

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



4-BOYUTLU YARI-RİEMANN UZAYINDA EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Hümeyra KUMSAL  
(151121107)

Anabilim Dalı : Matematik  
Programı : Geometri  
Tez Danışmanı : Prof.Dr.Mehmet BEKTAŞ

Mayıs-2017

T.C.  
FIRAT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

4-BOYUTLU YARI-RIEMANN UZAYINDA EĞRİLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Hümevra KUMSAL  
(151121107)

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19 Nisan 2017  
Tezin Savunulduğu Tarih : 4 Mayıs 2017

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ  
Diğer Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Ahmet YILDIZ  
: Doç.Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ

MAYIS-2017

## ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana her zaman yardımcı olan, bilgilerinden istifade ettiğim sayın hocam Prof. Dr. Mehmet BEKTAŞ'a üzerindeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca bana her zaman destek olan çok değerli sevgili anne ve babama teşekkür eder sevgi ve saygılarımı sunarım.

Hümeyra KUMSAL  
ELAZIĞ-2017



## İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ .....	I
İÇİNDEKİLER .....	II
ÖZET .....	III
SUMMARY .....	IV
SEMBOLLER LİSTESİ .....	V
1. GİRİŞ .....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR .....	3
2.1. Yarı-Riemann Uzaylar .....	3
2.2. Timelike Pseudo-null Eğriler .....	5
3. $\mathbb{IR}^4$ , YARI RİEMANN UZAYINDA BERTRAND EĞRİ ÇEŞİTLERİ	
3.1 $\mathbb{IR}^4$ de Bertrand Eğriler .....	9
3.2. $\mathbb{IR}^4$ de (2, 3) -Tipinde Bertrand Eğrileri .....	12
3.3 $\mathbb{IR}^4$ de (1, 3)-Tipinde Bertrand Eğrileri .....	15
3.4 $\mathbb{IR}^4$ de (1, 2)-Tipinde Bertrand Eğrileri .....	18
4. $\mathbb{IR}^4$ , YARI RİEMANN UZAYINDA HELİSLER .....	22
4.1 Helislerin Temel Denklemleri .....	22
5. AKIŞLAR .....	25
5.1. $\mathbb{IR}^4$ , Yarı-Riemann Uzayında Eğri Akışı .....	25
KAYNAKLAR .....	34

## ÖZET

### 4-BOYUTLU YARI-RIEMANN UZAYINDA EĞRİLER

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş olarak düzenlenmiştir.

İkinci bölümde  $\mathbb{R}^4$  de timelike pseudo-null eğriler hakkında bilgiler ve verilmiş ve bu çalışmada gerekli olan bazı temel tanımlar ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde,  $\mathbb{R}^4$  de timelike pseudo-null eğriler için Bertrand eğrileri ele alındı, bu eğrilerin bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde,  $\mathbb{R}^4$  de timelike pseudo-null eğriler için helis olma durumu incelendi.

Beşinci bölümde,  $\mathbb{R}^4$  de timelike pseudo-null eğrilerin akışları hakkında bilgi verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** yarı-Riemann uzayı, timelike pseudo-null eğriler, Bertrand eğriler, helisler

## SUMMARY

### CURVES IN 4-DIMENSIONAL SEMI-RIEAMANN SPACES

This study consists of the five chapters.

In section 1 introduction is given.

In Section 2, some information about the historical development of  $\mathbb{R}^4$  timelike pseudo-null space and fundamental definitions and theorems which are necessary are to be introduced in this study, respectively.

In Section 3, Bertrand curves of  $\mathbb{R}^4$  timelike pseudo null spaces and some properties of this spaces are researched.

In Section 4, Helices of  $\mathbb{R}^4$  timelike pseudo null spaces are investigated

In Section 5, flows of curves in  $\mathbb{R}^4$  semi-Rieamann space is illustrated.

**Keywords:** semi-Riemannian space, timelike pseudo null curves, Bertrand Curves, Helices

## SEMBOLLER LİSTESİ

Bu çalışma boyunca kullanılacak olan bazı semboller aşağıda verilmiştir.

$N$	:	Doğal sayılar cümlesi
$IR$	:	Reel sayılar cümlesi
$IR_2^4$	:	4 - Boyutlu yarı-Riemann Uzay
$\langle , \rangle$	:	Yarı-Riemann iç çarpım
$t$	:	teğet vektör
$n_1$	:	1.normal vektör
$n_2$	:	2.normal vektör
$n_3$	:	3.normal vektör
$(\gamma , \bar{\gamma})$	:	Bertrand eğri çifti

## 1 . GİRİŞ

Eğriler teorisi Diferansiyel ggeometrinin temel yapı taşlarından biridir. Birçok bilim dalı ile olan ilgisi nedeniyle diferansiyel geometrinin de en önemli çalışma alanlarından biridir. Diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bir eğri olduğu düşünülürse eğriler teorisinin anlamı daha da artmaktadır. Ayrıca ekonomide sayısal verilerin eğriler sayesinde yorumlandığı, kalp grafisinde eğrinin davranışı bizim için önemli ipuçlarını vermektedir. Diğer taraftan eğrilerin diferansiyel geometrik özelliklerini ve onların çeşitli matematiksel yapılarla olan ilişkilerini incelemek son derece önemlidir.

Diferansiyel geometriciler Öklid uzayında eğriler teorisinin en ince detayına kadar inerek, involut-evolut eğrileri, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri, eğrilerin daha başka karakterizasyonlarını incelemişlerdir. Son yıllarında Lorentz (Minkowski) ve Semi-Rieman manifoldlarının çalışılması diferansiyel geometriye farklı bakış açıları katmıştır. Diferansiyel geometrinin diğer bilim dallarıyla bağlantısını kuran ve uygulama alanını oluşturan sahası Semi-Riemann iç çarpım uzayıdır. Semi- Riemann uzayında iç çarpımın farklı olması geometrik yapıların değişmesine ve önemli sonuçlar ortaya çıkmasına olanak sağlamaktadır. Özellikle bu uzaylarda eğri tanımı Öklid uzayından çok daha ilginç olup üç şekilde adlandırılmıştır. Time-like, space-like ve null eğri olarak sınıflandırılan bu eğriler Öklid uzayı eğriler ile benzer ve farklı yön- lere sahiptirler. Bazı geometriciler time-like eğrileri için involut-evolut eğri- leri, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri ve karakterizasyonları çalışırken, bazı geometriciler benzer çalışmalarını space-like eğrilere uyarlamışlardır. Fakat null eğriler farklı bir yapıya sahip olduğundan bunlar için bazı karakterizasy- onları elde etmek kolay olmamıştır. Buna rağmen bazı özel durumlar altında çok özel teoriler ifade ve ispat edilmiştir.

Pseudo-null eğriler tanjant eğrileri null olan fakat kendisi null ol- mayan eğri-lerdir. Pseudo-null eğrilerin diferansiyel geometrisi üzerine matem- atikte bir çok başarılı sonuç elde edilmiştir. Pseudo-null helis, pseudo-null Mannheim eğrisi ve pseudo-null oskülatör eğrileri örnek olarak verilebilir. Bunlara ilave olarak pseudo-null eğrilerinin involüt ve evalütleri üzerine çalış- malar incelenmiştir ve Minkowski 3-uzayı içindeki pseudonull eğrilerinin in- volütünün olmadığı ispatlanmıştır.

Ayrıca singülerite teorisinin odak noktalarından pseudo-null eğrileri hakkında birçok makale vardır. Diğer taraftan [1,2,3,4,5 ] yazarları pseudo-

null eğrilerine katkı sağlamıştır. Örneğin yalnız iki eğrilik ile pseudo-null eğrilerinin Frenet eşitlikleri elde edilir ve sabit eğrilik ile tümü sınıflandırılır. Bunun yanında singüleriteye dair semi-Riemann uzay içindeki eğriler üzerinde geniş çaplı başarılı çalışmalar vardır.[ 6 ] da  $\mathbb{R}^4$  içinde pseudonull eğrilerinin null koni Gaussian yüzeyleri ve null hyper yüzeyleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır.  $\mathbb{R}^4$  ve Minkowski space time arasında bazı farklılıklar vardır. Örnek olarak timelike pseudo-null eğriler boyunca null koninin görüntüsü verilebilir.

Biz bu çalışmada  $\mathbb{R}^4$  yarı-Riemann uzayında timelike pseudo-null eğriler ve bu eğrilerin Frenet frame denklemlerini inceledik. Bu eğriler için çeşitli Bertrand eğri tiplerini inceleyerek yeni karakterizasyonlar elde ettik. Daha sonra timelike pseudo-null eğrilerin helis olma özellikleri ve akışları hakkında bazı teoremler ifade ve ispat edildi.

## 2. BÖLÜM

### 2. TEMEL KAVRAMLAR

#### 2.1.Yarı-Riemann Uzaylar

##### Tanım 2.1.1 (Simetrik bilineer form)

$V$  bir vektör uzayı olsun.

$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\forall u, v, w \in V$  için

i)  $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$  (Simetri özelliği)

ii)  $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$  (Bilineerlik özelliği)

özelliklerine sahip ise  $\langle , \rangle$  dönüşümüne  $V$  vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir [7].

##### Tanım 2.1.2

$V$  bir vektör uzayı olmak üzere  $\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümü  $V$  üzerinde simetrik bilineer form olsun.

i)  $\langle , \rangle$  nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart  $\forall v \in V$  ve bir  $u \in V$  için  $\langle u, v \rangle = 0$  iken  $u = 0$

ii)  $\langle , \rangle$  nin dejenere olması için gerek ve yeter şart  $\forall v \in V$  ve bir  $u \in V$  için  $\langle u, v \rangle = 0$  iken  $u \neq 0$  olmasıdır [9].

