

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**FONKSİYON SERİLERİNİN
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI**

Barış ÖREN

Tez Yöneticisi
Yrd.Doç.Dr. Ayşegül GÖKHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2005

T.C
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FONKSİYON SERİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Barış ÖREN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez,tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu ile başarılı / başarısız olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Ayşegül GÖKHAN

Üye: Prof. Dr. Etibar PENAHOV

Üye: Prof. Dr. Mahmut DÖĞER

Üye:

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..23 / 03 .. / 2005.. tarih ve ...10/5..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŐEKKÜR

Bu çalıőmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, hiç bir zaman yakın ilgisini ve imkanlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam;

Yrd.Doç.Dr. Ayőegöl GÖKHAN'a ve Arő.Gör. Yavuz ALTIN'a őükranlarımı sunmayı bir borç bilir, Saygılar sunarım.

Barış ÖREN



İÇİNDEKİLER

Sayfa

İçindekiler.....	I
Özet.....	II
Abstract.....	III
1. Giriş.....	1
2. Temel Tanımlar ve Teoremler.....	2
2.1. Temel Tanımlar.....	2
2.2. Temel Teoremler.....	3
3. İstatistiksel Yakınsaklık, Noktasal İstatistiksel Yakınsaklık.....	4
3.1. Asimptotik Yoğunluk, Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık	4
3.2. Noktasal İstatistiksel Yakınsaklık.....	6
4. Fonksiyon Serilerinin İstatistiksel Yakınsaklığı.....	12
4.1. İstatistiksel Yakınsak Seriler.....	12
4.2. Temel Sonuçlar.....	14
4.3. İstatistiksel Yakınsak Fonksiyonlar Dizisi	15
4.4. Fonksiyon Serilerinin Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı.....	16
4.5. Uygulamalar.....	19
Kaynaklar.....	21

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FONKSİYON SERİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Barış ÖREN

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

2005, Sayfa : 22

Bu çalışma dört bölüm halinde hazırlanmıştır.

Birinci bölümde; istatistiksel yakınsaklığın tarihi ile ilgili bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde; temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; asimptotik yoğunluk, doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklık ve noktasal istatistiksel yakınsaklık tanımları verilmiştir.

Dördüncü bölümde; serilerin istatistiksel yakınsaklığı, istatistiksel yakınsak fonksiyonlar dizisi ve fonksiyon serilerinin düzgün istatistiksel yakınsaklığı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler : İstatistiksel yakınsaklık, sınırlı seriler, şartlı yakınsaklık, Cauchy kriteri, noktasal yakınsaklık, fonksiyon dizileri ve fonksiyon serileri.

ABSTRACT

M.S. Thesis

THE STATISTICAL CONVERGENCE OF FUNCTIONS SERIES

Bariş ÖREN

Firat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

2005, Page : 22

This thesis consists of four chapters.

In the introduction; the history of statistical convergence is presented.

In the second chapter; the fundamental definitions and theorems are given.

In the third chapter; the definitions of asymptotic density, natural density statistical convergence and pointwise statistical convergence are given.

Finally, we have examined the statistical convergence of series, statistical convergent functions sequence and uniformly statistical convergent of functions series.

Keywords: Statistical convergent, bounded series, conditional convergence, Cauchy criteria, functional sequence, pointwise convergence.

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı 1913'den beri farklı görüntüşler altında literatürde yer almaktadır. O zamandan beri Fourier analiz teorisinde, ergodic teoride ve sayılar teorisinde kullanılmıştır. İstatistiksel yakınsaklık tanımı ilk olarak 1951 yılında Fast [1] tarafından verildi. 1953 yılında Buck [2] tarafından bağımsız olarak çalışıldı. 1959 yılında Schoenberg [3] istatistiksel yakınsaklığı toplanabilme metodu olarak inceledi ve istatistiksel yakınsak dizilerin bazı özelliklerini verdi. Fast [1] ve Schoenberg [3] sınırlı istatistiksel yakınsak bir dizinin Cesáro toplanabilir olduğunu ifade ettiler. Daha sonra istatistiksel yakınsaklık Fridy [4], [5], Šalát [6], Rath ve Tripaty [7], Tripaty [8], Connor [9], Maddox [10] gibi bir çok bilim adamı tarafından çalışılmıştır. Noktasal istatistiksel yakınsaklık ise ilk defa Gökhan ve Güngör [11] tarafından çalışılmıştır.

Serilerin istatistiksel yakınsaklığı dizilerin istatistiksel yakınsaklığına benzer bir düşüncedir. Bu bağlamda fonksiyon serilerinin istatistiksel yakınsaklığı da fonksiyon dizilerinin istatistiksel yakınsaklığına benzerdir.

2. TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER

Bu bölümde, çalışmamıza temel oluşturan bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

2.1. Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1. $X \neq \emptyset$ bir küme ve K reel veya kompleks sayılar cismi olsun.

$$+ : X \times X \rightarrow X \quad \text{ve} \quad \cdot : X \times K \rightarrow X$$

fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X kümesine K cismi üzerinde bir vektör (lineer) uzayı adı verilir [12].

L 1) $x + y = y + x$

L 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

L 3) $x + \theta = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır.

