

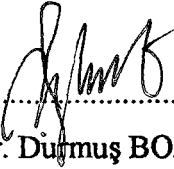
T.C  
SELÇUK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CAUCHY – TOEPLITZ VE CAUCHY – HANKEL MATRİSLERİNİN KHATRİ –  
RAO VE TRACY – SİNGH ÇARPIMLARININ NORMLARI ÜZERİNE

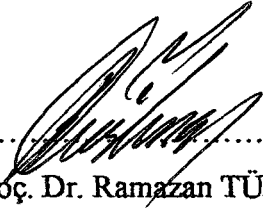
Hacı CİVCİV

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu tez 10 / 01 / 2005 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği / oyçokluğu  
ile kabul edilmiştir.

  
.....  
Prof. Dr. Durmuş BOZKURT  
( Üye )

  
.....  
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA  
( Üye )

  
.....  
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN  
( Danışman )

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CAUCHY – TOEPLITZ VE CAUCHY – HANKEL MATRİSLERİNİN KHATRİ –  
RAO VE TRACY – SİNGH ÇARPIMLARININ NORMLARI ÜZERİNE

Hacı CİVCİV

Selçuk Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2005, 72 sayfa

Jüri :

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT  
Yrd. Doç. Dr. Necati TAŞKARA  
Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

Cauchy – Toeplitz matrislerinin singüler değerleriyle G. Szegő ilgilenmiş ve bununla ilgili bir problem ortaya koymuştur. Daha sonra bu matrisler, C. Möler 'in dikkatini çekmiş ve C. Möler deneysel olarak bu matrislerin singüler değerlerinin çoğunun  $\pi$  'ye yaklaştığını tespit etmiş ama bu analitik olarak S. V. Parter tarafından çözülmüştür. E. E. Tyrtysnikov  $g=1/2$  ve  $h=1$  özel durumu için, bu matrisin singüler değerleri için bir alt ve üst sınır bulmuştur. Durmuş Bozkurt bu matrisin genel halinin Euclide normu için bir alt ve üst sınır bulmuştur.

Biz bu çalışmada,  $g < h$  ve  $g, h \in \mathbb{R}^+$  olmak üzere, genel Cauchy –Toeplitz matrislerinin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının  $\ell_p$  normu için bir alt ve üst sınır bulduk ve yine aynı şartlar altında Cauchy –Hankel matrislerinin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının  $\ell_p$  normu için bir alt ve üst sınır tespit ettik.

**ANAHTAR KELİMELELER :** Matris Normu, Cauchy – Toeplitz Matrisleri, Cauchy – Hankel Matrisleri, Khatri – Rao Çarpımı, Tracy – Singh Çarpımı.

## ABSTRACT

The Post Graduate Thesis

### ON THE NORMS OF KHATRI – RAO AND TRACY – SINGH PRODUCTS OF CAUCHY – TOEPLITZ AND CAUCHY – HANKEL MATRICES

Hacı CİVCİV

Selçuk University

Graduate School of Natural and Applied Science

Department of Mathematics

Supervisor : Ass. Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN

2005, 72 pages

Jury :

Prof. Dr. Durmuş BOZKURT

Assoc. Prof. Dr. Necati TAŞKARA

Assoc. Prof. Dr. Ramazan TÜRKMEN

G. Szegő interested in the singular values of Cauchy – Toeplitz matrix and put forward a problem. Later, these matrices attracted the attention of C. Moler, who had experimentally discovered that most of their singular values are clustered near  $\pi$ . Recently, S. V. Parter gave an explanation of this phenomenon E. E. Tyrtyshnikov obtained a lower and upper bound for spectral norm of Cauchy – Toeplitz matrix such that  $h = 1$  and  $g = 1/2$ . D. Bozkurt, found a lower and upper bound for the general condition of Euclidian norm of Cauchy – Toeplitz matrices.

In this study, we have established a lower and an upper for the  $\ell_p$  norms of Khatri – Rao and Tracy – Singh Products of the Cauchy – Toeplitz matrix such that  $g < h$  and  $g, h \in \mathbb{R}^+$ . Moreover, we have obtained an upper bound for the  $\ell_p$  norms of Cauchy – Hankel matrix such that  $g < h$  and  $g, h \in \mathbb{R}^+$ .

**KEYWORDS :** Matrix Norm, Cauchy – Toeplitz matrices, Cauchy – Hankel matrices, Khatri – Rao Product, Tracy – Singh Product.

## ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Selçuk Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi, Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN danışmanlığında yapılarak, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü 'ne yüksek lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma, matris teorisinde önemli bir yere sahip olan vektör ve matris normları üzerine hazırlanmıştır. Çalışmanın birinci bölümü ' Giriş ' e ayrılmış, ikinci bölümde ise, bazı özel matris çarpım tanımları ve ayrıca vektör ve matris normlarıyla ilgili temel tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, Cauchy–Toeplitz matris tanımları verilerek, bu matrislerin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının  $\ell_p$  normları için alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Dördüncü bölümde ise, Cauchy–Hankel matris tanımları verilerek, bu matrislerin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının  $\ell_p$  normları için alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Beşinci bölümde, bu çalışma boyunca elde edilen sonuçlar açıklanmış ve bu çalışmanın oluşumu esnasında üretilen düşünce doğrultusunda daha neler elde edilebileceği hakkında önerilerde bulunulmuştur.

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmam süresince her türlü yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN 'e teşekkür ederim.

Hacı CİVCİV

Konya, 2005

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZET.....                                                                         | İii |
| ABSTRACT.....                                                                     | İv  |
| ÖNSÖZ.....                                                                        | V   |
| 1. GİRİŞ.....                                                                     | 1   |
| 2. GENEL BİLGİLER.....                                                            | 3   |
| 2.1 Bazı Özel Matris Çarpımları.....                                              | 4   |
| 2.2 Vektör Normları.....                                                          | 5   |
| 2.3 Matris Normları.....                                                          | 7   |
| 3. CAUCHY – TOEPLITZ MATRİSLERİ.....                                              | 10  |
| 3.1 Cauchy – Toeplitz Matrislerinin Khatri – Rao Çarpımlarının $\ell_p$ Normları  | 11  |
| 3.2 Cauchy – Toeplitz Matrislerinin Tracy - Singh Çarpımlarının $\ell_p$ Normları | 31  |
| 4. CAUCHY – HANKEL MATRİSLERİ.....                                                | 47  |
| 3.1 Cauchy – Hankel Matrislerinin Khatri – Rao Çarpımlarının $\ell_p$ Normları    | 47  |
| 3.2 Cauchy – Hankel Matrislerinin Tracy - Singh Çarpımlarının $\ell_p$ Normları   | 59  |
| 5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                                         | 70  |
| 6. KAYNAKLAR.....                                                                 | 71  |

## 1. GİRİŞ

Bu çalışmada,  $g$  ve  $h$ ; sıfırdan farklı ve  $g/h \notin \mathbb{Z}$  olacak şekilde herhangi iki sayı olmak üzere,  $T_n = \left[ \frac{1}{g + (i-j)h} \right]_{i,j=1}^n$  formunda belirtilen Cauchy – Toeplitz matrisi ile yine aynı şartlarda,  $H_n = \left[ \frac{1}{g - (i+j)h} \right]_{i,j=1}^n$  formunda belirtilen Cauchy – Hankel matrislerinin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının  $\ell_p$  normları üzerinde durulacaktır.

Bu matrislerde ilk olarak C. Moler çalışmıştır. C. Moler,  $g=1/2$  ve  $h=1$  için bu matrislerin singüler değerlerinin  $\pi$ 'ye yaklaştığını deneysel olarak göstermiştir. Ancak, bunun doğruluğunu S. V. Parter ispatlamıştır.

S. Roch ve B. Silberman ( 1998 ),  $g$  ve  $h$  üzerinde bazı kısıtlamalar yaparak, Cauchy – Toeplitz matrislerinin singüler değerleri için bazı alt sınırlar teşkil etmişlerdir.

E. E. Tyrtyshnikov ( 1991 ),  $T_n = \left[ 2/(1+2(i-j)) \right]_{i,j=1}^n$  olarak tanımladığı Cauchy – Toeplitz matrisinin spektral normu için bir alt sınır bulmuştur. E. E. Tyrtyshnikov, aynı çalışmasında  $n = 40, 60, 100$  için  $\varepsilon = 10^{-4}$  olmak üzere,  $T_n$ 'in  $\rho_{1n} \geq \rho_{2n} \geq \dots \geq \rho_{nn}$  ve  $\rho_{jn} > \pi - \varepsilon$  olacak şekildeki singüler değerlerinin sayısının sırayla 6, 7, 8 olduğunu göstermiştir.

D. Bozkurt ( 1996 ), E. E. Tyrtyshnikov'un,  $T_n = \left[ 2/(1+2(i-j)) \right]_{i,j=1}^n$  şeklinde tanımlanan Cauchy – Toeplitz matrisi için bulduğu alt sınırı,  $g$  ve  $h$  sıfırdan farklı ve  $g/h \notin \mathbb{Z}$  olacak şekilde herhangi iki sayı,  $s_n > 0$  ve  $s_n = o(1/n)$  olmak

üzere,  $T_n = \left[ \frac{1}{g + (i-j)h} \right]_{i,j=1}^n$  için

$$\frac{\sqrt{n\pi}}{|h|} - s_n \leq \|T_n\| \leq \frac{\sqrt{n\pi}}{|h|}$$

olarak genelleştirmiştir.

D. Bozkurt ( 1997 ),  $T_n = \left[ 2 / (1 + 2(i - j)) \right]_{i,j=1}^n$  ve  $H_n = \left[ 2 / (1 - 2(i + j)) \right]_{i,j=1}^n$

olarak tanımladığı Cauchy – Toeplitz ve Cauchy – Hankel matrislerinin Hadamard çarpımı için alt ve üst sınırlar tespit etmiştir.

S. Liu ( 1999 ), sırasıyla genelleştirilmiş Hadamard ve genelleştirilmiş Kronecker çarpımları olarak bilinen, Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarını tanımlamış ve bu iki çarpımı içeren eşitsizlikler elde etmiştir. Ayrıca, bu eşitsizlikler için de iki istatistik uygulaması verilmiştir.

Biz bu çalışmada,  $g$  ve  $h$ ; sıfırdan farklı ve  $g/h \notin \mathbb{Z}$  olacak şekilde tayin

edilen bazı  $g$  ve  $h$  için, herhangi iki sayı olmak üzere,  $T_n = \left[ \frac{1}{g + (i - j)h} \right]_{i,j=1}^n$  formunda

belirtilen Cauchy – Toeplitz matrisi ile yine aynı şartlarda,

$H_n = \left[ \frac{1}{g - (i + j)h} \right]_{i,j=1}^n$  formunda belirtilen Cauchy –Hankel matrislerinin Khatri –

Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının  $\ell_p$  normları için alt ve üst sınırlar verdik.

## 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölüm, sonraki bölümler için gerekli olan temel tanımlardan oluşmaktadır. Öncelikle, çalışma boyunca kullanılacak olan polygamma fonksiyonu ve onun özellikleri hakkında kısaca bilgi verelim.

**Tanım 2.1.** Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

olmak üzere,

$$\Psi(x) = \text{Psi}(x) = \frac{d}{dx} \{ \ln[\Gamma(x)] \}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona psi ( veya digamma ) fonksiyonu denir. Psi fonksiyonunun  $n$ . mertebeden türevine de polygamma fonksiyonu denir ve

$$\Psi(n, x) = \frac{d^n}{dx^n} \text{Psi}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{d}{dx} \ln[\Gamma(x)] \right]$$

şeklinde gösterilir. Burada  $n \geq 0$  dır. Eğer,  $n = 0$  ise

$$\Psi(0, x) = \text{Psi}(x) = \frac{d}{dx} \{ \ln[\Gamma(x)] \}$$

olur ( Kölbig 1972 ).

**Özellik 2.1**  $a \in \mathbb{Z}^+$ ,  $b$  herhangi bir sayı ve  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi(a, n+b) = 0$$

dır ( Bozkurt 1998 ).



## 2.1. Bazı Özel Matris Çarpımları

**Tanım 2.1.1.**  $A$  ve  $B$  sırasıyla,  $A = (a_{ij})_{ij}$ ,  $B = (b_{kl})_{kl}$  şeklinde  $m \times n$  ve  $p \times q$  mertebeli herhangi iki kompleks matris olmak üzere,

$$\begin{aligned} A \otimes B &= (a_{ij}B)_{ij} \\ &= ((a_{ij} b_{kl})_{kl})_{ij} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan,  $mp \times nq$  mertebeli  $A \otimes B$  matrisine,  $A$  ve  $B$  matrislerinin Kronecker çarpımı denir.

