

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN m . FARKLARI
VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Yavuz ALTIN

Tez Yöneticisi

Doç. Dr. Mikâil ET

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2005

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN *m.* FARKLARI
VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Yavuz ALTIN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez, 14.10.2005 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği /
~~oyçokluğu~~ ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman : Doç. Dr. Mikâil ET

Üye : Prof. Dr. Rifat ÇOLAK

Üye : Prof. Dr. Etibar PENAHOV

Üye : Prof. Dr. Abdulkadir YILDIZ

Üye : Doç. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 26./10./2005 tarih
ve 2005/37-1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ÖZET

Doktora Tezi

FUZZY SAYI DİZİLERİNİN m . FARKLARI VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Yavuz ALTIN

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
2005, Sayfa: 53+VIII

Üç bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümünde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; fuzzy küme kavramı, fuzzy sayı dizileri ve fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı incelendi.

Üçüncü bölümde; fark operatörü ve lacunary dizisi kullanarak fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli lacunary yakınsaklığı ve lacunary istatistiksel yakınsaklığı kavramları tanımlandı, bu kavramlar arasında bir kaç bağıntı verildi. Lacunary Δ^m - istatistiksel yakınsaklık ve lacunary kuvvetli Δ_p^m - yakınsaklığın Δ^m - sınırlı fuzzy sayı dizileri için denk olduğu gösterildi.

Ayrıca $m(\phi, p, \Delta^m, F)$ fuzzy dizi uzaylarının bazı topolojik özellikleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy sayısı, fuzzy sayı dizisi, fark dizisi, istatistiksel yakınsaklık, lacunary dizisi.

ABSTRACT

Ph D. Thesis

DIFFERENCE SEQUENCES OF ORDER m OF FUZZY NUMBERS AND STATISTICAL CONVERGENCE

Yavuz ALTIN

Fırat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2005, Sayfa: 53+VIII

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters are given.

In the second chapter the concept of fuzzy sets, sequences of fuzzy numbers and statistical convergence of fuzzy numbers are given.

In the three chapter, using the difference operator and the lacunary sequence the concepts of lacunary statistical convergence and strongly lacunary convergence of sequences of fuzzy numbers are introduced and several relations related to these concepts are given. It is shown that lacunary Δ^m -statistical convergence and lacunary strongly Δ_p^m -convergence are equivalent for Δ^m - bounded sequences of fuzzy numbers. Furthermore, some topological properties of the fuzzy sequences space $\mathfrak{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ are investigated.

Key Words: Fuzzy number, sequence of fuzzy number, difference sequence, statistical convergence, lacunary sequence.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve imkanlarını esirgemeyen, saygıdeğer hocam Sayın Doç.Dr. Mikail ET'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca bu tezin hazırlanmasında engin bilgi birikiminden yararlandığım sayın hocalarım Prof.Dr. Rifat ÇOLAK'a , Prof.Dr. Metin BAŞARIR'a ve Guwahati Üniversitesi (Hindistan) öğretim üyesi Prof. Dr. Binod Chandra TRIPATHY'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Yavuz ALTIN



SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{N}$:	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$:	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$:	Kompleks sayılar kümesi
$L(\mathbb{R})$:	Tüm fuzzy sayılar kümesi
$L(\mathbb{R}^n)$:	n -boyutlu tüm fuzzy sayılar kümesi
$S(F)$:	İstatistiksel yakınsak fuzzy sayılarının kümesi
$S(\Delta^m, F)$:	Δ^m -İstatistiksel yakınsak fuzzy sayılarının kümesi
$w(F)$:	Kuvvetli Cesáro yakınsak fuzzy dizilerinin kümesi
$w(\Delta^m, F)$:	Kuvvetli Δ^m -Cesáro yakınsak fuzzy dizilerinin kümesi
$N_\theta(F)$:	Kuvvetli lacunary yakınsak fuzzy dizilerinin uzayı
$N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$:	Kuvvetli Δ_p^m -lacunary yakınsak fuzzy dizilerinin uzayı
$\ell_\infty(F)$:	Sınırlı tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$\ell_\infty(\Delta^m, F)$:	Δ^m -sınırlı tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$S_\theta(F)$:	Lacunary istatistiksel yakınsak tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$S_\theta(\Delta^m, F)$:	Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsak tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$c(F)$:	Yakınsak tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$c(\Delta^m, F)$:	Δ^m -yakınsak tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesi
$\wp_s$:	$\mathbb{N}$ 'nin s tane elemandan fazlasını içermeyen tüm altkümelerinin sınıfı
A^α :	A fuzzy kümesinin α -kesiti
$\text{supp}(A)$:	A fuzzy kümesinin desteği

İÇİNDEKİLER

ÖZET	II
ABSTRACT	III
TEŞEKKÜR	IV
SİMGELER LİSTESİ	V
İÇİNDEKİLER	VI
GİRİŞ	VII
1. GENEL KAVRAMLAR	1
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	1
1.2. İstatistiksel Yakınsak Diziler	5
1.3. Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık	7
1.4. $m(\phi)$ Dizi Uzayı	8
1.5. Fark Dizi Uzayları	8
2. FUZZY KÜMELER	11
2.1. Fuzzy Küme Kavramı	11
2.2. Birleşim, Kesişim ve Tümlleyen İşlemlerinin Bazı Özellikleri	13
2.3. Konvekslik	14
2.4. Aralıklar ve Fuzzy Sayıları	16
2.5. Fuzzy Sayı Dizileri	21
2.6. İstatistiksel Yakınsak Fuzzy Sayı Dizileri	23
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY FARK DİZİ UZAYLARI	24
3.1. Kuvvetli $\Delta_{(p)}^m$ –Lacunary Yakınsak Diziler	24
3.2. Genelleştirilmiş Fuzzy İstatistiksel Yakınsaklık	34
3.3. $m(\phi, p, \Delta^m, F)$ Fuzzy Dizi Uzayının Bazı Topolojik Özellikleri	44
KAYNAKLAR	50

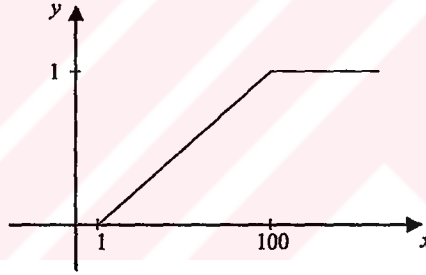
GİRİŞ.

Fuzzy kümeler, boş olmayan bir χ kümesinin ilgili elemanlarına göre göz önüne alınır. Temel düşünce, her bir $x \in \chi$ elemanının $[0, 1]$ aralığında değerler alan bir $u(x)$ üyelik derecesine atanmasıdır. Burada $u(x) = 0$, üyeliğin olmamasına; $0 < u(x) < 1$ kısmi üyeliğe ve $u(x) = 1$ de tam üyeliğe karşılık gelir. χ 'in bir fuzzy alt kümesi en az bir $u : \chi \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu için $\chi \times [0, 1]$ kümesinin boş olmayan bir $\{(x, u(x)) : x \in \chi\}$ alt kümesidir.

Örneğin

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \text{ ise} \\ \frac{1}{99}(x-1), & 1 < x \leq 100 \text{ ise} \\ 1, & 100 < x \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlı $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu reel $x \gg 1$ sayılarının fuzzy kümesine bir örnek olarak verilebilir (Şekil 1). Şüphesiz üyelik derece fonksiyonunun çok farklı seçimleri vardır.



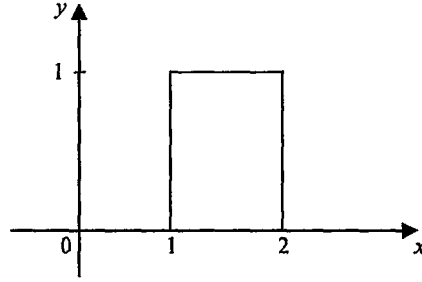
Şekil 1. Reel $x \gg 1$ sayılarının bir fuzzy kümesi

χ 'in klasik anlamda bir A alt kümesi için üyelik ihtimalleri sadece üyesizlik ve tam üyeliğidir. Buna göre böyle bir küme, kendisinin $X_A : \chi \rightarrow [0, 1]$ karakteristik fonksiyonuyla χ kümesi üzerinde verilen bir fuzzy kümesiyle tanımlanabilir, yani

$$X_A(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A \text{ ise} \\ 1, & x \in A \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanabilir.

Şekil 2, $0 \leq x \leq 2$ aralığının karakteristik fonksiyonunu göstermektedir.



Şekil 2. $\chi_{[1,2]}$ fuzzy kümesi

Fuzzy kümeler bizim günlük hayatımızda sık sık kullandığımız belirsizlikle ilgilenmenin daha zeki bir yoludur. Örneğin, araba kullanan birisine frene basma zamanı hakkında bir tavsiyede bulunacaksınız. Tavsiyeniz: “Yaya geçidine 25 metre mesafe kala fren yapmaya başla” yoksa “Yaya geçidine yaklaşırken frene basmaya başla” şeklinde mi olurdu? Elbette ikincisi olurdu. Çünkü ilk talimat kolayca yerine getirilemeyecek kadar kesindir.

Veri yapılarının fuzzy yorumları, çeşitli problemleri çözmenin ve bunları formüle dökmenin doğal ve akla mantığa çok uygun bir yoludur. Kesin kümeler, üyelik için gereken kesin özellikleri sağlayan nesneleri ihtiva eder. 6 'dan 8 'e kadar olan sayılardan oluşan bir H kümesini $H = \{r \in \mathbb{R} : 6 \leq r \leq 8\}$ şeklinde yazarsınız. Bu yazım biçimine denk olarak H ,

$$X_H(r) = \begin{cases} 1, & 6 \leq r \leq 8 \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $X_H : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ üyelik (veya karakteristik) fonksiyonuyla tanımlanır. Her r reel sayısı ya H 'a aittir yada değildir. X_H tüm $r \in \mathbb{R}$ reel sayılarını $(0,1)$ gibi iki noktaya dönüştürdüğü için kesin kümeler iki değerli mantığa karşılık gelir: “aittir veya ait değildir, açık veya kapalı, siyah veya beyaz, 1 veya 0”. Mantıkta, X_H 'ın değerleri “ r , H 'a ait midir?” sorusu için iki değerlidir denilir. Cevabın evet olması için gerek ve yeter şart $X_H(r) = 1$ olmasıdır. Aksi halde cevap hayırdır.

1. GENEL KAVRAMLAR

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1. $X \neq \emptyset$ bir cümle ve K kompleks sayıların cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X,$$

$$\cdot : K \times X \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X cümlesine K cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) adı verilir. Her $x, y, z \in X$ ve her $\lambda, \mu \in K$ için

L1) $x + y = y + x$

L2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ vardır.

L4) Herbir $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L5) $1.x = x$

L6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

L7) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

L8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ [1].

Tanım 1.1.2. (X, d) bir metrik uzay ve $x = (x_n)$, X 'de bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için her $n > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, s) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi X 'de yakınsaktır veya $s \in X$ 'e yakınsaktır denir ve $x_n \rightarrow s$ veya $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$ yazılır [1].

Tanım 1.1.3. X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow \|x\|$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir. $\forall x, y \in X$ için

$$\text{N1)} \|x\| \geq 0$$

$$\text{N2)} \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$$

$$\text{N3)} \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \ (\alpha \text{ skaler})$$

$$\text{N4)} \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

(N3) şartı $p \in \mathbb{R}^+$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|^p \|x\|$ (α skaler) şeklinde olursa X bir p -normlu uzay olur [2].

Tanım 1.1.4. Bir (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu metrik uzaya tam metrik uzay denir [2].

Tanım 1.1.5. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise; yani bu uzayda alınan her Cauchy dizisi bu uzayın bir noktasına yakınsıyorsa bu normlu uzaya Banach uzayı denir [2].

Tanım 1.1.6. X bir dizi uzayı olsun. X bir Banach uzayı ve

$$\tau_k : x \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tau_k(x) = x_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

dönüşümü sürekli ise X ' e bir BK-uzayı denir [3].

Tanım 1.1.7. Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda

$$M = \{y \in Y : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, \ 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa Y alt kümesi konvektir denir.

Tanım 1.1.8. Kompleks terimli tüm $x = (x_k), (k = 1, 2, 3, \dots)$ dizilerinin cümlesini ω ile göstereceğiz. $\omega, x = (x_k), y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere

$$x + y = (x_k) + (y_k)$$

$$\alpha x = (\alpha x_k)$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. ω 'nın her alt lineer uzayına dizi uzayı denir [4].

Tanım 1.1.9. (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$ ve $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$\left[\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right]^{1/p}$$

eşitsizliği vardır [5].

Tanım 1.1.10. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) olmak üzere

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i \beta_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |\beta_i|^q \right)^{1/q}$$

eşitsizliği vardır [5].

Tanım 1.1.11. (Hausdorff Metriği) $x, \mathbb{R}^n$ 'de bir nokta ve $A, \mathbb{R}^n$ 'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun x 'in A 'ya olan uzaklığını $d(x, A)$ ile gösterelim. Buna göre

$$d(x, A) = \inf \{ \|x - a\| : a \in A \}$$

şeklinde tanımlıdır.

Buna göre $d(x, A) = d(x, \bar{A}) \geq 0$ ve $d(x, A) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $x \in \bar{A}$ olmasıdır. ($\bar{A} : \mathbb{R}^n$ 'de A 'nın kapanışı)

$$K_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \varepsilon\}$$

alt kümesini A 'nın bir ε komşuluğu olarak adlandıracakız. Bu kümenin kapanışı ise $\mathbb{R}^n$ 'nin

$$\bar{K}_\varepsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde bir altkümesidir.

Özel olarak, $\mathbb{R}^n$ 'de kapalı birim yuvarı $\bar{K}_1^n$ ile göstereceğiz, yani $\mathbb{R}^n$ 'nin kompakt bir alt kümesi olan $\bar{K}_1^n = \bar{K}_1(\{0\})$ 'dir.

Burada herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $\mathbb{R}^n$ 'nin herhangi bir boş olmayan alt kümesi için $\bar{K}_\varepsilon(A) = A + \varepsilon \bar{K}_1^n$ olduğunu belirtelim. $K_\varepsilon(A)$ ve $\bar{K}_\varepsilon(A)$ yerine zaman zaman $K(A, \varepsilon)$ ve $\bar{K}(A, \varepsilon)$ yazacağız.

Şimdi, A ve $B, \mathbb{R}^n$ in boş olmayan alt kümeleri olsunlar. B nin A dan Hausdorff ayrılmasını

$$d_H^*(B, A) = \sup \{d(b, A) : b \in B\}$$

ile veya buna denk olarak

$$d_H^*(B, A) = \inf \{ \varepsilon > 0 : B \leq A + \varepsilon \bar{K}_1^n \}$$

ile tanımlayalım.

