

# BİRLEŞİK POISSON SÜRECİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

## A STUDY ON COMPOUND POISSON PROCESS

GAMZE ÖZEL

Hacettepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliği'nin  
İSTATİSTİK Anabilim Dalı için öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıŐtır.

2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan

.....  
Doç. Dr. Fazıl ALIOĞLU

Üye (Danışman)

.....  
Prof. Dr. Ceyhan İNAL

Üye

.....  
Doç. Dr. Gül ERGÜN

ONAY

Bu tez ...../...../2005 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

...../...../2005



Prof. Dr. Ahmet R. ÖZDURAL  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

# BİRLEŞİK POISSON SÜRECİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Gamze Özel

## ÖZ

Bu çalışmanın amacı,  $\{N_t, t \geq 0\}$  homojen Poisson süreci olmak üzere,  $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$  biçiminde tanımlanan  $\{X_t, t \geq 0\}$  birleşik Poisson sürecinde  $Y_i, i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin kesikli olduğu, sonlu değerler aldığı durum için  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonunu ve önceden belirlenen bir değeri ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılım fonksiyonunu elde etmektir.

İkinci Bölüm'de homojen Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci, birleşik Poisson süreci tanıtılmış; ilk aşma zamanlarının dağılımlarına ilişkin çalışmalar verilmiştir.

Üçüncü Bölüm'de  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonunun ve ilk aşma zamanının dağılım fonksiyonunun nasıl elde edildiği açıklanmış; sayısal örnekler verilmiştir.

Dördüncü Bölüm'ünde çalışmanın sonuçları sunulmuş ve tartışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Poisson Süreçleri, Birleşik Poisson Süreci, İlk Aşma Zamanı.

**Danışman:** Prof. Dr. Ceyhan İnal, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Olasılık Teorisi ve Olasılık Süreçleri Anabilim Dalı.

# A STUDY ON COMPOUND POISSON PROCESS

Gamze Özel

## ABSTRACT

Let  $\{N_t, t \geq 0\}$  denote a homogeneous Poisson process and  $\{X_t, t \geq 0\}$  be a compound Poisson process, i.e.,  $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ .  $Y_i, i = 1, 2, \dots$ , are i.i.d., discrete, positive random variables with finite values. The aim of this study is to obtain probability function of the compound Poisson process consisting of discrete random variables with finite values and investigate distribution function of the first exit time of compound Poisson process.

In Second Chapter, homogeneous Poisson process, nonhomogeneous Poisson process, compound Poisson process are introduced and related studies about the first exit time are given.

In Third Chapter, the probability function of  $X_t$  and distribution function of the first exit time for compound Poisson process are explained and some examples are given.

In Fourth Chapter, the results of this study are presented and discussed.

**Keywords:** Poisson Processes, Compound Poisson Process, First Exit Time.

**Advisor:** Prof. Dr. Ceyhan Inal, Hacettepe University, Department of Statistics, Probability Theory and Stochastic Processes Division.

## TEŞEKKÜR

Bu alıőmanın her aőamasında değerli katkı ve eleőtirileri ile alıőmaya yön veren danışmanım Sayın Prof. Dr. Ceyhan İnal'a, alıőmanın gerçekleşmesi için gerekli ortamı hazırlayan H.Ü. İstatistik Bölümü Başkanı Sayın Prof. Dr. Süleyman Günay'a, kullanılan bilgisayar programının yazımında yardımlarını esirgemeyen Sayın Yrd. Do. Dr. İbrahim Zor'a, alıőma arkadaşlarıma ve her zaman yanımda olan aileme içtenlikle teşekkür ederim.



# İÇİNDEKİLER DİZİNİ

## Sayfa

ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. POISSON SÜREÇLERİ.....	2
2.1. Giriş.....	2
2.2. Homojen Poisson Süreci.....	2
2.2.1. $N_t$ 'nin olasılık fonksiyonu.....	4
2.2.2. Olaylar arasında geçen zamanın dağılımı.....	6
2.2.3. Rasgele seçim altında homojen Poisson süreci.....	7
2.3. Homojen Olmayan Poisson Süreci.....	10
2.4. Birleşik Poisson Süreci.....	12
2.4.1. Birleşik Poisson sürecinde $X_t$ 'nin dağılım fonksiyonu.....	14
2.4.2. Birleşik Poisson sürecinde yaratıcı fonksiyonlar.....	15
2.4.3. Birleşik Poisson sürecinde $X_t$ 'nin olasılık dağılımı.....	18
2.4.4. Birleşik Poisson sürecine ilişkin bazı örnekler.....	21
2.4.5. Birleşik Poisson sürecinin çeşitli alanlardaki uygulamaları.....	24
2.5. Homojen Poisson Süreci ve Birleşik Poisson Süreci İçin İlk Aşma Zamanlarının Dağılımları.....	25
2.5.1. Homojen Poisson süreci için ilk aşma zamanının dağılımı.....	25
2.5.2. Birleşik Poisson süreci için ilk aşma zamanının dağılımı.....	27
3. BİRLEŞİK POISSON SÜRECİNDE $X_t$ 'NİN VE İLK AŞMA ZAMANININ DAĞILIMI.....	30
3.1. Giriş.....	30
3.2. $X_t$ 'nin Olasılık Fonksiyonu.....	30
3.2.1. $m = 1$ için $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu.....	30
3.2.2. $m = 2$ için $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu.....	30
3.2.3. $m > 2$ için $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu.....	32
3.3. İlk Aşma Zamanının Olasılık Dağılımı.....	34
3.3.1. $m = 2$ için ilk aşma zamanının olasılık dağılımı.....	34
3.3.2. $m > 2$ için ilk aşma zamanının olasılık dağılımı.....	35
3.4. Örnekler.....	35
4. SONUÇ VE TARTIŞMA.....	40
KAYNAKLAR.....	41
EKLER DİZİNİ.....	43

## ÇİZELGELER DİZİNİ

### Sayfa

3.1. $m = 2$ , $Y_i \sim$ ikiterimli $(p, 2)$ , $t = 10$ ve $t = 50$ için $P(X_t = k)$ olasılıkları.....	37
3.2. $m = 5$ , $Y_i \sim$ ikiterimli $(p, 5)$ , $t = 10$ ve $t = 50$ için $P(X_t = k)$ olasılıkları.....	38
3.3. $m = 2$ , $Y_i \sim$ ikiterimli $(p, 2)$ için $P(T \leq t)$ olasılıkları .....	39
3.4. $m = 5$ , $Y_i \sim$ ikiterimli $(p, 5)$ için $P(T \leq t)$ olasılıkları .....	39



## 1. GİRİŞ

Poisson süreçleri, olasılıksal (stochastic) süreçlerde önemli bir yer tutar ve tıp, jeoloji, endüstri, finans, sigortacılık gibi birçok alanda uygulanır. Poisson süreçleri taşıdıkları özelliklere göre, homojen (homogeneous) Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci ve birleşik (compound) Poisson süreci adını alırlar.

$\{N_t, t \geq 0\}$  homojen ya da homojen olmayan Poisson süreci ve  $Y_i, i = 1, 2, \dots$ , ortaya çıkan her olaya bağlanan raslantı değişkenleri olmak üzere,  $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$  biçiminde tanımlanan  $\{X_t, t \geq 0\}$  sürecine birleşik Poisson süreci adı verilir.  $Y_i, i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenleri kesikli ise,  $X_t$  raslantı değişkeni kesiklidir; sürekli ise,  $X_t$  raslantı değişkeni de sürekli dir.  $X_t$  kesikli olduğunda olasılık fonksiyonunu, sürekli olduğunda olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmakta güçlüklerle karşılaşmaktadır. Bu nedenle  $X_t$ 'nin önceden belirlenen bir değeri ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılım fonksiyonunu da elde etmek güçleşmektedir.

Bu çalışmada,  $Y_i, i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin kesikli olduğu ve  $j = 0, 1, 2, \dots, m$  ( $m < \infty$ ) gibi sonlu değer aldığı durum için  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonunun ve ayrıca önceden belirlenen bir değeri ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılım fonksiyonunun elde edilmesi amaçlanmıştır.

Çalışmanın İkinci Bölümü'nde, homojen Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci, birleşik Poisson süreci tanıtılmış; sürece ilişkin raslantı değişkeninin önceden belirlenen bir değeri ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılım fonksiyonuna ilişkin çalışmalar açıklanmıştır.

Üçüncü Bölüm'de  $X_t$ 'nin kesikli olduğu durum için  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonunun ve  $T$ 'nin dağılım fonksiyonunun nasıl elde edildiği açıklanmış ve sayısal örnekler verilmiştir.

Dördüncü Bölüm'de, elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

## 2. POISSON SÜREÇLERİ

### 2.1. Giriş

Bu bölümde, homojen Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci, birleşik Poisson süreci ve sağladıkları bazı temel özellikler açıklanacak; homojen Poisson süreci ve birleşik Poisson sürecinin önceden belirlenen bir değeri ilk aşma zamanlarının dağılımlarına ilişkin çalışmalar tanıtılacaktır.

### 2.2. Homojen Poisson Süreci

Poisson süreçlerinin temeli olan homojen Poisson sürecinde olaylar, bazı aksiyomlar altında, bağımsız olarak ortaya çıkarlar ve birim zamanda ortaya çıkması beklenen olay sayısı zaman içinde değişmez.

$N_t$ ,  $(0, t]$  zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısını göstermek üzere  $\{N_t, t \geq 0\}$  Poisson süreci aşağıda verilen aksiyomları sağlar:

**Aksiyom 1:** Herhangi  $t$  uzunluğundaki bir zaman aralığında  $N_t$ 'deki her değişme bir birim büyüklüğündedir;

**Aksiyom 2:**  $t, s \geq 0$  için,  $N_{t+s} - N_t$ ,  $N_t$ 'den bağımsızdır;

**Aksiyom 3:**  $t, s \geq 0$  için,  $N_{t+s} - N_t$ 'nin dağılımı  $t$ 'den bağımsızdır,  $s$ 'ye bağlıdır;

**Aksiyom 4:**  $N_0 = 0$ 'dir.

Yukarıda verilen aksiyomları sağlayan homojen bir Poisson sürecinde aşağıda verilen özellikler gözlenir.

1)  $N_t$ , durum uzayı  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$  olan kesikli bir raslantı değişkenidir.  $t$  zamanına dek  $i$  tane olayın ortaya çıkması olasılığı,

$$P(N_t = i) = p_i(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots \text{ için} \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlanır.

2)  $p_i(t)$ ,  $t$ 'ye göre türevlenebilir.

3) Sürecin başlangıç koşulları  $p_0(0) = 1$  ve  $i = 1, 2, \dots$  için  $p_i(0) = 0$ 'dır.

4) Birbirini izleyen ve ortak noktaları olmayan iki zaman aralığının uzunlukları  $t$  ve  $s$  olsun.  $t + s$  uzunluğundaki zaman aralığında  $i$  tane olayın ortaya çıkması olasılığı,

$$p_i(t+s) = \sum_{k=0}^i p_k(t)p_{i-k}(s), \quad k \leq i \text{ için} \quad (2.2)$$

olur.

