

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÇOK SPİNLİ SİSTEMLERDE KUANTUM DOLANIKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VOLKAN DURAN

Fizik Anabilim Dalı

HAZİRAN 2017

SAMSUN

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI ÇOK SPİNLİ SİSTEMLERDE KUANTUM DOLANIKLIK

FİZİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Volkan DURAN

11210129

Tezin Savuma Tarihi : .../.../2017

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

TEZ ONAYI

Volkan Duran tarafından hazırlanan ‘‘Bazı Çok Spinli Sistemlerde Kuantum Dolanıklık’’ adlı tez çalışması .../.../20.. tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

Fizik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri

Başkan

Prof. Dr. Özden TEZEL

Eskişehir Osmangazi Üniversitesi

Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı

Üye

Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fizik Anabilim Dalı

Üye

Prof. Dr. Ender BİÇER

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Kimya Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım/.../2017

.....imza.....

Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

Tarih

İmza

Volkan DURAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI ÇOK SPİNLİ SİSTEMLERDE KUANTUM DOLANIKLIK

Volkan Duran

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Azmi Gençten

Kuantum oyun teorisi klasik oyunların kuantum bilgi teorisine göre işlenmesini inceleyen kuantum bilgi teorisinin bir alt dalı olarak ele alınabilir. Spin $\frac{1}{2}$ durumunu temsil eden kubitlerle birçok oyunun analiz edildiği ilgili literatür incelendiğinde görülebilir. Bu tezde son yıllarda daha çok ilgi gören spin 1 durumlarını temsil eden kutrit temelli yazı tura oyununun analizi hedeflenmiştir.

Tezin ilk kısmında kutrit temelli kuantum dolanıklığın Bloch küresinin genişletilmiş bir türü olan kutrit temelli hiper kürede incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu bağlamda ilk bölüm öncelikle i) yapıştırma, birleştirme çarpımı gibi yeni işlemciler ile çarpımların ve matematiksel özelliklerin tanımlanması, ii) Bloch küresinin modifiye edilmiş hali olarak kutrit temelli hiper-kürenin tanımlanması iii) dolanık durumların (i) ve (ii)'de elde edilen bulgular açısından örgülerle incelenmesini içermektedir. İkinci aşamada kutrit temelli yazı-tura oyunları çeşitli işlemcilerle sıkıştırılarak incelenmiştir. Daha sonrasında fano düzlemi üzerinde tanımlanan renk pusulası kullanılarak bu örüntülerin renk panosu üzerindeki karşılığı bulunmaya çalışılmıştır. Son bölümde ise örgü kuramı bağlamında kutrit durumlar ve enerji seviyeleri örgü türünden ifade edilmiştir ve çeşitli işlemler yapılmıştır. Sonuç olarak kuantum bilgi teorisinde bazı klasik oyunlar ve dolanıklık kavramı kavranmaya çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kuantum Oyun Teorisi, Kutrit Temelli Hiperküre, Yapıştırma Çarpımı, Birleştirme Çarpımı, Kuantum Kutrit Dolanıklık, Örgü Kuramı

ABSTRACT

Master's Thesis

QUANTUM ENTANGLEMENT IN SOME MULTI-SPIN SYSTEMS

Volkan Duran

Ondokuz Mayıs University

Institute of Science And Technology

Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Azmi Gençten

Quantum game theory can be considered as a sub-branch of quantum information theory which explores the processing of classical games based on the quantum information theory. Most of the research papers deal with the qubit based quantum games representing spin $\frac{1}{2}$ states. In this thesis, it is aimed to analyze qutrit based quantum games which have been attracted more focus recently.

In the first part of the thesis, it is aimed to investigate qutrit based hypersphere which can be thought as the extended version of Bloch sphere. In this respect firstly the first part of the research includes i) multiplications and mathematical properties with new operators and multiplication rules such as gluing, combining products, ii) qutrit based hypersphere iii) the application of the results of (i) and (ii) over qutrit based quantum entanglement via braids. In the second part of the research, qutrit based quantum games are analyzed thorough restricting them with some operators. Later, it was tried to find the correspondence of these patterns over the color wheel compass which is defined by the fano plane. In the last part, qutrit states and energy levels in the context of braid theory are expressed and analyzed in terms of braids. As a result, quantum entanglement is tried to be viewed from a different perspective.

Key Words: Quantum Game Theory, Qutrit-Based Hypersphere, Glueing Product, Combining Product, Quantum Qutrit Entanglement, Braid Theory

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Öncelikle bu tezde babam İlhan DURAN'a ve göremesem de büyük bir özlem ve sevgiyle andığım rahmetli dedem Hakkı DURAN'a ve rahmetli babannem Şerife DURAN'a sonsuz teşekkür ederim.

Yaşamım boyunca bana yol gösteren, bu günlere gelmemde büyük emeği geçen annem Jale AKMAN'a ve babam İlhan DURAN'a ayrıca eşim Seçil DURAN'a bu tezi bitirme sürecinde yanımda bulunduğu için teşekkür ederim.

Ek olarak bu yüksek lisans tezinin hazırlanmasında yardımcı olan değerli danışmanım Prof. Dr. Azmi GENÇTEN'e teşekkür ederim.

Haziran 2017, SAMSUN

Volkan DURAN

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

TEZ ONAYI	iii
ETİK BEYAN	
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
SİMGELER ve KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1 Kuantum Mekanikği	5
2.2 Kuantum Bilgi Teorisi	7
2.2.1 Kubitler ve Tek Kubit Geçitleri	7
2.2.2 İki Kubit Geçitleri	9
2.2.4 Kutritler (SU(3))	13
2.2.5 Dolanıklık	14
3. Klasik Oyun Teorisi	16
4. Kuantum Oyun Teorisi	17
3. MATERYAL VE YÖNTEM	19
3.1 Giriş	19
3.2 Simetri ve Çeşitli Kutrit Geçitleri ve Bunların Kutritler Üzerine Etkisi	19
3.4 Hiperkürenin Tanımlanması	23
3.5 Örgüler Kuramı	26
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	31
4.1 Hiperküre'nin Tanımlanması ve Üzerinde Dolanıklığın İncelenmesi.....	31
4.1.1 Yapıştırma Çarpımının Tanımı	31
4.1.2 Kutrit Temelli HiperKürenin Matematiksel Olarak Tanımlanması	33
4.1.3 Hiper-Küredeki Kuantum Dolanıklık Vektörlerinin Tanımlanması ve Manipulasyonu	34
4.2 Kuantum Kutrit Yazı-Tura Oyunun Çeşitli Değişkenler Açısından İncelenmesi	36
4.2.1 Kuantum Kutrit Yazı-Tura Oyunu ile Klasik Yazı Tura Oyunun Klasik ve Kuantum Geçitler Açısından İncelenmesi	37
4.2.2 Bazı İşlemcilerle Sıkıştırılmış Kutrit Temelli Yazı Tura Oyunun Birleştirme İşlemcisi Açısından İncelenmesi	39
4.2.3 S ve I işlemcileri arasına sıkıştırılmış oyunun birleştirme işlemcisiyle örüntülenmesi ve analizi	39

4.2.4 $H01$ ve I işlemcileri arasına sıkıştırılmış oyunun birleştirme işlemcisiyle örüntülenmesi ve analizi	43
4.2.5 Renk Çemberi Pusulasının Fano Düzleminde Tanımlanması	48
4.2.6. $H01$, $H02$ Sıkıştırılmış Yazı Tura Oyunun Renk Çemberi Pusulasında İncelenmesi ve Bazı Dolanık Durumların Elde Edilmesi	52
4.3 Kuantum Kutrit Durumların Örgüler Teorisi Açısından İncelenmesi.....	56
4.3.1 Kuantum Kubit ve Kutrit Durumların Örgülerle Tanımlanması	56
4.3.2 Örgülerle Tanımlanmış Kuantum Durumlarında Enerji Yarılmalarının İncelenmesi.....	60
4.3.3 Kubit ve Kutrit Temelli Dolanık Durumların Örgülerle İfade Edilmesi....	73
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	79
6. KAYNAKLAR	83
7. ÖZGEÇMİŞ	87
Eğitim Durumu.....	87
Yayınlar	88

SİMGELER ve KISALTMALAR

$ 0\rangle, 1\rangle :$	Kubit durumlar
$ 0\rangle, 1\rangle, 2\rangle :$	Kutrit durumlar
$X, Y, Z :$	Pauli işlemcileri
$S, D :$	Kutrit temelli döndürme işlemcisi
$\lambda_i :$	Gelmann matrisleri
$X^{ij} :$	Seçici Değil geçiti
$H^{ij} :$	Seçici Hadamard geçiti
$\zeta_{hiperküre} :$	Hiperküre sembolü
$\Omega :$	Yapıştırma çarpımı işlemcisi
$\Lambda :$	Birleştirme çarpımı işlemcisi
$\sigma :$	Ayna işlemcisi
$Z :$	Dağılımları eş yarısını alan işlemci
$K_i :$	Pusuladaki renk bölge kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2. 1. Bir kubit'in Bloch Küresi üzerindeki geometrik temsili	8
Şekil 2. 2. Controlled-U geçitlerinin genel devre çizimi ve matris gösterimi.....	11
Şekil 2. 3. C-NOT geçitinin devresi	11
Şekil 2. 4. Swap geçitinin devre gösterimi.....	12
Şekil 2. 5. Dolanıklık oluşturma devresi.....	15
Şekil 2. 6. Bir turluk triello oyunun dallanması	16
Şekil 3. 1. İki boyutlu bir düzlemden geçen kürenin ve üçboyutlu bir küpten geçen hiperkürenin davranışı.....	24
Şekil 3. 2 Hiperküre eş merkezli biri sanal diğeri gerçek iki yapışık küre olarak tanımlanabilir	25
Şekil 3. 3. $\lambda 5$ işlencisinin temel kutrit durumuna hiperküre üzerinde etkisi.....	26
Şekil 3. 4. Çeşitli örgü örnekleri	27
Şekil 3. 5. Çeşitli örgüler ve matematiksel olarak tersi durumları	28
Şekil 3. 6. (a) Temel örgü σi 'nin örgü diagramında gösterimi (b) bir çok farklı temel örgü ve ters durumlarında oluşan bir örgü örneği	29
Şekil 3. 7. (a) Örgü çarpımı $\alpha\beta$ (b) Örgü çarpımı $\beta\alpha$	29
Şekil 4. 1.(a) Kutrit temelli hiperküre ve (b) koordinatları	33
Şekil 4. 2. Kutrit durumların S ve I arası sıkıştırılmasıyla elde edilen örüntü	41
Şekil 4. 3. Dikey olarak her bir satırda döndürme işlemcisinin etkisi	42
Şekil 4. 4. Kutritlerde yatay işlemcilerin hareketini belirleyen üst kural	43
Şekil 4. 5. Kutritlerde yatay işlemcilerin hareketini belirleyen üst kural	44
Şekil 4. 6. H01 ve I işlemcileri kullanılarak yapılan dağılımı.....	45
Şekil 4. 7. $ 0$ kutritiyle başlayan H01, H02 hadamartlarıyla sıkıştırılmış yazı tura oyunun dallanmaları.....	47
Şekil 4. 8. $a \rightarrow bc, b \rightarrow ad, c \rightarrow da, d \rightarrow cb$ örüntüsünden elde edilen farklı sonuçlar	48
Şekil 4. 9. Fano düzlemi ve düzlemdeki noktaların kutrit karşılıkları (Duran, Gençten, 2016 b).....	49
Şekil 4. 10. Renk çemberi üzerinden kutritlerin tanımlanması	50
Şekil 4. 11. Renk çemberindeki koordinat noktaları arasındaki matematiksel ilişki..	51
Şekil 4. 12. Soldan (L) H01 sağdan (R) H02 uygulamak olduğunu belirtirsek, $ 0$ kutritiyle başlayan oyunun örüntüsü	52
Şekil 4. 13. $ 0$ kutritiyle başlayan oyunun renk çemberindeki yönü.	53
Şekil 4. 14. $ 1$ kutritiyle başlayan oyunun renk çemberindeki yönü	54
Şekil 4. 15. (a) Kutrit durumları için oluşturulmuş varsayımsal bir örgü cihazı (b) Kutrit durumları için referans noktalarının tanımlanması.....	56
Şekil 4. 16. Kutrit durumların pozitif veya negatifliğinin tanımlanması	57
Şekil 4. 17. Kutrit durumların pozitif veya negatifliği kuralı (Dalvit, 2011; Collins, 2006)	58
Şekil 4. 18. (a) AÜÜAA 'nın σzy olarak ayna simetrisi (b) ve σxy olarak ayna simetrisi	59

Şekil 4. 19. Kubit durumların örgülerle ifade edilmesi	61
Şekil 4. 20. $ 0\rangle$ 'dan $ 1\rangle$ 'e değil işlemcisiyle geçişin örgülerle gösterilmesi	63
Şekil 4. 21. $ 0\rangle$ ve $ 1\rangle$ durumlarının örgüler ve çemberlerle gösterilmesi	64
Şekil 4. 22. Kubitlerle enerji durumlarının sınıflandırılması	65
Şekil 4. 23. Temel durumdaki enerji seviyesinin temel örgü σ_i enerji seviyelerine yarılması	67
Şekil 4. 24. $ 0\rangle$ 'dan $ 1\rangle$ 'e Y işlemcisiyle geçişin örgülerle gösterilmesi.....	68
Şekil 4. 25. Rishon modeline göre bazı parçacıklar ve düğümler türünden ifade edilmesi (Bilson-Thompson, 2008)	69
Şekil 4. 26. (a) Sol eğilimli Rishon (b) Sağ eğilimli Rishon (Darvas ve Farkas (2011)).....	70
Şekil 4. 27. Çeşitli atomaltı parçacıkların Rishonlarla temsili Darvas ve Farkas (2011)	71
Şekil 4. 28. Elektron, yukarı kuark, aşağı kuark ve bunların anti parçacık versiyonlarının hiperküre üzerinde ifadesi	71
Şekil 4. 29. Kubit türünden ifade edilen durumların hiperkürede temsil edilmesi.....	72
Şekil 4. 30. Borromean halkası ve kubit durumların halka üzerinde ifade edilmesi (Kauffman, Lomonaco, 2002)	73
Şekil 4. 31. Bazı dolanık durumların Borromean halkası üzerinde ifade edilmesi	74
Şekil 4. 32. Dolanık durumların Borromean halkası üzerinde ifade edilmesi	75
Şekil 4. 33. Bir Brunnian bağlantısı ve kutritlerin bu bağlantı üzerinde ifade edilmesi (Kauffman, Lomonaco, 2002)	76
Şekil 4. 34. $ 0\rangle 0\rangle + 1\rangle 1\rangle + 2\rangle 2\rangle$ dolanık durumunun sanal simetri eksenine göre kümelenmesi.....	77

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2. 1. Klasik ve kuantum yazı-tura oyunu arasındaki fark.....	18
Çizelge 3. 1. Gell-Mann işlemcileri ve kutritlere etkileri	20
Çizelge 3. 2. Seçici değil işlemcisi ve etkileri.....	21
Çizelge 3. 3. Seçici Hadamard İşlemcisi.....	21
Çizelge 3. 4. Bir C2 döndürücüsü ve kutritler üzerine etkisi	22
Çizelge 3. 5. Bazı C3 döndürücüler ve kutritler üzerine etkisi.....	22
Çizelge 3. 6. Bazı ters çevirme ve ayna işlemcileri ve kutritler üzerine etkisi	23
Çizelge 4. 1. Maksimum dolanık iki durumun yapıştırma işlemcisiyle hiper küre üzerinde iki vektör olarak gösterimi	37
Çizelge 4. 2. Fano düzlemindeki noktaların kutrit karşılıkları.....	49
Çizelge 4. 3. $H01$ ve $H02$ sıkıştırılmış oyunların temel noktaları	53
Çizelge 4. 4. $H01$ ve $H02$ sıkıştırılmış oyunların temel noktalar arasındaki ilişkiler	54
Çizelge 4. 5. $ 1\rangle$ ve $ 2\rangle$ ile başlayan dallanma kümeleri $K1$ ve $K2$ 'yi renk bölgelerine göre yapıştırma sonuçları	56

1. GİRİŞ

Kuantum mekaniğinin kuramsal temellerinin 1900'lerin başında "Kara Cisim Işınımı" olgusuyla başladığı söylenebilir. Bu dönemde bilim adamları kara cisim ışıması, fotoelektrik olay, hidrojenin spektrumu gibi bazı deneyleri klasik fizik kurallarıyla açıklayamadılar. Bu noktada kuantum teorisi 1900'lü yılların başlarında Max Planck'ın kara cisim ışımasını açıklamak için ortaya koyduğu enerjinin kesikli yapıda olmasının gerektiği önerisiyle ortaya çıkmıştır. 1905 yılında Albert Einstein fotoelektrik etkiyi, ışığı içinde enerji olan ayrı paketlerde taşınan enerjinin bir sonucu olarak açıklayan bir makale yayımlamıştır. 1914 yılında Robert Millikan'ın deneyi Einstein'ın fotoelektrik etkisi üzerindeki önerisini doğrulamıştır. Böylece bilim dünyasında, ışığın kesikli ve parçacıklı bir yapıdan oluştuğuna ilişkin kanaat güçlenmiştir. Niels Bohr hidrojen atomu için geliştirdiği modelde atomun dengesinin atomdaki ayrık enerji seviyelerinden oluştuğunu açıklamıştır. De Broglie maddenin hem dalga hem de parçacık özelliği taşıdığı hipoteziyle kuantum mekaniğinin dalga-parçacık ikilemini içeren matematiksel temellerini atmıştır. Heisenberg önerdiği belirsizlik ilkesiyle, maddede var olan parçacık ikiliğini momentum ve konum kavramlarıyla ve Planck'ın maddenin en küçük birimi hipoteziyle birleştirerek çeşitli matrislerle açıklamıştır. Bu dönemde Paul Dirac kuantum işlemcilerini ve durumlarını, Hilbert uzayında vektörler olarak gösterilmesi önerisinde bulunmuştur. Schrödinger kuantum mekaniğini diferansiyel denklemler ile çözülebilen bir yapıda incelemiştir. Sonrasında, hem Heisenberg hem de Schrödinger tarafından geliştirilen birisi matrisler diğeri ise diferansiyel denklemlerle çözülen matematiksel yapının birbirine denk oldukları gösterilmiştir.

Kuantum mekaniği ile klasik mekanik anlayışı arasındaki en büyük fark Bohr'un kuantum ölçümlerindeki dalga-parçacık ikiliğini ele alan kuantum mekaniğinin istatistiksel yorumunda saklıdır. Einstein "Tanrı zar atmaz." fikriyle bu anlayışa karşı çıkmış ve bir düşünce deneyiyle EPR paradoksunu ortaya atmış ve bu ikili yapıya "yerel saklı değişkenler" kuramıyla açıklamada bulunmaya çalışmıştır. Temel olarak Einstein'ın yorumu "bir (fiziksel) aracı üzerinden eyleme dayanırken, Bohr'un kuramı bir "mesafeden gerçekleşen eylem fikrine dayanıyordu.

J. S. Bell (1966) kuantum teorisine yapılan mantıksal itirazlara karşı kuantum fiziğinin yerel olup olmadığını matematiksel olarak gösterebilecek Bell eşitsizliklerini öne sürdü. Paris'te, Alain Aspect ve arkadaşlarının (1982) yaptığı deneyler de kuantum kuramının öngörüsünü doğrulamıştır. Daha sonraki deneylerde buna paralel sonuçlar vermiştir. Bu sonuçları bugün de teorik olarak incelenen kuantum dolanıklık denilen bir olgunun varlığına ilişkin ipuçlarını güçlendirmiştir.

Modern anlamda bilgisayarlarla ilgili teorik çalışmalar aslında, matematiğin temel kuramlarından kümeler kuramına kadar ele alınabilirse de, teorik olarak bu alan Babbage üzerine daha çok teorik çalışmalar yapan Ada Lovelace ve buna ek olarak sibernetik başlığı altında 19. Yüzyıldaki çalışmalarda izi sürülebilir. Klasik bilgi teorisi olarak ise 20. Yüzyılın başlarında ayrı birer disiplin olarak incelenmeye başlamıştır. "Klasik Hesaplama" kuramı ilk olarak 1936 yılında ünlü matematikçi Alan Turing tarafından ifade edilmiştir (Turing, 1937). John von Neumann 1945'li yıllarda Los Alamosta atom bombası yapımı sırasında geliştirdiği bugünkü modern bilgisayarların da temeli olan makinelere von Neumann makineleri denmektedir. 1947 yılında transistörlerin icadıyla beraber teknolojinin minyatürleşmesi bilgisayarların ceplerimize kadar girebilmesini sağladı. 1946 yılında transistörsüz üretilen ENIAC yaklaşık 167 m² bir alana sığan ve ağırlığı 30 ton olan ayrıca vakumlu tüplerle çalışan ilk bilgisayar oldu. Bu gelişmeden daha derin nitelikteki kuramsal icat ise, Claude Shannon'un "enformasyon için seçtiği miktar belirleyici bir sözcük olan "bit" kavramını tanımlaması ve bunu matematiksel bir bağlamda kullanması oldu. Bilgisayar teknolojinin piyasaya çıkışından sonra Gordon Moore ise her 18 ayda bir tümleşik devre üzerine yerleştirilebilecek bileşen (transistor) sayısının iki katına çıkaracağını, bunun bilgisayar fiyatları aynı kalmasına rağmen bilgisayarların işlem kapasitelerinde büyük artışlar yaratacağını önerdi ve bu "Moore Öngörüsü" olarak literatüre girdi.

Kuantum bilgisayarlarının temelleri, Richard Feynman (1982) 'in "kuantum etkilerini" daha iyi bilgisayarlar yapmak için kullanma fikrini ortaya koymasına dayanır. Gerçek matematiksel başlangıç IBM laboratuvarında çalışan fizikçi C.H.Bennet'in 1973 yılında kuantum sistemlerle oluşturulacak mantık geçitlerinin tersinir olduğunu ortaya koymasıyla gerçekleşmiştir; ancak Bennett (1973)'in bu çalışması o zaman fazla dikkat çekmemiştir. Her ne kadar fikir Feynman'dan çıkmışsa da kuantum hesaplama veya kuantum bilişiminin resmi miladı Benioff'un

1980 yılında yayınladığı makale olarak kabul edilmektedir (Benioff, 1980). Kubit kavramı ise ilk olarak 1983 yılında Stephen Wiesner'in kuantum para konusundaki önerisinde sunulmuştur. Bununla beraber kavram Benjamin Schumacher'in arkadaşı William Wootters ile bir sohbetinde antik bir ölçü birimi olan kubite fonolojik benzerliği düşünülerek iki durumlu kuantum sistemler için en küçük ölçüt olarak ortaya konulmuştur (Schumacher, 2015). Bennett ve Brassard kuantum şifrelemeyle ilgili ilk yayını yapmışlardır (Bennett ve Brassard, 1984). David Deutsch (1985) kuantum bilgi işleme dayalı ilk algoritmaları geliştirmiştir. Shor (1994) ise tam sayıları asal çarpanlarına ayırmak için bir kuantum algoritması geliştirmiştir. Grover (1996) ise kuantum arama algoritmasını geliştirmiştir. 18 Nisan 1998 yılında Neil Gershenfeld (MIT) ve Isaac Chuang (IBM Almaden Research Center) iki kubitlik bilgisayarın üretimini ilan etmişlerdir. Daha sonraki aşamalarda farklı yerlerde kuantum bilgisayarlar üzerine çalışmalar hem teorik hem deneysel olarak devam etmiştir. Teorik olarak "Kuantum Bilgi Teorisi", "NMR Kuantum Bilgi Teorisi", "Kuantum Hata Düzenleme", "Kuantum Şifreleme" gibi birçok alt disiplin fizikte kendilerine yer bulmuştur (Sagawa ve Yoshida, 2010). D-wave adlı bir şirket 2011 yılında resimleri tanımlayabilen bir kuantum bilgisayarı inşa ettiğini ilan etmiştir (https://en.wikipedia.org/wiki/D-Wave_Systems).

Oyun teorisi hem pratik hem de matematiksel olarak antik zamanlara kadar izi sürülebilen bir teori olarak ele alınsa da modern anlamda matematiksel temellerinin 21. Yüzyılda atıldığı söylenebilir. Bugün oyun teorisi, iktisattan, bilgisayar bilimine birçok alanda disiplinler arası alan olarak kullanılmaktadır (Flitney, 2005). Kuantum oyunları da klasik oyunların kuantum bilgisayarlarında kullanılması durumuyla ilgilenen disiplinler arası bir alan olarak ortaya çıkmıştır. David Deutsch (1985), kuantum durumlarının girişim özelliğinin birçok klasik hesaplamayı paralel bir şekilde yapılmasında kullanılabileceğini öne sürdü. Bu özellikle beraber kuantum durumlarının dolanıklık özelliği de kullanılarak bu kavramlar klasik oyunları kuantum oyunlarına dönüştürmede kullanıldı. Eisert, Wilkens, Lewenstein'in (1999) "Quantum Games and Quantum Strategies" adlı makalesi, bu alanda yayınlanan öncü makalelerden birisi olarak kabul edilebilir. Bu makalede klasik oyunların kuantize hale getirilmesinin nedenleri: 1- Oyun teorisinin matematiksel olarak sağlam temeller üzerine kurulmuş bir alan olduğu ve biyoloji, kimya, ekonomi gibi birçok farklı disiplinle ilişkili bir alanın kuantum teorisiyle genelleştirilmesinin önemli

olabileceği, 2- Moleküler genetik alanındaki çalışmaların, kuantize oyunlarla daha kolay anlaşılabilmesi, 3- Oyun teorisi ile kuantum bilgi teorisi arasında karşılıklı bir ilişki olduğu 4- Kuantum teorisinin oyunların analizinde faydalı olabileceği, olarak belirtmişlerdir. Kuantum oyunları ile ilgili temeller ise Meyer'in Microsoft şirketinde bu konu hakkında bir seminer vermesi ile atılmıştır. Ayrıca Meyer (2000) klasik oyunların nasıl kuantize edileceğine ilişkin bazı oyunlarla ilgili öneriler sunmuştur. Daha sonra literatürde birçok oyun kuantize edilerek incelenmiştir. Örneğin, "Mahkûmun Çelişkisi", "Monthy Hall Problemi", "Mermin-Peres'in Kuantum Sihirli Kare Oyunu" gibi birçok oyunun çeşitli kuantum protokollerle incelenmiştir (Grabbe, 2005). Bu tezin konusu olan yazı tura oyunları, BB84 protokolü, Ambainis protokolü, Ekert kuantum protokolü, 3DEB protokolü gibi birçok protokollerle incelenmiştir (Berlin, Brassard, Bussieres ve Godbout, 2009 ve Arnault, Amblard, 2014). Sonuç olarak klasik oyun teorisi kuantum bilgisayarlarına has kuantum özelliklerinin olduğu durumlarda oyunların nasıl sonuçlar vereceğini inceleyen kuantum oyun teorisi alanına doğru çevrilmiştir. Tez çalışmasında öncelikle yakın zamanlarda yeni yeni incelenmeye başlayan üç durumlu kuantum sistemleri tanımlayan bilgi birimi kutritleri temel alarak hesaplamalar yapılmıştır. Bu tez çalışmasının kuramsal temellerini de bu bağlamda genel açıdan kuantum mekaniği, kuantum enformasyon teorisi dar anlamda ise kuantum yazı-tura oyunları oluşturmaktadır. Tezin ilk bölümünde kuantum kutrit dolanıklığı, iç içe geçmiş eş merkezli iki kürenin skaler çarpımla yapıştırılmasıyla tanımlanan hiperküre üzerindeki vektörler olarak tanımlanmıştır. Bunun üzerine kutrit temelli dolanık vektörlerin skaler çarpım veya yapıştırma işlemcisiyle ayrılarak çeşitli kuantum geçitleriyle manipüle edilmesi gösterilmiştir. Tezin ikinci bölümünde fano düzlemindeki noktalar öncelikle kutritler cinsinden tanımlanmıştır. Daha sonra bu düzlem renk çemberine uyarlanmış ve bu düzlem "renk çemberi pusulası" olarak tanımlanmış ve adlandırılmıştır. Son aşamada ise çeşitli kuantum geçitleri arasına sıkıştırılan kutrit durumların izledikleri örüntüler "renk çemberi pusulası"nda incelenmiştir. Son bölümde ise kutrit durumlar 4 farklı renk telinin etkileşimleri türünden örgüler açısından tanımlanmış ve diğer özellikleri örgüler üzerinden incelenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde öncelikle kuantum mekaniğinin dayandığı temel ilkeler ile kuantum bilgi teorisinin temel ilkeleri genel olarak verilecektir. Kuantum bilgi teorisi alt başlığında kubit ve kutrit sistemler ve geçitler matematiksel olarak tanımlanacaktır. EPR paradoksu ve dolanıklık kavramı açıklanacaktır. İkinci aşamada ise klasik olarak oyun teorisi çeşitli bilinen oyunlar açısından verilecek en sonunda kuantum oyun teorisi ele alınacaktır.

2.1 Kuantum Mekanîği

Kuantum mekaniğinin deneysel verilerden elde edilerek atom altı parçacıkların hem dalga hem de parçacık olarak kabul edilmesini anlamamızı sağlayan temel ilkelerin Heisenberg ve De Broglie ilkeleri olduğu söylenebilir (Reinbach, 2014). Heisenberg belirsizlik ilkesi de bir parçacığın konumu ne denli doğrulukla ölçülürse buna karşılık gelen belirsizliğin aynı oranda büyük olacağını söylemektedir ($[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$). Temel olarak kuantum mekaniğinin önermeleri şu şekilde verilebilir:

Önerme 1: Yalıtılmış bir sistemin durumu karmaşık bir uzay olan ve durum uzayı olarak da adlandırılan Hilbert uzayında temsil edilir. Bir sistemin durumu Ψ dalga fonksiyonu ile tanımlanmaktadır. Örneğin, iki alt sistem olan A ve B durumlarının birleştirilmiş bir kuantum sistemi, başka bir deyişle Hilbert uzay elemanları, her iki sistemin ketleri arasındaki tensör çarpımıyla oluşturulur:

$$|\Psi_{AB}\rangle = |\Psi_A\rangle |\Psi_B\rangle \quad (2.1)$$

Bu kural n alt sisteme genişletilebilir:

$$|\Psi_{AB\dots N}\rangle = |\Psi_A\rangle |\Psi_B\rangle \dots |\Psi_N\rangle \quad (2.2)$$

Önerme 2: Klasik mekanikte her gözlenebilire kuantum mekaniğinde bir işlemci karşılık getirilir ve işlemciler ($[\hat{x}, \hat{p}_x] = \hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{x} = i\hbar$) komitasyon bağlantısını sağlayacak biçimdedir.

Önerme 3: Bir \hat{A} işlemcisine eşlik eden gözlenebilirin ölçülmesinde gözlenebilen yegane değerler $\hat{A}\Psi = a\Psi$ özdeğer denklemini sağlayan a özdeğerleridir. Bu noktada \hat{A} ya karşılık gelen gözlenebilirin ölçmek için kullanılan spektrum değerleri a_1, a_2, a_3, \dots ' dir. Kuantum mekaniksel işlemciler hermityen işlemciler olmalıdırlar. A^\dagger hermityen eşleniği şu şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi_2 | A | \psi_1 \rangle = \langle \psi_1 | A | \psi_2 \rangle^* \quad (2.3)$$

Kendi eşleniğine (adjoint) eşit işlemcilere Hermityen işlemci denir ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$A^\dagger = A \quad (2.4)$$

Bir hermityen işlemcinin eşleniği ise aşağıdaki bağıntılarla bulunabilir:

$$A^\dagger | \psi \rangle = A | \psi \rangle \quad (2.5)$$

$$\langle a | A^\dagger | b \rangle = \langle b | A | a \rangle^* \quad (2.6)$$

Önerme 4: Bir sistemin iyi davranışlı ψ dalga fonksiyonu ile belirlenebiliyorsa o zaman bir A işlemcisine karşılık gelen gözlenebilirin ortalama değeri:

$$\langle A \rangle = \langle a | A | b \rangle \quad (2.7)$$

olarak hesaplanır.

Önerme 5: Kapalı bir sistemde fonksiyon uniter bir biçimde evrilirken dışarıdan bir etki geldiğinde ölçüm gerçekleşir. Yukarıdaki ilkeler doğrultusunda bir kuantum sisteminde ölçüm M ile gösterilmek üzere basit bir devre diagramı ile verilebilir. Bir $|\Psi\rangle$ kuantum durumunun yoğunluk işlemcisi denklem 2.8 ile verilir:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| \quad (2.8)$$

Yoğunluk işlemcisi bir kuantum durumunun saf veya karma durumlardan oluşma ölçütünde kullanılan bir değişkendir. Bu ölçüt s ile tanımlanır ve

$$S = \langle \sigma \rangle = \text{tr}(\sigma\rho) \quad (2.9)$$

ile verilir. Eğer $s < 1$ ise ρ karma durumdur, $|s| = 1$ ise ρ saf durumdur. Burada s vektörü σ geçitinin beklenen değeridir.

Kuantum ölçümler $\{M_m\}$ ölçüm işlemcileriyle aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_m = |m\rangle\langle m| \quad (2.10)$$

Hilbert uzayı $|\Psi\rangle$ ket şeklinde vektörel olarak gösterilen ve girişim ilkesine göre yazılabilen vektörlerin doğrusal toplamlarının ve bu vektörlerin karmaşık katsayılarının doğrusal toplamlarını içine alan soyut bir uzaydır. Bununla beraber Hilbert uzayı sadece karmaşık katsayıları olan vektörlerin doğrusal olarak toplandığı bir uzay değil, ayrıca pozitif skaler çarpıma da sahip bir uzaydır. Bu bağlamda skaler çarpımın özellikleri simetri, doğrusallık ve pozitif olmak olarak verilebilir.

Hilbert uzayında vektörlerin çeşitli özellikleri vardır. **Simetri özelliği**, $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$ iki vektör olmak üzere $\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle^*$ olduğunu gösterir. **Doğrusallık özelliği**, $\langle\psi_2|\Psi\rangle = \langle\psi_2|(c_0|0\rangle + c_1|1\rangle) = c_0\langle\psi_2|0\rangle + c_1\langle\psi_2|1\rangle$ olarak verilebilir. Pozitif olma ise sıfırdan farklı her $|\psi_1\rangle$ vektörü için $\langle\psi_1|\psi_1\rangle > 0$ olarak verilir. **Diklik özelliği**, Hilbert uzayında temel vektörler birbirlerine dik olduğunu yani $\langle\psi_2|\psi_1\rangle = \delta_{12}$ olduğunu gösterir. Eğer $|\Psi\rangle$ ise $\langle\Psi|\Psi\rangle \geq 0$ 'dır ve bu pozitiflik olarak nitelenir. Hilbert uzayında işlemci de bu noktada vektörleri birbirlerine doğrusal olarak haritalayan bir fonksiyon olarak tanımlanır. Sonlu bir Hilbert uzayında işlemciler, birim işlemcidir yani eşleniği ile kendisinin çarpımı birim işlemciye eşittir.