L 4) Her $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in X$ vardır.

L 5) $1 \cdot x = x$

L 6) $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y$

L 7) $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x$

L 8) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$

Tanım 2.1.2. (a_n) dizisi verilmiş olsun. Genel terimi

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

şeklinde tanımlanan (s_n) dizisini göz önüne alalım. $((a_n), (s_n))$ ikilisine seri adı verilir. a_n terimine serinin genel terimi, (s_n) dizisine de serinin kısmi toplamlar dizisi denir.

Eğer (s_n) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına yakınsak ise, yani

$$\lim s_n = s$$

ise $((a_n), (s_n))$ serisi yakınsak ve serinin toplamı s 'dir denir.

Yakınsak olmayan seriye de ıraksak seri adı verilir [13].

Tanım 2.1.3. $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ ifadesine, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kalan terimi denir

[13].

Tanım 2.1.4. Her k doğal sayısı için $a_k > 0$ ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisine bir pozitif terimli seri adı verilir [13].

Tanım 2.1.5. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu normlu uzaya tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Tanım 2.1.6. Terimleri $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerinden oluşan $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi mutlak yakınsaktır denir.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsak fakat $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ serisi ıraksak ise bu takdirde $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi şartlı yakınsaktır denir [13].

2.2. Temel Teoremler

Teorem 2.2.1. Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır [13].

Teorem 2.2.2. Yakınsak bir serinin genel teriminin limiti sıfırdır. Eğer bir serinin genel terimi sıfıra gitmiyorsa (limiti sıfır değilse) bu seri ıraksaktır denir [13].

Teorem 2.2.3. Yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfırdır [13].

Teorem 2.2.4. (Seriler için genel yakınsaklık prensibi)

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki, $\forall n \geq n_0$ ve $\forall p \geq 0$ için

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

olmasıdır [13].

3. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK, NOKTASAL İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

3.1. Asimptotik Yoğunluk, Doğal Yoğunluk, İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım 3.1.1. Bir $K \subset N$ cümlesinin asimptotik yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K(n)}{n}$$

dir.

$K(n)/n$ dizisinin bir limite sahip olması durumunda K cümlesi $\delta(K)$ doğal yoğunluğuna sahiptir denir [14].

Bir K cümlesindeki x 'e eşit olan yada x 'den daha küçük olan pozitif tamsayıların cümle sayısı $K(x)$ ile gösterilsin. Örneğin; bir K cümlesi, 2, 4, 6, ... çift tamsayılardan oluşuyorsa $K(1) = 0, K(2) = 1, K(6) = 3, K(7) = 3, K(15/2) = 3 \dots$ 'dir. Gerçekten $x \geq 0$ ise $K(x) = (x/2)$ dir. Diğer bir deyişle herhangi bir $K = (a_i)$ cümlesi için $K(a_j) = j$ ifadesini elde ederiz.

Tanım 3.1.2. Doğal sayıların bütün cümleleri için tanımlı ve $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlanan bir δ fonksiyonuna, aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir alt asimptotik (veya tam bir yoğunluk) denir [15].

D1) Eğer $A \sim B$ (yani A ile B 'nin simetrik farkı sonlu) ise $\delta(A) = \delta(B)$

D2) Eğer $A \cap B = \phi$ ise $\delta(A) + \delta(B) \leq \delta(A \cup B)$

D3) Her A, B için $\delta(A) + \delta(B) \leq 1 + \delta(A \cap B)$

D4) $\delta(N) = 1$

Örneğin; $K_1 = \{2k : k \in N\}$ cümlesi için $\delta(K_1) = \frac{1}{2}$

ve

$K_2 = \{2k+1 : k \in N\}$ cümlesi için $\delta(K_2) = \frac{1}{2}$

dir.

$K_1 \cap K_2 = \phi$ ve $\delta(K_1 \cup K_2) \geq \delta(K_1) + \delta(K_2)$ olup $\delta(N) = 1$ dir.

N doğal sayılar cümlesinin bir K alt cümlesinin kardinal sayısı $|K|$ ile gösterilsin, yani $|K| = \text{Card}K$ olsun. Pozitif tamsayılardan oluşan bir K cümlesinin doğal yoğunluğu,

$\{k \leq n : k \in K\}$ notasyonu K 'nın n 'den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermek üzere,

$$\delta(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\delta(K) = 0$ ise K cümlesine sıfır yoğunluklu cümle denir [14].

Tanım 3.1.3. Eğer $x = (x_k)$ dizisinin terimleri sıfır yoğunluklu bir cümle hariç diğer bütün k 'lar için bir P özelliğini sağlıyorsa bu taktirde (x_k) dizisine, hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir [4]. Biz bunu kısaca h.h.h.k ile göstereceğiz.

Sıfır yoğunluklu cümle tanımından esinlenerek istatistiksel yakınsaklık tanımını aşağıdaki şekilde vermiştir.

Tanım 3.1.4. $x = (x_k)$ kompleks sayıların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa yani $\forall \varepsilon > 0$ ve h.h.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ oluyor ise, $x = (x_k)$ dizisine, L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Bu limit $S - \lim x = L$, $st\text{-}\lim x_k = L$ veya $x_k \rightarrow L(S)$ biçiminde gösterilir [4].

İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile özel olarak $L = 0$ olması halinde de S_0 ile gösterilir. Yani;

$$S = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

$$S_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| = 0 \right\}$$

dır. Burada cümle sembolü dışındaki dikey çizgiler cümlelerin eleman sayısını göstermektedir.

Yakınsak bir dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.1.1.

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2, (m = 1, 2, 3, \dots) \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Demek ki $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin elemanları hariç diğer bütün k 'lar için, $|x_k - 0| < \varepsilon$ olduğundan $S - \lim x = 0$ dır. Fakat bu dizi yakınsak değildir.

Ayrıca istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Bunu da aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 3.1.2.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , k = m^2, (m = 1, 2, 3, \dots) \\ 1 & , k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x = 1$ dir. Bu dizi istatistiksel yakınsak olmasına rağmen sınırlı değildir.

Tanım 3.1.5. Her $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ve h.h.h.k. için $|x_k - x_N| < \varepsilon$ ise yani her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı mevcut ise $x = (x_k)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [4].

3.2. Noktasal İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda, terimleri reel değerli fonksiyonlar olan ve \mathbb{R} reel doğrusu üzerinde tanımlanan $\{f_k\}$ dizileri ile ilgileneceğiz. Tanım cümlesindeki her bir x için, terimleri fonksiyon değerlerine karşılık gelen diğer bir $(f_k(x))$ dizisi oluşturulabilir. D , bu ikinci dizinin yakınsak olduğu cümleyi gösterebilir. $x \in D$ olmak üzere

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

eşitliğiyle tanımlanan f fonksiyonuna, $\{f_k\}$ dizisinin limit fonksiyonu denir ve $\{f_k\}$ 'a D cümlesi üzerinde f 'e noktasal yakınsar. Bu demektir ki D cümlesindeki her bir x noktası ve her bir $\varepsilon > 0$ için,

$$k > K \Rightarrow |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde hem x 'e, hem de ε 'a bağlı bir K vardır.

Tanım 3.2.1. Bir $\{f_k\}$ fonksiyonlar dizisine, eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise yani her $x \in D$ ve h.h.h.k için,

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon \quad (1)$$

oluyorsa D cümlesi üzerinde f 'e noktasal istatistiksel yakınsaktır denir [11].

Bu durum da D cümlesi üzerinde

$$st - \lim f_k(x) = f(x) \quad \text{veya} \quad f_k \xrightarrow{st} f$$

yazılır.

Bu demektir ki $\delta > 0$, $n > N(= \varepsilon, \delta, x)$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| < \delta$$

olacak şekilde bir N tam sayısı vardır.

Aşıkarak (1) nolu eşitsizlik tüm sonlu sayıdaki k 'lar için sağlanırsa, D cümlesi üzerinde $\lim f_k(x) = f(x)$ olur. Buradan kolaylıkla gösterilebilir ki D cümlesi üzerinde $\lim f_k(x) = f(x)$ olması $st - \lim f_k(x) = f(x)$ olmasını gerektirir. Fakat bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 3.2.1. $x \in R/[-1,1]$, $k = 1, 2, 3, \dots$ ise

$$f_k(x) = \begin{cases} (-x)^k, & k \in [3^p, 3^p + p), p = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dizisini tanımlayalım. Bu durumda

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : f_k(x) \neq 0, \forall x \in R/[-1,1]\}| \leq \frac{p(p+1)}{2 \cdot 3^p}$$

olur. Böylece $R/[-1,1]$ üzerinde $st - \lim f_k(x) = 0$ olur. Fakat $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$ mevcut değildir.

Teorem 3.2.1. $\{f_k\}$ ve $\{g_k\}$ bir D cümlesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon dizisi olsun.

Eğer D cümlesi üzerinde $st - \lim f_k(x) = f(x)$ ve $st - \lim g_k(x) = g(x)$ ise bu takdirde $\alpha, \beta \in R$ olmak üzere D cümlesi üzerinde

$$st - \lim (\alpha f_k(x) + \beta g_k(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

dır.

İspat : $\alpha = 0$ ve $\beta = 0$ için ispat açıktır.

$\alpha \neq 0$ ve $\beta \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\varepsilon > 0$ verilsin.

$$|\alpha f_k(x) + \beta g_k(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \leq |\alpha| \cdot |f_k(x) - f(x)| + |\beta| \cdot |g_k(x) - g(x)|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} & \{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |\alpha f_k(x) + \beta g_k(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x))| \geq \varepsilon\} \\ & \subseteq \left\{ k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \right\} \\ & \cup \left\{ k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |g_k(x) - g(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|} \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\text{Buradan } D \text{ cümlesi üzerinde } st - \lim(\alpha f_k(x) + \beta g_k(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

dir.

Tanım 3.2.2. $\{f_k\}$, D cümlesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve h.h.h.k için,

$$|f_k(x) - f_N(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N(= N(\varepsilon, x))$ sayısı mevcut ise yani her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |f_k(x) - f_N(x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisi denir [11].

