda_3^2S_{X_3} + \lambda_1\lambda_2S_{X_1X_2} + \lambda_1\lambda_3S_{X_1X_3} + \lambda_2\lambda_3S_{X_2X_3}$$

elde edilir.

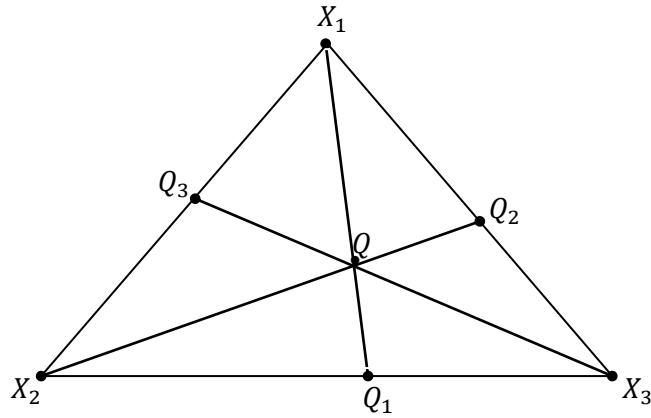
Bu son eşitlikte (3.82) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
S_Q &= \lambda_1^2 S_{X_1} + \lambda_2^2 S_{X_2} + \lambda_3^2 S_{X_3} \\
&\quad + 2\lambda_1\lambda_2 \frac{1}{2} \{S_{X_1} + S_{X_2} - T\dot{h}^2(t_4) d_{X_1 X_2}^2\} \\
&\quad + 2\lambda_1\lambda_3 \frac{1}{2} \{S_{X_1} + S_{X_3} - T\dot{h}^2(t_4) d_{X_1 X_3}^2\} \\
&\quad + 2\lambda_2\lambda_3 \frac{1}{2} \{S_{X_2} + S_{X_3} - T\dot{h}^2(t_4) d_{X_2 X_3}^2\} \\
&= (\lambda_1^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) S_{X_1} + (\lambda_2^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3) S_{X_2} \\
&\quad + (\lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) S_{X_3} \\
&\quad - T\dot{h}^2(t_4) \{ \lambda_1\lambda_2 d_{X_1 X_2}^2 + \lambda_1\lambda_3 d_{X_1 X_3}^2 + \lambda_2\lambda_3 d_{X_2 X_3}^2 \}
\end{aligned}$$

ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
S_Q &= \lambda_1 S_{X_1} + \lambda_2 S_{X_2} + \lambda_3 S_{X_3} \\
&\quad - T\dot{h}^2(t_4) \{ \lambda_1\lambda_2 d_{X_1 X_2}^2 + \lambda_1\lambda_3 d_{X_1 X_3}^2 + \lambda_2\lambda_3 d_{X_2 X_3}^2 \}
\end{aligned} \tag{3.87}$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.3. Hareketli uzayda sabit üçgen

Şekil 3.3. de $Q_1 = (q_{1i})$ noktasını ele alalım. X_2, Q_1, X_3 noktaları aynı doğru üzerinde olduğundan

$$q_{1i} = \xi_{11} y_i + \xi_{12} z_i, \quad \xi_{11} + \xi_{12} = 1 \tag{3.88}$$

ve Q_1, Q, X_1 noktaları doğrudan olduğundan

$$q_i = \xi_{13}q_{1i} + \xi_{14}x_i, \quad \xi_{13} + \xi_{14} = 1 \quad (3.89)$$

yazılabilir.

$$\xi_{11} = \frac{d_{Q_1X_3}}{d_{X_2X_3}}, \xi_{12} = \frac{d_{X_2Q_1}}{d_{X_2X_3}}, \xi_{13} = \frac{d_{QX_1}}{d_{Q_1X_1}}, \xi_{14} = \frac{d_{Q_1Q}}{d_{Q_1X_1}}$$

olup (3.88) denklemi (3.89) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} q_i &= \xi_{13}(\xi_{11}y_i + \xi_{12}z_i) + \xi_{14}x_i \\ &= \xi_{14}x_i + \xi_{11}\xi_{13}y_i + \xi_{12}\xi_{13}z_i \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\lambda_1 = \xi_{14} = \frac{d_{Q_1Q}}{d_{Q_1X_1}}, \lambda_2 = \xi_{11}\xi_{13} = \frac{d_{Q_1X_3}}{d_{X_2X_3}} \frac{d_{QX_1}}{d_{Q_1X_1}}, \lambda_3 = \xi_{12}\xi_{13} = \frac{d_{X_2Q_1}}{d_{X_2X_3}} \frac{d_{QX_1}}{d_{Q_1X_1}}$$

elde edilir. Benzer şekilde $Q_2 = (q_{2i})$ noktasını göz önüne alalım. X_3, Q_2, X_1 noktaları doğrudan olduğundan

$$q_{2i} = \xi_{21}z_i + \xi_{22}x_i, \quad \xi_{21} + \xi_{22} = 1 \quad (3.90)$$