2.2 Kuantum Bilgi Teorisi

2.2.1 Kubitler ve Tek Kubit Geçitleri

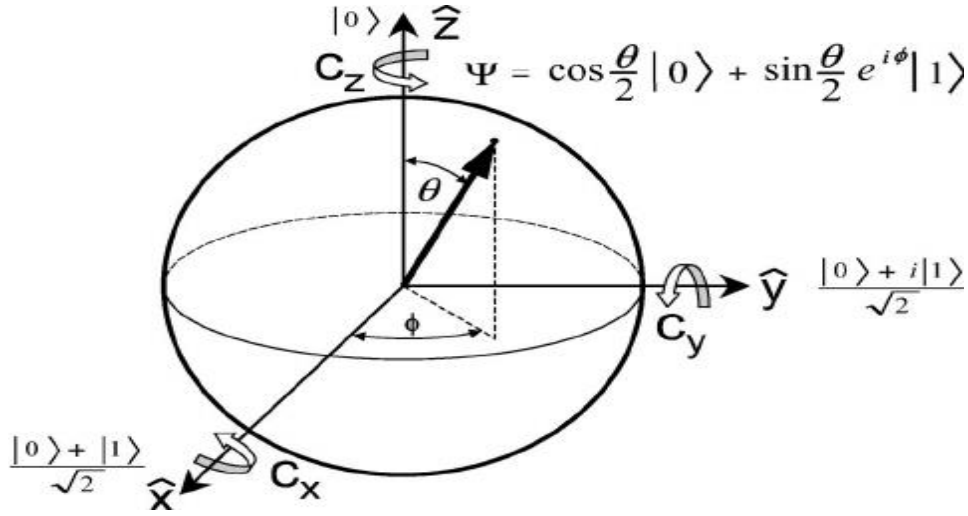
Bilgi teorisinin temel birimleri bitler olarak ele alınabilir. Klasik bitler iki duruma sahip normal klasik bit ve bu iki durumun normalize edilmiş kombinasyonlarına sahip olasılıklı bit olarak ikiye ayrılabilir. Klasik bilgi 0 veya 1 olarak bitler şeklinde saklanmaktadır. Klasik bitler klasik mantık geçitleriyle birbirlerine dönüştürülür.

Kuantum bilgi teorisinin en temel birimi kubitlerdir. Kubitlerin klasik bitlerden en önemli farkı, kubitleri “girişim” halinde yazılabilmesidir. Matematiksel olarak $I = \frac{1}{2}$ sistemleri için karşılık gelen Pauli matrislerinin seviyeleri, tek kubitlik kuantum seviyeleri olarak adlandırılmaktadır. Başka bir deyişle $|\mathbf{1}/2\rangle = |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $|1\rangle = |-\mathbf{1}/2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ şeklinde spin durumlarına göre iki durum elde edilir. Tek kubitlerin bütün durumları Bloch küresinde kutuplayıcı vektör s vektörüyle gösterilmektedir (.Schumacher, Westmoreland, 2010). Bir kubitin genel durumu Bloch vektörü R_3 'deki bütün topu tarayan bir vektör olarak tanımlanabilir (Şekil 2.1) ve kartezyen koordinatlarda şu şekilde verilir. $r = (x, y, z)$, $|r| \leq 1$ için olmak üzere

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta \text{ için}$$

$|\Psi\rangle$ r ' a karşılık gelen kuantum durum 2.11'deki gibi e verilir

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} = |0\rangle \cos \frac{\theta}{2} + |1\rangle e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.11)$$



Şekil 2. 1. Bir kubit'in Bloch küresi üzerindeki geometrik temsili

Kubit kavramını matematiksel olarak betimlemenin bir diğer yolu da kubit durumlarını geometrik olarak, Şekil 2.1' de verilen bir birim küre yüzeyi üzerinde noktalar olarak temsil etmektir. Bloch küresi olarak ifade edilen bu küre, kuantum hesaplama ve kuantum bilgi teorisi açısından tek bir kubitin görselleştirilmesine ve üzerinde kubit ile ilgili pek çok işlemin tanımlanabilmesine olanak sağlamaktadır. Ancak genelleştirilmiş halinin olmaması nedeniyle, Bloch küresi üzerinden çoklu kubit tanımlamaları yapabilmek şu an için mümkün değildir. Bu tezde kubit durumları daha üst düzey uzaylarda ifade edilmeye çalışılmıştır.

2.2.1 Tek Kubit Geçitleri

Klasik bilgi teorisinde verileri işlemek için kullanılan mantık kapılarına benzer olarak, kuantum bilgi teorisinde de mantık kapıları kullanılmaktadır. Kubit sistemleri manipüle eden ve değiştiren matematiksel işlemciler ise kubit geçitler olarak tanımlanmaktadır. Tek kubitli kuantum geçitlerinin ilk özelliğinin eşlenikleriyle çarpımlarının birim işlemcisini vermeleri olduğu söylenebilir. Klasik değil kapısının kuantum versiyonu olarak ilk önce bir Pauli işlemcisi olarak X geçiti

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I_x = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| \quad (2.12)$$

olarak verilebilir.

Y işlemcisi ise,

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = I_y = |1\rangle\langle 0| - i |0\rangle\langle 1| \quad (2.13)$$

olarak verilebilir.

Z işlemcisi ise,

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = I_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \quad (2.14)$$

olarak verilebilir. Kuantum bilgi teorisinde Hadamard geçiti özel bir öneme sahiptir. 'Hadamard geçiti H harfi ile temsil edilir. Kuantum mantık geçitleri arasında en yaygını olan Hadamard geçiti, uygulandığı kuantum bilgi sistemini süperpozisyon durumuna getirmektedir. Bir kubitlik sistemde Hadamard geçitinin matris temsili,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

olarak verilir. Hadamard işlemcisinin kubitler üzerine etkisi işe aşağıdaki gibi verilebilir:

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |0\rangle + |1\rangle, \quad (2.15a)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |0\rangle - |1\rangle \quad (2.15b)$$

Hadamard geçiti iki önemli özelliğe sahiptir. İlk olarak $|0\rangle$ saf durumunu tamamen düzgün konuma, yani $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarının katsayılarının özdeş olduğu duruma çevirmesi; ikinci olarak kendinin zıddı (self invers) bir işlemci olmasıdır ki, bu da H işlemcisi art arda iki kez uygulandığında hiçbir şey yapılmamış duruma döndürür. Son olarak, Hadamard işlemcisi Pauli geçitleri türünden ifade edilebilir. Örneğin X ve Y Pauli geçitleri türünden bir Hadamard geçiti şu şekilde ifade edilir:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} (X + Z) \quad (2.16)$$

2.2.2 İki Kubit Geçitleri

Çoklu kubitler; $n=1, 2, 3, \dots$ olmak üzere $2n$ elemanlı sütun vektörü ya da öz durum fonksiyonu olarak gösterilir ve bir kubitlik sistemden türetilir. Kubitler sadece tek durumlu $|0\rangle, |1\rangle$ kubitlerinin tensör çarpımıyla iki kubit durumlar elde edilir. Türetmede tensör çarpımı esas işlemidir. Direkt çarpım örneğin $|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$ olarak ifade edildiğinde

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

olarak ifade edilir. Benzer şekilde diğer çarpım kombinasyonları buldukları uzayı tarayan bu kuantum kubit çiftleri matris formunda aşağıdaki gibi verilebilir:

$$|00\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |11\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

olarak verilir. Temel taban durumlar $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$, $|11\rangle$ olmaktadır. İlgili dalga fonksiyonu ise 2.19'daki gibi verilir:

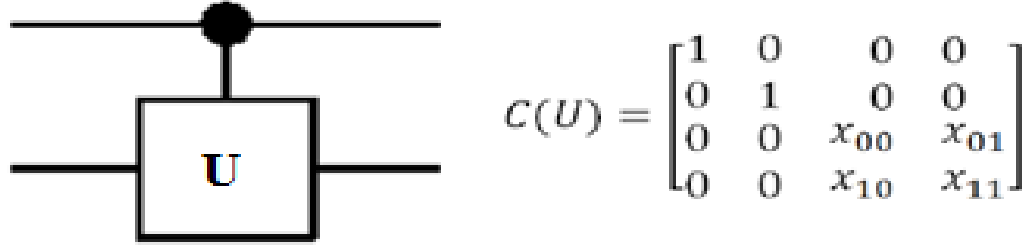
$$|\Psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \quad (2.19)$$

Yukarıdaki fonksiyonun herbir kubit çiftine indirgenmesi, x üzerine işlem yapıldıktan sonra $|a_x|^2$ olasılığıyla verilebilir.

İki kubitli geçitler, iki kubitli kuantum durumlarına etki eden ve değiştiren matematiksel geçitler olarak tanımlanabilir. Krönecker çarpımı olarak bilinen tensörel çarpım için; $M \times N$ boyutlu A matrisi ile $P \times Q$ boyutlu B matrisi çarpılırsa tensörel çarpımı sonucu C matrisi $(M \times P) \times (N \times Q)$ boyutlu bir matris olacaktır. O halde denklem 2.20'de verilen işlemi iki kubitli geçitlerin elde edilmesinde de kullanabiliriz. Örneğin herhangi bir kubit durumunu girişim durumuna dönüştüren Hadamard geçitini aşağıdaki gibi iki kubitlik geçit halinde ifade edebiliriz:

$$H \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

İki kubitlik geçitlerin bir kısmı, iki tek kubitlik sistemin genişletilmesiyle elde edilen ürünler iken, bir kısmı da ancak iki kubitlik sistemlerde geçerli olan mantık geçitleridir. İki kubitlik geçitlerin önemlileri: CNOT, SWAP, Toffoli veya CCNOT ve CSWAP geçitleridir.

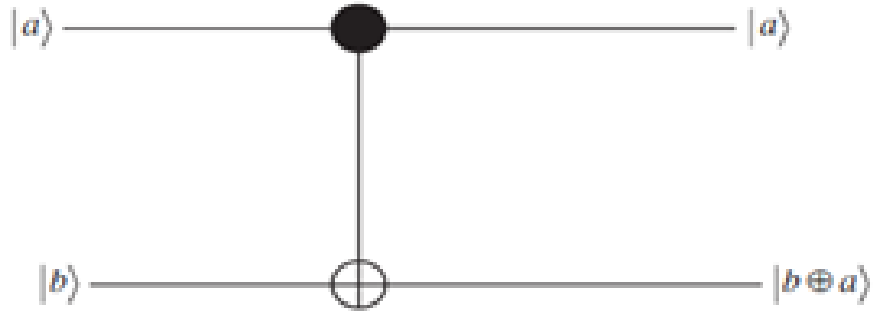


Şekil 2. 2. Kontrollü-U geçitlerinin genel devre çizimi ve matris gösterimi

Bir işlemcide herhangi bir kübitin durumu başka bir kübitin durumuna bağlı ise, bu işlemcilere kontrollü işlemciler denmektedir. İki Kübit geçitlerin özgül olarak en bilinenleri Kontrollü-U (Controlled U) geçitleri ifade edilmektedirler (Şekil 2.2). Burada U birim işlemcisinin yerine, değil (X) işlemcisi konularak Control-NOT işlemcisi veya Hadamard işlemcisi konularak Kontrollü-Hadamard işlemcisi yazılabilir. Burada U tek kübitlere uygulanan bir işlemcidir ve çeşitli özellikleri denklem 2.21'deki gibidir:

$$U = \begin{bmatrix} X_{00} & X_{01} \\ X_{10} & X_{11} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |00\rangle \xrightarrow{U} |00\rangle, |01\rangle \xrightarrow{U} |01\rangle, |10\rangle \xrightarrow{U} |1\rangle U |0\rangle &= |1\rangle (X_{00} |0\rangle + X_{10} |0\rangle) \\ |11\rangle \xrightarrow{U} |1\rangle U |1\rangle &= |1\rangle (X_{01} |0\rangle + X_{11} |1\rangle) \end{aligned} \quad (2.21)$$



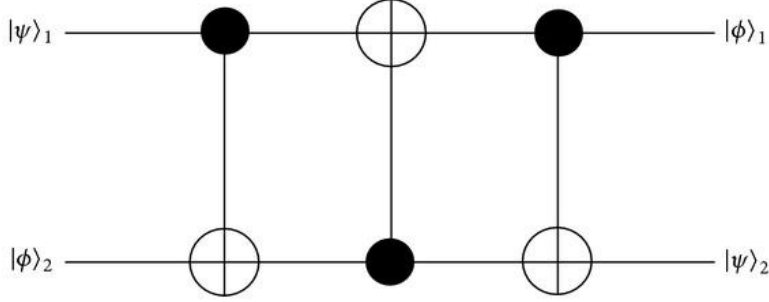
Şekil 2. 3. C-NOT geçitinin devresi

C-NOT işlemcisi Şekil 2.3 (a)'daki gibi ifade edilebilir. Şekil 2.3 (b)'deki gibi iki Hadamard bir Controlled-Z işlemcisi biçiminde yazılabilir. CNOT işlemcisi kontrol kübitin durumu $|1\rangle$ ise hedef kübitin durumunu tersine çevirirken; kontrol kübitin durumu $|0\rangle$ ise hedef kübitin durumunu değişmez bırakmaktadır. İki kübitlik

bir $|ab\rangle$ kuantum sistemi dikkate alındığında, burada a kontrol kütbiti, b ise hedef kütbit olarak alınırsa,

$$CNOT_a |ab\rangle = |a, a\oplus b\rangle \quad (2.22)$$

Denklem 2.21’de bahsettiğimiz gibi, Kontrol-U geçitleriyle her tip Control- geçiti elde edebiliriz. Örneğin Kontrollü-Hadamard geçitini elde etmek istersek, kontrol kütbitini $|0\rangle$ olarak ele alırsak hedef kubitte hiçbir etki olmayacağını göstermektedir.



Şekil 2. 4. Swap geçitinin devre gösterimi

Diğer bir kuantum geçiti ise Swap geçitidir. Swap geçitinin en önemli özelliği uygulandığı kuantum bilgi sisteminde kütbitlerin yerlerini değiştirmesidir. SWAP geçiti (Şekil 2.4) iki kütbitlik bir kuantum durumuna uygulandığında şu sonuçlar elde edilir:

$$SWAP |\alpha\beta\rangle = |\beta\alpha\rangle$$

$$|\alpha\alpha\rangle \xrightarrow{SWAP} |\alpha\alpha\rangle, |\beta\alpha\rangle \xrightarrow{SWAP} |\alpha\beta\rangle, |\alpha\beta\rangle \xrightarrow{SWAP} |\beta\alpha\rangle, |\beta\beta\rangle \xrightarrow{SWAP} |\beta\beta\rangle \quad (2.23)$$

Swap geçiti CNOT geçitleri türünden ve matris formunda şu şekilde verilebilir:

$$SWAP = CNOT_a CNOT_b CNOT_a = S \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Bu geçitler dışında Fredkin ve Toffoli geçitleri bulunmaktadır. Ayrıca farklı geçitler temel geçitlerin kombinasyonu ile üretilebilir.

2.2.4 Kutritler (SU(3))

İki olasılıklı klasik bitlerin karşılığı kubitlerle ifade edilirken kutritler ise 3 olasılıklı tritlerle ifade edilmektedir. Ortonormal bazlar 2.25'deki gibi verilirse,

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

bir kuantum durumu kutrit temel durumları türünden aşağıdaki gibi ifade edilebilir. Burada a_0, a_1, a_2 karmaşık sayılardır ve kareleri toplamı 1'e eşittir.

$$|\Psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle + \alpha_2 |2\rangle \quad (2.26)$$

$|a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ olmak üzere kutritler ve kutrit temelli bir dalga fonksiyonu 2.26'daki gibi ifade edilir. Bir kutritin saf durumu, λ , SU(3) Lie grubunun üretici işlemci temsili n , 8 boyutlu birim vektörü göstermek üzere

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{1}{3} (I + \sqrt{3} \bar{n}\lambda) \quad (2.27)$$

olarak ifade edilebilir. λ 'nın bileşenleri hermityendir, izsizdir ve Gell-Mann matrisleri olarak bilinmektedir.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \lambda_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.28)$$

İki Gell-Mann matrisinin çarpımı $\lambda_i \lambda_j = \frac{2}{3} \delta_{jk} + \sum_l d_{jkl} \lambda_l + i \sum_l f_{jkl} \lambda_l$ 'dir. Böylece $\lambda_i \lambda_j - \lambda_j \lambda_i = 2i f_{ijl} \lambda_l$; $\lambda_i \lambda_j + \lambda_j \lambda_i = \frac{4}{3} \delta_{ij} + 2i d_{ijl} \lambda_l$ eşitliğini sağlamaktadır. Kutrit durumlar içinde birçok geçit tanımlanmaktadır. En bilinenleri denklem 2.28'de verilen Gell-Mann işlemcileri ile değil, Hadamard ve diğer döndürme işlemcileridir. Tek kutritlik durumlar için X geçitinin kutrit biçimleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$X^{01} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad X^{02} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad X^{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Kuantum bilgi teorisi açısından Hadamard geçiti saf durumları girişim hale getiren temel geçittir. Ortogonal ve simetrik bir matristir. Tek kubitlik sistemler

yanında, çok kubitlik sistemlere de uyarlanabilir. Hadamard geçitinin kutrit durumları da aşağıdaki gibi verilebilir. Bu Hadamard geçitleri seçici hadamard geçiti olarak tanımlanabilir (Di ve Wei, 2012):

$$H^{01} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, H^{02} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, H^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Kutritlerle kullanılan birçok döndürme işlemcisi vardır. Bununla beraber 2.31’de verilen S döndürme işlemcisi, kuantum kutrit oyunlarında tam döndürme sağladığı için en uygunlarından biri olarak kullanılmaktadır. Benzer biçimde 2.32’de verilen D işlemcisi de, S’in tersi yönde işlemde bulunan başka bir döndürme işlemcisi olarak kullanılmaktadır (Goyal ve diğerleri, 2011; Sharif ve Haydari, 2012):

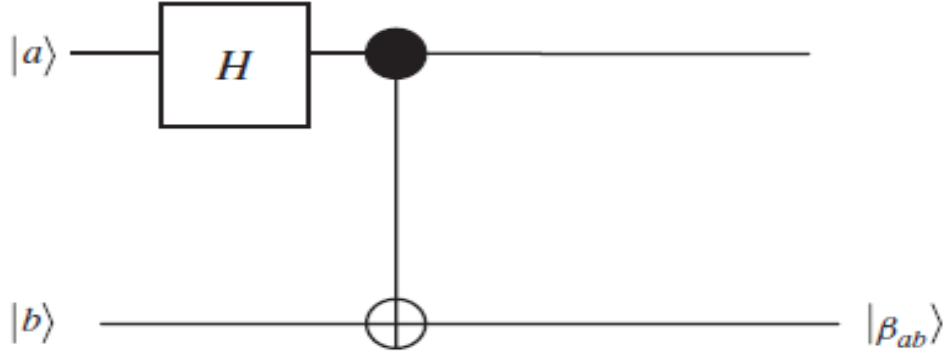
$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad S|0\rangle = |1\rangle, S|1\rangle = |2\rangle, S|2\rangle = |0\rangle \quad (2.31)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D|0\rangle = |2\rangle, D|1\rangle = |0\rangle, D|2\rangle = |1\rangle \quad (2.32)$$

Yukarıdaki döndürme işlemcilerine ek olarak birçok döndürme işlemcisi mevcut olmakla beraber; bu işlemcilerde vektörlerin negatif değerleri verildiği ve oyunların tanımı bağlamında daha karmaşıklaşacağı için döndürme işlemcisi olarak bu iki işlemci ele alınacaktır.

2.2.5 Dolanıklık

Bir kuantum durumunun alt sistemlerinin durumları arasında ilişki varsa iki sistem dolanık olarak tanımlanır. Kutritler bağlamında dolanıklığa $|\Psi\rangle = (|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle + |2\rangle|2\rangle)$ eşitliği bir örnek olarak verilebilir. Çünkü klasik çarpıma göre herhangi bir sayı parantezine alınamamaktadır. Bununla beraber bu çarpım vektörel skaler çarpımla ayrıştırılabilmektedir. Tezde bu çarpım yapıştırma çarpımı olarak ele alınmıştır. Bir önceki örnek bu bağlamda $|\Psi\rangle = (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)\Omega (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$ yazılabilir. Dolanık olmayan durumlar ise klasik çarpımla ayrılabilirler. Örneğin $(|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle + |0\rangle|2\rangle) = |0\rangle(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle)$ durumu $|0\rangle$ kutritiyle klasik çarpma işlemine göre paranteze alınabildiği için dolanık olmayan ayrıştırılabilen bir durumdur.



Şekil 2. 5. Dolanıklık oluşturma devresi

Kuantum bilgi teorisinde en önemli mantık devrelerinden birisi de Bell durumlarını elde etmeyi sağlayan dolanıklık devresidir. Bu devrede öncelikle kubit duruma Hadamard geçiti uygulayarak girişim durumu oluşturmaktayız. Sonrada bu biti ise control biti olarak C-NOT kapısına yönlendirmekteyiz. Hedef kubit $|b\rangle$ $|b = 0\rangle$ veya $|b = 1\rangle$ olarak ele alınırsa Kontrol-NOT geçidinin hedef ürünü \bar{a} , a değil göstermek üzere Bell durumları üretilir (Şekil 2.5):

$$\beta_{ab} = \frac{|0,b\rangle + (-1)^a |1,\bar{a}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.33)$$

Kuantum geçitleri kullanarak kubitlerde dolanık durumları veren genel bir formül verilebilir. Bu formüle göre temel Bell dolanık durumları aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\beta_{00} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}, \beta_{01} = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}, \beta_{10} = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}, \beta_{11} = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.34)$$

Kubit bir durumun dolanık olup olmadığı çeşitli yollarla test edilebilir. $|\Psi\rangle$ fonksiyonu iki tek kubitlik kuantum durumunun çarpımı şeklinde aşağıdaki gibi ifade

edilmek üzere, $|\Psi\rangle = |\varphi\rangle|\phi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ durumu eğer $ad=bc$ ise ayrık, değilse dolanık

bir durum olarak tanımlanabilir. Kubit bir durumun dolanık olup olmadığı Pauli temsiliyle de incelenebilir. Tek kubitli bir sistem için Pauli temsili ρ yoğunluk işlemcisi olmak üzere

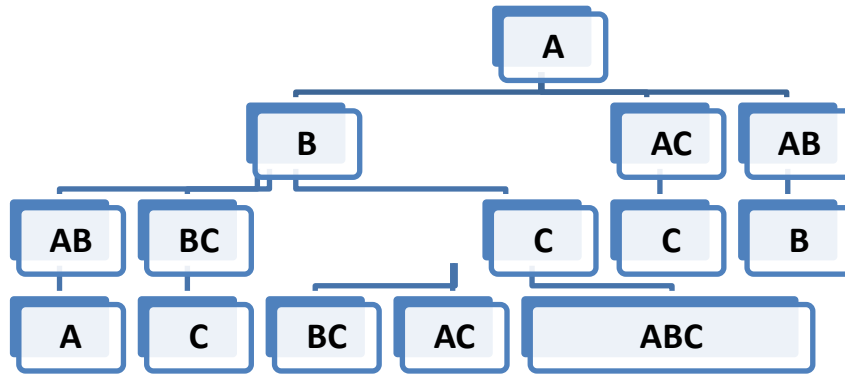
$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 c_i \sigma_i \quad (2.35)$$

olmak üzere ve $c_i = Tr(\rho \sigma_i) = \langle \sigma_i \rangle$ olmak üzere eğer yoğunluk işlemcisi ayrılabilir ise $\|c_{11}\| + \|c_{22}\| + \|c_{33}\| \leq 1$ 'dir. Kubit durumlar için kullanılabilecek diğer bir dolanıklık testi ise, Schmidt ayrışımında Schmidt katsayına bakılması olarak

verilebilir. $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_i \lambda_i^2$ şartını sağlamak şartıyla $|\Psi\rangle = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle |b_i\rangle$ formuyla ifade edilen bir kuantum durumunda $Tr_B |\Psi\rangle\langle\Psi|$ bakılarak hesaplanır. Eğer $\lambda_i = 1$ ise kuantum durum ayırık, eğer $\lambda_i > 1$ ise kuantum durum dolanıktır.

3. Klasik Oyun Teorisi

Oyun kuramı belirli oyunlardaki seçeneklerin artı ve eksilerini hem dinamik hem de statik olduğu durumlarda inceleyen ve bu durumlardaki en uygun stratejileri bulmaya çalışan matematiğin bir alt dalıdır. Oyunlar belirlenimli ya da rasgele olarak iki kategoride incelenebilir. Klasik oyun teorisi içerisinde yazı-tura oyunu, mahkûmun çelişikisi oyunu, düello oyunu gibi bir çok oyun mevcuttur. Bu tezdeki analiz kısmına en yakın iki klasik oyunun ise yazı-tura ve triello oyunu olduğu belirtilebilir. Klasik yazı tura oyunlarında zemin birim ve değil işlemcisi olarak düşünülürse para yüzeyleri de 0 ve 1 bitleriyle tanımlanabilir. Klasik oyunlar olasılık ayarlarıyla oynanarak beklenen durumların daha optimize hale getirecek şekilde çözülebilmektedir. Yazı-tura oyunu dışında birçok klasik oyun mevcuttur. Örneğin klasik triello oyunu buna örnek verilebilir. Klasik triello oyunun kuralları şu şekildedir (Nesin, 2002): Oyun üç kişi arasında oynanmaktadır. Önce A sonra B sonra C birer kurşun sıkmaktadır. Her oyuncu sırası geldiğinde pas geçebilir. Bir turda en fazla bir kez kurşun sıkılır. A-B-C turu tamamlandıktan sonra oyun aynı sırayla ikinci tura döner. Yukarıdaki oyunun tek tur olduğunu varsayalım



Şekil 2. 6. Bir turluk triello oyununun dallanması (Nesin, 2002)

Şekil 2,6 analiz edildiğinde en sağ dalda A'nın C'yi vurarak AB durumuna geleceği ve B tarafından vurularak B'de dalın sonlanabileceği bir durum elde edilebilir. A'nın B'yi vurarak AC durumuna geleceği ve C tarafından vurularak C durumunda dalın sonlanacağı bir durum da mevcuttur. A'nın oyunu pas geçerek B'ye sırayı geçireceği

ve B'nin de benzer şekilde ya C ya da A'yı vurarak AB ve BC durumlarından A ve C durumlarına indirgeneceği ya da C'ye oyunu aktararak C'nin A'yı vurmasıyla BC, B'yı vurmasıyla AC veya oyunu pas geçerek hepsinin yaşayacağı ABC durumuyla oyunun bitebileceği bir dal da mevcuttur (Nesin, 2002). Oyun tek tur olduğu için şema burada bitmektedir fakat daha fazla turda oyun uzamaya devam edecektir. Klasik triello oyunu oyuncuların birbirlerini sevmesine göre veya atıcılık becerilerine göre çeşitlendirilebilir. Örneğin A en çok B'den B en çok A'dan C'de en çok A'dan nefret ederse bu oyun nefret edilme sırasına göre BAA olarak adlandırılabilir. Bu şekilde BAA, BAB, BCA, BCB, CAA, CAB, CCA, CCB olarak sekiz farklı şekilde nefret edilmeye göre oyun kurulabilir. Benzer bir kural oyunculara farklı hayatta kalma şansları verilerekte yapılandırılabilir.

4. Kuantum Oyun Teorisi

Kuantum oyunları ise en temel şekliyle, klasik oyunların kuantize edilmiş halidir. Başka bir deyişle, klasik durumlar kuantum oyunlarında quantum bilgi birimi olan kubit, kutrit vb. ile ifade edilir. Ayrıca klasik oyunlardan farklı olarak, kuantum oyunları kuantum girişim durumlarını ve klasik dünyada görülmeyen dolanıklık, girişim gibi kuantum etkilerini içerir. Kuantum yazı tura oyunu ise, klasik yazı tura oyunundan daha farklı geniş bir uzayda oynanmaktadır. Çünkü, oyuncuların elinde kuantum geçitlerini kullanabilme imkanı da vardır. Klasik oyunlarla kuantum oyunlar arasındaki fark en iyi aşırı uç bir örnekleme birisi klasik bilgisayarları diğeri ise kuantum bilgisayarla yazı tura oyunu oynayan Alice ve Bob adlı iki oyuncunun hamlelerini analiz edilebilir. Bu oyunda temel bilgi biriminin kubit olarak ele alındığını ve paranın yazı gelme durumunun u (up=yukarı) ile ve tura gelme durumunun ise d (down=aşağı) ile ifade edildiğini düşünelim. Bunların matematiksel olarak $u = |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ve $d = |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ olduğunu varsayalım. Bob adlı kuantum oyuncunun u gelmesi durumunda +1 Alice adlı klasik oyuncunun u gelmesi durumunda -1, kuantum oyuncunun d gelmesi durumunda -1 klasik oyuncunun d gelmesi durumunda +1 aldığını kural olarak koyalım. Bu durumda klasik oyuncunun hamlelerinin zemini klasik bir bilgisayar olarak ele alırsak “değil” veya “birim” operatörleriyle sınırlıdır. Fakat kuantum oyuncunun Hadamard geçiti gibi girişim durumları sağlayan geçitleri olduğunu da görebiliriz. Başka bir deyişle kuantum oyuncu daha geniş bir uzayda oynamaktadır. Örneğini, oyun $\frac{1}{\sqrt{2}}(u + d)$ durumu ile

başlasın ve ilk hamle yapacak kişi klasik bilgisayarlı oyuncu olsun o halde bu oyuncu sadece $\{\sigma_x, I\}$ kullanabilecektir ve denklem 2.36 ve 2.37'deki iki durumdan birisini elde edebilecektir:

$$I \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(u + d) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(u + d) \quad (2.36)$$

$$\sigma_x \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(u + d) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}(d + u) \quad (2.37)$$

Bununla beraber kuantum oyuncunun Pauli işlemci geçitleri ve Hadamard geçitleri gibi birçok geçiti ve stratejisi bulunmaktadır. Örneğin hadamard geçitini iki kere üst üste girişim durumuna uygularsa hep u (up=yazı) durumu elde edebilir (2.38). Böylece oyun eğer girişim durumuyla başlarsa ve kuantum oyuncu yazıyı seçerse oyunu klasik oyuncu ne yaparsa yapsın kazanabilir. Matematiksel olarak bu durum,

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$$

$$Hu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+d)$$

$$HHu = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = u \quad (2.38)$$

şeklinde ifade edilebilir. Özetle klasik ve kuantum yazı-tura oyunu kıyaslanacak olursa ikisi arasındaki fark Çizelge 2.1'deki gibi verilebilir (Grabbe, 2005).

Çizelge 2. 1. Klasik ve kuantum yazı-tura oyunu arasındaki fark

		Bob	Alice	Bob	Alice
Klasik Yazı Tura Oyunu	u durumu	X veya I	X veya I	X veya I	U gelirse Alice +1 yoksa -1 D gelirse Bob +1 değilse -1
Kuantum Yazı Tura Oyunu	u durumu	H	X veya I	H	Bob hep kazanır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Giriş

Bu bölümde ilk olarak araştırmada kullanılacağı için çeşitli kutrit geçitleri ve bunların kutritler üzerindeki etkileri incelenecektir. İkinci olarak, eş merkezli hiperküre tanımlanacaktır. Üçüncü olarak, fano düzlemi ve kutritlerin fano düzleminde tanımlanması yapılacaktır. Son olarak ise, kutrit durumlar düğümler cinsinden ifade edilecektir. Burada yapılan tanımlamalar ve araçlar ise bulgular kısmında kullanılacaktır.

3.2 Simetri ve Çeşitli Kutrit Geçitleri ve Bunların Kutritler Üzerine Etkisi

Simetri, fiziksel dünyayı anlamamızda en önemli matematiksel ve kavramsal araçlardan birisidir. Özellikle örgülerin betimlenmesinde sıklıkla kullanılacağı için çeşitli simetri türlerine değinilmesi faydalı olabilir. Fiziksel bir durumun simetrik özelliklerini anlamamızda, matematikte kullanılan grup teorisi önemli bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu teori içerisinde tanımlanmış çeşitli geçitler ve işlemciler kullanılarak, çeşitli matematiksel nesnelerin özellikleri anlaşılabilir. Bir nesneye dönüşüm uygulandığında nesnenin aynı kalmasını sağlayan özellik simetri olarak tanımlanabilir.

Modern matematikte gruplar, simetri dönüşümleriyle tanımlanmaktadır. Matematiksel olarak bir grubun özellikleri, simetri dönüşümlerinde kapalılık, ardışık özelliği göstermesi, her elemanın tersinin bulunması ve birim işlemci olması olarak verilebilir. Zaten bir uzay geometrik olarak içerisindeki nesnelerle değil bu nesnelerin dönüşümünü sağlayan simetri özellikleriyle tanımlanır. Farklı uzaylar farklı simetri grupları tarafından tanımlanmaktadır. Matris çarpımları grupları karakterize etmektedir. Farklı görünen fakat aynı simetri dönüşümlerine sahip gruplar izomorfik olarak tanımlanmaktadır. Bir nesnelere sisteminin kendisine izomorfizmi ise otomorfizm olarak adlandırılmaktadır. Nesnelerin uzunluk ve açıları koruyan simetri dönüşümü gruplar uzayı tanımlamaktadırlar. Simetri dönüşümleri genel olarak; üç boyutlu uzay, düzlemde uzunluk ve açıları koruyan bir eksen üzerinde dönme veya bir referans eksenine veya hattına göre yansımaları içermektedir. Gruplar simetri açısından sürekli ve sonlu olarak ikiye ayrılırlar. Sürekli grup her noktasında analitik ve pürüzsüz eğer eleman sayısı sonlu ise sonlu

grup denmektedir. Global simetri, uzay-zamana bağılı olmayan simetridir. Local simetri ise uzay zamana bağılı simetridir (Atkins, Friedman, 2005).

Kutrit durumlar için çeşitli işlemci ve geçitlerin ne olduğunu ve hangi özelliği sağladığını grup teorisi ile daha iyi anlayabiliriz. Kubit durumları için Pauli işlemciler ve Bloch küresi kullanılmaktaydı. Kubit durumların Bloch küresinin genelleştirilebilmesi ve kutrit durumlarında yoğunluk işlemcisinin tanımlanabilmesi başka bir deyişle SU (3) grubunun parametrizasyonu için Gell-Mann işlemcileri kullanılmaktadır. Gell-Mann matrisleri Pauli işlemcilerin üç boyutlu genellemeleri olarak ele alınabilir. Çizelge 3.1’de denklem 2.28’de verilen Gell-Mann işlemcilerinin kutrit durumları üzerine etkisi gösterilmiştir. Dikkat edilirse Gell-Mann işlemcileri kutrit durumları sadece reel uzayı değil sanal uzayı da aktarmaktadır.