Kronecker çarpıma aynı zamanda, tensör çarpım ya da direkt çarpım da denir.

**Tanım 2.1.2.**  $A$  ve  $B$  sırasıyla,  $A = (a_{ij})_{ij}$ ,  $B = (b_{kl})_{kl}$  şeklinde  $m \times n$  mertebeli herhangi iki kompleks matris olmak üzere,

$$A \circ B = (a_{ij}b_{ij})_{ij}$$

şeklinde tanımlanan  $m \times n$  mertebeli  $A \circ B$  matrisine  $A$  ve  $B$  matrislerinin Hadamard çarpımı denir.

**Tanım 2.1.3**  $A$  ve  $B$  sırasıyla,  $A = (a_{ij})_{ij}$ ,  $B = (b_{kl})_{kl}$  şeklinde  $m \times n$ ,  $p \times q$  mertebeli herhangi iki kompleks matris ve  $A_{ij}$ ,  $B_{kl}$  de sırasıyla  $A$  ve  $B$  matrislerinin  $m_i \times n_j$  ( $\sum m_i = m, \sum n_j = n$ ),  $p_k \times q_l$  ( $\sum p_k = p, \sum q_l = q$ ) mertebeli ( $i, j$ )-inci ve ( $k, l$ )-inci blok alt matrisleri olmak üzere;

$$A \odot B = ((A_{ij} \otimes B_{kl})_{kl})_{ij}$$

şeklinde tanımlanan  $mp \times nq$  mertebeli  $A \odot B$  matrisine,  $A$  ve  $B$  matrislerinin Tracy-Singh çarpımı denir (Shuangzhe 1999).

**Tanım 2.1.4**  $A$  ve  $B$  sırasıyla  $A = (a_{ij})_{ij}$ ,  $B = (b_{kl})_{kl}$  şeklinde  $m \times n$ ,  $p \times q$  mertebeli herhangi iki kompleks matris ve  $A_{ij}$ ,  $B_{kl}$  de sırasıyla  $A$  ve  $B$  matrislerinin,  $m_i \times n_j$  ( $\sum_{i=1}^s m_i = m$ ,  $\sum_{j=1}^t n_j = n$ ),  $p_k \times q_l$  ( $\sum_{k=1}^s p_k = p$ ,  $\sum_{l=1}^t q_l = q$ ) mertebeli, aynı sayıdaki  $(i, j)$ -inci ve  $(k, l)$ -inci blok alt matrisleri olmak üzere;

$$A * B = (A_{ij} \otimes B_{kl})_{ij}$$

şeklinde tanımlanan  $(\sum_{i=1}^s m_i p_i) \times (\sum_{j=1}^t n_j q_j)$  mertebeli  $A * B$  matrisine,  $A$  ve  $B$  matrislerinin *Khatri-Rao çarpımı* denir (Shuangzhe 1999).

## 2.2. Vektör Normları

**Tanım 2.2.1**  $F$ , reel ya da kompleks sayılar cismi ve  $V$ ,  $F$  cismi üzerinde tanımlanmış vektör uzayı olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ v &\rightarrow \|v\| \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen ve

i) Her  $v \in V$  için,

i a)  $v \neq 0$  ise,  $\|v\| > 0$  dır,

i b)  $v = 0$  olması için gerek ve yeter şart  $\|v\| = 0$  olmasıdır,

ii)  $\alpha \in F$  ve  $v \in V$  için,  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$  dır,

iii)  $u, v \in V$  için,  $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$  dır,

aksiyomlarını sağlayan  $\|\cdot\|$  dönüşüme, *vektör normu* denir.

Bu tanım dikkate alınarak, bir çok vektör normu tanımlanabilir.

Bileşenleri kompleks sayılar olan  $n$  – mertebeli vektörlerden oluşan  $\mathbb{C}^n$  cümlesi, kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzaydır.

**Tanım 2.2.2**  $\| \cdot \|_1 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$

ile ifade edilen ve  $v = (v_i) \in \mathbb{C}^n$  ( $1 \leq i \leq n$ ) için,

$$\| v \|_1 = \sum_{i=1}^n | v_i |$$

şeklinde tanımlanan  $\| \cdot \|_1$  dönüşümüne,  $v$  vektörünün *toplam normu* denir.

**Tanım 2.2.3**  $\| \cdot \|_2 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$

ile ifade edilen ve  $v = (v_i) \in \mathbb{C}^n$  ( $1 \leq i \leq n$ ) için,

$$\| v \|_2 = \left( \sum_{i=1}^n | v_i |^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan  $\| \cdot \|_2$  dönüşümüne,  $v$  vektörünün *Euclidean* (veya *Frobenius*) *normu* denir.

**Tanım 2.2.4**  $\| \cdot \|_p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{ 0 \}$

ile ifade edilen ve  $v = (v_i) \in \mathbb{C}^n$  ( $1 \leq i \leq n$ ) için,

$$\| v \|_p = \left( \sum_{i=1}^n | v_i |^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

şeklinde tanımlanan  $\| \cdot \|_p$  dönüşümüne  $v$  vektörünün  $p$  – *normu* ( veya *Holder* ) *normu* denir.

## 2.3 Matris Normları

**Tanım 2.3.1**  $F$ , reel ya da kompleks sayılar cismi,  $M_n(F)$ ; bileşenleri  $F$  cisminin elemanları olan  $n$  - mertebeli karesel matrislerin cümlesi olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : M_n(F) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ A &\rightarrow \|A\| \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen ve

- i )  $A \in M_n(F)$  için,
  - i a )  $A \neq 0$  ise,  $\|A\| > 0$  dır,
  - i b )  $A = 0$  olması için gerek ve yeter şart  $\|A\| = 0$  olmasıdır,
- ii )  $\alpha \in F$  ve  $A \in M_n(F)$  için,  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  dır,
- iii )  $A, B \in M_n(F)$  için,  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$  dır,
- iv )  $A, B \in M_n(F)$  için,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  dır,

aksiyomlarını sağlayan  $\|\cdot\|$  dönüşüme, *matris normu* denir.

**Tanım 2.3.2**  $F$ , reel ya da kompleks sayılar cismi,  $M_{n,m}(F)$ ; bileşenleri  $F$  cisminin elemanları olan  $n \times m$  mertebeli matrislerin cümlesi olmak üzere;

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : M_{n,m}(F) &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ A &\rightarrow \|A\| \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen ve

- i )  $A \in M_{n,m}(F)$  için,
  - i a )  $A \neq 0$  ise,  $\|A\| > 0$  dır,
  - i b )  $A = 0$  olması için gerek ve yeter şart  $\|A\| = 0$  olmasıdır,
- ii )  $\alpha \in F$  ve  $A \in M_{n,m}(F)$  için,  $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$  dır,

iii )  $A, B \in M_{n,m}(F)$  için,  $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$  dir,

aksiyomlarını sağlayan  $\|\cdot\|$  dönüşüme, *genelleştirilmiş matris normu* denir.

**Tanım 2.3.3**  $F$ , reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$\|\cdot\|_2 : M_n(F) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

ile ifade edilen ve  $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) için,

$$\|A\|_2 = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan  $\|\cdot\|_2$  dönüşümüne, *Euclide normu* denir.

Bazen, bu şekilde tanımlanan norm için, Euclide normu yerine Frobenius norm, Schur norm, Hilbert-Schmidt norm veya  $\ell_2$  norm ifadeleri de kullanılır.

**Tanım 2.3.4**  $F$ , reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$\|\cdot\|_{g2} : M_{n,m}(F) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

ile ifade edilen ve  $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(F)$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ) için,

$$\|A\|_2 = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme *genelleştirilmiş - Euclide normu* denir.

**Tanım 2.3.5**  $F$ , reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$\|\cdot\|_p : M_n(F) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

ile ifade edilen ve  $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) için,

$$\|A\|_p = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan  $\|\cdot\|_p$  dönüşümüne,  $\ell_p$  *matris normu* denir.

**Tanım 2.3.6**  $F$ , reel ya da kompleks sayılar cismi olmak üzere;

$$\|\cdot\|_p : M_{n,m}(F) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

ile ifade edilen ve  $A = (a_{ij}) \in M_{n,m}(F)$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ) için,

$$\|A\|_p = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme *genelleştirilmiş  $\ell_p$  matris normu* denir.

### 3. CAUCHY – TOEPLITZ MATRİSLERİ

**Tanım 3.1.**  $x_i \neq y_j$  ( $x_i, y_j \in \mathbb{C}$ ) ve  $1 \leq i, j \leq n$  olmak üzere elemanları,

$$c_{ij} = \frac{1}{x_i - y_j} \quad (3.1)$$

ile tanımlı  $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$  matrisine *Cauchy matrisi* denir ( Horn ve Kattaneh 1998, Tyrtshnikov 1991, Calvetti ve Reichel 1997 ).

**Tanım 3.2.**  $n \geq 1$  ve  $t_{i-j}$  'ler kompleks sayılar olmak üzere,

$$T_{n-1} = (t_{i-j})_{i,j=0}^{n-1}$$

şeklindeki matrise *Toeplitz matrisi* denir ( Iohvidov 1982 ).

**Tanım 3.3** ( 3.1 ) ile verilen Cauchy matrisinde,  $a$  ve  $b$  keyfi sayılar olmak üzere,

$(b \neq 0, \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z})$   $x_i = a + bi$  ve  $y_j = jb$  alınarak elde edilen

$$T_n = \left[ \frac{1}{a + (i-j)b} \right]_{i,j=1}^n$$

matrisine Cauchy – Toeplitz matrisi denir ( Tyrtshnikov 1991, Trench 1999 ).

### 3.1. Cauchy – Toeplitz Matrislerinin Khatri – Rao Çarpımlarının $\ell_p$ Normları İçin Sınırlar

**Teorem 3.1.1**  $T_n$ ; ( 3.1 ) ile tanımlanan Cauchy matrisinde  $x_i = \frac{1}{2} + i$ ,  $y_j = j$  alınması ile elde edilen,

$$T_n = \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + (i-j)} \right]_{i,j=1}^n \quad (3.1.1)$$

şeklinde bir Cauchy-Toeplitz matrisi ve  $\zeta(p)$ , Riemann – Zeta fonksiyonu olmak üzere,  $T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için,

$$\left[ (2^p - 1) \zeta(p) \right]^{1/p} \leq n^{-1/p} \|T_n\|_p \leq 2^{1/p} \left[ (2^p - 1) \zeta(p) \right]^{1/p} \quad (3.1.2)$$

şeklinde bir alt ve üst sınır vardır ( Bozkurt 1996 ).

**Teorem 3.1.2**  $T_n$ , ( 3.1.1 ) ile verilen  $n$ - mertebeli ( $n \geq 2$ ) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n * T_n$  ile gösterilen Khatri-Rao çarpımının  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) matris normu için,

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &\leq \left[ (n-1)(2^{p+1} - 2) \zeta(p) \right]^2 + \left[ (2^p - 1) \zeta(p) \right]^2 \\ &\quad + \left[ (2^p - 1) \zeta(p) - 2^p \right]^2 + 4^p \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

şeklinde bir üst sınır,



$$\|T_n * T_n\|_p^p \geq \left[ (2^p - 1) \zeta(p) \right]^2 + 2 \left[ (2^p - 2) \zeta(p-1) - (2^p - 1) \zeta(p) \right]^2 + 4^p \quad (3.1.4)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 3.1.1 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Toeplitz matrisini,

$$T_n^{(11)} = T_{n-1}, \quad T_n^{(12)};$$

$$T_n^{(12)} = \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + i - n} \right]_{i=1}^{n-1} \quad (3.1.5)$$

şeklinde (  $n-1$  ) – mertebeli reel sütun vektör,  $T_n^{(21)}$ ;

$$T_n^{(21)} = \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + n - j} \right]_{j=1}^{n-1} \quad (3.1.6)$$

şeklinde (  $n-1$  )- mertebeli reel satır vektör,  $T_n^{(22)}$ ;

$$T_n^{(22)} = (2)_{1 \times 1} \quad (3.1.7)$$

şeklinde bir matris olmak üzere,

$$T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \end{bmatrix} \quad (3.1.8)$$

şeklinde blok matrislere ayırılım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki Cauchy-Toeplitz matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$T_n \ast T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} \otimes T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde  $2((n-1)^2 + 1)$ - mertebeli karesel reel  $T_n \ast T_n$  matrisidir.