Teorem 3.2.2. $\{f_k\}$, D cümlesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. Bu durum da aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

i) $\{f_k\}$, D cümlesi üzerinde noktasal istatistiksel yakınsak bir dizidir.

ii) $\{f_k\}$, D cümlesi üzerinde bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii) $\{f_k\}$, D cümlesi üzerinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere, her $x \in D$ ve h.h.h.k için $f_k(x) = g_k(x)$ olacak şekilde bir noktasal yakınsak bir $\{g_k\}$ fonksiyon dizisi vardır.

İspat : (i)'nin (ii)'yi gerektirdiğini ispatlamak için “yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir.” Teoreminin ispatındaki yöntemi kullanacağız.

Kabul edelim ki D cümlesi üzerinde $st - \lim f_k(x) = f(x)$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde h.h.h.k için $|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ 'dir ve eğer N sayısı $|f_N - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanacak şekilde seçilirse her $x \in D$ ve h.h.h.k için

$$|f_k(x) - f_N(x)| \leq |f_k(x) - f(x)| + |f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $\{f_k\}$, D cümlesi üzerinde bir istatistiksel Cauchy dizisi olur.

Şimdi (ii)'in doğru olduğunu farzedelim ve N 'yi de, $I = [f_N(x) - 1, f_N(x) + 1]$ aralığını her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $f_k(x)$ 'i ihtiva edecek şekilde seçelim. (ii)'yi uygulayarak her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $I' = \left[f_M(x) - \frac{1}{2}, f_M(x) + \frac{1}{2} \right]$ aralığı $f_k(x)$ 'i ihtiva edecek şekilde M 'yi seçelim. Bu durumda

$$\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I \cap I'\} = \{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I\}$$

$$\cup \{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I'\}$$

için ve her $x \in D$ ve h.h.h.k için $I_1 = I \cap I'$, $f_k(x)$ 'i ihtiva eder.

Böylece;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I \cap I'\}|$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I\}|$$

$$+ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I'\}| = 0$$

olur. Bu nedenle I_1 , her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $f_k(x)$ 'i ihtiva eder ve uzunluğu ≤ 1 olan bir şerittir. Şimdi de h.h.h.k. için $I'' = \left[f_{N(2)}(x) - \frac{1}{4}, f_{N(2)}(x) + \frac{1}{4} \right]$ aralığı $f_k(x)$ 'i ihtiva edecek şekilde $N(2)$ 'yi seçelim. Önceki yolla her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $I_2 = I_1 \cap I''$ aralığı $f_k(x)$ 'i ihtiva eder ve uzunluğu $\leq \frac{1}{2}$ 'dir.

Bu şekilde devam ederek her bir m için $I_m \supseteq I_{m+1}$ olacak şekilde kapalı aralıkların bir $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisini oluşturalım. I_m 'in uzunluğu 2^{1-m} 'den büyük olamaz ve her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $f_k(x) \in I_m$ olur.

Buna göre D cümlesi üzerinde öyle bir $f(x)$ fonksiyonu vardır ki $\{f(x)\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ 'dir.

Her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $f_k(x) \in I_m$ olduğundan $n > T_m$. için

$$\frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I_m\}| < \frac{1}{m} \quad (2)$$

olacak şekilde artan bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ pozitif tam sayı dizisi seçebiliriz.

Şimdi $(f_k(x))$ 'in öyle bir $(z_k(x))$ alt dizisini tanımlayalım ki bu alt dizi $k > T_1$ için $f_k(x)$ 'in terimlerinden oluşsun ve her $x \in D$ için $T_m < k \leq T_{m+1}$ iken $f_k(x) \notin I_m$ olsun.

Daha sonra $(g_k(x))$ fonksiyon dizisini her $x \in D$ için

$$g_k(x) = \begin{cases} f(x) , & f_k(x), (z_k(x))'in bir terimi ise \\ f_k(x) , & diğer durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde D cümlesi üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x)$ 'dir. Çünkü $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$

ve $k > T_m$ ise ya $f_k(x), (z_k(x))$ 'in bir terimidir ve bu D cümlesi üzerinde $g_k(x) = f(x)$ anlamına gelir ya da D cümlesi üzerinde $g_k(x) = f_k(x) \in I_m$ 'dir ve her $x \in D$ ve h.h.h.k için $|g_k(x) - f(x)| \leq I_m$ 'nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ 'dir.

Ayrıca her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $f_k(x) = g_k(x)$ olduğunu iddia ediyoruz. Bunun doğruluğunu göstermek için öncelikli olarak $T_m < n < T_{m+1}$ alalım. Bu durumda

$$\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } g_k(x) \neq f_k(x)\} \subseteq \{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I_m\}$$

olur dolayısıyla (2) numaralı eşitsizlikten

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } g_k(x) \neq f_k(x)\}| \\ & \leq \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \notin I_m\}| < \frac{1}{m} \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Böylece; $n \rightarrow \infty$ için limit 0'dır ve her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $f_k(x) = g_k(x)$ 'dir.