##### Tanım 2.1.3

$V$  vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form  $\langle , \rangle$  olsun.

i)  $\forall u \in V$  ve  $u \neq 0$  için  $\langle u, u \rangle > 0$  ise  $\langle , \rangle$  simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

ii)  $\forall u \in V$  ve  $u \neq 0$  için  $\langle u, u \rangle < 0$  ise  $\langle , \rangle$  simetrik bilineer formuna negatif tanımlı

iii)  $\forall u \in V$  ve  $u \neq 0$  için  $\langle u, u \rangle \geq 0$  ise  $\langle , \rangle$  simetrik bilineer formuna yarı pozitif tanımlı,

iv)  $\forall u \in V$  ve  $u \neq 0$  için  $\langle u, u \rangle \leq 0$  ise  $\langle , \rangle$  simetrik bilineer formuna yarı negatif tanımlı denir [9].

##### Tanım 2.1.4 (Simetrik bilineer formun indeksi)

$\langle , \rangle, V$  vektör uzayı üzerinde simetrik bilineer form ve  $W$  da  $V$  nin bir alt uzayı olsun.  $\langle , \rangle$  nin  $W$  üzerindeki kısıtlanmış  $\langle , \rangle|_W$  olmak üzere

$$\langle , \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu  $W$  alt uzayının boyutuna  $\langle , \rangle$  simetrik bilinear formun indeksi denir ve  $v$  ile gösterilir.  $v$  indeks olmak üzere  $0 \leq v \leq \text{boy}V$  dir [9].

**Tanım 2.1.5 (Metrik tensör)**

$M$  diferansiyellenebilir bir manifold olsun.  $M$  üzerinde simetrik, bilinear, non-dejenere ve sabit indeksli  $(0, 2)$  –tipinden  $\langle , \rangle$  tensör alanına metrik tensör denir [9].

**Tanım 2.1.6 (Yarı -Riemann Metrik, Yarı-Riemann Uzay)**

$\mathbb{R}^4$ , 4-boyutlu Öklid uzayı üzerinde  $X=(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ,  $Y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$  ve  $0 \leq v \leq 4$  olmak üzere

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$$

öyle ki

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = -x_1y_1 - x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$$

şeklinde tanımlanan 2 - indeksli metrik tensöre yarı-Riemann metrik, bu metriğin tanımlanması ile elde edilen  $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$  ikilisine yarı -Riemann uzay denir ve  $\mathbb{R}^4$  ile gösterilir [8, 9].

**Tanım 2.1.7( Spacelike, Timelike, Lightlike(Null) vektör)**

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  olsun. Eğer

- i)  $\langle X, X \rangle > 0$  veya  $X = 0$  ise  $X$  e spacelike vektör,
- ii)  $\langle X, X \rangle < 0$  ise  $X$  e timelike vektör,
- iii)  $\langle X, X \rangle = 0$  ve  $X \neq 0$  ise  $X$  e lightlike(null) vektör denir [9].

**Tanım 2.1.8**

$I, \mathbb{R}$  nin açık bir aralığı olmak üzere  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  şeklinde  $C^\infty$  sınıftan diferansiyellenebilir  $\gamma$  dönüşümüne bir eğri adı verilir [9].

**Tanım 2.1.9**

$\gamma \in \mathbb{R}^4$  yarı öklidyen uzayında bir eğri olsun. Böylece  $\gamma$  eğrisinin hız vektörü  $\gamma'$  olmak üzere

- i)  $\langle \gamma', \gamma' \rangle > 0$  ise  $\gamma$  spacelike eğri,
- ii)  $\langle \gamma', \gamma' \rangle < 0$  ise  $\gamma$  timelike eğri,
- iii)  $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 0$  ise  $\gamma$  null eğri

olarak adlandırılır [8, 9].

**Tanım 2.1.10**

$\mathbb{R}^4$  de bir  $x$  vektörünün normu

$$\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$$

ile tanımlanır [9].

**2.2 Timelike Pseudo-null Eğriler**

**Tanım 2.2.1**  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^4$   $s$  yay parametresi ile parametrelendirilmiş birim timelike eğri olsun. Eğer  $\gamma''(s)$  null vektör ise  $\gamma$  eğrisi timelike pseudo-null eğri olarak adlandırılır.

Böylece timelike pseudo-null eğrisi için

$$\forall s \in I \subset \mathbb{R} \text{ için } \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = -1$$

ve  $\gamma''(s) \neq 0$  olmak üzere  $\langle \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle = 0$  dır.[6]

**Tanım 2.2.2**  $s$  parametresi tarafından parametrize edilen birim hızlı timelike pseudo-null eğrisi  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  olsun.

Bu taktirde eğri  $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = -1$  ve  $\gamma''(s)$  null vektördür. Bu durumda  $\mathbb{R}^4$  nin  $E = \{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$  null çatısı vardır. Bu null çatı

$$\begin{aligned} \langle n_1(s), n_1(s) \rangle &= \langle n_2(s), n_2(s) \rangle = \langle n_1(s), n_3(s) \rangle = \langle n_2(s), n_3(s) \rangle = 0 \\ \langle n_1(s), n_2(s) \rangle &= \frac{1}{2}, \quad \langle n_3(s), n_3(s) \rangle = 1 \quad \langle t(s), t(s) \rangle = -1, \\ \langle t(s), n_1(s) \rangle &= \langle t(s), n_2(s) \rangle = \langle t(s), n_3(s) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

özelliklerini sağlar.

Eğer  $\langle n_1(s), n_2(s) \rangle = \frac{1}{2}$  olduğu göz önüne alınırsa  $E$  çatısı ile ilgili  $\gamma$  nın Frenet formülleri

$$\begin{aligned} t'(s) &= n_1(s) \\ n_1'(s) &= k_1(s) n_1(s) + k_2(s) n_3(s) \\ n_2'(s) &= \frac{1}{2} t'(s) - k_1(s) n_2(s) + k_3(s) n_3(s) \\ n_3'(s) &= -2k_3(s) n_1(s) - 2k_2(s) n_2(s) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

eşitliklerini sağlar [6]. Burada  $k_1(s) = 0$  olarak alınırsa

$$n_3(s) = \frac{\gamma^{(3)}(s)}{\|\gamma^{(3)}(s)\|}$$

olarak elde edilir. Ayrıca farklı durumlar için  $\gamma$  nın farklı null çatısı oluşturulmuştur. Eğer  $k_2(s)$  sabit ise  $\gamma''(s)$ ,  $\gamma^{(3)}(s)$ ,  $\gamma^{(4)}(s)$  vektörlerinin hepsi aynı yönlü null vektörler olurlar. Bunun anlamı ise  $\gamma''(s)$  düzgün lightlike doğrusu olduğudur.

Genelliği bozmadan  $\gamma^{(3)}(s)$  ve  $\gamma^{(4)}(s)$  ün null vektör olmadığı düşünülürse  $\langle \gamma^{(3)}(s), \gamma^{(4)}(s) \rangle \neq 0$  olduğundan  $k_2(s)$  sabit değildir. Bu taktirde

$$t(s) = \frac{d\gamma}{ds},$$

$$n_1(s) = \gamma''(s),$$

$$n_2(s) = -\frac{\langle \gamma^{(4)}, \gamma^{(4)} \rangle}{4 \langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle^2} \left( \gamma'' + 2 \frac{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle}{\langle \gamma^{(4)}, \gamma^{(4)} \rangle} \gamma^{(4)} \right) (s),$$

ve

$$n_3(s) = \frac{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)} \rangle}{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle^{\frac{3}{2}}} \left( \gamma'' + \frac{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle}{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)} \rangle} \gamma^{(3)} \right) (s)$$

olarak ifade edilir. Burada

$$k_1(s) = -\frac{\langle \gamma^{(4)}, \gamma^{(4)} \rangle}{2 \langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle^2} \left\langle \gamma^{(3)}, \left( \gamma'' + 2 \frac{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle}{\langle \gamma^{(4)}, \gamma^{(4)} \rangle} \gamma^{(4)} \right) \right\rangle (s)$$

ve

$$k_2(s) = \frac{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)} \rangle}{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle^{\frac{3}{2}}} \left\langle \gamma^{(3)}, \left( \gamma'' + \frac{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle}{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)} \rangle} \gamma^{(3)} \right) \right\rangle (s)$$

ve

$$k_3(s) = \frac{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)} \rangle}{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle^{\frac{3}{2}}} \left\langle n_2', \left( \gamma'' + \frac{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(3)} \rangle}{\langle \gamma^{(3)}, \gamma^{(4)} \rangle} \gamma^{(3)} \right) \right\rangle (s)$$

dir [6].

**Tanım 2.2.3**  $\gamma : L \subset IR \rightarrow \mathbb{IR}^4$ ,  $\bar{\gamma} : \bar{L} \subset IR \rightarrow \mathbb{IR}^4$  diferensiyellenebilir iki Frenet eğrisi verilsin.  $\forall s \in L$  için

$$\begin{aligned}\mu & : L \rightarrow \bar{L} \\ \bar{s} & = \mu(s) \quad , \quad \frac{d\mu(s)}{ds} \neq 0\end{aligned}$$

diferensiyellenebilir regüler dönüşümü mevcuttur. Öyleki  $(\gamma, \bar{\gamma})$  eğri çiftinin  $\mu$  altında sırasıyla  $\gamma(s)$  ve  $\bar{\gamma}(\bar{s}) = \bar{\gamma}(\mu(s))$  noktalarında normalleri lineer bağımlı ise  $(\gamma, \bar{\gamma})$  eğri çifti Bertrand eğri çifti olarak adlandırılır [10].

**Tanım 2.2.4**

$\gamma : L \subset IR \rightarrow \mathbb{IR}^4$  ,  $\bar{\gamma} : \bar{L} \subset IR \rightarrow \mathbb{IR}^4$  diferensiyellenebilir iki Frenet eğrisi ve  $\mu : L \rightarrow \bar{L}$  diferensiyellenebilir regüler bir dönüşüm olsun öyleki  $\forall s \in L$  için  $\gamma$  nin  $\gamma(s)$  noktasına  $\bar{\gamma}$  nin bir  $\bar{\gamma}(\bar{s}) = \bar{\gamma}(\mu(s))$  noktası karşılık getirsin. Eğer her  $\forall s \in L$  için,  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(s)$  noktasındaki (1.3) normal düzlemi ile  $\bar{\gamma}$  nin bu noktaya karşılık gelen  $\bar{\gamma}(\bar{s})$  noktasındaki (1.3) normal düzlemi çakışıkça  $\gamma$  eğrisine bir (1.3) – Bertrand eğrisi ve  $\bar{\gamma}$  eğrisine de  $\gamma$  eğrisinin (1.3) – Bertrand eşlenik eğrisi denir.