Çizelge 3. 1. Gell-Mann işlemcileri ve kutritlere etkileri

Gell-Mann İşlemcileri (GM)	GM 0)	GM 1)	GM 2)
$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	1)	0)	0
$\lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	-i 1)	i 0)	0
$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	0)	- 1)	0
$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	2)	0	0
$\lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}$	i 2)	0	-i 0)
$\lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	0	2)	1)
$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$	0	i 2)	2)
$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} 0)$	$\frac{1}{\sqrt{3}} 1)$	$\frac{-2}{\sqrt{3}} 2)$

Üç veya daha fazla değerli mantık sistemleri için seçicilik ortaya çıkmaktadır. Seçici değil işlemcisi { |0), |1), |2)} kutritlerinden denklem 2.29’da verilen |0) ↔ |1) arası döndürme yapan X^{01} , |0) ↔ |2) arası döndürme yapan X^{02} , |1) ↔ |2) arası döndürme yapan X^{12} olarak tanımlanabilir.

Çizelge 3. 2. Seçici değil işlemcisi ve etkileri

	X^{ij}	$X^{ij} 0\rangle$	$X^{ij} 1\rangle$	$X^{ij} 2\rangle$
$X^{01} =$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 2\rangle$
$X^{02} =$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$ 2\rangle$	$ 1\rangle$	$ 0\rangle$
$X^{12} =$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$ 0\rangle$	$ 2\rangle$	$ 1\rangle$

Seçici Hadamard işlemcisi $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ kutritlerinden denklem 2.30'da verilen $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarını girişim haline getiren H^{01} , $|0\rangle$ ve $|2\rangle$ durumlarını girişim haline getiren H^{02} , $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ durumlarını girişim haline getiren H^{12} olarak tanımlanabilir. Dikkat edilirse girişim durumuna tekrar Hadamard işlemcisi uygulanırsa durum ilk duruma dönmektedir.

Çizelge 3. 3. Seçici Hadamard İşlemcisi

	H^{ij}	$H^{ij} 0\rangle$	$H^{ij} 1\rangle$	$H^{ij} 2\rangle$
$H^{01} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle + 1\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle - 1\rangle)$	$ 2\rangle$
$H^{02} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle + 2\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (1\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle - 2\rangle)$
$H^{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (0\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (1\rangle + 2\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (1\rangle - 2\rangle)$

Herhangi bir cismin, molekülün çeşitli özelliklerinin anlaşılmasında kullanılabilecek diğer bir önemli işlemci ise döndürme işlemcisi olarak tanımlanabilir. Dönme ve diğer işlemcilerin anlaşılmasında grup teorisinin önemli bir teorik bakış noktası olduğu söylenebilir. Bir nesne veya molekül merkezinden geçen bir eksen etrafında ve saat yelkovanı yönünde $\Theta=360/n$ derecelik bir açıyla döndürüldüğünde başlangıç konumundan ayırt edilmeyen bir şekle sahip olunuyorsa buna dönme işlemi denir ve C_n ile gösterilir. Burada n sayısı 360 dereceye ulaşmak için kaç kez dönme yapılacağını gösterir. Örneğin C_2 için dönme açısı 180 C_3 için 120 derecedir. Bir cisimde n'i farklı birçok eksen bulunabilir fakat n sayısı en büyük olana ana eksen denir. C_2 döndürücüler, iki temel eksen üzerinde döndürme yapan işlemcilerdir. E birim işlemci olmak üzere, örneğin iki C_2 işlemcisinin ard arda uygulanması birim işlemciyi vermektedir. Çizelge 3.4 'de görüldüğü gibi C_2 döndürme işlemcisi $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ temel eksenlerinden birisini sabitlemekte diğer iki eksenini ise tersine çevirmektedir.

Çizelge 3. 4. Bir C_2 döndürücüsü ve kutritler üzerine etkisi

C_2	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 2\rangle$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$	$ 0\rangle$	$- 1\rangle$	$- 2\rangle$

C_3 döndürme işlemcisi, üç eksen üzerinden 120°'derecelik döndürme yapan işlemci olarak tanımlanabilir (Çizelge 3.5). Özdeşlik işlemi ise I ve E ile gösterilmek üzere cisimi aynı konumda bırakma işlemi olarak tanımlanmaktadır. C_3^+ saat yönünde 120 derece, C_3^- saat yönünün tersi yönde 120 derece döndürme yapmaktadır. Böylece,

$$C_3^- C_3^+ = I = E \quad (3.1)$$

olur. Denklem 3.1 C_3 grubunu saat yönüne göre tasnif etmeyi veya ters işlemciyi tespit etmemizi sağlar. Örneğin C_3^+ işlemcisi olarak denklem 2.31'de verilen S ve C_3^- işlemcisi olarak denklem 2.32'de verilen D'yi ele alırsak

$$D S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

olduğu görülür. Yukarıda verilen C_3 ve C_2 grupları için çarpım özellikleri daha detaylı olarak çarpım tablolarında incelenebilir.

Çizelge 3. 5. Bazı C_3 döndürücüler ve kutritler üzerine etkisi

C_3	$C_3 0\rangle$	$C_3 1\rangle$	$C_3 2\rangle$
$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$ 1\rangle$	$ 2\rangle$	$ 0\rangle$
$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$ 2\rangle$	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$ 2\rangle$	$- 0\rangle$	$- 1\rangle$

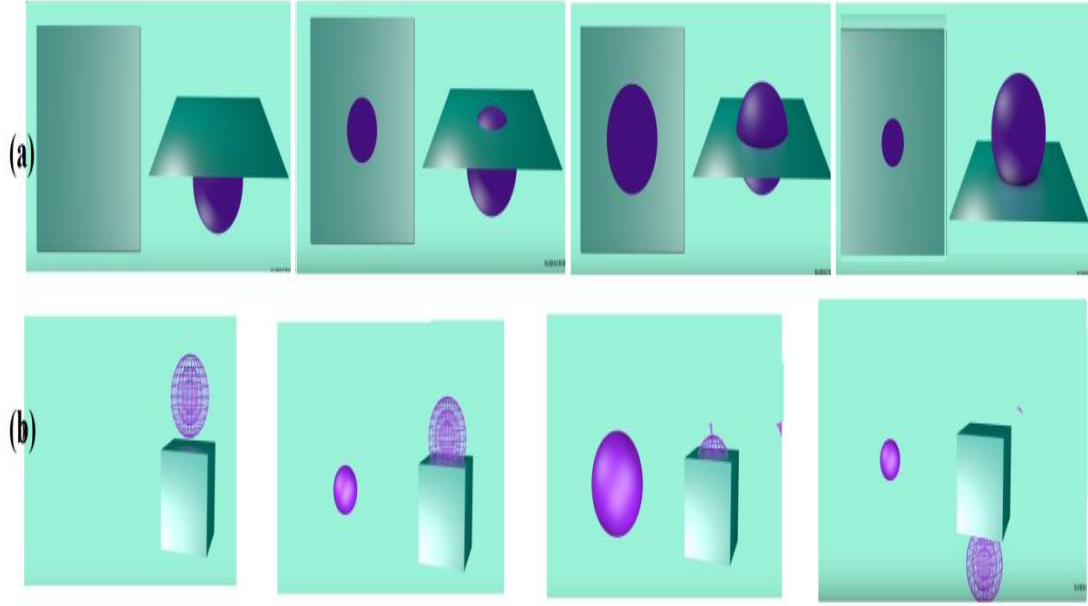
Çizelge 3. 6. Bazı ters çevirme ve ayna işlemcileri ve kutritler üzerine etkisi

σ	$\sigma 0\rangle$	$\sigma 1\rangle$	$\sigma 2\rangle$
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$	$- 0\rangle$	$- 2\rangle$	$- 1\rangle$
$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$- 0\rangle$	$ 2\rangle$	$ 1\rangle$

Yansıtma işlemcisi ise, bir cisim ayna görüntüsü vermek üzere yansıtma işlemidir. İki boyutlu bir düzlemde simetri düzlemi, ana simetri eksenine dikse σ_h ana simetri düzlemi içinde kalıyorsa σ_v ile gösterilir. Ayna işlemcileri Çizelge 3.6'daki gibi verilebilir. Simetri işlemi yalnızca bir tane orijinal yansıtma işlemi üreteceği için $\sigma\sigma=E=I$ 'dir. Ayna işlemciler eğer üç boyutlu kartezyen koordinatta ele alınıyorsa bu sefer yansıtma eksene göre değil, düzleme göre yapılır. Eğer x düzlemi üzerindeki bir vektör yz düzlemine göre yansıtılacaksa σ_{yz} uygulanır. Eğer y düzlemi üzerindeki bir vektör xz düzlemine göre yansıtılacaksa σ_{xz} uygulanır. Eğer z düzlemi üzerindeki bir vektör xy düzlemine göre yansıtılacaksa σ_{xy} uygulanır.

3.4 Hiperkürenin Tanımlanması

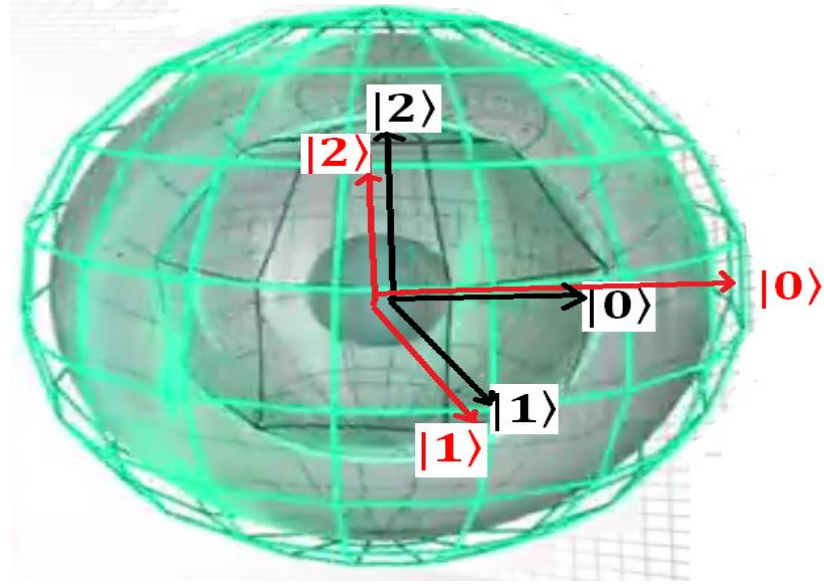
Klasik olarak bir küre için bir denklem $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ olarak tanımlanmaktadır. Benzer şekilde dört boyutlu bir hiperküre ise bir boyut eklenerek, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2$ olarak tanımlanır. Bir hiperküreyi çok boyutlu uzayda hayal etmek zordur. Fakat üç boyutlu bir uzaydan geçen hiperkürenin nasıl davranacağı analogik olarak tahmin edilebilir. Öncelikle iki boyutlu bir yüzeyden bir kürenin geçtiğini hayal edersek kürenin önce yüzeyde bir nokta, daha sonra ise büyüyen ve küçülen daireler şeklinde görüleceği söylenebilir (Şekil 3.1 (a)). Benzer şekilde bir hiperkürede üç boyutlu uzayda önce nokta şeklinde bir misket, sonra büyüyen ve küçülen küreler olarak görüleceği söylenebilir (Şekil 3.1 (b)).



Şekil 3. 1. İki boyutlu bir düzlemden geçen kürenin ve üç boyutlu bir küpten geçen hiperkürenin davranışı

Bir çember iki adet çizginin yapışık hali, bir küre ise iki diskin yapışık hali olarak düşünülebilir. Üç boyutta ise yapıştırma yapılamamaktadır (Ingemar, Zycowski, 2006). Bununla beraber hiperküre topolojik olarak yapıştırma işlemi dışında kubbe projeksiyonuyla elde edilebilir. Bu noktada böyle bir şeyi gerçekleştirmek için izdüşüm türleri incelenebilir. Örneğin stereographik izdüşümde bir küre bir düzleme yansıtılır. Dikey izdüşümde üç boyutlu yansıtılacak düzleme dikey bir ışık kümesiyle yansıtılır, merkezi izdüşümde küre üzerindeki tüm büyük dairelerin izdüşümleri düz çizgiler olarak ele alınır ve izdüşüm referans noktası kürenin merkezidir. Lambert eşit alan izdüşümünde ise, küre bir daire üzerine yansıtılır. Kubbe biçimli izdüşümde ise küre üzerindeki her bir nokta kürenin dışındaki başka bir küre ekrana yansıtılır. Bu aynı Planetaryun gibi düşünülebilir. Böylece sanki bir kürenin üzerindeki şekilleri dışındaki perdeden bir küreye izdüşümle aktardığımızı düşünerek, bir hiperküre tanımlayabiliriz. Burada küre en az iki ve daha fazla birleşik veya yapışık küre olarak tanımlanabilir. Şekil 3.2 'de verildiği gibi iki yapışık küreye indirgenmiş bir hiperküre sanal kısmı sanal sayılardan, iç kısmı ise reel sayılardan oluşan bir yapı olarak ele alınabilir. Burada işlemin gösterme biçimine göre hiperkürenin tanımı ve indirgenmesi değişebilir. Bir hiperküre fiziksel olarak birçok şekilde hayal edilebilir. Örneğin farklı renkteki

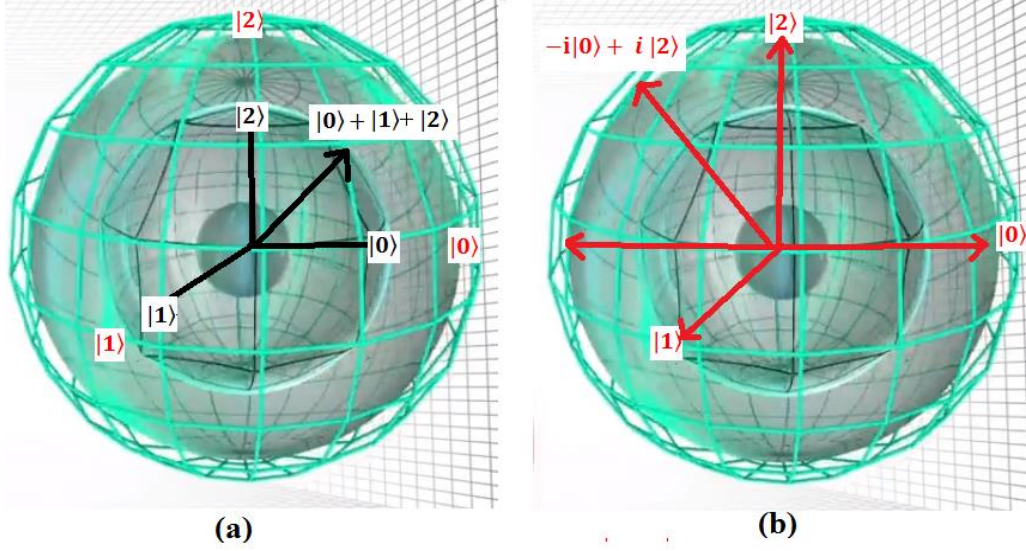
ipliklerin düğüm ve bağlanmaları türünden bir iplik yumağının dış kısmı sanal iç kısmı reel sayılarda oluşacak şekilde düşünülebilir.



Şekil 3. 2 Hiperküre eş merkezli biri sanal diğeri gerçek iki yapışık küre olarak tanımlanabilir (Duran, Gençten, 2016 a; Pickover, 2002)¹

Örnek olarak elimizde iç küresi reel dış küresi sanal sayılardan oluşan yapışık bir hiperküre olduğunu varsayalım ve bu kürenin iç kısmındaki $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ temel durumlarını λ_5 Gelmann işlemcisinin sanal küreye aktarmasını şekil 3.3’ deki gibi görebiliriz. Görüldüğü gibi λ_5 iç küredeki bir vektörü dış küreye ötelemektedir. Bu aslında kuantum teorisindeki matrislerin sanal kısımlarının hiperuzayda gösterilerek bu tip olguları somutlaştırmak açısından önemli olduğu söylenebilir.

¹ (Şekil <https://www.youtube.com/watch?v=ciM6wigZK0w&t=386s>’ dan uyarlanmıştır).



Şekil 3. 3. λ_5 işlencisinin temel kutrit durumuna hiperküre üzerinde etkisi

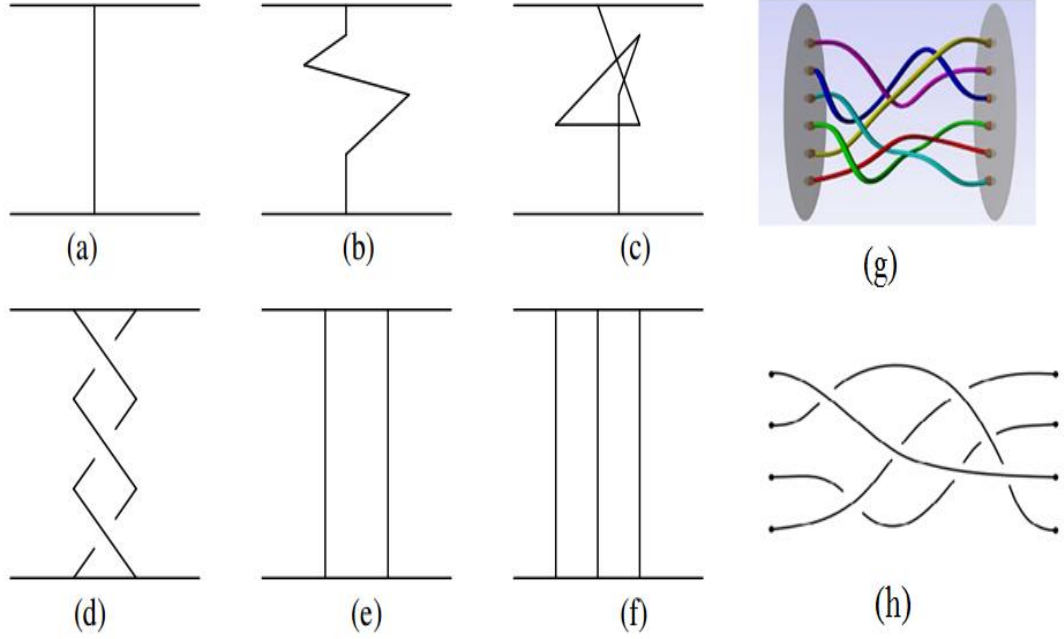
Şekil 3.3 (a)'da $|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle$ vektörün Şekil 3.3 (b)'deki $-i|0\rangle + i|2\rangle$ durumuna λ_5 aracılığıyla dönmesi hiperküre üzerinde gösterilmiştir.

3.5 Örgüler Kuramı

Örgüler matematik, biyoloji, fizik gibi birçok alanda uygulaması olan matematiksel yapılardır. Örgüler kuramı bugün fizikte birçok alanda kullanılmaktadır. Jogesh Pati ve Muhammed Abdussalam ilk olarak 1974 yılında ortaya atılan preon modeli, olarak Haim Harari ve Michael A. Shupe (birbirlerinden bağımsız olarak) geliştirilen Rishon modeli (RM) buna örnek verilebilir. Bu tezde her ne kadar formal örgü teorisi ve matematiksel yapısı tam olarak kullanılsa da kavramsal şemalar örgü teorisinden alındığı için kısaca değinilecektir. İnsanlık tarihinde her kültürde ve her desende gördüğümüz örgülerin soyut matematiksel olarak çalışan ilk kişilerden birisi Emil Artin'dir. Bir örgü iki paralel disk arasında iplik uçlarından kayma ve çıkma gibi bir olanağın olmadığı iplik kümesi olarak tanımlanabilir. Matematiksel olarak bir örgü D diski içerisinde n adet nokta olan p_1, p_2, \dots, p_n sabitlersek, n adet iplik üzerindeki geometrik bir β örgüsü (b_1, b_2, \dots, b_n) patikalarının topağı veya değişkenler grubu olarak aşağıdaki koşulları sağlamak koşuluyla tanımlanır:

- (i) Bütün $t \in I$ için $b_i(t) \in \{t\} \times D$.
- (ii) $1 \leq i \leq n$ için $b_i(0) = (0, p_i)$ tümü.
- (iii) $\pi \in S_n$ olmak üzere $b_i(1) = (1, p_{\pi(i)})$ olarak bir permutasyon vardır.

(iv) Bütün $i \neq j$ ve bütün $t \in I$ için $b_i(t) \neq b_j(t)$ 'dir.

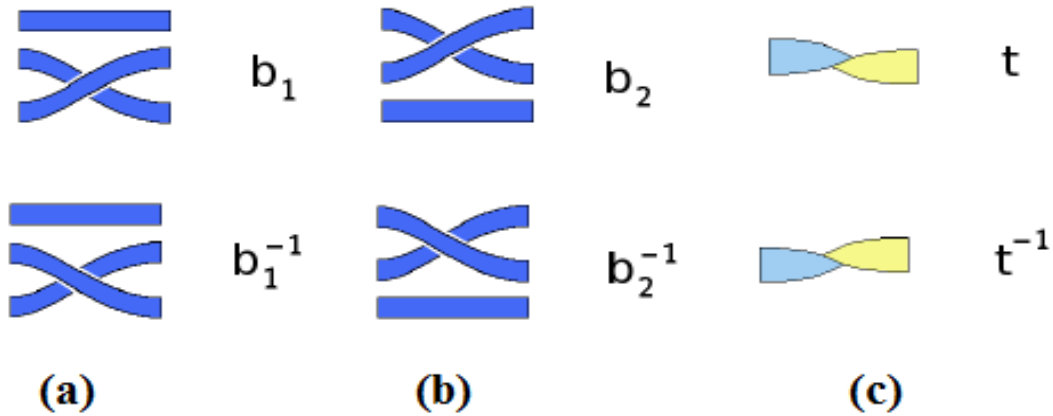


Şekil 3. 4. Çeşitli örgü örnekleri (Dalvit, 2011; Kartal, 2007)

Özetle bir örgü sadece (b_1, b_2, \dots, b_n) olarak n adet patikadan oluşmamaktadır $(b_1(I), b_2(I), \dots, b_n(I))$ olarak ayrıca görüntüsünün patikalarından oluşmaktadır. Hem b_i hem de $b_i(I)$ görüntüsü bir örgünün i 'inci ipliği veya sicimi olarak tanımlanmaktadır ve β örgüsü tarafından oluşturulan permutasyon ise π ile tanımlanmaktadır. Bir örgü $I \times D$ içindek, birbirinden ayrık ve tekdüze belirli iki paralel disk $\{0\} \times D$ ve $\{1\} \times D$ üzerindeki sabit noktalarda birleşen patikalardan oluşmaktadır (Şekil 3.4 (a), Şekil 3.4 (b), Şekil 3.4 (d), Şekil 3.4 (e), Şekil 3.4 (f), Şekil 3.4 (g)). Bununla beraber Şekil 3.4 (c) bir örgü değildir. Bir örgü diagramında n adet topolojik aralık olarak $I \times R$ içindeki iplikçilerden oluşmaktadır (Şekil 3.4 (h)). Eğer örgüler uç noktaları sabit olmak kaydıyla ve iplikleri birbirine karışmamak şartıyla birbirlerine deforme oluyorsa birbirlerine denk kabul edilebilir. İki adet geometrik örgü, ikisinin uç noktaları birbirine birleştirilerek ve yeni birim aralığına örgüyü yeniden ölçeklendirilerek yapılabilir. β ve γ n ipliklili ve sırasıyla π ve σ permutasyonlarına sahip iki örgü olsun, $\delta = \beta * \gamma$ birleşimi ($\delta = \beta\gamma$ olarak da yazılır) (d_1, d_2, \dots, d_n) patikalar topağıyla ifade edilir ve burada

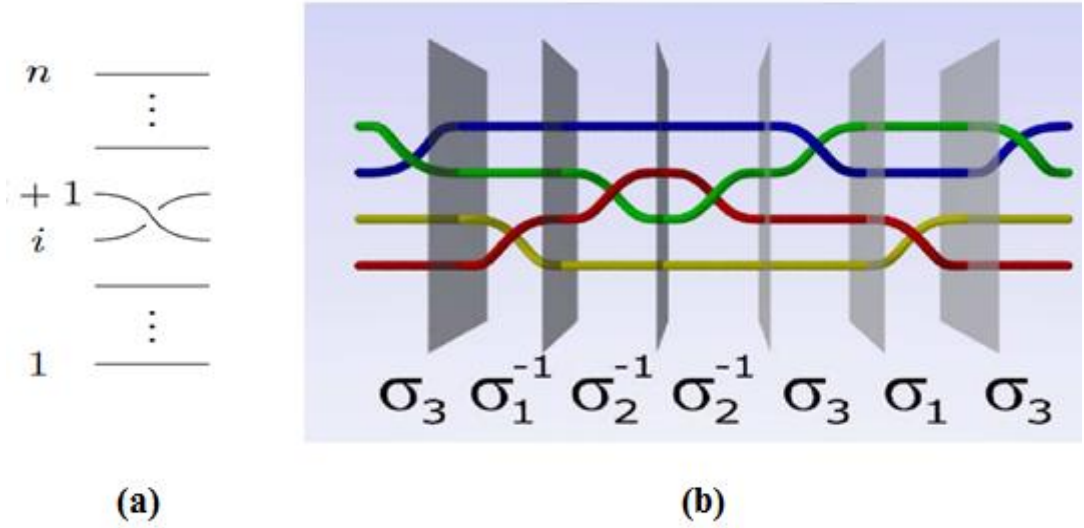
$$d_i(t) = \{(b_i(2t) \text{ eğer } t \in [0, 1/2]; c_\pi(2t - 1) \text{ } t \in [1/2, 1] \} \quad (3.3)$$

Böylece n iplikli σ permutasyonlu bir geometrik örgü olarak δ tanımlanır. Sabit sayıda iplikten oluşan örgüler bir grup oluşturur ve birleşme (associativity) özelliğini gösterir ve ters eleman ve her bir örgü için etkisiz (3.7 c) bulunur. Saf durumdaki örgüler birçok durumda kullanılabilir. Örgüler komutatif (değişim özelliği) göstermezler. Bu kuantum durumlarıyla benzerlik göstermektedir. Bu bağlamda Hilbert uzayı örgüler türünden ifade edilebilir. İki ucu sabit n adet iplikçiklerden oluşan olası β adet örgü $|\beta\rangle$ tabanını vermek üzere ve b_i ve t_i bu uzayda birim işlemcilerle temsil edilmek üzere n adet örgülenmemiş iplikçiden oluşan durum $|0\rangle = |1_n\rangle$ olarak örgülenmemiş iplikçik kümesi olarak doğal bir boşluk durumu vakum olarak tanımlanabilir. Herhangi bir örgü bu doğal vakum durumu $|0\rangle$ 'a etki eden bir durum olarak $|\beta\rangle = m_p \dots m_2 m_1 |0\rangle$ türünden yazılabilir. N iplik sayısı ve düğüm durumu bu bağlamda Hilbert uzayında ortaya çıkan parçacık durumlarını temsil eder. Benzer şekilde bir kuantum durumunun tersi de bu bağlamda $\beta^{-1} = m_1^{-1}, m_2^{-1}, \dots, m_p^{-1}$ olarak verilirse $\beta^{-1}\beta=1$ olarak tanımlanır.



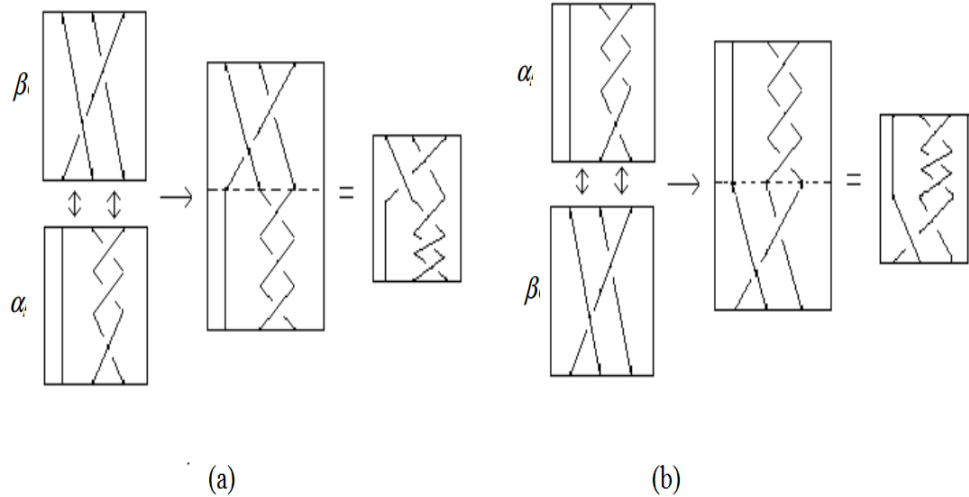
Şekil 3. 5. Çeşitli örgüler ve matematiksel olarak tersi durumları

Fiziksel olarak bir örgünün tanımı yapıldıktan sonra bu örgünün matematiksel olarak tersi de Şekil 3.5'deki gibi tanımlanabilir. Şekil 3.5 (a)'da b_1 olarak tanımlanmış bir örgü durumu ve b_1^{-1} olarak onun tersi Şekil 3.5 (b)'de b_2 olarak tanımlanmış bir örgü durumu ve b_2^{-1} olarak onun tersi, Şekil 3.5 (c)'de t olarak tanımlanmış bir örgü durumu ve t^{-1} olarak onun tersi verilmiştir. Görüldüğü gibi örgüler ipliklerin çeşitli hareketleri açısından temsil edilebilir (Bilson-Thompson, Markopoulou, Smolin, 2006).



Şekil 3. 6. (a) Temel örgü σ_i 'nin örgü diyagramında gösterimi (b) bir çok farklı temel örgü ve ters durumlarında oluşan bir örgü örneği (Dalvit, 2011)

Sonuç olarak bir “temel örgü” $1 \leq i \leq n-1$ için $(i+1)$ 'inci ipliğin i 'inci ipliğin üstünden geçtiği noktada diğer bütün iplikler düz bir hat üzerindeyken σ_i olarak tanımlanabilir (Şekil 3. 6 a). Örgüler birçok temel örgünün ve tersinin birleşimi olarak tanımlanabilir (Şekil 3. 6 b) (Dalvit, 2011; Devadoss, 2015). Bu tanımsal durum kuantum durumlarına uyarlanarak çeşitli hesaplamalar yapılmasında kullanılabilir.



Şekil 3. 7. (a) Örgü çarpımı $\alpha\beta$ (b) Örgü çarpımı $\beta\alpha$ (Kartal, 2007)

Son olarak örgüler arasında çeşitli matematiksel işlemler tanımlanabilir. Örneğin, α ve β iki ayrı örgü olmak üzere, $\alpha\beta$ şeklinde bir çarpım yazılabilir. İlk olarak α ' yı içeren küp β 'yi içeren küple yapıştırılır. Bu küp α ve β nın dik olarak

yapıştırılmasıyla elde edilir (Şekil 3.7). Bu noktada örgülerin matematiksel özellikleri de tanımlanabilir. Genel olarak $\alpha\beta = \beta\alpha$ yazılamaz. Yani $\alpha\beta$ ve $\beta\alpha$ nın denk örgüler olması gerekmez. Bu nedenle örgüler grubu değişmeli değildir. Örgüler değişmeli olmamasına rağmen birleşme özeliğine sahiptir. Yani $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ 'dır. Birim eleman e basit olarak aşikar örgüye denk gelir ve $\alpha e = e\alpha = \alpha$ 'dır.

Örgüler bilginin temsil edilmesinde de kullanılabilir. John Conway tarafından keşfedilen "Hayat Oyunu" ve Stephen Wolfram tarafından popülerleştirilen "Temel Hücresel Otomat" buna örnek olarak verilebilir. Yukarıda belirtilen örneklerde, her hücre yalnızca iki durumdan birinde olabilir. "Bükümlü" tasarımları temsil etmek istediğimizden, daha fazla duruma ihtiyaç duyarız. Holden ve Holden (2016) bu tip bir hücresel otomatı klasik ipliklere uyarlamıştır. Bu uyarlama sonucunda bir çok kombinasyon elde etmişler ve bu kombinasyona göre kurallar tanımlamışlardır. Hücresel Otoma'nın kodlamasına benzer şekilde, bu tanımlara göre klasik olarak çeşitli örgü durumlarını incelemişlerdir (Holden ve Holden, 2016). Sonuç olarak farklı örgü türleri birer bilgi birimi olarak kodlanarak analiz edilebilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde ilk olarak yapıştırma ve birleştirme işlemcileri matematiksel olarak tanımlanacaktır. İkinci aşamada yapıştırma ve birleştirme işlemcisi kullanılarak hiper küre ve hiperküre üzerinde dolanık durumlar incelenecektir. Üçüncü aşamada yazı tura oyunu kutritler türünden incelenecektir. Dördüncü aşamada bazı işlemcilerle sıkıştırılmış yazı-tura oyunu örüntüleri incelenecektir. Daha sonra fano düzlemi üzerinde renk çemberi pusulası tanımlanacaktır. Bu pusula üzerinden bazı işlemcilerle sıkıştırılmış yazı-tura oyunu örüntüleri incelenecektir. Son olarak kuantum kubit ve kutrit durumlar örgüler türünden ifade edilecektir.

4.1 Hiperküre'nin Tanımlanması ve Üzerinde Dolanıklığın İncelenmesi

Bu bölümde ilk olarak yapıştırma çarpımı sonra ise birleştirme çarpımı tanımlanacak ve çeşitli örnekler verilecektir. İkinci aşamada hiperküre yapıştırma çarpımı bağlamında tanımlanacak ve son olarak ise dolanık durumlar bu çarpım türünden hiperküre üzerinde gösterilecektir.