(  $n-1$  ) - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki  $T_{n-1}$  Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_{n-1} \otimes T_{n-1} = \left[ \left[ \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i - j\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + k - l\right)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan,  $(n-1)^2$  - mertebeli karesel reel matris; (  $n-1$  ) - mertebeli iki  $T_n^{(12)}$  vektörünün Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} = \left[ \left[ \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i - n\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + k - n\right)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde (  $n-1$  )<sup>2</sup> - mertebeli reel sütun vektör; (  $n-1$  ) - mertebeli iki  $T_n^{(21)}$  vektörünün Kronecker çarpımı;

$$T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} = \left[ \left[ \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + n - j\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + n - l\right)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde  $(n-1)^2$  - mertebeli reel satır vektör; 1 - mertebeli reel iki  $T_n^{(22)}$  matrisinin Kronecker çarpımı,  $T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} = (4)_{1 \times 1}$  şeklinde 1 - mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) matris normu ve vektörler için tanımlanan  $p$  - normu tanımlarından,

$$\|T_n \circledast T_n\|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \|T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(ij)}\|_p^p \quad (3.1.9)$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan,  $T_n^{(11)} \otimes T_n^{(11)}$ ,  $T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)}$  karesel matrislerin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normlarının ve  $T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)}$ ,  $T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)}$  vektörlerinin  $p$  - normlarının  $p$ . kuvvetlerinin ve de (3.1.9) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\begin{aligned} \|T_n \circledast T_n\|_p^p &= \left[ \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - j \right|^p} \right]^2 + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - n \right|^p} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + n - j \right|^p} \right)^2 + 4^p \\ &= \left[ 2^p \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|2i - 2j + 1|^p} \right]^2 + \left( 2^p \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|2i - 2n + 1|^p} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| j - n - 1 + 1 - \frac{1}{2} \right|^p} \right)^2 + 4^p \\ &= \left[ 2^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n - 2k - 1}{(2k - 1)^p} \right]^2 + \left( 2^p \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|2i - 2n + 1|^p} \right)^2 + \left( 2^p \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|2j - 2(n+1) + 1|^p} \right)^2 + 4^p \\ \|T_n \circledast T_n\|_p^p &= \left[ 2^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n - 2k - 1}{(2k - 1)^p} \right]^2 + \left( 2^p \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i + 1)^p} \right)^2 \\ &\quad + \left( 2^p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2i + 1)^p} - 2^p \right)^2 + 4^p \quad (3.1.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|T_n \circledast T_n\|_p^p &= \|T_{n-1}\|_p^{2p} + \left(2^p \left( \sum_{k=1}^{2n-3} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^p} \right)\right)^2 \\ &\quad + \left(2^p \left( \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - 2^p\right)^2 + 4^p \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

eşitliği elde edilir. Böylece; (3.1.11) eşitliği ve Teorem 3.1.1 de verilen (3.1.2) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|T_n \circledast T_n\|_p^p &\leq \left[ (n-1)(2^{p+1} - 2) \zeta(p) \right]^2 + \left(2^p \left( \sum_{k=1}^{2n-3} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^p} \right)\right)^2 \\ &\quad + \left(2^p \left( \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - 2^p\right)^2 + 4^p \\ \|T_n \circledast T_n\|_p^p &\leq \left[ (n-1)(2^{p+1} - 2) \zeta(p) \right]^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^p \left( \sum_{k=1}^{2n-3} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k^p} \right)\right)^2 \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^p \left( \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^p} \right) - 2^p\right)^2 + 4^p \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

eşitsizliği elde edilir. (3.1.12) eşitsizliği ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \zeta(p)$$

eşitliği ile, (3.1.1) ' deki gibi tanımlanan  $n$  - mertebeli iki  $T_n$  Cauchy- Toeplitz matrisinin Khatri – Rao çarpımı olan,  $2((n-1)^2 + 1)$ - mertebeli karesel reel  $T_n \circledast T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için,

$$\|T_n \circledast T_n\|_p^p \leq \left[ (n-1)(2^{p+1} - 2)\zeta(p) \right]^2 + \left[ (2^p - 1)\zeta(p) \right]^2 + \left[ (2^p - 1)\zeta(p) - 2^p \right]^2 + 4^p$$

şeklinde bir üst sınır bulunmuş olunur ve böylece ( 3.1.3 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

$T_n \circledast T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normunun bir alt sınırını bulmak için, ( 3.1.10 ) eşitliği olarak bilinen,

$$\|T_n \circledast T_n\|_p^p = \left[ 2^p \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n-2k-1}{(2k-1)^p} \right]^2 + \left( 2^p \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p} \right)^2 + \left( 2^p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} - 2^p \right)^2 + 4^p$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu eşitsizlik ile,

$$\|T_n \circledast T_n\|_p^p = \|T_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p} \left( \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p} \right)^2 + 2^{2p} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} \right)^2 + 4^p$$

$$\geq n^{-2} \|T_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p+1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} \right)^2 + 4^p$$

$$\|T_n \circledast T_n\|_p^p \geq (n^{-1/p} \|T_{n-1}\|_p)^{2p} + 2^{2p+1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} \right)^2 + 4^p \quad (3.1.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece elde edilen ( 3.1.13 ) eşitsizliği ve Teorem 3.1.1 de verilen ( 3.1.2 ) eşitsizliği ile,

$$\|T_n \circledast T_n\|_p^p \geq \left[ (2^p - 1)\zeta(p) \right]^2 + 2^{2p+1} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) \right]^2 + 4^p \quad (3.1.14)$$

eşitsizliği yazılır. Böylece, ( 3.1.14 ) eşitsizliğinde yer alan

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right)$$

teriminin Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \frac{(-1)^p}{2^{p-1}(p-2)!} \Psi \left( p-2, n+\frac{1}{2} \right) + \left( 1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) \zeta(p-1) \\ + \frac{(-1)^p}{2^p(p-1)!} \Psi \left( p-1, n+\frac{1}{2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) \zeta(p)$$

şeklinde yazılır ve ayrıca,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) \zeta(p-1) - \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) \zeta(p) \quad 3.1.15$$

olduğundan, böylece, ( 3.1.14 ) eşitsizliği ve ( 3.1.15 ) eşitliği dikkate alınarak,  $T_n * T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için,

$$\|T_n * T_n\|_p^p \geq \left[ (2^p - 1) \zeta(p) \right]^2 + 2 \left[ (2^p - 2) \zeta(p-1) - (2^p - 1) \zeta(p) \right]^2 + 4^p$$

şeklinde bir alt sınır bulunmuş olunur ve böylece ( 3.1.4 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

**Teorem 3.1.3**  $g$  ve  $h$ ;  $0 < g/h < 1$  olacak şekilde herhangi iki reel sayı olmak üzere,

$$T_n = \left[ \frac{1}{g + (i-j)h} \right]_{i,j=1}^n \quad (3.1.16)$$

şeklinde tanımlanan  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin  $\ell_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) matris normu için,

$$\|T_n\|_p \geq \frac{1}{|h|} \begin{cases} \left[ -\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right]^{1/p}, & p \text{ tek} \\ \left[ \left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right]^{1/p}, & p \text{ çift} \end{cases} \quad (3.1.17)$$

$$\|T_n\|_p \leq \frac{n^{1/p}}{|h|} \begin{cases} \left[ -\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^{1/p}, & p \text{ tek} \\ \left[ \left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^{1/p}, & p \text{ çift} \end{cases} \quad (3.1.18)$$

şeklinde alt ve üst sınırlar vardır ( Tekin 1996 ).

**Teorem 3.1.4**  $T_n$ , ( 3.1.16 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n * T_n$  ile gösterilen Khatri-Rao çarpımının  $\ell_p$  (  $1 \leq p < \infty$  ) matris normu için,  $p$  tek ise;

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &\leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[ -\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \zeta^2\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta^2\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{(g)^{2p}} \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

$p$  çift ise,

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &\leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[ \left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \zeta^2\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta^2\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{(g)^{2p}} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

şeklinde bir üst sınır vardır.  $p$  tek ise,

$$\|T_n * T_n\|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ -\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right]^2 + \frac{1}{(g-h)^{2p}} + \frac{1}{(g+h)^{2p}} + \frac{1}{(g)^{2p}} \quad (3.1.21)$$

$p$  çift ise,

$$\|T_n * T_n\|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right]^2 + \frac{1}{(g-h)^{2p}} + \frac{1}{(g+h)^{2p}} + \frac{1}{(g)^{2p}} \quad (3.1.22)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 3.1.16 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisini;

$$T_n^{(11)} = T_{n-1}, \quad T_n^{(12)};$$

$$T_n^{(12)} = \left[ \frac{1}{g + (i-n)h} \right]_{i=1}^{n-1} \quad (3.1.23)$$

şeklinde (  $n-1$  ) – mertebeli reel sütun vektör,  $T_n^{(21)}$ ;

$$T_n^{(21)} = \left[ \frac{1}{g + (n-j)h} \right]_{j=1}^{n-1} \quad (3.1.24)$$

şeklinde (  $n-1$  )- mertebeli reel satır vektör,  $T_n^{(22)}$ ;

$$T_n^{(22)} = \left( \frac{1}{g} \right)_{1 \times 1} \quad (3.1.25)$$

şeklinde bir matris olmak üzere,



$$T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \end{bmatrix} \quad (3.1.26)$$

şeklinde blok matrislere ayırılım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki Cauchy-Toeplitz matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$T_n * T_n = \begin{bmatrix} T_{n-1} \otimes T_{n-1} & T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde  $2((n-1)^2 + 1)$ - mertebeli karesel reel  $T_n * T_n$  matrisidir.

(  $n-1$  ) - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki  $T_{n-1}$  , Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_{n-1} \otimes T_{n-1} = \left[ \left[ \frac{1}{(g + (i-j)h)} \frac{1}{(g + (k-l)h)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan,  $(n-1)^2$  - mertebeli karesel reel matris; (  $n-1$  ) – mertebeli iki  $T_n^{(12)}$  reel sütun vektörünün Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} = \left[ \left[ \frac{1}{(g + (i-n)h)} \frac{1}{(g + (k-n)h)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde (  $n-1$  )<sup>2</sup> – mertebeli reel sütun vektör; (  $n-1$  ) – mertebeli iki  $T_n^{(21)}$  reel satır vektörünün Kronecker çarpımı;

$$T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} = \left[ \left[ \frac{1}{(g + (n-j)h)} \frac{1}{(g + (n-l)h)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde  $(n-1)^2$  – mertebeli reel satır vektör; 1 – mertebeli iki  $T_n^{(22)}$  reel matrisin Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} = \left( \frac{1}{(g)^2} \right)_{1 \times 1}$$

şeklinde 1 – mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan  $\ell_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) matris normu ve vektörler için tanımlanan  $p$  - normu tanımlarından,

$$\|T_n * T_n\|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \|T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(ij)}\|_p^p \quad (3.1.27)$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan,  $T_n^{(11)} \otimes T_n^{(11)}$ ,  $T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)}$  karesel matrislerin  $\ell_p$  normlarının ve  $T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)}$ ,  $T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)}$  vektörlerinin  $p$  – normlarının  $p$ . kuvvetlerinin ve de ( 3.1.27 ) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &= \left[ \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-j)h|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-n)h|^p} \right]^2 \\ &\quad + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (n-i)h|^p} \right]^2 + \frac{1}{(g)^{2p}} \\ &= \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n-i}{|g - ih|^p} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{n-i}{|g + ih|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-n)h|^p} \right]^2 \\ &\quad + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (n-i)h|^p} \right]^2 + \frac{1}{(g)^{2p}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|T_n * T_n\|_p^p &= \|T_{n-1}\|_p^{2p} + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g-ih|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g+ih|^p} \right]^2 + \frac{1}{(g)^{2p}} \\
\|T_n * T_n\|_p^p &= \|T_{n-1}\|_p^{2p} + \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right]^2 + \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} \right]^2 + \frac{1}{(g)^{2p}} \\
\|T_n * T_n\|_p^p &= \|T_{n-1}\|_p^{2p} + \frac{1}{|h|^{2p}} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} \right]^2 \right\} + \frac{1}{(g)^{2p}} \quad (3.1.28)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi ( 3.1.28 ) eşitliğini,  $p$  'nin tek veya çift olma durumlarına göre inceleyelim.