Bu çalışma boyunca (1.3) –tipinden Bertrand eğrisi ile söylenmek istenilen (1.3) – Bertrand eşlenik eğri çiftine sahip eğriler olacaktır.

Eğer  $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$ ;  $\gamma$  nin Frenet çatısı  $\gamma$  bir (1.3)- Bertrand eğrisi ise bu taktirde

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + \alpha(s) n_1(s) + \beta(s) n_3(s) \tag{2.2.3}$$

şeklindedir. Burada  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur [10].

**Tanım 2.2.5**  $\gamma : L \subset IR \rightarrow \mathbb{IR}^4$  ,  $\bar{\gamma} : \bar{L} \subset IR \rightarrow \mathbb{IR}^4$  diferensiyellenebilir iki Frenet eğrisi ve  $\mu : L \rightarrow \bar{L}$  diferensiyellenebilir regüler bir dönüşüm olsun öyleki  $\forall s \in L$  için  $\gamma$  nin  $\gamma(s)$  noktasına  $\bar{\gamma}$  nin bir  $\bar{\gamma}(\bar{s}) = \bar{\gamma}(\mu(s))$  noktası karşılık getirsin. Eğer her  $\forall s \in L$  için,  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(s)$  noktasındaki (2.3) normal düzlemi ile  $\bar{\gamma}$  nin bu noktaya karşılık gelen  $\bar{\gamma}(\bar{s})$  noktasındaki (2.3) normal düzlemi çakışıkça  $\gamma$  eğrisine bir (2.3) – Bertrand eğrisi ve  $\bar{\gamma}$  eğrisine de  $\gamma$  eğrisinin (2.3) – Bertrand eşlenik eğrisi denir.

Bu çalışma boyunca (2.3) –tipinden Bertrand eğrisi ile söylenmek istenilen (2.3) – Bertrand eşlenik eğri çiftine sahip eğriler olacaktır.

Eğer  $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$ ;  $\gamma$  nin Frenet çatısı  $\gamma$  bir (2.3) – tipinden Bertrand eğrisi ise bu taktirde

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + \alpha(s) n_2(s) + \beta(s) n_3(s) \tag{2.2.4}$$

yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur [10].

**Tanım 2.2.6**  $\gamma : L \subset IR \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $\bar{\gamma} : \bar{L} \subset IR \rightarrow \mathbb{R}^4$  diferensiyellenebilir iki Frenet eğrisi ve  $\mu : L \rightarrow \bar{L}$  diferensiyellenebilir regüler bir dönüşüm olsun öyleki  $\forall s \in L$  için  $\gamma$  nin  $\gamma(s)$  noktasına  $\bar{\gamma}$  nin bir  $\bar{\gamma}(\bar{s}) = \bar{\gamma}(\mu(s))$  noktası karşılık getirsin. Eğer her  $\forall s \in L$  için,  $\gamma$  eğrisinin  $\gamma(s)$  noktasındaki (1.2) normal düzlemi ile  $\bar{\gamma}$  nin bu noktaya karşılık gelen  $\bar{\gamma}(\bar{s})$  noktasındaki (1.2) normal düzlemi çakışıkça  $\gamma$  eğrisine bir (1.2) – Bertrand eğrisi ve  $\bar{\gamma}$  eğrisine de  $\gamma$  eğrisinin (1.2) – Bertrand eşlenik eğrisi denir.

Bu çalışma boyunca (1.2) – tipinden Bertrand eğrisi ile söylenmek istenilen (1.2) – Bertrand eşlenik eğri çiftine sahip eğriler olacaktır.

Eğer  $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$ ;  $\gamma$  nin Frenet çatısı  $\gamma$  bir (1.2)-tipinden Bertrand eğrisi ise bu taktirde

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + \alpha(s)n_1(s) + \beta(s)n_2(s) \quad (2.2.5)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur [10].

**Tanım 2.2.7**

$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^4$  ye timelike pseudo-null eğri olsun. Bu eğrinin teğet doğrultusu sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyor ise  $\gamma$  ya bir helis (genel helis) denir.

$\gamma$  nin bir helis olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \text{sabit}$$

olmasıdır. Burada  $k_1(s)$ ,  $\gamma$  nin birinci eğriliği,  $k_2(s)$  ikinci eğriliğidir [1].

### 3. $\mathbb{R}^4$ YARI-RIEMANN UZAYINDA BERTRAND EĞRİ ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde  $\mathbb{R}^4$  yarı-Riemann uzayında Bertrand eğri tipleri incelenmiştir.

#### 3.1 $\mathbb{R}^4$ de Bertrand Eğriler

**Teorem 3.1.1**  $\gamma : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}^4$  eğrisi sabit olmayan  $k_1(s)$  ve  $k_2(s)$  eğriliklerine sahip olan timelike pseudo-null eğri olsun.  $\gamma$  timelike pseudo null eğrisi Bertrand eğri çiftine sahip değildir.

**İspat :** Kabul edelim ki  $\gamma$  timelike pseudo-null Bertrand eğri çiftine sahip ve  $\gamma$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{\gamma} : \bar{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{R}^4$  olsun.  $\mu : \mathbb{L} \rightarrow \bar{\mathbb{L}}$   $\bar{s} = \mu(s) \frac{d\mu(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm  $\gamma$  ve  $\bar{\gamma}$  nin yay parametresi sırası ile  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $(\gamma, \bar{\gamma})$  Bertrand eğri çifti için

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + A(s)n_1(s) \quad (3.1.1)$$

yazılabilir.  $A(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur. (3.1.1) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\mu'(s) \frac{d\bar{\gamma}(\bar{s})}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\mu(s)} = \gamma'(s) + A'(s)n_1(s) + A(s)n_1'(s)$$

veya Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\mu'(s) \bar{t}(\mu(s)) = t(s) + A'(s)n_1(s) + A(s)(k_1(s)n_1(s) + k_2(s)n_3(s))$$

veya düzenlenirse

$$\mu'(s) \bar{t}(\mu(s)) = t(s) + n_1(s) \left( A'(s) + A(s)k_1(s) \right) + n_3(s) A(s)k_2(s) \quad (3.1.2)$$

elde edilir.  $\gamma$  bir Bertrand eğrisi olduğundan

$$\bar{n}_1(\mu(s)) = d n_1(s) \quad (3.1.3)$$

dir. Burada  $d \neq 0$  bir sabittir. (3.1.2) ve (3.1.3) ifadeleri iç çarpıma tabi tutulursa

$$0 = \left\langle \mu'(s) \bar{t}(\mu(s)), \bar{n}_1(\mu(s)) \right\rangle$$

olup

$$\langle t(s), n_1(s) \rangle = 0, \langle n_1(s), n_1(s) \rangle = 0, \langle n_3(s), n_1(s) \rangle = 0$$

ifadeleri kullanılırsa  $0 = 0$  bulunur. O halde  $\gamma$  ve  $\bar{\gamma}$  lineer bağımsız olduğu sonucuna varılır. Bu durumda kabulümüz yanlış olup; bu da  $\gamma$  nin bir Bertrand eğri çiftine sahip olmadığı anlamına gelir.

**Teorem 3.1.2**  $\gamma : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{IR}^4$  eğrisi sıfırdan farklı  $k_1(s), k_2(s), k_3(s)$  eğriliklerine sahip olan timelike pseudo null eğri olsun.  $\gamma$  timeklike pseudo null eğrisi Bertrand eğri çiftine sahip değildir.

**İspat :** Kabul edelim ki  $\gamma$  timeklike pseudo-null eğrisi Bertrand eğri çiftine sahip ve  $\gamma$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{\gamma} : \bar{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{IR}^4$  olsun.  $\mu : \mathbb{L} \rightarrow \bar{\mathbb{L}}$   $\bar{s} = \mu(s)$   $\frac{d\mu(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm  $\gamma$  ve  $\bar{\gamma}$  nin yay parametresi sırası ile  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $(\gamma, \bar{\gamma})$  Bertrand eğri çifti için

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + A(s)n_1(s) \quad (3.1.4)$$

yazılabilir. Burada  $A(s); L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur. (3.1.4) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınır

$$\mu'(s) \frac{d\bar{\gamma}(\bar{s})}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\mu(s)} = \gamma'(s) + A'(s)n_1(s) + A(s)n_1'(s)$$

ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\mu'(s) \bar{t}(\mu(s)) = t(s) + A'(s)n_1(s) + A(s)(k_1(s)n_1(s) + k_2(s)n_3(s))$$

veya

$$\mu'(s) \bar{t}(\mu(s)) = t(s) + n_1(s) \left( A'(s) + A(s)k_1(s) \right) + n_3(s) A(s)k_2(s) \quad (3.1.5)$$

(3.1.5) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{\mu''(s)}{\mu'(s)} t(s) + \frac{\mu''(s)}{\mu'(s)} (A'(s) + A(s) k_1(s)) n_1(s) \\
& + \frac{\mu''(s)}{\mu'(s)} A(s) k_2(s) n_3(s) \\
& + (\mu'(s))^2 \overline{n_1}(\mu(s)) \\
= & n_1(s) + (A'(s) + A(s) k_1(s))' n_1(s) \\
& + (A'(s) + A(s) k_1(s)) (k_1(s) n_1(s) + k_2(s) n_3(s)) \\
& + (A(s) k_2(s))' n_3(s) \\
& + A(s) k_2(s) (-2k_3(s) n_1(s) - 2k_2(s) n_2(s))
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

veya düzenlenirse

$$\begin{aligned}
(\mu'(s))^2 \overline{n_1}(\mu(s)) = & -\frac{\mu''(s)}{\mu'(s)} t(s) \\
& -\frac{\mu''(s)}{\mu'(s)} (A'(s) + A(s) k_1(s)) n_1(s) \\
& -\frac{\mu''(s)}{\mu'(s)} A(s) k_2(s) n_3(s) \\
& + (1 + (A'(s) + A(s) k_1(s))' n_1(s) \\
& + (A'(s) k_1(s) + A(s) k_1^2(s) - 2A(s) k_2(s) k_3(s)) n_1(s) \\
& - 2k_2^2(s) A(s) n_2(s) \\
& + (A'(s) k_2(s) + A(s) k_1(s) k_2(s) + (A(s) k_2(s))') n_3(s)
\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

bulunur.  $\gamma$  bir Bertrand eğrisi olduğundan  $n_1(s)$  ve  $\overline{n_1}(\bar{s})$  lineer bağımlıdır. Böylece (3.1.7) ifadesinden

$$-2k_2^2(s) A(s) = 0 \tag{3.1.8}$$

elde edilir.  $k_2(s) \neq 0$  olduğundan  $A(s) = 0$  sonucuna varılır. Bu durumda kabulümüz yanlış olup bu  $\gamma$  nin bir Bertrand eğri çiftine sahip olmadığı anlamına gelir.