Son olarak, kabul edelim ki (iii) sağlansın. Her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $f_k(x) = g_k(x)$ ve D cümlesi üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x)$ olsun. $\varepsilon > 0$ alalım. Bu durum da her bir n için

$$\begin{aligned} & \{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \\ & \subseteq \{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \neq g_k(x)\} \\ & \cup \{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |g_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \end{aligned}$$

olur. Çünkü D cümlesi üzerinde $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) = f(x)$ 'dir. Yukarıda yazılan ikinci cümle sabit sayıda tam sayı içerir. Buna $\ell = \ell(\varepsilon, x)$ diyelim. Bu nedenle

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}| \\ & \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : \forall x \in D \text{ için } f_k(x) \neq g_k(x)\}| + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ell}{n} = 0 \end{aligned}$$

olur. Çünkü her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $f_k(x) = g_k(x)$ olur. Böylece her $x \in D$ ve h.h.h.k. için $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ olur ve (i) sağlanır.

Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.2'in bir sonucu olarak aşağıdaki ifade verilebilir.

Sonuç 3.2.1. Eğer $\{f_k\}$, D cümlesi üzerinde $st - \lim f_k(x) = f(x)$ olacak şekilde bir fonksiyon dizisi ise bu takdirde $\{f_k\}$ 'nin D cümlesi üzerinde $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{k(i)}(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $(f_{k(i)}(x))$ alt dizisi vardır.



4. FONKSİYON SERİLERİNİN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

4.1. İstatistiksel Yakınsak Seriler

Tanım 4.1.1. $(s_n) = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ olmak üzere (s_n) kısmi toplamlar dizisi istatistiksel yakınsak olan bir $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine istatistiksel yakınsaktır denir [8].

Eğer kısmi toplamlar dizisi sınırlı ise $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisine sınırlıdır denir.

En az bir $k \in \mathbb{N}$ için her bir $b_n = a_k$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisine, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 'nın yeniden düzenlenmiş serisi denir.

Tanım 4.1.2. Bir seri eğer istatistiksel yakınsak fakat mutlak yakınsak değilse şartlı istatistiksel yakınsaktır denir [8].

Tanım 4.1.3. Bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisine, eğer $\delta[\{k \in \mathbb{N} : a_k < 0\}] = 0$ ise istatistiksel olarak negatif terimli olmayan seri denir.

Tanım 4.1.4. $\delta[\{k \in \mathbb{N} : |x_k| > A\}] = 0$ olacak şekilde bir $A > 0$ mevcut ise (x_n) dizisine istatistiksel sınırlıdır denir [8].

Aşıkarak istatistiksel yakınsak bir seri istatistiksel sınırlıdır. Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir.

Lemma 4.1.1. Bir $x = (x_n)$ dizisinin α 'ya istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $n \rightarrow \infty$ için $\lim x_{k_n} = \alpha$ olmak üzere $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\} \subset \mathbb{N}$, $\delta(K) = 1$ olacak şekilde bir K cümlesinin var olmasıdır [6].

Özellik 4.1.1. Bir $x = (x_n)$ sayı dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır [4].

İstatistiksel yakınsak bir seri sınırsız olabilir. Bunun için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.1.1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, serisinin genel terimi

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n k, & n = k^2 \text{ ise} \\ (-1)^n k, & n-1 = k^2, k \in \mathbb{N} \text{ ise} \\ n^{-2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi istatistiksel yakınsak olduğu halde sınırlı değildir.

Özellik 4.1.2. Sınırlı bütün seriler istatistiksel yakınsak değildir.

Gerçekten $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ serisini göz önüne alırsak bu seri sınırlı fakat istatistiksel yakınsak değildir.

Özellik 4.1.3. Sınırlı istatistiksel yakınsak bir seri, yakınsak olmak zorunda değildir. Bunu Örnek 4.1.2'den görebiliriz.

Örnek 4.1.2.

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n, & n = k^2 \text{ ise} \\ (-1)^n, & n-1 = k^2, k \in \mathcal{N} \text{ ise} \\ n^{-2}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisini göz önüne alalım bu seri sınırlı istatistiksel yakınsak olduğu halde yakınsak değildir.

Tanımdan ve Örnek 4.1.2'den "yakınsak her serinin istatistiksel yakınsak olduğu fakat tersinin doğru olmadığı açıktır."

Weierstrass tamlik prensibini kullanarak aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz

Önerme 4.1.1. Negatif terimli olmayan bir serinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart yakınsak olmasıdır.

Özellik 4.1.4. Eğer bir seri istatistiksel yakınsak ise bu takdirde onun her hangi bir düzenlenmiş istatistiksel yakınsak olmak zorunda değildir.

Bunun için Örnek 4.1.2'yi göz önüne alalım ve aşağıdaki şekilde bir düzenleme yapalım.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 1 - 1 + 4^{-1} + 1 - 1 + 9^{-1} + 1 - 1 + (16)^{-1} + 1 - 1 + (25)^{-1} + \dots$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi, Örnek 4.1.2'de tanımlanan ve istatistiksel yakınsak olan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin bir düzenlenmiş hali olduğu halde istatistiksel yakınsak değildir.

Tanımdan ve yukarıdaki örneklerden aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

Önerme 4.1.2. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ istatistiksel yakınsak bir seri ise bu takdirde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 'dır.

Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir.