5) Çok küçük bir  $\Delta t$  için,  $(t, t + \Delta t]$  zaman aralığında bir olayın ortaya çıkması olasılığı yaklaşık olarak  $\Delta t$  ile orantılıdır:

$$p_1(\Delta t) \cong \lambda \Delta t,$$

$$p_1(\Delta t) = \lambda \Delta t + o(\Delta t). \quad (2.3)$$

$(t, t + \Delta t]$  zaman aralığında 0 (sıfır) olayın ortaya çıkması olasılığı,

$$p_0(\Delta t) \cong 1 - \lambda \Delta t,$$

$$p_0(\Delta t) = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (2.4)$$

ve en az iki olayın ortaya çıkması olasılığı,

$$P(N_{\Delta t} \geq 2) = o(\Delta t)$$

olur. Burada  $o(\Delta t)$  fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$o(\Delta t) + \dots + o(\Delta t) = o(\Delta t),$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{O(\Delta t)}{\Delta t} = 0.$$

(Haight, 1967; Inal, 1988)

### 2.2.1. $N_t$ 'nin olasılık fonksiyonu

Yukarıda verilen eşitliklerden yararlanarak  $N_t$ 'nin olasılık fonksiyonu bulunacaktır.

Bu amaçla  $(0, t]$  zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısı  $N_t$  olmak üzere Eşitlik

(2.3) ve Eşitlik (2.4)'ten yararlanarak öncelikle  $p_i(t + \Delta t)$  olasılığı hesaplanacaktır.

Bu olasılık,

$$\begin{aligned} p_i(t + \Delta t) &= P(N_{t+\Delta t} = i) \\ &= P(N_t = i)P(N_{t+\Delta t} - N_t = 0) + P(N_t = i - 1)P(N_{t+\Delta t} - N_t = 1) + \\ &\quad P(N_t = i - 2)P(N_{t+\Delta t} - N_t = 2) + \dots + P(N_t = 0)P(N_{t+\Delta t} - N_t = i) \\ &= P(N_t = i)p_0(\Delta t) + P(N_t = i - 1)p_1(\Delta t) + \sum_{k \geq 2} P(N_t = i - k)p_k(\Delta t) \\ &= P(N_t = i)[1 - \lambda\Delta t + O(\Delta t)] + P(N_t = i - 1)[\lambda\Delta t + O(\Delta t)] + O(\Delta t) \\ &= p_i(t)(1 - \lambda\Delta t) + p_{i-1}(t)(\lambda\Delta t) + O(\Delta t) \end{aligned}$$

biçiminde yazılıp tekrar düzenlenir ve  $\Delta t \rightarrow 0$  için limit alınırsa,

$$p_i'(t) = -\lambda p_i(t) + \lambda p_{i-1}(t) \quad (2.5)$$

diferansiyel denkleminde ulaşılır. Eşitlik (2.5)'ten  $i = 0$  için,

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) + \lambda p_{-1}(t) \\ &= -\lambda p_0(t) \end{aligned}$$

elde edilir ve bu diferansiyel denklemden,

$$p_0(t) = e^{-\lambda t}$$

bulunur.  $i = 1, 2, \dots$  için aynı yol izlenirse,

$$p_1(t) = e^{-\lambda t} \lambda t,$$

$$p_2(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^2}{2!},$$

$\vdots$

elde edilir ve genel olarak,

$$p_i(t) = P(N_t = i) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \text{ için} \quad (2.6)$$
$$= 0, \quad \text{ö.d. için}$$

yazılabilir. Yukarıda elde edilen fonksiyon, Poisson olasılık fonksiyonudur. Bu nedenle,  $\{N_t, t \geq 0\}$  olasılıksal sürecine homojen Poisson süreci ya da basit (ordinary) Poisson süreci adı verilir. Poisson dağılımından yararlanarak  $N_t$ 'nin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi bulunur:

$$E(N_t) = \lambda t, \quad V(N_t) = \lambda t.$$

Burada  $\lambda$ , birim zamanda ortaya çıkması beklenen olay sayısıdır ve ortalama oran adını alır.  $p_i(t)$  olasılığı,

$$p_i(t) = P(N_t = i) = p(i; \lambda t), \quad i = 0, 1, 2, \dots \text{ için} \quad (2.7)$$

biçiminde de gösterilir.

Aksiyom 2'ye göre,  $\{N_t, t \geq 0\}$  homojen Poisson süreci, durağan bağımsız artmalara sahiptir. Herhangi iki  $t_1$  ve  $t_2$  zamanı için  $N_{t_2} - N_{t_1}$ ,  $t_2 - t_1$  uzunluğundaki zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısıdır ve  $\lambda(t_2 - t_1)$  parametresi ile Poisson dağılımına sahiptir. Buna göre,

$$P(N_{t_2} - N_{t_1} = k) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ için}$$

$$= 0, \quad \text{ö.d. için}$$

olur; beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibidir:

$$E(N_{t_2} - N_{t_1}) = \lambda(t_2 - t_1), \quad V(N_{t_2} - N_{t_1}) = \lambda(t_2 - t_1).$$

(Inal, 1988; Grimmett, 2001)

### 2.2.2. Olaylar arasında geçen zamanın dağılımı

Homojen bir Poisson sürecinde birinci olay ortaya çıkıncaya dek geçen zaman  $T_1$ , birinci olaydan sonra ikinci olay ortaya çıkıncaya dek geçen zaman  $T_2$ , ... olsun.  $T_1, T_2, \dots$  bağımsız ve aynı dağılıma sahip sürekli raslantı değişkenleridir.

Aksiyom 2'ye göre, homojen bir Poisson sürecinde  $(s, s + t]$  zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısı,  $(0, s]$  zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısından bağımsızdır.  $n$ 'inci olay ortaya çıkıncaya dek geçen zaman  $S_n$ ,  $(n + 1)$ 'inci olay ortaya çıkıncaya dek geçen zaman  $S_{n+1}$  ve iki olay arasında geçen zaman  $T = S_{n+1} - S_n$  ile gösterilsin.  $T$ 'nin bir  $t$  değerinden büyük olması, bu zaman aralığında hiçbir olayın ortaya çıkmaması demektir:

$$P(T > t) = P(S_{n+1} - S_n > t) = P(N_{s+t} - N_s = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Buna göre,  $T$ 'nin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$F_T(t) = P(T \leq t)$$

$$= 1 - P(T > t)$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}.$$

$t$  sürekli olduğundan  $T$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \text{ için}$$

$$= 0, \quad t \leq 0 \text{ için}$$

elde edilir. Yukarıda elde edilen fonksiyon, üstel olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Buna göre, homojen Poisson süreci için iki olay arasında geçen zamanının beklenen değeri ve varyansı,

$$E(T) = \frac{1}{\lambda}, \quad V(T) = \frac{1}{\lambda^2}$$

olur.

$S_n = T_1 + T_2 + \dots + T_n$ , başlangıçtan itibaren n tane olay ortaya çıkıncaya dek geçen zamanı gösterebilir.  $S_n$  raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu, gama olasılık fonksiyonudur:

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, \quad t > 0 \text{ için}$$

$$= 0, \quad t \leq 0 \text{ için.}$$

$(0, t]$  zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısının herhangi bir n değerinden küçük olması olasılığı ile n tane olay ortaya çıkana dek geçen zamanın t'den büyük olması olasılığı birbirine eşittir:

$$P(N_t < n) = P(S_n > t). \quad (2.8)$$

(Cox and Miller, 1965; Inal, 1988; Papoulis and Pillai, 2002)

### 2.2.3. Rasgele seçim altında homojen Poisson süreci

Ortalama oranı  $\lambda$  olan  $\{N_t, t \geq 0\}$  homojen Poisson sürecinde ortaya çıkan olayların tümünün kayıt edilemediği varsayalım. Her ortaya çıkan olayın kayıt edilebilmesi olasılığı p olsun.  $M_t^1$ , t zamanına dek kayıt edilebilen olay sayısını ve  $M_t^0$ , t

t zamanına dek kayıt edilemeyen olay sayısını gösterebiliriz.  $M_t^0$  ve  $M_t^1$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_t^1 = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k, \quad (2.9)$$

$$M_t^0 = \sum_{k=1}^{N_t} (1 - Y_k) = N_t - M_t^1.$$

Burada bir olayın kayıt edilmesini sağlayan  $Y_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkeni  $P(Y_k = 1) = p$ ,  $P(Y_k = 0) = 1 - p$  ile Bernoulli dağılımına sahiptir.

t zamanına dek n tane olayın ortaya çıktığı bilindiğinde, kayıt edilen olay sayısı aşağıda verilen ikiterimli (binom) dağılıma sahip olur:

$$P(M_t^1 = k / N_t = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \text{ için}$$

$$= 0, \quad \text{ö.d. için.}$$

Yukarıda verilen koşullu olasılık fonksiyonu yardımı ile  $M_t^1$  ve  $N_t$ 'nin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$P(M_t^1 = k, N_t = n) = P(M_t^1 = k / N_t = n) P(N_t = n)$$

$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bileşik olasılık fonksiyonundan yararlanarak  $M_t^1$  raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$P(M_t^1 = k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda pt} \frac{(\lambda pt)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ için} \\
&= 0, \quad \text{ö.d. için.}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Görüldüğü gibi,  $M_t^1$ ,  $\lambda pt$  parametresi ile Poisson dağılımına sahip raslantı değişkenidir. Yine aynı yolla kayıt edilemeyen olayların sayısını veren  $M_t^0$  raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
P(M_t^0 = j) &= e^{-\lambda tq} \frac{(\lambda tq)^j}{j!}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \text{ için} \\
&= 0, \quad \text{ö.d. için}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.  $M_t^1$  ve  $M_t^0$ 'ın bileşik olasılık fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
P(M_t^1 = k, M_t^0 = j) &= P(M_t^1 = k, N_t = j + k) \\
&= P(M_t^1 = k / N_t = j + k) P(N_t = j + k) \\
&= \left[ \binom{j+k}{k} p^k (1-p)^j \right] \left[ e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!} \right] \\
&= e^{-\lambda tp} \frac{(\lambda tp)^k}{k!} e^{-\lambda tq} \frac{(\lambda tq)^j}{j!}, \quad j, k = 0, 1, 2, \dots \text{ için} \\
&= 0, \quad \text{ö.d. için}
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade,  $M_t^1$  ve  $M_t^0$  raslantı değişkenlerinin bağımsız olduklarını göstermektedir.  $\{M_t^1, t \geq 0\}$  sürekli zamanlı olasılıksal süreci  $\lambda p$  ortalama oranı ile,  $\{M_t^0, t \geq 0\}$  sürekli zamanlı olasılıksal süreci de  $\lambda(1-p)$  ortalama oranı ile bir Poisson sürecidir.

(Falmagne, 2002)

### 2.3. Homojen Olmayan Poisson Süreci

Homojen olmayan Poisson sürecinde ortalama oran zamanın sürekli bir fonksiyonudur.  $N_t$ ,  $(0, t]$  zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısını göstermek üzere,  $\{N_t, t \geq 0\}$  ile gösterilen homojen olmayan Poisson süreci aşağıdaki aksiyomları sağlar:

**Aksiyom 1:**  $N_0 = 0$  'dir;

**Aksiyom 2:** Ortalama oran,  $t$ 'nin diferansiyellenebilir bir fonksiyonudur ve  $\lambda(t)$  ile gösterilir;

**Aksiyom 3:**  $N_{t_2} - N_{t_1}$ ,  $N_{t_1}$  'den bağımsızdır.

$N_t$  'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$p_i(t) = P(N_t = i) = e^{-\Lambda_t} \frac{(\Lambda_t)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \text{ için}$$
$$= 0, \quad \text{ö.d. için.}$$

Burada  $\Lambda_t$ ,

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda(u) du$$

biçiminde tanımlanır.