### 3.2 $\mathbb{R}^4$ de (2, 3)-Tipinde Bertrand Eğrileri

**Teorem 3.2.1**  $\gamma: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}^4$  timelike pseudo-null eğri olsun.  $\gamma$ , (2, 3)-tipinde Bertrand eğri ise

$$k_1(s) = -\frac{\lambda}{2} + (\ln F(s))'$$

ve

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$$

ifadesi mevcuttur. Burada  $\lambda$  sabit ve  $F(s)$ , de  $C^\infty$  sınıftan fonksiyondur.

**İspat :** Kabul edelim ki  $\gamma, \mathbb{R}^4$  de (2, 3) –tipinde Bertrand eğrisi ve  $\gamma$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{\gamma}: \bar{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{R}_2^4$  olsun.  $\mu: \mathbb{L} \rightarrow \bar{\mathbb{L}}$   $\bar{s} = \mu(s) \frac{d\mu(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm  $\gamma$  ve  $\bar{\gamma}$  nin yay parametresi sırası ile  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $\gamma$ , (2, 3) – tipinde Bertrand eğri olduğundan

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + \alpha(s)n_2(s) + \beta(s)n_3(s) \quad (3.2.1)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur. (3.2.1) ifadesinin  $s$  ye göre türevi almırsa

$$\mu'(s) \frac{d\bar{\gamma}(\bar{s})}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\mu(s)} = \gamma'(s) + \alpha'(s)n_2(s) + \alpha(s)n_2'(s) + \beta'(s)n_3(s) + \beta(s)n_3'(s)$$

veya Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu'(s) \bar{t}(\mu(s)) &= \left(1 + \frac{\alpha(s)}{2}\right) t(s) \\ &\quad - 2k_3(s) \beta(s) n_1(s) \\ &\quad + (\alpha'(s) - \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_2(s)) n_2(s) \\ &\quad + (\alpha(s)k_3(s) + \beta'(s)) n_3(s) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

bulunur.  $\gamma, \mathbb{R}^4$  de (2, 3) –tipinde Bertrand eğrisi olduğundan  $n_2(s)$  ve  $n_3(s)$  in gerdiği düzlem ile  $\bar{n}_2(\bar{s})$  ve  $\bar{n}_3(\bar{s})$  in gerdiği düzlem çakışıkıtır.

O halde

$$\bar{n}_2(\mu(s)) = A(s)n_2(s) + B(s)n_3(s) \quad (3.2.3)$$

ve

$$\bar{n}_3(\mu(s)) = C(s)n_2(s) + D(s)n_3(s) \quad (3.2.4)$$

yazılabilir. Burada  $A(s), B(s), C(s), D(s); L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.2.2) ile (3.2.3) ve (3.2.2) ile (3.2.4) iç çarpıma tabi tutulursa

$$A(s)(-k_3(s)\beta(s)) + B(s)(\alpha(s)k_3(s) + \beta'(s)) = 0 \quad (3.2.5)$$

ve

$$C(s)(-k_3(s)\beta(s)) + D(s)(\alpha(s)k_3(s) + \beta'(s)) = 0 \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Buradan

$$-k_3(s)\beta(s) = 0 \quad (3.2.7)$$

ve

$$\alpha(s)k_3(s) + \beta'(s) = 0 \quad (3.2.8)$$

bulunur. (3.2.7) ve (3.2.8) birlikte düşünülürse  $\beta(s)$  in sabit fonksiyon ve  $k_3(s) = 0$  olduğu durumda çözüm sağlanabilir. Bu durumda  $\alpha(s)$  fonksiyonu ya sabit bir fonksiyon yada sabit olmayan bir fonksiyon veya sıfırdır. Biz bu çalışmamızda  $\alpha(s)$  fonksiyonunu sabit bir fonksiyon olarak alacağız (Diğer durumların ispatı aşağıda yapılacak ispat yöntemine benzer yöntemle yapılabilir.)

O halde  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  sabit fonksiyonlardır. Böylece (3.2.2) den

$$\begin{aligned} \mu'(s)\bar{t}(\mu(s)) &= \left(1 + \frac{\alpha(s)}{2}\right)t(s) \\ &+ (\alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_2(s))n_2(s) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

elde edilir. Ayrıca (3.2.9) ifadesinden hareketle

$$\bar{t}(\mu(s)) = E(s)t(s) + F(s)n_2(s) \quad (3.2.10)$$

yazılabilir. Burada  $E(s)$  ve  $F(s); L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. Bu son eşitlikte

$$E(s) = \frac{1}{\mu'(s)} \left(1 + \frac{\alpha(s)}{2}\right) \quad (3.2.11)$$

ve

$$F(s) = \frac{1}{\mu'(s)} (-\alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_2(s)) \quad (3.2.12)$$

olarak kabul edilmiştir. (3.2.10) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \mu'(s)\bar{n}_1(\mu(s)) &= \left(\frac{dE(s)}{ds} + \frac{F(s)}{2}\right)t(s) \\ &+ E(s)n_1(s) \\ &+ \left(\frac{dF(s)}{ds} - F(s)k_1(s)\right)n_2(s) \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

elde edilir. (3.2.9) ifadesinin normu alınırsa

$$\mu'(s) = \sqrt{\left| - \left( 1 + \frac{\alpha(s)}{2} \right) \right|} \quad (3.2.14)$$

elde edilir.  $\mu'(s) \neq 0$  olduğundan

$$\left( 1 + \frac{\alpha(s)}{2} \right)^2 \neq 0 \quad (3.2.15)$$

ve

$$\alpha(s) \neq -2 \quad (3.2.17)$$

elde edilir.  $\mu'(s)$ ,  $\alpha(s)$  sabit olduğundan

$$\frac{dE(s)}{d(s)} = 0 \quad (3.2.17)$$

bulunur. (3.2.13) ifadesi

$$\mu'(s) \overline{n_1}(\mu(s)) = \frac{F(s)}{2} t(s) + E(s) n_1(s) + \left( \frac{dF(s)}{ds} - F(s) k_1(s) \right) n_2(s) \quad (3.2.18)$$

şeklinde yazılabilir.(3.2.18) ifadesinin normu alınırsa

$$0 = \sqrt{-\frac{F(s)}{2} + E(s) \left( \frac{dF(s)}{ds} - F(s) k_1(s) \right)}$$

olup buradan  $E(s) = \lambda = \text{sabit}$  alınırsa

$$k_1(s) = -\frac{\lambda}{2} + (\ln F(s))'$$

ve  $F(s) \neq 0$  olduğundan

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} \neq \text{sabit}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

### 3.3 $\mathbb{R}^4$ de $(1, 3)$ –Tipinde Bertrand Eğrileri

**Teorem 3.3.1**  $\gamma : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}^4$  timelike pseudo-null eğri olsun.  $\gamma$   $(1, 3)$  –tipinde Bertrand eğri ise

$$(i) \quad \alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_3(s) \neq 0$$

ve

$$(ii) \quad \Psi(\alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_3(s)) = 1$$

dir. Burada  $\Psi$  ve  $\beta$  keyfi sabitlerdir.

**İspat :** Kabul edelim ki  $\gamma, \mathbb{R}^4$ de  $(1, 3)$  –tipinde Bertrand eğrisi ve  $\gamma$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{\gamma} : \bar{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{R}^4$  olsun.  $\mu : \mathbb{L} \rightarrow \bar{\mathbb{L}} \quad \bar{s} = \mu(s) \frac{d\mu(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm  $\gamma$  ve  $\bar{\gamma}$  nin yay parametresi sırası ile  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $\gamma, (1, 3)$  – tipinde Bertrand eğri olduğundan

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + \alpha(s)n_1(s) + \beta(s)n_3(s) \quad (3.3.1)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur. (3.3.1) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\mu'(s) \frac{d\bar{\gamma}(s)}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\mu(s)} = \gamma'(s) + \alpha'(s)n_1(s) + \alpha(s)n_1'(s) + \beta'(s)n_3(s) + \beta(s)n_3'(s)$$

ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu'(s) \bar{t}(\mu(s)) &= t(s) \\ &+ (\alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_3(s))n_1(s) \\ &- 2\beta(s)k_2(s)n_2(s) + (\alpha(s)k_2(s) + \beta'(s))n_3(s) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

bulunur.  $\gamma, \mathbb{R}^4$  de  $(1, 3)$  –tipinde Bertrand eğrisi olduğundan  $n_1(s)$  ve  $n_3(s)$  in gerdiği düzlem ile  $\bar{n}_1(\bar{s})$  ve  $\bar{n}_3(\bar{s})$  in gerdiği düzlem çakışiktır.