Böylece; ( 3.1.28 ) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen ( 3.1.18 ) eşitsizliğinden,  $p$  tek ise;

$$\begin{aligned}
\|T_n * T_n\|_p^p &\leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[ -\left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta \left( p, \frac{g}{h} \right) \right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{|h|^{2p}} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} \right]^2 \right\} + \frac{1}{(g)^{2p}} \quad (3.1.29)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, Riemann – Zeta ( veya Hurwitz – Zeta ) fonksiyonu tanımından ve  $0 < g/h < 1$  kabulünden hareketle;

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left| i - \frac{g}{h} \right|^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left( i - \frac{g}{h} \right)^p} \leq \zeta(p, -g/h) \quad (3.1.30)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left|i + \frac{g}{h}\right|^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i + \frac{g}{h}\right)^p} \leq \zeta(p, g/h) \quad (3.1.31)$$

eşitsizlikleri yazılır. Böylece, ( 3.1.29 ) , ( 3.1.30 ) , ( 3.1.31 ) eşitsizlikleri ile birlikte  $p$  'nin tek olması durumunda,  $n -$  mertebeli iki  $T_n$  Cauchy- Toeplitz matrisinin Khatri – Rao çarpımı olan,  $2((n-1)^2 + 1)$ - mertebeli karesel reel  $T_n * T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için,

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &\leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[ -\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \zeta^2\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta^2\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{(g)^{2p}} \end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, ( 3.1.19 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Benzer şekilde, ( 3.1.28 ) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen ( 3.1.18 ) eşitsizliğinden,  $p$  çift ise;

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &\leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[ \left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{|h|^{2p}} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{g}{h} - i\right|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{g}{h} + i\right|^p} \right]^2 \right\} + \frac{1}{(g)^{2p}} \quad (3.1.32) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, ( 3.1.30 ) , ( 3.1.31 ) , ( 3.1.32 ) eşitsizlikleri ile birlikte  $p$  'nin çift olması durumunda,  $T_n * T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için,

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &\leq \frac{(n-1)^2}{|h|^{2p}} \left[ \left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta \left( p, \frac{g}{h} \right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \zeta^2 \left( p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta^2 \left( p, \frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{(g)^{2p}} \end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, böylece ( 3.1.20 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Şimdi de,  $T_n * T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için, ( 3.1.28 ) eşitliğini  $p$  'nin tek veya çift olması durumlarına göre ayrı ayrı ele alalım. Böylece ( 3.1.28 ) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen ( 3.1.19 ) eşitsizliğinden,  $p$  tek ise;

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &\geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ -\left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{|h|^{2p}} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} \right]^2 \right\} + \frac{1}{(g)^{2p}} \end{aligned}$$

$$\|T_n * T_n\|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ -\left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) \right]^2 + \frac{1}{|g-h|^{2p}} + \frac{1}{|g+h|^{2p}} + \frac{1}{(g)^{2p}}$$

şeklinde  $T_n * T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için bir alt sınır elde edilir ki, ( 3.1.21 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Benzer şekilde, ( 3.1.28 ) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen ( 3.1.19 ) eşitsizliğinden,  $p$  çift ise;

$$\|T_n * T_n\|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) \right]^2$$

$$+ \frac{1}{|h|^{2p}} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} \right]^2 \right\} + \frac{1}{(g)^{2p}}$$

$$\|T_n * T_n\|_p^p \geq \frac{1}{|h|^{2p}} \left[ \left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) \right]^2 + \frac{1}{|g-h|^{2p}} + \frac{1}{|g+h|^{2p}} + \frac{1}{(g)^{2p}}$$

şeklinde  $T_n * T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için bir alt sınır elde edilir ki, ( 3.1.22 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

**Teorem 3.1.5**  $a$  ve  $b$ ;  $a < b$  olacak şekilde herhangi iki pozitif reel sayı olmak üzere,

$$T_n = \left[ \frac{1}{a + (i-j)b} \right]_{i,j=1}^n \quad (3.1.33)$$

şeklinde tanımlanan  $T_n$ , Cauchy-Toeplitz matrisinin  $\ell_p$  matris normu için,

$$n^{-1/p} \|T_n\|_p \leq \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi \left( p-1, 1 - \frac{a}{b} \right) + \Psi \left( p-1, 1 + \frac{a}{b} \right) \right| \right]^{1/p} \quad (3.1.34)$$

$$n^{-1/p} \|T_n\|_p \geq \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right]^{1/p} \quad (3.1.35)$$

şeklinde alt ve üst sınır vardır ( Çatak 2001 ).

**Teorem 3.1.6**  $T_n$ , ( 3.1.33 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n * T_n$  ile gösterilen Khatri-Rao çarpımının  $\ell_p$  matris normu için,

$$\|T_n * T_n\|_p^p \leq (n-1)^2 \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1, 1 - \frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1 + \frac{a}{b}\right) \right| \right]^2 + \left[ \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left( \Psi\left(p-1, 1 - \frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1 + \frac{a}{b}\right) \right) \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \quad (3.1.36)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\|T_n * T_n\|_p^p \geq \left[ \left( \frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right]^2 + \frac{1}{(b-a)^{2p}} + \frac{1}{(b+a)^{2p}} + \frac{1}{a^{2p}} \quad (3.1.37)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 3.1.33 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisini;

$$T_n^{(11)} = T_{n-1}, \quad T_n^{(12)};$$

$$T_n^{(12)} = \left[ \frac{1}{a + (i-n)b} \right]_{i=1}^{n-1} \quad (3.1.38)$$

şeklinde (  $n-1$  ) – mertebeli reel sütun vektör,  $T_n^{(21)}$ ;

$$T_n^{(21)} = \left[ \frac{1}{a + (n-j)b} \right]_{j=1}^{n-1} \quad (3.1.39)$$

şeklinde (  $n-1$  )- mertebeli reel satır vektör,  $T_n^{(22)}$ ;

$$T_n^{(22)} = \left( \frac{1}{a} \right)_{1 \times 1} \quad (3.1.40)$$

şeklinde bir matris olmak üzere,

$$T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \end{bmatrix} \quad (3.1.41)$$

şeklinde blok matrislere ayırılım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki Cauchy-Toeplitz matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$T_n * T_n = \begin{bmatrix} T_{n-1} \otimes T_{n-1} & T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde  $2((n-1)^2 + 1)$ - mertebeli karesel reel  $T_n * T_n$  matrisidir.

(  $n-1$  ) - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki  $T_{n-1}$  Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_{n-1} \otimes T_{n-1} = \left[ \left[ \frac{1}{(a + (i-j)b)} \frac{1}{(a + (k-l)b)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan,  $(n-1)^2$  - mertebeli karesel reel matris; (  $n-1$  ) - mertebeli iki  $T_n^{(12)}$  vektörünün Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)} = \left[ \left[ \frac{1}{(a + (i-n)b)} \frac{1}{(a + (k-n)b)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$



şeklinde  $(n-1)^2$  – mertebeli reel sütun vektör;  $(n-1)$  - mertebeli iki  $T_n^{(21)}$  vektörünün Kronecker çarpımı;

$$T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)} = \left[ \left[ \frac{1}{(a + (n-j)b)} \frac{1}{(a + (n-l)b)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde  $(n-1)^2$  – mertebeli reel satır vektör; 1 – mertebeli iki  $T_n^{(22)}$  reel matrisinin Kronecker çarpımı,

$$T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)} = \left( \frac{1}{a^2} \right)_{1 \times 1}$$

şeklinde 1 – mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan  $\ell_p$  matris normu ve vektörler için tanımlanan  $p$  - normu tanımlarından,

$$\|T_n * T_n\|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \|T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(ij)}\|_p^p \quad (3.1.42)$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan,  $T_n^{(11)} \otimes T_n^{(11)}$ ,  $T_n^{(22)} \otimes T_n^{(22)}$  karesel matrislerin  $\ell_p$  normlarının ve  $T_n^{(12)} \otimes T_n^{(12)}$ ,  $T_n^{(21)} \otimes T_n^{(21)}$  vektörlerinin  $p$  – normlarının  $p$  kuvvetlerinin ve de (3.1.42) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &= \left[ \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-j)b|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-n)b|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (n-i)b|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \\ \|T_n * T_n\|_p^p &= \left[ \frac{n-1}{a^p} + \sum_{i=1}^{n-2} (n-1-i) \left( \frac{1}{|ib-a|^p} + \frac{1}{|ib+a|^p} \right) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-n)b|^p} \right]^2 \\ &\quad + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (n-i)b|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \end{aligned}$$

$$\|T_n * T_n\|_p^p = \|T_{n-1}\|_p^{2p} + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+ib|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \quad (3.1.43)$$

eşitliği elde edilir. ( 3.1.43 ) eşitliği ve Teorem 3.1.5 de verilen ( 3.1.34 ) eşitsizliği ile,

$$\begin{aligned} \|T_n * T_n\|_p^p &\leq (n-1)^2 \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right| \right]^2 \\ &\quad + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+ib|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \\ \|T_n * T_n\|_p^p &\leq (n-1)^2 \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right| \right]^2 \\ &\quad + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+ib|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \quad (3.1.44) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. ( 3.1.44 ) eşitsizliğindeki  $\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right)$  ifadesinin

Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right) &= \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left[ -\Psi\left(p-1, n-\frac{a}{b}\right) - \Psi\left(p-1, n+\frac{a}{b}\right) \right. \\ &\quad \left. + \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right] \end{aligned}$$

olup,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right) = \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left[ \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right] \quad (3.1.45)$$

dir. Böylece ( 3.1.44 ) eşitsizliği ve ( 3.1.45 ) eşitliğinden,  $T_n \circledast T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için,

$$\begin{aligned} \|T_n \circledast T_n\|_p^p &\leq (n-1)^2 \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right| \right]^2 \\ &\quad + \left[ \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left( \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right) \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki; ( 3.1.36 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de,  $T_n \circledast T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için, Teorem 3.1.5 ile verilen ( 3.1.35 ) eşitsizliğini ve ( 3.1.43 ) eşitliğini göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned} \|T_n \circledast T_n\|_p^p &= \|T_{n-1}\|_p^{2p} + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+ib|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \\ &\geq \left[ \left( \frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right]^2 + \left[ \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{|a+ib|^p} \right]^2 + \frac{1}{a^{2p}} \\ \|T_n \circledast T_n\|_p^p &\geq \left[ \left( \frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right]^2 + \frac{1}{(b-a)^{2p}} + \frac{1}{(b+a)^{2p}} + \frac{1}{a^{2p}} \end{aligned}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki; ( 3.1.37 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

### 3.2. Cauchy – Toeplitz Matrislerinin Tracy – Singh Çarpımlarının $\ell_p$ Normları İçin Sınırlar

**Teorem 3.2.1**  $T_n$ , ( 3.1.1 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n \odot T_n$  ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının  $\ell_p$  (  $p \geq 2$  ) matris normu için,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq [n(2^{p+1} - 2)\zeta(p)]^p \quad (3.2.1)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \geq [(2^p - 2)\zeta(p-1)]^2 \quad (3.2.2)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 3.1.1 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisini,  $T_n^{(11)} = T_{n-1}$  ve  $T_n^{(12)}$ ,  $T_n^{(21)}$ ,  $T_n^{(22)}$  sırasıyla; ( 3.1.5 ), ( 3.1.6 ), ( 3.1.7 ) 'deki gibi tanımlamak üzere,

$$T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(11)} & T_n^{(12)} \\ T_n^{(21)} & T_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde blok matrislere ayırılım. Böylece;  $T_n^{(ij)}$  (  $1 \leq i, j \leq 2$  ) matrisleri ile  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$T_n^{(ij)} \odot T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(11)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, ( 3.1.1 ) deki gibi bloklara ayrılmış  $n -$  mertebeli iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n \odot T_n$  ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$T_n \odot T_n = (T_n^{(ij)} \odot T_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan  $n^2 -$  mertebeli reel karesel bir matristir.

Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı göz önüne alınırsa,  $T_n \odot T_n$  matrisini oluşturan bloklar, karesel matrisler veya vektörlerin yanısıra, karesel olmayan matrislerden de ibarettir. Bu sebeptendir ki;  $\|\cdot\|_{gp}$ , Tanım 2.3.6 ile tanımlanan genelleştirilmiş  $-\ell_p$  matris normu olmak üzere,  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için;

$$\Omega(ij,kl) = \|T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(kl)}\|_{gp}^p \quad (1 \leq i, j, k, l \leq 2)$$

olmak üzere,

$$\|T_n \odot T_n\|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k,l=1}^2 \Omega(ij,kl) \quad (3.2.3)$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş  $-\ell_p$  matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^2 \Omega(11,kl) = & \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{1}{2} + i - j\right|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{1}{2} + i - j\right|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{1}{2} + i - n\right|^p} \right) \right. \\ & \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{1}{2} + n - j\right|^p} \right) + 2^p \right\} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(12, kl) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - n \right|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - j \right|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - n \right|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + n - j \right|^p} \right) + 2^p \right\} \quad (3.2.5)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(21, kl) = \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + n - j \right|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - j \right|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - n \right|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + n - j \right|^p} \right) + 2^p \right\} \quad (3.2.6)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(21, kl) = 2^p \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - j \right|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - n \right|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + n - j \right|^p} \right) + 2^p \right\} \quad (3.2.7)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece , ( 3.2.4 ) , ( 3.2.5 ) , ( 3.2.6 ) , ( 3.2.7 ) eşitliklerinden,  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için;

$$\begin{aligned} \| T_n \odot T_n \|_p^p &= \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - j \right|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - n \right|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + n - j \right|^p} \right) + 2^p \right\}^2 \\ &= \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + i - n \right|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + n - j \right|^p} \right) + 2^p \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\| T_n \odot T_n \|_p^p &= \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \left( 2^p \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|2i-2n+1|^p} \right) + \left( 2^p \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|2j-2(n+1)+1|^p} \right) + 2^p \right\}^2 \\
&= \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + 2^p \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p} + 2^p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2j+1)^p} \right\}^2 \\
\| T_n \odot T_n \|_p^p &= \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + 2^p \left[ \left( \sum_{i=1}^{2n-3} \frac{1}{i^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{i^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^p} \right) \right] \right\}^2 \quad (3.2.8)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece; ( 3.2.8 ) eşitliği ve Teorem 3.1.1 de verilen ( 3.1.2 ) eşitsizliğinden,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq \left\{ \left[ (2^{p+1} - 2)(n-1)\zeta(p) \right] + 2^p \left[ \left( \sum_{i=1}^{2n-3} \frac{1}{i^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{i^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{2n-1} \frac{1}{i^p} - \frac{1}{2^p} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^p} \right) \right] \right\}^2 \quad (3.2.9)$$

eşitsizliği elde edilir. ( 3.2.9 ) eşitsizliği ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \zeta(p)$$

eşitliği ile ( 3.1.1 ) ile verilen  $n$  – mertebeli iki  $T_n$  Cauchy- Toeplitz matrisinin Tracy - Singh çarpımı olan,  $n^2$  - mertebeli karesel reel  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq [n(2^{p+1} - 2)\zeta(p)]^p$$

şeklinde bir üst sınır bulunmuş olunur ki; ( 3.2.1 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Şimdi de  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için bir alt sınır bulalım.