Önerme 4.1.3. Eğer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ istatistiksel yakınsak iki seri ise bu takdirde

α, β kompleks sayılar olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ serisi $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ toplamına

istatistiksel yakınsaktır.

4.2. Temel Sonuçlar

Teorem 4.2.1. Eğer bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi istatistiksel yakınsak ise bu takdirde $\delta(K)=1$

olacak şekilde N^3 nin bir $K = \{k_1 < k_2 < k_3 < \dots\}$ alt cümlesi mevcuttur ve $\sum_i a_{k_i}$ yakınsaktır.

İspat : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ istatistiksel yakınsak olsun, bu takdirde Lemma 4.1.1'den $\delta(P) = 1$ ve

(S_{p_i}) yakınsak olacak şekilde $P = \{p_1 < p_2 < p_3 < \dots\} \subset N$ cümlesi mevcuttur.

$q_i \in P^c$ olmak üzere $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$ alt cümlesini oluşturalım. Eğer en az bir i için $m_i = m_{i+1}$ tekrarı mevcut ise bu takdirde m_i sayılıp ve m_{i+1} ihmal edilecektir. Bu takdirde $\delta(M)=0 \Rightarrow \delta(M^c)=1$ 'dir. $K=M^c$ olarak alırsak $\sum_{k \in K} a_k$ 'yı yakınsak elde ederiz.

Yukarıdaki sonucun tersi doğru değildir, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sınırlıdır. Örnek 4.2.1'den bu açıktır.

Örnek 4.2.1. $k \in N$, $n=k^2$ iken $a_n = (-1)^n$, aksi takdirde $a_n = 0$ şeklinde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

tanımlansın. Bu takdirde $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sınırlıdır.

Teorem 4.2.2. İstatistiksel yakınsak bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin ∞ 'a iraksayan zayıf

(inceltilmiş) bir alterne serisine sahip olması için gerek ve şart onun $-\infty$ 'a iraksayan inceltilmiş bir alt seriyeye sahip olmasıdır.

İspat : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ istatistiksel yakınsak olsun ve ∞ 'a iraksayan inceltilmiş bir alterne

seriyeye sahip olsun. Bu takdirde Önerme 4.1.1'den, onun pozitif terimlerinin olduğu kadar negatif terimlerinin de olduğu görülür. Özellik 4.1.1'dan (S_n) K 'da yakınsak ve $\delta(K)=1$

olacak şekilde $K \subset N$ cümlesi mevcuttur. $M, \sum_{k \in M} a_k = \infty$ olacak şekilde N 'nin inceltilmiş bir alt cümlesi olsun.

Bu takdirde istatistiksel yakınsak serilerinin tanımından $B = K^c - M \cap K^c$ olmak üzere $\sum_{k \in B} a_k = -\infty$ olduğu görülür. Aşıkarak $\delta(B) = 0$ 'dır. Benzer olarak tersi gösterilebilir.

Önerme 4.2.1. Kompleks terimli bir $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ k \in N : \left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

olacak şekilde $m = m(\varepsilon)$ olmasıdır.

Önerme 4.2.2. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $\delta[\{k \in N : a_k \neq b_k\}] = 0$ olacak şekilde yakınsak bir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ serisi mevcuttur.

(iii) $\delta(K) = 1$ olacak şekilde bir $K \subset N$ alt cümlesi mevcuttur ve $\sum_{k \in K} a_k$ yakınsaktır.

(iv) Her $n \in N$ için $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ yakınsak ve $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 'de sıfıra istatistiksel yakınsak olmak

üzere $a_n = x_n + y_n$ olacak şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ serileri mevcuttur.

Özellik 4.2.1. İstatistiksel yakınsak dizilerde kalan terimin limiti ayrıştırma teoremi için aynıdır fakat seriler için limit farklı olabilir.

4.3. İstatistiksel Yakınsak Fonksiyonlar Dizisi

$D \subset \mathbf{R}$ ve $\{f_k\}$ 'da D cümlesinde bir reel fonksiyonlar dizisi olsun.

Tanım 4.3.1. Bir $\{f_k(x)\}$ dizisinin istatistiksel monoton fonksiyon olması için gerek ve yeter şart $\delta(K) = 1$ ve $\{f_k(x)\}$ monoton olacak şekilde bir $K = \{k_i : i \in N\} \subset N$ alt cümlesinin var olmasıdır [16].

Lemma 4.1.1'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1. Eğer reel değerli bir $\{f_k(x)\}$ dizisi D cümlesi üzerinde noktasal istatistiksel yakınsak ise bu takdirde $\delta(K(x))=1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n} = \alpha$ yakınsak olacak şekilde bir

$$K(x) = \{k_1(x) < k_2(x) < \dots\} \subset \mathcal{N}$$

alt cümlesi vardır [16].

Bu durumda D cümlesi üzerinde

$$st - \lim f_k(x) = f(x)$$

yazacağız. Burada, D cümlesi üzerinde $st - \lim f_k(x) = f(x)$ olması için gerek ve yeter şart

$$st - \lim \left(\sup_{x \in D} |f_k(x) - f(x)| \right) = 0$$

olmasıdır.