O halde

$$\bar{n}_1(\mu(s)) = A(s)n_1(s) + B(s)n_3(s) \quad (3.3.3)$$

ve

$$\bar{n}_3(\mu(s)) = C(s)n_1(s) + D(s)n_3(s) \quad (3.3.4)$$

yazılabilir. Burada  $A(s), B(s), C(s), D(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.3.2) ile (3.3.3) ve (3.3.2) ile (3.3.4) iç çarpıma tabi tutulursa

$$-A(s)\beta(s)k_2(s) + B(s)(\alpha(s)k_2(s) + \beta'(s)) = 0 \quad (3.3.5)$$

ve

$$-C(s) \beta(s) k_2(s) + D(s) (\alpha(s) k_2(s) + \beta'(s)) = 0 \quad (3.3.6)$$

elde edilir. Buradan  $\beta(s) k_2(s) = 0$  ve  $\alpha(s) k_2(s) + \beta'(s) = 0$  olmalıdır. Bu iki denklemin çözümü

$$\beta'(s) = 0 \quad \text{ve} \quad k_2(s) = 0 \quad (3.3.7)$$

durumunda sağlanır. Bu da  $\beta(s)$  nın sabit fonksiyon olduğunu gösterir. Bu durumda  $\alpha(s)$  fonksiyonu ya sabit bir fonksiyon yada sabit olmayan bir fonksiyon veya sıfırdır. Biz bu çalışmamızda  $\alpha(s)$  fonksiyonunu sabit bir fonksiyon olmadığını kabul edeceğiz. (Diğer durumların ispatı aşağıda yapılacak ispat yöntemine benzer yöntemle yapılabilir.) (3.3.2) de (3.3.7) yerine yazılırsa

$$\mu'(s) \bar{t}(\mu(s)) = t(s) + (\alpha'(s) + \alpha(s) k_1(s) - 2\beta(s) k_3(s)) n_1(s) \quad (3.3.8)$$

bulunur. (3.3.8) den hareketle

$$\bar{t}(\mu(s)) = E(s) t(s) + F(s) n_1(s) \quad (3.3.9)$$

yazılabilir. Burada  $E(s)$  ve  $F(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.3.9) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\mu'(s) \bar{n}_1(\mu(s)) = \frac{dE(s)}{ds} t(s) + \left( E(s) + \frac{dF(s)}{ds} + F(s) k_1(s) \right) n_1(s) \quad (3.3.10)$$

elde edilir.  $\bar{n}_1(\bar{s})$ ;  $n_1(s)$  ve  $n_3(s)$  ile lineer bağımlı olduğundan

$$\frac{dE(s)}{ds} = 0 \quad (3.3.11)$$

dır. Yani  $E(s)$  sabit fonksiyondur.  $E(s)$  ye  $E_0(s)$  ve  $F(s)$  ye de  $F_0(s)$  denirse (3.3.9) dan

$$\bar{t}(\mu(s)) = E_0(s) t(s) + F_0(s) n_1(s) \quad (3.3.12)$$

elde edilir. (3.3.8) ve (3.3.12) birlikte düşünülürse

$$E_0(s) = \frac{1}{\mu'(s)} \quad (3.3.13)$$

ve

$$F_0(s) = \frac{\alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_3(s)}{\mu'(s)} \quad (3.3.14)$$

bulunur.  $\gamma$  bir Bertrand eğri ve  $\bar{n}_1(\bar{s})$ ,  $n_1(s)$  ile lineer bağımlı olduğundan  $F_0(s) \neq 0$  olma durumu göz önüne alınacaktır. (3.3.14) den

$$\alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_3(s) \neq 0 \quad (3.3.15)$$

dır. (3.3.13) ve (3.3.14) düzenlenirse

$$\mu'(s) = \frac{1}{E_0(s)} \quad \mu'(s) = \frac{\alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_3(s)}{F_0(s)} \quad (3.3.16)$$

ve

$$F_0(s) = E_0(s) (\alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_3(s))$$

olduğundan  $E_0(s) (F_0(s))^{-1} = \Psi$  denirse (3.3.16) dan

$$\Psi (\alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s) - 2\beta(s)k_3(s)) = 1 \quad (3.3.17)$$

elde edilir.

### 3.4 $\mathbb{R}^4$ de (1, 2) Tipinde Bertrand Eğrileri

**Teorem 3.4.1**  $\gamma : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}^4$   $k_1(s) = 0$  eğrilikli timelike pseudo-null eğri olsun. Eğer  $\gamma$ , (1, 2)-tipinde Bertrand eğri ise

$$\frac{k_2(s)}{k_3(s)} \neq \text{sabit} \quad (3.4.1)$$

dir.

**İspat :**  $\gamma, \mathbb{R}^4$  de (1, 2) –tipinde Bertrand eğrisi ve  $\gamma$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{\gamma} : \bar{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{R}^4$  olsun.  $\mu : \mathbb{L} \rightarrow \bar{\mathbb{L}}$   $\bar{s} = \mu(s) \frac{d\mu(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüşüm  $\gamma$  ve  $\bar{\gamma}$  nin yay parametresi sırası ile  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $\gamma$ , (1, 2) tipinde Bertrand eğri olduğundan

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + \alpha(s) n_1(s) + \beta(s) n_2(s) \quad (3.4.2)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur. (3.4.2) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\mu'(s) \frac{d\bar{\gamma}(s)}{d\bar{s}} \Big|_{\bar{s}=\mu(s)} = \gamma'(s) + \alpha'(s) n_1(s) + \alpha(s) n_1'(s) + \beta'(s) n_2(s) + \beta(s) n_2'(s)$$

elde edilir. Burada Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \mu'(s) \bar{t}(\mu(s)) &= \left(1 + \frac{\beta(s)}{2}\right) t(s) \\ &+ \alpha'(s) n_1(s) \\ &+ \beta'(s) n_2(s) \\ &+ (\alpha(s) k_2(s) \beta(s) k_3(s)) n_3(s) \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

bulunur.  $\gamma, \mathbb{R}^4$  de (1, 2) –tipinde eğrisi Bertrand Eğrisi olduğundan  $n_1(s)$  ve  $n_2(s)$  in gerdiği düzlem ile  $\bar{n}_1(\bar{s})$  ve  $\bar{n}_2(\bar{s})$  in gerdiği düzlem çakışiktır.

O halde

$$\bar{n}_1(\mu(s)) = A(s) n_1(s) + B(s) n_2(s) \quad (3.4.4)$$

ve

$$\bar{n}_2(\mu(s)) = C(s) n_1(s) + D(s) n_2(s) \quad (3.4.5)$$

yazılabilir. Burada  $A(s), B(s), C(s), D(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.4.3) ile (3.4.4) ve (3.4.3) ile (3.4.5) iç çarpıma tabi tutulursa

$$0 = \frac{A(s)}{2}\beta'(s) + \frac{B(s)}{2}\alpha'(s) \quad (3.4.6)$$

$$0 = \frac{C(s)}{2}\beta'(s) + \frac{D(s)}{2}\alpha'(s) \quad (3.4.7)$$

elde edilir. Buradan

$$\beta'(s) = 0 \quad , \quad \alpha'(s) = 0 \quad (3.4.8)$$

Bu da  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$  nın sabit fonksiyon olduğunu gösterir. (3.4.3) de (3.4.8) yerine yazılırsa

$$\mu'(s)\bar{t}(\mu(s)) = \left(1 + \frac{\beta(s)}{2}\right)t(s) + (\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))n_3(s) \quad (3.4.9)$$

bulunur. Eğer

$$E(s) = \frac{1}{\mu'(s)} \left(1 + \frac{\beta(s)}{2}\right) \quad (3.4.10)$$

ve

$$F(s) = \frac{1}{\mu'(s)} ((\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))n_3(s)) \quad (3.4.11)$$

denirse (3.4.9) ifadesi yeniden

$$\bar{t}(\mu(s)) = E(s)t(s) + F(s)n_3(s) \quad (3.4.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $E(s)$  ve  $F(s)$ ,  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.4.12) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınrsa

$$\begin{aligned} \mu'(s)\bar{n}_1(\mu(s)) &= \frac{dE(s)}{ds}t(s) + (E(s) - 2F(s)k_3(s))n_1(s) \\ &\quad - 2F(s)k_2(s)n_2(s) + \frac{dF(s)}{ds}n_3(s) \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

elde edilir.  $\bar{n}_1(\bar{s})$ ;  $n_1(s)$  ve  $n_2(s)$  ile lineer bağımlı olduğundan

$$\frac{dE(s)}{ds} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{dF(s)}{ds} = 0 \quad (3.4.14)$$

dır. Yani  $E(s)$  ve  $F(s)$  sabit fonksiyonlardır.  $E(s)$  ye  $E_0(s)$  ve  $F(s)$  ye de  $F_0(s)$  denirse (3.4.12) den

$$\bar{t}(\mu(s)) = E_0(s)t(s) + F_0(s)n_3(s) \quad (3.4.15)$$

elde edilir. (3.4.9) ve (3.4.15) birlikte düşünülürse

$$E_0(s) = \frac{1}{\mu'(s)} \left( 1 + \frac{\beta(s)}{2} \right) \quad (3.4.16)$$

$$F_0(s) = \frac{1}{\mu'(s)} ((\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s))n_3(s)) \quad (3.4.17)$$

$\gamma$  ve  $\bar{\gamma}$  nin Frenet vektörleri farklı olduğundan  $F_0(s) \neq 0$  dir. O halde (3.4.17) den

$$\alpha(s)k_2(s) + \beta(s)k_3(s) \neq 0 \quad (3.4.18)$$

olup

$$\frac{k_2(s)}{k_3(s)} \neq \text{sabittir} \quad (3.4.19)$$

bulunur.

**Teorem 3.4.2**  $\gamma: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{IR}^4$   $k_1(s) \neq 0$  eğrilikli timelike pseudo-null eğri olsun. Eğer  $\gamma$ ,  $(1, 2)$  – tipinde Bertrand eğri ve bunun Bertrand eğri çifti  $\bar{\gamma}$  olsun. Bu taktirde  $\bar{\gamma}$

$$\bar{\gamma}(s) = \gamma(s) + e^{-\int k_1(s)ds+c_1}n_1(s) + e^{\int k_1(s)ds+c_2}n_2(s) \quad (3.4.21)$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  dir.