Bunun için,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p = \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + 2^p \sum_{i=0}^{n-2} \frac{1}{(2i+1)^p} + 2^p \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(2j+1)^p} \right\}^2$$

eşitliğinden ve Teorem 3.1.1 de verilen ( 3.1.2 ) eşitsizliğinden yazılan,

$$\begin{aligned} \| T_n \odot T_n \|_p^p &\geq \left\{ (2^p - 1) \zeta(p) + 2^{p+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} \right\}^2 \\ \| T_n \odot T_n \|_p^p &\geq \left\{ (2^p - 1) \zeta(p) + 2^p \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+1)^p} \right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

eşitsizliğini göz önüne alalım. ( 3.2.10 ) eşitsizliğinde yer alan

$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right)$  teriminin Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) &= \frac{(-1)^p}{2^{p-1} (p-2)!} \Psi \left( p-2, n+\frac{1}{2} \right) + \left( 1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) \zeta(p-1) \\ &\quad + \frac{(-1)^p}{2^p (p-1)!} \Psi \left( p-1, n+\frac{1}{2} \right) - \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) \zeta(p) \end{aligned}$$

şeklindedir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) \zeta(p-1) - \left( 1 - \frac{1}{2^p} \right) \zeta(p) \quad (3.2.11)$$

olup, böylece, ( 3.2.10 ) eşitsizliği ve ( 3.2.11 ) eşitliği dikkate alınarak,  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \geq \left[ (2^p - 2) \zeta(p-1) \right]^2$$



şeklinde bir alt sınır bulunmuş olunur ve böylece ( 3.2.2 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

**Teorem 3.2.2**  $T_n$ , ( 3.1.16 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n \odot T_n$  ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının  $\ell_p$  (  $1 \leq p < \infty$  ) matris normu için,  $p$  tek ise;

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[ -\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|h|^p} \left[ \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \quad (3.2.12)$$

$p$  çift ise,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[ \left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|h|^p} \left[ \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \quad (3.2.13)$$

şeklinde bir üst sınır vardır.  $p$  tek ise,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \geq \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[ -\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|g-h|^p} + \frac{1}{|g+h|^p} + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \quad (3.2.14)$$

$p$  çift ise,

$$\|T_n \odot T_n\|_p^p \geq \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[ \left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|g-h|^p} + \frac{1}{|g+h|^p} + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \quad (3.2.15)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 3.1.16 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Toeplitz matrisini,  $T_n^{(11)} = T_{n-1}$  ve  $T_n^{(12)}, T_n^{(21)}, T_n^{(22)}$  sırasıyla; ( 3.1.23 ), ( 3.1.24 ), ( 3.1.25 ) 'deki gibi tanımlamak üzere, ( 3.1.26 ) 'daki gibi blok matrislere ayırılım.

Böylece;  $T_n^{(ij)}$  (  $1 \leq i, j \leq 2$  ) matrisleri ile ( 3.1.26 ) 'daki gibi blok matrislere ayrılan  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$T_n^{(ij)} \odot T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(11)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, ( 3.1.26 ) 'daki gibi bloklara ayrılmış  $n$  – mertebeli iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n \odot T_n$  ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$T_n \odot T_n = (T_n^{(ij)} \odot T_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan  $n^2$  - mertebeli reel karesel bir matristir.

Buradan,  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  (  $1 \leq p < \infty$  ) normu için;

$$\Omega(ij, kl) = \|T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(kl)}\|_{gp}^p \quad (1 \leq i, j, k, l \leq 2)$$

olmak üzere,

$$\|T_n \odot T_n\|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k,l=1}^2 \Omega(ij, kl) \quad (3.2.16)$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş  $\ell_p$  matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(11, kl) = \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-j)h|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-j)h|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-n)h|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (n-j)h|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\} \quad (3.2.17)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(12, kl) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-n)h|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-j)h|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-n)h|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (n-j)h|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\} \quad (3.2.18)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(21, kl) = \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (n-j)h|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-j)h|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-n)h|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (n-j)h|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\} \quad (3.2.19)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(22, kl) = \frac{1}{|g|^p} \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-j)h|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-n)h|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (n-j)h|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\} \quad (3.2.20)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece , ( 3.2.17 ) , ( 3.2.18 ) , ( 3.2.19 ) , ( 3.2.20 ) eşitliklerinden,  $T_n \otimes T_n$  matrisinin  $\ell_p$  (  $1 \leq p < \infty$  ) normu için;

$$\begin{aligned}
\| T_n \odot T_n \|_p^p &= \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-j)h|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (i-n)h|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + (n-j)h|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \\
\| T_n \odot T_n \|_p^p &= \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|g - ih|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|g + jh|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \\
\| T_n \odot T_n \|_p^p &= \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \frac{1}{|h|^p} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right) + \frac{1}{|h|^p} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + j \right|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \quad (3.2.21)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Şimdi ( 3.2.21 ) eşitliğini,  $p$  'nin tek veya çift olma durumlarına göre inceleyelim.

Böylece; ( 3.2.21 ) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen ( 3.1.18 ) eşitsizliğinden,  $p$  tek ise;

$$\begin{aligned}
\| T_n \odot T_n \|_p^p &\leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[ -\left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta \left( p, \frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|h|^p} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{|h|^p} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + j \right|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \quad (3.2.22)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, Riemann – Zeta ( Hurwitz – Zeta ) fonksiyonu tanımından ve  $0 < g/h < 1$  kabulünden hareketle;

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left| i - \frac{g}{h} \right|^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left( i - \frac{g}{h} \right)^p} \leq \zeta(p, -g/h) \quad (3.2.23)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left|i + \frac{g}{h}\right|^p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(i + \frac{g}{h}\right)^p} \leq \zeta(p, g/h) \quad (3.2.24)$$

eşitsizlikleri yazılır. ( 3.2.22 ) , ( 3.2.23 ) , ( 3.2.24 ) eşitsizlikleri ile birlikte  $p$  'nin tek olması durumunda, ( 3.1.16 ) da tanımlanan  $n$  – mertebeli iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı olan,  $n^2$  - mertebeli karesel reel  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  (  $1 \leq p < \infty$  ) normu için;

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[ -\left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|h|^p} \left[ \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, böylece ( 3.1.12 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Benzer şekilde, ( 3.2.21 ) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen ( 3.1.18 ) eşitsizliğinden,  $p$  çift ise;

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[ \left(\frac{h}{g}\right)^p + \zeta\left(p, -\frac{g}{h}\right) + \zeta\left(p, \frac{g}{h}\right) \right] + \frac{1}{|h|^p} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{g}{h} - i\right|^p} \right) + \frac{1}{|h|^p} \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left|\frac{g}{h} + j\right|^p} \right) + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2 \quad (3.2.25)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, ( 3.2.23 ) , ( 3.2.24 ) , ( 3.2.25 ) eşitsizlikleri ile birlikte  $p$  'nin çift olması durumunda, ( 3.1.16 ) da tanımlanan  $n$  – mertebeli iki  $T_n$

Cauchy- Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı olan,  $n^2$  - mertebeli karesel reel  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) normu için;

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq \left\{ \frac{(n-1)}{|h|^p} \left[ \left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta \left( p, \frac{g}{h} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{|h|^p} \left[ \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) + \zeta \left( p, \frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, ( 3.1.13 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de,  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) normu için bir alt sınır bulalım.

Bunun için, ( 3.2.21 ) eşitliğini  $p$  'nin tek veya çift olmasına göre ayrı ayrı ele alalım. Böylece ( 3.2.21 ) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen ( 3.1.19 ) eşitsizliğinden,  $p$  tek ise;

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \geq \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[ -\left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|h|^p} \left[ \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} + i \right|^p} + \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left| \frac{g}{h} - i \right|^p} \right] + \frac{1}{|g|^p} \right\}^2$$

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \geq \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[ -\left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|g-h|^p} + \frac{1}{|g+h|^p} + \frac{1}{|g|^p} \right\}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki, böylece ( 3.1.14 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Benzer şekilde, ( 3.2.21 ) eşitliği ve Teorem 3.1.3 de verilen ( 3.1.19 ) eşitsizliğinden,  $p$  çift ise;

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \geq \left\{ \frac{1}{|h|^p} \left[ \left( \frac{h}{g} \right)^p + \zeta \left( p, -\frac{g}{h} \right) \right] + \frac{1}{|g-h|^p} + \frac{1}{|g+h|^p} + \frac{1}{|g|^p} \right\}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki, ( 3.1.15 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

**Teorem 3.2.3**  $T_n$ , ( 3.1.33 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Toeplitz matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n \odot T_n$  ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının  $\ell_p$  matris normu için,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \leq \left\{ (n-1) \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi \left( p-1, 1 - \frac{a}{b} \right) + \Psi \left( p-1, 1 + \frac{a}{b} \right) \right| \right] \right. \\ \left. + \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left[ \Psi \left( p-1, 1 - \frac{a}{b} \right) + \Psi \left( p-1, 1 + \frac{a}{b} \right) \right] + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \quad (3.2.26)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p \geq \left\{ \left[ \left( \frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right] + \frac{1}{(b-a)^p} + \frac{1}{(b+a)^p} + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \quad (3.2.27)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 3.1.33 ) ' deki gibi tanımlanan  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisini,  $T_n^{(11)} = T_{n-1}$  ve  $T_n^{(12)}$ ,  $T_n^{(21)}$ ,  $T_n^{(22)}$  sırasıyla; ( 3.1.38 ), ( 3.1.39 ), ( 3.1.40 ) 'daki gibi tanımlamak üzere, ( 3.1.41 ) 'deki gibi blok matrislere ayırılım.

Böylece;  $T_n^{(ij)}$  (  $1 \leq i, j \leq 2$  ) matrisleri ile ( 3.1.33 ) 'deki gibi tanımlanan ve ( 3.1.41 ) 'deki gibi blok matrislere ayrılan  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $T_n$ , Cauchy-Toeplitz matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$T_n^{(ij)} \odot T_n = \begin{bmatrix} T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(11)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(12)} \\ T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(21)} & T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(22)} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, ( 3.1.41 ) deki gibi bloklara ayrılmış  $n -$  mertebeli iki  $T_n$  Cauchy-Toeplitz matrisinin,  $T_n \odot T_n$  ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$T_n \odot T_n = (T_n^{(ij)} \odot T_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan  $n^2 -$  mertebeli reel karesel bir matristir.