4.1.1 Yapıştırma Çarpımının Tanımı

Tanım 1: (Yapıştırma Çarpımı):

i ve $j = 0,1,2$ kutrit durum indeksleri olmak üzere, $|\Psi_i\rangle$ ve $|\Psi_j\rangle$ iki kuantum vektör olmak üzere yapıştırma işlemcisi şu şekilde tanımlanabilir

$$|\Psi_i\rangle\Omega |\Psi_j\rangle = |\Psi_i\rangle |\Psi_j\rangle \delta_{ij} \hat{t} \quad (4.1)$$

Burada $\delta_{ij} = 1$ olur eğer $i = j$ ise, $\delta_{ij} = 0$ olur eğer $i \neq j$ ise'dir

Örnek 1: Örnek olarak yapıştırma işlemcisi için u ve v olarak iki vektörü verirsek,

$$|u\rangle = |0\rangle \hat{0} + \alpha_{11} |1\rangle \hat{1} + \alpha_{22} |2\rangle \hat{2} \quad |v\rangle = |0\rangle \hat{0} + \alpha_{11} |1\rangle \hat{1} + \alpha_{22} |2\rangle \hat{2} \quad (4.2)$$

Bu ikisinin çarpımı aşağıdaki gibi olur:

$$|u\rangle\Omega |v\rangle = \|\alpha_{00}\|^2 |0\rangle |0\rangle + \|\alpha_{11}\|^2 |1\rangle |1\rangle + \|\alpha_{22}\|^2 |2\rangle |2\rangle \quad (4.3)$$

Burada $\hat{0}$, $\hat{1}$, $\hat{2}$ her bir baz durum için birim yön vektörleridir (i, j, k indislerine tekabül etmektedirler). Burada yapıştırma ile kastedilenin skaler çarpımda olduğu gibi vektörel tabanların çarpılması olmaktadır. Bu bağlamda yapıştırma çarpımının neden skaler çarpım olarak değil de yapıştırma çarpımı olarak ele alındığı sorulabilir. Bunun ilk nedeni çarpımdaki vektörlerin tensorler olması ikinci nedeni ise bu çarpımın ilerleyen bölümlerde farklı bir uzayı tanımlamak için kullanılacak olmasıdır. En önemli neden ise yapıştırma işlemcisi komutatif (değişmeli) değildir. Bu nedenle skaler çarpım olarak adlandırılmamaktadır. Yapıştırma işlemcisinin genel matematiksel özellikleri tensör çarpıma benzemektedir. Çünkü yapıştırma işlemi tabanların skaler çarpımla tensör çarpıma alınma işlemidir. Yapıştırma işlemcisinin bazı matematiksel özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle\Omega|\chi\rangle \quad (4.5)$$

Tensörler üzerindeki yapıştırma işlemcisi dağılma, doğrusallık ve değişebilirlik gösterebilir

$$|\phi\rangle\Omega\{|\chi_1\rangle + |\chi_2\rangle\} = |\phi\rangle\Omega|\chi_1\rangle + |\phi\rangle\Omega|\chi_2\rangle \quad (4.6)$$

$$\{|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle\}\Omega|\chi\rangle = \{|\phi_1\rangle\Omega|\chi\rangle + |\phi_2\rangle\Omega|\chi\rangle\} \quad (4.7)$$

Yapıştırma işlemcisi skaler sayılara doğrusaldır

$$|\phi\rangle\Omega(\alpha|\chi\rangle) = \alpha|\phi\rangle\Omega|\chi\rangle \quad (4.8)$$

Yapıştırma işlemcisi komutatif değildir. Bu nedenle skaler çarpım olarak adlandırılmamaktadır.

$$|\phi\rangle\Omega|\chi\rangle \neq |\chi\rangle\Omega|\phi\rangle \quad (4.9)$$

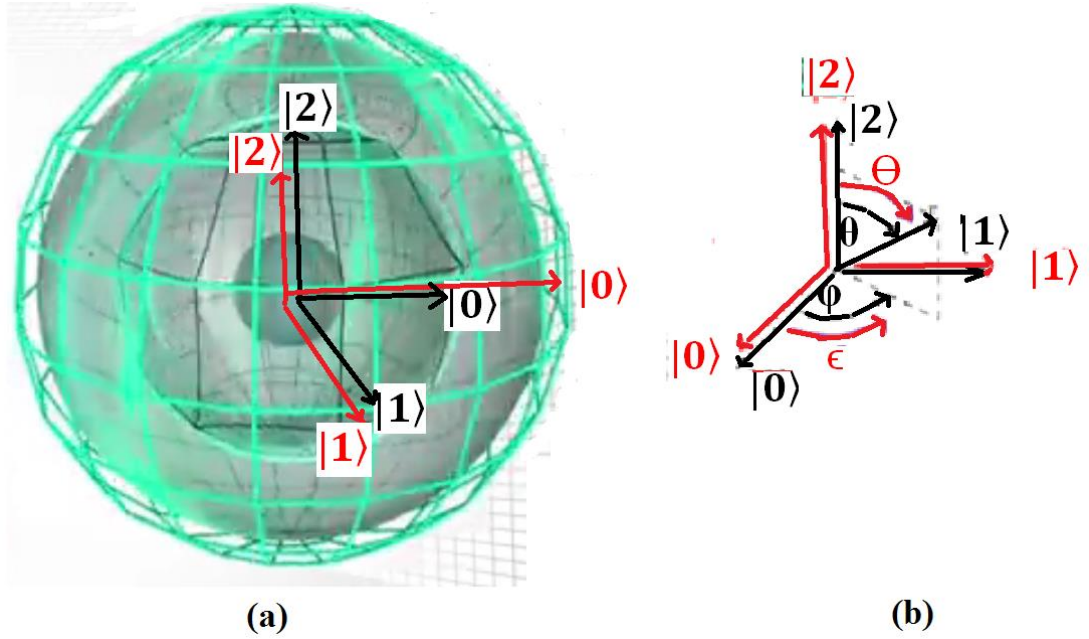
$|u_i\rangle$ 'yi H_1 , $|v_i\rangle$ 'yi H_2 için temel alırsak, $H = H_1\Omega H_2$ yapıştırma işlemcisiyle yeni bir yapışık Hilbert uzayı elde edebiliriz

$$|w_i\rangle = |u_i\rangle\Omega|v_i\rangle \quad (4.10)$$

A ve B iki işlemci olsun ve A $|\xi\rangle$ 'nin üzerine, B $|\varphi\rangle$ 'nin üzerine işlemci olarak uygulansın bu durumda tensör işleme benzer işlemci dağılımını elde ederiz.

$$AB|\Psi\rangle = AB(|\xi\rangle\Omega|\varphi\rangle) = (A|\xi\rangle)\Omega(B|\varphi\rangle) \quad (4.11)$$

4.1.2 Kutrit Temelli Hiperkürenin Matematiksel Olarak Tanımlanması



Şekil 4. 1.(a) Kutrit temelli hiperküre ve (b) koordinatları

Kutrit temelli hiperküre üç boyutlu karmaşık öklit uzayında gerçek ve sanal sayılardan oluşmuş bir küre olarak tanımlanabilir (Şekil (a)). Daha matematiksel bir tanımla eğer ζ sanal ve gerçek sayılardan oluşan kürelerden oluşan bir hiperküre fonksiyonu olarak tanımlanırsa, Ω ise kürenin taban vektörlerini hizalayan yapıştırma işlemcisi olarak tanımlanırsa, kutrit temelli küre şu şekilde tanımlanabilir (burada açı sayısı $i=n-1$, n ise küre sayısı olmaktadır.(Şekil 4.1(b))

$$\zeta_{hiperküre} = \zeta_{gerçek\ 1}\Omega\zeta_{gerçek\ n} \cdots \zeta_{sanal\ 1}\Omega\zeta_{sanal\ n} \cdots K\cos\epsilon_i\cos\varphi_i$$

$$\zeta_{hiperküre} = \Omega_{i,j=1}^{i,j=n}\zeta_{gerçek\ i}\Omega\zeta_{sanal\ j}K_{n-1}\cos\epsilon_{n-1}\cos\varphi_{n-1} \quad (4.12)$$

Burada Ω toplam yapıştırma sembolüdür. Örneğin $n=i$, $j=1$

$$\zeta_{hiperküre} = \Omega_{i,j=0}^{i,j=1}\zeta_{gerçek\ i}\Omega\zeta_{sanal\ j} = \zeta_{gerçek\ 1}\Omega\zeta_{sanal\ 1}K_0\cos\epsilon_1\cos\varphi_1 \quad (4.13)$$

Kubbe şeklinde izdüşümde küreler arası mesafe içerden dışarı doğru genişlemektedir. Fakat burada biz bu mesafeyi ihmal etmekte ve iki yapışık küreyi açı ve yön ölçen bir pusula veya açı ölçer gibi düşünmekteyiz. Kubbe şeklinde izdüşümü yapıştırma işlemcisi çemberler, küreler vb. için kullanılarak yapılabilir.

Örnek 2:

Skaler-tensör işlemciyi yapıştırma işlemcisi olarak daha özel bir adla tanımlama nedenimiz, çalıştığımız uzayın Hilbert uzayından farklı bir uzay olan hiperküre uzayı olmasıdır. Görüldüğü gibi bu tanım üzerinden tek dereceli türevleri normal çarpım şekline dönüştürebiliyoruz. Demek ki hiperküre uzayında işlem yaparken kuantum işlemcilerini bu uzayda yeniden tanımlamamız gerekiyor (Şekil 4.4). Örneğin birinci mertebeden bir türevin yapıştırma işlemcisiyle ele alınması aslında kürenin birini sabitleyip öteki üzerinde türev almaya benzetebiliriz. Zaten klasik türev almada da dikkat edilirse iki sayıdan birini sabitleyip diğerinin türevini alıyorduk. Burada da iki küreden birini sabitleyip diğerinin türevini alıyoruz. Şimdi 4.12’de verdiğimiz bağıntıyı türev ve birim işlemci cinsinden yazalım:

$$\frac{d}{dx} |\Psi\rangle = \frac{d}{dx} (|\Psi\rangle\Omega|\varphi\rangle) = \frac{d}{dx} |\Psi\rangle\Omega I(|\varphi\rangle) + I|\Psi\rangle\Omega \frac{d}{dx} (|\varphi\rangle) \quad (4.14)$$

Şimdi bu işlemi yapıştırma işlemcisiyle ayırılım $\hat{\Theta}$ ve \hat{r} burada çember üzerinde polar koordinatlar olmak üzere sonuç aşağıdaki gibi olur:

$$\left(\frac{d}{dr} |\Psi\rangle\hat{\Theta} + I|\Psi\rangle\hat{r}\right) \Omega\left(\frac{d}{dr} |\varphi\rangle\hat{\Theta} + I|\varphi\rangle\hat{r}\right) \quad (4.15).$$

Sonuç olarak yapıştırma uzayında türev alındığında türev alınan vektör ve bu vektöre teğet vektörler birbirlerine yapışık olarak ifade edilebilirler.

4.1.3 Hiperküredeki Kuantum Dolanıklık Vektörlerinin Tanımlanması ve Manipulasyonu

İki eş merkezli yapışık küredeki bir kuantum durumu şu şekilde verilebilir

$$|\Psi\rangle = |\psi_{iç}\rangle\Omega|\psi_{dış}\rangle \quad (4.16)$$

Vektörler yapışık iki küre üzerinde vektörler iç ve dış olarak 4.16’daki gibi verilirse,

$$|\psi_{iç}\rangle = a_{01}|0\rangle_i + b_{01}|1\rangle_j + c_{01}|2\rangle_k \quad (4.17)$$

$$|\psi_{dış}\rangle = a_{02}|0\rangle_i + b_{02}|1\rangle_j + c_{02}|2\rangle_k \quad (4.18)$$

4.17 ve 4.18’deki vektörleri yapıştırırsak

$$|\psi_{iç}\rangle\Omega|\psi_{dış}\rangle = a_{01}a_{02}|0\rangle|0\rangle + b_{01}b_{02}|1\rangle|1\rangle + c_{01}c_{02}|2\rangle|2\rangle \quad (4.19)$$

Böylece iki taban vektörünün yapışık hali olarak da dolanık bir kuantum durum tanımlanabilir. Görüldüğü gibi iki kürenin ana eksenlerini tensorler için tanımlanmış

skaler bir işlemciyle yapıştırdık. Bununla beraber burda küreler arası açı ve diğer işlemcilerin davranışlarını şu anda hesaba katmadan bunu yaptık. Yapıştırma işlemcisinin tensor çarpımla benzer özellikler gösterdiğini söylemiştik. O halde dolanık bir durum yapıştırma işlemcisiyle ifade edilirse ve bu ifade AB işlemcileri uygulanırsa dağılım şu şekilde gerçekleşir:

$$AB|\Psi\rangle = |\psi_{iç}\rangle\Omega|\psi_{dış}\rangle = (A|\psi_{iç}\rangle)\Omega(B|\psi_{dış}\rangle) \quad (4.20)$$

Buraya kadar hiperküre üzerindeki matematiksel işlemcileri en azından gerekli olanları tanımladığımız söylenebilir. Şimdi hiperküremizdeki küreleri ele aldığımızda, bunların birbiriyle paralel veya dışardan bakan biri için bütün eksenlerinin eşlenik olmak zorunda olmadığını söyleyebiliriz. Örneğin iç küredeki $|1\rangle$ kutriti dış kürede $|2\rangle$ kutritile veya bir girişim durumuyla denk gelebilir. Bu nedenle küreleri sadece yapıştırmak yeterli değildir ayrıca küreleri birbirlerine göre açı değişkenine ve küreler arasında varsa bir etkileşim katsayısına bağlı olarakta tanımlamak gerekmektedir. Şimdi iç kürenin bütün eksenleri ile dış kürenin bütün eksenlerinin çakıştığı durumu ele alalım. Bu durumda 0, 1 eksenlerindeki düzlemin ve 0, 2 veya 1, 2 dikey düzlemindeki katsayı ifadesinin 1 değerini vermesi gerekmektedir. Bunu sağlayan da cos fonksiyonudur. Ek olarak bunun bir skaler çarpım olduğu düşünülürse, denklemi iki cos fonksiyonu üzerinden ϵ ve Θ açılara bağlı olarak Şekil 4.3'deki gibi tanımlayabiliriz. Bu noktada $|\psi_{iç\ küre}\rangle$ ve $|\psi_{dış\ küre}\rangle$ küre üzerindeki vektörler olmak üzere, maksimal durumdaki kutrit dolanık durumu ϵ ve Θ küreler arası açı $\kappa=\{0,1\}$ yapıştırma sabiti ve $|H\rangle$ dolanıklık vektör olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanabilir :

$$|H\rangle = |\psi_{iç\ küre}\rangle\Omega|\psi_{dış\ küre}\rangle K\cos\epsilon\cos\Theta \quad (4.21)$$

Şimdi hiperkürede küreler arası bazı spesifik işlemciler şu şekilde verilebilir: Örneğin küreler arası öteleme işlemcisi ($i=0, j=1, k=2$) ($a=i, j, k$)

$$T^a|\psi_{iç}^a\rangle = |\psi_{dış}^a\rangle, T^a|\psi_{dış}^a\rangle = |\psi_{iç}^a\rangle \quad (4.22)$$

Küreler arası döndürme işlemcisi S ve onun tersi D ise şu şekilde tanımlanabilir .

$$S^a|\psi_{iç}\rangle = |\psi_{dış}\rangle, S^a|\psi_{dış}\rangle = |\psi_{iç}\rangle \quad (4.23a)$$

$$D^a|\psi_{iç}\rangle = |\psi_{dış}\rangle, D^a|\psi_{dış}\rangle = |\psi_{iç}\rangle \quad (4.23b)$$

Küreler içi ayna işlemcisi σ küreler arası σ' şu şekilde verilebilir:

$$\sigma_{xy}|\psi_{iç}\rangle = \sigma_{xy}[a_{01}|0\rangle_i + b_{01}|1\rangle_j + c_{01}|2\rangle_k] = a_{01}|0\rangle_i + b_{01}|1\rangle_j - c_{01}|2\rangle_k \rightarrow \sigma'_{xy}|\psi_{iç}\rangle = |\psi_{dış}\rangle \quad (4.24a)$$

$$\sigma_{xz}|\psi_{iç}\rangle = \sigma_{xz}[a_{01}|0\rangle_i + b_{01}|1\rangle_j + c_{01}|2\rangle_k] = a_{01}|0\rangle_i - b_{01}|1\rangle_j - c_{01}|2\rangle_k \rightarrow \sigma'_{xz}|\psi_{inner}\rangle = |\psi_{dış}\rangle \quad (4.24b)$$

$$\sigma_{yz}|\psi_{iç}\rangle = \sigma_{yz}[a_{01}|0\rangle_i + b_{01}|1\rangle_j + c_{01}|2\rangle_k] = -a_{01}|0\rangle_i + b_{01}|1\rangle_j - c_{01}|2\rangle_k \rightarrow \sigma'_{yz}|\psi_{iç}\rangle = |\psi_{dış}\rangle \quad (4.24c)$$

Küreler içi ve küreler arası vektörel çarpım ise

$$[[a]*|b\rangle]_{inner} = [\varepsilon_{ijk}|c\rangle]_{inner}, [[a']*|b'\rangle]_{outer} = [\varepsilon_{ijk}|c'\rangle]_{outer} \quad (4.25)$$

$$[[a]*|b\rangle]_{inner-outer} = \kappa(\theta, \varphi)[\varepsilon_{ijk}i'j'k'|c\rangle] \cos\epsilon \cos\theta \quad (4.26)$$

A = i, j, k; b = i, j, k; c = i, j, k, a' = i', j', k'; b' = i', j', k'; c' = i', j', k' olmak üzere tanımlanır. Yukarıdaki tanımlar ışığında $\kappa=1$, $\epsilon=0$, $\theta=0$ olmak üzere 4.21 denkleminde aşağıdaki maksimum dolanık durumları elde edebiliriz.

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = a_{01}a_{02}|0\rangle|0\rangle + b_{01}b_{02}|1\rangle|1\rangle + c_{01}c_{02}|2\rangle|2\rangle \quad (4.27)$$

Bu durumda yapıştırma işlemcisi üzerinden S, D ve yansıtma işlemcileri uygun bir şekilde uygulanırsa, hiper küre üzerinde iki vektör üzerinde bütün dolanık durumlar arasındaki ilişkiler Çizelge 4.1'de gösterilebilir. Çizelge 4.1 incelendiğinde, iç küreyi sürekli birim işlemci uygulayarak sabit tuttuğumuzu, dış küreye ise döndürme ve ayna işlemcileri uyguladığımızı görebiliriz.

4.2 Kuantum Kutrit Yazı-Tura Oyunun Çeşitli Değişkenler Açısından İncelenmesi

Bu bölümde ilk olarak kuantum kutrit yazı-tura oyunu ile klasik yazı tura oyunu karşılaştırılması yapılacak, daha sonra kutrit temelli oyunlar çeşitli kuantum işlemcileriyle sıkıştırılarak örüntüleri açısından analiz edilecektir. En son aşamada Fano düzlemi temelinde renk temelli pusula tanımlanacak ve sıkıştırılmış kuantum kutrit yazı tura oyunu örüntüleri bu pusula üstünde analiz edilecektir.

Çizelge 4. 1 Maksimum dolanık iki durumun yapıştırma işlemcisiyle hiper küre üzerinde iki vektör olarak gösterimi

DOLANIK DURUM	İÇ KÜRE	DIŞ KÜRE
$ 0\rangle 0\rangle + 1\rangle 1\rangle + 2\rangle 2\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ I	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ S
$ 0\rangle 1\rangle + 1\rangle 2\rangle + 2\rangle 0\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ I	$ 1\rangle + 2\rangle + 0\rangle$ S
$ 0\rangle 2\rangle + 1\rangle 0\rangle + 2\rangle 1\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ I	$ 2\rangle + 0\rangle + 1\rangle$ S, σ_{xx}
$ 0\rangle 0\rangle - 1\rangle 1\rangle + 2\rangle 2\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ I	$ 0\rangle - 1\rangle + 2\rangle$ S
$ 0\rangle 1\rangle - 1\rangle 2\rangle + 2\rangle 0\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ I	$ 1\rangle - 2\rangle + 0\rangle$ S
$ 0\rangle 2\rangle - 1\rangle 0\rangle + 2\rangle 1\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ I	$ 2\rangle - 0\rangle + 1\rangle$ S, σ_{xx}, σ_{xy}
$ 0\rangle 2\rangle + 1\rangle 1\rangle - 2\rangle 2\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ I	$ 0\rangle + 1\rangle - 2\rangle$ S
$ 0\rangle 2\rangle + 1\rangle 1\rangle - 2\rangle 0\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$ I	$ 1\rangle + 2\rangle - 0\rangle$ S
$ 0\rangle 2\rangle + 1\rangle 1\rangle - 2\rangle 1\rangle$	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$	$ 2\rangle + 0\rangle - 1\rangle$

4.2.1 Kuantum Kutrit Yazı-Tura Oyunu ile Klasik Yazı Tura Oyunun Klasik ve Kuantum Geçitler Açısından İncelenmesi

Genel bilgiler bölümünde bahsedildiği gibi; basit bir şekilde kuantum oyunu klasik bilgi birimlerinin, kuantize edilmesiyle elde edilen matematiksel yapılardır. Bu bağlamda kutrit temelli yazı tura oyununda yazı tura durumları $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ kutritleriyle ifade edilir. Ayrıca kutrit temelli geçitler bu oyunlarda kullanılır.

İlk olarak klasik bir bilgisayara kutrit temelli bir bilgisayarla mücadele ettiğimizi göz önüne alırsak, kutrit temelli bilgisayarın hem üç temel durumu içermesi hem de daha fazla geçitler içermesi nedeniyle, klasik bilgisayara üstünlük sağlayabileceği söylenebilir. Oyunumuzda X ve Y adlı iki oyuncu olduğunu

düşünelim. X oyuncusunun I ve S olmak üzere iki stratejisi olduğunu ve oyunu başlattığını düşünelim. Y oyuncusunun H^{01}, H^{02}, H^{12} olmak üzere iki stratejisi olduğunu düşünelim. Oyunun kuralı gereği, X oyuncusu $|0\rangle$ durumunda +1, $|1\rangle$ durumunda -1, $|2\rangle$ durumunda 0 puan almaktadır. Y oyuncusu $|0\rangle$ durumunda -1, $|1\rangle$ durumunda +1, $|2\rangle$ durumunda 0 puan almaktadır. Oyun X'in parayı hazırlaması da bir hamle kabul edilerek dört hamlede bitmektedir. Oyunun sonunda süperpozisyon durumu ortaya çıkması halinde oyun iptal olmaktadır.

Bu oyunda X oyuncusu $|0\rangle$ yazı $|2\rangle$ tura ve $|1\rangle$ durumlarını hamle olarak hazırlamakta ve Y oyuncusu buna göre I ve H^{01}, H^{02}, H^{12} stratejisiyle cevap vermektedir. Materyal-metotdaki işlemler doğrultusunda hamleleri analiz edelim:

$$|0\rangle \rightarrow H^{01} |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow I \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow H^{01} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow |0\rangle \quad (4.28)$$

X oyuncusu +1 puan alır, kazanır (4.28).

$$|0\rangle \rightarrow H^{01} |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow S \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \rightarrow H^{12} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \rightarrow |1\rangle \quad (4.29)$$

Y oyuncusu +1 puan alır, kazanır (4.29)

$$|0\rangle \rightarrow H^{02} |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |2\rangle) \rightarrow I \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |2\rangle) \rightarrow H^{02} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |2\rangle) \rightarrow |0\rangle \quad (4.30)$$

X oyuncusu +1 puan alır, kazanır (4.30).

$$|0\rangle \rightarrow H^{02} |0\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |2\rangle) \rightarrow S \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow H^{01} \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \rightarrow |0\rangle \quad (4.31)$$

X oyuncusu +1 puan alır, kazanır (4.31).

$$|1\rangle \rightarrow H^{12} |1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) = I \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \rightarrow H^{12} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |2\rangle) \rightarrow |2\rangle \quad (4.32)$$

Her iki tarafta sıfır puan alır berabere biter (4.32).

$$|2\rangle \rightarrow H^{12} |2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) = I \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \rightarrow H^{12} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \rightarrow |2\rangle \quad (4.33)$$

Her iki tarafta sıfır puan alır, berabere biter (4.33).

$$|2\rangle \rightarrow H^{12} |2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) = S \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |2\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle - |0\rangle) \rightarrow H^{12} \frac{1}{2} (|1\rangle + |2\rangle - (|1\rangle - |2\rangle)) \rightarrow |2\rangle \quad (4.34)$$

Her iki tarafta sıfır puan alır berabere biter (4.34). Yukarıdaki oyuna genel olarak bakıldığında kuantum kubit yazı tura oyunundaki gibi ikinci oyuncunun hadamard işlemcileri arasına diğer oyuncuyu sıkıştırarak ($|0\rangle \rightarrow H^{02} \rightarrow I \rightarrow H^{02}$, $|0\rangle, |0\rangle \rightarrow H^{02} \rightarrow I \rightarrow H^{01}$, $|0\rangle \rightarrow H^{01} \rightarrow I \rightarrow H^{01}$) her zaman kazanabileceği stratejileri olduğunu görmekteyiz.

4.2.2 Bazı İşlemcilerle Sıkıştırılmış Kutrit Temelli Yazı Tura Oyunun Birleştirme İşlemcisi Açısından İncelenmesi

Bu bölümde kutrit temelli yazı-tura oyunları çeşitli kutrit geçitleriyle sıkıştırılacak ve birleştirme işlemcisiyle ilişkili örüntüler birleştirilerek, yeni örüntüler incelenecek ve üst kurallar elde edilmeye çalışılacaktır.

4.2.3 S ve I işlemcileri arasına sıkıştırılmış oyunun birleştirme işlemcisiyle örüntülenmesi ve analizi

$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ kutritleriyle başlayan her bir oyunda S döndürme ve I birim işlemcisinin sol dallanmalarda S, sağ dallanmalarda I birim işlemcisi olmak üzere uygulandığı zaman elde edilen örüntü Şekil 4.2’de verilmiştir.

Tanım 3 (Birleştirme Çarpımı): $a = a_{ij}$ ve $b = b_{kl}$ uzayda tanımlı belirli hücreleri tanımlayan iki fonksiyon ve ij, kl ise bu hücrelerin satır ve sütununu temsil eden indisler olsun, bu bağlamda birleştirme işlemcisi

$$\mathbf{a \wedge b} = a_{ij} b_{kl} \quad (4.35)$$

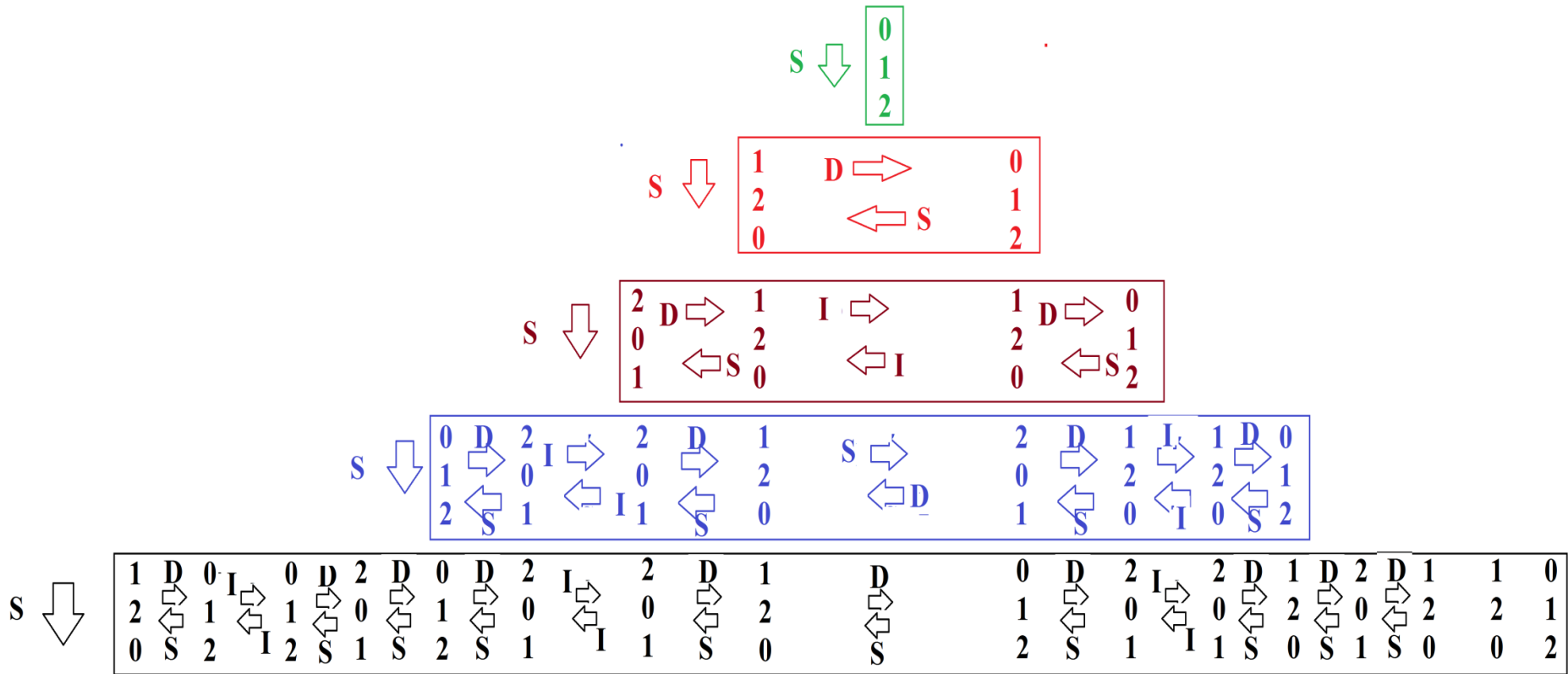
olarak tanımlanabilir. Burada birleştirme işlemcisi hücreleri işlemsel sıraya göre birleştirmekte, başka bir işlem yapmamaktadır. Bu nedenle birleştirme işleminde sıralama önemlidir ve bu yüzden birleştirme işlemi komutatif değildir.

$$\mathbf{a \wedge b} \neq \mathbf{b \wedge a} \quad (4.36)$$

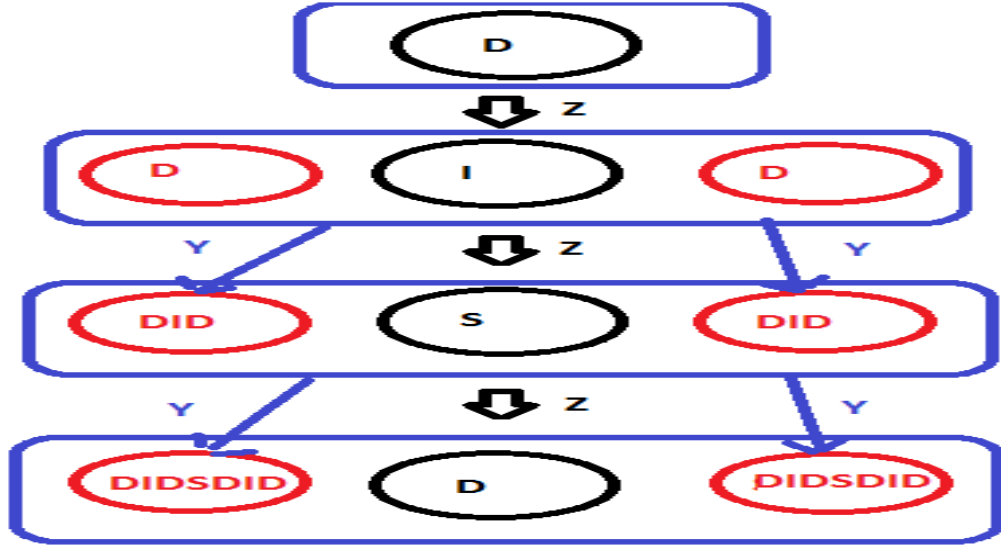
$|0\rangle$ kutritiyle başlayan örüntünün ilk hücresi X_1 , ikinci hücresi X_2 , üçüncü hücresi X_3 , dördüncü hücresi X_4 ve beşinci hücrede X_5 olarak verilirse, $|1\rangle$ kutritiyle başlayan örüntünün ilk hücresi Y_1 , ikinci hücresi Y_2 , üçüncü hücresi Y_3 , dördüncü hücresi Y_4 olarak verilirse ve beşinci hücrede Y_5 , $|2\rangle$ kutritiyle başlayan örüntünün

ilk hücresi Z_1 , ikinci hücresi Z_2 , üçüncü hücresi Z_3 , dördüncü hücresi Z_4 ve beşinci hücrede Z_5 olarak verilirse bu hücrelere sıra numarasına göre birleştirme işlemcisi uygularsak $X_1AY_1AZ_1$ Şekil 4.3'deki gibi yeşil renkli küme olarak nitelendirilebilir. Şekil 4.2'deki birleştirme sonuçlarını renkler cinsinden yazarsak, $X_1AY_1AZ_1 = Yeşil$, $X_2AY_2AZ_2 = Kırmızı$, $X_3AY_3AZ_3 = Kahverengi$, $X_4AY_4AZ_4 = Mavi$, $X_5AY_5AZ_5 = Siyah$ olur.

Şekil4.2'deki birleştirme ürünütülerine baktığımız zaman, hangi renkle nitelendirilirse nitelensin birleştirme ürününe dikeyde S işlemcisinin uygulandığını görmekteyiz. O halde dikeyde S uygulanması bir üst kural olarak nitelendirilebilir (Şekil 4.3). Benzer şekilde yatay sıralardaki ilişkilerde D ve I işlemcisiyle tanımlanabilir. Sırasıyla bu ilişkiler şu şekilde gösterilebilir: $0, D, D \rightarrow I \rightarrow D, D \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow D, D \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow D, D \rightarrow I \rightarrow D \rightarrow S \rightarrow D \rightarrow I \rightarrow D$ veya tersten yorumlanırsa $0, S, S \leftarrow I \leftarrow S, S \leftarrow I \leftarrow S \leftarrow D \leftarrow S \leftarrow I \leftarrow S, S \leftarrow I \leftarrow S \leftarrow D \leftarrow S \leftarrow I \leftarrow S \leftarrow S \leftarrow S \leftarrow I \leftarrow S \leftarrow D \leftarrow S \leftarrow I \leftarrow S$ işlemcisi üzerinden kopyalanarak hareket etmektedir. Yatay işlemcilerin dağılımının Mersenne sayılarına göre arttığını söyleyebiliriz. Mersenne sayısının tanımı $M_n = 2^n - 1$ (Conway, Guy, 2013). Dağılımın merkezindeki işlemcilerin ikinci satırdan itibaren $D \rightarrow I \rightarrow S \rightarrow D$ şeklinde değişmesi ve her hücrenin bir sonraki hücrede sol ve sağ hücreler yaratarak kopyalamasını gözlemlemekteyiz.