**İspat :**  $\gamma, \mathbb{IR}^4$  de  $(1, 2)$  –tipinde Bertrand eğrisi ve  $\gamma$  nin Bertrand eğri çifti  $\bar{\gamma}: \bar{\mathbb{L}} \rightarrow \mathbb{IR}^4$  olsun.  $\mu: \mathbb{L} \rightarrow \bar{\mathbb{L}}$   $\bar{s} = \mu(s)$   $\frac{d\mu(s)}{ds} \neq 0$  regüler bir dönüştürme  $\gamma$  ve  $\bar{\gamma}$  nin yay parametresi sırası ile  $s$  ve  $\bar{s}$  olmak üzere  $\gamma$ ,  $(1, 2)$  -tipinde Bertrand eğri olduğundan

$$\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) + \alpha(s)n_1(s) + \beta(s)n_2(s) \quad (3.4.22)$$

yazılabilir. Burada  $\alpha(s)$  ve  $\beta(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyondur. Bu ifadenin  $s$  ye göre türevi alınır, Frenet denklemleri kullanılır ve  $\gamma$ ,  $(1, 2)$ -tipinde Bertrand eğrisi olduğu göz önüne alınırsa

$$0 = \frac{A(s)}{2} (\beta'(s) - \beta(s)k_1(s)) + \frac{B(s)}{2} (\alpha'(s) + \alpha(s)k_1(s)) \quad (3.4.23)$$

ve

$$0 = \frac{C(s)}{2} (\beta'(s) - \beta(s) k_1(s)) + \frac{D(s)}{2} (\alpha'(s) + \alpha(s) k_1(s)) \quad (3.4.24)$$

elde edilir. Burada  $A(s), B(s), C(s), D(s)$ ;  $L$  üzerinde  $C^\infty$  fonksiyonlardır. (3.4.23) ve (3.4.24) ifadelerinin geçerli olması için

$$\beta'(s) - \beta(s) k_1(s) = 0 \quad (3.4.25)$$

ve

$$\alpha'(s) + \alpha(s) k_1(s) = 0 \quad (3.4.26)$$

olmalıdır. Bu diferansiyel denklemler çözümlürse

$$\beta(s) = e^{\int k_1(s) ds + c_1} \quad (3.4.27)$$

ve

$$\alpha(s) = e^{-\int k_1(s) ds + c_2} \quad (3.4.28)$$

bulunur. (3.4.27) ve (3.4.28) ifadeleri (3.4.22) de yerine yazılırsa (3.4.21) bulunur.

## 4.BÖLÜM

### $\mathbb{R}^4$ YARI -RİEMANN UZAYINDA HELİSLER

$\gamma(s)$  birim hızlı timelike pseudo-null eğrisi olsun.  $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$ ,  $\gamma(s)$  boyunca Frenet çatısı ve  $\gamma$  timelike pseudo-null eğrisi  $k(s), k_2(s), k_3(s)$  eğriliklerine sahip olsun. Bu bölümde  $\gamma(s)$  timelike pseudo-null eğrisi için bir karakterizasyon elde edilecektir.

#### 4.1 $\mathbb{R}^4$ de Helislerin Temel Denklemleri

$\gamma(s)$ ,  $\mathbb{R}^4$  de birim hızlı timelike pseudo-null eğri ve  $U$ ;  $\mathbb{R}^4$  de sabit vektör alanı olsun.  $\forall s \in I \subset \mathbb{R}^4$  için  $U$  vektörü  $\{t(s), n_1(s), n_2(s), n_3(s)\}$  ortanormal bazının lineer kombinasyonu olarak ifade edilir.  $a_i$  ler diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$U = a_1(s)t(s) + a_2(s)n_1(s) + a_3(s)n_2(s) + a_4(s)n_3(s) \quad (4.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. (4.1.1) ve (2.1.5) den

$$\begin{aligned} \langle U, t(s) \rangle &= -a_1(s), \quad \langle U, n_1(s) \rangle = \frac{1}{2}a_3(s), \\ \langle U, n_2(s) \rangle &= \frac{1}{2}a_2(s), \quad \langle U, n_3(s) \rangle = a_4(s) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

ifadeleri yazılabilir. (4.1.1) ifadesinin  $s$  ye göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a_1'(s)t(s) + a_2'(s)n_1(s) + a_3'(s)n_2(s) + a_4'(s)n_3(s) + a_1(s)t'(s) \\ &\quad + a_2(s)n_1'(s) + a_3(s)n_2'(s) + a_4(s)n_3'(s) \end{aligned}$$

olur. Burada (2.2.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= a_1'(s)t(s) + a_2'(s)n_1(s) + a_3'(s)n_2(s) + a_4'(s)n_3(s) + a_1(s)n_1(s) \\ &\quad + a_2(s)(k_1(s)n_1(s) + k_3(s)n_3(s)) \\ &\quad + a_3(s)\left(\frac{t(s)}{2} - k_1(s)n_2(s) + k_3(s)n_3(s)\right) \\ &\quad + a_4(s)(-2k_3(s)n_1(s) - 2k_2(s)n_2(s)) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} 0 = & \left( a_1'(s) + \frac{a_3(s)}{2} \right) t + \\ & (a_2'(s) + a_1(s) + a_2(s) k_1(s) - 2a_4(s) k_3(s)) n_1(s) \\ & + (a_3'(s) - a_3(s) k_1(s) - 2a_4(s) k_2(s)) n_2(s) \\ & + (a_4'(s) + a_2(s) k_2(s) + a_3(s) k_3(s)) n_3(s) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

elde edilir. Böylece

$$a_1'(s) + \frac{a_3(s)}{2} = 0, \quad (4.1.4)$$

$$a_2'(s) + a_1(s) + a_2(s) k_1(s) - 2a_4(s) k_3(s) = 0, \quad (4.1.5)$$

$$a_3'(s) - a_3(s) k_1(s) - 2a_4(s) k_2(s) = 0 \quad (4.1.6)$$

ve

$$a_4'(s) + a_2(s) k_2(s) + a_3(s) k_3(s) = 0 \quad (4.1.7)$$

bulunur.

**Teorem 4.1.1**  $\gamma(s), \mathbb{I}\mathbb{R}^4$  de birim hızlı timelike pseudo-null eğri olsun. Eğer  $a_3(s)$  ve  $a_4(s)$  sıfırdan farklı sabitler ise  $\gamma(s)$  bir helistir.

**İspat :** (4.1.6) dan ve teoremin hipotezinden

$$a_3(s) k_1(s) = -2a_4(s) k_2(s)$$

veya

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = -\frac{2a_4(s)}{a_3(s)}$$

elde edilir. Böylece  $\gamma(s)$  genel helistir.

**Teorem 4.1.2**  $\gamma(s), \mathbb{I}\mathbb{R}^4$  de birim hızlı timelike pseudo null eğri olsun. Eğer  $a_2(s), a_3(s), a_4(s)$  sıfırdan farklı sabitler ise

$$\frac{k_2(s)}{k_3(s)} = \text{sabittir.}$$

**İspat :** (4.1.7) den ve teoremin hipotezinden

$$\frac{k_2(s)}{k_3(s)} = -\frac{a_3(s)}{a_2(s)} = \text{sabittir}$$

**Sonuç 4.1.3**  $\gamma(s)$ ,  $\mathbb{R}^4$  de birim hızlı timelike pseudo-null eğri olsun. Eğer  $\gamma(s)$  helis ve  $a_2(s)$ ,  $a_3(s)$ ,  $a_4(s)$  sıfırdan farklı sabitler ise

$$\frac{k_1(s)}{k_3(s)} = \text{sabittir.}$$

**İspat :** Teorem (4.1.1) den

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)} = \text{sabit} = \lambda$$

ve Teorem (4.1.2) den

$$\frac{k_3(s)}{k_2(s)} = \text{sabit} = \mu$$

ise

$$\frac{k_1(s)}{k_3(s)} = \lambda\mu = \text{sabit}$$

olur.

O halde genel olarak  $\gamma(s)$ ,  $\mathbb{R}^4$  de birim hızlı timelike pseudo-null eğrisi sabit bir  $U = a_1(s)t(s) + a_2(s)n_1(s) + a_3(s)n_2(s) + a_4(s)n_3(s)$  vektörüyle sabit bir açı teşkil ediyorsa ve  $U$  nun  $a_2(s)$ ,  $a_3(s)$ ,  $a_4(s)$  katsayıları sabitler ise

$$\frac{k_1(s)}{k_2(s)}, \frac{k_2(s)}{k_3(s)}, \frac{k_1(s)}{k_3(s)}$$

ifadeleri birbirinden farklı sabitlerdir.

## 5.BÖLÜM

### AKIŞLAR

#### 5.1 $\mathbb{R}^4$ Yarı-Riemann Uzayında Eğri Akışı

Bu bölümde aksi belirtilmediği sürece  $\mathbb{R}^4$  de diferansiyellenebilir timelike pseudo-null eğrinin bir parametre ailesi  $\gamma : [0, l] \times [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^4$  şeklinde ve  $u, 0 \leq u \leq l$  de bir  $\gamma(s)$  eğrisinin parametrizasyon değişkeni olarak ve kısalığın hatrı için  $t = t(s), n_1 = n_1(s), n_2 = n_2(s), n_3 = n_3(s), k_1 = k_1(s), k_2 = k_2(s)$  ve  $k_3 = k_3(s)$  şeklinde gösterilecektir.,

Eğer  $\gamma$  pseudo-null eğrisinin hızı  $v = \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\|$  tarafından verilirse  $\gamma$  nın yay uzunluğu  $u$  nun bir fonksiyonu olarak

$$s(u) = \int_0^u \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| du = \int_0^u v du \quad (5.1.1)$$

yazılabilir. Burada

$$\left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| = \sqrt{\left| \frac{d\gamma}{du} \right|, \left| \frac{d\gamma}{du} \right|} \quad (5.1.2)$$

dır.  $\frac{d}{ds}$  operatörü

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{v} \frac{d}{du} \quad (5.1.3)$$

şeklinde verilir. Ayrıca  $v = \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\|$  olup bu durumda yay uzunluğu  $ds = v du$  dır.