Buradan,  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için;

$$\Omega(ij,kl) = \| T_n^{(ij)} \otimes T_n^{(kl)} \|_{gp}^p \quad (1 \leq i, j, k, l \leq 2)$$

olmak üzere,

$$\| T_n \odot T_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k,l=1}^2 \Omega(ij,kl) \quad (3.2.28)$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş  $-\ell_p$  matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^2 \Omega(11,kl) &= \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-j)b|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-j)b|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-n)b|^p} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (n-j)b|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\} \quad (3.2.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^2 \Omega(12,kl) &= \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-n)b|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-j)b|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (i-n)b|^p} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a + (n-j)b|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\} \quad (3.2.30) \end{aligned}$$



$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(21,kl) = \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(n-j)b|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-j)b|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-n)b|^p} \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(n-j)b|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\} \quad (3.2.31)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(21,kl) = \frac{1}{a^p} \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-j)b|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-n)b|^p} \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(n-j)b|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\} \quad (3.2.32)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece , ( 3.2.29 ) , ( 3.2.30 ) , ( 3.2.31 ) , ( 3.2.32 ) eşitliklerinden,  $T_n \otimes T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için;

$$\| T_n \otimes T_n \|_p^p = \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-j)b|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(i-n)b|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+(n-j)b|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \\ \| T_n \otimes T_n \|_p^p = \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \quad (3.2.33)$$

eşitliği elde edilir. ( 3.2.33 ) eşitliği ve Teorem 3.1.5 de verilen ( 3.1.34 ) eşitsizliği ile,

$$\| T_n \otimes T_n \|_p^p \leq \left\{ (n-1) \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)! b^p} \left| \Psi \left( p-1, 1 - \frac{a}{b} \right) + \Psi \left( p-1, 1 + \frac{a}{b} \right) \right| \right] \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \quad 3.2.34)$$

( 3.2.34 ) eşitsizliğindeki  $\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right)$  ifadesinin Polygamma

fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right) &= \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left[ -\Psi\left(p-1, n-\frac{a}{b}\right) - \Psi\left(p-1, n+\frac{a}{b}\right) \right. \\ &\quad \left. + \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right] \end{aligned}$$

dir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{|a-ib|^p} + \frac{1}{|a+ib|^p} \right) = \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left[ \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right] \quad (3.2.35)$$

olduğu bilindiğine göre, böylece ( 3.2.34 ) eşitsizliği ve ( 3.2.35 ) eşitliğinden,  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için;

$$\begin{aligned} \| T_n \odot T_n \|_p^p &\leq \left\{ (n-1) \left[ \frac{1}{a^p} + \frac{1}{(p-1)!b^p} \left| \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right| \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^p}{(p-1)!b^p} \left[ \Psi\left(p-1, 1-\frac{a}{b}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{a}{b}\right) \right] + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, ( 3.2.26 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de,  $T_n \odot T_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için, Teorem 3.1.5 ile verilen ( 3.1.35 ) eşitsizliğini ve ( 3.2.33 ) eşitliğini göz önüne alırsak,

$$\begin{aligned}
\| T_n \odot T_n \|_p^p &= \left\{ \| T_{n-1} \|_p^p + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|a-ib|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \\
&\geq \left\{ \left[ \left( \frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right] + \left( \sum_{j=1}^{2-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{2-1} \frac{1}{|a+jb|^p} \right) + \frac{1}{a^p} \right\}^2 \\
\| T_n \odot T_n \|_p^p &\geq \left\{ \left[ \left( \frac{1}{a^p} + \frac{1}{2(b-a)^p} + \frac{1}{2(b+a)^p} \right) \right] + \frac{1}{(b-a)^p} + \frac{1}{(b+a)^p} + \frac{1}{a^p} \right\}^2
\end{aligned}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki, ( 3.2.27 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.



#### 4. CAUCHY – HANKEL MATRİSLERİ

**Tanım 4.1.** ( 3.1 ) ile verilen Cauchy matrisinde,  $a$  ve  $b$  keyfi sayılar olmak üzere,  $(b \neq 0, \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z})$   $x_k = a + bk$  ve  $y_j = -jb$  alınarak elde edilen

$$H_n = \left[ \frac{1}{a + (k+j)b} \right]_{k,j=1}^n \quad (4.1)$$

matrisine Cauchy – Hankel matrisi denir.

#### 4.1. Cauchy – Hankel Matrislerinin Khatri – Rao Çarpımlarının $\ell_p$ Normları İçin Sınırlar

**Teorem 4.1.1**  $H_n$ , ( 4.1 ) matrisinde  $a = 1/2$  ve  $b = 1$  alınması ile elde edilen,

$$H_n = \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + (i+j)} \right]_{i,j=1}^n \quad (4.1.1)$$

şeklindeki Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan  $H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için,

$$\|H_n\|_p \leq \left[ 1 + (2^{p-1} - 1)\zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) - \ln 2 \right]^{1/p} \quad (4.1.2)$$

$$\|H_n\|_p \geq \left[ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p) \right]^{1/p} \quad (4.1.3)$$

şeklinde bir alt ve üst sınır vardır ( Bozkurt 1996 ).

**Teorem 4.1.2**  $H_n$ , ( 4.1.1 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) bir Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki Cauchy-Hankel matrisinin Khatri-Rao çarpımının  $\ell_p$  ( $2 \leq p < \infty$ ) matris normu için,

$$\begin{aligned} \|H_n * H_n\|_p^p \leq & \left[ 1 - \ln 2 + (2^{p-1} - 1)\zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) \right]^2 \\ & + \frac{1}{2} \left[ (2^p - 2)\zeta(p-1) - (2^p - 1)\zeta(p) \right]^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^{2p} \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\|H_n * H_n\|_p^p \geq \left[ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p) \right]^2 + \frac{2^{2p+1}}{7^{2p}} \quad (4.1.5)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 4.1.1 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $H_n$  Cauchy-Hankel matrisini,  $H_n^{(11)} = H_{n-1}$ ,  $H_n^{(12)}$ ;

$$H_n^{(12)} = \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + i + n} \right]_{i=1}^{n-1} \quad (4.1.6)$$

şeklinde (  $n-1$  ) – mertebeli reel sütun vektör,  $H_n^{(21)}$ ;

$$H_n^{(21)} = \left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + j + n} \right]_{j=1}^{n-1} \quad (4.1.7)$$

şeklinde  $(n-1)$ - mertebeli reel satır vektör,  $H_n^{(22)}$ ;

$$H_n^{(22)} = \left( \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n} \right)_{1 \times 1} \quad (4.1.8)$$

şeklinde reel matris olmak üzere,

$$H_n = \begin{bmatrix} H_n^{(11)} & H_n^{(12)} \\ H_n^{(21)} & H_n^{(22)} \end{bmatrix} \quad (4.1.9)$$

şeklinde blok matrislere ayırılım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki Cauchy-Hankel matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$H_n \ast H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} \otimes H_{n-1} & H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)} \\ H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)} & H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde  $2((n-1)^2 + 1)$ - mertebeli karesel reel  $H_n \ast H_n$  matrisidir.

(  $n-1$  ) - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki  $H_{n-1}$  , Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$H_{n-1} \otimes H_{n-1} = \left[ \left[ \frac{1}{\left( \frac{1}{2} + i + j \right) \left( \frac{1}{2} + k + l \right)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan,  $(n-1)^2$  - mertebeli karesel reel matris;  $(n-1)$  - mertebeli iki  $H_n^{(12)}$  vektörünün Kronecker çarpımı,

$$H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)} = \left[ \left[ \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i + n\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + k + n\right)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde  $(n-1)^2$  - mertebeli reel sütun vektör;  $(n-1)$  - mertebeli iki  $H_n^{(21)}$  vektörünün Kronecker çarpımı;

$$H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)} = \left[ \left[ \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + j + n\right)} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + l + n\right)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde  $(n-1)^2$  - mertebeli yatay reel vektör; 1 - mertebeli reel iki  $H_n^{(22)}$  matrisinin Kronecker çarpımı,

$$H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)} = \left[ \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 2n\right)^2} \right]_{1 \times 1}$$

şeklinde 1 - mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) matris normu ve vektörler için tanımlanan  $p$  - normu tanımlarından,

$$\| H_n * H_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \| H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(ij)} \|_p^p \quad (4.1.10)$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan,  $H_n^{(11)} \otimes H_n^{(11)}$ ,  $H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)}$  karesel matrislerin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normlarının ve  $H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)}$ ,  $H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)}$  vektörlerinin  $p$  – normlarının  $p$ . kuvvetlerinin ve de ( 4.1.10 ) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\begin{aligned}
 \|H_n \ast H_n\|_p^p &= \left[ \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i + j\right)^p} \right]^2 + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i + n\right)^p} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + j + n\right)^p} \right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 2n\right)^{2p}} \\
 &= \left[ 2^p \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(2i+1)^p} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{n-i}{(2n+2i+1)^p} \right) \right]^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i + n\right)^p} \right)^2 \\
 &\quad + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 2n\right)^{2p}} \\
 &\leq \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{\left(\frac{1}{2} + i + n\right)^p} \right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 4\right)^{2p}} \\
 &= \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p+1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(2n+2i+1)^p} \right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^{2p} \\
 \|H_n \ast H_n\|_p^p &\leq \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p+1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(2i+1)^p} \right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^{2p} \\
 \|H_n \ast H_n\|_p^p &\leq \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2^{2p-1} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) \right]^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^{2p} \quad (4.1.11)
 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, elde edilen ( 4.1.11 ) eşitsizliği ve Teorem 4.1.1 de verilen ( 4.1.2 ) eşitsizliği ile,



$$\|H_n * H_n\|_p^p \leq \left[ 1 - \ln 2 + (2^{p-1} - 1)\zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) \right]^2 + 2^{2p-1} \left[ \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) \right]^2 + \left( \frac{2}{9} \right)^{2p} \quad (4.1.12)$$

eşitsizliği yazılır. ( 4.1.12 ) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan

$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right)$  ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \frac{(-1)^p}{2^{p-1}(p-2)!} \Psi\left(p-2, n+\frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1) + \frac{(-1)^p}{2^p(p-1)!} \Psi\left(p-1, n+\frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\zeta(p)$$

şeklinde yazılır ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1) - \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\zeta(p) \quad (4.1.13)$$

olduğu bilindiğine göre, böylece ( 4.1.13 ) eşitliği ve ( 4.1.12 ) eşitsizliğinden,  $H_n * H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için,

$$\|H_n * H_n\|_p^p \leq \left[ 1 - \ln 2 + (2^{p-1} - 1)\zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) \right]^2 + \frac{1}{2} \left[ (2^p - 2)\zeta(p-1) - (2^p - 1)\zeta(p) \right]^2 + \left( \frac{2}{9} \right)^{2p}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilmiş olunur ki, ( 4.1.4 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

Şimdi de,  $H_n * H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için,

$$\|H_n * H_n\|_p^p = \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i + n\right)^p} \right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 2n\right)^{2p}} \quad (4.1.14)$$

eşitliğini tekrar göz önüne alalım. Böylece, ( 4.1.14 ) eşitliği ve Teorem 4.1.1 de verilen ( 4.1.3 ) eşitsizliği ile,  $H_n * H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için;

$$\|H_n * H_n\|_p^p \geq \left[ \left( 2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left( 2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) \right]^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i + n\right)^p} \right)^2$$

$$\|H_n * H_n\|_p^p \geq \left[ \left( 2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left( 2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) \right]^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + i + 2\right)^p} \right)^2$$

$$\|H_n * H_n\|_p^p \geq \left[ \left( 2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left( 2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) \right]^2 + \frac{2^{2p+1}}{7^{2p}}$$

şeklinde bir alt sınır elde edilmiş olunur ki, böylece ( 4.1.5 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

**Teorem 4.1.3**  $c$  ve  $d$ ,  $c < d$  olacak şekildeki herhangi iki pozitif reel sayı olmak üzere,

$$H_n = \left[ \frac{1}{c - (i+j)d} \right]_{i,j=1}^n \quad (4.1.15)$$

şeklinde tanımlanan  $H_n$  Cauchy-Hankel matrisinin  $\ell_p (3 \leq p < \infty)$  normu için,

$$\|H_n\|_p \leq \frac{1}{d} \left[ \frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 2-\frac{c}{d}\right) - \Psi\left(p-2, 2-\frac{c}{d}\right) \right| \right]^{1/p} \quad (4.1.16)$$

$$\|H_n\|_p \geq \left[ \frac{1}{(2d-c)^p} + \frac{2}{(3d-c)^p} + \frac{1}{(4d-c)^p} \right]^{1/p} \quad (4.1.17)$$

şeklinde üst ve alt sınır vardır ( Çatak 2001 ).