ve Q_2, Q, X_2 noktaları doğrudan olduğundan,

$$q_i = \xi_{23}q_{2i} + \xi_{24}y_i, \quad \xi_{23} + \xi_{24} = 1 \quad (3.91)$$

yazılabilir. Burada

$$\xi_{21} = \frac{d_{Q_2X_1}}{d_{X_3X_1}}, \xi_{22} = \frac{d_{X_3Q_2}}{d_{X_3X_1}}, \xi_{23} = \frac{d_{QX_2}}{d_{Q_2X_2}}, \xi_{24} = \frac{d_{Q_2Q}}{d_{Q_2X_2}} \quad (3.92)$$

olup (3.90) denklemi (3.91) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} q_i &= \xi_{23}(\xi_{21}z_i + \xi_{22}x_i) + \xi_{24}y_i \\ &= \xi_{24}y_i + \xi_{21}\xi_{23}z_i + \xi_{22}\xi_{23}x_i \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda,

$$\lambda_1 = \xi_{22}\xi_{23} = \frac{d_{X_3Q_2}}{d_{X_3X_1}} \frac{d_{QX_2}}{d_{Q_2X_2}}, \lambda_2 = \xi_{24} = \frac{d_{Q_2Q}}{d_{Q_2X_2}}, \lambda_3 = \xi_{21}\xi_{23} = \frac{d_{Q_2X_1}}{d_{X_3X_1}} \frac{d_{QX_2}}{d_{Q_2X_2}}$$

elde edilir.

Şimdi ise $Q_3 = (q_{3i})$ noktasını göz önüne alalım. X_1, Q_3, X_2 noktaları doğrudan olduğundan

$$q_{3i} = \xi_{31}x_i + \xi_{32}y_i, \quad \xi_{31} + \xi_{32} = 1 \quad (3.93)$$

ve Q_3, Q, X_3 noktaları doğrudan olduğundan

$$q_i = \xi_{33}q_{3i} + \xi_{34}z_i, \quad \xi_{33} + \xi_{34} = 1 \quad (3.94)$$

yazılabilir. Burada

$$\xi_{31} = \frac{d_{Q_3X_2}}{d_{X_1X_2}}, \xi_{32} = \frac{d_{X_1Q_3}}{d_{X_1X_2}}, \xi_{33} = \frac{d_{QX_3}}{d_{Q_3X_3}}, \xi_{34} = \frac{d_{Q_3Q}}{d_{Q_3X_3}}$$

olup, (3.93) ifadesi (3.94) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} q_i &= \xi_{33}(\xi_{31}x_i + \xi_{32}y_i) + \xi_{34}z_i \\ &= \xi_{34}z_i + \xi_{31}\xi_{33}x_i + \xi_{32}\xi_{33}y_i \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\lambda_1 = \xi_{31}\xi_{33} = \frac{d_{Q_3X_2}}{d_{X_1X_2}} \frac{d_{QX_3}}{d_{Q_3X_3}}, \lambda_2 = \xi_{32}\xi_{33} = \frac{d_{X_1Q_3}}{d_{X_1X_2}} \frac{d_{QX_3}}{d_{Q_3X_3}}, \lambda_3 = \xi_{34} = \frac{d_{Q_3Q}}{d_{Q_3X_3}}$$

elde edilir.

Böylece elde edilen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ değerleri

$$\lambda_i = \frac{d_{QQ_i}}{d_{X_iQ_i}} = \frac{d_{X_jQ}d_{X_kQ_j}}{d_{X_jQ_j}d_{X_kX_i}} = \frac{d_{X_kQ}d_{X_kQ_i}}{d_{X_kQ_k}d_{X_iX_j}} \quad (3.95)$$

şeklinde yazılabilir. (3.87) eşitliğinde, (3.95) kullanılırsa (3.81) ifadesinin bir genelleştirmesi olarak

$$S_Q = \sum \frac{d_{QQ_i}}{d_{X_iQ_i}} S_{X_i} - T\dot{h}^2(t_4) \sum \left[\frac{d_{X_kQ}}{d_{X_kQ_k}} \right]^2 d_{Q_kX_j} d_{X_iQ_k}$$

elde edilir. Eğer X_1, X_2, X_3 noktaları aynı kapalı uzay eğrisini çizerse,

$$S_{X_i} - S_Q = T\dot{h}^2(t_4) \sum \left[\frac{d_{X_kQ}}{d_{X_kQ_k}} \right]^2 d_{Q_kX_j} d_{X_iQ_k} \quad (3.96)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.3.

R hareketli uzayında köşe noktaları X_1, X_2 ve X_3 olan bir üçgen ele alındığında, bu üçgenin köşe noktaları E' sabit uzayında aynı yörünge eğrisine sahip olacak şekilde hareket ettirilirse X_1, X_2, X_3 noktalarının tanımladığı düzleme ait sabit bir Q noktası

diğer bir kapalı uzay eğrisi çizer. Bu yörünge eğrilerinin sabit uzaydaki bir düzlem üzerine dik izdüşüm eğrilerinin kinetik enerjileri arasındaki fark, hareketli üçgenin noktalarının uzaklıklarına ve hareketin h homotetik oranına bağlıdır.