Şekil 4. 3. Dikey olarak her bir satırda döndürme işlemcisinin etkisi



Şekil 4. 4. Kutritlerde yatay işlemcilerin hareketini belirleyen üst kural

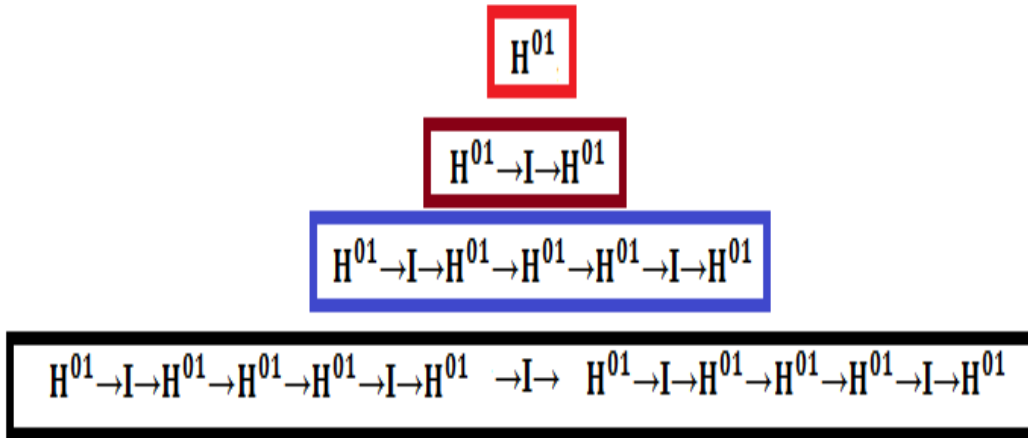
Şekil 4.2 ve Şekil 4.3’de verilen örüntüler bir üst kuralla Şekil 4.4’deki gibi ifade edilebilir. D, I, S birer işlemci olmak üzere her bir işlemciyi dönüştüren işlemci Z ile tanımlanırsa işlemcinin diğer işlemcilere etkisi şu $Z D \rightarrow I, Z I \rightarrow S, Z S \rightarrow D$ olarak tanımlanabilir. Y işlemci ise üst-birim işlemci olarak tanımlanabilir. Örneğin ilk satırdaki D işlemcisine iki Y bir Z uygularsak $YD-ZD-YD = D-I-D$ elde ederiz. (D-I-D) zincirine iki Y ve merkez I’ya bir Z uygularsak $D-I-D-S- D-I-D$ elde ederiz. Görüldüğü gibi birleştirme işlemcisiyle bir üst kural hem yatay hem de dikey ekseninde bulunabilir.

4.2.4 H^{01} ve I işlemcileri arasında sıkıştırılmış oyunun birleştirme işlemcisiyle örüntülenmesi ve analizi

Şimdi kuantum girişim durumlarının örüntüler üzerindeki etkisini incelemek için yazı tura oyununu H^{01} ve I hareket rotasına sıkıştıralım. Şekil 4.6’deki gibi satırları sırayla birleştirelim. $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ kutritleriyle başlayan her bir oyunda S döndürme ve I birim işlemcisinin sol dallanmalarda H^{01} sağ dallanmalarda I birim işlemcisi olmak üzere uygulandığı zaman elde edilen örüntü Şekil 4,6’da verilmiştir. $|0\rangle$ kutritiyle başlayan örüntünün ilk hücresi X_1 , ikinci hücresi X_2 , üçüncü hücresi X_3 , dördüncü hücresi X_4 ve beşinci hücrede X_5 olarak verilirse, $|1\rangle$ kutritiyle başlayan

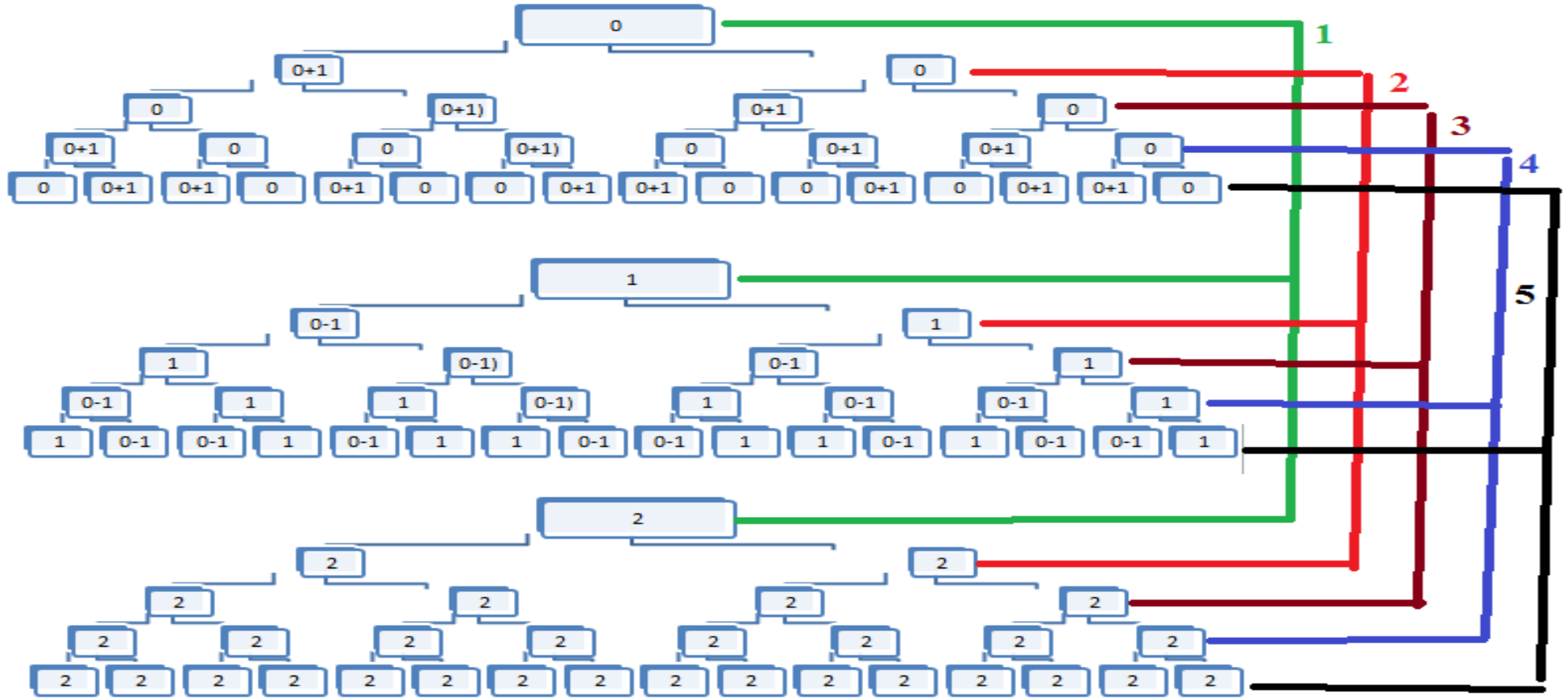
örüntünün ilk hücresi Y_1 , ikinci hücresi Y_2 , üçüncü hücresi Y_3 , dördüncü hücresi Y_4 olarak verilirse ve beşinci hücrede Y_5 , $|2\rangle$ kutritiyle başlayan örüntünün ilk hücresi Z_1 , ikinci hücresi Z_2 , üçüncü hücresi Z_3 , dördüncü hücresi Z_4 ve beşinci hücrede Z_5 olarak verilirse bu hücelere sıra numarasına göre birleştirme işlemcisi uygularsak $X_1AY_1AZ_1$ şekil 4.5'deki gibi yeşil renkli küme olarak nitelendirilebilir. Birleştirme sonuçlarını renkler cinsinden yazarsak, $X_1AY_1AZ_1 = Yeşil$, $X_2AY_2AZ_2 = Kırmızı$, $X_3AY_3AZ_3 = Kahverengi$, $X_4AY_4AZ_4 = Mavi$, $X_5AY_5AZ_5 = Siyah$ olur. Bu birleştirme ürünütülerine baktığımız zaman hangi renkle nitelendirilirse nitelensin birleştirme ürününe dikeyde bir kural uygulanabileceğini söyleyebiliriz. Şekil 4.5'de görüldüğü gibi bu sefer hadamard işlemcisi uyguladığımız için süperpozisyon durumları elde ettik. Çizelge 3.3'de verildiği gibi seçici Hadamard işlemcisi H^{01} işlemcisinin $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ ürünleri sırasıyla $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle), |2\rangle$ 'dir. Bu bağlamda yeşil grup olan 0, 1, 2'ye dikeyde sol tarafta H^{01} sağ tarafta ise S işlemcisi uygulandığı görülmektedir.

Yatay eksende işlemciler kendisini $M_n = 2^n$ sayısı ile çoğaltırlar ve örüntüde $0, H^{01}, H^{01} \rightarrow I \rightarrow H^{01}, H^{01} \rightarrow I \rightarrow H^{01} \rightarrow H^{01} \rightarrow H^{01} \rightarrow I \rightarrow H^{01}, H^{01} \rightarrow I \rightarrow H^{01} \rightarrow H^{01} \rightarrow H^{01} \rightarrow I \rightarrow H^{01}, I, H^{01} \rightarrow I \rightarrow H^{01} \rightarrow H^{01} \rightarrow H^{01} \rightarrow I \rightarrow H^{01}$ olur (Şekil 4.6).



Şekil 4. 5. Kutritlerde yatay işlemcilerin hareketini belirleyen üst kural

Şekil 4.5'de verilen üst kuralın benzeri burada da uygun işlemciler ve örüntülerle tanımlanabilir



Şekil 4. 6. H^{01} ve I işlemcileri kullanılarak yapılan dağılımı.

4.5.3 H^{01} , H^{02} işlemcileriyle sıkıştırılmış $|0\rangle$ kutritiyle başlayan bir oyunun birleştirme işlemcisi açısından incelenmesi

H^{01} , H^{02} işlemcileriyle sıkıştırılmış $|0\rangle$ kutritiyle başlayan bir oyunun birleştirme işlemcisi açısından incelersek $a = |0\rangle$, $b = |0\rangle + |1\rangle$, $c = |0\rangle + |2\rangle$, $d = |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle$ dallanmalar şu kurala göre gerçekleşmektedir; $a \rightarrow bc$, $b \rightarrow ad$, $c \rightarrow da$, $d \rightarrow cb$. Bu örüntüde birleştirme işlemcisiyle ve birim işlemci kullanılarak bile birçok ilişki keşfedilebilir. Örneğin bu örüntüyü Şekil 4.7'deki gibi dört ayrı kutu içerisinde çoğalan birer hücreler olarak ele alırsak dış sütunların ve iç sütunların birbirleriyle eşit olduğunu yani aralarında birim işlemci uygulandığını görebiliriz. Ayrıca her satırın birleşim çarpımının iki alt satırın ilk hücresine eşit olduğu da görülebilir. Bu örüntüde ilk satır a ve ikinci satır bc üçüncü satır ad ve da olmak üzere satır sayısı i, sütun sayısı j ile gösterilmek üzere $i \geq 2$ ve $j = 1, 2, 3, 4$ olmak üzere ve bu algortimada bir değişkenin koordinatı X_{ij} ile tanımlanmak üzere σ ayna yansıtıcı işlemci olmak üzere herhangi bir çift sayılı kodu merkezinden ters çeviren işlemci olarak tanımlanırsa (örneğin, $\sigma bc \rightarrow cb$ veya $\sigma adda = daad$) ve I birim işlemci olarak tanımlanırsa ve Z işlemcisi ise herhangi bir çift sayılı zinciri uygulandığı taraftan kesen işlemci olarak tanımlanmaktadır. Örneğin

$$ZX_{31} = [X_{31} = [adda = ad \quad (4.37a)$$

$$X_{32}Z = X_{32}] = daad] = ad \quad (4.37b)$$

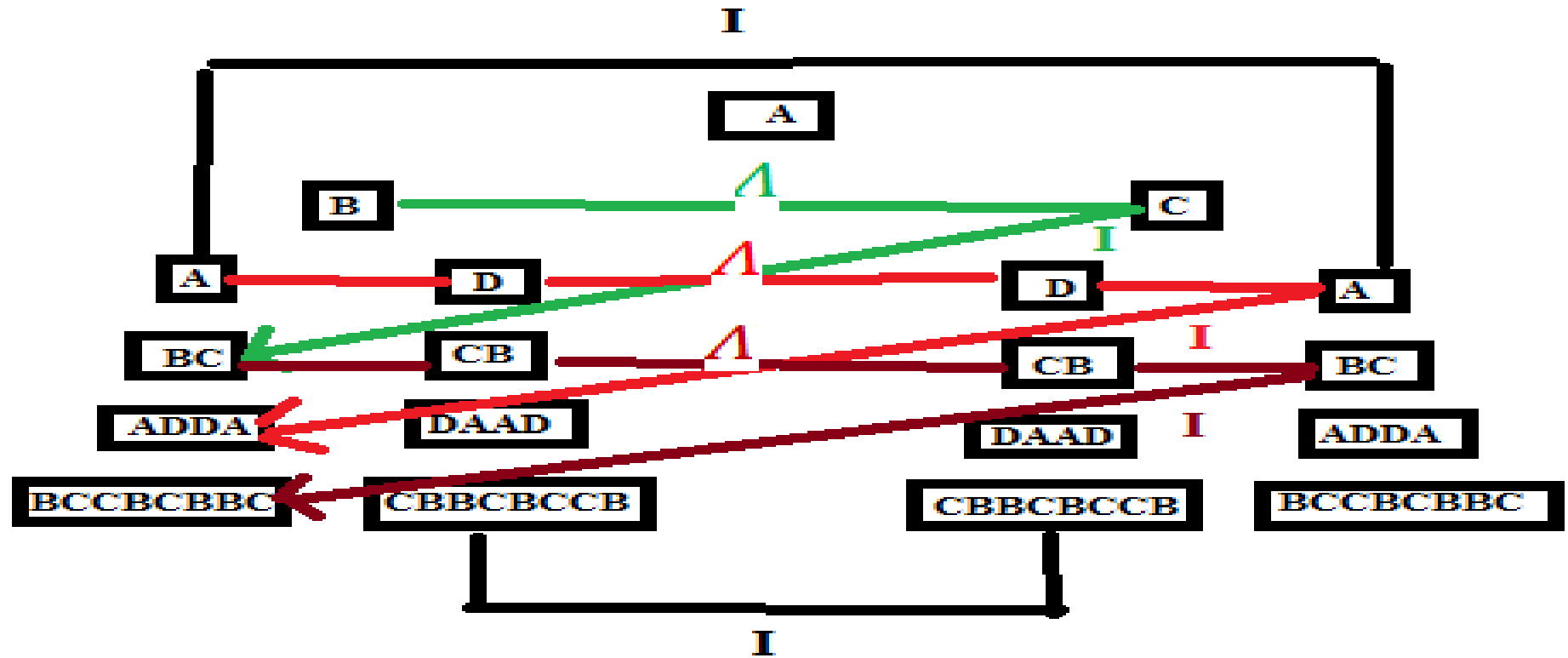
Yukarıdaki işlemciler doğrultusunda algortimada şu şekilde ilişkiler tanımlanabilir:

$$i \geq 3 \text{ için } \sigma X_{i+2,1} = X_{i+2,2} \text{ ile } \sigma X_{i+2,3} = X_{i+2,4} \quad (4.38a)$$

$$i \geq 2 \text{ için } IX_{i1} = X_{i4} \text{ ve } IX_{i2} = X_{i3} \quad (4.38b)$$

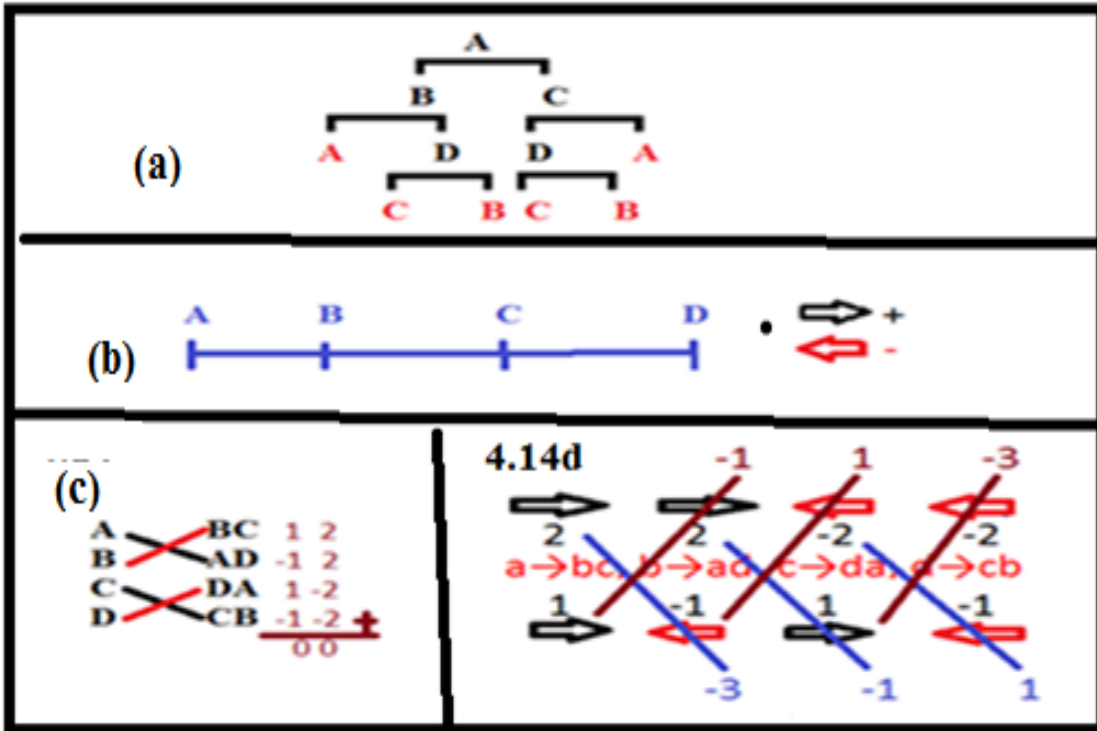
$$i \geq 2 \text{ } ZX_{i+2,1} = X_{i+2,2}Z \text{ ve } ZX_{i+2,3} = X_{i+2,4}Z \quad (4.39c)$$

Sistemde yukarıdaki ilk kuralların elimizde a, b, c ve d olarak dört değişken olması ve ancak üçüncü satıra kadar yarılmalarda bu dört değişkenin çıkması olduğu söylenebilir.



Şekil 4. 7. $|0\rangle$ kutritiyle başlayan H^{01} , H^{02} Hadamartlarıyla sıkıştırılmış yazı tura oyunun dallanmaları

$a \rightarrow bc$, $b \rightarrow ad$, $c \rightarrow da$, $d \rightarrow cb$ örüntüsünden farklı sonuçlar da çıkarılabilir. Örneğin bu zincirlemenin içerisindeki bir öge kendini tekrar ettiğinde durduğu bir oyun olarak ele alınabilir. Bu oyun Şekil 4.8 (a)'da görüldüğü gibi a, b, c, d'den bir tanesi bir dalda ikinci kez ortaya çıktığında kırmızı renk almakta ve o dal kuruyacak şekilde tanımlanabilir. Şekil 4.8 (b) şekile göre harfler A, B, C, D olarak mavi bir cetvel üzerine birer birim vektörel artışla yerleştirilirse bu harfler arası uzaklığın toplamının Şekil 4.8(c)'deki gibi net olarak sıfır olduğu görülür. Örneğin $a \rightarrow bc$ 'de a'dan b'ye +1 birim a'dan c'ye +2 birim vardır. Aynı şekilde $b \rightarrow ad$ ilişkisinde b'den a'ya -1 b'den d'ye +2 birim vardır. Bu şekilde Şekil 4.8 (c)'deki gibi hesaplama yapılırsa net etkinin sıfır olduğu gösülebilir. Farklı satırlardaki Şekil 4.8 (b)'deki cetvele göre tanımlanan vektörel ilişki Şekil 4.8(d)'de gösterilebilir. İki işlemci arasına sıkıştırılmış bir yapıdan farklı örüntüler elde edilebileceği gösterilmiş olur.

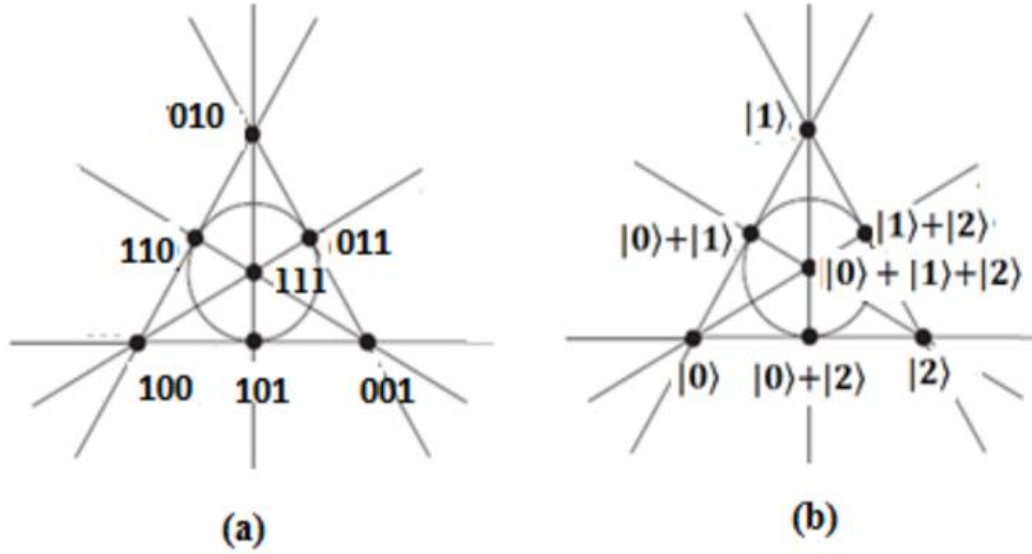


Şekil 4. 8. $a \rightarrow bc$, $b \rightarrow ad$, $c \rightarrow da$, $d \rightarrow cb$ örüntüsünden elde edilen farklı sonuçlar

4.2.5 Renk Çemberi Pusulasının Fano Düzleminde Tanımlanması

Bu bölümde fano düzlemi kutritlerle tanımlanmış bir koordinat belirlenmesinde kullanılacaktır. Şekil 4.9 (a)'da verilen 7 noktalı düzlem Fano düzlemi olarak tanımlanmaktadır. Sonlu geometride Fano düzlemi her satırda 3 nokta ve her noktada

en az 2 satır olmak üzere mümkün olan en küçük sayıda noktaya ve çizgiye sahip olan 2. mertebeden sınırlı projektif düzlemdir.



Şekil 4. 9. Fano düzlemi ve düzlemdeki noktaların kutrit karşılıkları (Duran, Gençten,2016 b)

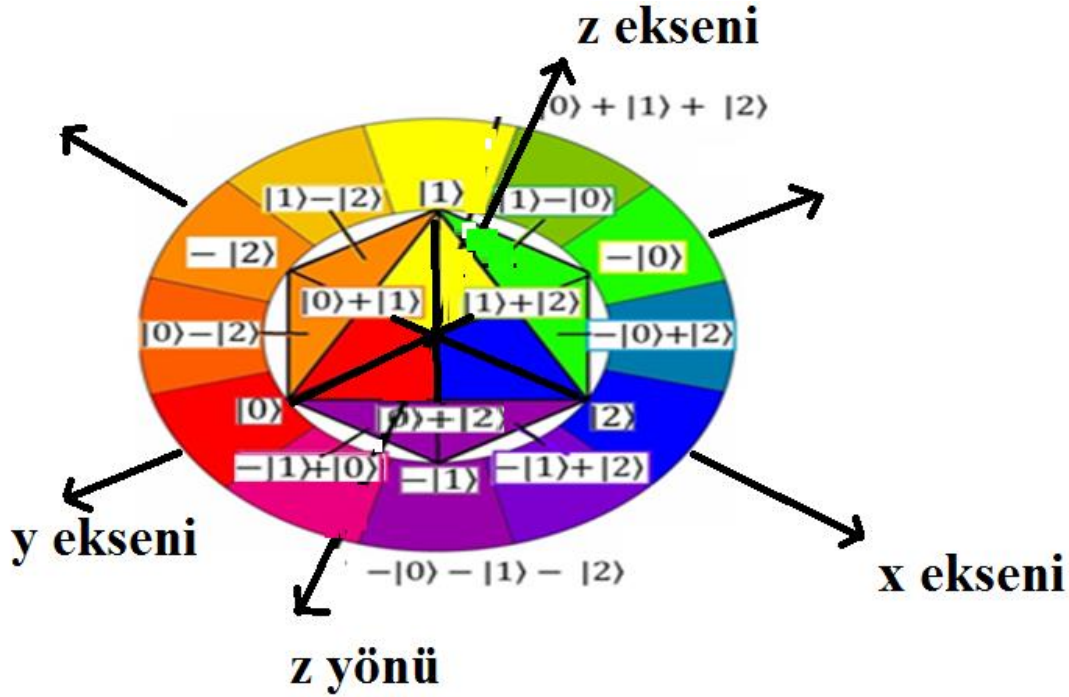
Homojen koordinatlarla projektif uzayların standart yapımını kullanarak, Fano düzleminin yedi noktası, ikili sayıların, 001, 010, 011, 100, 101, 110 ve 111'in sıfır olmayan sıralı üçlülerıyla Şekil 4.9 (a)'daki gibi etiketlenebilir. Benzer şekilde bu noktalar kutritlerle de Şekil 4.9 (b)'deki gibi sınıflandırılabilir (Duran, Gençten, 2016b; Penrose, 2015). Şekil 4.9'de verilen bu sınıflandırma Çizelge 4.2'de verilen kurala göre yapılabilir (Duran, Gençten, 2016b):

Çizelge 4. 2. Fano düzlemindeki noktaların kutrit karşılıkları

Fano düzlemindeki sıralı üçlülerle sınıflanmış noktalar	Kutrit karşılıkları
100	$ 0\rangle$
010	$ 1\rangle$
001	$ 2\rangle$
011	$ 1\rangle + 2\rangle$
101	$ 0\rangle + 2\rangle$
110	$ 0\rangle + 1\rangle$
111	$ 0\rangle + 1\rangle + 2\rangle$

Renk çemberi ana ve ara renkler ile bütünleyici renklerin aralarındaki ilişkiyi gösteren çember şeklinde bir yapıdır. Bu modelde çember içerisinde yanyana yer alan komşu renkler birbirleri ile karıştırıldıklarında temiz renk tonları verirler ve

renklendirme için tavsiye edilirler. Birbirlerinin karşısında bulunan renkler ise birbirlerini karşılıklı olarak kırıp kirli renk karışımları verirler yani renksizleşme yaratırlar. Renk çemberi merkezinde bir üçgenin üç bölüme ve üç temel ayrılarak bu üç temel rengin karışımı ara renklerin üçgenin etrafındaki bir altıgen üzerinden tanımlanması en dıştaki çemberdeki 12 renk ise bu üçgen ve altıgendeki renklerin karıştırılması sonucu elde edilen bir spektrum olarak ele alınabilir (Latchaw, 2011; Erbaş,1996).



Şekil 4. 10. Renk çemberi üzerinden kutritlerin tanımlanması

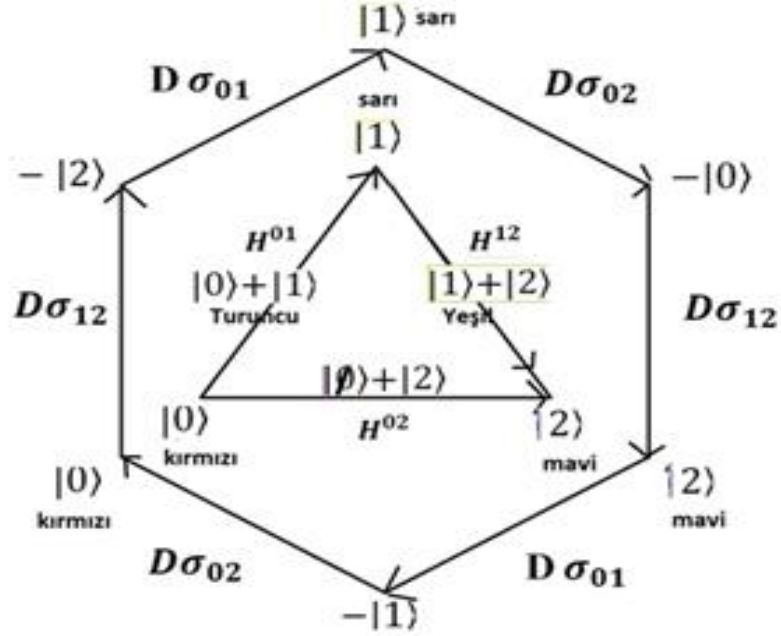
Şekil 4.9’da verilen fano düzlemi çeşitli renkler üzerinden tanımlanarak renk çemberi ile modifiye edilirse Şekil 4.10’daki gibi verilebilir. Burada üçgen üzerinde çeşitli kutirlere yakın bölgeler renklerle $|0\rangle =$ kırmızı, $|1\rangle =$ sarı, $|2\rangle =$ mavi üç temel renk ve $|0\rangle + |1\rangle =$ turuncu, $|0\rangle + |2\rangle =$ mor, $|1\rangle + |2\rangle =$ yeşil bu üçünün kombinasyonu olarak tanımlanabilir. Dış çemberde de bazı renklerin durumları girişim durumlarının artması nedeniyle yeniden,

$$|0\rangle - |2\rangle = \text{açık turuncu}, -|2\rangle = \text{turuncu}, \quad |1\rangle - |2\rangle = \text{koyu sarı},$$

$$|1\rangle = \text{sarı}, |1\rangle - |0\rangle \text{ koyu yeşil}, -|0\rangle \text{ yeşil}, -|0\rangle |2\rangle = \text{açık mavi},$$

$$|2\rangle = \text{mavi}, |2\rangle - |1\rangle = \text{açık mor}, -|1\rangle, \text{mor}, |0\rangle - |1\rangle \text{ açık pembe}$$

$|0\rangle = \text{kırmızı}$ olarak tanımlanabilir. $|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle$ merkezden geçen üçgen düzlemine dik pozitif koordinatı $-|0\rangle - |1\rangle - |2\rangle$ ise dik negatif koordinatı temsil etmektedir. İç ve dış renk karmaları bir sonraki analizde gerekli görüldüğü kısımlarda işlemcilerle ilişkilendirilerek geçişler tanımlanmaya çalışılacaktır.

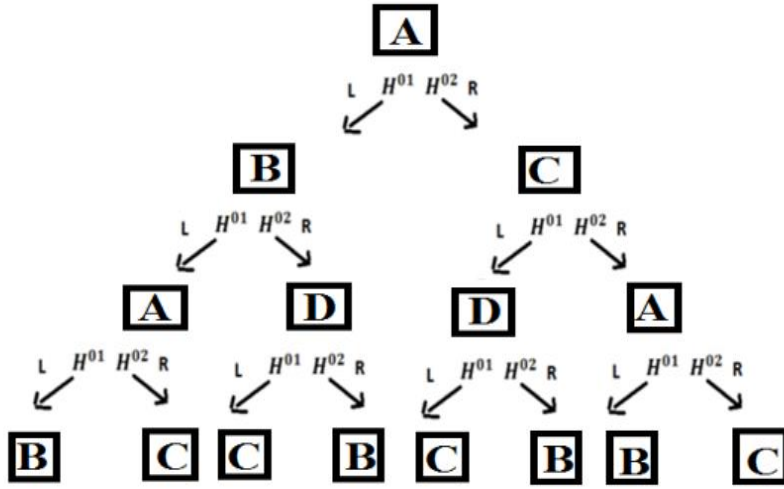


Şekil 4. 11. Renk çemberindeki koordinat noktaları arasındaki matematiksel ilişki

Bu noktada renk çemberinin analogik bir örnek olduğunu ve koordinat projeksiyonu sağladığı belirtmekte fayda var. Örneğin $|1\rangle + |2\rangle = \text{yeşil}$ ken dış bölgede de $-|0\rangle = \text{yeşil}$ olup aynı renkle tanımlanmıştır. Bu noktada renklerin üst boyuttaki koordinatların izdüşümü olarak düşünülmesinde fayda olduğu söylenebilir. Ek olarak renk çemberindeki koordinatlar arası ilişkiler Şekil 4.11'deki gibi verilebilir. Bu izdüşüm koordinatları yansıtan benzer renkler üzerindeki vektör durumlar arası karışıklığı gidermede faydalı bir şema olarak verilebilir. Bu bağlamda özellikle analizler için çemberde koordinatlar belirlenirken temel kuralın her bir girişim toplamında vektör durumlarının merkez noktasının veya olasılık katsayısının oranına göre iki vektör arası kirişdeki (burada yay olmaktadır) oranlı bir noktanın seçilmesinin olduğu söylenebilir.

4.2.6. H^{01} , H^{02} Sıkıştırılmış Yazı Tura Oyunun Renk Çemberi Pusulasında İncelenmesi ve Bazı Dolanık Durumların Elde Edilmesi

Şimdi Bölüm 4.5.3’de incelediğimiz H^{01} , H^{02} işlemcileriyle sıkıştırılmış yazı tura oyunu renk pusulası kullanarak inceleyeceğiz. İlk olarak kuralımızın soldan H^{01} sağdan H^{02} uygulamak olduğunu belirtirsek, $|0\rangle$ kutriyle başlayan oyunun $a \rightarrow bc$, $b \rightarrow ad$, $c \rightarrow da$, $d \rightarrow cb$ kuralına göre $a = |0\rangle$; $b = |0\rangle + |1\rangle$; $c = |0\rangle + |2\rangle$; $d = |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle$ noktalarına sıkıştığı söylenebilir (Şekil 4.12).



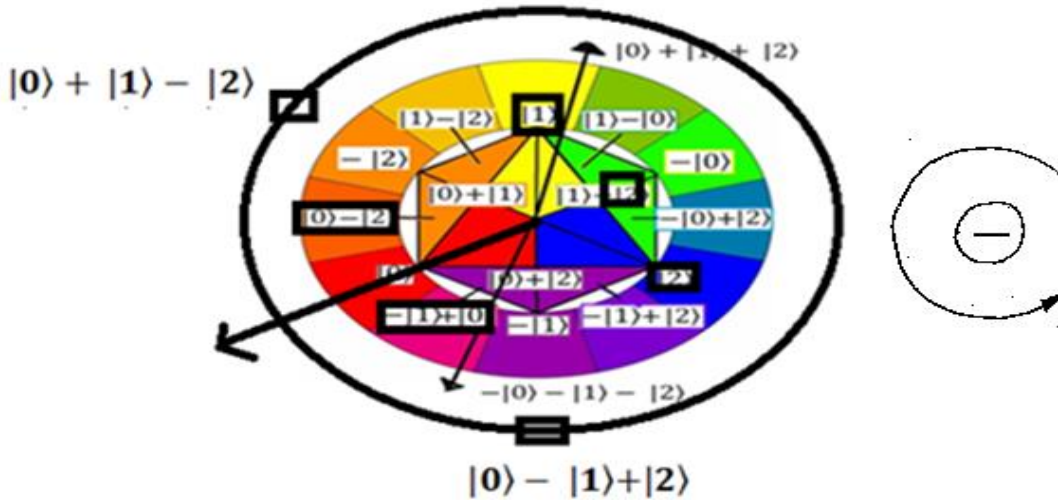
Şekil 4. 12. Soldan (L) H^{01} sağdan (R) H^{02} uygulamak olduğunu belirtirsek, $|0\rangle$ kutriyle başlayan oyunun örüntüsü

Oyundaki $a = |0\rangle$, $b = |0\rangle + |1\rangle$, $c = |0\rangle + |2\rangle$, $d = |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle$ noktalarını renk çemberi pusulasına yerleştirdiğimizde, $d = |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle$ hariç noktaların çemberdeki simetri eksenini kırmızı ve yeşil bölge arasındaki hat üzerinde noktaların düzlemsel veya ayna simetrisine göre dağıldığını görmekteyiz. Bu eksenin yönünün çember düzleminde kırmızı renk yönünde olduğunu, $a = |0\rangle$ mevcudiyeti nedeniyle söyleyebiliriz. Bunu bir çeşit ağırlık merkezi yönelimi gibi yorumlarsak düzlem üzerindeki yönün kırmızı renk doğrultusunda olduğunu söyleyebiliriz. Bu noktada $a = |0\rangle$ ’dan $b = |0\rangle + |1\rangle$ ve $c = |0\rangle + |2\rangle$ ’ye doğru saat yönünde bir hareket olduğu için bunu + yön olarak niteleyebiliriz (Şekil 4.13).