**Teorem 4.1.4**  $H_n$ , ( 4.1.15 ) ile verilen  $n$  - mertebeli (  $n \geq 2$  ) bir Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki Cauchy-Hankel matrisinin Khatri-Rao çarpımının  $\ell_p (3 \leq p < \infty)$  matris normu için,

$$\begin{aligned} \|H_n * H_n\|_p^p &\leq \frac{1}{d^{2p}} \left[ \frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 2-\frac{c}{d}\right) - \Psi\left(p-2, 2-\frac{c}{d}\right) \right| \right]^2 \\ &\quad + 2 \left\{ \frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[ \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 1+\frac{d-c}{d}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Psi\left(p-2, 1+\frac{d-c}{d}\right) \right] \right\}^2 + \frac{1}{(2d-c)^{2p}} \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\|H_n * H_n\|_p^p \geq \left[ \frac{1}{(2d-c)^p} + \frac{2}{(3d-c)^p} + \frac{1}{(4d-c)^p} \right]^2 + \frac{2}{(3d-c)^{2p}} \quad (4.1.19)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 4.1.15 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $H_n$  Cauchy-Hankel matrisini,  
 $H_n^{(11)} = H_{n-1}$ ,  $H_n^{(12)}$ ;

$$H_n^{(12)} = \left[ \frac{1}{c - (i + n)d} \right]_{i=1}^{n-1} \quad (4.1.20)$$

şeklinde (  $n-1$  ) – mertebeli reel sütun vektör,  $H_n^{(21)}$ ;

$$H_n^{(21)} = \left[ \frac{1}{c - (n + j)d} \right]_{j=1}^{n-1} \quad (4.1.21)$$

şeklinde (  $n-1$  )- mertebeli reel satır vektör,  $H_n^{(22)}$ ;

$$H_n^{(22)} = \left( \frac{1}{c - 2nd} \right)_{1 \times 1} \quad (4.1.22)$$

şeklinde reel matris olmak üzere,

$$H_n = \begin{bmatrix} H_n^{(11)} & H_n^{(12)} \\ H_n^{(21)} & H_n^{(22)} \end{bmatrix} \quad (4.1.23)$$

şeklinde blok matrislere ayıralım.

Bu şekilde bloklara ayrılmış  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) iki Cauchy-Hankel matrisinin Khatri-Rao çarpımı,

$$H_n * H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} \otimes H_{n-1} & H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)} \\ H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)} & H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)} \end{bmatrix}$$

şeklinde  $2((n-1)^2 + 1)$ - mertebeli karesel reel  $H_n * H_n$  matrisidir.

$(n-1)$  - mertebeli  $(n \geq 2)$  iki  $H_{n-1}$  Cauchy-Toeplitz matrisinin Kronecker çarpımı,

$$H_{n-1} \otimes H_{n-1} = \left[ \left[ \frac{1}{(c - (i+j)d)} \frac{1}{(c - (k+l)d)} \right]_{k,l=1}^{n-1} \right]_{i,j=1}^{n-1}$$

şeklinde tanımlanan,  $(n-1)^2$  - mertebeli karesel reel matris;  $(n-1)$  - mertebeli iki  $H_n^{(12)}$  vektörünün Kronecker çarpımı,

$$H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)} = \left[ \left[ \frac{1}{(c - (i+n)d)} \frac{1}{(c - (k+n)d)} \right]_{k=1}^{n-1} \right]_{i=1}^{n-1}$$

şeklinde  $(n-1)^2$  - mertebeli reel sütun vektör;  $(n-1)$  - mertebeli iki  $H_n^{(21)}$  vektörünün Kronecker çarpımı;

$$H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)} = \left[ \left[ \frac{1}{(c - (n+j)d)} \frac{1}{(c - (n+l)d)} \right]_{l=1}^{n-1} \right]_{j=1}^{n-1}$$

şeklinde  $(n-1)^2$  - mertebeli reel satır vektör; 1 - mertebeli reel iki  $H_n^{(22)}$  matrisinin Kronecker çarpımı,

$$H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)} = \left[ \frac{1}{(c - 2nd)^2} \right]_{1 \times 1}$$

şeklinde 1 - mertebeli reel matristir.

Böylece, matrisler için tanımlanan  $\ell_p$  matris normu ve vektörler için tanımlanan  $p$  - normu tanımlarından,

$$\|H_n * H_n\|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \|H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(ij)}\|_p^p \quad (4.1.24)$$

eşitliği yazılır. Yukarıda tanımlanan,  $H_n^{(11)} \otimes H_n^{(11)}$ ,  $H_n^{(22)} \otimes H_n^{(22)}$  karesel matrislerin  $\ell_p$  normlarının ve  $H_n^{(12)} \otimes H_n^{(12)}$ ,  $H_n^{(21)} \otimes H_n^{(21)}$  vektörlerinin  $p$  - normlarının  $p$  kuvvetlerinin ve de (4.1.24) eşitliğinin dikkate alınması ile;

$$\begin{aligned} \|H_n * H_n\|_p^p &= \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(j+n)d|^p} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{(c-2nd)^{2p}} \\ &= \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{((i+n)d-c)^p} \right)^2 + \frac{1}{(2nd-c)^{2p}} \\ \|H_n * H_n\|_p^p &\leq \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)^p} \right)^2 + \frac{1}{(2nd-c)^{2p}} \end{aligned} \quad (4.1.25)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.1.25) eşitsizliği ve Teorem 4.1.3 ile verilen (4.1.16) eşitsizliği ile,

$$\begin{aligned} \|H_n * H_n\|_p^p &\leq \frac{1}{d^{2p}} \left[ \frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 2-\frac{c}{d}\right) - \Psi\left(p-2, 2-\frac{c}{d}\right) \right| \right]^2 \\ &\quad + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)^p} \right)^2 + \frac{1}{(2d-c)^{2p}} \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

eşitsizliği elde edilir. ( 4.1.26 ) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan,  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)^p}$

ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)^p} &= \left\{ \frac{(-1)^p (c-d)}{(p-1)! d^{p+1}} \left[ -\Psi\left(p-1, n + \frac{d-c}{d}\right) + \Psi\left(p-1, 1 + \frac{d-c}{d}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[ \Psi\left(p-2, n + \frac{d-c}{d}\right) - \Psi\left(p-2, 1 + \frac{d-c}{d}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)^p} &= \frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[ \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 1 + \frac{d-c}{d}\right) \right. \\ &\quad \left. - \Psi\left(p-2, 1 + \frac{d-c}{d}\right) \right] \quad (4.1.27) \end{aligned}$$

dir. Böylece ( 4.1.27 ) eşitliği ve ( 4.1.26 ) eşitsizliğinden,  $H_n \circledast H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için,

$$\begin{aligned} \|H_n \circledast H_n\|_p^p &\leq \frac{1}{d^{2p}} \left[ \frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 2 - \frac{c}{d}\right) - \Psi\left(p-2, 2 - \frac{c}{d}\right) \right| \right]^2 \\ &\quad + 2 \left\{ \frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[ \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 1 + \frac{d-c}{d}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Psi\left(p-2, 1 + \frac{d-c}{d}\right) \right] \right\}^2 + \frac{1}{(2d-c)^{2p}} \end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır elde edilir ki, ( 4.1.18 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de,  $H_n * H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için bir alt sınır bulalım. Bunun için,

$$\|H_n * H_n\|_p^p = \|H_{n-1}\|_p^{2p} + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{((i+n)d - c)^p} \right)^2 + \frac{1}{(2nd - c)^{2p}} \quad (4.1.28)$$

eşitliğini tekrar göz önüne alalım. Buradan, ( 4.1.28 ) eşitliği ve Teorem 4.1.3 ile verilen ( 4.1.17 ) eşitsizliği ile,  $H_n * H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için

$$\|H_n * H_n\|_p^p \geq \left[ \frac{1}{(2d - c)^p} + \frac{2}{(3d - c)^p} + \frac{1}{(4d - c)^p} \right]^2 + \frac{2}{(3d - c)^{2p}}$$

şeklinde bir alt sınır bulunur ki, ( 4.1.19 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

## 4.2. Cauchy – Hankel Matrislerinin Tracy – Singh Çarpımlarının $\ell_p$ Normları İçin Sınırlar

**Teorem 4.2.1**  $H_n$ , ( 4.1.1 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki  $H_n$  Cauchy-Hankel matrisinin,  $H_n \odot H_n$  ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının  $\ell_p$  (  $p \geq 2$  ) matris normu için,

$$\|H_n \odot H_n\|_p^p \leq \left\{ 1 - \ln 2 + (2^p + 2^{p-1} - 3) \zeta(p-1) + \left( 2^p - 2^{p-1} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p) + \left( \frac{2}{9} \right)^p \right\}^2 \quad (4.2.1)$$

şeklinde bir üst sınır ve



$$\| H_n \odot H_n \|_p^p \geq \left\{ \left( 2^{p-2} - \frac{1}{2} \right) \zeta(p-1) - \left( 2^{p-2} - \frac{1}{4} \right) \zeta(p) + \frac{2^{p+1}}{7^p} \right\}^2 \quad (4.2.2)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 4.1.1 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Hankel matrisini,  $H_n^{(11)} = H_{n-1}$  ve  $H_n^{(12)}, H_n^{(21)}, H_n^{(22)}$  sırasıyla; ( 4.1.6 ), ( 4.1.7 ), ( 4.1.8 ) ' deki gibi tanımlamak üzere, ( 4.1.9 ) 'daki gibi blok matrislere ayıralım.

Böylece;  $H_n^{(ij)}$  (  $1 \leq i, j \leq 2$  ) matrisleri ile ( 4.1.9 ) 'daki gibi bloklara ayrılan  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $H_n$ , Cauchy-Hankel matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$H_n^{(ij)} \odot H_n = \begin{bmatrix} H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(11)} & H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(12)} \\ H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(21)} & H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(22)} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, ( 4.1.9 ) deki gibi bloklara ayrılmış  $n$  – mertebeli iki  $H_n$  Cauchy-Hankel matrisinin,  $H_n \odot H_n$  ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$H_n \odot H_n = (H_n^{(ij)} \odot H_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan  $n^2$  - mertebeli reel karesel bir matristir.

$\| \cdot \|_{gp}$  , Tanım 2.3.6 'da verilen genelleştirilmiş  $\ell_p$  matris normu olmak üzere,  $H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  (  $p \geq 2$  ) normu için;

$$\Omega(ij, kl) = \| H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(kl)} \|_{gp}^p \quad (1 \leq i, j, k, l \leq 2)$$

olmak üzere,

$$\| H_n \odot H_n \|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k,l=1}^2 \Omega(ij, kl) \quad (4.2.3)$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş  $-\ell_p$  matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(11,kl) = \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\} \quad (4.2.4)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(12,kl) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\} \quad (4.2.5)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(21,kl) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\} \quad (4.2.6)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(21,kl) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\} \quad (4.2.7)$$

eşitlikleri yazılır.

Böylece, ( 4.2.4 ) , ( 4.2.5 ) , ( 4.2.6 ) , ( 4.2.7 ) eşitliklerinden,  $H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için;

$$\begin{aligned} \| H_n \odot H_n \|_p^p &= \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+j\right)^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right) + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+n+j\right)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\}^2 \\ &= \left\{ \| H_{n-1} \|_p^p + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+i+n\right)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\}^2 \\ &= \left\{ \| H_{n-1} \|_p^p + 2^{p+1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2n+2i+1)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\}^2 \\ \| H_n \odot H_n \|_p^p &\leq \left\{ \| H_{n-1} \|_p^p + 2^{p+1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(2i+1)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}+2n\right)^p} \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\|H_n \odot H_n\|_p^p \leq \left\{ \|H_{n-1}\|_p^p + 2^p \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 2n\right)^p} \right\}^2 \quad (4.2.8)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, elde edilen ( 4.2.8 ) eşitsizliği ve Teorem 4.1.1 de verilen ( 4.1.2 ) eşitsizliği ile,

$$\|H_n \odot H_n\|_p^p \leq \left\{ 1 - \ln 2 + (2^{p-1} - 1)\zeta(p-1) - \left(2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) \right. \\ \left. + 2^p \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) + \left(\frac{2}{9}\right)^p \right\}^2 \quad (4.2.9)$$

eşitsizliği yazılır. ( 4.2.9 ) eşitsizliğinin sağ tarafında yer alan

$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right)$  ifadesinin Polygamma fonksiyonu cinsinden,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \frac{(-1)^p}{2^{p-1}(p-2)!} \Psi\left(p-2, n+\frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1) \\ + \frac{(-1)^p}{2^p(p-1)!} \Psi\left(p-1, n+\frac{1}{2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\zeta(p)$$

şeklinde yazıldığı ve ayrıca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{(2i+1)^{p-1}} - \frac{1}{(2i+1)^p} \right) = \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right)\zeta(p-1) - \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\zeta(p) \quad (4.2.10)$$

olduğu bilindiğine göre, böylece ( 4.2.10 ) eşitliği ve ( 4.2.9 ) eşitsizliğinden,  $H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için;

$$\|H_n \odot H_n\|_p^p \leq \left\{ 1 - \ln 2 + (2^p + 2^{p-1} - 3)\zeta(p-1) + \left(2^p - 2^{p-1} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p) + \left(\frac{2}{9}\right)^p \right\}^2$$

şeklinde bir üst sınır bulunur ki, böylece ( 4.2.1 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de,  $H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için bir alt sınır bulalım.