Sonuç 4.3.2. Eğer $\{f_k\}$ fonksiyon dizisi D cümlesi üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün istatistiksel yakınsak ise bu takdirde $\{f_k\}$, D cümlesi üzerinde f 'e noktasal istatistiksel yakınsar [16].

Teorem 3.3.1. Eğer $\{f_k\}$ ve $\{g_k\}$ bir D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsak iki fonksiyon dizisi ise bu takdirde $\{f_k g_k\}$ 'da D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsaktır.

Aşağıdaki teorem düzgün istatistiksel yakınsaklık için Cauchy kriteridir.

Lemma 4.3.1. (f_n) dizisinin D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu dizinin D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

Şimdi fonksiyon serilerinin düzgün istatistiksel yakınsaklığını ve bazı temel sonuçları vereceğiz.

4.4. Fonksiyon Serilerinin Düzgün İstatistiksel Yakınsaklığı

$D \subset \mathbf{R}$ ve $\{f_k\}$ 'da D cümlesinde reel bir fonksiyon dizisi olsun.

Tanım 4.4.1. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi verilsin. Eğer bu serinin

$$\sum_{i=1}^k f_i(x) = s_k(x)$$

şeklinde tanımlanan kısmi toplamlar dizisi D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsak ise yani her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |s_k(x) - s(x)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

oluyorsa $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsaktır denir [16].

Örnek 4.4.1. $\sum f_k(x)$, $D = [0,1)$ üzerinde reel değerli fonksiyonlar serisi olsun ve

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k & , \quad k = n^2 \text{ ise} \\ -x^{k-1} & , \quad k-1 = n^2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |s_k(x)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olduğundan $\{f_k(x)\}$, D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsaktır. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi, D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.4.1. Eğer $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi düzgün istatistiksel yakınsak ise bu takdirde $st - \lim f_k = 0$ 'dır. Fakat bu ifadenin tersi sağlanmayabilir.

İspat : $s_k - s_{k-1} = f_k$ ve tüm istatistiksel yakınsak dizilerin cümlesi bir lineer uzay olduğundan $st - \lim f_k = 0$ 'dır.

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 3.2.1'in bir sonucudur.

Teorem 4.4.2. $\{f_k\}$ ve $\{g_k\}$ bir D cümlesi üzerinde tanımlı iki fonksiyon dizisi olsun.

Eğer D cümlesi üzerinde $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi f 'e ve $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ serisi de g 'e düzgün istatistiksel yakınsak

ise bu takdirde D cümlesi üzerinde $\sum_{k=1}^{\infty} (f_k + g_k)$ serisi $f+g$ toplamına düzgün istatistiksel yakınsaktır.

Cauchy kriteri, düzgün istatistiksel yakınsak seriler için de ifade edilebilir.

Teorem 4.4.3. D cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli $\sum f_k$ fonksiyon serisinin düzgün istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \in \mathbf{N} : \forall x \in D \text{ için } \left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde $m = m(\varepsilon)$ olmasıdır.

İspat : $\{s_k(x)\}$, $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $\{s_k(x)\}$ dizisinin D

cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsak olması bu dizinin düzgün istatistiksel Cauchy dizisi olmasını gerektirir.

Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \forall x \in D \text{ için } |s_k(x) - s_m(x)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \in \mathbf{N} : \forall x \in D \text{ için } \left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde $m = m(\varepsilon)$ mevcuttur.

Teorem 4.4.4. D cümlesi üzerinde reel değerli $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ fonksiyon serisinin düzgün istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \in \mathbf{N} : \forall x \in D \text{ için } |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olmasıdır.

İspat : Teoremin ispatı aşağıdaki eşitlikten kolayca elde edilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = s_k(x) + R_k(x)$$

Aşağıdaki ifade düzgün yakınsak seriler için Abel testinin bir genelleştirilmiştir.

Teorem 4.4.5. $\{f_k\}$ ve $\{g_k\}$ bir $D \subset \mathbf{R}$ cümlesi üzerinde fonksiyon dizileri olsunlar.

Kabul edelim ki her $x \in D$ ve her $n \in \mathbf{N}$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \in \mathbf{N} : \forall x \in D \text{ için } |s_k(x)| \geq M \right\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir M sayısı mevcut olsun. Ayrıca her bir noktada monoton olan $\{g_k\}$ fonksiyon dizisinin D cümlesi üzerinde 0'a düzgün istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\sum f_k g_k$ serisi D cümlesi üzerinde düzgün istatistiksel yakınsaktır.

İspat : Cauchy kriterini, düzgün istatistiksel yakınsaklığı elde etmek için seriye uygulayacağız. Farzedelim ki $g_k(x)$ negatif olmasın ve sıfıra doğru azalsın. $\varepsilon > 0$ olsun. Çok büyük n ve m 'ler ve her $x \in D$ için,

$$\left| \sum_{k=m}^n f_k(x)g_k(x) \right|$$

toplamını hesaplamamız gerekmektedir. $g_k(x)$ fonksiyon dizisi D cümlesi üzerinde 0'a istatistiksel yakınsak olduğu için her $x \in D$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ k \in N : \forall x \in D \text{ için } |g_k(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2M} \right\} = 0$$

bulabiliriz.