Çizelge 4. 4. H^{01} ve H^{02} sıkıştırılmış oyunların temel noktalar arasındaki ilişkiler

Dal başlangıcı	Dallardaki ana noktalar arasındaki ilişkiler
$ 0\rangle$	$A \rightarrow BC, B \rightarrow AD, D \rightarrow CB, C \rightarrow DA,$
$ 1\rangle$	$E \rightarrow FE, F \rightarrow EG, G \rightarrow HF, K \rightarrow LM, H \rightarrow GL, L \rightarrow KH, M \rightarrow MK$
$ 2\rangle$	$M \rightarrow MK, K \rightarrow LM, L \rightarrow KH, G \rightarrow HF, H \rightarrow GL, F \rightarrow EG, E \rightarrow FE$

$|1\rangle$ kutrityle başlayan oyunun renk çemberindeki yönü incelirken öncelikle $G = |0\rangle - |1\rangle + |2\rangle$ ve $L = |0\rangle + |1\rangle - |2\rangle$ durumlarının normalde çemberde bulunmadığını görmekteyiz. Bu durumda çemberi genişleterek kutrit durumların eşit olasılıkta olduğunu varsayarak (farklı olasılıkta yön değişecektir) G ve L durumlarını çemberde bu durumların birleştiren kirişteki orta noktaya veya ağırlık merkezine koyarsak Şekil 4.13'dekine benzer şekilde çemberdeki simetri eksenini olarak kırmızı ve yeşil bölge arasındaki hat üzerinde noktaların düzlemsel veya ayna simetrisine göre dağıldığını görmekteyiz (Şekil 4.14). Bu eksenin yönün çember düzleminde kırmızı renk yönünde olduğunu girişin sol tarafında $F = |0\rangle - |1\rangle$, $G = |0\rangle - |1\rangle + |2\rangle$, $K = |0\rangle - |2\rangle$, $L = |0\rangle + |1\rangle - |2\rangle$ olarak dört durum varken sağ tarafında $E = |1\rangle$, $M = |2\rangle$, $H = |1\rangle + |2\rangle$ olarak üç nokta olmasından çıkarmaktayız. Bu noktada $E = |1\rangle$ 'den $F = |0\rangle - |1\rangle$, $G = |0\rangle - |1\rangle + |2\rangle$, $H = |1\rangle + |2\rangle$, $K = |0\rangle - |2\rangle$, $L = |0\rangle + |1\rangle - |2\rangle$, $M = |2\rangle$ 'ye doğru hareket doğru saat yönünün tersi bir hareket olduğu için bunu - yön olarak niteleyebiliriz (Duran, Gençten, 2016b).



Şekil 4. 14. $|1\rangle$ kutrityle başlayan oyunun renk çemberindeki yönü

Çizelge 4.4'ü incelediğimizde ise $|2\rangle$ ile başlayan oyundaki noktalarında kırmızı yönde olacağını $|1\rangle$ kutritiyle aynı noktalara sahip olduğundan çıkarabiliriz. Ayrıca yönünde saat yönünde + olacağını sabit noktaların tam tersi sırada olmasından çıkarabiliriz. Özetle H^{01} ve H^{02} sıkıştırılmış bütün kütrit durumların yönü aynı çıkmaktadır. Sadece saat yönündeki durumları değişmektedir. H^{01} ve H^{02} işlemcileriyle aynı sırada sıkıştırılmış olmalarından benzer sonucun benzer yönde çıkmasının beklenen bir sonuç olduğu söylenebilir. Elde ettiğimiz dallanmalardaki temel noktalar bir çok şekilde yapıştırılabilir. Örneğin Çizelge 4.4'de verilen $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ durumları kümeleri içerisindeki temel durumlar yapıştırılabilirki, eğer arada ek bir işlemci veya etki yoksa bu rastlantısal belki keyfi bir yapıştırma işlemi olur. Örneğin, Çizelge 4.3'de verilen B, F, K'yı yapıştırırsak

$$(|0\rangle + |1\rangle) \Omega (|0\rangle - |1\rangle) \Omega (|0\rangle - |2\rangle) = |0\rangle|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle|2\rangle \quad (4.39)$$

Birde dolanık durumlar renk bölgeleri üzerindeki vektörler yapıştırılarak elde edilebilir. Burada herbir pusula sonucu açısı değiştirilerek farklı renk bölgeleri hizalandırılarak dolanık durumlar elde edilebilir. Fakat bu da eğer arada ek bir işlemci veya etki yoksa keyfi bir yapıştırma olur. En matematiksel ve keyfi olmayan yapıştırma işlemi bütün pusula sonuçlarını döndürmeden aynı hizada aynı renk bölgelerini yapıştırarak elde edilebilir. Burda döndürme yapılmaması gerekir çünkü bütün kütrit durumlara aynı işlemciler aynı şekilde uygulanmaktadır. O halde Çizelge 4.2 sonuçlarının hepsi yapıştırılırsa öncelikle $|0\rangle$ başlayan küme ile $|1\rangle$, $|2\rangle$ kümesi arasında hiçbir kesişen eleman olmadığı için net dolanıklığın sıfır olduğu söylenebilir. Başka bir deyişle $|0\rangle$ ile başlayan renk bölgelerindeki durumları içeren küme K_0 , deyişle $|1\rangle$ ile başlayan renk bölgelerindeki durumları içeren küme K_1 , deyişle $|2\rangle$ ile başlayan renk bölgelerindeki durumları içeren küme K_2 olarak nitelenirse net dolanıklık 0 olarak 4.40'daki gibi gösterilir:

$$\Omega_{net} = K_0 \Omega K_1 \Omega K_2 = 0 \quad (4.40)$$

O halde H^{01} ve H^{02} sıkıştırılmış oyunların pusula üzerindeki bölgesel dolanıklığı sıfır olarak nitelendirilebilir.

Çizelge 4. 5 $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ ile başlayan dallanma kümeleri K_1 ve K_2 'yi renk bölgelerine göre yapıştırma sonuçları

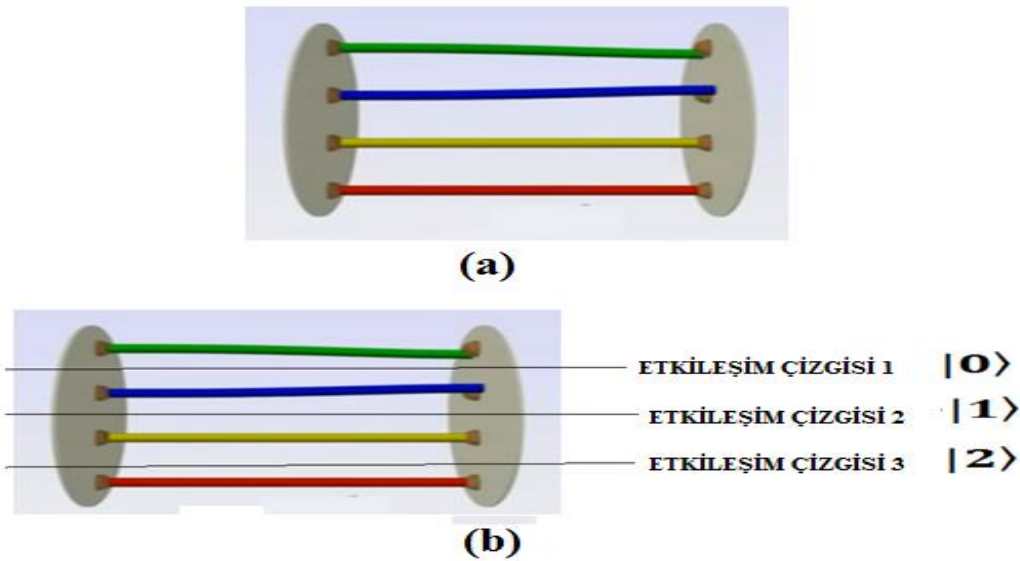
Yapıştırma Bölgesi	Sonuçlar
Kırmızı Bölge	$ 0\rangle \Omega 0\rangle = 0\rangle 0\rangle$
Üst Mor Bölge	$(0\rangle - 1\rangle + 2\rangle) \Omega (0\rangle - 1\rangle + 2\rangle) = 0\rangle 0\rangle + 1\rangle 1\rangle + 2\rangle 2\rangle$
Sarı Bölge	$ 1\rangle \Omega 1\rangle = 1\rangle 1\rangle$
Yeşil Bölge	$(1\rangle + 2\rangle) \Omega (1\rangle + 2\rangle) = 1\rangle 1\rangle + 2\rangle 2\rangle$
Üst Turuncu Bölge	$(0\rangle + 1\rangle - 2\rangle) \Omega (0\rangle + 1\rangle - 2\rangle) = 0\rangle 0\rangle + 1\rangle 1\rangle + 2\rangle 2\rangle$
Pembe Bölge	$(0\rangle - 1\rangle) \Omega (0\rangle - 1\rangle) = 0\rangle 0\rangle + 1\rangle 1\rangle$

Bununla beraber alt kümeler arasındaki dolanıklıklar da incelenebilir. Örneğin $|1\rangle$ ve $|2\rangle$ ile başlayan dallanma kümeleri K_1 ve K_2 'yi renk bölgelerine göre yapıştırırsak Çizelge 4.5'deki sonuçları elde ederiz.

4.3 Kuantum Kutrit Durumların Örgüler Teorisi Açısından İncelenmesi

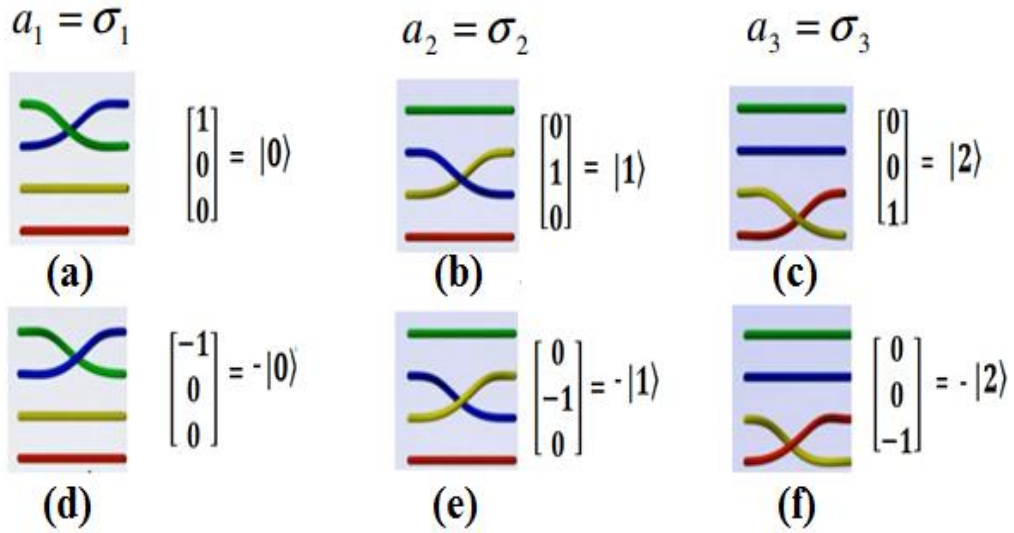
Bu bölümde örgüler kuramı ile kuantum bilgi durumları beraber ele alınacak ve kuantum durumları ve karşılık gelen enerji durumları ve seviyeleri bilgi türünden örgüler cinsinden ifade edilmeye çalışılacaktır. Son aşamada ise çeşitli kuantum geçit işlemcilerinin örgüler ve enerji geçişleri bakımından etkileri incelenecektir.

4.3.1 Kuantum Kubit ve Kutrit Durumların Örgülerle Tanımlanması



Şekil 4. 15. (a) Kutrit durumları için oluşturulmuş varsayımsal bir örgü cihazı (b) Kutrit durumları için referans noktalarının tanımlanması

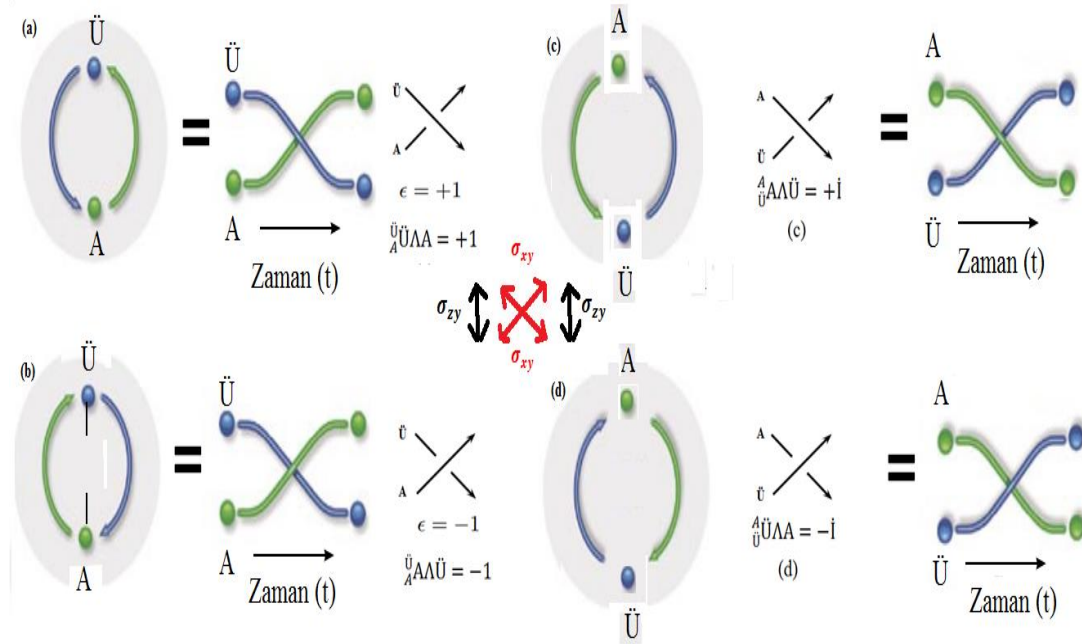
Kutrit durumları farklı varsayımsal cihazlarla inceledik. Şimdi kutritleri incelemek için sırasıyla yeşil, mavi, sarı, kırmızı renklerle tanımlanmış dört saç ipliğinden oluşan bir örgü cihazımız olduğunu varsayalım (Şekil 4.15). Kutrit bu cihazda etkileşim çizgisi 1’de gerçekleşen iki iplik etkileşimin $|0\rangle$ ’nin fiziksel durumu, bu cihazda etkileşim çizgisi 2’de gerçekleşen iki iplik etkileşimin $|1\rangle$ ’nin fiziksel durumu, bu cihazda etkileşim çizgisi 3’de gerçekleşen iki iplik etkileşimin $|2\rangle$ ’nin fiziksel durumu olarak tanımlanabilir. Şekil 4.15 (b)’de bu tanımlama ve tanımlama referans noktası gösterilmiştir. Son olarak bir etkileşim noktasında sadece iki ipliğin etkileşimi olabileceği birden fazla iplik arasında etkileşim olmayacağı bir sınırlama olarak konulmuştur.



Şekil 4.16. Kutrit durumların pozitif veya negatifliğinin tanımlanması

$|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ durumlarının negatif değerleri Şekil 4.17’deki gibi verilebilir. Şekil 4.16 (a)’da sarı ve kırmızı ipliklerin sabit olduğu, yeşil ipliğin mavinin üstünden geçtiği durum $|0\rangle = \sigma_1$ olarak tanımlanırsa bunun tam tersi olan sarı ve kırmızı ipliklerin sabit olduğu, bu sefer mavi ipliğin yeşilin üstünden geçtiği durum $-|0\rangle = -\sigma_1$ olarak tanımlanır (Şekil 4.16 (d)). Benzer şekilde yeşil ve kırmızı ipliklerin sabit olduğu, mavi ipliğin sarının üstünden geçtiği durum $|1\rangle = \sigma_2$ olarak tanımlanırsa (Şekil 4.16 (b)) bunun tam tersi olan yeşil ve kırmızı ipliklerin sabit olduğu, bu sefer sarı ipliğin mavinin üstünden geçtiği durum $-|1\rangle = -\sigma_2$ olarak tanımlanır (Şekil 4.16(e)). Son olarak yeşil ve mavi ipliklerin sabit olduğu, sarı ipliğin kırmızının üstünden geçtiği durum $|2\rangle = \sigma_3$ olarak tanımlanırsa (Şekil 4.16(c)) bunun tam tersi olan yeşil ve kırmızı ipliklerin sabit olduğu, bu sefer sarı

ipliğin mavinin üstünden geçtiği durum $-|2\rangle = -\sigma_3$ olarak tanımlanır (Şekil 4.16 (f)). Bu noktada örgülerle çeşitli sıfır durumları tanımlanabilir. Şekil 4.16'da verilen renk iplikleri arasındaki pozitiflik negatiflik ilişkisi şu şekilde tanımlanabilir.



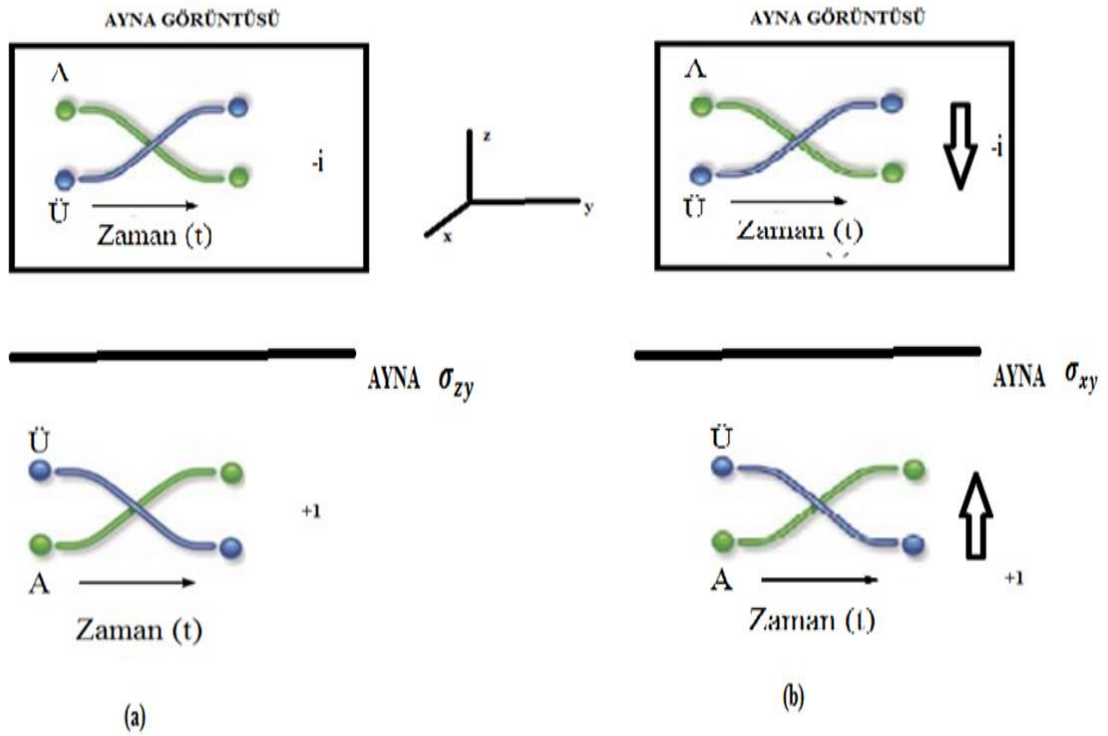
Şekil 4. 17. Kutrit durumların pozitif veya negatifliği kuralı (Dalvit, 2011; Collins, n 2006)

Bu noktada kutrit durumların analizinde başka bir kuraldan bahsedebiliriz. Herhangi bir renk iplik çiftinden üst kısımda olan düğüm alttakinin üstünden geçerse kutrit + değer alır; eğer üstteki iplik alttaki ipliğin altından geçerse negatif değer alır (Şekil 4.17). Şekil 4.17 (a)'nın Şekil 4.17 (b)'nin saat yönünde tersi olduğunu görebilmekteyiz. Aynı durum Şekil 4.17 (c) ve Şekil 4.17 (d) arasında da geçerlidir. Bu kural birleştirme çarpımıyla \wedge birleştirme çarpımı Ü üst ip, A alt ip olmak üzere Üst ve Alt ipliklerin konumları değişmemek şartıyla kural şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned} \ddot{U}\ddot{U}\Lambda\Lambda &= +1 \text{ ve } \ddot{U}\Lambda\Lambda\ddot{U} = -1, \overset{A}{U}\Lambda\Lambda\ddot{U} = +i \overset{A}{U}\ddot{U}\Lambda\Lambda = -i \\ \sigma_{hA}\ddot{U}\ddot{U}\Lambda\Lambda &= \overset{A}{U}\ddot{U}\Lambda\Lambda = -i \text{ veya } \sigma_{h\ddot{U}}\Lambda\Lambda\ddot{U} = \ddot{U}\Lambda\Lambda\ddot{U} = +1 \\ \sigma_{hA}\ddot{U}\Lambda\Lambda\ddot{U} &= \overset{A}{U}\Lambda\Lambda\ddot{U} = +i \text{ veya } \sigma_{h\ddot{U}}\Lambda\Lambda\ddot{U} = \ddot{U}\Lambda\Lambda\ddot{U} = -1 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Şekil 4.18 (a)'da ve Şekil 4.18 (b)'de Ü-A ikilisini norm aldık ve bunların birleşmesini reel pozitif veya negatif değerler olarak niteledik. Bu norma göre A-Ü ikilisi ise sanal değerler veren bir sonuç oluşturdu (Şekil 4.18 (c)'da ve Şekil 4.18 (d)). İlerleyen analizlerde bu mantıkla kubit ve kutritleri örgüler cinsinden ifade

edeceğiz. Şekil 4.18 (a) ile Şekil 4.18 (b)'nin yatay ($\sigma_h = \sigma_{xy}, \sigma_v = \sigma_{xz}$) ve dikey eksenlerde ayna simetrisine sahip olarak denk olduklarını ifade edebiliriz.



Şekil 4. 18. (a) $\overset{\ddot{U}}{\ddot{U}}\Lambda\Lambda$ 'nın σ_{zy} olarak ayna simetrisi (b) ve σ_{xy} olarak ayna simetrisi

Burada pseudo (sahte) durumun aslında örgülerin ayna simetrisi olarak yansımaları olduğunu Şekil 4.18 ve denklem 4.41'le tanımlayabiliriz. Ayrıca $\overset{\ddot{U}}{\ddot{U}}\Lambda\Lambda = +1$ ve $\overset{\ddot{U}}{\ddot{U}}\Lambda\Lambda\overset{\ddot{U}}{\ddot{U}} = -1$ olarak tanımladığımızı veya $\overset{A}{\ddot{U}}\Lambda\Lambda\overset{\ddot{U}}{\ddot{U}} = +i$, $\overset{A}{\ddot{U}}\Lambda\Lambda = -i$ tanımladığımızı şu şekilde anlayabiliriz: Şekil 4.18 (a)'nın önüne bir ayna yerleştirirsek Şekil 4.18'deki bir durumu elde ederiz. Başka bir ifadeyle $\sigma_h \overset{\ddot{U}}{\ddot{U}}\Lambda\Lambda = \overset{A}{\ddot{U}}\Lambda\Lambda$ 'dır. Bununla beraber burada simetri uyguladığımız sistemin iki iplikli bir sistem olduğunu üç ve daha fazla ipliğin olduğu durumda simetrisinin bütün ipliklere göre alınması durumunda çok daha farklı sonuçlar elde edilebileceği söylenebilir. Şimdi bir kuantum durumunu bu kural ve birleştirme işlemcisiyle ifade edelim: $|\Psi\rangle$ etkileşim noktalarıyla ifade edilen bir kuantum durumu olmak üzere,

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} Y\Lambda M \\ M\Lambda S \\ S\Lambda K \end{bmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y\Lambda M = 1; M\Lambda S = 0, S\Lambda K = 0$$

$$-|0\rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M\Lambda Y = -1; M\Lambda S = 0, S\Lambda K = 0$$

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y\Lambda M = 0; M\Lambda S = 1, S\Lambda K = 0$$

$$-|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Y\Lambda M = 0; S\Lambda M = -1, S\Lambda K = 0$$

$$|2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Y\Lambda M = 0; M\Lambda S = 0, S\Lambda K = 1$$

$$-|2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad Y\Lambda M = 0; M\Lambda S = 0, K\Lambda S = -1$$

(4.42)

Tanım 4: Renk sırası dışındaki renkli sicimlerin etkileşim çizgisindeki diğer durumları sahte kutrit durum yani pseido kutrit durum $i|\Psi\rangle = i \begin{bmatrix} Y\Lambda M \\ M\Lambda S \\ S\Lambda K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\Lambda Y \\ Y\Lambda S \\ S\Lambda K \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} Y\Lambda M \\ S\Lambda M \\ M\Lambda K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y\Lambda M \\ S\Lambda K \\ K\Lambda M \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{koşulunu sağlamak üzere tanımlanabilir ve bu } \widetilde{|\rangle} = i |\rangle$$

olarak gösterilir. Küme cinsinden $\widetilde{|\Psi\rangle} = i|\Psi\rangle = \{ \{|\Psi\rangle\} / |\Psi\rangle \}$ olarak da ifade edilebilir. Örneğin etkileşim çizgisi üzerindeki sarı ve mavi iplik etkileşimi $\widetilde{|0\rangle}$ olarak düğümlerin atılma biçimine göre + veya - alacak şekilde ifade edilebilir. Sahte kutrit durumları arasındaki ayrışmalar enerji durumlarına göre yapılabilir.

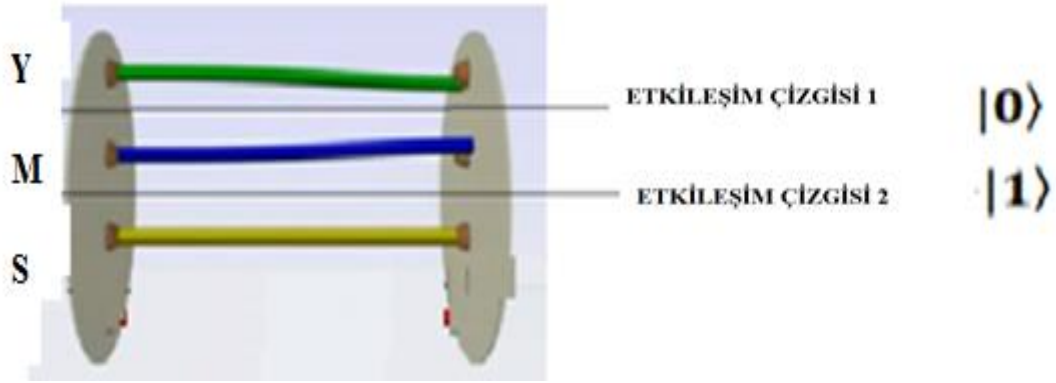
4.3.2 Örgülerle Tanımlanmış Kuantum Durumlarında Enerji Yarılımlarının İncelenmesi

Bu bölümde örgüler teorisi kullanılarak kutrit durumlarına izafe edilen enerji durumlarının dağılımı incelenecektir. Başka bir deyişle yapılmak istenen şey Galton makinesinin örgülerle kuantum durumlarına uyarlanmasıdır. Bunun için öncelikle

kubit durumların yarılımları incelencektir çünkü daha az konfigürasyona sahiptirler bu yüzden normal dağılım daha rahat görülebilir. Daha sonra ise kutrit durumlarının ilk üç seviye normallik dağılım incelencektir.

4.3.2.1 Örgülerle Tanımlanmış Kuantum Kubit Durumlarında Enerji Yarılımlarının İncelenmesi

Örgülerin renkli veya renksiz olması, temsil edilen durumlar arasındaki matematiksel işlemlerin tanımını etkileyecektir. Bu renk sınıflaması analogiktir. Bu renk belki enerjiyi, belki kütleyi, belki alanı veya yoğunluğu temsil edecek şekilde sınıflandırılabilir veya tanımlanabilir. Ek olarak renksiz iplikli durumlarda örneğin üç iplikli bir örgüde pozitif ve negatif değerlerle beraber dört durum ortaya çıkmaktadır. Bu yüzden sanal durumların matematiksel temsilleri renksiz iplikli durumlarda mümkün görülmemektedir. Bu nedenle renkli örgülerle yapılan matematiksel hesaplamalar renksiz örgülerden farklılık göstermektedir.



Şekil 4. 19. Kubit durumların örgülerle ifade edilmesi

Denklem 4.42’de kutritlerin birleştirme çarpımıyla örgüler cinsinden ifade edilmesi kubitlere de aşağıdaki gibi uyarlanabilir.

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} Y\Lambda M \\ M\Lambda S \end{bmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; Y\Lambda M = 1 \text{ ve } M\Lambda S = 0, |0\rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} M\Lambda Y = -1 \text{ ve } M\Lambda S = 0$$

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; Y\Lambda M = 0 \text{ ve } M\Lambda S = 1, -|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} Y\Lambda M = 0 \text{ ve } S\Lambda M = -1$$

$$i|\Psi\rangle = i \begin{bmatrix} Y\Lambda M \\ M\Lambda S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\Lambda Y \\ Y\Lambda S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y\Lambda S \\ S\Lambda M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\Lambda Y \\ Y\Lambda M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\Lambda S \\ S\Lambda Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S\Lambda M \\ M\Lambda Y \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Şekil 4.19'daki E_0 seviyesine tekabül eden durum bu sefer üç renkle ve Y, M, S harfleriyle ifade edilmiş ve taban enerji seviyesi olarak ele alınmıştır. Şekil 4.19'da verilen ve her bir temel örgü σ_i durumunda bir enerji seviyesini temsil etsin. Temel durumdaki ipliklerin sadece bir çiftinin oluşturduğu yeni temel duruma bir bitlik geçiş ise enerji yarılmalarındaki temel ölçüt olsun O halde E_0 durumu üç farklı temel örgü enerjisine yarılabılır:

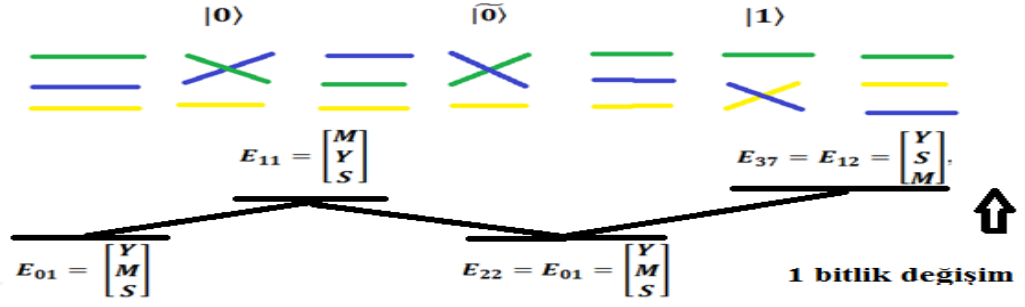
$$E_{01} = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ S \end{bmatrix} \rightarrow \{E_{11} = \begin{bmatrix} M \\ Y \\ S \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} Y \\ S \\ M \end{bmatrix}\} \quad (4.44)$$

Benzer işlem alt durumlar içinde yapılabilir:

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{bmatrix} M \\ Y \\ S \end{bmatrix} \rightarrow \{E_{21} = \begin{bmatrix} M \\ S \\ Y \end{bmatrix}, E_{22} = E_{01} = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ S \end{bmatrix}\} \\ E_{12} &= \begin{bmatrix} Y \\ S \\ M \end{bmatrix} \rightarrow \{E_{23} = E_{01} = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ S \end{bmatrix}, E_{24} = \begin{bmatrix} S \\ Y \\ M \end{bmatrix}\}, \\ E_{21} &= \begin{bmatrix} M \\ S \\ Y \end{bmatrix} \rightarrow \{E_{31} = \begin{bmatrix} S \\ M \\ Y \end{bmatrix}, E_{32} = E_{11} = \begin{bmatrix} M \\ Y \\ S \end{bmatrix}\} \\ E_{24} &= \begin{bmatrix} S \\ Y \\ M \end{bmatrix} \rightarrow \{E_{37} = E_{12} = \begin{bmatrix} Y \\ S \\ M \end{bmatrix}, E_{38} = \begin{bmatrix} S \\ M \\ Y \end{bmatrix}\} \\ E_{31} &= \begin{bmatrix} S \\ M \\ Y \end{bmatrix} \rightarrow \{E_{4,1} = E_{24} = \begin{bmatrix} S \\ Y \\ M \end{bmatrix}, E_{4,2} = E_{21} = \begin{bmatrix} M \\ S \\ Y \end{bmatrix}\} \\ E_{38} &= \begin{bmatrix} S \\ M \\ Y \end{bmatrix} \rightarrow \{E_{4,15} = E_{21} = \begin{bmatrix} M \\ S \\ Y \end{bmatrix}, E_{4,16} = E_{24} = \begin{bmatrix} S \\ Y \\ M \end{bmatrix}\} \end{aligned} \quad (4.45)$$

Şimdi örgülerle tanımlanmış kubit durumlar ve enerji seviyeleri için birkaç örnek verelim. $|0\rangle$ kubitine sırasıyla X Pauli geçitini uygulayalım.

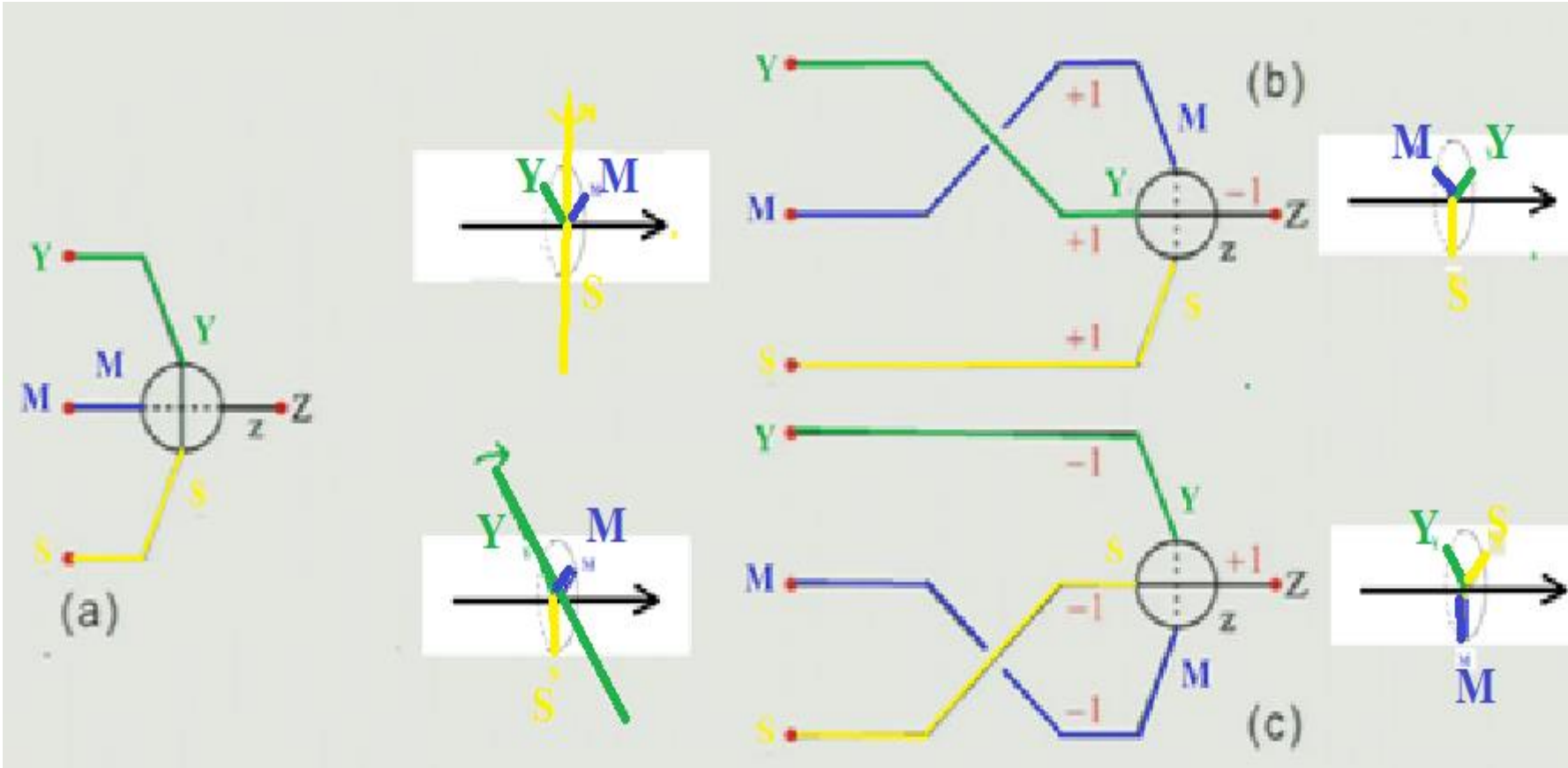
Örnek 1:



Şekil 4. 20. $|0\rangle$ 'dan $|1\rangle$ 'e değil işlemcisiyle geçişin örgülerle gösterilmesi

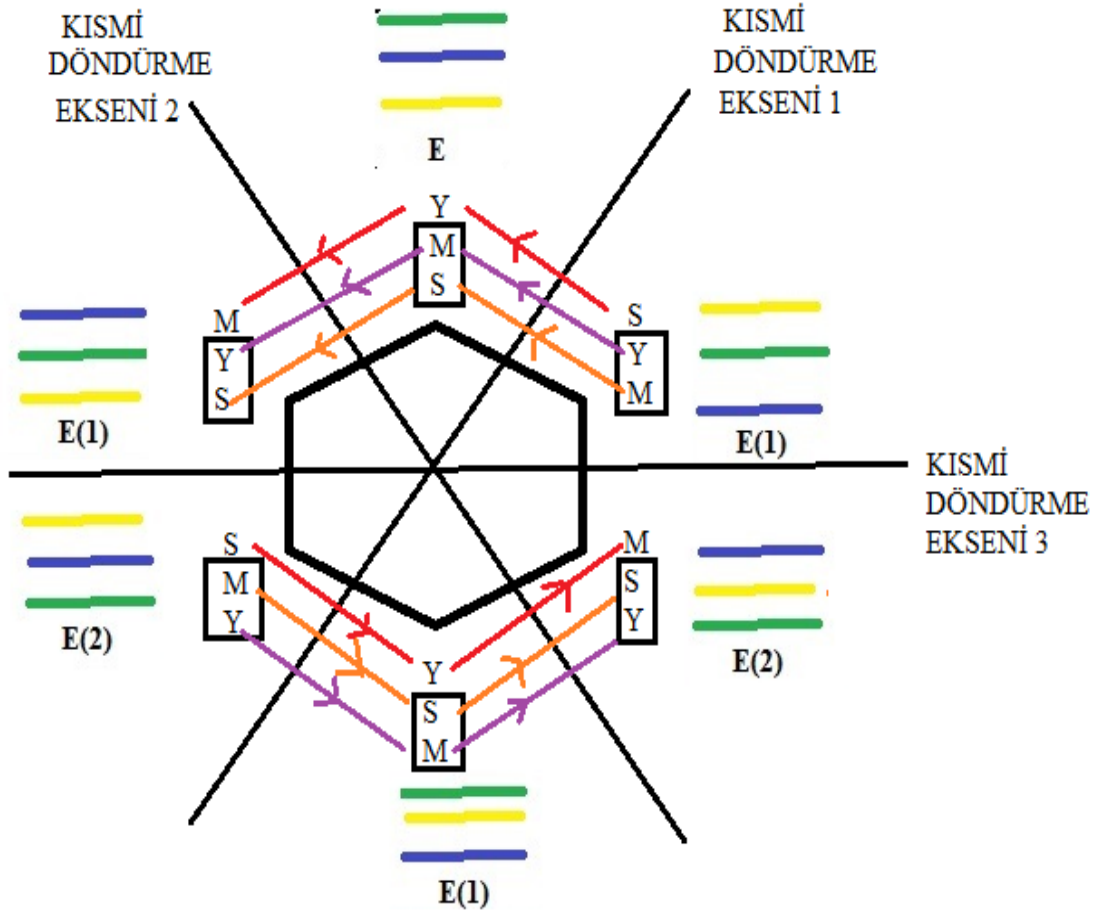
$X |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ için örgüler Şekil 4.26'deki gibi enerji seviyeleriyle gösterilebilir. Burada $|\widetilde{0}\rangle = i |0\rangle$ 'dır.

Kubit durumların örgülerle gösterilmesi farklı biçimlerde de ifade edilebilir. Örneğin Şekil 4.21 (a)'da yeşil, mavi ve sarı iplikler bir çemberi üçe bölmüş şekilde ele alınırsa $|0\rangle$ ve $-|1\rangle$ durumları örgülerle bu şekilde ifade edilebilir. Örneğin $|0\rangle$ işlemcisinin örgülerle elde edilmesi çemberin sarı eksenini etrafında ayna simetrisi uygulanması veya π kadar döndürülmesini ifade etmektedir. Benzer şekilde $-|1\rangle$ işlemcisinin örgülerle elde edilmesi çemberin yeşil eksenini etrafında ayna simetrisi uygulanması veya π kadar döndürülmesini ifade etmektedir.



Şekil 4. 21 $|0\rangle$ ve $|-1\rangle$ durumlarının örgüler ve çemberlerle gösterilmesi

Son olarak üç iplikle temsil edilen kubitlerin enerji durumları Şekil 4.22'deki gibi verilebilir. Tek bitlik enerji değişim seviyeleri $E(1)$, iki, bitlik enerji değişim seviyeleri $E(2)$ ile gösterilirse bu seviyeler bir altıgen üzerinde Şekil 4.22'deki gibi yerleştirilebilir. Şekil 4.22'de görüldüğü gibi burada üç adet eksen vardır ve bu eksenler iplik kümelerinin alt iki ipliğinin dönmesini temsil etmektedir. Bu nedenle bu eksenler kısmi döndürme eksenleri olarak ifade edilebilir. Son olarak ise kısmi döndürme eksenini 3 üzerinden bu eksenin üstündeki ve altındaki renk örüntüleri Şekil 4.22'deki gibi ifade edilebilir.



Şekil 4. 22. Kubitlerle enerji durumlarının sınıflandırılması

4.3.2.2 Örgülerle Tanımlanmış Kuantum Kutrit Durumlarında Enerji Yarılımlarının İncelenmesi

Bu bölümde örgüler teorisi kullanılarak kutrit durumlarına izafe edilen enerji durumlarının dağılımı incelenecektir. Başka bir deyişle yapılmak istenen şey Galton makinesinin örgülerle kuantum durumlarına uyarlanmasıdır. Bunun için öncelikle ilk üç seviyedeki yarılımlar incelenecektir. Şekil 4,30'daki E_0 seviyesine tekabül eden ve durumu taban enerji seviyesi olarak ele alalım. Şekil 4.20'de verilen ve Şekil 3.9'da betimlenen her bir temel örgü σ_i durumu da bir enerji seviyesini temsil etsin. Temel durumdaki ipliklerin oluşturduğu bir bitlik geçiş enerji yarılımlarındaki temel ölçüt olsun. O halde E_0 durumu üç farklı temel örgü enerjisine yarılabılır:

$$E_0 = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ S \\ K \end{bmatrix} \rightarrow \{E_1 = \begin{bmatrix} M \\ Y \\ S \\ K \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} Y \\ S \\ M \\ K \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ K \\ S \end{bmatrix}\} \quad (4.46)$$

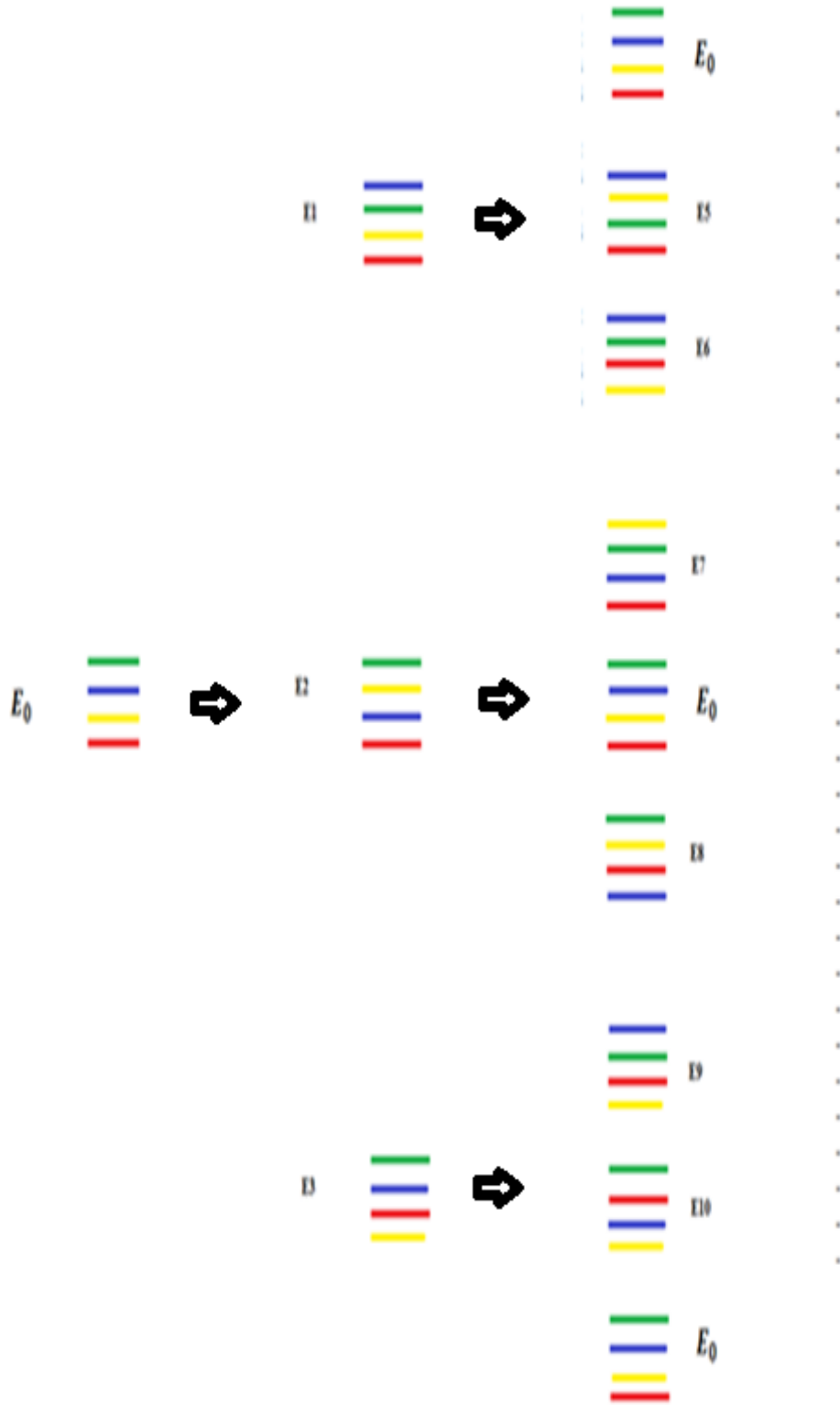
Bu durumlarda kendi içlerinde alt durumlara yarılabılır:

$$E_1 = \begin{bmatrix} M \\ Y \\ S \\ K \end{bmatrix} \rightarrow \{E_0 = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ S \\ K \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} M \\ S \\ Y \\ K \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} M \\ Y \\ K \\ S \end{bmatrix}\} \quad (4.47a)$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} Y \\ S \\ M \\ K \end{bmatrix} \rightarrow \{E_7 = \begin{bmatrix} S \\ Y \\ M \\ K \end{bmatrix}, E_0 = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ S \\ K \end{bmatrix}, E_8 = \begin{bmatrix} Y \\ S \\ K \\ M \end{bmatrix}\} \quad (4.47b)$$

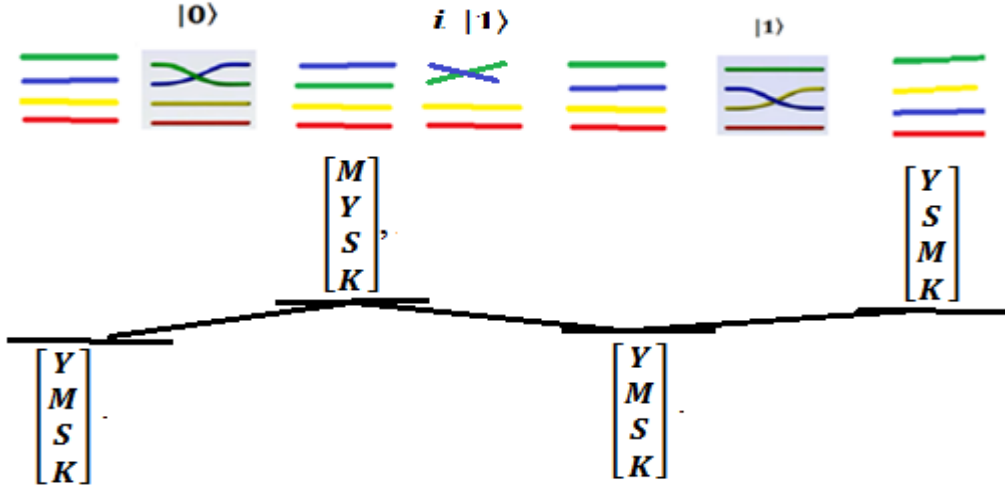
$$E_3 = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ K \\ S \end{bmatrix} \rightarrow \{E_9 = \begin{bmatrix} M \\ Y \\ K \\ S \end{bmatrix}, E_{10} = \begin{bmatrix} Y \\ K \\ M \\ S \end{bmatrix}, E_0 = \begin{bmatrix} Y \\ M \\ S \\ K \end{bmatrix}\} \quad (4.47c)$$

Üçüncü seviyeden sonrada birçok yarılma n'inci seviye ya da sonsuza kadar sürdürülebilir. Fakat sadece ilk üç seviyeyi incelersek Şekil 4.23'de yarılımları enerji türünden görebiliriz. Şekil 4.23 incelenecek olursa aslında kuantum düzeyindeki yarılımların, çok elektronlu atomların spaktrumlarındaki çizgilerin elektrik alanı, magnetik alan ve yönlü magnetik alandaki kayma ya da yarılmasını açıklamada içgörüsnel bir model oluşturduğu söylenebilir.



Şekil 4. 23. Temel durumdaki enerji seviyesinin temel örgü σ_i enerji seviyelerine yarılmaması

Örnek 2: Şimdi örgülerle ifade edilmiş bir kutrite S işlemcisi uygulayarak örgüler cinsinden ifade edelim:



Şekil 4. 24. $|0\rangle$ 'dan $|1\rangle$ 'e Y işlemcisiyle geçişin örgülerle gösterilmesi

$$S|0\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

için örgüler Şekil 4.31'deki gibi enerji seviyeleriyle gösterilebilir. Burada $|\widetilde{0}\rangle = i|0\rangle$ 'dir. Sonuç olarak örgülerin etkileşimleri kutritler türünden ifade edilebilir. Örgüler için temel durum veya birim işlemci olarak kabul edilirse herhangi bir örgü β 'nin tersi ile işleme girmesi birim işlemci I'yı verir. Matematiksel olarak bu durum $I \approx \beta_0 \beta^{-1} = \beta^{-1} \circ \beta$ olarak ifade edilebilir.

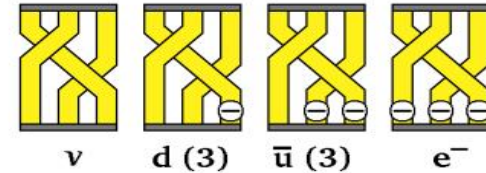
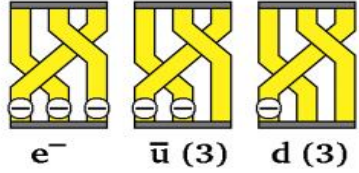
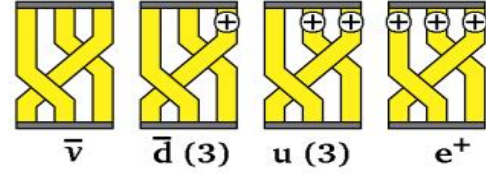
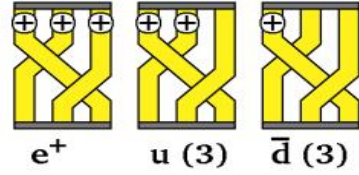
4.3.3.3 Bazı Atomaltı Parçacıkların Örgülerle Hiperküre Üzerinde İfade Edilmesi

Tezde geliştirilen hiperküre ve düğüm türleri, birçok farklı kuramsal alana uyarlanabilir. Bunlardan birisi de Rishon modelidir. Her ne kadar birçok Preon modeli gibi deneysel olarak bu modeli destekleyecek çok fazla veri olmasa da, kuantum mekaniğini anlamak ve bazı problemlere çözüm aramak açısından bu tür teorilerin önemli bir yeri vardır. Rishon modeli (RM), parçacık fiziğinin Standart Modelinde (SM) görülen fenomenleri açıklamak için geliştirilmiş ilk çabadır. İlk olarak Haim Harari ve Michael A. Shupe (birbirlerinden bağımsız olarak) geliştirilmiştir. Model iki temel çeşidi olan Rishon parçacıklarını içerir. Bunlar elektrik yükü olan T ve elektrik yüksüz V'dir. Bütün leptonlar ve her çeşit kuark, üç Rishon tarafından düzenlenmiş üçlemelerdir. Bu gruptaki Rishonların spinleri spin -

½. 'dir. T'lerin negatif yük taşıyan anti-T'leri, benzer şekilde V'lerinde nötral anti V'leri bulunmaktadır.

$$\begin{array}{lcl}
 \overline{TTT} & = & e^- \quad (\overline{TTV}, \overline{TVT}, \overline{VTV}) & = & \bar{u} \\
 \overline{VVV} & = & \bar{\nu}_e \quad (\overline{TVV}, \overline{VTV}, \overline{VVT}) & = & \bar{d} \\
 TTT & = & e^+ \quad (TTV, TVT, VTT) & = & u \\
 VVV & = & \nu_e \quad (TVV, VTV, VVT) & = & d
 \end{array}$$

(a)



(b)

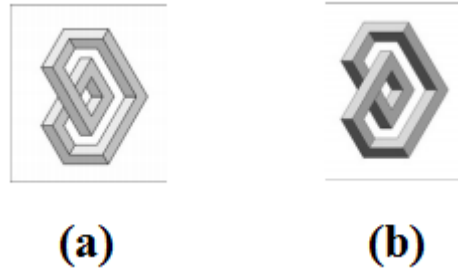
(c)

Şekil 4. 25. Rishon modeline göre bazı parçacıklar ve düğümler türünden ifade edilmesi (Bilson-Thompson, 2008)

Şekil 4.25 (a) incelendiğinde T ve V'lerin kombinasyonlarıyla pozitron, yukarı kuark, nötrino, anti yukarı kuark, anti nötrino gibi parçacıklar tanımlanabilir. Bunlar düğümlerle Şekil 4.25 (b) veya bunları karşı durumdaki örgüleriyle Şekil 4.25 (c)'deki gibi ifade edilebilir. Negatif yüklü fermiyonlar pozitif yüklü fermiyonların yukarıdan aşağıya ayna görüntüsü alınarak ifade edilebilir. Pozitif yüklü fermiyonlar sağlak bir örgüye pozitif yükler eklenerek ve solak anti örgüsünde negatif yükler eklenerek ise anti parçacıkları elde edilebilir. Sağ veya sol el yönlü örgü seçimi tamamen isteğe bağlı olarak rasgele seçilebilir. Solak bir örgüye yükler ekleyerek ve onun anti-örgüsü üzerinden anti parçacıkları da oluşturulabilir. Böylece eğer bunu yaparsak bütün yük taşıyan örgüleri iki farklı durumda aynı şekilde tek seferde elde ederiz. Fakat aynı işlemi yüksüz örgüler için (nötrino ve anti-nötrino) uygulayarsak bu onların tekrar kopyalanması anlamına gelecektir yani, ilk nötron çifti ikincisinin $\pm\pi$ dönmüş olarak aynısı olacaktır. Başka bir deyişle iki kere saymayı önlemek amacıyla sadece sağlak bir anti-nötrino oluştururken, diğer fermiyonları hem sağlak hem solak olarak üreteceğiz. Bu Rishon modelinde nötral Rishonların

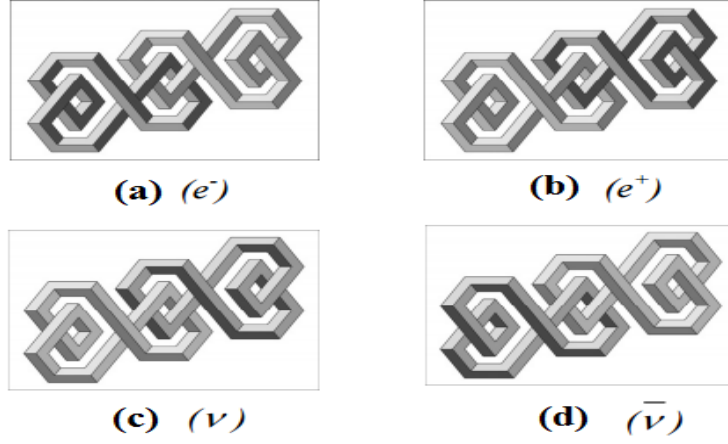
kullanılmasıyla sadece ν_e ve $\bar{\nu}_e$ tanımlanmasının tersine aslında nötrino ve anti-nötrinoları aynı alt parçacıklardan oluşturmamızın doğal bir sonucudur. Herhangi bir örgüye (ν_e ve $\bar{\nu}_e$ hariç) C ve P işlemcilerine uygularsak Şekil 4.25'deki gibi köşegensel olarak zıttını elde ederiz. Daha da ilerisi bir örgüyü saat yönünde ve saat yönünün tersi π derecesinde döndürme ve yükleri tersine çevirme işlemcileri tanımlayabiliriz (Bilson-Thompson, 2008).

Aslında örgüler dışında da farklı gösterimlerle temel parçacıkların ifade edilmesi literatürde farklı biçimlerde yapılmıştır. Darvas ve Farkas (2011) geliştirdikleri Rishon modelinde koku alanı denilen bir hipotetik alana iki adet pozisyon alabilecek biçimde Şekil 4.26'da verildiği gibi eril ve dişil iki durum tanımlamışlardır. Rishonlar erkeksi kokusu için $+$ ($5/9$) ve kadınsı koku için $-$ ($4/9$) elektrikli yükleri olduğu varsaymışlardır. Hem eril hem de kadınsı koku rishons üç renkte görünebilir. Anti-parçacıklarının tamamlayıcı renkleri vardır bu nedenle rishonantirishon çifti renksizdir, aynı şekilde üç farklı rishons üçlüsüdür.



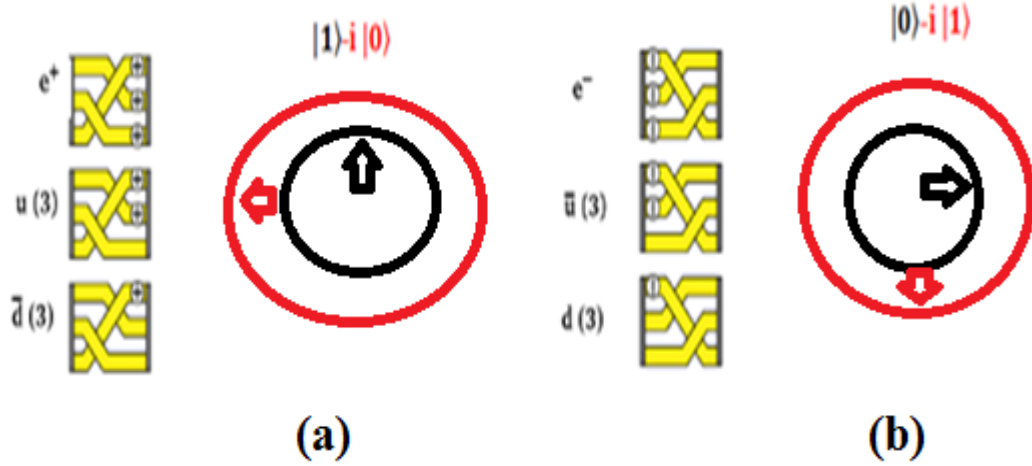
Şekil 4. 26. (a) Sol eğilimli Rishon (b) Sağ eğilimli Rishon (Darvas ve Farkas, 2011)

Leptonlar: Hafif kütleli parçacıklara elektronlar, pozitronlar ve nötrinolar denilen gibi leptonlar denir. Bir elektron (Şekil 3 solda), dişil ve anti-eril koku reçinesi ($\bar{L}R$) olabilir (Şekil 4.27 (a)). Yükü -1 [$= (-5/9) + (-4/9)$] 'dır. Bir pozitron (Şekil 3 sağ), eril ve anti-kadınsı bir koku reçinesi ($\bar{R}L$) yapılabilir (Şekil 4.27 (b)). Yükü $+1$ [$= 4/9 + 5/9$] 'dır. Bir nötrino dişil ve anti-dişil koku reçinesi çiftinden ($R\bar{R}$) oluşabilir. Yükü 0 'dır (Şekil 4.27 (c)). Benzer şekilde, bir anti-nötrino (Şekil 8 sağ) eril ve eril-eril rishon çifti ($L\bar{L}$) olabilir. Yükü 0 'dır (Şekil 4.27 (d)). Şekil 4.27'de görüldüğü gibi Şekil 4.26'da verilen iki temel birim şekile göre temel parçacıklar şekilsel olarak ifade edilebilmektedir.



Şekil 4. 27. Çeşitli parçacıkların Rishonlarla temsili Darvas ve Farkas (2011)

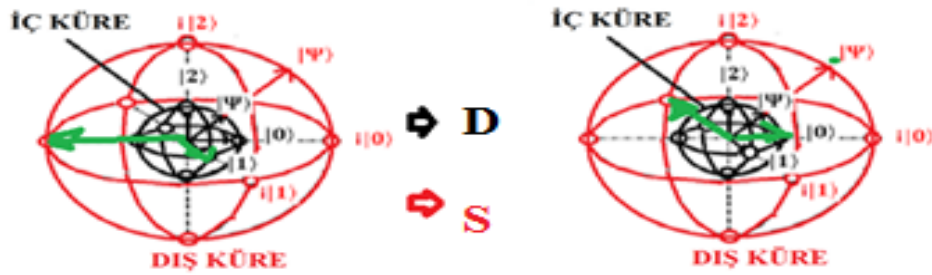
Son olarak Şekil 4.26’da verilen temel bilgi birimiyle u, c, t (LRL) kuarkları ile d, s, b kuarkları (RLR) ve bunların üzerine ise proton (udu) ve meson inşa edilebilir. Şekil 4.27’de bunun farklı kombinasyonları verilmiştir. Bu bağlamda farklı sunum türleriyle atomaltı parçacıkların inşa edileceği söylenebilir.



Şekil 4. 28. Elektron, yukarı kuark, aşağı kuark ve bunların anti parçacık versiyonlarının hiperküre üzerinde ifadesi

Şimdi elimizde bir elektron, bir anti-yukarı kuark, bir aşağı kuark olduğunu ve bunun örgülerle ifade edildiğini düşünelim. Aslında bu üç kuark durumu aynı örgüyle sadece yükleri farklı olarak ifade edilebilir. Elektron üç adet T’den oluştuğu için üç adet pozitif yüke ve pozitron ise üç adet anti-T’den oluştuğu için üç adet negatif yüke sahiptir. Benzer şekilde yukarı kuark iki adet T ve bir adet V’den oluştuğu için (TTV, TVT, VTT) iki adet pozitif yüke sahiptir. Benzer şekilde aşağı kuark iki adet V ve bir adet T’den oluştuğu için (TVV, VVT, VTT) iki adet pozitif

yüke sahiptir (Şekil 4.28 a). Şekil 4.28 (a)'da bir pozitron, yukarı kuark ve anti-aşağı kuarkın aslında kubitler türünden $|1\rangle-i|0\rangle$ olarak ifade edilebileceği bu parçacıkların anti durumu olan elektron, anti yukarı kuark, aşağı kuarkın ise genel olarak $|0\rangle-i|1\rangle$ ifade edilebileceği görülebilir. Başka bir deyişle $|1\rangle-i|0\rangle$ durumunda X değil işlemcisini $|1\rangle$ X işlemcisini $-i|0\rangle$ uygularsak $|0\rangle-i|1\rangle$ durumunu elde ederiz. Bunu, X sanal uzaydaki döndürme işlemcisi olmak üzere $(X+X) \Omega (|1\rangle-i|0\rangle) = X|1\rangle-iX|0\rangle = |0\rangle-i|1\rangle$ olarak ifade edilebilir. Aslında bu normal çarpımla $X (|1\rangle-i|0\rangle)$ olarak ifade edilebilir. Fakat birazdan kutrit olarak ifade edilirse yapııştırma çarpımının farkı gösterileceği için bu şekilde yazıldı. Bu noktada kubitler biri gerçek diğeri sanal iç içe geçmiş iki yapışık çember üzerinde ifade edilirse parçacık, anti parçacık çiftleri vektörel olarak bir hiper çemberde Şekil 4.28'deki gibi gösterilebilir. Bir hiperçember aslında Bloch küresinin düzlemde yansıması şeklinde de yorumlanabilir. Çünkü Bloch küresinde de sanal sayılar temsil edilebilmektedir. Bununla beraber Bloch küresi kutrit ve daha üst durumlar için yeterli olmamaktadır. Bu nedenle hiper küre ve daha farklı geometrik temsiller kullanılabileceği düşünülmektedir. Şekil 4.28 incelendiğinde her iki durumlarda girdi durumu $\{Y, M, S\}$ olarak bir çember üzerinde gösterilirse Şekil 4.28 (a)'da $2\pi/3$ kadar saat yönünde dönmeye $\{S,Y,M\}$, 4.28 (b)'de $2\pi/3$ kadar saat yönünün tersi yönde dönmeye $\{M, S, Y\}$ olarak göstereceğimiz söylenebilir. Bu başka şekillerde de uygulanabilir.



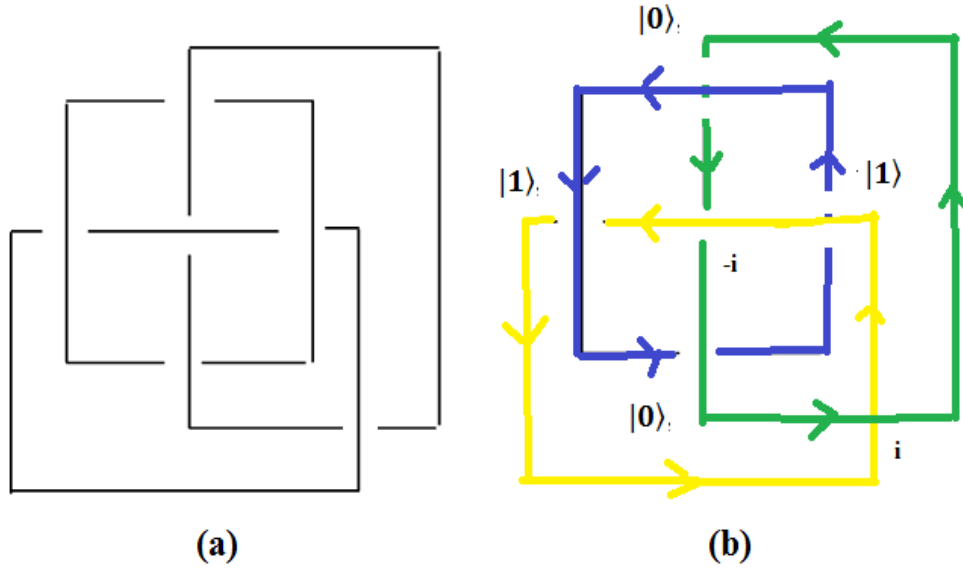
Şekil 4. 29. Kubit türünden ifade edilen durumların hiperkürede temsil edilmesi

Şekil 4.28 (a)'da verilen örgüleri bir fazla örgüyle yeşil, mavi, sarı, kırmızı olarak dört örgülü bir yapıda fakat dördüncü örgü olan kırmızı örgünün sabit yani etkileşimsiz olduğu şekilde de düşünebiliriz. Başka bir deyişle kutrit formunu sınırlandırılmış bir halde kubite çevrilmiş olarak veya kubit örgüsünü genişletilmiş olarak kutrit olarak ifade edebiliriz. Bu durumda kutritleri hiperküre üzerinde ve S,

ile D işlemcileri kullanarak ifade edebiliriz. Böylece $|1\rangle-i|0\rangle$ durumunda D işlemcisini $|1\rangle$ S işlemcisini $-i|0\rangle$ uygularsak $|0\rangle-i|1\rangle$ durumunu elde ederiz. Bunu yapıştırma işlemcisi türünden S sanal uzaydaki döndürme işlemcisi D sanal uzaydaki döndürme işlemcisi olmak üzere $(D+S)\Omega(|1\rangle-i|0\rangle) = D|1\rangle-iS|0\rangle = |0\rangle-i|1\rangle$ olarak ifade edilebilir (Şekil 4.29).

4.3.3 Kubit ve Kutrit Temelli Dolanık Durumların Örgülerle İfade Edilmesi

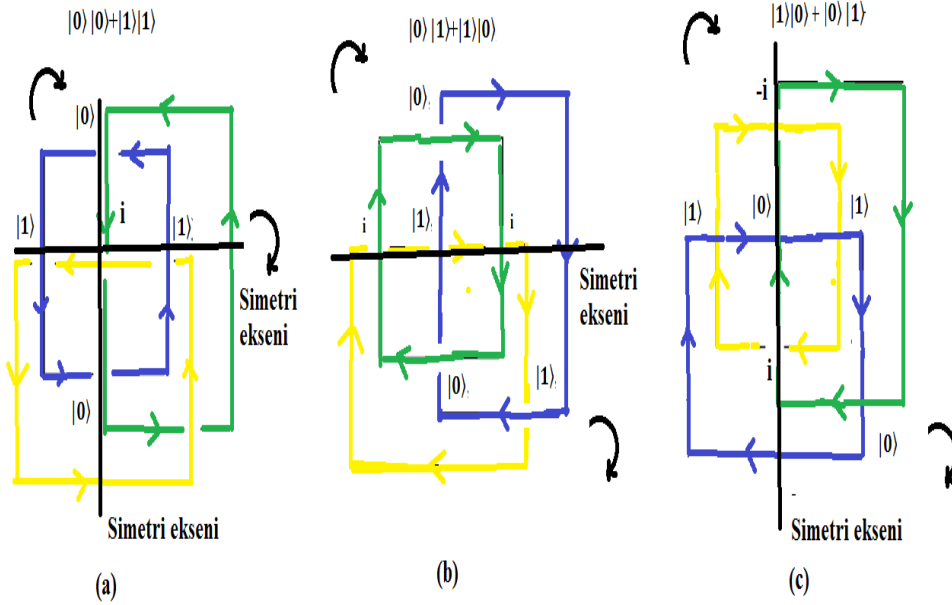
Kubit ve kutrit durumların renkli örgülerle ifade edilmesinden bir önceki bölümde bahsettik. Bu bölümde ise kubit ve kutrit durumlara dayalı dolanık durumların renkli örgülerle nasıl ifade edilebileceğini inceleyeceğiz.



Şekil 4. 30. Borromean halkası ve kubit durumların halka üzerinde ifade edilmesi (Kauffman, Lomonaco, 2002)

Şekil 30 (a)'da verilen Borromean halkası kubit temelli dolanık durumların ifade edilmesinde kullanılabilir. Borromean halkaları birbirine kenetlenmiş, tek bir halkayı bozmanın, ayırmanın diğer ikisini de serbest hale getirdiği üç halkanın olduğu bir sistem gibi düşünebilir. Borromean halkalar, bileşenlerin üçlüsünün gerçekten topolojik olarak bağlantılı olduğu özellikli, üç bileşenli bir bağlantıdır, ancak herhangi bir bileşenin çıkarılması, bir çift bağlantısız halka bırakır. Aslında Borromean halkası fizikte bir çok alanda kullanılmaktadır. Örneğin iki nötron halo çekirdeği üç parçaya ayrılabilir, asla ikiye ayrılmaz. Bu parçalara bu davranışından

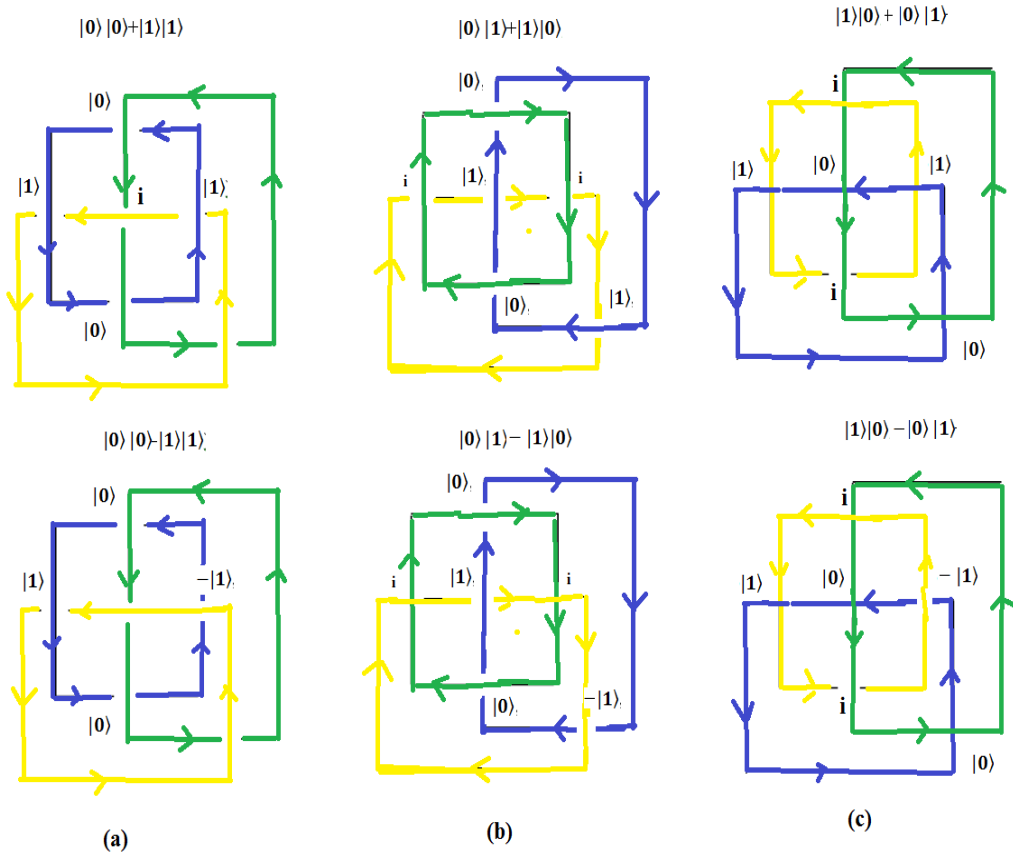
dolayı Borromean çekirdek denir. Kubit dolanık durumlarda Şekil 4.16 ve Şekil 4.17’de verilen etkileşim kurallarına göre Şekil 4.30 (b)’deki gibi Borromean halkası renklendirilerek tanımlanabilir. Dikkat edilirse sadece kubit durumlar değil, sanal durumlarda bu halkalarda oluşmaktadır ve bu sanal durumları gerektiği yerde halkalarda kopma olmaması için artı veya eksi olarak kullanabilir. Ayrıca sanal durumları tespit eden düğümler kubitlerin çarpımı ve dolanıklık yönünü de gösterme açısından kullanılmaktadır.



Şekil 4. 31. Bazı dolanık durumların Borromean halkası üzerinde ifade edilmesi

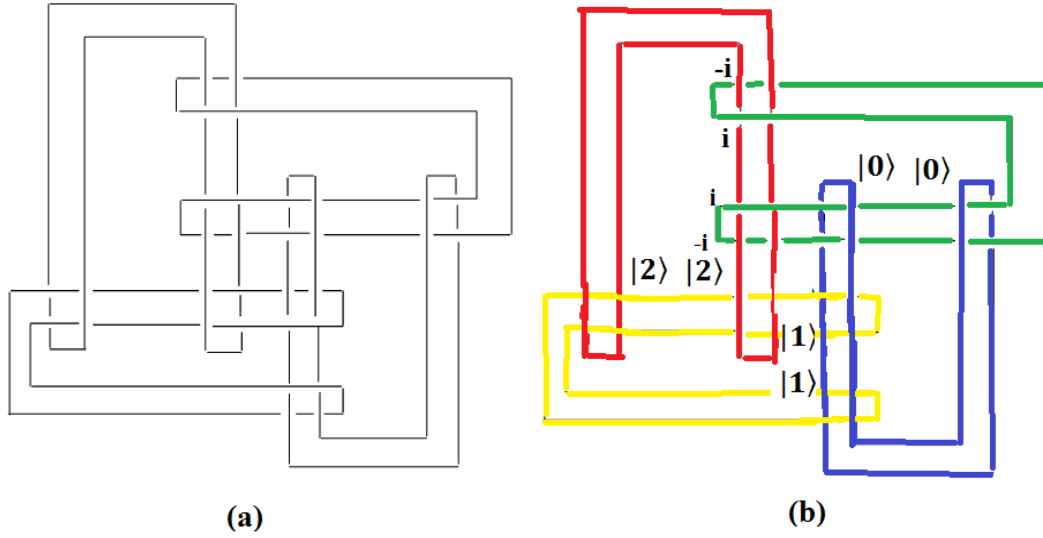
Şekil 4.31’de halkada çarpım işleminin tanımlanması için saat yönünü ve sanal sayıyla temsil edilen düğüm noktasını kullanacağız. Bütün halkaların yönünün ise saat yönünün tersinde aktığımızı varsayarak, farklı renk ipliklerinde farklı yön ve etkileşimleri hesaba katmadan basit bir şekilde dolanık durumları tanımlamaya çalışacağız. Şekil 31 (a)’da $|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle$ durumunu inceleyelim. Halkanın ortasındaki sanal sayı ile temsil edilen düğümden iki ayrı referans noktası çıkmaktadır. Bu referans çizgisine karşı gelen durumları dışardan içeriye doğru saat yönünde çarpıp ve toplarsak $|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle$ dolanık durumunu elde ederiz. Benzer şekilde Şekil 31(b)’de $|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle$ durumunu yeşil ve mavi ipliğin yerini değiştirerek ve referans çizginin üstü ve altındaki durumları dışardan içeriye doğru çarpıp toplayarak elde edebiliriz. Benzer şekilde Şekil 31 (c)’de $|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle$ durumunu sarı ve mavi ipliğin yerini değiştirerek ve referans çizginin sol ve sağındaki durumları çarpıp toplayarak elde edebiliriz. Bu bağlamda kubit temelli

dolanık durumlar Borromean halkası üzerinde farklı renk kombinasyonları ile sınıflandırılarak analiz edilebilir. Şekil 32 (a)'daki dolanık durumda sarı halka sabit tutularak mavi ve yeşil halkanın yeri değiştirilerek $|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle$, $|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle$ durumları elde edilebilir. Benzer şekilde, yeşil halka sabit tutularak sarı ve mavi halkanın yeri değiştirilerek $|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle$, $|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle$ durumlarını ifade edebiliriz.



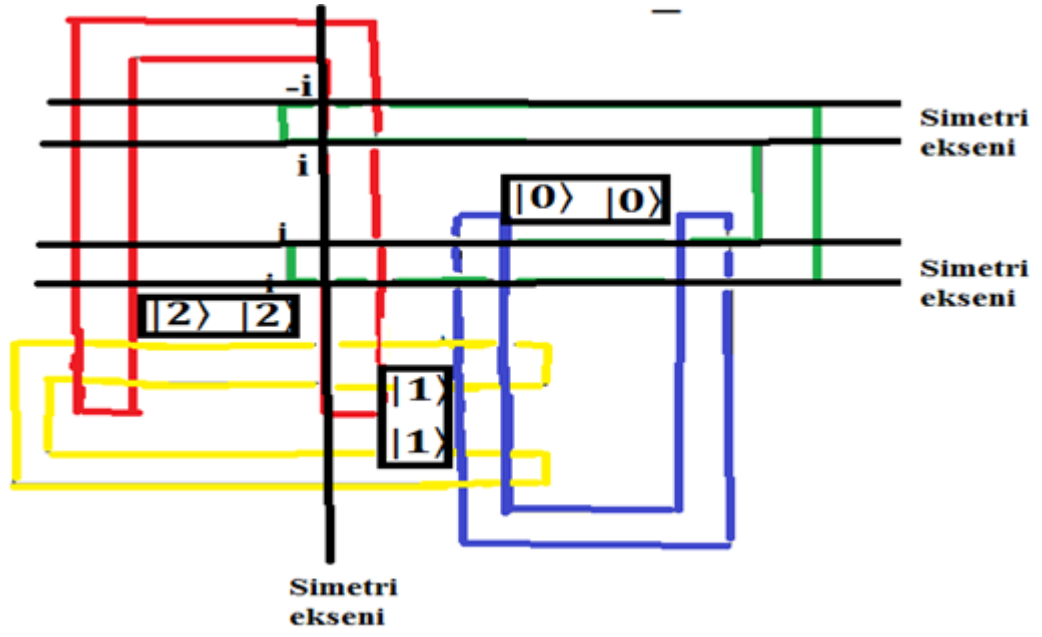
Şekil 4. 32. Dolanık durumların Borromean halkası üzerinde ifade edilmesi

Sonuç olarak Şekil 32'de $|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle$, $|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle$, $|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle$, $|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle$, $|1\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle$, $|1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle$ durumlarını ifade edebiliriz. Daha ileriki aşamalarda bu durumlar belki temel Rishonların, kuarkların ve parçacıkların ifade edilmesinde kullanılabilir. Belkide evrende mevcut atomaltı parçacıklar çok daha alt düzeyde dolanık Rishonların çok boyutlu uzayda yığılmasıyla ortaya çıkan yapılardır. Bununla beraber hem deneysel hem de teorik çalışmaların yetersizliği nedeniyle bu sonuçları bu konuda birer matematiksel içgörüsül oyunlar olarak nitelemek daha doğru bir yaklaşım olacaktır.



Şekil 4. 33. Bir Brunnian bağlantısı ve kutritlerin bu bağlantı üzerinde ifade edilmesi (Kauffman, Lomonaco, 2002)

Şekil 4.33 (a)'de verilen Brunnian bağlantısı kutrit temelli dolanık durumların ifade edilmesinde kullanılabilir. Bir topolojinin bir dalı olan bir düğüm teorisinde, bir Brunnian bağlantısı, eğer herhangi bir bileşen kaldırılırsa, önemsiz, bağlantısız daireler kümesi haline gelen çözülmesi zor olan bir bağlantıdır. Diğer bir deyişle, herhangi bir döngü kesildiğinde tüm döngüler serbest kalır (böylece hiçbir iki döngü doğrudan bağlantılı olamaz). En tanınmış ve mümkün olan en basit Brunnian bağlantısı, üç parçanın bir bağlantısı olan Borromean halkalarıdır. Bununla birlikte, her sayı üç veya daha fazla için, bu sayıdaki döngüleri içeren Brunnian mülküyle sonsuz sayıda bağlantı vardır. Kutrit dolanık durumlarda Şekil 4.16 ve Şekil 4.17'de verilen etkileşim kurallarına göre Şekil 34'deki gibi Brunnian bağlantısı renklendirilerek tanımlanabilir. Görüldüğü gibi sanal sayının olduğu eksenin etrafında dolanık durumlar kümelenerek dolanıklık gösterilebilmektedir.



Şekil 4. 34. $|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle + |2\rangle|2\rangle$ dolanık durumunun sanal simetri eksenine göre kümelenmesi

$|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle + |2\rangle|2\rangle$ dolanık durumunun sanal simetri eksenine göre kümelenmesi Şeki4.34'deki gibi gösterilebilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde bulgular ve tartışma bölümünde elde edilen sonuçlar özetlenecek ve tartışılacaktır. Bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk bölümde hiperküre, yapıştırma çarpımı ve dolanıklık açısından sonuçlar incelenecek ikinci bölümde ise kuantum oyunundaki dallanmalar çeşitli değişkenler açısından incelenecek ve gelecek çalışmalar için öneriler yapılacaktır.

Çevremizdeki dünyayı matematiksel olarak kavramaya çalışan uzun bir gelenek vardır. İlk insanlar, gök cisimlerinin, güneşin, ayın ve yıldızların hareketini algılamıştı. Döngülerinde düzenlilik tespit eden insanlar ve dünyayı bu olgularla kısmende olsa açıklamaya başladı. Daha sonra, Antik Yunan'da Pisagoras, müzik armonisi teorisini, seslerin tonları arasındaki sayısal oranlara dayanarak geliştirdi. Bu noktada, Johannes Kepler'in gezegen hareketinin kesin yasalarını matematiksel olarak formüle etti ve Isaac Newton'un evrensel hareket kanunları bir avuç matematik formülüne indirgemenin yollarını sağlamıştır. Albert Einstein'ın Görelilik Teorisi ve hatta daha fazla kuantum fiziği durumu karmaşıklaştırdı, ancak yine de görelilik ve belirsizlik dahil olsa bile, istatistikler temel parçacıklar dünyasındaki süreçleri anlamaya yönelik bir model sağlamıştır. Özellikle kuantum fiziğinin geliştirilmesi, bilim insanlarının kullandığı modellerin bugüne kadar elde edilen deneyimlerden uzak, çoğu durumda insanlar için karşı-sezgisel ve düşünülemez matematiksel formüller referans noktası haline gelen kendine has bir kendi gerçeklik türü oluşturmuştur. Kaçınılmaz olarak, bilgi işlem makinelerinin veriyi kuantum dünyasında neler olduğuna dair en yakın tahmin oluşturduğu simülasyonlar, bilgisayarlar tarafından yapılan hesaplamaların sadece evrenin modellenmesi değil, taklit edilmesi fikrine yol açmıştır. Tüm kainatın büyük bir bilgisayar olduğunu iddia etmesi fikrine Stephen Wolfram'ın dünyayı hücreli otomatı John H. Conway'nin Hayat Oyunu olarak örnek verilebilir. Son zamanlarda ise evrenin bir bilgisayar simülasyonu veya bir hologram olup olmadığı tartışmaları ortaya çıkmıştır. 1960'lardan itibaren, bilim kurgu yazarları, bilgisayarların insanlar için sürükleyici ve aldatıcı ortamlar oluşturmak için kullanılabileceği fikrini geliştirmeye başladı. Sanal gerçeklikte gerçek deneylerin geliştirilmesiyle eşzamanlı olarak veya Oculus Rift, Samsung Gear ve Sony PS VR ve VR gözlükleri artık çok boyutlu sanal gerçeklikleri dünyamıza getirmektedir (Koskimaa, 2016). Bu bağlamda çok boyutlu durumlarla ilgili teorik fiziksel çalışmalar evrenimiz üç boyutlu bile olsa gelecekte

bizim kuracağımız sanal evrenlerin fiziği açısından önemlidir. Bu yüzden, bu tezde de en temel seviyede farklı fiziksel durumlar kavrama düzeyinde teorik olarak örgülerle incelenmeye çalışılmıştır.

Bu çalışmanın ilk sonucu dolanık vektörlerin normal çarpımla ayrılmasa bile skaler çarpım yoluyla ayrılabilmesi ve bu çarpımdaki vektörlerin tensör olması nedeniyle bu skaler çarpımın iki küreyi eş merkezli yapışık olarak da tanımlamak amacıyla yapıştırma çarpımı kullanılarak tanımlanabileceği söylenebilir. Birbirine yapışık iki eş merkezli küre çok boyutlu uzayda aynı bir pusula veya saat gibi düşünülebilir. İki veya daha çok vektör saatin kadranları gibi kuantum durumunu çok boyutlu uzayda temsil etmektedir. Denklem 4.2’i hatırlarsak bir kuantum durumu dolanıksa bu durum yapıştırma işlemcisiyle

$$|\Psi\rangle = |\phi\rangle\Omega|\chi\rangle = |\Psi_i\rangle\Omega|\Psi_j\rangle = |\Psi_i\rangle|\Psi_j\rangle\delta_{ij}\hat{i} \quad (5.1)$$

olarak ifade edilebilecek şekilde tanımlanır. Ayrıca $|H\rangle$ dolanıklık vektör olmak üzere hiperküre üzerinde yapıştırma işlemcisiyle aşağıdaki gibi tanımlanabilir :

$$|H\rangle = |\Psi_{i\text{ küre}}\rangle\Omega|\Psi_{dış\ küre}\rangle K\cos\epsilon\cos\Theta \quad (5.2)$$

Birleştirme işlemcisinin bir çok örüntü analizinde faydalı bir çarpım olduğu söylenebilir. Belirli işlemciler arası sıkıştırılan oyunlardaki yeni ve farklı örüntü analizinde birleştirme işlemcisi kullanılabilir.

Renk Çemberi pusulasının analiz için kullanıldığı, sıkıştırılmış oyunlar incelediğinde $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ başlayan ve aynı işlemcilerle sıkıştırılan oyunların yönünün her bir başlangıç kutriti için aynı yön olduğu söylenebilir. Buda, kuantum durumları sıkıştırmayla veya farklı işlemci uygulamalarının analizinde renk çemberi pusulasının kullanılabilceğini göstermektedir. Ayrıca renk çemberi pusulası üzerindeki sabit durumlar yapıştırma işlemcisiyle dolanık durumlar elde edilmesinde ve bir tür oyun yapısının temel dolanık iskeleti belirlenmesinde kullanılabilir.

Örgülerin komutatif (değişim özelliği) göstermemesi, matrislerle gösterilebilecek matematiksel bir yapıya sahip olması birçok açıdan dolanıklık ve kuantum durumlarını açıklamada güçlü bir araç olarak kullanılacaklarını göstermektedir. Ek olarak doğanın en küçük biriminin sicim kuramınca atomlar değil sicimsi yapılar olduğu düşünülürse örgü teorisinin kuantum mekaniği alanında çok kullanışlı olduğu söylenebilir. Bu bağlamda örgü teorisi bu çalışmada kutrit

durumların enerji seviyelerindeki değişimlerin dağılımlarının normalizasyonunda kullanılmış ve örgü teorisinin kuantum teorisi açısından kullanışlı bir matematiksel yapı olduğu gösterilmiştir. Örgü teorisi ayrıca zeeman etkisi gibi yarılmaların matematiksel olarak açıklanmasında kullanılabilirdiği söylenebilir. Son olarak, örgülerin tanımındaki sahte (pseudo) kuantum durumlar fiziksel olarak sanal (virtuel) parçacıklara karşılık geliyor olabilir. Geliyorsa gelecek çalışmalarda bu incelenebilir. Ayrıca dolanık durumlarda hiperküre üzerinde ve çeşitli halkalar üzerinde matematiksel iplikler ve halkalar üzerindeki farklı matematiksel işlemlerle gösterilebilir. Sanal sayılar bu durumların analizinde birer simetri aracı olarak kullanılabilir. Son olarak, bu tezin eğitim bilimleri ve kuantum teorisinin eğitim bilimleri açısından öğretimi için de yeni ve farklı kavrama şemaları getirdiği söylenebilir. Bloom taksonomisinin kavrama basamağı bir bilginin başka bir bilgi türüyle temsil edilmesini, bu temsil edilen şeyin örneklendirilebilmesini, sınıflandırılabilmesini, özetlenmesini, çıkarımda bulunulup, karşılaştırılabilmesini ve en nihayetinde temsil edilen olgunun açıklanmasını içerir (Demirel, 2015). Bu tezde kuantum durumları i) hiperküre üzerinde temsil edilerek, ii) kuantum hareketleri bir pusula üzerinde temsil edilerek, iii) kuantum durumları örgüler türünden ifade edilerek kavrama seviyesinde yeni kavramsal şemalar sunmuştur. Fakat bundan sonraki çalışmalarda kullanacaklar için kuantum bilgi teorisinin kavrama basamağında şemalar olduğu söylenebilir. Özetle bu tezde dolanıklık kavramına farklı bir bakış açısıyla incelenmiştir. Kuantum yazı tura oyunları farklı bir şekilde analiz edilmiştir son olarak kutrit ve kubit sistemler örgülerle ifade edilmeye çalışılmıştır. Gelecek çalışmalar için öneriler şu şekilde verilebilir:

-Hiperküre üzerinde yoğunluk işlemcisinin nasıl tanımlanacağı incelenebilir. Hiperküre üç boyutlu uzayda zamana göre değişen bir yapı olarak ele alınarak zamana bağlı kuantum durumları ve dolanık durumlar incelenebilir.

-Kutrit temelli pusula bir simülasyon haline getirilerek farklı durumlar incelenebilir. Örneğin, kutrit temelli pusula karadeliklerdeki entropi durumlarının ve kuantize durumların incelenmesinde kullanılabilir. Kutrit temelli pusula kuarkların sınıflandırılmasında veya kuark denizinde parçacıkların nasıl davranacağını incelenmesinde kullanılabilir.

-Yapıştırma işlemcisiyle tanımlanan dolanıklık denklemiyle dolanıklık kavramıyla ilişkili konular yenide analiz edilebilir.

6. KAYNAKLAR

- Arnault, Amblard, 2014, arXiv:1404.4199 [quant-ph] (Ziyaret tarihi: 21 Mayıs 2016).
- Aspect, A.; Dalibard, J.; Roger, G. 1982, "Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers", *Phys. Rev. Lett.*, 49 (25): 1804–7, Bibcode:1982PhRvL..49.1804A
- Atkins, P; Friedman, R. 2005. *Molecular Quantum Mechanics*. 4th ed., Oxford University Press, United States.
- Bell, J.S 1966. On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics, *Rev. Mod. Phys.* 38, 447
- Berlin, G.; Brassard, G.; Bussieres, F. and Godbout, N. 2009. preprint arXiv:0904.3945 [quant-ph], (Ziyaret tarihi: 21 Mayıs 2016).
- Bennett, C. H., 1973. Logical reversibility of computation, *IBM J. Res. Develop.* 17 525-532.
- Bennett, C.H.: Brassard, G. 1984. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. *In Proceedings of IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, 175, 8. New York,
- Benioff, P., 1980. The computer as a physical system: a microscopical quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines, *J. Stat. Phys.* 5, 563-591.
- Bilson-Thompson, S.O. Markopoulou, F. Smolin, L. 2006. Quantum Gravity and the Standard Model, arXiv: hep-th/0603022, (Ziyaret tarihi: 30 Mayıs 2016).
- Bilson-Thompson, S.O. 2008. A topological model of composite preons, arXiv: hep-ph/0503213, (Ziyaret tarihi: 21 Mayıs 2016).
- Benjamin, A.T. 2013 *The Mathematics of Games and Puzzles: From Cards Sudoku*, Teaching Company.
- Conway, J.H.; Guy. R.K., (2013). *Sayılar Kitabı*, 1. Basım, Alfa Bilim, İstanbul.
- Collins, G.P. (2006) Computing With Quantum Knots, *Scientific American*, 294, 4.
- Dalvit, E. 2011. New Proposals For The Popularization Of Braid Theory, Doctorate Theises, Università Degli Studi Di Trento, <http://science.unitn.it/~dalvit/docs/PopularizationBraids.pdf> (Erişim Tarihi: 22.12.16)

- Darvas, G., Farkas, T. F. (2011). Graphic Illustration of Elementary Particles, *Bridges: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*, 613-616.
- De Broglie, L.,1992, *Yeni Fizik Kuvantumları*, 1. Basım, Kabalcı Yayınevi, İstanbul.
- Demirel, Ö., 2015, *Eğitimde Program Geliştirme Kuramdan Uygulamaya*, 23.Baskı, Pegem Akademi, Ankara.
- Deutsch, D. 1985. Quantum theory as a universal physical theory, *Int. J. theor. Phys.* 24, 1-41.
- Devadoss, S.L. 2015 *Shape of Nature*, Teaching Company
- Di Y M and Wei H M 2012 preprint arXiv:1105.5485, (Ziyaret tarihi: 30 Mayıs 2016).
- Duran V. and Gençten A. 2016a, *AIP Conference Proceedings* 1722, 100001
- Duran V. and Gençten A. 2016b, *Journal of Physics: Conference Series* 766, 012013
- Eisert J., W. Martin, and Lewenstein, M. 1999 ‘Quantum games and quantum strategies’, arXiv: quant-ph/9806088 v3 29 Sept 1999
- Erbaş, Ö., 1996. Sanat Eğitiminde Renk ve Renk Öğretimi Yöntemleri, T.C Anadolu Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Sanatta Yeterlilik Tezi.
- Grabbe,J.O., 2005. An Introduction to Quantum Game Theory, arXiv:quant-ph/0506219, (Ziyaret tarihi: 21 Mayıs 2016).
- Goyal, S. K., Simon B. N., Singh R., Sudhavathani S., 2011 Geometry of the generalized Bloch sphere for qutrit, arXiv:1111.4427 [quant-ph], [\(Ziyaret tarihi: 21 Mayıs 2016\)](#).
- Griffiths, D. 2008, *Introduction to Elementary Particles*, Second Edition, Wiley-VCH, USA.
- Grover, L.K.1996, A fast quantum mechanical algorithm for database search,”in Proc. 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp. 212-129.
- Gün, A. 2011. SI ($S=3/2$, $I=1/2$ VE $3/2$) Spin Sistemlerinde Kuantum Dolanıklık Ve Kuantum İletişimdeki Bazı Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun.
- Feynman, R. 1982. Simulating physics with computers, *Int. J. Theor. Phys.* 21, 467– 488.
- Ingemar, B. Zycowski, K. 2006. *Geometry Of Quantum States An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, London.

- İpekoğlu, Y. ve Turgut, S. 2009. Kuantum Bilgi Kuramının Temel Kavramları, Bölüm 1 Ders Notları, http://itap-tthv.org/iars/pdf/iars_kuvantum_bilgi_kuram%C4%B1n%C4%B1n_tkb_i.pdf. (Ziyaret tarihi: 21 Mayıs 2016).
- Holden, J. Holden, L. (2016). Modeling Braids, Cables, and Weaves with Stranded Cellular Automata, Modeling Braids, Cables, In: Proceedings of Bridges: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture, Tessellations Publishing.
- Flitney, A.P. 2005, Aspects of Quantum Game Theory, Doctorate Thesis, Department of Electrical and Electronic Engineering, Faculty of Engineering, Computer and Mathematical Sciences, The University of Adelaide, Australia.
- Kartal, O. Örgü kavramı ve minimum geçişli 3-örgüler, Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale
- Kauffman, L.H. Lomonaco, S.J. 2002, Quantum entanglement and topological entanglement, New J. Phys. 4,73, <http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1367-2630/4/1/373/fulltext/>
- Koskimaa, R. (2016). World as Numbers: Living in an Algorithmic Culture, Proceedings of Bridges : Mathematics, Music, Art, Architecture, Education, Culture. Bridges Finland (pp. 9-14).
- Latchaw, S. 2011. *How to Look at and Understand Great Art*, The Great Courses.
- Manzier, K. 2005 Symmetry and complexity in dynamical systems, European Review, Vol. 13, Supp. No. 2, 29–48
- Meyer D. A., 2000 ‘Quantum Games and Quantum Algorithms’, arXiv:quant-ph/0004092 v2, (Ziyaret tarihi: 21 Mayıs 2016).
- McMahon, D., 2007. *Quantum Computing Explained*, 1st edition, A John Wiley & Sons, Inc. Publication, New Jersey.
- Nesin, A. 2002. *Matematik ve Sonsuz*, İstanbul Bilgi Üniversitesi Yayınları, İstanbul.
- Penrose, R. 2015. *Gerçeğin Yolları, Evren Yasalarının Eksiksiz Bir Rehberi*, Birinci Basım, Alfa Basım, İstanbul
- Pickover, C. A. 2002. *The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars*, First edition, Princeton University Press, New Jersey.
- Reinbach, H. 2014. *Kuantum Mekaniğinin Felsefi Temelleri*, Birinci Basım, Alfa Basım Yayıncılık, Melisa Matbaacılık, İstanbul.
- Sagawa, H., Yoshida, N. 2010. *Fundamentals of Quantum Information*, World Scientific, USA.

Schumacher,B. ve Westmoreland,M., 2010, First Edition, *Quantum Processes, Systems, and Information*, Cambridge University Press, Cambridge.

Schumacher, B 2015. *The Science of Information From Language to Black Holes*. Teaching Company.

Sharif,P. ve Haydari,H.,2012. An introduction to multi-player, multi-choice quantum games, arXiv:1204.0661 [quant-ph], (Ziyaret tarihi: 21 Mayıs 2016).

Shor, P. W.1994. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring, in *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA,124–134.

Turing, A. M. 1937, On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. A correction, Proc. Lond. Math. Soc. (2) 43, 544-546

https://en.wikipedia.org/wiki/D-Wave_Systems

<https://www.youtube.com/watch?v=ciM6wigZK0w&t=386s>

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Volkan DURAN

Doğum Yeri : Amasya

Doğum Tarihi : 1986

Yabancı Dili : İngilizce, Çince

Eğitim Durumu

Lise: Amasya Anadolu Öğretmen Lisesi (2004)

Lisans: Boğaziçi Üniversitesi, Fizik Öğretmenliği Lisansla Birleştirilmiş Tezsiz Yüksek Lisans Bölümü (2010)

Tianjin University of Technology and Science Çince Hazırlık (2011)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi İngilizce Öğretmenliği Lisansı (Devam Ediyor)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi ve Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Eğitim Programları ve Öğretim (2014)

Johannes Gutenberg Universität Mainz Erasmus Öğrencisi (2014)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fizik Yüksek Lisans (2017)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Rehberlik ve Psikolojik Danışmanlık Yüksek Lisans (Devam Ediyor)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Sosyoloji Yüksek Lisans (Tez Aşaması)

Doktora:

Gazi Üniversitesi Eğitim Programları ve Öğretim (Tez Aşaması)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi (2014)

Ondokuz Mayıs Üniversitesi (Devam Ediyor)

Yayınlar

Başlık	Yazarlar	Yer
The implementation of vertically alligned quantum dots for the entanglement constant of circuit element j in quantum games	Duran Volkan, Erkarıslan Uğur, Gençten Azmi	30 . International Physics Congress (TFD. 30 Poster) 02.09.2013
The analysis of quantum qutrit entanglements in a qutrit based hyper-sphere in terms of gluing and combining operators	Duran Volkan, Gençten Azmi	9'th International Physics Conference of Balkan Physical Union 24.08.2015
The analysis of quantum qutrit entanglements in a qutrit based hyper-sphere in terms of gluing and combining operators	Duran Volkan, Gençten Azmi	9'th International Physics Conference of Balkan Physical Union 24.08.2015
From “natural philosopher” to “physicist” : analyzing the concept of “science” in terms of two titles in the context of history of physics	Duran Volkan	9'th International Physics Conference of Balkan Physical Union 24.08.2015
The analysis of quantum qutrit entanglements in a qutrit based hyper-sphere in terms of gluing and combining products	Duran Volkan, Gençten Azmi	2016 <i>AIP Conference Proceedings</i> 1722, 100001
An investigation for quantum qutrit entanglements through colour wheel compass	Duran Volkan, Gençten Azmi	Journal of Physics: Conference Series 766 (2016) 012013