Bunun için,

$$\|H_n \odot H_n\|_p^p = \left\{ \|H_{n-1}\|_p^p + 2^{p+1} \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2n+2i+1)^p} \right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + 2n\right)^p} \right\}^2 \quad (4.2.11)$$

eşitliğini tekrar göz önüne alalım. Böylece, ( 4.2.11 ) eşitliği ve Teorem 4.1.1 de verilen ( 4.1.3 ) eşitsizliği ile,  $H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  ( $p \geq 2$ ) normu için;

$$\|H_n \odot H_n\|_p^p \geq \left\{ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p) + 2^{p+1} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(2i+2n+1)^p} \right\}^2$$

$$\geq \left\{ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p) + 2^{p+1} \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{(2i+5)^p} \right\}^2$$

$$\|H_n \odot H_n\|_p^p \geq \left\{ \left(2^{p-2} - \frac{1}{2}\right)\zeta(p-1) - \left(2^{p-2} - \frac{1}{4}\right)\zeta(p) + \frac{2^{p+1}}{7^p} \right\}^2$$

şeklinde bir alt sınır elde edilir ki, böylece ( 4.2.2 ) eşitsizliği ispat edilmiş olur.

**Teorem 4.2.2**  $H_n$ , ( 4.1.15 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Hankel matrisi olmak üzere, bu şekilde tanımlanan iki  $H_n$  Cauchy-Hankel matrisinin,  $H_n \odot H_n$  ile gösterilen Tracy - Singh çarpımının  $\ell_p$  (  $3 \leq p \leq \infty$  ) matris normu için,

$$\begin{aligned} \| H_n \odot H_n \|_p^p \leq & \left\{ \frac{1}{d^p} \left[ \frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi \left( p-1, 2 - \frac{c}{d} \right) - \Psi \left( p-2, 2 - \frac{c}{d} \right) \right| \right] \right. \\ & + 2 \left( \frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[ \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi \left( p-1, 1 + \frac{d-c}{d} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \Psi \left( p-2, 1 + \frac{d-c}{d} \right) \right] \right) + \frac{1}{(2d-c)^p} \left. \right\}^2 \quad (4.2.12) \end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır ve

$$\| H_n \odot H_n \|_p^p \geq \left[ \frac{1}{(2d-c)^p} + \frac{4}{(3d-c)^p} + \frac{1}{(4d-c)^p} \right]^2 \quad (4.2.13)$$

şeklinde bir alt sınır vardır.

**İspat :** ( 4.1.15 ) ile verilen  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  ) Cauchy-Hankel matrisini,  $H_n^{(11)} = H_{n-1}$  ve  $H_n^{(12)}$ ,  $H_n^{(21)}$ ,  $H_n^{(22)}$  sırasıyla; ( 4.1.20 ), ( 4.1.21 ), ( 4.1.22 ) ' deki gibi tanımlamak üzere, ( 4.1.23 ) 'deki gibi blok matrislere ayırılım.

Böylece;  $H_n^{(ij)}$  (  $1 \leq i, j \leq 2$  ) matrisleri ile ( 4.1.23 ) 'de ki gibi bloklara ayrılan  $n$ - mertebeli (  $n \geq 2$  )  $H_n$  Cauchy-Hankel matrisinin Tracy – Singh çarpımı,

$$H_n^{(ij)} \odot H_n = \begin{bmatrix} H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(11)} & H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(12)} \\ H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(21)} & H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(22)} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2$$

şeklinde tanımlanmak üzere, ( 4.1.23 ) 'deki gibi bloklara ayrılmış  $n -$  mertebeli iki  $H_n$  Cauchy-Hankel matrisinin,  $H_n \odot H_n$  ile gösterilen Tracy-Singh çarpımı;

$$H_n \odot H_n = (H_n^{(ij)} \odot H_n)_{ij}$$

şeklinde tanımlanan  $n^2 -$  mertebeli reel karesel bir matristir.

$\|\cdot\|_{gp}$ , ( 2.3.6 ) da tanımlanan genelleştirilmiş  $-\ell_p$  matris normu olmak üzere,

$H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için;

$$\Omega(ij, kl) = \|H_n^{(ij)} \otimes H_n^{(kl)}\|_{gp}^p \quad (1 \leq i, j, k, l \leq 2)$$

olmak üzere,

$$\|H_n \odot H_n\|_p^p = \sum_{i,j=1}^2 \sum_{k,l=1}^2 \Omega(ij, kl) \quad (4.2.14)$$

şeklinde eşitlik yazılır. Herhangi iki matrisin Kronecker çarpımı ve bu çarpımın genelleştirilmiş  $-\ell_p$  matris normu tanımları göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^2 \Omega(11, kl) &= \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c - (i+j)d|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c - (i+j)d|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c - (i+n)d|^p} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c - (n+j)d|^p} \right) + \frac{1}{|c - 2nd|^p} \right\} \quad (4.2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^2 \Omega(12, kl) &= \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c - (i+n)d|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c - (i+j)d|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c - (i+n)d|^p} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c - (n+j)d|^p} \right) + \frac{1}{|c - 2nd|^p} \right\} \quad (4.2.16) \end{aligned}$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(21,kl) = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right) \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+j)d|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(n+j)d|^p} \right) + \frac{1}{|c-2nd|^p} \right\} \quad (4.2.17)$$

$$\sum_{k,l=1}^2 \Omega(22,kl) = \frac{1}{|c-2nd|^p} \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+j)d|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(n+j)d|^p} \right) + \frac{1}{|c-2nd|^p} \right\} \quad (4.2.18)$$

eşitlikleri yazılır. Böylece , ( 4.2.15 ) , ( 4.2.16 ) , ( 4.2.17 ) , ( 4.2.18 ) eşitliklerinden,  $H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için;

$$\| H_n \odot H_n \|_p^p = \left\{ \left( \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+j)d|^p} \right) + \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(i+n)d|^p} \right) \right. \\ \left. + \left( \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{|c-(n+j)d|^p} \right) + \frac{1}{|c-2nd|^p} \right\}^2$$

$$\| H_n \odot H_n \|_p^p = \left\{ \| H_{n-1} \|_p^p + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{|(i+n)d-c|^p} \right) + \frac{1}{|2nd-c|^p} \right\}^2 \quad (4.2.19)$$

eşitliği elde edilir. Böylece ( 4.2.19 ) eşitliği ve Teorem 4.1.3 ile verilen ( 4.1.16 ) eşitsizliği ile,

$$\| H_n \odot H_n \|_p^p \leq \frac{1}{d^p} \left[ \frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi \left( p-1, 2-\frac{c}{d} \right) - \Psi \left( p-2, 2-\frac{c}{d} \right) \right| \right] \\ + 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)} \right)^2 + \frac{1}{(2d-c)^{2p}} \quad (4.2.20)$$



eşitsizliği elde edilir. ( 4.2.20 ) eşitsizliğinde yer alan,  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)}$  ifadesinin

Polygamma fonksiyonu cinsinden değeri,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)} &= \left\{ \frac{(-1)^p (c-d)}{(p-1)! d^{p+1}} \left[ -\Psi\left(p-1, n+\frac{d-c}{d}\right) + \Psi\left(p-1, 1+\frac{d-c}{d}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[ \Psi\left(p-2, n+\frac{d-c}{d}\right) - \Psi\left(p-2, 1+\frac{d-c}{d}\right) \right] \right\} \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{((i+1)d-c)} &= \frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[ \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 1+\frac{d-c}{d}\right) \right. \\ &\quad \left. - \Psi\left(p-2, 1+\frac{d-c}{d}\right) \right] \quad (4.2.21) \end{aligned}$$

olduğu bilindiğine göre, böylece ( 4.2.21 ) eşitliği ve ( 4.2.20 ) eşitsizliğinden,  $H_n \otimes H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için,

$$\begin{aligned} \| H_n \otimes H_n \|_p^p &\leq \left\{ \frac{1}{d^p} \left[ \frac{1}{(p-2)!} \left| \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 2-\frac{c}{d}\right) - \Psi\left(p-2, 2-\frac{c}{d}\right) \right| \right] \right. \\ &\quad + 2 \left( \frac{(-1)^p}{(p-2)! d^p} \left[ \frac{c-d}{(p-1)d} \Psi\left(p-1, 1+\frac{d-c}{d}\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \Psi\left(p-2, 1+\frac{d-c}{d}\right) \right] \right) + \frac{1}{(2d-c)^p} \left. \right\}^2 \end{aligned}$$

şeklinde bir üst sınır bulunur ki, böylece ( 4.2.12 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

Şimdi de,  $H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için bir alt sınır bulalım. ( 4.2.19 ) eşitliği ve Teorem 4.1.1 de verilen ( 4.1.3 ) eşitsizliği ile,  $H_n \odot H_n$  matrisinin  $\ell_p$  normu için;

$$\| H_n \odot H_n \|_p^p \geq \left[ \frac{1}{(2d-c)^p} + \frac{2}{(3d-c)^p} + \frac{1}{(4d-c)^p} + 2 \sum_{i=1}^{2-1} \frac{1}{((i+2)d-c)^p} \right]$$

$$\| H_n \odot H_n \|_p^p \geq \left[ \frac{1}{(2d-c)^p} + \frac{4}{(3d-c)^p} + \frac{1}{(4d-c)^p} \right]^2$$

şeklinde bir alt sınır bulunur ki, böylece ( 4.2.13 ) eşitsizliği ispat edilmiş olunur.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Cauchy – Toeplitz ve Cauchy – Hankel matrislerinin Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının  $\ell_p$  normları için alt ve üst sınırlar tespit ettik.

Bu matrislerin, Khatri – Rao ve Tracy – Singh çarpımlarının singüler değerleri araştırılabilir.

## 6. KAYNAKLAR

- Bozkurt, D.** 1998. On the  $\ell_p$  norms of Cauchy – Toeplitz matrices, Linear and Multilinear Algebra, 44 : 341 – 346
- Bozkurt, D.** 1995. Almost Cauchy – Toeplitz Matrislerinin  $\ell_p$  Normları Üzerine, VIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Çukurova Üniversitesi, Adana.
- Bozkurt, D.** 1996. Cauchy – Toeplitz Matrislerinin  $\ell_p$  Normları Üzerine, Ord. Prof. Dr. Cahit Arf’ın 85. Doğum Günü Onuruna Matematik Sempozyumu.
- Bozkurt, D.** 1996. On the  $\ell_p$  norms of Cauchy – Hankel matrices, Journal of Scientific Research Foundation, Vol : 1, No : 2, pp. 27 – 32.
- Bozkurt, D.** 1996. On the  $\ell_p$  norms of Almost Cauchy – Toeplitz matrices, Tr. J. of Mathematics, 20 : 545 -552, Tübitak.
- Calvetti, D. , Reichel L.** 1997. Factorizations of Cauchy Matrices, Journal of Computational and Applied Mathematics, 86 : 103 – 123
- Horn, R. A. , Kittaneh F.** 1998. Two Applications of a Bound On The Hadamard Product with a Cauchy Matrix, The Electronic Journal of Linear Algebra, 3 : 4 – 12
- Iohvidov, I. S.** 1982. Hankel and Toeplitz Matrices and Forms, Birkhauser, Boston.
- Kölbig, K. S.** 1972. Programs for Computing The Logarithm of The Gamma Function and Digamma Function for Complex Arguments, Computer Phys, Comm., 4 : 221 - 226
- Horn, R. A. , Johnson, C. R.** 1990. Matrix Analysis, Cambridge University Press.
- Bozkurt, D. , Türen, B.** 2000. Lineer Cebir, SEL – ÜN Vakfı Yayınları, Konya.
- Taşçı, D.** 1999. Lineer Cebir, SEL – ÜN Yayınları, Konya.
- Tyrtysnikov, E. E.** 1991. Cauchy – Toeplitz Matrices and Some Applications, Linear Algebra and Its Applications, Vol : 149, pp : 1 – 18.
- Shuangzhe, L.** 1999. Matriz Results On the Khatri – Rao and Tracy – Singh Products, Linear Algebra and Its Applications, 289 : 267 – 277.
- Shuangzhe, L.** 2002. Several Inequalities Involving Khatri – Rao Products of Positive Semidefinite Matrices, Linear Algebra and Its Applications, 354 : 175 – 186.
- Xian Z. , Yang, Z. , Cao, C.** 2002. Inequalities Involving Khatri –Rao Products of Positive Semi – definite Matrices, Applied Mathematics E – Notes, 2 : 117 -124.

- Çatak, Ö.** 2001. Cauchy – Toeplitz ve Cauchy – Hankel Matrislerinin  $\ell_p$  Normları İçin Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Türkmen, R.** 1999. Cauchy – Toeplitz ve Cauchy – Hankel Matrislerinin Normları İçin Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.
- Tekin, H.** 1996. Cauchy – Toeplitz  $\ell_p$  Normları İçin Sınırlar, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