Buna göre $d_H^*(B, A) = 0$ olmak üzere $d_H^*(B, A) \geq 0$ olması için gerek ve yeter şartın $B \subseteq \bar{A}$ olduğu sonucuna ulaşırız. Buna ilaveten

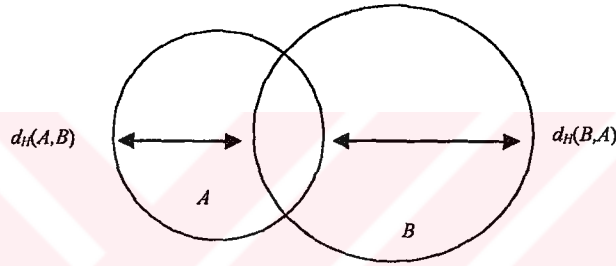
$$d_H^*(B, A) \leq d_H^*(B, C) + d_H^*(C, A)$$

üçgen eşitsizliği boş olmayan tüm A, B ve $C \subset \mathbb{R}^n$ alt kümeleri için sağlanır. Genellikle

$$d_H^*(A, B) \neq d_H^*(B, A)$$

dir.

Bu durum Şekil 3 'de şematik olarak gösterilmiştir.



Şekil 3. A ve B nin Hausdorff ayrılışları

$\mathbb{R}^n$ nin boş olmayan A ve B kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığını

$$d_H(A, B) = \max \{d_H^*(A, B), d_H^*(B, A)\} \quad (1.1.1)$$

ile tanımlayalım. Buna göre A ve B simetriktir.

Dolayısıyla A, B ve $C \subset \mathbb{R}^n$ için

- i) $d_H(A, B) \geq 0$
- ii) $d_H(A, B) = d_H(B, A)$
- iii) $d_H(A, B) \leq d_H(A, C) + d_H(C, B)$

dir. Eğer $\mathbb{R}^n$ 'in boş olmayan alt kümelerine bunu kısıtlarsak, (1.1.1) Hausdorff uzaklığının bir metrik, yani Hausdorff metriği olduğunu görürüz. Buna göre $(\mathbb{C}^n, d_H)$ bir metrik uzaydır [6].

Teorem 1.1.12. (X, d) bir tam metrik uzay ve (F_n) de her n için $F_n \supset F_{n+1}$ olacak şekilde X in boş olmayan kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Ayrıca, $n \rightarrow \infty$ iken $\text{diam } F_n = \sup \{d(x, y) : x, y \in F_n\} \rightarrow 0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ bir singletondur. Yani bir tek noktadan oluşur [7].

1.2. İstatistiksel Yakınsak Diziler

İstatistiksel yakınsaklık kavramı, en az 1913'den beri farklı görünüşler altında literatürde yer almaktadır. O zamandan beri Fourier analiz teorisinde, ergodic teoride ve sayılar teorisinde kullanılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık tanımı ilk olarak 1951 yılında Fast [8] tarafından verildi. 1959 yılında Schoenberg [9] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsak dizilerin bazı özelliklerini verdi. Her iki yazar da sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesáro toplanabilir olduğunu ifade ettiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık, Šalát [10], Fridy [11], Connor [12], Mursaleen [13], Tripathy [14], Savaş [15], Fridy ve Orhan [16] gibi bir çok matematikçi tarafından çalışıldı.

Tanım 1.2.1. Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K 'nın n 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir [17].

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir.

Tanım 1.2.2. Eğer bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir p özelliğini sıfır yoğunluklu bir cümle dışında bütün k 'lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi p özelliğini hemen hemen her k için sağlıyor denir ve kısaca "h.h.k" ile gösterilir. Sıfır yoğunluklu cümle tanımından yararlanarak istatistiksel yakınsak dizi tanımı aşağıdaki gibi verilebilir [11].

Tanım 1.2.3. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa yani h.h.k için

$$|x_k - L| < \varepsilon$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S\text{-}\lim x_k = L$ veya $x_k \xrightarrow{S} L$ şeklinde gösterilir [11].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Eğer $L = 0$ ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel sıfır dizisi denir ve S_0 ile gösterilir.

Bilinen anlamda yakınsak olan diziler istatistiksel yakınsaktır. Fakat istatistiksel yakınsak diziler yakınsak olmak zorunda değildir.

Örnek 1.2.4. $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde

$$|\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

dir.

$\lim x_k = L$ ise $S\text{-}\lim x_k = L$ 'dir.

İstatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir.

Gerçekten $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = m^2, \quad m = 1, 2, \dots \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $S\text{-}\lim x_k = 0$ 'dir. Ancak bu dizi sınırlı değildir.

$x = (x_k) = (-1)^k$, ($k = 1, 2, \dots$) dizisi sınırlı bir dizidir. Ancak istatistiksel yakınsak değildir.

Tanım 1.2.5. $\varepsilon > 0$ olsun h.h.k için

$$|x_k - x_N| < \varepsilon$$

olacak şekilde $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [11].

Teorem 1.2.6. Aşağıdaki önermeler denktir.

- i) x dizisi istatistiksel yakınsaktır,
- ii) x istatistiksel Cauchy dizisidir,

iii) h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi vardır [11].

Teorem 1.2.7. $S\text{-}\lim x_k = a$, $S\text{-}\lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu takdirde

$$\text{i) } S\text{-}\lim (x_k + y_k) = a + b$$

$$\text{ii) } S\text{-}\lim cx_k = ca$$

dir [8].

Buna göre istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi lineer uzaydır.

1.3. Lacunary Dizileri ve Lacunary İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 1.3.1. Pozitif tamsayıların artan bir dizisi $\theta = (k_r)$ olsun. Eğer $k_0 = 0$ olmak üzere $r \rightarrow \infty$ için $h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty$ ise $\theta = (k_r)$ dizisine lacunary dizisi denir [18].

$\theta = (k_r)$ tarafından belirlenen aralıklar $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ile gösterilecektir. Bu çalışmada

$$\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} |x_i| = \sum_{i \in I_r} |x_i|$$

olarak alınacak ve uygunluk için kısaca $\sum_{I_r} |x_i|$ ile gösterilecek ve $q_r = \frac{k_r}{k_{r-1}}$ olacaktır.

Tanım 1.3.2. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L 'ye kuvvetli Cesáro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Cesáro yakınsak dizilerin cümlesi

$$|\sigma_1| = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - L| = 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir. $|\sigma_1|$ uzayı $\|x\| = \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| \right)$ normu ile bir BK - uzayıdır [1].

Tanım 1.3.3. Herhangi bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi için

$$\lim_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \right) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L sayısına kuvvetli lacunary yakınsaktır denir ve kuvvetli lacunary yakınsak dizilerin cümlesi

$$N_\theta = \left\{ x = (x_k) : \tau_r \equiv \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k - L| \rightarrow 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile gösterilir [18].

N_θ uzayı $\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{I_r} |x_k| \right)$ normu ile bir BK-uzayıdır. $\theta = (2^r)$ olması halinde $N_\theta = |\sigma_1|$ 'dir.

Tanım 1.3.4. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir.

Bir dizi L sayısına lacunary istatistiksel yakınsak ise $S_\theta - \lim x = L$ veya $x_k \rightarrow L (S_\theta)$ ile gösterilir [16].

1.4. $m(\phi)$ Dizi Uzayı

$\varphi_s, \mathbb{N}$ 'nin s tane elemandan fazlasını içermeyen tüm altkümelerinin sınıfını gösterebilir. (ϕ_n) , her $n \in \mathbb{N}$ için $n\phi_{n+1} \leq (n+1)\phi_n$ olacak şekilde pozitif sayıların azalmayan bir dizisi olsun. Bütün (ϕ_n) dizilerinin sınıfı Φ ile gösterilir.

$m(\phi)$ dizi uzayı Sargent [19] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı:

$$m(\phi) = \left\{ (x_k) \in w : \sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} |x_k| < \infty \right\}.$$

Sargent bu uzayın bazı özelliklerini, $m(\phi)$ ve ℓ^p uzayı ile olan ilişkisini inceledi. Daha sonra Malkowsky ve Mursaleen [20], Tripathy ve Sen [21], Et, Altın ve Altınok [22] bu dizi uzayını genelleştirdiler.

1.5. Fark Dizi Uzayları

Fark dizileri kavramı ilk olarak Kızmaz [23] tarafından tanımlandı. 1981 yılında Kızmaz $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c\},$$

$$c_0(\Delta) = \{x = (x_k) : \Delta x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladı ve bu uzayların

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK uzayı olduğunu gösterdi. Daha sonra Et ve Çolak [24] $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$ olmak üzere

$$\ell_\infty(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in \ell_\infty\},$$

$$c(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c\},$$

$$c_0(\Delta^m) = \{x = (x_k) : \Delta^m x \in c_0\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer BK- uzayı olduğunu gösterdiler. Daha sonra fark dizi uzayları X herhangi bir dizi uzayı olmak üzere $X(\Delta^m)$ dizi uzayına genelleştirildi ve $X(\Delta^m)$ dizi uzayının birkaç özelliği Et ve Nuray [25] ve Et [26] tarafından incelendi.

$X(\Delta^m)$ 'nin birkaç özelliğini aşağıda veriyoruz.

Teorem 1.5.1. X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [25].

Teorem 1.5.2. $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [25].

Teorem 1.5.3. X bir vektör uzayı ve $A \subset X$ olsun. A konveks ise $A(\Delta^m)$, $X(\Delta^m)$ de konvekstir [26].

Teorem 1.5.4. X , $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^n |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır [25].

Teorem 1.5.5. X ayrılabilir ise $X(\Delta^m)$ de ayrılabilir [25].

Sonuç 1.5.6. $c_0(\Delta^m)$, $c(\Delta^m)$ ve $\ell_p(\Delta^m)$, $(1 \leq p < \infty)$ ayrılabilir [25].

Tanım 1.5.7. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0,$$

yani h.h.k. için $|\Delta^m x_k - L| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi L sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsaktır. Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir. $L = 0$ olması halinde $S_0(\Delta^m)$, yani sıfıra Δ^m -yakınsak dizilerin uzayı elde edilir [25].

Sonuç 1.5.8. $S(\Delta^m)$ lineer uzaydır [25].

Tanım 1.5.9. $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $p > 0$ reel bir sayı olsun. Eğer

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa x dizisi L ye kuvvetli Δ_p^m -Cesáro yakınsaktır denir.

Kuvvetli Δ_p^m -Cesáro yakınsak dizilerin cümlesini

$$w_p(\Delta^m) = \left\{ x = (x_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k - L|^p = 0, n \rightarrow \infty, p > 0, \text{ en az bir } L \text{ için} \right\}$$

ile göstereceğiz. $x \in w_p(\Delta^m)$ olması durumunda $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ yazacağız [25].

Teorem 1.5.10. $p \in \mathbb{R}, 0 < p < \infty$ olsun.

- i) $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ dir.
- ii) $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $x_k \rightarrow L(S(\Delta^m))$ ise $x_k \rightarrow L(w_p(\Delta^m))$ dir [25].

Sonuç 1.5.11. i) $S \cap \ell_\infty \subset S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$

- ii) $S(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m) = w_p(\Delta^m) \cap \ell_\infty(\Delta^m)$ [25].

Tanım 1.5.12. $x = (x_k) \in w$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - \Delta^m x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisine Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi denir [25].

Teorem 1.5.13. Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisidir [25].

Teorem 1.5.14. $y = (y_k)$, Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizisi olsun. Eğer $x = (x_k)$, h.h.k. için $\Delta^m x_k = \Delta^m y_k$ olacak şekilde bir dizi ise x , Δ^m -istatistiksel yakınsak bir dizidir [25].

2. FUZZY KÜMELER

2.1. Fuzzy Küme Kavramı

Bazı nesnelerin bazı kümelere ait olması kavramından ortaya çıkan belirsizlikler nesnelerin kümelere ait olması kavramının derecelendirilmesi gereğini ortaya koymuştur. Örneğin, bakteri gibi bazı varlıkların özellikleri nedeniyle canlı mı yoksa cansız varlıklar kümesine mi ait olduğu konusundaki belirsizlik gibi. Bu gibi belirsizliklerin derecelendirilmesi, 1965 de L. A. Zadeh 'i Fuzzy kümesi kavramının tanımına götürmüştür.

χ , genel bir elemanı x ile gösterilmiş bir noktalar (nesneler) uzayı olsun. χ 'de bir A fuzzy kümesi (sınıfı), χ 'deki her bir noktayı $[0, 1]$ aralığındaki bir reel sayıya karşılık getiren bir $X_A(x)$ üyelik (karakteristik) fonksiyonu ile karakterize edilir [27]. Burada $X_A(x)$ 'in değeri, A 'daki x noktasının üyelik derecesini göstermektedir. Buna göre, $X_A(x)$ 'in 1 'e en yakın değeri, A 'da x 'in en yüksek üyelik derecesidir. A terimleri klasik anlamda küme olduğu zaman, üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 şeklinde iki değer alır. Burada $X_A(x) = 1$ veya 0 olması x 'in A 'ya ait olması veya olmaması demektir. Buna göre $X_A(x)$, A kümesinin bilinen karakteristik fonksiyonuna indirgenir.

Örnek 2.1.1. $\chi, \mathbb{R}$ reel doğrusu olsun ve A da 1 'den daha büyük sayıların bir fuzzy kümesi olsun. Bu durumda, her ne kadar göreceli olsa da A 'nın doğru bir karakterizasyonu $\mathbb{R}$ 'de bir $X_A(x)$ fonksiyonu ile verilebilir. Böyle bir fonksiyonun gösterdiği değerler $X_A(0) = 0$; $X_A(1) = 0$; $X_A(5) = 0.01$; $X_A(10) = 0.2$; $X_A(100) = 0.95$; $X_A(500) = 1$ olabilir.

Şimdi fuzzy kümeleri ile ilgili bazı kavramları tanımlayalım. Bu tanımlar genelde klasik kümede bildiğimiz tanımların genelleştirilmesidir.

Bir fuzzy kümesinin boş olması için gerek ve yeter şart üyelik fonksiyonun χ üzerinde özdeş olarak sıfır olmasıdır.

A ve B fuzzy kümelerinin eşit olması için gerek ve yeter şart her $x \in \chi$ için $X_A(x) = X_B(x)$ olmasıdır. Bundan sonra, her $x \in \chi$ için $X_A(x) = X_B(x)$ yazmak yerine kısaca $X_A = X_B$ yazacağız.

Bir A fuzzy kümesinin tümleyeni A' ile gösterilir ve

$$X_{A'} = 1 - X_A$$

şeklinde tanımlanır.

Klasik kümelere olduğu gibi, kapsama kavramı fuzzy kümelere merkezi bir rol oynar.

Aşağıda fuzzy kümelerinin kapsama, birleşim ve kesişimleri ile ilgili tanımları vereceğiz.

Kapsama. A 'nın B 'de kapsanması (veya denk olarak, A kümesinin B 'nin bir alt kümesi olması) için gerek ve yeter şart $X_A \leq X_B$ olmasıdır. Bu durum sembollerle de

$$A \subset B \Leftrightarrow X_A \leq X_B$$

şeklinde gösterilir [27].

Birleşim. Sırasıyla, $X_A(x)$ ve $X_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan iki A ve B fuzzy kümesinin birleşimi, üyelik fonksiyonu

$$X_C(x) = \max[X_A(x), X_B(x)], \quad x \in \chi \quad (2.1.1)$$

olan bir C fuzzy kümesidir. Bu işlem kısaca

$$X_C = X_A \vee X_B$$

şeklinde ifade edilir ve $C = A \cup B$ şeklinde yazılır [27].