5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Sonuç olarak bu çalışmada Dathe ve Gezzi'nin tarafından düzlemsel hareketler için ifade edilen en az eylem prensibi, 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareketler için ifade edilmiştir. Bulunan sonuçlar vinç hareketi için test edilmiştir. Diğer taraftan Düldül tarafından 1-parametrelî düzlemsel homotetik hareket için verilen bir uzay eğrisinin izdüşümünün kinetik enerjisi ifade edilmiştir. İzdüşüm eğrisinin kinetik enerjisi kavramı yardımıyla Holditch Tipi teorem ifade ve ispat edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, kavramlar ileride ters homotetik hareket ve diğer hareket türleri altında incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Blaschke W. and Müller H. R. 1956. Ebene Kinematik, R. Oldenbourg, München.
- Dathe H. and Gezzi R. 2012. Characteristic directions of closed planar motions, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2-13.
- Dathe H. and Gezzi R. 2014. Addenda and Erratum to: Characteristic Directions of Closed Planar Motions, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 92(9), 731-748.
- Dathe H., Gezzi R., Kubein-Meesenburg D. and Nagerl H. 2015. Characteristic Point and Cycles in Planar Kinematics with Applications to Human Gait. *Acta Bioengineering and Biomechanics*. Vol 17, No.1.
- Düldül M., Kuruoğlu N. and Tutar A. 2003. Generalization of Steiner Formula for the homothetic motions on the planar kinematics, *Applied Mathematics and Mechanics-English Edition*, 24(8), 945-949.
- Düldül M. 2004. *Homotetik Uzay Hareketleri ve Holditch Teoremi. Doktora Tezi*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Düldül M., Kuruoğlu N. and Yüce S. 2008. The polar moment of inertia of the enveloping curve, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 38(2), 1-4.
- Euler L. 1744. Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes. *Bousquet, Lausanne & Geneva*. 32.
- Feynman R, Leighton R and Sands M. 1964. The Feynman Lectures on Physics . 3 volumes 1964, 1966. *Library of Congress Catalog Card No. 63-20717* Chapter 19 of Volume II.
- Feynman R. 1965. *The Character of Physical Law*. Modern Library. ISBN 0-679-60127-9.
- Hacısalihoglu, H.H. 1998. Dönüşümler ve Geometrilere, *Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi*, Matematik Bölümü.
- Holditch H. 1858. Geometrical theorem, *Q. J. Pure Applied Mathematics*. 2, 38
- İnan E. 2015. *Düzlemsel Kinematikte Homotetik Hareketler Altında Kapalı Yörüngeler*, Yüksek Lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
- Kuruoğlu N. and Tutar A. 1999. The Steiner formula and the Holditch theorem for the homothetic motions on the planar kinematics, *Mechanism and Machine Theory*, 34, 1-6.

- Kuruoğlu N. and Yüce S. 2007. Steiner Formula and Holditch-Type theorems for Homothetic Lorentzian Motions, *Iranian Journal of Science and Technology Transaction A: Science*, 31, 207-212.
- Kuruoğlu N. and Döldül M. 2008. Computation of polar moments of inertia with Holditch type theorem, *Applied Mathematics E-Notes*, 8, 271-278.
- Kuruoğlu N. and Yüce S. 2009. Holditch Theorem and Steiner Formula for the Planar Hyperbolic Motions, *Advances in Applied Clifford Algebras*, 19(1), 155-160.
- Maupertuis P.L.M. 1744. Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles. *Mém. As. Sc. Paris* p. 417.
- Maupertuis P.L.M. 1746 Le lois de mouvement et du repos, déduites d'un principe de métaphysique. *Mém. Ac. Berlin*, p. 267.
- Müller, H. R. 1978. Verallgemeinerung einer Formel von Steiner, *Abh. Braunsch. Wiss. Ges.* 29, 107-113.
- Steiner J. 1881. *Gessammelte Werke* II, Berlin.
- Tutar A. and İnan E. 2015. The Formula of Kinetic Energy for the Closed Planar Homothetic Direct Motions. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 3, 563-568.a
- Tutar A. and İnan E. 2015. The Formula of Kinetic Energy For The Closed Planar Homothetic Inverse Motions. *International Journal of Applied Mathematics*.28, No 3 213-222.b

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Serdar SOYLU
Doğum Yeri : Bandırma
Doğum Tarihi : 22.05.1984
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Yıldırım Beyazıt Anadolu Lisesi ANKARA
Üniversite : Kırıkkale Üniversitesi
Yüksek Lisans : Gazi Üniversitesi

Çalıştığı Kurum

Giresun Üniversitesi (2011- Halen)