Homojen olmayan Poisson süreci için beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibidir:

$$E(N_t) = \Lambda_t, \quad V(N_t) = \Lambda_t.$$

$N_{t_2} - N_{t_1}$  'in olasılık fonksiyonu,

$$P(N_{t_2} - N_{t_1} = i) = e^{-(\Lambda_{t_2} - \Lambda_{t_1})} \frac{(\Lambda_{t_2} - \Lambda_{t_1})^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \text{ için}$$

$$= 0, \quad \text{ö.d. için}$$

biçimindedir. Burada  $\Lambda_{t_2} - \Lambda_{t_1}$ ,

$$\Lambda_{t_2} - \Lambda_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt$$

olarak tanımlıdır.

Homojen olmayan Poisson sürecinde n tane olay ortaya çıkıncaya dek geçen süre olan  $S_n$  için Eşitlik (2.8)'den,

$$P(S_n \leq t) = 1 - P(S_n > t)$$

$$= 1 - P(N_t \leq n - 1)$$

yazılabilir. Buradan  $S_n$ 'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_{S_n}(t) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\Lambda_t} \frac{(\Lambda_t)^i}{i!}$$

$$= 1 - \left[ e^{-\Lambda_t} + e^{-\Lambda_t} \frac{(\Lambda_t)^1}{1!} + e^{-\Lambda_t} \frac{(\Lambda_t)^2}{2!} + \dots + e^{-\Lambda_t} \frac{(\Lambda_t)^{n-1}}{(n-1)!} \right]$$

bulunur. Yukarıdaki dağılım fonksiyonundan  $S_n$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{S_n}(t) = \Lambda_t^n e^{-\Lambda_t} \frac{(\Lambda_t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad t > 0 \text{ için}$$

$$= 0, \quad t \leq 0 \text{ için}$$

biçiminde elde edilir. Burada  $\Lambda'_t$ ,  $\Lambda_t$ 'nin  $t$ 'ye göre türevini göstermektedir.  $(n - 1)$ 'inci olaydan sonra  $n$ 'inci olay ortaya çıkıncaya dek geçen zamanın ( $T_n$ 'nin) olasılık fonksiyonu,  $n = 2, 3, 4, \dots$  için,

$$T_n = S_n - S_{n-1}$$

olduğu düşünülerek  $S_n$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonundan elde edilebilir.

(Synder and Miller, 1991; Ross, 2000)

#### 2.4. Birleşik Poisson Süreci

Birleşik Poisson sürecine ilişkin ilk çalışma Feller (1957) tarafından yapılmıştır.  $\{N_t, t \geq 0\}$ , homojen ya da homojen olmayan Poisson süreci olsun.  $t$  zaman doğrusu boyunca ortaya çıkan her olaya  $Y_1, Y_2, \dots$  ile gösterilen aynı dağılımlı, bağımsız raslantı değişkenleri bağlansın. Bu raslantı değişkenleri  $\{N_t, t \geq 0\}$  sürecinden de bağımsız olsunlar. Buna göre,

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \quad (2.11)$$

biçiminde tanımlanan  $\{X_t, t \geq 0\}$  sürecine birleşik Poisson süreci adı verilir.  $\{N_t, t \geq 0\}$  sürecinin homojen olmayan Poisson süreci olması durumunda  $\{X_t, t \geq 0\}$  sürecine birleşik Cox süreci (compound Cox process) ya da birleşik yenileme süreci (compound renewal process) adı verilir.

$\{N_t, t \geq 0\}$  süreci ile  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci birbirinden  $\{X_t, t \geq 0\}$  sürecinin artma büyüklüklerinin 1'e eşit olması yerine raslantı değişkeni olması ile ayrılırlar.  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenleri kesikli ise,  $X_t$  raslantı değişkeni kesikli; sürekli ise,  $X_t$  raslantı değişkeni de sürekli dir.

$Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenleri  $0, 1, \dots, m$  değerlerini alan kesikli raslantı değişkenleri ve  $Y_i$  raslantı değişkeninin  $j$  değerini alması olasılığı,

$$P(Y_i = j) = p_j, \quad \sum_{j=0}^m p_j = 1$$

ise, Eşitlik (2.11)'de verilen birleşik Poisson süreci aşağıdaki gibi de tanımlanabilir:

$$X_t = \sum_{j=1}^m X_j(t; \lambda_j). \quad (2.12)$$

Burada  $j = 1, 2, \dots, m$  için  $X_j(t; \lambda_j)$  bağımsız süreçlerdir ve  $X_0(t; \lambda_0) = 0N_t^{(0)} = 0$ 'dır.  $j = 1, 2, \dots, m$  için  $X_j(t; \lambda_j) = jN_t^{(j)}$  ve  $\{N_t^{(j)}, t > 0\}$  süreci  $\lambda_j = \lambda p_j$  ortalama oranı ile Poisson sürecidir. Eşitlik (2.12)'de verilen  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci,  $m$ 'inci dereceden birleşik Poisson süreci adını alır. Eşitlik (2.12)'nin yazılabileceği Kesim (2.4.2)'de  $X_t$ 'nin karakteristik fonksiyonu verildikten sonra gösterilecektir.

$\{X_t, t \geq 0\}$  sürecinin birleşik Poisson süreci olabilmesi için aşağıda verilen aksiyomların sağlanması gerekir:

**Aksiyom 1:**  $t, s \geq 0$  için,  $X_{t+s} - X_t$ ,  $X_t$ 'den bağımsızdır;

**Aksiyom 2:**  $t, s \geq 0$  için,  $X_{t+s} - X_t$ 'nin dağılımı yalnızca  $s$ 'ye bağlıdır,  $t$ 'ye bağlı değildir.

Bu çalışmada incelenen birleşik Poisson sürecinde,  $\{N_t, t \geq 0\}$ 'ın homojen Poisson süreci olduğu varsayılmıştır. Poisson sürecinde beklenen olay sayısı zamanın uzunluğu ile doğru orantılı olduğundan birleşik Poisson süreci durağan bağımsız artmalara sahip olur. Bu özelliği göstermek için, birbiri ile çakışmayan zaman aralıklarında, ortaya çıkan olayların birbirinden bağımsız olmalarından yararlanılır.

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$  verilsin.  $t_1$  zamanına dek  $N_{t_1}$  olay,  $t_2$  zamanına dek  $N_{t_2}$  olay, ...,  $t_n$  zamanına dek  $N_{t_n}$  olay ortaya çıksın. Bu olayların her birine karşılık gelen  $Y_i$  raslantı değişkenleri için tanımlanan,

$$\begin{aligned} (0, t_1] \text{ için} & : \{Y_1, \dots, Y_{N_{t_1}}, N_{t_1}\} \\ (t_1, t_2] \text{ için} & : \{Y_{N_{t_1}+1}, \dots, Y_{N_{t_2}}, N_{t_2} - N_{t_1}\} \\ & \vdots \\ (t_{n-1}, t_n] \text{ için} & : \{Y_{N_{t_{n-1}}+1}, \dots, Y_{N_{t_n}}, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}\} \end{aligned}$$

raslantı değişkenleri bağımsızdır.  $X_t$ 'deki,

$$\begin{aligned} X_{t_1} - X_0 &= Y_1 + \dots + Y_{N_{t_1}} \\ X_{t_2} - X_{t_1} &= Y_{N_{t_1}+1} + \dots + Y_{N_{t_2}} \\ & \vdots \\ X_{t_n} - X_{t_{n-1}} &= Y_{N_{t_{n-1}}+1} + \dots + Y_{N_{t_n}} \end{aligned}$$

artmalar zaman aralığının uzunluğu ile doğru orantılı olduklarından durağandırlar.

(Çınlar, 1975; Snyder and Miller, 1991; Reiss, 1993)

#### 2.4.1. Birleşik Poisson sürecinde $X_t$ 'nin dağılım fonksiyonu

$X_t$ 'nin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\begin{aligned} F_{X_t}(x) &= P(X_t \leq x) = P\left(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq x\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \leq x / N_t = n\right) \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} F^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Burada  $F^{(n)}(x) = P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n \leq x)$ 'dir.  $n = 0$  için  $F^{(n)}(x)$ ,

$$F^{(0)}(x) = 1, \quad x \geq 0 \text{ için}$$

$$= 0, \quad x < 0 \text{ için}$$

olur.

(Parzen,1962)

#### 2.4.2. Birleşik Poisson sürecinde yaratıcı fonksiyonlar

Birleşik Poisson süreci için karakteristik fonksiyon,

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(z) &= E(e^{izX_t}) = E\left(e^{iz \sum_{j=1}^{N_t} Y_j}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) E\left(e^{iz \sum_{j=1}^n Y_j} / N_t = n\right) \\ &= P(N_t = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(N_t = n) E\left(e^{iz \sum_{j=1}^n Y_j} / N_t = n\right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

olur. Aynı dağılımlı  $Y_1, Y_2, \dots$  raslantı değişkenlerinin ortak karakteristik fonksiyonu  $\varphi_Y(z)$  ise,

$$E\left[\exp\left(iz \sum_{j=1}^n Y_j\right) / N_t = n\right] = [\varphi_Y(z)]^n$$

biçiminde yazılabilir. Bu beklenen değer Eşitlik (2.13)'teki ifadede yerine yazılır ve düzenlenirse, birleşik Poisson süreci için elde edilen karakteristik fonksiyon aşağıdaki gibi olur:

$$\varphi_{X_t}(z) = e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} [\varphi_Y(z)]^n$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda t} \left[ 1 + \frac{\lambda t \phi_Y(z)}{1!} + \frac{[\lambda t \phi_Y(z)]^2}{2!} + \dots \right] \\
&= e^{\lambda t [\phi_Y(z) - 1]}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

$\{X_t, t \geq 0\}$  birleşik Poisson süreci için elde edilen karakteristik fonksiyon kullanılarak beklenen değer ve varyans,

$$E(X_t) = \mu \lambda t, \quad V(X_t) = (\sigma^2 + \mu^2) \lambda t$$

olarak bulunur. Burada  $\mu$  ve  $\sigma^2$ ,  $Y_1, Y_2, \dots$  raslantı değişkenlerinin ortak beklenen değer ve varyansıdır.

$Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , kesikli raslantı değişkenleri ve ortak olasılık yaratıcı fonksiyon  $g_Y(s)$  ise,  $X_t$ 'nin olasılık yaratıcı fonksiyonu da

$$g_{X_t}(s) = e^{\lambda t [g_Y(s) - 1]} \tag{2.15}$$

biçiminde elde edilir.

$Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenleri kesikli ve  $j = 0, 1, \dots, m$  gibi sonlu değerler alıyorsa ortak olasılık yaratıcı fonksiyon,

$$\begin{aligned}
g_Y(s) &= \sum_{j=0}^m p_j s^j \\
&= p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + \dots + p_m s^m
\end{aligned}$$

biçimindedir. Buna göre,  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci için olasılık yaratıcı fonksiyon  $j = 0, 1, \dots, m$  için  $\lambda_j = \lambda p_j$  olmak üzere Eşitlik (2.15)'ten aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
g_{X_t}(s) &= e^{\lambda t[(p_0 + p_1 s + \dots + p_m s^m) - 1]} \\
&= e^{\lambda t p_0 + \lambda t p_1 s + \dots + \lambda t p_m s^m} e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t(1-p_0)} e^{\lambda_1 t s + \lambda_2 t s^2 + \dots + \lambda_m t s^m} .
\end{aligned} \tag{2.16}$$

(Parzen, 1962; Gallot, 1993)

Eşitlik (2.12)'nin yazılabileceğini Eşitlik (2.14)'te verilen karakteristik fonksiyondan yararlanarak gösterebiliriz. Çünkü, Eşitlik (2.12)'ye göre  $X_t$ 'nin karakteristik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_t}(z) &= E(e^{izX_t}) = E\left(e^{iz \sum_{j=1}^m X_j(t; \lambda_j)}\right) \\
&= E\left(e^{iz(1N_t^{(1)} + 2N_t^{(2)} + \dots + mN_t^{(m)})}\right) \\
&= E\left(e^{iz1N_t^{(1)}}\right) E\left(e^{iz2N_t^{(2)}}\right) \dots E\left(e^{izmN_t^{(m)}}\right) \\
&= e^{\lambda p_1 t (e^{iz} - 1)} e^{\lambda p_2 t (e^{2iz} - 1)} \dots e^{\lambda p_m t (e^{imz} - 1)} \\
&= e^{\lambda p_1 t e^{iz} + \lambda p_2 t e^{2iz} + \dots + \lambda p_m t e^{imz} - (\lambda p_1 t + \lambda p_2 t + \dots + \lambda p_m t)} \\
&= e^{\lambda p_1 t e^{iz} + \lambda p_2 t e^{2iz} + \dots + \lambda p_m t e^{imz} - \lambda t(1-p_0)} \\
&= e^{\lambda t(p_0 + p_1 e^{iz} + p_2 e^{2iz} + \dots + p_m e^{imz}) - \lambda t}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada  $p_0 + p_1 + \dots + p_m = 1$  olduğu ve  $X_j(t; \lambda_j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , süreçlerinin bağımsız oldukları dikkate alınmıştır.  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin ortak karakteristik fonksiyonu,

$$\varphi_Y(z) = p_0 + p_1 e^{iz} + p_2 e^{i2z} + \dots + p_m e^{imz}$$

olduğundan  $\varphi_{X_t}(z)$ ,

$$\varphi_{X_t}(z) = e^{\lambda t[\varphi_Y(z) - 1]}$$

biçiminde de yazılabilir. Bu karakteristik fonksiyon,  $X_t$  için Eşitlik (2.14)'te verilen karakteristik fonksiyona eşittir. Buna göre, Eşitlik (2.12) yazılabilir.

### 2.4.3. Birleşik Poisson sürecinde $X_t$ 'nin olasılık dağılımı

$Y_i, i = 1, 2, \dots$  raslantı değişkenleri kesikli ise,  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu,

$$p_{X_t}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = k / N_t = n) P(N_t = n), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.17)$$
$$= 0, \quad \text{ö.d. için}$$

olur. Eşitlik (2.17)'den  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonunun fonksiyonel biçimine ulaşmak çoğu kez güçtür.

$Y_1, Y_2, \dots$  raslantı değişkenlerinin ortak dağılımı  $\mu$  parametresi ile Poisson dağılımı olsun. Buna göre,  $\{X_t, t \geq 0\}$  sürecinin karakteristik fonksiyonu ve olasılık yaratıcı fonksiyonu,

$$\varphi_{X_t}(z) = \exp[\lambda t (\exp(\mu(e^{iz} - 1)) - 1)],$$
$$g_{X_t}(s) = \exp[\lambda t (\exp(\mu(s - 1)) - 1)] \quad (2.18)$$

elde edilir. Buradan beklenen değer ve varyans,

$$E(X_t) = \mu \lambda t, \quad V(X_t) = \mu \lambda t (\mu + 1)$$

bulunur.  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ ,  $n\mu$  parametresi ile Poisson dağılımına sahip olduğundan,  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu Eşitlik (2.17)'den,

$$p_{X_t}(k) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\mu} \frac{(n\mu)^k}{k!} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.19)$$
$$= 0, \quad \text{ö.d. için}$$

yazılabilir.

$Y_1, Y_2$  raslantı değişkenlerinin ortak dağılımını  $m$  ve  $p$  parametreleri ile ikiterimli dağılım ise,  $\{X_t, t \geq 0\}$  sürecinin karakteristik fonksiyonu ve olasılık yaratıcı fonksiyonu aşağıdaki gibi olur:

$$\begin{aligned} \varphi_{X_t}(z) &= \exp[\lambda t((1-p) + pe^{iz})^m - \lambda t], \\ g_{X_t}(s) &= \exp[\lambda t((1-p) + ps)^m - \lambda t]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Bu fonksiyonlar yardımıyla  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci için beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X_t) = mp\lambda t, \quad V(X_t) = (m\lambda tp) + m\lambda tp^2(m-1).$$

$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ ,  $nm$  ve  $p$  parametreleri ile ikiterimli dağılımına sahip olduğundan,  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu Eşitlik (2.17)'den,

$$\begin{aligned} p_{X_t}(k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{nm}{k} p^k (1-p)^{nm-k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \\ &= 0, \quad \text{ö.d. için} \end{aligned} \quad (2.21)$$

biçiminde yazılabilir.

Eşitlik (2.18), (2.19) ve Eşitlik (2.20), (2.21)'den  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonunun fonksiyonel biçimine ulaşılamamaktadır.

$Y_1, Y_2, \dots$  raslantı değişkenlerinin ortak dağılımını aşağıda verilen  $p$  parametrelili kesikli logaritmik dağılım olsun:

$$\begin{aligned} p(y) &= \frac{q^y}{y \ln(1/p)}, \quad y = 1, 2, \dots \text{ için} \\ &= 0, \quad \text{ö.d. için.} \end{aligned}$$

Burada,  $0 < p < 1$  ve  $p + q = 1$ 'dir. Kesikli logaritmik dağılım için karakteristik fonksiyon,

$$\varphi_y(z) = \frac{\ln(1 - qiz)}{\ln(p)}$$

biçimindedir.  $\{X_t, t \geq 0\}$  sürecinin karakteristik fonksiyonu,  $r = \frac{(\lambda t)}{\ln(1/p)}$  olmak üzere,

$$\varphi_{X_t}(z) = \left( \frac{p}{1 - qiz} \right)^r$$

elde edilir. Bu karakteristik fonksiyon kullanılarak birleşik Poisson süreci için olasılık fonksiyonunun  $r > 0$  ve  $0 < p < 1$  parametreleri ile ekşi ikiterimli dağılım olduğu görülür:

$$p_{X_t}(k) = \binom{r+k-1}{k} p^r q^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \text{ için}$$

$$= 0, \quad \text{ö.d. için.}$$

Buradan beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(X_t) = r \frac{q}{p}, \quad V(X_t) = r \frac{q}{p^2}.$$

(Girault, 1966; Thomasiam, 1969; Wang and Lu, 1990)

$Y_i, i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenleri sürekli ise  $X_t$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_{X_t}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}(x/N_t = n) P(N_t = n), \quad x \geq 0 \text{ için} \quad (2.22)$$

$$= 0, \quad x < 0 \text{ için}$$

olur.

$Y_1, Y_2, \dots$  raslantı değişkenlerinin ortak dağılımı parametresi  $\alpha$  olan üstel dağılım ise olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(y) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{y}{\alpha}}, \quad y > 0 \text{ için}$$
$$= 0, \quad y \leq 0 \text{ için}$$

ve karakteristik fonksiyonu,

$$\varphi_y(z) = (1 - \alpha iz)^{-1}$$

biçimindedir.  $\{X_t, t \geq 0\}$  sürecinin karakteristik fonksiyonu ise aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_{X_t}(z) = \exp[\lambda t((1 - \alpha iz)^{-1} - 1)]. \quad (2.23)$$

$Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ , gama dağılımına sahip olduğundan,  $X_t$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (2.22)'den,

$$f_{X_t}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad x \geq 0 \text{ için} \quad (2.24)$$
$$= 0, \quad x < 0 \text{ için}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (2.23) ve (2.24)'ten  $X_t$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun fonksiyonel biçimine ulaşılamamaktadır.

#### 2.4.4. Birleşik Poisson sürecine ilişkin bazı örnekler

**Örnek (2-1):**  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  zamanlarında bir mağazaya gelen alıcıların mağazaya gelişleri,  $\lambda$  ortalama oranı ile Poisson sürecine uysun. Mağaza sahibi, belirli bir süre sonra gelen alıcıların yaptığı alışveriş sonucunda elde edilen kazançla ilgilenir. Burada i'inci alıcının harcadığı para miktarı öteki alıcıların mağazaya gelişlerinden ve harcadıkları para miktarından bağımsızdır.  $X_t$ , t zamanına dek mağazanın elde

ettiği toplam kazancı göstermek üzere,  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci birleşik Poisson sürecidir. (Çınlar, 1975)

**Örnek (2-2):** Bir sigorta şirketinde poliçe sahiplerinin,  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  zamanlarında öldükleri varsayalım ve ölümler  $\lambda$  ortalama oranı ile Poisson sürecine uysun.  $i = 1, 2, \dots$  için  $t_i$  zamanında ölen kişi için sigorta şirketi poliçe sahibinin yakınlarına poliçe değeri olan  $Y_i$  miktarını ödemek zorundadır. Bu nedenle sigorta şirketleri talepleri karşılamak için,  $(0, t]$  zaman aralığında ödemek zorunda olacağı talep miktarlarının toplamını gösteren  $X_t$ 'nin bilinmesi ile ilgilendir.  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci birleşik Poisson sürecidir.

(Pitman, 1993)

**Örnek (2-3):** Bir nehir yatağındaki taşların sürüklenmesi olayında, bir taşın nehir yatağında  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  zamanlarında yer değiştirmesi  $\lambda$  ortalama oranı ile Poisson sürecine uysun. Taşın  $t_i$  zamanındaki yerinin,  $t_{i-1}$  zamanındaki yerine uzaklığı  $Y_i$  raslantı değişkeni ile gösterilsin.  $X_t$ ,  $t$  zamanına dek sürüklenmiş olan taşın toplam uzaklığını veren raslantı değişkenidir.  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci birleşik Poisson sürecidir.

(Parzen, 1962)

**Örnek (2-4):** Kişilerin bir gün boyunca bir ATM makinasından para çekmeleri  $\lambda$  ortalama oranı ile  $\{N_t, t \geq 0\}$  Poisson sürecine uysun. Kişilerin çektikleri para miktarı birbirinden bağımsızdır.  $i = 1, 2, \dots$  için  $i$ 'inci kişinin çektiği para miktarı  $Y_i$  ile gösterilsin.  $X_t$ ,  $t$  zamanına dek bu ATM'den çekilen toplam para miktarını gösterebilir.  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci birleşik Poisson sürecidir.