A ve B 'nin birleşimi, A ve B 'nin her ikisini de kapsayan en küçük fuzzy kümedir. Daha kesin bir ifadeyle, eğer D , A ve B 'nin her ikisini de kapsayan herhangi bir fuzzy küme ise bu takdirde A ve B 'nin birleşimini de kapsar. Bu tanım (2.1.1) 'de verilen tanıma denktir.

Fuzzy kümelerin kesişimi kavramı da benzer yöntemle tanımlanır.

Kesişim. Sırasıyla, $X_A(x)$ ve $X_B(x)$ üyelik fonksiyonlarına sahip olan iki A ve B fuzzy kümesinin kesişimi, üyelik fonksiyonu

$$X_C(x) = \min[X_A(x), X_B(x)], \quad x \in \chi$$

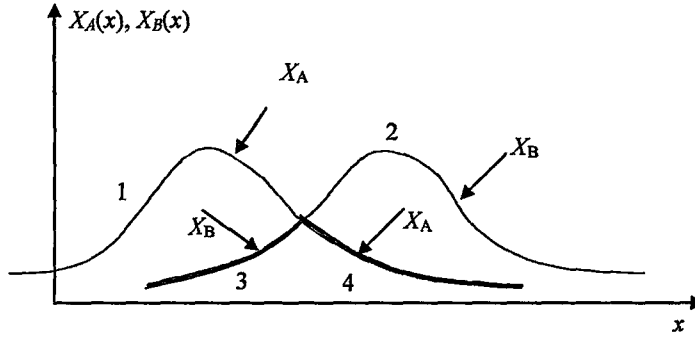
olan bir C fuzzy kümesidir. Bu işlem kısaca

$$X_C = X_A \wedge X_B$$

şeklinde ifade edilir ve $C = A \cap B$ şeklinde yazılır [27].

A ve B fuzzy kümelerinin kesişimleri hem A 'da hem de B 'de kapsanan en büyük fuzzy kümedir. Klasik kümelerde olduğu gibi eğer $A \cap B$ boş ise A ve B fuzzy kümeleri ayrıktır.

$\mathbb{R}$ 'deki iki fuzzy kümenin kesişimi ve birleşimi Şekil-4'de gösterilmiştir. Birleşim kümesinin üyelik fonksiyonu 1 ve 2 eğri parçalarından; kesişim kümesinin üyelik fonksiyonu da 3 ve 4 parçalarından (koyu çizgiler) oluşur.



Şekil 4. R 'de fuzzy kümelerin birleşim ve kesişimlerinin gösterimi

2.2. Birleşim, Kesişim ve Tümlleyen İşlemlerinin Bazı Özellikleri

Klasik kümelerde verilen bağıntıların birçoğu fuzzy kümeler için de sağlanır. Bunlardan birkaç tanesini sıralayalım.

- i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- iii) $C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$
- iv) $C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$

Üyelik fonksiyonu göz önüne alınırsa bu bağıntıların sağlandığı kolayca gösterilebilir.

$A = \chi$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in \chi$ için $X_A(x) = 1$ olmasıdır. Klasik kümelerde sağlanan $A \cap A' = \emptyset$ ve $A \cup A' = \chi$ özellikleri fuzzy kümelerde sağlanmaz.

Birleşim ve kesişim işlemlerine ilave olarak, fuzzy kümelerinin toplama ve çarpım işlemlerini tanımlayabiliriz:

Cebirsel Çarpım. A ve B 'nin cebirsel çarpımı AB şeklinde gösterilir ve üyelik fonksiyonuna bağlı olarak

$$X_{AB} = X_A X_B$$

şeklinde tanımlanır. Açıkça,

$$AB \subset A \cap B$$

dir [27].

Cebirsel Toplam. A ve B 'nin cebirsel toplamı $A + B$ şeklinde gösterilir ve

$$X_{A+B} = X_A + X_B$$

şeklinde tanımlanır. Burada $X_A + X_B$ toplamı 1 'e eşit veya daha küçüktür. Buna göre, cebirsel çarpıma benzememekle beraber cebirsel toplam sadece tüm x 'ler için $X_A(x) + X_B(x) \leq 1$ şartı sağlandığı zaman anlamlıdır [27].

Mutlak Fark. A ve B 'nin mutlak farkı $|A - B|$ şeklinde gösterilir ve

$$X_{|A-B|} = |X_A - X_B|$$

şeklinde tanımlanır [27].

Destek. A bir fuzzy kümesi olsun. A 'nın desteği, $\text{supp}(A)$, üyelik derecesi sıfır olmayan tüm noktaların kümesidir ve aşağıdaki şekilde gösterilir [27].

$$\text{supp}(A) = \{x \in \chi : X_A(x) > 0\}$$

α -Kesiti. A bir fuzzy kümesi olsun ve $\alpha \in (0, 1]$ verilsin. A 'nın α - kesiti A^α ile gösterilir ve

$$A^\alpha = \{x \in \chi : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlanır [27].

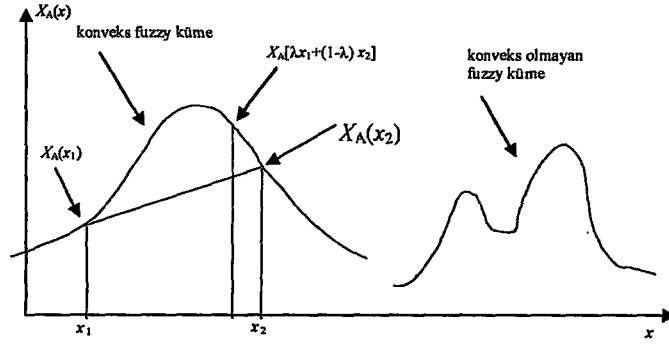
2.3. Konvekslik

Konvekslik düşüncesi, klasik kümelerdeki pek çok özelliğini koruyacak şekilde fuzzy kümelere kolaylıkla genişletilebilir.

Konveks Fuzzy Küme. χ , n boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ olsun. Bir A fuzzy kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart $(0, 1]$ aralığındaki tüm α 'lar için

$$\Gamma_\alpha = \{x : X_A(x) \geq \alpha\}$$

şeklinde tanımlı Γ_α kümelerinin konveks olmasıdır [27].



Şekil 5. R^1 'de Konveks ve konveks olmayan fuzzy kümeler

Konveksliğin alternatif bir tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir:

A 'nın konveks olması için gerek yeter şart her $\lambda \in [0, 1]$ ve her $x_1, x_2 \in \chi$ için

$$X_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [X_A(x_1), X_A(x_2)] \quad (2.3.1)$$

olmasıdır. Bu tanımdan $X_A(x)$ 'in x 'e bağlı bir konveks fonksiyon olduğu anlaşılmalıdır. Bu durum $n = 1$ için Şekil-5 'de gösterilmiştir.

Yukarıdaki iki tanım denktir. Gerçekten; A kümesi ilk tanımdaki anlamda konveks ve $\alpha = X_A(x_1) \leq X_A(x_2)$ olsun. Bu taktirde $x_2 \in \Gamma_\alpha$ 'dır. Γ_α konveks olduğundan $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in \Gamma_\alpha$ 'dır. Böylece

$$X_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \alpha = X_A(x_1) = \min [X_A(x_1), X_A(x_2)]$$

dır.

Tersine, A ikinci tanımdaki anlamda konveks ve $\alpha = X_A(x_1)$ olsun. Γ_α kümesini $X_A(x_2) \geq X_A(x_1)$ eşitsizliğini sağlayan tüm x_2 noktalarının kümesi olarak düşünebiliriz. (2.3.1) eşitsizliğinden dolayı, $\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$, $(0 \leq \lambda \leq 1)$ biçimindeki her nokta Γ_α 'nin elemanıdır. Bu nedenle Γ_α konveks bir kümedir. Konveks fuzzy kümelerin temel bir özelliği aşağıdaki teoremden verilmiştir:

Teorem 2.3.1. Eğer, A ve B konveks ise $A \cap B$ de konvektir [27].

İspat. $C = A \cap B$ olsun. Bu takdirde,

$$X_C[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] = \min [X_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2], X_B[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2]]$$

olur. A ve B konveks fuzzy kümeler olduğundan

$$X_A[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [X_A(x_1), X_A(x_2)]$$

$$X_B[\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [X_B(x_1), X_B(x_2)]$$

dır. Buradan

$$X_C [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [\min [X_A (x_1), X_A (x_2)], \min [X_B (x_1), X_B (x_2)]]$$

veya buna denk olarak

$$\begin{aligned} X_C [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \\ \geq \min [\min [X_A (x_1), X_B (x_1)], \min [X_A (x_2), X_B (x_2)]] \end{aligned}$$

yazılabilir. Buna göre

$$X_C [\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2] \geq \min [X_C (x_1), X_C (x_2)]$$

olur.

2.4. Aralıklar ve Fuzzy Sayıları

Bir aralık sözüyle, reel sayılarda kapalı sınırlı bir

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

cümlesini kastederiz.

Eğer A , bir aralıksa bu aralığın uç noktalarını $\underline{A}$ ve $\overline{A}$ ile göstereceğiz. Buna göre $A = [\underline{A}, \overline{A}]$ şeklinde bir gösterim kullanabiliriz. Dejenere olmuş bir $[a, a]$ aralığı ile a reel sayısı arasında bir ayrım yapmayacağız.

Reel doğru üzerinde verilen “ $\leq$ ” sıralama bağıntısını aşağıdaki gibi aralıklara genişletebiliriz:

$$A \leq B \Leftrightarrow \underline{A} \leq \underline{B} \text{ ve } \overline{A} \leq \overline{B}.$$

Ayrıca “ $<$ ” sıralama bağıntısını da aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$A < B \Leftrightarrow \underline{A} < \underline{B} \text{ ve } \overline{A} < \overline{B}.$$

A ve B aralıklarını birer sayı olarak düşünebiliriz. Bu aralıklarda toplamayı şu şekilde tanımlayabiliriz.

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B} \text{ ve } \overline{C} = \overline{A} + \overline{B}$$

olmak üzere $A + B = C$ 'dir.

$$\underline{A} + \underline{B} \leq a + b \leq \overline{A} + \overline{B}$$

eşitsizliğini elde etmek için

$$\underline{A} \leq a \leq \overline{A} \text{ ve } \underline{B} \leq b \leq \overline{B}$$

eşitsizliklerini kullanabiliriz. Buna göre

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

cümlesini hesaplayabiliriz. Bu sebepten dolayı iki aralığın toplamı bir aralıktır.

Yukarıdaki düşünceyle $-A$ aralığını

$$-A = -[\underline{A}, \overline{A}] = [-\overline{A}, -\underline{A}]$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Buna göre

$$B - A = B + (-A) = \{b - a : a \in A, b \in B\}$$

dir.

Sonuç olarak toplama ve çıkarma kuralları

$$[\underline{A}, \overline{A}] + [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} + \underline{B}, \overline{A} + \overline{B}]$$

$$[\underline{A}, \overline{A}] - [\underline{B}, \overline{B}] = [\underline{A} - \overline{B}, \overline{A} - \underline{B}]$$

olarak yazılabilir.

Bir aralığın tersini

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{a} : a \in A \right\}$$

şeklinde tanımlayabiliriz.

Eğer A , sıfır sayısını ihtiva etmeyen bir aralık ise, bu taktirde

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{\overline{A}}, \frac{1}{\underline{A}} \right\}$$

dir.

İki aralığın çarpımı ise

$$A.B = \{a.b : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

$A.B$ 'nin bir aralık olduğunu görmek zor değildir. Bu çarpımın uç noktaları

$$\underline{A.B} = \min (\underline{A.B}, \overline{A.B}, \underline{A.B}, \overline{A.B})$$

$$\overline{A.B} = \max (\underline{A.B}, \overline{A.B}, \underline{A.B}, \overline{A.B})$$

formüllerinden hesaplanabilir.

$D, \mathbb{R}$ reel doğru üzerindeki tüm kapalı ve sınırlı $[\underline{A}, \overline{A}]$ aralıklarının kümesini gösterebilir. $A, B \in D$ için

$$d(A, B) = \max (|\underline{A} - \underline{B}|, |\overline{A} - \overline{B}|)$$

şeklinde tanımlayalım [28]. d 'nin D üzerinde bir metrik tanımladığını ve (D, d) 'nin de bir tam metrik uzay olduğunu göstermek kolaydır [28]. Ayrıca " $\leq$ " D üzerinde kısmi sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.4.1. Bir fuzzy sayısı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur.

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcut,
- ii) X fuzzy konvektir, yani herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min \{X(x), X(y)\},$$

- iii) X üst-yarı-süreklidir,

- iv) X^0 ile gösterilen $\{x \in \mathbb{R} : X(x) > 0\}$ nin kapanışı kompakttır.

$L(\mathbb{R})$ tüm fuzzy sayılar kümesini gösterebilir. Şimdi $\tilde{d}$ metriğini

$$\bar{d} : L(\mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{d}(X, Y) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} d(X^\alpha, Y^\alpha)$$

şeklinde tanımlayalım. $(L(\mathbb{R}), \bar{d})$ bir tam metrik uzaydır [29].

Şimdi n -boyutlu fuzzy sayısını ve n -boyutlu fuzzy sayılarının kümesi üzerindeki metriği tanımlayalım.

$\mathbb{R}^n$, n - boyutlu Öklid uzayını gösterebilir. $C(\mathbb{R}^n)$ uzayını $\mathbb{R}^n$ 'nin kompakt ve konveks alt uzaylarının oluşturduğu küme yani;

$$C(\mathbb{R}^n) = \{A \subset \mathbb{R}^n : A \text{ kompakt ve konveks}\}$$

olarak tanımlayalım. $C(\mathbb{R}^n)$ uzayı $A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

ve

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$$

işlemlerine göre kapalıdır.

$A, B \in C(\mathbb{R}^n)$ için Hausdorff metriği

$$\delta_\infty(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\}$$

olarak tanımlayalım. $(C(\mathbb{R}^n), \delta_\infty)$ bir tam metrik uzaydır. Aşağıda n -boyutlu fuzzy sayısını tanımlıyoruz.

Tanım 2.4.2. n -boyutlu bir fuzzy sayısı aşağıdaki şartları sağlayan bir $X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonudur.

- i) X normaldir, yani $X(x_0) = 1$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mevcut,
- ii) X fuzzy konvektir, yani herhangi bir $x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$X(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{X(x), X(y)\},$$

- iii) X üst-yarı-sürekli, yani,

iv) X^0 ile gösterilen $\{x \in \mathbb{R}^n : X(x) > 0\}$ nin kapanışı kompakttır [30].