**Tanım 5.1.1**  $\gamma$  timelike pseudo-null eğri ve  $\{t, n_1, n_2, n_3\}$   $\mathbb{R}^4$  de  $\gamma$  nın Frenet çatısı olsun. Timelike pseudo-null eğrinin herhangi bir akışı

$$\frac{d\gamma}{dt} = \beta_1 t + \beta_2 n_1 + \beta_3 n_2 + \beta_4 n_3 \quad (5.1.4)$$

olarak ifade edilebilir. Burada  $\beta_i$ ; diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

$\mathbb{R}^4$  uzayında timelike pseudo-null eğrisinin herhangi bir sıkışma veya gevşemeye maruz kalmasının koşulu

$$\frac{d}{d\bar{t}}s(u, \bar{t}) = \int_0^u \frac{dv}{d\bar{t}} du = 0 \quad (5.1.5)$$

şartı ile ifade edilir. Burada  $u \in [0, l]$  dir.

**Tanım 5.1.2**  $\gamma; \mathbb{R}^4$  timelike pseudo-null eğri olsun. Bir timelike pseudo-null eğrinin evülasyonu  $\gamma(u, \bar{t})$  ve onun akışı;  $\frac{d\gamma}{d\bar{t}}$ , eğer

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| = 0 \quad (5.1.6)$$

ise eğrinin esnek olmayan akışı olarak ifade edilir.

**Teorem 5.1.1**  $\{t, n_1, n_2, n_3\}$ ;  $\gamma$  timelike pseudo-null eğrisinin Frenet çatısı ve

$$\frac{d\gamma}{d\bar{t}} = \beta_1 t + \beta_2 n_1 + \beta_3 n_2 + \beta_4 n_3$$

$\mathbb{R}^4$  uzayında  $\gamma$  timelike pseudo-null eğrisinin diferansiyellenebilir akışı olsun. Eğer  $\gamma; \mathbb{R}_2^4$  birim hızlı timelike pseudo-null eğrisi ise

$$\frac{dv}{d\bar{t}} = -\frac{d\beta_1}{du} - \frac{1}{2}\beta_3 v$$

denklemini yazılabilir.

**İspat :**  $\frac{d\gamma}{d\bar{t}}, \mathbb{R}^4$  de timelike pseudo-null eğrisinin diferansiyellenebilir akışı olsun.  $\gamma$  nın tanımını kullanılırsa

$$v = \left\| \frac{d\gamma}{du} \right\| \iff v^2 = \left\langle \frac{d\gamma}{du}, \frac{d\gamma}{du} \right\rangle \quad (5.1.8)$$

elde edilir. (5.1.8) ifadesinin  $\bar{t}$  ye göre türevi alınırsa

$$2v \frac{dv}{d\bar{t}} = \frac{d}{d\bar{t}} \left\langle \frac{d\gamma}{du}, \frac{d\gamma}{du} \right\rangle \quad (5.1.9)$$

bulunur. (5.1.9) da  $\frac{d^2}{du d\bar{t}} = \frac{d^2}{d\bar{t} du}$  olduğundan

$$2v \frac{dv}{d\bar{t}} = \left\langle \frac{d}{d\bar{t}} \left( \frac{d\gamma}{du} \right), \frac{d\gamma}{du} \right\rangle + \left\langle \frac{d\gamma}{du}, \frac{d}{d\bar{t}} \left( \frac{d\gamma}{du} \right) \right\rangle = 2 \left\langle \frac{d}{d\bar{t}} \left( \frac{d\gamma}{du} \right), \frac{d\gamma}{du} \right\rangle$$

$$v \frac{dv}{d\bar{t}} = \left\langle \frac{d}{d\bar{t}} \left( \frac{d\gamma}{du} \right), \frac{d\gamma}{du} \right\rangle \quad (5.1.10)$$

bulunur. (5.1.10) ifadesi

$$v \frac{dv}{d\bar{t}} = \left\langle \frac{d}{du} \left( \frac{d\gamma}{d\bar{t}} \right), \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{du} \right\rangle \quad (5.1.11)$$

şeklinde yazılabilir. (5.1.11) den

$$v \frac{dv}{d\bar{t}} = \left\langle \frac{d}{du} (\beta_1 t + \beta_2 n_1 + \beta_3 n_2 + \beta_4 n_3), vt \right\rangle$$

veya

$$\frac{dv}{d\bar{t}} = \left\langle \frac{d\beta_1}{du} t + \beta_1 \frac{dt}{du} + \frac{d\beta_2}{du} n_1 + \beta_2 \frac{dn_1}{du} + \frac{d\beta_3}{du} n_2 + \beta_3 \frac{dn_2}{du} + \frac{d\beta_4}{du} n_3 + \beta_4 \frac{dn_3}{du}, t \right\rangle \quad (5.1.12)$$

veya

$$\frac{dv}{d\bar{t}} = \left\langle \frac{d\beta_1}{du} t + \beta_1 \frac{dt}{ds} \frac{ds}{du} + \frac{d\beta_2}{du} n_1 + \beta_2 \frac{dn_1}{ds} \frac{ds}{du} + \frac{d\beta_3}{du} n_2 + \beta_3 \frac{dn_2}{ds} \frac{ds}{du} + \frac{d\beta_4}{du} n_3 + \beta_4 \frac{dn_3}{ds} \frac{ds}{du}, vt \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{d\beta_1}{du} t + \beta_1 \frac{dt}{ds} v + \frac{d\beta_2}{du} n_1 + \beta_2 \frac{dn_1}{ds} v + \frac{d\beta_3}{du} n_2 + \beta_3 \frac{dn_2}{ds} v + \frac{d\beta_4}{du} n_3 + \beta_4 \frac{dn_3}{ds} v, t \right\rangle$$

elde edilir. Böylece (2.5.5) den

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\bar{t}} &= \frac{d\beta_1}{du} \langle t, t \rangle + \langle \beta_1 n_1 v, t \rangle + \frac{d\beta_2}{du} \langle n_1, t \rangle \\ &\quad + \langle \beta_2 (k_1 n_1 + k_3 n_3) v, t \rangle + \frac{d\beta_3}{du} \langle n_2, t \rangle \\ &\quad + \left\langle \beta_3 \left( \frac{1}{2} t - k_1 n_2 + k_3 n_3 \right) v, t \right\rangle \\ &\quad + \frac{d\beta_4}{du} \langle n_3, t \rangle + \langle \beta_4 (-2k_3 n_1 - 2k_2 n_2) v, t \rangle \end{aligned}$$

olup

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{d\beta_1}{du} - \frac{1}{2}\beta_3v \quad (5.1.13)$$

elde edilir.

**Teorem 5.1.2**  $\{t, n_1, n_2, n_3\}$   $\mathbb{R}^4$  uzayında timelike pseudo-null eğrinin Frenet çatısı ve

$$\frac{d\gamma}{dt} = \beta_1t + \beta_2n_1 + \beta_3n_2 + \beta_4n_3$$

$\mathbb{R}^4$  de  $\gamma$  timelike pseudo-null eğrisinin esnek olmayan diferansiyellenebilir akışı olsun. Eğer  $\gamma; \mathbb{R}_2^4$  de birim hızlı timelike pseudo-null eğri ise

$$\frac{d\beta_1}{du} = -\frac{1}{2}\beta_3v \quad (5.1.14)$$

denklemini mevcuttur.

**İspat :**  $\gamma$  timelike pseudo-null eğrisi esnek olmayan eğri akışına sahip olsun. O halde

$$\frac{d}{dt}s(u, \bar{t}) = \int_0^u \frac{dv}{dt} du$$

veya (5.1.13) kullanılırsa

$$\begin{aligned} &= \int_0^u \left( -\frac{d\beta_1}{du} - \frac{1}{2}\beta_3v \right) du \\ &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. (5.1.15) ifadesinden

$$-\frac{d\beta_1}{du} - \frac{1}{2}\beta_3v = 0 \quad (5.1.17)$$

veya

$$\frac{d\beta_1}{du} = -\frac{1}{2}\beta_3v \quad (5.1.18)$$

bulunur.

**Teorem 5.1.2**  $\{t, n_1, n_2, n_3\}$   $\mathbb{R}^4$  uzayında timelike pseudo-null eğrinin Frenet çatısı olsun. O zaman

$$\frac{d\gamma}{dt} = \beta_1 t + \beta_2 n_1 + \beta_3 n_2 + \beta_4 n_3$$

$\mathbb{R}^4$  de  $\gamma$  timelike pseudo-null eğrisinin esnek olmayan diferansiyellenebilir akışı olsun.  $\bar{t}$  ye göre  $\{t, n_1, n_2, n_3\}$  nm diferansiyelleri

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\bar{t}} &= \left( \beta_1 + \frac{d\beta_2}{ds} + \beta_2 k_1 - 2\beta_4 k_3 \right) n_1 + \left( \frac{d\beta_3}{ds} - 2k_1 \beta_3 - 2k_2 \beta_4 \right) n_2 \\ &\quad + \left( \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + \frac{d\beta_4}{ds} \right) n_3 \end{aligned}$$

ve

$$\frac{dn_1}{d\bar{t}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d\beta_3}{ds} - k_1 \beta_3 - 2k_2 \beta_4 \right) t + 2\Psi_1 n_1 + \Psi_2 n_3$$

ve

$$\frac{dn_2}{d\bar{t}} = -\frac{1}{2} \left( \beta_1 + \frac{d\beta_2}{ds} + \beta_2 k_1 - 2\beta_4 k_3 \right) t - 2\Psi_1 n_2 + \Psi_3 n_3$$

ve

$$\frac{dn_3}{d\bar{t}} = \left( \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + \frac{d\beta_4}{ds} \right) t - 2\Psi_3 n_1 - 2\Psi_2 n_2$$

dir. Burada  $\left\langle \frac{dn_1}{dt}, n_2 \right\rangle = \Psi_1$ ,  $\left\langle \frac{dn_1}{dt}, n_3 \right\rangle = \Psi_2$ ,  $\left\langle \frac{dn_2}{dt}, n_3 \right\rangle = \Psi_3$  dir.