(Grimmett, 2001)

**Örnek (2-6):** Bir sistemde  $0 < t_1 < t_2 < \dots$  zamanlarında ortaya çıkan sarsıntılar,  $\lambda$  ortalama oranı ile Poisson sürecine uysun.  $i = 1, 2, \dots$  için  $i$ 'inci sarsıntının neden olduğu zararın büyüklüğü  $Y_i$  ile gösterilsin.  $X_t$ , sistemde  $t$  zamanına dek ortaya

çıkan toplam hasar miktarını gösterebilir.  $\{X_t, t \geq 0\}$  süreci birleşik Poisson sürecidir. Bu toplam hasar miktarının  $a$  gibi bir değere eşit ya da küçük olması durumunda sistem devam etsin, aksi durumda sistem dursun ve  $T$ , sistem başarısız oluncaya dek geçen zaman olsun.  $(T > t)$  olması olasılığı  $(X_t \leq a)$  olması olasılığına eşittir. Kesim (2.4.1)'e göre,

$$P(X_t \leq a) = P(T > t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} F^{(n)}(a)$$

yazılabilir. Sistem başarısız oluncaya dek geçmesi beklenen zaman ise aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^{\infty} P(T > t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} dt \right) F^{(n)}(a) \\ &= \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(a). \end{aligned}$$

Özel olarak,  $Y_1, Y_2, \dots$  üstel dağılıma sahip raslantı değişkenleri ise  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$  toplamı gama dağılımına sahiptir. Buna göre,

$$F^{(n)}(x) = 1 - \sum_{n=0}^{i-1} \frac{(\mu x)^n e^{-\mu x}}{n!},$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(\mu a)^i e^{-\mu a}}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^i \frac{(\mu a)^i e^{-\mu a}}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (1+i) \frac{(\mu a)^i e^{-\mu a}}{i!} \\ &= 1 + \mu a \end{aligned}$$

olur ve

$$E(T) = \frac{1 + \mu a}{\lambda}$$

bulunur.

(Karlin and Taylor, 1974, 1984)

#### 2.4.5. Birleşik Poisson sürecinin çeşitli alanlardaki uygulamaları

Birleşik Poisson süreci jeoloji, genetik, muhasebe, finans, sigortacılık gibi pek çok uygulama alanında kullanılmaktadır. Bu alanlarda nasıl kullanıldığını açıklayabilmek için birkaç örnek verilebilir.

Deprem serisi olasılıksal bir süreç olması nedeniyle depremle ilgili araştırmalarda çeşitli hesaplamalar yapabilmek için birleşik Poisson süreci kullanılmaktadır. Depremlerin incelenmesinde kullanılan parametrelerden biri büyüklüktür. Depremin büyüklüğünü hesaplamak için en uygun yol elastik dalgaların enerjilerini ölçmektir. Ölçülen enerjilerin dönüşümleri ise aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E_i^{tr} = \frac{(E_i - E_{min})}{(E_{max} - E_{min})}, \quad 0 < E_i^{tr} < 1.$$

Burada  $E_i$ ,  $i$ 'inci olayda ortaya çıkan enerji miktarını;  $E_{max}$ , gözlenen en büyük enerji miktarını;  $E_{min}$ , gözlenen en küçük enerji miktarını göstermektedir. Birleşik Poisson süreci, Gospodinov ve Rotondi (2001) tarafından Balkanlardaki ana sarsıntılardan sonra açığa çıkan enerji toplamını modellemek için kullanılmış ve bu çalışmada serbest kalan enerji toplamı,

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} E_i^{tr} = \sum_{i=1}^{N_t} \frac{(E_i - E_{min})}{(E_{max} - E_{min})}, \quad t \geq 0$$

olarak tanımlanmıştır. Burada  $E_i^{tr}$  raslantı değişkenlerinin dağılımı  $N_t$ 'den bağımsızdır.

2002 yılında Katz, Amerika'nın Kuzey Atlantik Bölgesi'nde ortaya çıkan kasırgaların neden olduğu toplam ekonomik zararı incelemiştir. Zararla sonuçlanan kasırgaları modelleyebilmek için olasılıksal model olarak,  $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$  biçiminde tanımladığı birleşik Poisson sürecini kullanmıştır. Burada  $(0, t]$  zaman aralığında kasırgaların ortaya çıkışı  $\lambda$  ortalama oranı ile Poisson sürecine uymaktadır ve  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , i'inci kasırga ilgili parasal zararı göstermektedir.

Birleşik Poisson süreci radyobiyojik olayları tanımlamak için de kullanılabilir. Aminoasitten yapılmış birbirini tamamlayıcı iki iplikten oluşan bir DNA molekülünde tek ipliğin zarar görmesi durumunda ikinci iplik tümler bilgiyi taşıdığı için DNA kendini tamir edebilir. İyonlaşan radyasyon iki iplikte aynı anda doku bozukluğu oluşturursa, DNA tamamen kopar ve kendini onaramaz. Bu duruma çift iplik hasarı ya da DSB (Double Strand Breaks) denir. DSB, radyasyon ile kromozomlarda oluşan en önemli doku bozukluğudur. DSB'ler arasındaki etkileşim hücre ölümlerine, mutasyona, kötü ur yapan genlere neden olmaktadır. Nowak ve arkadaşları 2002 yılında yaptıkları çalışmada birleşik Poisson sürecinden yararlanarak kümelenmiş DSB modelini incelemişlerdir.

## **2.5. Homojen Poisson Süreci ve Birleşik Poisson Süreci İçin İlk Aşma Zamanlarının Dağılımları**

Bir  $\{N_t, t \geq 0\}$  olasılıksal sürecinde  $N_t$ 'nin belirlenen bir değeri (sınırı) aşmaya dek geçen en küçük zamana ilk aşma zamanı (first exit time) adı verilir. Bu kesimde homojen Poisson süreci ve birleşik Poisson süreci için ilk aşma zamanlarının dağılımları incelenecektir.

### **2.5.1. Homojen Poisson süreci için ilk aşma zamanının dağılımı**

Dvoretzky, Kiefer ve Wolfowitz (1953) homojen bir Poisson süreci için ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılımını incelemiş, diferansiyel bir fark denklemini çözerek  $T$ 'nin moment çıkarıcı fonksiyonunu elde etmişlerdir. Ancak  $T$ 'nin moment çıkarıcı fonksiyonu  $T$ 'nin dağılımı hakkında yeterli bilgi sağlamamıştır.

Zacks 1991 ve 1997'de yaptığı çalışmalarda, homojen Poisson süreci için ilk aşma zamanlarının dağılımlarını incelemiştir. Zacks'ın elde ettiği sonuçlar Gallot (1993), Stadje (1993) ve özellikle Picard ve Lefevre (1996) tarafından geliştirilmiştir. Bu kesimde bu çalışmalardan yararlanarak  $T$ 'nin dağılımına nasıl ulaşılabileceği açıklanacaktır.

$\{N_t, t \geq 0\}$  süreci,  $\lambda$  ortalama oranı ile homojen bir Poisson süreci olsun ve  $i = 0, 1, 2, \dots$  için olasılık fonksiyonu  $p(i; \lambda t)$ , dağılım fonksiyonu  $F(i; \lambda t)$  ile gösterilsin.  $a$  pozitif tamsayı olmak üzere  $N_t$ 'nin aşması için belirlenen değer,

$$B(t) = a + t \quad (2.25)$$

biçiminde tanımlanabilir.

$\{N_t, t \geq 0\}$  sürecinde  $N_t$ 'nin aşması için belirlenen değer  $a$  bir değişmez olmak üzere,

$$B = a$$

olsun. Buna göre, ilk aşma zamanı aşağıda verildiği gibi tanımlanır:

$$T = \inf\{t : N_t \geq a\}.$$

Buradan  $T$ 'nin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = P(N_t \geq a) \\ &= 1 - P(N_t \leq a - 1) \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{a-1} p(i; \lambda t), \quad t \geq 0 \quad \text{için} \\ &= 0, \quad t < 0 \quad \text{için} \end{aligned}$$

eşitliğinden elde edilir.

$N_t$ 'nin  $B(t) = a + t$  değerini ilk kez aşma zamanını gösteren sürekli  $T$  raslantı değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T = \inf\{t : N_t \geq a + t\}.$$

$\lambda \leq 1$  ise birim zamanda en çok bir olay ortaya çıkması beklendiğinden  $N_t$  istenen değeri aşamayabilir.  $\lambda > 1$  ise, birim zamanda birden çok olayın ortaya çıkması beklendiğinden  $N_t$  istenen değeri aşar ve ilk aşma zamanının sonlu olması olasılığı  $P(T < \infty) = 1$  olur.  $(0, 1)$  zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısı olan  $N_1$ ,  $a + 1$ 'den büyükse  $T = 1$  olur;  $(0, 2)$  zaman aralığında  $N_1 < a + 1$  ve  $N_2 \geq a + 2$  ise  $T = 2$  olur; ... Buna göre,  $T > t$  olması için  $(a + t)$ 'inci olayın  $t$ 'den önce ortaya çıkmaması gerekir.

Zacks'ın 1991 ve 1997 yıllarında yaptığı çalışmalar sonunda,  $T$ 'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) \\ = 1 - \sum_{i=0}^{a+t} \left[ p(i; \lambda t) - \left[ \sum_{j=1}^{i-a} p(a+j; \lambda j) h(i-a-j; t-j) \right] \right]$$

biçiminde elde edilmiştir.

Burada,  $0 < u \leq t$  olmak üzere  $h(i; t)$ ,

$$h(i; t) = P(N_u < u, N_t = i)$$

biçimindedir.

### 2.5.2. Birleşik Poisson süreci için ilk aşma zamanının dağılımı

Birleşik Poisson süreci için elde edilen ilk aşma zamanının dağılımı güvenilirlik kuramı, ardışık çözümleme, kuyruk kuramı, risk analizi, hidrojeoloji vb. alanlarda uygulanabilir. Risk analizinde ilk aşma zamanının dağılımı, birikimli toplam hasarın

bir sigorta şirketinin anaparasını aştığı ilk zamanın dağılımıdır. Hidrojelojide ilk aşma zamanının dağılımı, bir barajda biriken su miktarının belirlenen seviyeye ulaştığı ilk zamanın dağılımıdır.

Birleşik Poisson sürecinde ilk aşma zamanlarının dağılımlarının hesaplanması için kesin bir algoritma literatürde mevcut değildir.  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin sürekli olması durumunda ilk aşma zamanının yaklaşık dağılımları ilk kez Zacks ve arkadaşları (1999) tarafından elde edilmiştir. Bu yaklaşım Zacks (1991) tarafından kullanılan yöntemin bir genellemesidir.

Zacks ve arkadaşları 1999 yılında yaptıkları çalışmada,  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin sürekli olduğu birleşik Poisson sürecinde  $X_t$ 'nin aşması için belirlenen değer,

$$B(t) = a + t \quad (2.26)$$

biçiminde alınmış ve ilk aşma zamanı,

$$T = \inf\{t : X_t \geq a + t\}$$

olarak tanımlanmıştır. Buna göre,  $T$ 'nin dağılım fonksiyonu,

$$F_T(t) = 1 - P(T \leq t) = F_{X_t}(a + t) - \int_a^{a+t} f_{X_{y-a}}(y)P(T > t - y + a)dy$$

biçiminde elde edilmiştir; ancak fonksiyonel biçimine ulaşamamıştır. Zacks ve arkadaşları, 2002 yılında yaptıkları çalışmada, 1999'da yapılan çalışmadan elde edilen sonuçlardan yararlanarak bazı olasılık değerleri hesaplamışlardır.

Kesim 2.4.1.'de belirtildiği gibi, birleşik Poisson sürecinde  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenleri kesikli ise,  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonuna; sürekli ise,  $X_t$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonuna ulaşmak çoğu kez güçtür. Ayrıca  $X_t$ 'nin belirlenen bir değeri ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılımına ilişkin bugüne dek yapılan çalışmalarda  $Y_i$ ,

$i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin süreklı olduğu durum ele alınmıştır. Üçüncü Bölüm'de Eşitlik (2.11)'de tanımlanan  $\{X_i, t \geq 0\}$  birleşik Poisson sürecinde,  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin dağılımları ne olursa olsun kesikli oldukları ve  $j = 0, 1, \dots, m$ , ( $m < \infty$ ) değerlerini aldığı durum için  $X_i$ 'nin olasılık fonksiyonunun ve ayrıca  $X_i$ 'nin bir  $a$  değerini ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılım fonksiyonunun nasıl elde edildikleri açıklanacaktır.