Yukarıdaki özelliklerden $0 < \alpha \leq 1$ için $X^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : X(x) \geq \alpha\}$ seviye kümesinin $\mathbb{R}^n$ nin boş olmayan kompakt konveks bir alt kümesi olduğunu söyleyebiliriz. n -boyutlu tüm fuzzy sayıların kümesi $L(\mathbb{R}^n)$ olsun. Toplama ve skaler ile çarpma işlemleri α -seviye kümeleri cinsinden, her bir $0 \leq \alpha \leq 1$ için

$$[X + Y]^\alpha = X^\alpha + Y^\alpha \quad (X, Y \in L(\mathbb{R}^n))$$

$$\text{ve } [\lambda X]^\alpha = \lambda X^\alpha, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

olarak ifade edilir.

Şimdi $1 \leq p < \infty$ ve $X, Y \in L(\mathbb{R}^n)$ için

$$d_p(X, Y) = \left(\int_0^1 \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)^p d\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve

$$d_\infty = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \delta_\infty(X^\alpha, Y^\alpha)$$

metriklerini tanımlayalım. $p \leq q$ için $d_p \leq d_q$ olmak üzere

$$d_\infty(X, Y) = \lim_{p \rightarrow \infty} d_p(X, Y)$$

olduğu açıktır. $(C(\mathbb{R}^n), d_p)$ tam, ayrılabilir ve lokal kompakt metrik uzaydır [30].

Bundan sonraki kısımlarda d_p ($1 \leq p \leq \infty$) yerine d notasyonunu kullanacağız. Açıkça $n = 1$ için 1-boyutlu fuzzy sayıların kümesi $L(\mathbb{R})$ ve üzerinde tanımlı metrik elde edilir.

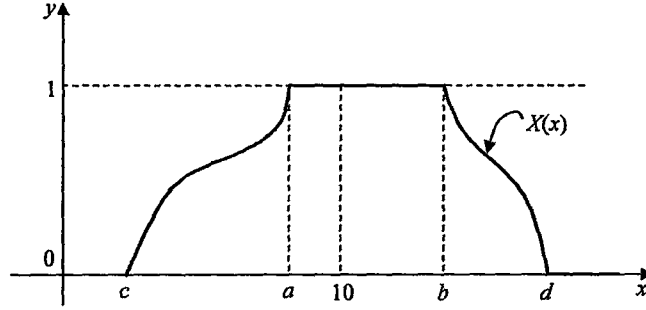
Bir fuzzy sayısının tanımı Goetschel ve Voxman'a [31] göre aşağıdaki şekildedir.

Tanım 2.4.3. Bir X fuzzy sayısı $X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ biçimindeki üyelik fonksiyonu olup aşağıdaki şartları sağlar. $x \in \mathbb{R}$ için

- i) X üst-yarı-süreklidir,
- ii) Bir $[c, d]$ kapalı aralığı dışında $X(x) = 0$,
- iii) $c \leq a \leq b \leq d$ koşuluyla X fonksiyonu $[c, a]$ kapalı aralığı üzerinde artan, $[b, d]$ kapalı aralığı üzerinde azalan ve $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde $X(x) = 1$ dir [31].

Tanım 2.4.1 ve Tanım 2.4.3 birbirine denktir.

Şekil 6 'da 10 fuzzy sayısının bir kaba gösterimi verilmiştir. Doğal olarak 10 fuzzy sayısı için bir tek X fonksiyonu değil, kişiden kişiye değişen, birbirinden farklı X fonksiyonları vardır. Böylece her kişi için hem a, b, c, d değerleri, hem de grafiği $[c, a]$ ve $[b, d]$ aralıkları üzerindeki farklı olmaktadır.



Şekil 6. 10 Fuzzy sayısının gösterimi

2.5. Fuzzy Sayı Dizileri

Tanım 2.5.1. Bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi,

$$X : \mathbb{N} \rightarrow L(\mathbb{R})$$

şeklinde tanımlanan bir X fonksiyonudur. X_k fuzzy sayısı fonksiyonun $k \in \mathbb{N}$ deki değerini gösterir ve dizinin k -yinci terimi olarak adlandırılır [32]. Bu tanıma göre her bir k doğal sayısına bir fuzzy sayısı karşılık getirilmiş olur.

Tanım 2.5.2. $\varepsilon > 0$ verilsin $k > N$ olduğunda $\bar{d}(X_k, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde bir N sayısı mevcut ise (X_k) dizisinin limiti X_0 'dır ve $\lim_k X_k = X_0$ şeklinde gösterilir [32].

$\lim X_k$ mevcut ise (X_k) dizisi yakınsaktır, aksi halde ıraksaktır denir. $c(F)$ ile tüm yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini göstereceğiz.

Aşağıda bir fuzzy dizisi örneği verilmiştir.

Örnek 2.5.3. $X = (X_k)$ dizisi

$$X_k(t) = \begin{cases} \frac{k}{2k-1}t, & t \in [0, \frac{2k-1}{k}), \\ 1, & t \in [\frac{2k-1}{k}, \frac{2k+1}{k}], \\ -\frac{k}{2k-1}(t-4), & t \in (\frac{2k+1}{k}, 4], \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu dizinin limiti

$$X_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t, & t \in [0, 2] \text{ ise} \\ \frac{-1}{2}(t-4), & t \in [2, 4] \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.5.4. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bir X_0 fuzzy sayısının ε -komşuluğu $L(\mathbb{R})$ 'de $d(X, X_0) < \varepsilon$ olacak şekilde tüm X fuzzy sayılarının kümesidir. Bir X_0 fuzzy sayısının ε -komşuluğunu $K(X_0, \varepsilon)$ ile göstereceğiz [32].

Teorem 2.5.5. Bir X_0 fuzzy sayısının bir (X_k) fuzzy sayı dizisinin limiti olması için gerek ve yeter şart X_0 'ın her bir komşuluğunun dizinin sonsuz çoklukta terimlerini kapsamasıdır [32].

Teorem 2.5.6. Eğer bir (X_k) fuzzy sayı dizisi yakınsak ise limiti tektir [32].

Teorem 2.5.7. Eğer her $k > k_0$ sayıları için $X_k \leq Y_k \leq Z_k$ olacak şekilde k_0 sayısı mevcut ve $\lim_k X_k = B = \lim_k Z_k$ ise bu taktirde (Y_k) yakınsaktır ve $\lim_k Y_k = B$ 'dir [32].

Tanım 2.5.8. $\varepsilon > 0$ ve her $k, m > k_0$ için $\bar{d}(X_k, X_m) < \varepsilon$ olacak şekilde pozitif bir k_0 tamsayısı mevcutsa $X = (X_k)$ fuzzy dizisine bir Cauchy dizisi denir [32].

Yakınsak her fuzzy sayı dizisi aynı zamanda fuzzy Cauchy dizisidir.

Tanım 2.5.9. Eğer $\{X_k : k \in \mathbb{N}\}$ fuzzy sayılar cümlesi sınırlı, yani herhangi bir k sayısı için $L \leq X_k \leq U$ olacak şekilde herhangi L ve U fuzzy sayıları mevcut ise bir $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine sınırlıdır denir [32]. $\ell_\infty(F)$ ile tüm sınırlı fuzzy sayı dizilerini göstereceğiz.

Teorem 2.5.10. Yakınsak herhangi bir fuzzy sayı dizisi sınırlıdır [32].

Tanım 2.5.11. (X_k) bir fuzzy sayı dizisi ve $\{k_n\}$ de doğal sayıların artan bir dizisi ise bu takdirde (X_{k_n}) dizisine (X_k) nin bir alt dizisi denir [32].

Teorem 2.5.12. Eğer (X_k) yakınsak ise, (X_k) nin herhangi bir alt dizisi de aynı noktaya yakınsar [32].

Aşağıdaki teorem fuzzy sayı dizilerinin cebirsel özelliklerini verir.

Teorem 2.5.13. $\lim_k X_k = X_0$ ve $\lim_k Y_k = Y_0$ olsun. Bu takdirde

- i) $\lim_k (X_k + Y_k) = X_0 + Y_0$,
- ii) $\lim_k (X_k - Y_k) = X_0 - Y_0$,
- iii) $\lim_k (X_k \cdot Y_k) = X_0 \cdot Y_0$,
- iv) $\lim_k \left(\frac{X_k}{Y_k} \right) = \frac{X_0}{Y_0}$, (Eğer tüm k 'lar için $0 \notin \text{supp} Y_k$ ve $0 \notin \text{supp} Y_0$ ise) [32].

2.6. İstatistiksel Yakınsak Fuzzy Sayı Dizileri

Nanda [33] sınırlı ve yakınsak fuzzy sayı dizilerin tam metrik uzay olduklarını gösterdi. Fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ve fuzzy istatistiksel Cauchy dizisi tanımı ilk olarak Nuray ve Savaş [34] tarafından verildi. Daha sonra Kwon [35] fuzzy sayı dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı ile fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli Cesáro yakınsaklığı arasındaki ilişkileri inceledi.

Tanım 2.7.1. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise, yani h.h.k için $d(X_k, X_0) < \varepsilon$ ise $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisine X_0 fuzzy sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $X_k \rightarrow X_0 (S(F))$ olarak gösterilir. İstatistiksel yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $S(F)$ ile göstereceğiz. $X_0 = 0$ olması halinde $S_0(F)$ yazacağız [34].

Tanım 2.7.2. $X = (X_k)$ fuzzy sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(X_k, X_0) = 0$$

olacak şekilde bir X_0 sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 fuzzy sayısına kuvvetli Cesáro yakınsaktır denir. Kuvvetli Cesáro yakınsak fuzzy dizilerinin cümlesi

$$w(F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(X_k, X_0) = 0, \quad \text{en az bir } X_0 \text{ fuzzy sayısı için} \right\}$$

ile gösterilecektir. $X \in w(F)$ olması durumunda $X_k \rightarrow X_0 (w(F))$ yazacağız [35].

Fuzzy sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığı ilk olarak Nuray [36] tarafından verildi. Daha sonra Kwon ve Sung [37] tarafından çalışıldı. Fuzzy fark dizi uzayları Bilgin [38, 39], Başarır ve Mursaleen [40, 41] tarafından çalışıldı.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY FARK DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde genelleştirilmiş fuzzy fark dizi uzaylarının bazı özelliklerini ve bu dizilerin istatistiksel yakınsaklık ile ilişkilerini inceleyeceğiz. m ile pozitif bir tamsayıyı göstereceğiz.

Burada Δ^m operatörünü ve $\theta = (k_r)$ lacunary dizisini kullanarak fuzzy sayı dizilerini genelleştireceğiz. İlk olarak Δ^m operatörünü kullanarak fuzzy sayı dizilerinin kuvvetli lacunary yakınsaklığını tanımlayacak ve $N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ dizi uzayının tam metrik uzay olduğunu göstereceğiz. Daha sonra Δ^m operatörünü kullanarak fuzzy sayı dizilerinin lacunary istatistiksel yakınsaklığını tanımlayacağız. $N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ dizi uzayı ile $S_\theta(\Delta^m, F)$ uzayı arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Ayrıca $S_\theta(\Delta^m, F)$ ve $S(\Delta^m, F)$ arasındaki ilişkileri ve $N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ ile $w(\Delta_{(p)}^m, F)$ dizi uzayları arasındaki ilişkileri de inceleyeceğiz. Bu bölümde son olarak $m(\phi, p, \Delta^m, F)$ fuzzy dizi uzayını tanımlayacak ve bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

3.1. Kuvvetli $\Delta_{(p)}^m$ -Lacunary Yakınsak Diziler

Tanım 3.1.1. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, $X = (X_k)$ fuzzy sayılarının bir dizisi, $p = (p_k)$ kesin pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} [d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k} = 0$$

olacak şekilde bir X_0 sayısı varsa (X_k) dizisi X_0 sayısına kuvvetli $\Delta_{(p)}^m$ -lacunary yakınsaktır denir. Kolaylık olması için $[d(\Delta^m X_k, X_0)]^{p_k}$ yerine $d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k}$ yazacağız. Kuvvetli $\Delta_{(p)}^m$ -lacunary yakınsak fuzzy sayı dizilerinin kümesini $N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ ile göstereceğiz. m sayısı, θ ve p dizilerinin özel seçilmeleri halinde aşağıdaki fuzzy sayı dizi kümelerini elde ederiz.

1) $\theta = (2^r)$ seçersek

$$w(\Delta_{(p)}^m, F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} = 0 \right\}$$

2) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ seçersek

$$N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^p = 0 \right\}$$

3) $\theta = (2^r)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ seçersek

$$w(\Delta_p^m, F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\Delta^m X_k, X_0)^p = 0 \right\}$$

4) $\theta = (2^r)$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ seçersek

$$w(\Delta^m, F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\Delta^m X_k, X_0) = 0 \right\}$$

5) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ seçersek

$$N_\theta(\Delta^m, F) = \left\{ X = (X_k) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0) = 0 \right\}$$

$W(F)$ ile tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesini gösterelim. Δ^m operatörünün spektral özellikleri Malofesse [42] ile Altay ve Başar [43] tarafından çalışıldı. $X = (X_k)$ bir fuzzy sayı dizisi olsun. Δ^m operatörünü $m \geq 1$ olmak üzere

$$\Delta^m : W(F) \rightarrow W(F)$$

$$(\Delta^1 X)_k = \Delta^1 X_k = X_k - X_{k+1}$$

$$(\Delta^m X)_k = \Delta^m X_k = \Delta^{m-1}(X_k - X_{k+1})$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 3.1.2. $N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ fuzzy dizi uzayı skaler ile çarpma ve toplama işlemine göre kapalıdır.

İspat. İspatı $1 \leq p < \infty$ için yapacağız. $0 < p < 1$ için benzer yolla ispat yapılabilir. $X \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $c = 0$ iken ispat aşıkardır. $c \neq 0$ olsun. $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere $\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k, X_0, Y_0$ 'ın α -seviye kümeleri sırasıyla $\Delta^m X_k^\alpha, \Delta^m Y_k^\alpha, X_0^\alpha, Y_0^\alpha$ olsun. Bu takdirde

$$\delta_\infty(cX_k^\alpha, cX_0^\alpha) = |c| \delta_\infty(X_k^\alpha, X_0^\alpha)$$

olduğundan

$$d(cX_k, cY_k) = |c| d(X_k, Y_k) \quad (3.1.1)$$

dır. Δ^m operatörü lineer olduğundan

$$\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m(cX_k, cX_0))^p = |c|^p \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^p < \infty$$

elde edilir. Buradan $cX \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ 'dir.

Şimdi $X, Y \in N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$ olsun.

$$\begin{aligned} \delta_\infty (\Delta^m X_k^\alpha + \Delta^m Y_k^\alpha, X_0^\alpha + Y_0^\alpha) &\leq \delta_\infty (\Delta^m X_k^\alpha + \Delta^m Y_k^\alpha, \Delta^m Y_k^\alpha + X_0^\alpha) \\ &\quad + \delta_\infty (\Delta^m Y_k^\alpha + X_0^\alpha, X_0^\alpha + Y_0^\alpha) \\ &= \delta_\infty (\Delta^m X_k^\alpha, X_0^\alpha) + \delta_\infty (\Delta^m Y_k^\alpha, Y_0^\alpha) \end{aligned}$$

olduğundan Minkowski eşitsizliği kullanılırsa

$$d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0) \leq d(\Delta^m X_k, X_0) + d(\Delta^m Y_k, Y_0) \quad (3.1.2)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0)^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^p + d(\Delta^m Y_k, Y_0)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k \in I_r} d(\Delta^m Y_k, Y_0)^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizliğinin her iki yanı $\frac{1}{h_r}$ ile çarpılır ve $r \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa $X + Y \in N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$ elde edilir. Bu çalışmada sıfır fuzzy sayısını

$$\bar{0}(t) = \begin{cases} 1, & t = (0, 0, \dots, 0) \text{ ise} \\ 0, & \text{diğer hallerde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıyoruz.