**İspat :** Doğrudan hesaplama ile

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{d}{d\bar{t}} \left( \frac{d\gamma}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left( \frac{d\gamma}{d\bar{t}} \right) \quad (5.1.19)$$

veya

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{d}{ds} (\beta_1 t + \beta_2 n_1 + \beta_3 n_2 + \beta_4 n_3)$$

veya

$$\frac{dt}{d\bar{t}} = \frac{d\beta_1}{ds} t + \beta_1 \frac{dt}{ds} + \frac{d\beta_2}{ds} n_1 + \beta_2 \frac{dn_1}{ds} + \frac{d\beta_3}{ds} n_2 + \beta_3 \frac{dn_2}{ds} + \frac{d\beta_4}{ds} n_3 + \beta_4 \frac{dn_3}{ds}$$

bulunur. (5.1.19) da (2.1.5) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\bar{t}} &= \frac{d\beta_1}{ds} t + \beta_1 n_1 + \frac{d\beta_2}{ds} n_1 + \beta_2 (k_1 n_1 + k_2 n_2) + \frac{d\beta_3}{ds} n_2 \\ &\quad + \beta_3 \left( \frac{1}{2} t - k_1 n_2 + k_3 n_3 \right) + \frac{d\beta_4}{ds} n_3 + \beta_4 (-2k_3 n_1 - 2k_2 n_2) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\bar{t}} = & \left( \frac{d\beta_1}{ds} + \frac{\beta_3}{2} \right) t & (5.1.20) \\ & + \left( \beta_1 + \frac{d\beta_2}{ds} + \beta_2 k_1 - 2\beta_4 k_3 \right) n_1 \\ & + \left( \frac{d\beta_3}{ds} - k_1 \beta_3 - 2k_2 \beta_4 \right) n_2 \\ & + \left( \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + \frac{d\beta_4}{ds} \right) n_3\end{aligned}$$

bulunur. (5.1.14) ifadesinden

$$-\frac{d\beta_1}{ds} \frac{ds}{du} - \frac{1}{2} \beta_3 v = 0$$

ve

$$-v \left( \frac{d\beta_1}{ds} + \frac{1}{2} \beta_3 \right) = 0$$

ve

$$\frac{d\beta_1}{ds} + \frac{1}{2} \beta_3 = 0 \quad (5.1.21)$$

bulunur. (5.1.21) ifadesi

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\bar{t}} = & \left( \beta_1 + \frac{d\beta_2}{ds} + \beta_2 k_1 - 2\beta_4 k_3 \right) n_1 & (5.1.22) \\ & + \left( \frac{d\beta_3}{ds} - k_1 \beta_3 - 2k_2 \beta_4 \right) n_2 \\ & + \left( \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + \frac{d\beta_4}{ds} \right) n_3\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\langle t, n_1 \rangle &= 0 \implies \left\langle t, \frac{dn_1}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{dt}{dt}, n_1 \right\rangle & (5.1.23) \\
&= -\frac{1}{2} \left( \frac{d\beta_3}{ds} - k_1\beta_3 - 2k_2\beta_4 \right) \\
\langle t, n_2 \rangle &= 0 \implies \left\langle t, \frac{dn_2}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{dt}{dt}, n_2 \right\rangle \\
&= -\frac{1}{2} \left( \beta_1 + \frac{d\beta_2}{ds} + \beta_2k_1 - 2\beta_4k_3 \right) \\
\langle t, n_3 \rangle &= 0 \implies \left\langle t, \frac{dn_3}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{dt}{dt}, n_3 \right\rangle \\
&= - \left( \beta_2k_2 + \beta_3k_3 + \frac{d\beta_4}{ds} \right)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\langle n_1, n_2 \rangle &= \frac{1}{2} \implies \left\langle n_1, \frac{dn_2}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{dn_1}{dt}, n_2 \right\rangle = \Psi_1 & (5.1.24) \\
\langle n_1, n_3 \rangle &= 0 \implies \left\langle n_1, \frac{dn_3}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{dn_1}{dt}, n_3 \right\rangle = -\Psi_2 \\
\langle n_2, n_3 \rangle &= 0 \implies \left\langle n_2, \frac{dn_3}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{dn_2}{dt}, n_3 \right\rangle = -\Psi_3
\end{aligned}$$

$$\left\langle n_1, \frac{dn_1}{dt} \right\rangle = \left\langle n_2, \frac{dn_2}{dt} \right\rangle = \left\langle n_3, \frac{dn_3}{dt} \right\rangle = 0$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{dn_1}{dt} = at + bn_1 + cn_2 + dn_3$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $a, b, c, d$  diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. O zaman (5.1.23) den

$$\left\langle \frac{dn_1}{dt}, t \right\rangle = -a = \frac{1}{2} \left( \frac{d\beta_3}{ds} - k_1\beta_3 - 2k_2\beta_4 \right)$$

ve

$$\left\langle \frac{dn_1}{d\bar{t}}, n_1 \right\rangle = \frac{c}{2} = 0 \iff c = 0$$

ve

$$\left\langle \frac{dn_1}{d\bar{t}}, n_2 \right\rangle = \frac{b}{2} = \Psi_1$$

ve

$$\left\langle \frac{dn_1}{d\bar{t}}, n_3 \right\rangle = d = \Psi_2$$

bulunur. (5.1.24) de (5.1.25) ifadesi yerine yazılırsa

$$\frac{dn_1}{d\bar{t}} = -\frac{1}{2} \left( \frac{d\beta_3}{ds} - k_1\beta_3 - 2k_2\beta_4 \right) t + 2\Psi_1 n_1 + \Psi_2 n_3 \quad (5.1.26)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{dn_2}{d\bar{t}} = at + bn_1 + cn_2 + dn_3$$

yazılır. Burada  $a, b, c, d$  diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. O halde (5.1.23) den

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dn_2}{d\bar{t}}, t \right\rangle &= -a = \frac{1}{2} \left( \beta_1 + \frac{d\beta_2}{ds} + \beta_2 k_1 - 2\beta_4 k_3 \right), \quad (5.1.28) \\ \left\langle \frac{dn_2}{d\bar{t}}, n_1 \right\rangle &= \frac{c}{2} = -\Psi_1, \\ \left\langle \frac{dn_2}{d\bar{t}}, n_2 \right\rangle &= \frac{b}{2} = 0 \implies b = 0, \\ \left\langle \frac{dn_2}{d\bar{t}}, n_3 \right\rangle &= d = \Psi_3, \end{aligned}$$

ve

$$\frac{dn_2}{d\bar{t}} = -\frac{1}{2} \left( \beta_1 + \frac{d\beta_2}{ds} + \beta_2 k_1 - 2\beta_4 k_3 \right) t - 2\Psi_1 n_2 + \Psi_3 n_3$$

elde edilir. Son olarak

$$\frac{dn_3}{d\bar{t}} = at + bn_1 + cn_2 + dn_3$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $a, b, c, d$  diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. O zaman (5.1.23) den

$$\left\langle \frac{dn_3}{dt}, t \right\rangle = -a = - \left( \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + \frac{d\beta_4}{ds} \right),$$

$$\left\langle \frac{dn_3}{dt}, n_1 \right\rangle = \frac{c}{2} = -\Psi_2,$$

$$\left\langle \frac{dn_3}{dt}, n_2 \right\rangle = \frac{b}{2} = -\Psi_3,$$

$$\left\langle \frac{dn_3}{dt}, n_3 \right\rangle = d = 0,$$

ve

$$\frac{dn_3}{dt} = \left( \beta_2 k_2 + \beta_3 k_3 + \frac{d\beta_4}{ds} \right) t - 2\Psi_3 n_1 - 2\Psi_2 n_2$$

bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

## KAYNAKLAR

- [1] Ali A.T., Lopez R., ve Turgut M., ‘k-type partially null and pseudo-null slant helices in minkowski 4-space,’ *Mathematical Communications*, vol. 17, no. 1, pp. 93-103, 2012.
- [2] İlarıslan K. ve Nesovic E., ‘Some characterizations of null, pseudo-null and partially-null rectifying curves in Minkowskispace-time,’ *Taiwanese Journal of Mathematics* , vol. 12, pp. 1035-1048, 2008.
- [3] İlarıslan K. ve Nesovic E., ‘Some characterizations of pseudo-null and partially null osculating curves in Minkowskispace-time’ *International Electronic Journal of Geometry*, vol. 4, pp. 1-12, 2011.
- [4] İlarıslan K. ve Nesovic E. ‘Some relations between normal and rectifying curves in Minkowski space-time ,’ *International Electronic Journal of Geometry*, vol. 7, pp. 26-35, 2014.
- [5] Petrović–Torgašev M., İlarıslan K. ve Nešović E., On partially-null and pseudo-null curves in the semi-euclidean space, *Journal of Geometry*, 84: 106.-116, 2006. doi:10.1007/s00022-005-0024-y
- [6] Cui X ve Pei D, ‘Singularities of Null Hyper surfaces of Pseudo-null Curves’ *Hindawi Publishing Corporation Journal of Function Spaces* Volume 2015, Article ID 502789, 9 pages.
- [7] Hacısalihođlu H.H. *Diferensiyel Geometri*. Fen Fakóltesi, Ankara, 1993.
- [8] Beem J. ve Ehrlich P.E, *Global Lorentzian geometry*. Marcell Dekker Inc NewYork, 1981.
- [9] O’Neill, B., *Semi–Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York, 1983.
- [10] Aktař B., *4 -Boyutlu Minkowski Uzayında Null Eğrilerin Karekterizasyonu*. Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ, 2014.

## ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Ankarada doğdum. İlk, Orta ve Lise öğrenimimi Bursa da tamamladım. 2008'de Uludağ Üniversitesi, Fen-Edebiyat fakültesi, Matematik bölümünü kazandım. 2012 yılında mezun oldum. 2013 yılında Milli Eğitim Bakanlığında Matematik öğretmeni olarak göreve başladım. 2015 yılında Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitimime başladım.