### 3. BİRLEŞİK POISSON SÜRECİNDE $X_t$ 'NİN VE İLK AŞMA ZAMANININ DAĞILIMI

#### 3.1. Giriş

Bu bölümde, Eşitlik (2.11)'de tanımlanan birleşik Poisson sürecinde  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin kesikli ve  $j = 0, 1, \dots, m$ , ( $m < \infty$ ) biçiminde sonlu değer alması durumunda  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonunun,  $a$ 'yı ilk kez aşma zamanını gösteren  $T$ 'nin dağılım fonksiyonunun nasıl elde edildikleri açıklanacak; örnekler verilecektir.

#### 3.2. $X_t$ 'nin Olasılık Fonksiyonu

##### 3.2.1. $m = 1$ için $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu

$m = 1$  olduğunda  $y = 0, 1$  ve  $i = 1, 2, \dots$  için  $P(Y_i = 1) = p_1 = 1 - p_0$ ,  $P(Y_i = 0) = p_0$  olur. Bu durumda  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu, Eşitlik (2.9)'da tanımlanan  $M_t^1$ 'in Eşitlik (2.10)'da verilen olasılık fonksiyonuna eşit olur.

##### 3.2.2. $m = 2$ için $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu

Eşitlik (2.12)'de  $m = 2$  olarak alınırsa  $X_t$ 'nin olasılık yaratıcı fonksiyonu Eşitlik (2.16)'dan,

$$g_{X_t}(s) = e^{-\lambda t(1-p_0)} e^{\lambda_1 t s + \lambda_2 t s^2}$$

biçiminde yazılabilir. Bu olasılık yaratıcı fonksiyonun  $s$ 'ye göre türevleri alınıp

$$P(X_t = 0) = g_{X_t}(0),$$

$$P(X_t = k) = \frac{\frac{\partial^k}{\partial s^k} g_{X_t}(s) \Big|_{s=0}}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

eşitliklerinde yerine konularak  $X_t$ 'nin  $0, 1, 2, \dots$  değerlerini alması olasılıkları, bazı düzenlemelerden sonra,

$$P(X_t = 0) = e^{-\lambda t(1-p_0)},$$

$$P(X_t = 1) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \frac{(\lambda_1 t)^1}{1!},$$

$$P(X_t = 2) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_2 t)^1}{1!} \right],$$

$$P(X_t = 3) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^3}{3!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_2 t)^1}{1! 1!} \right],$$

$$P(X_t = 4) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^4}{4!} + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_2 t)^1}{2! 1!} + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} \right],$$

$$P(X_t = 5) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^5}{5!} + \frac{(\lambda_1 t)^3 (\lambda_2 t)^1}{3! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_2 t)^2}{1! 2!} \right],$$

$$P(X_t = 6) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^6}{6!} + \frac{(\lambda_1 t)^4 (\lambda_2 t)^1}{4! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_2 t)^2}{2! 2!} + \frac{(\lambda_2 t)^3}{3!} \right],$$

⋮

biçiminde elde edilmiştir. Buradan genelleme yapılarak  $m = 2$  için  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$p_{X_t}(k) = e^{-\lambda t(1-p_0)},$$

$k = 0$  için

$$= e^{-\lambda t(1-p_0)} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(\lambda_1 t)^{k-2i} (\lambda_2 t)^i}{(k-2i)! i!}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \text{ için} \quad (3.2)$$

$$= 0,$$

ö.d. için.

### 3.2.3. $m > 2$ için $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu

Eşitlik (2.16)'da verilen olasılık yaratıcı fonksiyonunun  $s$ 'ye göre türevleri alınıp, Eşitlik (3.1)'de yerine konularak  $m > 2$  için  $X_t$  'nin 0,1,2,... değerlerini alması olasılıkları, bazı düzenlemelerden sonra,

$$P(X_t = 0) = e^{-\lambda t(1-p_0)},$$

$$P(X_t = 1) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \frac{(\lambda_1 t)^1}{1!},$$

$$P(X_t = 2) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_2 t)^1}{1!} \right],$$

$$P(X_t = 3) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^3}{3!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_2 t)^1}{1! 1!} + \frac{(\lambda_3 t)^1}{1!} \right],$$

$$P(X_t = 4) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^4}{4!} + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_2 t)^1}{2! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_3 t)^1}{1! 1!} + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_4 t)^1}{1!} \right],$$

$$P(X_t = 5) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^5}{5!} + \frac{(\lambda_1 t)^3 (\lambda_2 t)^1}{3! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_3 t)}{2! 1!} + \frac{(\lambda_1 t) (\lambda_2 t)^2}{2! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_4 t)^1}{1! 1!} \right. \\ \left. + \frac{(\lambda_2 t)^1 (\lambda_3 t)^1}{1! 1!} + \frac{(\lambda_5 t)^1}{1!} \right],$$

$$P(X_t = 6) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \frac{(\lambda_1 t)^6}{6!} + \frac{(\lambda_1 t)^4 (\lambda_2 t)^1}{4! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^3 (\lambda_3 t)}{3! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_2 t)^2}{2! 2!} + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_4 t)^1}{2! 1!} \right. \\ \left. + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_2 t)^1 (\lambda_3 t)^1}{1! 1! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_5 t)^1}{1! 1!} + \frac{(\lambda_2 t)^3}{3!} + \frac{(\lambda_2 t)^1 (\lambda_4 t)^1}{1! 1!} + \frac{(\lambda_3 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_6 t)^1}{1!} \right],$$

$$\begin{aligned}
P(X_t = 7) = e^{-\lambda t(1-p_0)} & \left[ \frac{(\lambda_1 t)^7}{7!} + \frac{(\lambda_1 t)^5 (\lambda_2 t)^1}{5! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^4 (\lambda_3 t)}{4! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^3 (\lambda_2 t)^2}{3! 2!} + \frac{(\lambda_1 t)^3 (\lambda_4 t)^1}{3! 1!} \right. \\
& + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_2 t)^1 (\lambda_3 t)^1}{2! 1! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^2 (\lambda_5 t)^1}{2! 1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_2 t)^3}{1! 3!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_2 t)^1 (\lambda_4 t)^1}{1! 1! 1!} \\
& + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_3 t)^2}{1! 2!} + \frac{(\lambda_1 t)^1 (\lambda_6 t)^1}{1! 1!} + \frac{(\lambda_2 t)^2 (\lambda_3 t)^1}{2! 1!} + \frac{(\lambda_2 t)^1 (\lambda_5 t)^1}{1! 1!} + \frac{(\lambda_3 t)^1 (\lambda_4 t)^1}{1! 1!} \\
& \left. + \frac{(\lambda_7 t)^1}{1!} \right], \\
& \vdots
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilmiştir.

Yukarıda  $k = 1, 2, \dots$  için elde edilen  $P(X_t = 1)$ ,  $P(X_t = 2)$ , ... olasılıkları incelendiğinde sağ yandaki terimlerin  $k$ 'nın  $1, 2, \dots, m$  tamsayıları cinsinden kaç farklı biçimde parçalanabileceğine bağlı olduğu görülür. Örneğin 1, (1) biçiminde; 2, (1, 1), (2) biçiminde; 3, (1, 1, 1), (1, 2), (3) biçiminde; 4, (1, 1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 3), (2, 2), (4) biçiminde; ... parçalanabilir. Sağ yandaki terimlerin paydalarındaki faktöriyeler de bu parçalanmaya uyumludur. Bu sonuca göre, sonlu  $0, 1, 2, \dots, m$  değerlerini alan  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenlerinin ortak olasılık dağılımları fonksiyonel biçimi ne olursa olsun  $p_0 = P(Y_i = 0)$ ,  $p_1 = P(Y_i = 1)$ , ...,  $p_m = P(Y_i = m)$  olasılıkları biliniyorsa,  $k = 0, 1, \dots$  için  $P(X_t = k)$  olasılıkları hesaplanabilir. Örneğin  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenleri  $m$  ve  $p$  parametreleri ile ikiterimli dağılıma sahip olduklarında, Eşitlik (2.21)'e göre,

$$P(X_t = 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{nm}{1} p^1 (1-p)^{nm-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

iken yukarıda elde edilen sonuçlara göre, bu olasılık,

$$P(X_t = 1) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \frac{(\lambda_1 t)^1}{1!}$$

biçimindedir.  $k = 1, 2, \dots$  için  $P(X_t = k)$  olasılıklarını hesaplayan bir bilgisayar programı yazılmış, yazılan bu program Ek 1'de sunulmuştur.

### 3.3. İlk Aşma Zamanının Olasılık Dağılımı

#### 3.3.1. $m = 2$ için ilk aşma zamanının olasılık dağılımı

Eşitlik (2.11)'de tanımlanan birleşik Poisson sürecinde  $Y_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$  raslantı değişkenlerinin kesikli ve  $m = 2$  olması durumunda Eşitlik (2.26)'dan  $t = 0$  için  $B = a$  olsun.  $X_t$ 'nin  $a$  değerini ilk aşma zamanını gösteren  $T$  aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T = \inf\{t : X_t \geq a\}.$$

Buradan ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılım fonksiyonu,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(T \leq t) = 1 - P(X_t \leq a - 1) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{a-1} P(X_t = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{a-1} p_{X_t}(k) \end{aligned} \quad (3.3)$$

biçiminde yazılabilir. Burada Eşitlik (3.2)'de elde edilen olasılık fonksiyonu Eşitlik (3.3)'te yerine konulursa,

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ 1 + \sum_{k=1}^{a-1} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(\lambda_1 t)^{k-2i} (\lambda_2 t)^i}{(k-2i)! i!} \right], & t > 0 \text{ için} \\ &= 0, & t \leq 0 \text{ için} \\ &= 1, & t \rightarrow \infty \text{ için} \end{aligned} \quad (3.4)$$

yazılabilir. Bu fonksiyonun türevi alınarak  $T$ 'nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_T(t) = e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[ \lambda(1-p_0) + \lambda(1-p_0) \sum_{k=2}^{a-1} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(\lambda_1 t)^{k-2i} (\lambda_2 t)^i}{(k-2i)! i!} + \sum_{k=1}^{a-2} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(k-i) \lambda_1^{k-2i} \lambda_2^i t^{k-i-1}}{(k-2i)! i!} \right], t > 0 \text{ için}$$

$$= 0, \quad \text{ö.d. için}$$

biçiminde elde edilir.

### 3.3.2. $m > 2$ için ilk aşma zamanının olasılık dağılımı

$m > 2$  olduğunda ilk aşma zamanı olan  $T$ 'nin dağılım fonksiyonu yine,

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(X_t \leq a-1)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{a-1} P(X_t = k) \quad (3.5)$$

yazılabilir. Eşitlik (3.5)'teki  $P(X_t = k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, a-1$  olasılıkları Kesim 3.2.3'te açıklandığı gibi hesaplanır.

### 3.4. Örnekler

Kesim 3.2.2, Kesim 3.2.3.'te açıklanan  $P(X_t = k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , olasılıklarının ve Kesim 3.3.1'de açıklanan  $P(T \leq t)$  olasılıklarının Ek 1.'de sunulan bilgisayar programı yardımıyla hesaplanabileceğini göstermek amacıyla örnekler verilecektir.