Tanım 3.1.3. $X = (X_k)$ herhangi bir fuzzy sayı dizisi olsun. Eğer $\{\Delta^m X_k, k \in \mathbb{N}\}$ cümlesi sınırlı ise $X = (X_k)$ dizisine Δ^m -sınırlı dizi diyeceğiz. Δ^m -sınırlı tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesini $\ell_\infty(\Delta^m, F)$ ile göstereceğiz.

Teorem 3.1.4. $N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$

$$\delta_\Delta(X, Y) = \sum_{k=1}^m d(X_k, Y_k) + \sup_r \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır.

İspat. $X^s = (X_i^s)_i = (X_1^s, X_2^s, \dots)$ olmak üzere (X^s) , $N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\delta_\Delta(X^s, X^t) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) + \sup_r \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

dir. Buradan $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0,$$

ve her bir $r, k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\sup_r \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

elde edilir. Buradan da $k \leq m$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t) \rightarrow 0$$

elde edilir. d 'nin tanımı ve

$$\begin{aligned} |X_{k+m}^s - X_{k+m}^t| &\leq \left| \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} (X_{k+v}^s - X_{k+v}^t) \right| \\ &+ \binom{m}{0} |X_k^s - X_k^t| + \dots + \binom{m}{m-1} |X_{k+m-1}^s - X_{k+m-1}^t| \end{aligned}$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} d(X_{k+m}^s, X_{k+m}^t) &\leq d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t) \\ &+ \binom{m}{0} d(X_k^s, X_k^t) + \dots + \binom{m}{m-1} d(X_{k+m-1}^s, X_{k+m-1}^t) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0$$

bulunur. O halde $(X_k^s)_s = (X_k^1, X_k^2, \dots)$ her sabit k için $L(\mathbb{R})$ 'de bir Cauchy dizisidir. $L(\mathbb{R})$ tam olduğundan $(X_k^s)_s, L(\mathbb{R})$ 'de yakınsaktır. $\lim_s X_k^s = X_k$ ($k = 1, 2, \dots$) diyelim. $(X^s), N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ de bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq n_0$ olduğunda $\delta_\Delta(X^s, X^t) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde $s, t \geq n_0$ için

$$\sum_{i=1}^m d(X_k^s, X_k^t) < \varepsilon$$

ve her $r \in \mathbb{N}$ ve $s, t \geq n_0$ için

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)^p < \varepsilon^p$$

dir. Buradan $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $s \geq n_0$ için

$$\lim_t \sum_{i=1}^m d(X_k^s, X_k^t) = \sum_{i=1}^m d(X_k^s, X_k) < \varepsilon$$

ve her $r \in \mathbb{N}$ ve $s \geq n_0$ için

$$\lim_t \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)^p \right) = h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k)^p < \varepsilon^p.$$

bulunur. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ ve $s \geq n_0$ için

$$\delta_\Delta(X^s, X) = \sum_{i=1}^m d(X_k^s, X_k) + \sup_r \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} < 2\varepsilon$$

olur. Bu ise $X = (X_k)$ olmak üzere $s \rightarrow \infty$ için $X^s \rightarrow X$ demektir.

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^p \leq 2^p \left\{ h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_i^{n_0}, X_0)^p + h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_i^{n_0}, \Delta^m X_i)^p \right\}$$

olduğundan $r \rightarrow \infty$ için

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^p \rightarrow 0$$

elde edilir. Bu ise $X \in N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$ demektir.

Teorem 3.1.5. $N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$

$$\delta_{\Delta'}(X, Y) = \sum_{k=1}^m d(X_k, Y_k)^p + \sup_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k)^p, \quad (0 < p < 1)$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır.

İspat. $X^s = (X_i^s)_i = (X_1^s, X_2^s, \dots) \in N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$ olmak üzere $(X^s), N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\delta_{\Delta'}(X^s, X^t) = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t)^p + \sup_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)^p \rightarrow 0$$

dır. Böylece her $r, k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t)^p \rightarrow 0 \text{ ve } \sup_r h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)^p \rightarrow 0$$

elde edilir. Buradan her $k \in \mathbb{N}$ ve $s, t \rightarrow \infty$ için

$$d(X_k^s, X_k^t) \rightarrow 0$$

elde edilir. O halde $(X_k^s) = (X_k^1, X_k^2, \dots)$ dizisi her sabit k için $L(\mathbb{R})$ 'de bir Cauchy dizisidir. $L(\mathbb{R})$ tam olduğundan $(X_k^s)_s, L(\mathbb{R})$ 'de yakınsaktır. $\lim_s X_k^s = X_k \quad (k = 1, 2, \dots)$ diyelim.

$(X^s), N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ 'de bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $s, t \geq n_0$ olduğunda $\delta_{\Delta'}(X^s, X^t) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır. O halde $s, t \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t)^p < \varepsilon$$

ve her $r \in \mathbb{N}$ için

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)^p < \varepsilon$$

dir. Böylece $s \geq n_0$ için

$$\lim_t \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k^t)^p = \sum_{k=1}^m d(X_k^s, X_k)^p < \varepsilon$$

ve her $r \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_t \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k^t)^p \right) = h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^s, \Delta^m X_k)^p < \varepsilon.$$

Böylece $\forall \varepsilon > 0$ ve $s \geq n_0$ için $\delta_{\Delta'}(X^s, X) < 2\varepsilon$ 'dur. Bu $X = (X_k)$ olmak üzere $s \rightarrow \infty$ için $X^s \rightarrow X$ demektir. Diğer taraftan $(X^s) \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ ve $(X^s), N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ 'de bir Cauchy dizisi ve

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^p \leq \left\{ h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^{n_0}, X_0)^p + h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k^{n_0}, \Delta^m X_k)^p \right\}$$

olduğundan $X \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ 'dir.

Teorem 3.1.6. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, m pozitif bir tamsayı ve $p = (p_k)$ pozitif tamsayıların sınırlı bir dizisi olsun. Bu takdirde

- i) $\liminf q_r > 1$ ise $w(\Delta_{(p)}^m, F) \subset N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$,
- ii) $\limsup q_r < \infty$ ise $N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F) \subset w(\Delta_{(p)}^m, F)$,
- iii) $1 < \liminf q_r \leq \limsup q_r < \infty$ ise $N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F) = w(\Delta_{(p)}^m, F)$.

İspat. i) $X \in w(\Delta_{(p)}^m, F)$ ve $\liminf q_r > 1$ olsun. Bu takdirde her $r \geq 1$ için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $X \in w(\Delta_{(p)}^m, F)$ için

$$\begin{aligned}
h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} &= h_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} - h_r^{-1} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \\
&= \frac{k_r}{h_r} \left(\frac{1}{k_r} \sum_{k=1}^{k_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \right) \\
&\quad - \frac{k_{r-1}}{h_r} \left(\frac{1}{k_{r-1}} \sum_{k=1}^{k_{r-1}} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \right) \tag{3.1.3}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $h_r = k_r - k_{r-1}$ ve $1 + \delta \leq q_r$ olduğundan $\frac{k_r}{h_r} \leq \frac{1+\delta}{\delta}$ ve $\frac{k_{r-1}}{h_r} \leq \frac{1}{\delta}$ 'dir. (3.1.3) eşitliğinde sağ taraftaki her iki ifade $r \rightarrow \infty$ için sıfıra gider. Buradan $X \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ elde edilir.

ii) Şimdi kabul edelim ki $\limsup q_r < \infty$ olsun. Her $r \geq 1$ için $q_r < B$ olacak şekilde bir $B > 0$ sayısı vardır. $X \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde her bir $j \geq R$ için

$$A_j = \frac{1}{h_j} \sum_{k \in I_j} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $R > 0$ sayısı bulabiliriz.

Bundan başka $j = 1, 2, \dots$ için $\sup_{j \geq R} A_j < \varepsilon$ ve $A_j < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı da bulabiliriz. Şimdi $r > R$ olmak üzere $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde bir n pozitif tamsayısı alalım. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} &\leq k_{r-1}^{-1} \sum_{k=1}^{k_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \\
&= k_{r-1}^{-1} \left\{ \sum_{k \in I_1} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} + \sum_{k \in I_2} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} + \dots + \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \right\} \\
&= \frac{k_1}{k_{r-1}} k_1^{-1} \sum_{k \in I_1} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} (k_2 - k_1)^{-1} \sum_{k \in I_2} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \\
&\quad + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} (k_R - k_{R-1})^{-1} \sum_{k \in I_R} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} (k_r - k_{r-1})^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \\
& = \frac{k_1}{k_{r-1}} A_1 + \frac{k_2 - k_1}{k_{r-1}} A_2 + \dots + \frac{k_R - k_{R-1}}{k_{r-1}} A_R \\
& + \dots + \frac{k_{R+1} - k_R}{k_{r-1}} A_{R+1} + \dots + \frac{k_r - k_{r-1}}{k_{r-1}} A_R \\
& \leq \left(\sup_{j \geq 1} A_j \right) \frac{k_R}{k_{r-1}} + \left(\sup_{j \geq R} A_j \right) \left(\frac{k_r - k_R}{k_{r-1}} \right) \\
& < K \frac{k_R}{k_{r-1}} + \varepsilon B
\end{aligned}$$

yazabiliriz. $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğunda $n \rightarrow \infty$ olacağından $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \rightarrow 0$ dir. Buradan $X \in w(\Delta_{(p)}^m, F)$ elde edilir.

iii) (i) ve (ii)'den elde edilir.

Teorem 3.1.7. $w(\Delta^m, F) \subset N_\theta(\Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ olmasıdır.

İspat (Yeterlilik). Teorem 3.1.6 (i)'de her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alınırsa yeterlilik ispatlanır.

(Gereklilik). Kabul edelimki $\liminf_r q_r = 1$ olsun. $\theta = (k_r)$ lacunary olduğundan $r_j \geq r_{j-1} + 2$ olmak üzere $\frac{k_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} < 1 + \frac{1}{j}$ ve $\frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j-1)-1}} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir $(k_{r(j)})$ alt dizisini seçebiliriz. A ve B farklı iki fuzzy sayısı olsun. $X = (X_k)$ dizisini

$$\Delta^m X_i = \begin{cases} A, & i \in I_{r(j)}, j = 1, 2, \dots \\ B, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu taktirde herhangi bir T fuzzy sayısı için

$$\frac{1}{h_{r(j)}} \sum_{i \in I_{r(j)}} d(\Delta^m X_i, T) = d(A, T), \quad j = 1, 2, \dots$$

ve

$$\frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} d(\Delta^m X_i, T) = d(B, T), \quad r \neq r_j$$

olur. Buradan $(X_i) \notin N_\theta(\Delta^m, F)$ dir. Fakat X, Δ^m - kuvvetli Cesáro yakınsaktır. Gerçekten t yeteri kadar büyük bir tamsayı olmak üzere $k_{r(j)-1} < t \leq k_{r(j+1)-1}$ olacak

şekilde bir tek j bulabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_i, B) \leq \frac{k_{r(j)-1} + h_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} \leq \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j}.$$

yazabiliriz. $t \rightarrow \infty$ iken $j \rightarrow \infty$ olur. Böylece $(X_i) \in w(\Delta^m, F)$ 'dır. Buna göre Δ^m -sınırlı, $w(\Delta^m, F)$ uzayında fakat $N_\theta(\Delta^m, F)$ uzayında olmayan bir dizi elde ettik. Bu bir çelişkidir. O halde $\liminf_r q_r > 1$ dir.

Teorem 3.1.8. $N_\theta(\Delta^m, F) \subset w(\Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

İspat. (*Yeterlilik*). Teorem 3.1.6 (ii)'de her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ alınrsa ispat elde edilir.

(*Gereklilik*). Kabul edelim ki $\limsup_r q_r = \infty$ olsun. Bunun için Δ^m -sınırlı, lacunary kuvvetli Δ^m -yakınsak fakat kuvvetli Δ^m -Cesáro yakınsak olmayan bir dizi bulmalıyız. İlk olarak $q_{r(j)} > j$ olacak şekilde $\theta = (k_r)$ lacunary dizisinin bir $(k_{r(j)})$ alt dizisini seçelim. A ve B farklı iki fuzzy sayısı olsun. Şimdi $X = (X_k)$ dizisini

$$\Delta^m X_i = \begin{cases} A, & k_{r(j)-1} < i \leq 2k_{r(j)-1}, \quad j = 1, 2, \dots \\ B, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde $r = r(j)$ için

$$\tau_{r(j)} = \frac{1}{h_{r(j)}} \sum_{I_{r(j)}} d(\Delta^m X_k, B) = d(A, B) \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j)} - k_{r(j)-1}} < \frac{1}{j-1}$$

ve $r \neq r_j$ için $\tau_r = 0$ 'dır. Böylece $\lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} d(\Delta^m X_k, B) = 0$ dir. Yani $(X_k) \in N_\theta(\Delta^m, F)$.

Diğer yandan, yukarıdaki (X_k) dizisi herhangi bir T fuzzy sayısı için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{r(j)}} \sum_{i=1}^{k_{r(j)}} d(\Delta^m X_i, T) &\geq \frac{1}{k_{r(j)}} \left(\sum_{i=k_{r(j)-1}}^{2k_{r(j)-1}-1} d(A, T) + \sum_{i=2k_{r(j)-1}}^{2k_{r(j)}} d(B, T) \right) \\ &\geq d(A, T) \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j)}} + d(B, T) \frac{k_{r(j)} - 2k_{r(j)-1}}{k_{r(j)}} \\ &\geq d(A, T) \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j)}} + d(B, T) \left(1 - \frac{2}{j} \right) \rightarrow d(B, T) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

ve

$$\frac{1}{2k_{r(j)-1}} \sum_{i=1}^{2k_{r(j)-1}} d(\Delta^m X_i, T) \geq \frac{k_{r(j)-1}}{2k_{r(j)-1}} d(B, T) \rightarrow \frac{d(B, T)}{2}. \quad (3.1.5)$$

yazabiliriz. (3.1.4) ve (3.1.5) eşitsizliklerinin her iki yanını sırasıyla $d(B, T)$ ve $\frac{d(B, T)}{2}$ ye yakınsar. Sonuç olarak herhangi bir T fuzzy sayısı için

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{k_{r(j)}} \sum_{i=1}^{k_{r(j)}} d(\Delta^m X_i, T) = d(B, T) \neq \frac{d(B, T)}{2} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{2k_{r(j)-1}} \sum_{i=1}^{2k_{r(j)-1}} d(\Delta^m X_i, T).$$

elde ederiz. Böylece $(X_i) \notin w(\Delta^m, F)$. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.9. $N_\theta(\Delta^m, F) = w(\Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter şart $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1.7 ve Teorem 3.1.8 'den elde edilir.

Teorem 3.1.10. Eğer $X = (X_k) \in N_\theta(\Delta^m, F) \cap w(\Delta^m, F)$ ise bu taktirde $X_k \rightarrow X_0(N_\theta(\Delta^m, F)) = X_k \rightarrow X_0(w(\Delta^m, F))$.

İspat. $X_k \rightarrow X_0(w(\Delta^m, F))$, $X_k \rightarrow X'_0(N_\theta(\Delta^m, F))$ olsun ve $X_0 \neq X'_0$ olduğunu kabul edelim. Bu taktirde

$$\tau_r + \tau'_r = \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} d(\Delta^m X_i, X_0) + \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} d(\Delta^m X_i, X'_0) \geq \frac{1}{h_r} \sum_{I_r} d(X_0, X'_0) = d(X_0, X'_0)$$

dır. $X \in N_\theta(\Delta^m, F)$ olduğundan $\tau_r \rightarrow 0$ olur. Böylece yeteri kadar büyük r 'ler için $\tau_r > \frac{1}{2}d(X_0, X'_0)$ 'dır. Yeteri kadar büyük r 'ler için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} \sum_{i=1}^{k_r} d(\Delta^m X_i, X_0) &\geq \frac{1}{k_r} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_i, X_0) = \frac{k_r - k_{r-1}}{k_r} \tau_r \\ &= \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) \tau_r > \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) d(X_0, X'_0) \end{aligned}$$

dır. $X = (X_i) \in w(\Delta^m, F)$ olduğundan sol taraf sifıra yakınsar, buradan $q_r \rightarrow 1$ elde ederiz. Yani, $\limsup_r q_r < \infty$. Buna göre Teorem 3.1.8 'den $N_\theta(\Delta^m, F) \subset w(\Delta^m, F)$ olur. $N_\theta(F) - \lim_k \Delta^m X_k = X'_0$ olduğundan $w(F) - \lim_k \Delta^m X_k = X'_0$ elde edilir. Bu nedenle,

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_i, X'_0) \rightarrow 0.$$

olur. Fakat,

$$\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_i, X'_0) + \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t d(\Delta^m X_i, X_0) \geq d(X_0, X'_0) > 0$$

olur ki bu da bir çelişkidir. Çünkü soldaki her iki terim de sıfıra yakınsar.

3.2. Genelleştirilmiş Fuzzy İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.2.1. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, $X = (X_k)$ fuzzy dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir X_0 fuzzy sayısı varsa $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi X_0 sayısına Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $X_k \rightarrow X_0 (S_\theta(\Delta^m, F))$ yazarız. Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsak tüm fuzzy sayı dizilerinin kümesini $S_\theta(\Delta^m, F)$ ile göstereceğiz. Eğer $\theta = (2^r)$ ise $S_\theta(\Delta^m, F)$ yerine $S(\Delta^m, F)$ yazacağız.

Teorem 3.2.2. (X_k) ve (Y_k) fuzzy sayılarının herhangi iki dizisi olsun.

- i) Eğer $S_\theta(F) - \lim \Delta^m X_k = X_0$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $S_\theta(F) - \lim c\Delta^m X_k = c X_0$ 'dır.
- ii) Eğer $S_\theta(F) - \lim \Delta^m X_k = X_0$ ve $S_\theta(F) - \lim \Delta^m Y_k = Y_0$ ise $S_\theta(F) - \lim (\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k) = X_0 + Y_0$ 'dır.

İspat. i) (3.1.1) eşitliği kullanılırsa her $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(c\Delta^m X_k, cX_0) \geq \varepsilon\}| \leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{|c|} \right\} \right|.$$

yazabiliriz. Böylece $S_\theta(F) - \lim c\Delta^m X_k = c X_0$ elde edilir.

ii) (3.1.2) eşitsizliği kullanılırsa her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, X_0 + Y_0) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) + d(\Delta^m Y_k, Y_0) \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + \frac{1}{h_r} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m Y_k, Y_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $S_\theta(F) - \lim (\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k) = X_0 + Y_0$ olur.

Teorem 3.2.3. $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, $X = (X_k)$ fuzzy dizisi ve $0 < h = \inf p_k \leq p_k \leq \sup p_k = H$ olsun.

- i) $N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F) \subset S_\theta(\Delta^m, F)$,

- ii) $X \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ ve $X_k \rightarrow X_0(S_\theta(\Delta^m))$ ise $X \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$,
iii) $\ell_\infty(\Delta^m, F) \cap S_\theta(\Delta^m, F) = \ell_\infty(\Delta^m, F) \cap N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$

İspat. i) $\varepsilon > 0$ verilsin ve $X \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}
h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \varepsilon^{p_k} \\
&\geq \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} \min(\varepsilon^h, \varepsilon^H) \\
&\geq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \min[\varepsilon^h, \varepsilon^H].
\end{aligned}$$

Buradan $X \in S_\theta(\Delta^m, F)$ olur.

ii) $X \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ ve $X_k \rightarrow X_0(S_\theta(\Delta^m))$ olsun. $X \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ olduğundan $d(\Delta^m X_k, X_0) \leq T$ olacak şekilde bir $T > 0$ sayısı vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} d(\Delta^m X_k, X_0)^{p_k} \\
&\leq \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon}} \max(T^h, T^H) + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon}} \varepsilon^{p_k} \\
&\leq \max(T^h, T^H) \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| + \max(\varepsilon^h, \varepsilon^H).
\end{aligned}$$

Buradan $X \in N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ 'dir.

iii) 'ün ispatı i) ve ii) 'den elde edilir.

Teorem 3.2.4. Eğer $X \in S(\Delta^m, F) \cap S_\theta(\Delta^m, F)$ ise $S_\theta(F) - \lim \Delta^m X_k = S(F) - \lim \Delta^m X_k$ 'dir.

İspat. Kabul edelim ki $S(F) - \lim \Delta^m X_k = X_0$ ve $S_\theta(F) - \lim \Delta^m X_k = X'_0$ ve $X_0 \neq X'_0$ olsun. Bu takdirde $d(X_0, X'_0) > 0$ 'dır. $(d(X_0, X'_0))/2 > \varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 1$$

elde edilir.

Şimdi $\frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$ ifadesinin k_s -yinci terimini düşünelim. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_s} \left| \left\{ k \in \bigcup_{r=1}^s I_r : d(\Delta^m X_k, X'_0) \geq \varepsilon \right\} \right| &= \frac{1}{k_s} \sum_{r=1}^s |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{\sum_{r=1}^s h_r} \sum_{r=1}^s h_r t_r \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

dir. Burada $t_r = \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}| \rightarrow 0$ 'dır. Çünkü $S_\theta - \lim \Delta^m X_k = X'_0$ dir. θ bir lacunary dizisi olduğundan ve $\frac{1}{\sum_{r=1}^s h_r} \sum_{r=1}^s h_r t_r$ de t 'nin regüler ağırlıklı ortalama dönüşümü olduğundan $s \rightarrow \infty$ iken sıfıra gider. $\left\{ \frac{1}{k_s} \left| \left\{ k \in \bigcup_{k=1}^s I_r : d(\Delta^m X_k, X'_0) \geq \varepsilon \right\} \right| \right\} \rightarrow 0$ dizisi $\left\{ \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}| \right\}_{n=1}^\infty$ nin bir alt dizisi olduğundan (3.2.1) den

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X'_0) \geq \varepsilon\}| \rightarrow 1$$

olur. Bu da $X_0 \neq X'_0$ olması ile çelişir.

Teorem 3.2.5. $\theta = (k_r)$ herhangi bir lacunary dizisi olsun. Bu durumda $S_\theta(\Delta^m, F) \subseteq S(\Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

İspat. (Yeterlilik) $\limsup_r q_r < \infty$ olsun. Bu durumda her $r \in \mathbb{N}$ için $q_r < K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. Şimdi $X_k \rightarrow X_0$ ($S_\theta(\Delta^m, F)$) ve $N_r = |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}|$ olsun. $X_k \rightarrow X_0$ ($S_\theta(\Delta^m, F)$) olduğundan,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| = 0$$

olup her $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0$ için $\frac{N_r}{h_r} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $M = \max \{N_r : 1 \leq r \leq r_0\}$ diyelim ve $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde bir n tamsayısı seçelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| &\leq \frac{1}{k_{r-1}} |\{k \leq k_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{1}{k_{r-1}} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \dots + N_r\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left\{ h_{r_0+1} \frac{N_{r_0+1}}{h_{r_0+1}} + \dots + h_r \frac{N_r}{h_r} \right\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \frac{1}{k_{r-1}} \left(\sup_{r > r_0} \frac{N_r}{h_r} \right) \{h_{r_0+1} + \dots + h_r\} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon \frac{k_r - k_{r_0}}{k_{r-1}} \\ &\leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon q_r \leq \frac{M}{k_{r-1}} r_0 + \varepsilon K \end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan ve $r \rightarrow \infty$ için $k_{r-1} \rightarrow \infty$ olduğundan $X_k \rightarrow X_0(S_\theta(\Delta^m, F))$ elde ederiz. Böylece $S_\theta(\Delta^m, F) \subseteq S(\Delta^m, F)$ bulunur.

(Gereklilik) $\limsup_r q_r = \infty$ olduğunu kabul edelim. İspat için Δ^m -sınırlı, Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsak fakat Δ^m -istatistiksel yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisi bulunduğunu göstereceğiz. θ lacunary dizisi olduğundan $q_{r(j)} < j$ şartını sağlayan θ 'nın bir $(k_{r(j)})$ alt dizisini seçebiliriz. $(d \geq 1)$ olmak üzere $\bar{1}$ ve $\bar{0}$ sırasıyla 1 ve 0 merkezli 1 genişliğinde n -boyutlu üçgensel fuzzy sayılarını gösterebiliriz. $X = (X_k)$ dizisini

$$\Delta^m X_i = \begin{cases} \bar{1}, & k_{r(j)-1} < i \leq 2k_{r(j)-1}, j = 1, 2, \dots, \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde $\varepsilon \in (0, 1]$ ve $r = r(j)$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h_{r(j)}} |\{k \in I_{r(j)} : d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}| \\ &= \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j)} - k_{r(j)-1}} < \frac{1}{j-1} \end{aligned}$$

ve $r \neq r(j)$ ise

$$|\{k \in I_{r(j)} : d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

dir. Böylece,

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}| = 0$$

dir. Dolayısıyla $(X_k) \in S_\theta(\Delta^m, F)$ elde ederiz.

Şimdi herhangi bir T fuzzy sayısının yukarıda tanımlanan dizinin Δ^m -istatistiksel limiti olmadığını göstereceğiz.

Eğer $T = \bar{0}$ ve $1 > \varepsilon > 0$ ise bu durumda

$$\frac{1}{2k_{r(j)-1}} |\{k \leq 2k_{r(j)-1} : d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}| \geq \frac{k_{r(j)-1}}{2k_{r(j)-1}} = \frac{1}{2}$$

dir. Eğer $T = \bar{1}$ ve $1 > \varepsilon > 0$ ise bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_{r(j)}} |\{k \leq k_{r(j)} : d(\Delta^m X_k, \bar{1}) \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{k_{r(j)} - 2k_{r(j)-1}}{k_{r(j)}} \\ &\geq 1 - \frac{2}{j} \end{aligned}$$

yazılabilir. Son olarak eğer $T \neq \bar{0}, \bar{1}$ ve $\min \{d(T, \bar{0}), d(T, \bar{1})\} > \varepsilon > 0$ ise bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{k_n} |\{k \leq k_n : d(\Delta^m X_k, T) > \varepsilon\}| = 1$$

dir. Böylece yukarıdaki üç halden, (X_k) nın bir Δ^m -istatistiksel yakınsak dizi olmadığı sonucuna ulaşırız.

Teorem 3.2.6. Herhangi bir θ lacunary dizisi için $S(\Delta^m, F) \subseteq S_\theta(\Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter şart $\liminf_r q_r > 1$ 'dir.

İspat. (*Yeterlilik*). Kabul edelim ki $\liminf_r q_r > 1$ olsun. Bu taktirde yeterince büyük r 'ler için $q_r \geq 1 + \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $h_r = k_r - k_{r-1}$ olduğundan $\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{1}{1+\delta}$ dir.

$X_k \rightarrow X_0$ ($S(\Delta^m, F)$) olsun. Bu taktirde $\varepsilon > 0$ olmak üzere yeterince büyük r 'ler için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| &\geq \frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \\ &\geq \frac{\delta}{1+\delta} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \end{aligned}$$

elde ederiz.

(*Gereklilik*). Kabul edelim ki $\liminf_r q_r = 1$ olsun. Bunun için Δ^m -sınırlı, Δ^m -istatistiksel yakınsak fakat Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsak olmayan bir fuzzy sayı dizisinin varolduğunu göstereceğiz. θ bir lacunary dizisi olduğundan θ 'nın $r(j) \geq r(j-1) + 2$ olmak üzere

$$\frac{k_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} < 1 + \frac{1}{j} \text{ ve } \frac{k_{r(j)-1}}{k_{r(j-1)}} > j,$$

şartlarını sağlayan bir $(k_{r(j)})$ alt dizisi mevcuttur.

$\bar{1}$ ve $\bar{0}$ Teorem 3.2.5 'in ispatında verilen fuzzy sayıları olsunlar. $X = (X_k)$ dizisini

$$\Delta^m X_i = \begin{cases} \bar{1}, & i \in I_{r(j)} \quad j = 1, 2, \dots, \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde, herhangi bir T fuzzy sayısı için $\varepsilon \leq \min \{d(\bar{1}, T), d(\bar{0}, T)\}$ olmak üzere $r = r(j)$ için

$$\lim_j \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, T) \geq \varepsilon\}| = \begin{cases} 1, & \text{eğer } T \neq \bar{1} \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } T = \bar{1} \end{cases}$$

ve $r \neq r(j)$ için

$$\lim_j \frac{1}{h_{r(j)}} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, T) \geq \varepsilon\}| = \begin{cases} 0, & \text{eğer } T = \bar{0} \text{ ise,} \\ 1, & \text{eğer } T \neq \bar{0} \text{ ise.} \end{cases}$$

yazabiliriz. Bu nedenle $(X_i) \notin S_\theta(\Delta^m, F)$.

n , yeterince büyük herhangi bir tamsayı ve j de $k_{r(j)-1} < n \leq k_{r(j+1)-1}$ şartını sağlayan bir tek sayı olsun. Bu taktirde $n \rightarrow \infty$ olması $j \rightarrow \infty$ olmasını gerektirdiğinden

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_j \frac{k_{r(j-1)} + h_{r(j)}}{k_{r(j)-1}} \leq \lim_j \frac{2}{j} = 0$$

elde ederiz. Böylece $(X_i) \in S(\Delta^m, F)$ 'dır.

Aşağıdaki sonuç Teorem 3.2.5 ve Teorem 3.2.6 'nın bir sonucudur.

Teorem 3.2.7. $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi olsun. Bu durumda $S_\theta(\Delta^m, F) = S(\Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter koşul $1 < \liminf_r q_r \leq \limsup_r q_r < \infty$ olmasıdır.

Teorem 3.2.8. $0 < p_k \leq q_k$ ve (q_k/p_k) sınırlı ise $N_\theta(\Delta_{(q)}^m, F) \subset N_\theta(\Delta_{(p)}^m, F)$ 'dir.

İspat. $X \in N_\theta(\Delta_{(q)}^m, F)$ olsun $w_k = d(X_k, X_0)^{q_k}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_k = \frac{p_k}{q_k}$ diyelim. Bu taktirde her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \lambda_k \leq 1$ 'dir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < \lambda \leq \lambda_k \leq 1$ olacak şekilde bir λ sayısı alalım. (u_k) ve (v_k) dizilerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$u_k = \begin{cases} w_k, & w_k \geq 1, \text{ ise} \\ 0, & w_k < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$v_k = \begin{cases} 0, & w_k \geq 1, \text{ ise} \\ w_k, & w_k < 1 \text{ ise} \end{cases}$$

Buna göre $w_k = u_k + v_k$, $w_k^{\lambda_k} = u_k^{\lambda_k} + v_k^{\lambda_k}$ 'dır. Buradan $u_k^{\lambda_k} \leq u_k \leq w_k$ ve $v_k^{\lambda_k} \leq v_k$ yazabiliriz. Böylece

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} w_k^{\lambda_k} = h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} (u_k + v_k)^{\lambda_k} \leq h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} w_k + h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_k^{\lambda_k}.$$

dir. Buradan her $r \in \mathbb{N}$ için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_k^\lambda &= \sum_{k \in I_r} (h_r^{-1} v_k)^\lambda (h_r^{-1})^{1-\lambda} \\ &\leq \left(\sum_{k \in I_r} \left((h_r^{-1} v_k)^\lambda \right)^{\frac{1}{\lambda}} \right)^\lambda \left(\sum_{k \in I_r} \left((h_r^{-1})^{1-\lambda} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}} \right)^{1-\lambda} \\ &= \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_k \right)^\lambda \end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan da

$$h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} w_k^{\lambda_k} \leq h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} w_k + \left(h_r^{-1} \sum_{k \in I_r} v_k \right)^\lambda$$

olur. Bu ise $X \in N_\theta \left(\Delta_{(p)}^m, F \right)$ demektir.

Teorem 3.2.9. $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisinin lacunary Δ^m -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $X = (X_k)$ dizisinin lacunary Δ^m -istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

İspat. $X = (X_k)$ lacunary Δ^m -istatistiksel yakınsak ve her bir $j \in \mathbb{N}$ için

$$K^{(j)} = \left\{ k \in \mathbb{N} : d(\Delta^m X_k, X_0) < \frac{1}{j} \right\}$$

olsun. Her bir j için $K^{(j)} \supset K^{(j+1)}$ ve $r \rightarrow \infty$ olması halinde $\frac{|K^{(j)} \cap I_r|}{h_r} \rightarrow 1$ olur. $r \geq m(1)$ olması $\frac{|K^{(1)} \cap I_r|}{h_r} > 0$ olmasını gerektirecek şekilde $m(1)$ seçelim; yani $r \geq m(1)$ olması $K^{(1)} \cap I_r \neq \emptyset$ olmasını gerektirecek şekilde bir $m(1)$ seçelim. Şimdi de $r \geq m(2)$ olması $K^{(2)} \cap I_r \neq \emptyset$ eşitsizliğini gerektirecek şekilde $m(2) \geq m(1)$ seçelim. Daha sonra $m(1) \leq r \leq m(2)$ eşitsizliğini sağlayan her bir r için $k'(r) \in K^{(1)} \cap I_r$, yani $d(\Delta^m X_{k'(r)}, X_0) < 1$ olacak şekilde $k'(r) \in I_r$ seçelim. Bunu genelleştirirsek $r > m(p+1)$ olması $K^{(p+1)} \cap I_r \neq \emptyset$ olmasını gerektirecek şekilde $m(p+1) \geq m(p)$ seçelim. Şimdi $m(p) \leq r \leq m(p+1)$ eşitsizliğini sağlayan tüm r ler için $k'(r) \in K^{(p)} \cap I_r$ seçelim. Bu

$$d(\Delta^m X_{k'(r)}, X_0) < \frac{1}{p} \quad (3.2.2)$$

demektir. $k'(r) \in I_r$ ve (3.2.2) eşitsizliği $\lim_r \Delta^m X_{k'(r)} = X_0$ olmasını gerektirir. Üstelik, her $\varepsilon > 0$ için

$$h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_k, \Delta^m X_{k'(r)}) \geq \varepsilon \right\} \right| \leq h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_{k'(r)}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|.$$

elde ederiz. Böylece X , lacunary Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisidir.

Tersine kabul edelim ki X , lacunary Δ^m - istatistiksel Cauchy dizisi olsun. Bu takdirde her $\varepsilon > 0$ için

$$h_r^{-1} |\{k \in I_r : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \leq h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_k, \Delta^m X_{k'(r)}) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right| + h_r^{-1} \left| \left\{ k \in I_r : d(\Delta^m X_{k'(r)}, X_0) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right|.$$

elde edilir. Buradan $S_\theta - \lim \Delta^m X_k = X_0$ çıkar.

Teorem 3.2.10. $Y = (Y_k)$ fuzzy dizisi Δ^m -yakınsak bir dizi olsun. Eğer $X = (X_k)$ fuzzy dizisi h.h.k için $\Delta^m X_k = \Delta^m Y_k$ olacak şekilde bir fuzzy dizisi ise $X = (X_k)$, Δ^m - istatistiksel yakınsak bir fuzzy dizisidir.

İspat. h.h.k için $\Delta^m X_k = \Delta^m Y_k$, $\lim_k \Delta^m Y_k = X_0$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu taktirde her n için,

$$\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\} \subset \{k \leq n : \Delta^m X_k \neq \Delta^m Y_k\} \cup \{k \leq n : d(\Delta^m Y_k, X_0) \geq \varepsilon\}$$

yazabiliriz. $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^m Y_k = X_0$ olduğundan eşitsizliğin ikinci yanındaki son cümle sabit sayıda elemanlar içerir. Bunu $g = g(\varepsilon)$ ile gösterelim. Her iki tarafında $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa h.h.k için $\Delta^m X_k = \Delta^m Y_k$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m X_k \neq \Delta^m Y_k\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g}{n}$$

yazabiliriz. Bu da $X_k \rightarrow X_0 (S(\Delta^m, F))$ olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.11. $X = (X_k)$ dizisi Δ_p^m -Cesáro toplanabilir veya X_0 fuzzy sayısına Δ^m - istatistiksel yakınsak ise $\lim Y_k = X_0$ ve $S(F) - \lim \Delta^m Z_k = 0$ olacak şekilde yakınsak bir Y dizisi ve sıfıra Δ^m - istatistiksel yakınsak bir Z dizisi vardır.

İspat. $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına kuvvetli Δ_p^m - Cesáro toplanabilir ise o zaman $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına Δ^m - istatistiksel yakınsaktır. Şimdi $N_0 = 0$ olmak üzere

$n > N_j$, ($j = 1, 2, 3, \dots$) için

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{1}{j} \right\} \right| < \frac{1}{j}$$

olacak şekilde pozitif tamsayıların $N_1 < N_2 < \dots < N_j < \dots$ artan bir (N_j) dizisini seçelim.

Y ve Z dizilerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$N_0 < k < N_1$ olduğunda $Z_k = 0$ ve $Y_k = \Delta^m X_k$ alalım. $j \geq 1$ olmak üzere $N_j < k < N_{j+1}$ için

$$Y_k = \begin{cases} \Delta^m X_k, & d(\Delta^m X_k, X_0) < \frac{1}{j} \text{ ise} \\ X_0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$\Delta^m Z_k = \begin{cases} 0, & d(\Delta^m X_k, X_0) < \frac{1}{j} \text{ ise} \\ \Delta^m X_k, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $\lim Y_k = X_0$ olduğunu iddia ediyoruz. $\varepsilon > 0$ verilsin ve j sayısını $\varepsilon > \frac{1}{j}$ olacak şekilde seçelim. $k > N_j$ olduğunda $d(\Delta^m X_k, X_0) < \frac{1}{j}$ için $d(Y_k, X_0) = d(\Delta^m X_k, X_0) < \varepsilon$ olduğundan $d(Y_k, X_0) < \varepsilon$ ve $d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{1}{j}$ için $d(Y_k, X_0) = d(X_0, X_0) = 0$ dır.

Şimdi Z 'nin bir Δ^m - istatistiksel sıfır dizisi olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m Z_k \neq 0\}| = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Her $j \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{j} < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısını alalım. Bu takdirde $n > N_j$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m Z_k \neq 0\}| < \delta$$

olur. N_j nin yapısından $N_j < k \leq N_{j+1}$ olduğunda $\Delta^m Z_k \neq 0$ olması ancak $d(\Delta^m X_k, X_0) \geq \frac{1}{j}$ olmasıyla mümkündür. O halde $N_\ell < k \leq N_{\ell+1}$ ise

$$\{k \leq n : \Delta^m Z_k \neq 0\} \subset \left\{ k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) \leq \frac{1}{\ell} \right\}$$

dir. Sonuç olarak, eğer $N_\ell < k \leq N_{\ell+1}$ ve $\ell > j$ ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \Delta^m Z_k \neq 0\}| &\leq \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : d(\Delta^m X_k, X_0) > \frac{1}{\ell} \right\} \right| \\ &< \frac{1}{\ell} < \frac{1}{j} < \delta \end{aligned}$$

olacaktır. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.2.12. $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına kuvvetli Δ_p^m – Cesáro toplanabilir veya X_0 sayısına Δ^m – istatistiksel yakınsak ise $X = (X_k)$ dizisi X_0 sayısına yakınsayan bir alt diziye sahiptir.

$X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisi bir X_0 fuzzy sayısına Δ^m – yakınsak ise Δ^m – istatistiksel yakınsak olduğu açıktır. Ancak tersi doğru değildir. Gerçekten $X = (X_k)$ fuzzy sayı dizisini

$$\Delta^m X_k = \begin{cases} \bar{1}, & \text{eğer } k = n^2 \text{ ise} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda X dizisi Δ^m – istatistiksel yakınsak fakat Δ^m –yakınsak değildir.

Teorem 3.2.13.

- i) $S(\Delta^m, F)$ ve $\ell_\infty(\Delta^m, F)$ uzaylarının ortak elemanları vardır, ancak bu uzaylar birbirlerini kapsamazlar.
- ii) $S(\Delta^m, F)$ ve $\ell_\infty(F)$ uzaylarının ortak elemanları vardır, ancak bu uzaylar birbirlerini kapsamazlar.
- iii) $S(F)$ ve $c(\Delta^m, F)$ uzaylarının ortak elemanları vardır, ancak bu uzaylar birbirlerini kapsamazlar.
- iv) $S(F)$ ve $\ell_\infty(\Delta^m, F)$ uzaylarının ortak elemanları vardır, ancak bu uzaylar birbirlerini kapsamazlar.

İspat.i) $\bar{0}$ dizisi her iki uzaya da ait olduğundan $S(\Delta^m, F) \cap \ell_\infty(\Delta^m, F) \neq \emptyset$ dir. $X = (X_k)$ dizisini

$$\Delta^m X_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & \text{eğer } k = n^2 \text{ ise} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

olarak tanımlayalım. Bu taktirde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

dir. Yani $S(F) - \lim \Delta^m X_k = \bar{0}$ fakat $X \notin \ell_\infty(\Delta^m, F)$ dır.

ii) $S(\Delta^m, F) \cap \ell_\infty(F) \neq \emptyset$ olmakla beraber bu kümeler birbirlerini kapsamazlar. Çünkü $\bar{0}$ dizisi her iki uzaya da aittir. (3.2.3) 'de tanımlanan dizi Δ^m - fuzzy istatistiksel yakınsaktır ancak fuzzy sınırlı değildir. Diğer taraftan $X = (\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \dots)$ şeklinde tanımlanan dizi için $\Delta^m X_k = (-1)^{k+1} \bar{2}^{m-1}$ olduğundan $X = (X_k)$ fuzzy sınırlıdır. Fakat $X \notin S(\Delta^m, F)$ dir.

iii) $\bar{0}$ dizisi her iki uzaya ait olduğundan $S(F) \cap c(\Delta^m, F) \neq \emptyset$ olur. Şimdi

$$X_k = \begin{cases} \bar{1}, & \text{eğer } k = n^2 \text{ ise} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan diziyi göz önüne alalım. $X \in S(F)$ fakat $X \notin c(\Delta^m, F)$ dır. Tersine $X = (X_k) = (\bar{k})$ olarak alırsak $X \in c(\Delta^m, F)$ fakat $X \notin S(F)$ dır.

iv) $\bar{0} \in S(F) \cap \ell_\infty(\Delta^m, F)$ dır. Şimdi de

$$X_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \text{ ise} \\ \bar{0}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini göz önüne alalım. $X \notin \ell_\infty(\Delta^m, F)$ fakat $X \in S(F)$ dir. Tersine $X = (X_k) = (\bar{k})$ olarak alırsak $X \in \ell_\infty(\Delta^m, F)$ fakat $X \notin S(F)$ dir.

3.3. $m(\phi, p, \Delta^m, F)$ Fuzzy Dizi Uzayının Bazı Topolojik Özellikleri

Bu bölümde $m(\phi, p, \Delta^m, F)$ fuzzy sayı dizi uzayını tanımlanacak ve bu uzayın bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.3.1. $\varphi_s, \mathbb{N}$ 'nin s tane elemandan fazlasını içermeyen tüm altkümelerinin sınıfı olsun. (ϕ_n) , her $n \in \mathbb{N}$ için $n\phi_{n+1} \leq (n+1)\phi_n$ özelliğini sağlayan bir dizi ve $0 < p < \infty$ olsun. $m(\phi, p, \Delta^m, F)$ fuzzy dizi uzayını

$$m(\phi, p, \Delta^m, F) = \left\{ X = (X_k) : \sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Teorem 3.3.2. $m(\phi, p, \Delta^m, F)$ toplama ve skaler ile çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

İspat. İspatı $1 \leq p < \infty$ için yapacağız. $X \in m(\phi, p, \Delta^m, F)$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. $c = 0$ için ispat aşıkardır. $c \neq 0$ için (3.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m(cX_k), \bar{0})^p = |c|^p \sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty$$

elde edilir. Böylece $cX \in \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ olur.

ii) Kabul edelim ki, $X, Y \in \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ olsun. (3.1.2) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \sigma} [d(\Delta^m X_k + \Delta^m Y_k, \bar{0})]^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{k \in \sigma} [d(\Delta^m X_k, \bar{0}) + d(\Delta^m Y_k, \bar{0})]^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m Y_k, \bar{0})^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $X + Y \in \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ dir.

Teorem 3.3.3. $\mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ uzayı

$$\delta_{\Delta''}(X, Y) = \sum_{k=1}^m d(X_k, Y_k) + \sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \left(\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}, 1 \leq p < \infty.$$

metriği ile bir tam metrik uzaydır.