Elementer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n f_k g_k &= \sum_{k=m}^n (s_k - s_{k-1}) g_k \\ &= s_m (g_m - g_{m+1}) + s_{m+1} (g_{m+1} - g_{m+2}) + \dots + s_{n-1} (g_{n-1} - g_n) + s_n g_n \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu da her $x \in D$ ve h.h.h.k için tam olarak seriler için Cauchy kriteri olan

$$\sup_{x \in D} \left| \sum_{k=m}^n f_k(x)g_k(x) \right| \leq 2M \sup_{x \in D} |g_k(x)| < \varepsilon$$

ifadesini verir ki bu da ispatı tamamlar.

4.5. Uygulamalar

Düzgün istatistiksel yakınsaklığı kullanarak bazı uygulamalar elde edebiliriz. Burada Lemma 4.5.1'ten yararlanarak sadece bazı teoremler vereceğiz.

Lemma 4.5.1. D cümlesi üzerinde sürekli bütün f_k fonksiyonlarını göz önüne alalım. Eğer D cümlesi üzerinde $st - \lim f_k(x) = f(x)$ ise bu takdirde f, D cümlesi üzerinde süreklidir [16].

Teorem 4.5.1. D cümlesi üzerinde ki her bir f_k fonksiyonları sürekli bir fonksiyon ve $\sum f_k$ düzgün istatistiksel yakınsak ise bu takdirde $\sum f_k$ 'da D cümlesi üzerinde süreklidir [16].

Teorem 4.5.2. Eğer $[a, b]$ üzerinde her bir f_k integrallenebilir bir fonksiyon ve $\sum f_k$ 'da düzgün istatistiksel yakınsak ise $\sum f_k$, $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b \left(st - \lim \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) = st - \lim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_k \right)$$

dır [16].

Teorem 4.5.3. Kabul edelim ki $[a, b]$ üzerinde her bir f_k sürekli bir türeve sahip olsun.

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)$, $[a, b]$ 'de bazı c 'ler için istatistiksel yakınsak olsun ve $\sum f_k'$, $[a, b]$ üzerinde

düztün istatistiksel yakınsak olsun. Bu takdirde $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ serisi $[a, b]$ üzerinde $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$

diferensiyellenebilir fonksiyonuna düztün istatistiksel yakınsaktır ve

$$\left(st - \lim \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)' = st - \lim \sum_{k=1}^{\infty} f_k'$$

dır [16].



KAYNAKLAR

1. Fast, H., 1951, Sur la Convergence Statistical, Colloq. Math. 2, 241-244.
2. Buck, R.C., 1953, Generalized Asymptotic Density, Amer. Jour. Math. 75, 335-346.
3. Schoenberg, I.J., 1959, The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods, Amer. Math. Montly, 66, 361-365.
4. Fridy, J.A., 1985, On Statistical Convergence, Analysis, 5, 301-313
5. Fridy, J.A., 1993, Statistical Limit Points, Proc. Amer. Math. Soc. Vol.118, No.4,1187-1192
6. Šalát, T., 1980, On Statistically Convergent Sequences of Real Numbers, Math. Slovaca 30,139-150.
7. Rath, D. and Tripaty, B.C., 1996, Matrix Maps on Sequences Spaces Associated with Sets of Integers, Ind. Jour. Pure & Appl. Math. 27 (2), 197-206.
8. Tripaty, B.C., 1999, On Statistically Convergent Series, xxxii , 1-8
9. Connor, J.S., 1988, The Statistical and Strong p-Cesaro Convergence of Sequences, Analysis, 8, 47-63.
10. Maddox, I.J., 1988, Statistical Convergence in a Locally Convex Sequence Space, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 104, 141-145.
11. Gökhan, A. and Güngör, M., 2002, On Pointwise Statistical Convergence, Ind. J Pure appl. Math; 33(9), 1379-1384.
12. Maddox, I.J., 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Pres. London.
13. Balcı, M., 1996, Matematik Analiz Cilt 2, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi.
14. Niven, I., and Zuckerman, H.S., 1960, An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley Sons. New York.
15. Freedman, A.R., and Sember, J.J., 1981, Densities and Summability, Pacific J. Math. 95(2), 293-305.
16. Gürdal, M., 2004, On Statistically Convergent Series of Functions, Far East J Math. Sci, 13(1), 1-10

ÖZGEÇMİŞ

1979 Elazığ doğumluyum. İlköğretim, orta okul ve lise öğrenimimi Elazığ'da tamamladım. 1996 Yılında Elazığ Mehmet Akif Ersoy lisesinden mezun olduktan sonra aynı yıl Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. Dört yıl süren lisans öğrenimimi tamamladıktan sonra Elazığ Vali Tevfik Gür İlköğretim Okulu'na matematik öğretmeni olarak atandım. 2001 yılında Ydk. Sby. Öğretmen olarak Elazığ ili Arıcak ilçesinde görev yaptım. 2002 yılında lisans öğrenimimi tamamladığım bölümde yüksek lisans yapmaya hak kazandım. Şu an Elazığ Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım. Evli ve bir erkek çocuk sahibiyim.

Barış ÖREN