**Örnek 3.1.**  $\{N_i, t \geq 0\}$ 'in ortalama oranı  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 2$  ve  $Y_i$ 'nin,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $m = 2$ ,  $p = 0.2$ ;  $m = 2$ ,  $p = 0.7$  ile ikiterimli dağılıma sahip olduğu durumlar için  $X_{10}$  ve  $X_{50}$ 'nin  $k = 0, 1, 2, \dots$  değerlerini alması olasılıkları Eşitlik (3.2)'den hesaplanmış ve sırasıyla Çizelge 3.1'de verilmiştir.

**Örnek 3.2.**  $\{N_i, t \geq 0\}$ 'in ortalama oranı  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 2$  ve  $Y_i$ 'nin,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $m = 5$ ,  $p = 0.2$ ;  $m = 5$ ,  $p = 0.7$  ile ikiterimli dağılıma sahip olduğu durumlar için  $X_{10}$  ve  $X_{50}$ 'nin  $k = 0, 1, 2, \dots$  değerlerini alması olasılıkları Kesim (3.2.3)'te açıklandığı gibi hesaplanmış ve sırasıyla Çizelge 3.2.'de verilmiştir.

**Örnek 3.3.**  $\{N_t, t \geq 0\}$ 'in ortalama oranı  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 5$  ve  $Y_i$ 'nin,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $m = 2$ ,  $p = 0.2$  ile ikiterimli dağılıma sahip olduğu durum için  $a = 3$ ;  $m = 2$ ,  $p = 0.7$  ile ikiterimli dağılıma sahip olduğu durum için  $a = 150$  alınmış ve Eşitlik (3.4)'ten hesaplanan  $P(T \leq t)$  olasılıkları sırasıyla Çizelge 3.3'te verilmiştir.

**Örnek 3.4.**  $\{N_t, t \geq 0\}$ 'in ortalama oranı  $\lambda = 0.5$ ,  $\lambda = 5$  ve  $Y_i$ 'nin,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $m = 5$ ,  $p = 0.2$  ile ikiterimli dağılıma sahip olduğu durum için  $a = 3$ ;  $m = 5$ ,  $p = 0.7$  ile ikiterimli dağılıma sahip olduğu durum için  $a = 3$  alınmış ve Eşitlik (3.5)'ten hesaplanan  $P(T \leq t)$  olasılıkları sırasıyla Çizelge 3.4'te verilmiştir.



Çizelge 3.1.  $m = 2$ ,  $Y_i \sim$  ikiterimli  $(p, 2)$ ,  $t = 10$  ve  $t = 50$  için  $P(X_t = k)$  olasılıkları

k	t = 10				t = 50			
	p = 0,2		p = 0,7		p = 0,2		p = 0,7	
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 2$
0	0,165299	0,000747	0,010567	$1,25 \times 10^{-8}$	0,000123	$2,32 \times 10^{-16}$	$1,32 \times 10^{-10}$	$3,01 \times 10^{-40}$
1	0,264478	0,004778	0,022191	$1,05 \times 10^{-7}$	0,000987	$7,42 \times 10^{-15}$	$1,38 \times 10^{-9}$	$1,27 \times 10^{-38}$
2	0,244642	0,015887	0,04919	$5,62 \times 10^{-7}$	0,004073	$1,20 \times 10^{-13}$	$8,88 \times 10^{-9}$	$2,75 \times 10^{-37}$
3	0,16574	0,036441	0,070679	$2,26 \times 10^{-6}$	0,011518	$1,30 \times 10^{-12}$	$4,24 \times 10^{-8}$	$4,34 \times 10^{-36}$
4	0,09076	0,064661	0,097365	$7,50 \times 10^{-6}$	0,025073	$1,06 \times 10^{-11}$	$1,66 \times 10^{-7}$	$4,70 \times 10^{-35}$
5	0,042302	0,094427	0,110158	$2,14 \times 10^{-5}$	0,044724	$7,00 \times 10^{-11}$	$5,55 \times 10^{-7}$	$5,26 \times 10^{-34}$
6	0,017331	0,117966	0,11807	$5,45 \times 10^{-5}$	0,067989	$3,87 \times 10^{-10}$	$1,65 \times 10^{-6}$	$3,56 \times 10^{-33}$
7	0,006379	0,129438	0,112532	0,000125	0,09048	$1,85 \times 10^{-9}$	$4,42 \times 10^{-6}$	$3,46 \times 10^{-32}$
8	0,002142	0,127143	0,101857	0,000265	0,107477	$7,79 \times 10^{-9}$	$1,08 \times 10^{-5}$	$1,58 \times 10^{-31}$
9	0,000664	0,113424	0,085034	0,000521	0,115642	$2,93 \times 10^{-8}$	$2,47 \times 10^{-5}$	$1,48 \times 10^{-30}$
10	0,000192	0,092934	0,067767	0,000958	0,114009	$1,00 \times 10^{-7}$	$5,25 \times 10^{-5}$	$4,71 \times 10^{-30}$
11	$5,21 \times 10^{-5}$	0,070569	0,050816	0,001659	0,103942	$3,13 \times 10^{-7}$	0,000105	$4,59 \times 10^{-29}$
12	$1,33 \times 10^{-5}$	0,050028	0,036564	0,002725	0,088296	$9,01 \times 10^{-7}$	0,000199	$1,03 \times 10^{-28}$
13	$3,24 \times 10^{-6}$	0,033315	0,02506	0,004263	0,070327	$2,41 \times 10^{-6}$	0,000359	$1,09 \times 10^{-27}$
14	$7,52 \times 10^{-7}$	0,020947	0,016557	0,006373	0,052801	$6,02 \times 10^{-6}$	0,000617	$1,74 \times 10^{-27}$
15	$1,67 \times 10^{-7}$	0,012491	0,010504	0,009139	0,037537	$1,41 \times 10^{-5}$	0,001018	$2,08 \times 10^{-26}$
16	$3,55 \times 10^{-8}$	0,007091	0,006449	0,012605	0,025369	$3,13 \times 10^{-5}$	0,001613	$2,37 \times 10^{-26}$
17	$7,26 \times 10^{-9}$	0,003845	0,003824	0,016765	0,016354	$6,55 \times 10^{-5}$	0,002464	$3,29 \times 10^{-25}$
18	$1,43 \times 10^{-9}$	0,001998	0,002202	0,021549	0,010087	0,00013	0,003633	$2,67 \times 10^{-25}$
19	$2,74 \times 10^{-10}$	0,000997	0,00123	0,026821	0,005969	0,000247	0,005185	$4,39 \times 10^{-24}$
20	$5,06 \times 10^{-11}$	0,000479	0,000669	0,032383	0,003396	0,000448	0,007173	$2,11 \times 10^{-23}$
21	$9,07 \times 10^{-12}$	0,000222	0,000354	0,037987	0,001862	0,000776	0,009635	$5,11 \times 10^{-23}$
22	$1,58 \times 10^{-12}$	$9,93 \times 10^{-5}$	0,000183	0,043354	0,000986	0,001292	0,012586	$2,11 \times 10^{-23}$
23	$2,67 \times 10^{-13}$	$4,31 \times 10^{-5}$	$9,20 \times 10^{-5}$	0,048205	0,000505	0,002067	0,016009	$5,20 \times 10^{-22}$
24	$4,41 \times 10^{-14}$	$1,81 \times 10^{-5}$	$4,53 \times 10^{-5}$	0,052278	0,00025	0,003187	0,019853	$1,52 \times 10^{-22}$
25	$7,11 \times 10^{-15}$	$7,39 \times 10^{-6}$	$2,19 \times 10^{-5}$	0,055358	0,000121	0,004741	0,024027	$4,70 \times 10^{-21}$

Çizelge 3.2.  $m = 5$ ,  $Y_i \sim$  ikerimli  $(p, 5)$ ,  $t = 10$  ve  $t = 50$  için  $P(X_t = k)$  olasılıkları

k	t = 10				t = 50			
	p = 0,2		p = 0,7		p = 0,2		p = 0,7	
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 2$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 2$
0	0,034680	0,000001	0,006820	$2,16 \times 10^{-9}$	$5,02 \times 10^{-8}$	$6,33 \times 10^{-30}$	$1,48 \times 10^{-11}$	$4,74 \times 10^{-44}$
1	0,071000	0,000012	0,000967	$1,23 \times 10^{-9}$	$5,14 \times 10^{-7}$	$2,59 \times 10^{-28}$	$1,05 \times 10^{-11}$	$1,35 \times 10^{-43}$
2	0,108000	0,000055	0,004580	$6,07 \times 10^{-9}$	0,000003	$5,44 \times 10^{-27}$	$5,25 \times 10^{-11}$	$8,22 \times 10^{-43}$
3	0,131000	0,000183	0,011200	$1,67 \times 10^{-8}$	0,000012	$7,79 \times 10^{-26}$	$1,49 \times 10^{-10}$	$3,44 \times 10^{-42}$
4	0,137000	0,000495	0,015300	$3,17 \times 10^{-8}$	0,000038	$8,54 \times 10^{-25}$	$3,07 \times 10^{-10}$	$1,27 \times 10^{-41}$
5	0,129000	0,001140	0,014800	$5,81 \times 10^{-8}$	0,000104	$7,65 \times 10^{-24}$	$6,22 \times 10^{-10}$	$4,53 \times 10^{-41}$
6	0,110000	0,002340	0,018500	$1,17 \times 10^{-7}$	0,000249	$5,83 \times 10^{-23}$	$1,34 \times 10^{-9}$	$1,52 \times 10^{-40}$
7	0,087400	0,004300	0,027500	$2,20 \times 10^{-7}$	0,000537	$3,88 \times 10^{-22}$	$2,66 \times 10^{-9}$	$4,82 \times 10^{-40}$
8	0,065200	0,007270	0,031700	$3,77 \times 10^{-7}$	0,001060	$2,30 \times 10^{-21}$	$4,92 \times 10^{-9}$	$1,46 \times 10^{-39}$
9	0,046100	0,011400	0,033000	$6,40 \times 10^{-7}$	0,001930	$1,23 \times 10^{-20}$	$9,00 \times 10^{-9}$	$4,29 \times 10^{-39}$
10	0,031000	0,016700	0,037000	0,000001	0,003280	$6,05 \times 10^{-20}$	$1,62 \times 10^{-8}$	$1,21 \times 10^{-38}$
11	0,020000	0,023200	0,042900	0,000002	0,005260	$2,74 \times 10^{-19}$	$2,81 \times 10^{-8}$	$3,32 \times 10^{-38}$
12	0,012400	0,030500	0,046000	0,000003	0,007960	$1,16 \times 10^{-18}$	$4,74 \times 10^{-8}$	$8,86 \times 10^{-38}$
13	0,007430	0,038300	0,046600	0,000004	0,011500	$4,59 \times 10^{-18}$	$7,86 \times 10^{-8}$	$2,30 \times 10^{-37}$
14	0,004310	0,046000	0,048000	0,000007	0,015800	$1,71 \times 10^{-17}$	$1,28 \times 10^{-7}$	$5,85 \times 10^{-37}$
15	0,002430	0,053100	0,049700	0,000010	0,020900	$6,06 \times 10^{-17}$	$2,04 \times 10^{-7}$	$1,45 \times 10^{-36}$
16	0,001330	0,059100	0,049900	0,000014	0,026600	$2,04 \times 10^{-16}$	$3,19 \times 10^{-7}$	$3,53 \times 10^{-36}$
17	0,000708	0,063600	0,048400	0,000021	0,032600	$6,53 \times 10^{-16}$	$5,01 \times 10^{-7}$	$8,58 \times 10^{-36}$
18	0,000369	0,066200	0,046900	0,000029	0,038800	$2,00 \times 10^{-15}$	$7,50 \times 10^{-7}$	$2,00 \times 10^{-35}$
19	0,000188	0,067000	0,045200	0,000041	0,044600	$5,90 \times 10^{-15}$	0,000001	$4,47 \times 10^{-35}$
20	0,000093	0,065900	0,036300	0,000053	0,049800	$1,67 \times 10^{-14}$	0,000002	$9,79 \times 10^{-35}$
21	0,000045	0,063200	0,037700	0,000074	0,054200	$4,56 \times 10^{-14}$	0,000002	$2,18 \times 10^{-34}$
22	0,000021	0,059000	0,036700	0,000103	0,057400	$1,20 \times 10^{-13}$	0,000003	$4,89 \times 10^{-34}$
23	0,000010	0,053800	0,033953	0,000139	0,059200	$3,08 \times 10^{-13}$	0,000005	$1,08 \times 10^{-33}$
24	0,000004	0,047900	0,030580	0,000183	0,059700	$7,61 \times 10^{-13}$	0,000007	$2,34 \times 10^{-33}$
25	0,000002	0,041700	0,029043	0,00024	0,058800	$1,83 \times 10^{-12}$	0,000010	$4,97 \times 10^{-33}$