İspat. (X^i) , $\mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ ' de bir Cauchy dizisi olsun. Burada her bir $i \in \mathbb{N}$ için $X^i = (X_k^i)_k = (X_1^i, X_2^i, \dots) \in \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ dir.

$$\delta_{\Delta''}(X^i, X^j) = \sum_{k=1}^m d(X_k^i, X_k^j) + \sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \left(\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k^i, \Delta^m X_k^j)^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0, i, j \rightarrow \infty.$$

elde edilir. Böylece her bir $k \in \mathbb{N}$ için $i, j \rightarrow \infty$ iken $d(X_k^i, X_k^j) \rightarrow 0$, elde edilir.

Bu nedenle $(X_k^i)_i = (X_k^1, X_k^2, \dots)$, $L(\mathbb{R})$ ' de bir Cauchy dizisidir. $L(\mathbb{R})$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_i X_k^i = X_k$ diyelim. (X^i) bir Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $i, j \geq n_0$ için

$$\delta_{\Delta''}(X^i, X^j) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ ve her $i, j \geq n_0$ için

$$\sum_{k=1}^m d(X_k^i, X_k^j) \leq \varepsilon \text{ ve } \sup_{\substack{s \geq 1 \\ \sigma \in \varphi_s}} \frac{1}{\phi_s} \left(\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k^i, \Delta^m X_k^j)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

olur. Bu yüzden

$$\lim_j \sum_{k=1}^m d(X_k^i, Y_k^j) = \sum_{k=1}^m d(X_k^i, Y_k) < \varepsilon$$

ve

$$\lim_j \frac{1}{\phi_s} \left(\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k^i, \Delta^m Y_k^j)^p \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{\phi_s} \left(\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k^i, \Delta^m Y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve dolayısıyla her $k \in \mathbb{N}$ ve $i \geq n_0$ için

$$\sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \left(\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k^i, \Delta^m Y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu her $i \geq n_0$ için $\delta_{\Delta''}(X^i, X) < 2\varepsilon$ olmasını gerektirir. Yani, $X = (X_k)$ olmak üzere $i \rightarrow \infty$ için $X^i \rightarrow X$ dir. Ayrıca,

$$\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p = 2^p \left\{ \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k^{n_0}, \bar{0})^p + \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k^{n_0}, \Delta^m X_k)^p \right\}$$

olduğundan dolayı $X \in \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ elde ederiz. Bu nedenle $\mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ bir tam metrik uzaydır.

$\mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ uzayının $0 < p < 1$ için

$$\delta_{\Delta'''}(X, Y) = \sum_{k=1}^m d(X_k, Y_k)^p + \sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \Delta^m Y_k)^p,$$

metriğiyle bir tam metrik uzay olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.3.4. Herhangi bir $\phi \in \Phi$ için $\mathbf{m}(\phi, \Delta^m, F) \subset \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ dir.

İspat. $X \in \mathbf{m}(\phi, \Delta^m, F)$ olsun. Bu takdirde her bir sabit s ve $\sigma \in \varphi_s$ için

$$\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0}) \leq K \phi_s$$

olacak şekilde pozitif bir K sayısı vardır. Böylece her bir $p \geq 0$ ve $\sigma \in \varphi_s$ için $\sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < K \phi_s$ dir. Buradan $X \in \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ dir.

Teorem 3.3.5. $\mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F) \subset \mathbf{m}(\psi, p, \Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter şart $\sup_{s \geq 1} \left(\frac{\phi_s}{\psi_s} \right) < \infty$ olmasıdır.

İspat. $X \in \mathfrak{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ olsun. Bu takdirde

$$\sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty$$

dir. Kabul edelim ki $\sup_{s \geq 1} \left(\frac{\phi_s}{\psi_s} \right) < \infty$ olsun. Bu takdirde her bir s ve en az bir K pozitif sayısı için $\phi_s \leq K\psi_s$ dir. Böylece her bir s için $\frac{1}{\psi_s} \leq \frac{K}{\phi_s}$ dir. Bu nedenle her bir s için

$$\frac{1}{\psi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p \leq \frac{K}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p$$

dir. Bu eşitsizlikte $s \geq 1$ için her iki tarafın supremumu alınırsa

$$\sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\psi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p \leq K \sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p$$

elde edilir. Bu nedenle

$$\sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\psi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty$$

dir. Böylece $X \in \mathfrak{m}(\psi, p, \Delta^m, F)$ olur.

Tersine $\mathfrak{m}(\phi, p, \Delta^m, F) \subset \mathfrak{m}(\psi, p, \Delta^m, F)$ ve kabul edelim ki $\sup_{s \geq 1} \left(\frac{\phi_s}{\psi_s} \right) = \infty$ olsun. Bu takdirde $\lim_i \left(\frac{\phi_{s_i}}{\psi_{s_i}} \right) = \infty$ olacak şekilde doğal sayıların artan bir (s_i) dizisi mevcuttur. Bu durumda $B \in \mathbb{R}^+$ ve her $s_i \geq i_0$ için $\frac{\phi_{s_i}}{\psi_{s_i}} > B$ olacak şekilde $i_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Böylece $\frac{1}{\psi_{s_i}} > \frac{B}{\phi_{s_i}}$ ve dolayısıyla her $s_i \geq i_0$ için

$$\frac{1}{\psi_{s_i}} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p > \frac{B}{\phi_{s_i}} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p$$

bulunur. $s_i \geq i_0$ ve $\sigma \in \varphi_{s_i}$ ' ler üzerinden supremum alınırsa

$$\sup_{s_i \geq i_0, \sigma \in \varphi_{s_i}} \frac{1}{\psi_{s_i}} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p > B \sup_{s_i \geq i_0, \sigma \in \varphi_{s_i}} \frac{1}{\phi_{s_i}} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p \quad (3.3.1)$$

elde edilir. (3.3.1) eşitsizliği sağlandığından her $B \in \mathbb{R}^+$ için (B sayısını yeterince büyük seçebiliriz)

$$0 < \sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty$$

eşitsizliğini sağlayan $X \in \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ ler için

$$\sup_{s_i \geq i_0, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\psi_{s_i}} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p = \infty$$

elde edilir.

Bu nedenle $X \notin \mathbf{m}(\psi, p, \Delta^m, F)$ dir. Bu $\mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F) \subset \mathbf{m}(\psi, p, \Delta^m, F)$ olmasıyla çelişir. Böylece $\sup_{s \geq 1} \left(\frac{\phi_s}{\psi_s} \right) < \infty$ dir.

Teorem 3.3.5' den aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 3.3.6. $\mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F) = \mathbf{m}(\psi, p, \Delta^m, F)$ olması için gerek ve yeter şart

$$0 < \inf_{s \geq 1} \left(\frac{\phi_s}{\psi_s} \right) \leq \sup_{s \geq 1} \left(\frac{\phi_s}{\psi_s} \right) < \infty$$

olmasıdır.

Teorem 3.3.7. $\ell_p(\Delta^m, F) = \{X = (X_k) : \sum_{k=1}^{\infty} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty\}$ olmak üzere $\ell_p(\Delta^m, F) \subset \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F) \subset \ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ dir.

İspat. $X \in \ell_p(\Delta^m, F)$ olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{\infty} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty.$$

elde edilir. (ϕ_n) monoton artan olduğundan

$$\frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p \leq \frac{1}{\phi_1} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p \leq \frac{1}{\phi_1} \sum_{k=1}^{\infty} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty$$

elde edilir. Böylece

$$\sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty.$$

olur.

Bu gösterir ki $\ell_p(\Delta^m, F) \subset \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ dir. Şimdi $X \in \mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F)$ olduğunu farzedelim. Bu taktirde

$$\sup_{s \geq 1, \sigma \in \varphi_s} \frac{1}{\phi_s} \sum_{k \in \sigma} d(\Delta^m X_k, \bar{0})^p < \infty,$$

olur. Böylece her $k \in \sigma$ ve en az bir pozitif K sayısı için $[d(\Delta^m X_k, \bar{0})] < K \phi_1$ 'dir. Buna göre $x \in \ell_{\infty}(\Delta^m, F)$ dir.

Sonuç 3.3.8. Eğer $0 < p < q$ ise $\mathbf{m}(\phi, p, \Delta^m, F) \subset \mathbf{m}(\phi, q, \Delta^m, F)$ dir.

İspat.

$$\left(\sum_{k=1}^n [d(\Delta^m X_k, \bar{0})]^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{k=1}^n [d(\Delta^m X_k, \bar{0})]^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (0 < p < q).$$

eşitsizliğinden çıkar.



KAYNAKLAR

1. Maddox, I.J., 1988, "Elements of Functional Analysis", Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
2. Kreyszig, E., 1978, "Introductory Functional Analysis with Applications", John Wiley & Sons, New York.
3. Goes, G. and Goes, S., 1970, "Sequence of Variation and Sequence of Fourier Coefficients" 1, Math. Z., 118, 93-102.
4. Boos, J. and Cass, P., 2000, "Classical and Modern Methods in Summability", Oxford University Press, New York.
5. Jain, P.K., Ahuja, O.P. and Ahmad, K., 1995, "Functional Analysis", John Wiley & Sons, New York.
6. Diamond, P. and Kloeden, P., 1993, "Metric Spaces of Fuzzy Sets Theory and Applications", World Scientific, Singapore.
7. Choudhary, B. and Nanda, S., 1989, "Functional Analysis with Applications", John Wiley and Sons, New York.
8. Fast, H., 1951, "Sur la convergence statistique", Colloq. Math., 2, 241-244.
9. Schoenberg, I.J., 1959, "The integrability of certain functions and related to summability methods", Amer. Math. Monthly, 66, 361-375.
10. Šalát, T., 1980, "On statistically convergent sequences of real numbers", Math. Slovaca. 30 (2) , 139-150.
11. Fridy, J.A., 1985, "On the statistical convergence", Analysis, 5 , 301-313.
12. Connor, J.S., 1988, "The statistical and strong p -Cesáro convergence of sequences", Analysis, 8 , 47-63.
13. Mursaleen, M., 2000, " λ - Statistical convergence", Math. Slovaca., 50 (1) 111-115.

14. **Tripathy, B.C., 1997**, "Matrix transformations between some classes of sequences", J. Math. Anal. Appl., 206, 448-450.
15. **Savaş, E., 2000**, "Strongly almost convergence and almost λ - statistical convergence", Hokkaido Math. J., 29, 531-536.
16. **Fridy, J.A. and Orhan, C., 1993**, "Lacunary statistical convergence", Pacific J. Math. 160 (1), 43-51.
17. **Niven, I. and Zuckerman, H.S., 1960**, "An Introduction to the Theory of Numbers", John Wiley & Sons, New York.
18. **Freedman, A.R., Sember, J.J. and Raphael, M., 1978**, "Some Cesàro- type summability spaces", Proc. Lond. Math. Soc., (3) 37, 508-520.
19. **Sargent, W.L.C., 1960**, "Some sequence spaces related to ℓ^p spaces", J. London Math. Soc., 35, 161-171.
20. **Malkowsky, E. and Mursaleen, M., 1995**, "Matrix transformations between FK -spaces and the sequence spaces $m(\phi)$ and $n(\phi)$ ", J. Math. Anal. Appl. 196 (2) 659- 665.
21. **Tripathy, B.C. and Sen, M., 2002**, "On a new class of sequences related to the space ℓ^p ", Tamkang J. Math. 33(2), 167-171.
22. **Et, M., Altın, Y. and Altınok, H., 2003**, "The sequence space $m(f, \phi, q)$ on seminormed spaces", Thai J. Mathematics, 1 (2), 121-127 .
23. **Kızmaz, H., 1981**, "On certain sequence spaces", Canad. Math. Bull., 24, 169-176.
24. **Et, M. and Çolak, R., 1995** , "On some generalized difference sequence spaces", Soochow J. of Math., 21, 377- 386.
25. **Et, M. and Nuray, F., 2001** , " Δ^m - Statistical convergence", Indian J. Pure Appl. Math., 32(6) 961-969.
26. **Et, M., 2000**, "On some topological properties of generalized difference sequence spaces", Internat. J. Math. & Math. Sci., 24 (11), 785-791."
27. **Zadeh , L.A., 1965**, "Fuzzy sets, Inform and Control", 8 , 338-353.

28. Moore, R.E., 1979, "Methods and Applications of Interval Analysis", SIAM Philadelphia.
29. Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1983, "Differentials of fuzzy functions", J. Math. Anal. Appl. 91, 552-558.
30. Puri, M. L. and Ralescu, D.A., 1986, "Fuzzy random variables", J. Math. Anal. Appl. 114, 409-422.
31. Goetschel, Jr. R. and Voxman, W., 1981 , "A Pseudometric for fuzzy sets and certain related results", J. Math. Anal. Appl., 81, 507-523.
32. Matloka, M., 1986, "Sequences of fuzzy numbers", BUSEFAL., 28, 28-37.
33. Nanda, S., 1989, "On sequences of fuzzy numbers", Fuzzy Sets and Systems, 33 , 123-126.
34. Nuray, F. and Savas, E., 1995, "Statistical convergence of fuzzy numbers", Math. Slovaca, 45(3), 269-273.
35. Kwon, J.S., 2000, "On statistical and p -Cesáro convergence of fuzzy numbers", Korean J. Comput.& Appl. Math., 7(1), 195-203.
36. Nuray, F., 1998, "Lacunary statistical convergence of sequences of fuzzy numbers", Fuzzy Sets and Systems, 99, 353-355.
37. Kwon, J.S. and Sung, S.H., 2001, "On lacunary statistical and p -Cesáro summability of fuzzy numbers", J. Fuzzy Math. , 9 (3), 603-610.
38. Bilgin, T., 2003, " Δ - Statistical and strong Δ - Cesáro convergence of sequences of fuzzy numbers", Math. Commun., 8 (1), 95-100.
39. Bilgin, T., 2004, "Lacunary strongly Δ - convergent sequences of fuzzy numbers", Inform. Sci., 160 (1-4), 201-206.
40. Başarır, M. and Mursaleen, M., 2003, "Some sequence spaces of fuzzy numbers generated by infinite matrices", J. Fuzzy Math., 11 (3) 757-764.
41. Mursaleen, M. and Başarır, M., 2003, "On some new sequence spaces of fuzzy numbers", Indian J. Pure Appl. Math. , 34 (9), 1351-1357.

- 42. Malafosse, B., 2002, "Properties of some sets of sequences and application to the spaces of bounded difference sequences of order μ " Hokkaido Math. J., 31, 283-299.
- 43. Altay, B. and Başar, F.,2004, "On the fine spectrum of the difference operator Δ on c_0 and c ", Inform. Sci., 168, 217-224.



ÖZGEÇMİŞ

10.12.1974 tarihinde Elazığ'da doğdum. İlk ve Orta öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 1992 yılında Fırat Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümünü kazandım. 1996 yılında aynı bölümden mezun oldum. Aynı yıl Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisansa başladım. 1999 yılında aynı bölüme araştırma görevlisi olarak atanıp 2000 yılında da yüksek lisansımı tamamlayarak bu yıl içerisinde doktora programına başladım. Halen aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaktayım.

Yavuz ALTIN