Çizelge 3.3.  $m = 2$ ,  $Y_i \sim$  ikiterimli ( $p, 2$ ) için  $P(T \leq t)$  olasılıkları

t	p = 0,2		p = 0,7	
	a = 3		a = 150	
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 5$
	$P(T \leq t)$	$P(T \leq t)$	$P(T \leq t)$	$P(T \leq t)$
10	0,3255	0,999998	0,0106	$6,70 \times 10^{-11}$
20	0,7344	1,000000	0,0006	0,6174
50	0,9948	1,000000	$1,52 \times 10^{-9}$	1,0000

Çizelge 3.4.  $m = 5$ ,  $Y_i \sim$  ikiterimli ( $p, 5$ ) için  $P(T \leq t)$  olasılıkları

t	p = 0,2		p = 0,7	
	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 5$	$\lambda = 0,5$	$\lambda = 5$
	$P(T \leq t)$	$P(T \leq t)$	$P(T \leq t)$	$P(T \leq t)$
10	0,2139	$6,08 \times 10^{-13}$	0,0124	$2,19 \times 10^{-21}$
20	0,0187	$5,71 \times 10^{-27}$	0,0001	$1,00 \times 10^{-42}$
50	$3,45 \times 10^{-6}$	$5,44 \times 10^{-70}$	$7,77 \times 10^{-11}$	$3,25 \times 10^{-107}$

#### 4. SONUÇ VE TARTIŞMA

Birleşik Poisson sürecinde,  $X_t$ 'nin kesikli olduğu durum için Eşitlik (2.17)'den olasılık fonksiyonunun ve sürekli olduğu durum için Eşitlik (2.22)'den olasılık yoğunluk fonksiyonunun fonksiyonel biçimine ulaşmanın güç olduğu belirtilmişti. Şimdiye dek yapılan çalışmalarda yalnızca  $Y_1, Y_2, \dots$  raslantı değişkenlerinin ortak dağılımının kesikli logaritmik dağılım olması durumunda  $X_t$ 'nin olasılık fonksiyonu belirlenebilmiştir.

Bu çalışmada, Kesim 3.2.2 ve Kesim 3.2.3'te verilen sonuçlara göre,  $Y_i, i = 1, 2, \dots$ , raslantı değişkenleri dağılımları ne olursa olsun  $j = 0, 1, \dots, m$  gibi sonlu değer alan kesikli raslantı değişkenleri ise  $P(X_t = k), k = 0, 1, \dots$ , olasılıklarının hesaplanabildiği görülmüştür.  $X_t$ 'nin kesikli olduğu durumda da önceden belirlenen bir değeri ilk aşma zamanı olan  $T$  için  $P(T \leq t)$  olasılıklarının da hesaplanabileceği gösterilmiştir.

## KAYNAKLAR

- Cox, D.R., Miller, H.D., 1965, The Theory of Stochastic Processes, Methuen and Co. Ltd., London.
- Çınlar, E., 1975, Introduction to Stochastic Processes, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs.
- Dvoretzky, A., Kiefer, J., Wolfowitz, J., 1953, Sequential decision problems for processes with continuous time parameter, Annals of Mathematical Statistics, 24, 254-264.
- Falmagne, J., 2002, Lectures in Elementary Probability Theory and Stochastic Processes, McGraw-Hill, Dubuque.
- Feller, W., 1957, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II, John Wiley and Sons Inc., New York.
- Gallot, S.F.L., 1993, Absorption and first-passage times for a compound Poisson process in a general upper boundary, Journal of Applied Probability, 30, 835-850.
- Girault, M., 1966, Stochastic Processes, Springer-Verlag, Berlin.
- Gospodinov, R., Rotondi, R., 2001, Exploratory analysis of marked Poisson processes applied to Balkan earthquake sequences, Journal of the Balkan Geophysical Society, 4(3), 61-68.
- Grimmett, G., 2001, Probability and Random Processes, Oxford University Press, New York.
- Haight, F.A., 1967, Handbook of the Poisson Distribution, John Wiley and Sons Inc., New York.
- Inal, C., 1988, Olasılıksal Süreçlere Giriş, H. Ü. Yayınları, Ankara.
- Karlin, S., Taylor, H.M., 1974, A First Course in Stochastic Processes, Academic Press Inc., New York.
- Karlin, S., Taylor, H.M., 1981, A Second Course in Stochastic Processes, Academic Press Inc., New York.
- Karlin, S., Taylor, H.M., 1984, An Introduction to Stochastic Modelling, Academic Press Inc., Orlando.
- Katz, W.R., 2002, Stochastic modelling of hurricane damage, Journal of Applied Meteorology, 41, 754-761.
- Nowak, E.G., Ritter, S., Scholz, G.T., Kraft, G., 2002, Compound Poisson processes and clustered damage of radiation induced DNA double strand breaks, Acta Physica Polonica B, 31, 5, 1109-1124.

- Parzen, E., 1962, Stochastic Processes, Holden-Day Inc., San Francisco.
- Papoulis, A., Pillai, S.U., 2002, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, Boston.
- Picard, P., Lefevre, C., 1996, First crossing of basic counting processes with lower nonlinear boundaries: A unified approach through pseudopolynomials, *Mathematiques Appliques*, Universite de Lyon, 1, preprint.
- Pitman, J., 1993, Probability, Springer-Verlag, New York.
- Reiss, R.D., 1993, A Course on Point Processes, Springer-Verlag, New York.
- Ross, S., 2000, Introduction to Probability Models, Academic Press Inc., New York.
- Snyder, D.L., Miller, M.I., 1991, Random Point Processes in Time and Space, Springer-Verlag, New York.
- Stadje, W., 1993, Distributions of first exit times for empirical counting and Poisson processes with moving boundaries, *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 9, 91-103.
- Thomasiyam, A.J., 1969, The Structure of Probability Theory with Applications, McGraw-Hill, Boston.
- Zacks, S., 1991, Distributions of stopping times for Poisson processes with linear boundaries, *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 7, 233-242.
- Zacks, S., 1997, Distributions of first exit times for Poisson processes with lower and upper linear boundaries, *Advances in the Theory and Practice of Statistics: A Volume in Honor of Samuel Kotz, N. L. Johnson and N. Balakrishnan*, Eds., Ch. 20. ,John Wiley & Sons Inc., New York, p. 339-350.
- Zacks, S., Perry, D., Bshouty D., Bar-Lev, S., 1999, Distributions of stopping times for compound Poisson processes with positive jumps and linear boundaries, *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 15, 89-101.
- Zacks, S., Perry, D., Stadje, W., 2002, Hitting and ruin probabilities for compound Poisson processes and the cycle maximum of the M/G/1 queue, *Communications in Statistics-Stochastic Models*, 18, 553-564.
- Wang, Y.Y., Lu, C.C., 1990, Applying compound Poisson process to error performance analysis in cascaded digital transmission systems, *IEEE Region 10 Conference on Computer and Communication Systems*, Hong Kong, p. 362-365.

## **EKLER DİZİNİ**

**EK 1.  $P(X_i = k)$  OLASILIKLARINI HESAPLAYAN EXCEL MAKROSU**



## EK 1. $P(X_t = k)$ OLASILIKLARINI HESAPLAYAN EXCEL MAKROSU

Dim N() As Integer

Dim m As Integer, t As Integer, Secenek\_sayisi As Integer, k As Integer

Dim Sayfa As Worksheet

Sub Veri\_Al()

Dim L(6) As Single, g0 As Single, i As Integer, j As Integer

Dim satir As Integer, kolon As Integer

'Çalışma sayfası değişebilir.

Set Sayfa = Sheet1

k = Sayfa.Cells(6, 3)

m = Sayfa.Cells(5, 3)

t = Sayfa.Cells(4, 3)

g0 = Sayfa.Cells(15, 30)

'N : katsayının kaç kez tekrarlandığı

satir = 8

i = 0

Do Until Sayfa.Cells(satir, 3) = ""

    i = i + 1

    satir = satir + 1

Loop

Secenek\_sayisi = i

ReDim N(Secenek\_sayisi, k)

For i = 1 To Secenek\_sayisi

    For j = 1 To k

        N(i, j) = 0

    Next j

Next

For i = 1 To 6 'lambda değerleri

    L(i) = Sayfa.Cells(i + 6, 30)

Next i

satir = 8 'katsayılar 8. satırdan başlıyor

i = 0 'katsayı tekrar dizi indisi

Do Until Sayfa.Cells(satir, 3) = ""

    i = i + 1

    kolon = 3 'katsayılar 3. kolondan başlıyor

    Do Until Sayfa.Cells(satir, kolon) = ""

        j = Sayfa.Cells(satir, kolon)

        'j<=m olmalı

        N(i, j) = N(i, j) + 1

        kolon = kolon + 1

    Loop

    satir = satir + 1

Loop

Kesikli\_Fonk\_Hesap g0, L, N

End Sub

```
Sub Kesikli_Fonk_Hesap(g0 As Single, L() As Single, N() As Integer)
  Dim Toplam As Double, Terim As Double, i As Integer, j As Integer
  Dim pay As Double, payda As Double
  Toplam = 0
  For i = 1 To Secenek_sayisi
    Terim = 0
    pay = 1
    payda = 1
    For j = 1 To k
      If N(i, j) <> 0 Then
        If j <= 7 Then
          pay = pay * (L(j) * t) ^ N(i, j)
          payda = payda * Application.WorksheetFunction.Fact(N(i, j))
        Else
          pay = 0
        End If
      End If
    Next j
    Terim = pay / payda
    Toplam = Toplam + Terim
  Next i
  Toplam = Toplam * g0
End Sub
```

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gamze Özel

Doğum Yeri : Aydın

Doğum Yılı : 1981

Medeni Hali : Bekar

### Eğitim ve Akademik Durumu

Lise : 1993 -1997 Eskişehir Cumhuriyet Lisesi

Lisans : 1997 -1999 Osmangazi Üniversitesi İstatistik Bölümü

1999 -2002 Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi : 2002 - ... H.Ü. İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi