

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

169319

**SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE
MANYETİK SKALER POTANSİYEL HESABI**

Kenan TANTAŞ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

ELAZIĞ, 2005

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE
MANYETİK SKALER POTANSİYEL HESABI**

Kenan TANTAŞ

Yüksek Lisans Tezi
Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı

Bu tez, 30.09.2005 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği / ~~ayrıkça~~
ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Selçuk Yıldırım

Üye:

Üye:

Üye:

Üye:

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05./10./2005 tarih
ve 2005/34-2 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasında beni destekleyen ve tezin her aşamasında sürekli yol gösteren, tez yöneticim sayın Yrd. Doç. Dr. Selçuk YILDIRIM'a teşekkür ederim.

Ayrıca fikirleriyle bana destek olan diğer hocalarıma ve arkadaşlarıma da teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER LİSTESİ.....	I
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IV
TABLolar LİTESİ.....	V
SİMGELER LİSTESİ	VI
ÖZET.....	VII
ABSTRACT.....	VIII
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Genel Bilgi.....	1
2.MANYETİK ALAN.....	5
2.1.Temel Kavramlar.....	5
2.1.1.Skaler.....	5
2.1.2.Vektör.....	5
2.2. Skaler ve Vektörel Alanlar.....	5
2.2.1.Skaler Alanlar.....	5
2.2.2.Vektörel Alanlar.....	5
2.3.Alanların Zamana Göre Sınıflandırılması.....	6
2.3.1.Statik Alanlar.....	6
2.3.2.Zamanla Değişen Alanlar.....	6
2.4.Elektromanyetik Alanların Sınıflandırılması.....	6
2.4.1.I.Sınıf Alanlar.....	6
2.4.2.II.Sınıf Alanlar.....	7
2.4.3.III.Sınıf alanlar.....	7
2.4.4.IV.Sınıf Alanlar.....	8
2.5.Lorentz Kuvveti.	8
2.6. Biot-Savart Yasası.....	9
2.6.1. Kararlı Akımlar	9
2.6.2. Kararlı Bir Akımın Manyetik Alanı.....	9
2.7. Ampere Yasası.....	9
2.8. Manyetik Vektör Potansiyeli.....	10
2.9. Manyetik Skaler Potansiyel.....	11
2.10. Elektrik Alan Şiddeti İle Manyetik Alan Şiddeti Arasındaki Benzerlikler.....	12

3. MATEMTİKSEL DENKLEMLER.....	13
3.1. İntegral Bağlıntılar.....	13
3.1.1. Gradyant Teoremi.....	13
3.1.2. Diverjans Teoremi.....	13
3.2. Gauss İntegrasyon.....	14
3.2.1. Bir Noktalı Formül.....	15
3.2.2. İki Noktalı Förmül.....	16
3.3. Sınır Şartları.....	17
3.4. Temel Çözüm.....	19
4. POTANSİYEL PROBLEMLER.....	21
4.1. Laplace Denklemi.....	21
4.2. Poisson Denklemi.....	24
4.2.1. B_i Alan İntegralinin Sınıra İndirgenmesi.....	25
4.2.1.1. Özel Çözüm.....	25
5. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ.....	27
5.1. Sabit Elemanlar.....	28
5.1.1. \hat{G}_{ij} ve \hat{H}_{ij} Etki İntegralleri.....	31
5.2. Lineer Elemanlar.....	32
5.2.1. Tekil Noktalar.....	34
6. BİLGİSAYAR PROGRAMI	36
6.1 Programın Genel Yapısı.....	36
6.2 MSOLV programı.....	41
7. UYGULAMALAR.....	42
7.1 Uygulama 1.....	42
7.2 Uygulama 2.....	44
7.3 Uygulama 3.....	46
7.4 Hava Aralığının Büyüklüğünün Değiştirilmesi.....	48
8. SONUÇLAR.....	50
KAYNAKLAR.....	51

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1 Çözüm bölgesinin sınırları.....	14
Şekil 3.2 İntegrali alınacak bölge.....	15
Şekil 3.3 S ile sınırlı bir R bölgesi.....	18
Şekil 3.4 Temel çözüm için seçilen bölge.....	20
Şekil 4.1 Kaynak ve alan noktası	21
Şekil 4.2 İntegrallerin sınıra indirgenmesi.....	22
Şekil 4.3 Düğüm noktaları	23
Şekil 5.1 Çözüm bölgesinin bölmelenmesi	27
Şekil 5.2 Sınır elemanlarının düğümleri.....	28
Şekil 5.3 Bir sabit eleman.....	31
Şekil 5.4 Kaynak noktasının integrasyon noktasına uzaklığı ve normal vektörünün bileşenleri.....	31
Şekil 5.5 Lineer ve kuadratik sınır elemanları	33
Şekil 5.6 Şekil fonksiyonları	34
Şekil 6.1 MSOLV programının genel yapısı.....	36
Şekil 7.1 Örnek uygulama-1.....	42
Şekil 7.2 Örnek uygulama-1'in hava aralığı.....	42
Şekil 7.3 Örnek uygulama-1 için manyetik skaler potansiyelin y eksenine göre değişimi.....	43
Şekil 7.4 Örnek uygulama-1 için manyetik alan şiddetinin y eksenine göre değişimi.....	44
Şekil 7.5 Örnek uygulama-2.....	44
Şekil 7.6 Örnek uygulama-2 için manyetik skaler potansiyeli y eksenine göre değişimi.....	45
Şekil 7.7 Örnek uygulama-2 için manyetik alan şiddetinin y eksenine göre değişimi.....	46
Şekil 7.8 Örnek uygulama-3.....	46
Şekil 7.9 Örnek uygulama-3 için manyetik skaler potansiyeli y eksenine göre değişimi.....	47
Şekil 7.10 Örnek uygulama-3 için manyetik alan şiddetinin y eksenine göre değişimi.....	48
Şekil 7.11 Hava aralığının büyüklüğüne göre manyetik skaler potansiyelin değişimi.....	48
Şekil 7.12 Hava aralığının büyüklüğüne göre manyetik alan şiddetinin değişimi.....	49

TABLULAR LİSTESİ

Tablo	Sayfa
Tablo 3.1 Gauss quadrature için gauss noktaları ve ağırlık faktörleri.....	17
Tablo 7.1 Örnek uygulama 1'in manyetik skaler potansiyel değerleri.....	43
Tablo 7.2 Örnek uygulama 1'in manyetik alan şiddeti değerleri.....	43
Tablo 7.3 Örnek uygulama 2'in manyetik skaler potansiyel değerleri.....	45
Tablo 7.4 Örnek uygulama 2'in manyetik alan şiddeti değerleri.....	45
Tablo 7.5 Örnek uygulama 3'ün manyetik skaler potansiyel değerleri.....	47
Tablo 7.6 Örnek uygulama 3'ün manyetik alan şiddeti değerleri.....	47



SİMGELER LİSTESİ

- \vec{A} : Herhangi bir vektör ve manyetik vektör potansiyel
 \vec{a}_A : Birim vektör
 \vec{F} : Vektörel alan
 ∇ : Gradient operatörü
 \vec{F}_{mag} : Manyetik kuvvet
 Q : Elektriksel yük
 \vec{B} : Manyetik alan
 \vec{v} : Hız vektörü
 F_{elek} : Elektriksel kuvvet
 \vec{E} : Elektrik alanı
 μ : Manyetik geçirgenlik
 ϕ : Manyetik akı
 J : Akım yoğunluğu
 V_m : Manyetik skaler potansiyel
 w_i : Ağırlık faktörü
 ξ_i : Apsisler
 ε, η : Lokal koordinatlar
 δ : Dirac delta fonksiyonu
 u^* : Laplace denkleminin temel çözümü
 q^* : Temel çözümün normale göre türevi
 c, c_1, c_2 : Sınırlar
 H, G : Etki katsayıları
 n, n_1, n_2 : Normal birim vektörü ve bileşenleri
 L_i : Sınır elemanının uzunluğu
 x_p, y_p : Düğüm noktasının koordinatları
 x_g, y_g : Gauss noktalarının koordinatları
 ϕ_i : İnterpolasyon fonksiyonları

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİYLE MANYETİK SKALER POTANSİYEL HESABI

Kenan TANTAŞ

Fırat Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı

2005, Sayfa:52

Bu çalışmada, sınır elemanları yöntemi kullanılarak iki boyutlu manyetik skaler potansiyel ve manyetik alan şiddeti hesabı yapılmıştır. Manyetostatik alan problemlerini tanımlayan Laplace denklemi sınır integral denklemine dönüştürülmüştür. Sınır integral denklemi, sabit sınır elemanları ile ayrıştırılarak bir lineer denklem sistemi elde edilmiştir. Bu denklem sistemi çözülerek hava aralığının sınırlarındaki manyetik skaler potansiyeller ile manyetik alan şiddetleri bulunmuştur. Elde edilen sınır değerleri kullanılarak iç noktalardaki manyetik skaler potansiyeller ile manyetik alan şiddetleri hesaplanmıştır.

Sınır elemanları yöntemiyle manyetik skaler potansiyeli ve manyetik alan şiddetini hesaplamak için MATLAB'ta, MSOLV olarak isimlendirilen bir program yazılmıştır. MSOLV programı yardımıyla bazı manyetik devrelerin hava aralığındaki manyetik skaler potansiyeller ve manyetik alan şiddeti değerleri hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Laplace Denklemi, Sınır Elemanları Yöntemi, Manyetik Skaler Potansiyel, Manyetik Alan Şiddeti

ABSTRACT

Master Thesis

MAGNETIC SCALAR POTENTIAL ANALYSIS WITH BOUNDARY ELEMENT METHOD

Kenan TANTAŞ

Fırat University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Electrical Education

2005, Page: 52

In this study, two-dimensional magnetic scalar potential and magnetic field intensity have been calculated using the boundary element method. Laplace equation which defines magnetostatic fields problems has been converted to boundary integral equation. After discretization of the boundary integral equation with constant boundary elements, a linear equation system has been constituted. With the solution of this equation, magnetic scalar potential and magnetic field intensity have been found on the boundary of air gap. Magnetic scalar potential and magnetic field intensity inside of air gap have been calculated using, taking the boundary values.

For calculation of magnetic scalar potential using the Boundary Element Method, a software program called "MSOLV" has been developed in MATLAB software package. Using MSOLV, magnetic scalar potential and Magnetic field intensity have been calculated inside of air gap of some magnetic circuit.

Key Words: Laplace Equation, Boundary Element Method, Magnetic Field Intensity, Magnetic Scalar Potential

1.GİRİŞ

1.1. Genel Bilgi

Bir elektrik cihazının tasarımında, cihazın istenilen şartlara uygun özelliklere sahip olması göz önünde bulundurulmaktadır. Bu amaçla tasarlanan cihaza ilişkin elektromanyetik alan incelemelerinin yapılması, cihazın özelliklerini ve davranışını belirleme bakımından yararlı ve gerekli bilgilerin elde edilmesi imkanını verir. Dolayısıyla elektromanyetik alan hesaplamalarının yapılabilmesi için kullanılan yöntemler üç gruba ayrılabilir.

1. Analitik yöntemler
2. Analog yöntemler
3. Sayısal yöntemler

Analitik yöntemler, çözüm bölgesi homojen, geometri basit ve kısmi diferansiyel denklemler lineer ise kolayca kullanılabilirler. Ancak pratikte karşılaşılan problemler için genellikle analitik çözümler elde edilemez. Diferansiyel denklemin lineer olduğu durumlarda bile çözüm bölgesi homojen değildir, geometri düzgün olmaz ve sınır şartlarının basit matematiksel fonksiyonlarla ifadesi zordur. Dolayısıyla bu yöntemler sadece basit sistemler için geçerlidir.

Elektrolitik tank, iletken kağıt ve direnç devreleri gibi analog yöntemler daha geniş olarak kullanılmalarına rağmen, bunların da kullanım alanları kısıtlıdır. Hassas sonuçların elde edilmesi için, çok fazla teçhizat ile dikkatli ölçmeler gerekir ve böylece hatalar %2 sınırı içerisinde tutulabilir.

Sayısal yöntemler, yüksek hızlı sayısal bilgisayarların gelişmesi ve yardımcı cihazların kullanımının artmasıyla çok cazip bir hale gelmiş, böylece alan problemlerinin incelenmesinde önemli adımlar atılmıştır. Ancak Laplace ve Poisson türü kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde bir çok zorluklar bulunmaktadır. Bu zorlukların aşılmasını sağlamak amacıyla araştırmacılar tarafından çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerden en çok kullanılanlarından biri de sınır elemanları yöntemidir (Gün, 1993).

Sınır elemanları yöntemi, sınır integral denklemlerinin (boundary integral equation) çözümü için kullanılan sayısal bir tekniktir. Bu teknikte elektromanyetik olaylar matematiksel olarak integral şeklindeki Maxwell denklemleri ile tanımlanır. Eşdeğer kaynaklar veya alan değişkenleri gibi bilinmeyenlerden oluşan sınır integral denklemlerinin elde edilmesi, malzeme arakesitleri boyunca sınır şartlarının uygulanmasına imkan sağlar. Sınırlar, üzerinde bilinmeyenlerin gösterildiği sınır elemanlarına ayrıştırıldıktan sonra bir lineer denklem sistemi elde edilir. Böylece sınır elemanları yöntemiyle problem çözülür (Yıldırım, 1999).

Sınır elemanları yöntemi, bilim ve teknolojinin farklı branşlarındaki sınır değer problemlerinin çözümü için ortaya çıkarılan bir sayısal yöntemdir. Bu yöntem, sınır integral

denklem yöntemi olarak bilinen integral denklem yönteminden ortaya çıkmıştır. Sınır integral denklem yönteminin aslında bir birine benzer gibi görünen farklı formülasyona sahip iki yaklaşımı vardır. Bunlardan biri, problemin fiziksel yönlerine bağlı olarak, bir kaynak yüzeyin sınır yüzeye dönüşümünü sağlayan “indirekt” yöntem olarak bilinir. Bu yaklaşım, geçmişte çoğunlukla akışkanlar mekaniği ve elektromanyetik alanları araştırmada kullanılmıştır. Şimdilerde “direkt” yöntem olarak da bilinen sınır integral denklem formülasyonunun diğer bir çeşidi kullanılmaktadır. Bu yaklaşım kısmi diferansiyel denklemlerin Green fonksiyon çözümlerini matematiksel yönleriyle incelemeye dayalıdır. Yöntemde geometrik sınırlar üzerinde tanımlanmış sınır şartları ile beraber verilen bir denklemin Green fonksiyonu bilindiğinde, böyle bir sınır değer problemi integral denklem haline getirilebilir ve sayısal olarak hesaplanabilir.

Bu yüzyılın ikinci yarısından itibaren Green fonksiyonlarının elde edilmesi yönündeki çalışmalara özen gösterilmiştir. Bu yaklaşımdaki gelişmeler, boşluktaki Green fonksiyonunun elde edilmesi ile hız kazanmıştır. Temel çözüm, herhangi bir sınır şartı tanımlamaksızın bir nokta kaynaktaki denklemi sağlar. Bu durumda, homojen ortama uyumuyla problemin boyutunu bir derece indirger. Örneğin hacim integrallerini yüzey integrallere, yüzey integrallerini çizgisel integrallere ve integral denklemleri diferansiyel denklemlere indirger.

Sınır integral denklem yöntemi, yaklaşık 1960’den 1975’e kadar olan geçen zamanda oldukça ilgi çekici olmuştur. Sınır integral denklem yöntemini kullanan M.A. Jawson, G.T. Symm (1963), T.A. Cruise ve F.J. Rizzo (1968) çalışmaları ile 1978’de Southampton’daki bir konferansta şimdilerde sınır elemanları yöntemi olarak bilinen yöntemin öncüleri olmuştur. Daha sonra C.A. Brebbia, P.K. Banerjee, R.P. Shaw, J.A. Liggett, H. Antes gibi isimlerin öncülük ettiği araştırma grubu fiziksel ve teknolojik alanların çoğunda sınır değer problemlerin çözümüne imkan sağlayan konuları geliştirmiştir. Böylece bu konular pek çok üniversitenin ve araştırmacının ilgi odağı haline gelmiştir.

Sınır elemanları yöntemi, sınır değer problemlerinin integral denklem formülasyonuna dayalıdır. Ayrıştırılmayı bölgede değil de sadece sınırda yapmaktadır. Bölge tipi yöntemlerin (sonlu elemanlar yöntemi ve sonlu farklar yöntemi) tersine sınır eleman formülasyonundaki boyutsallığın derecesi bir derece indirgenir ve dolayısıyla analizi basitleştirir. Bu yöntem karmaşık sınırlı ve sınırsız bölgeler için uygundur. Yöntem, potansiyel teorisi, elektrostatik, elastodinamik, viskoelastosite, kırılma analizi, ısı transferi, sıvı akışkanları, su çalkantı problemleri, akustik , yeraltı su akışları, toprak yapısı, v.b. bir çok alanda fizik ve mühendislik problemlerinin çözümünde kullanılır (Uyar, 2004).

Sınır elemanları yöntemi kullanarak elektromanyetik alanları ve diğer alanları inceleyen çeşitli araştırmalar gerçekleştirilmiştir.

program geliştirmiştir. Bu programla i bölge, dış bölge ve homojen olmayan bölgeleri kapsayan elektrot sistemleri üzerinde çalışmalar yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar, analitik sonuçlar ve ELCTRO paket program sonuçları ile karşılaştırılmıştır.(Uyar, 2004)

Bu çalışmanın amacı, sınır elemanları yöntemiyle manyetik skaler hesabı yapmaktır. Bu amaçla manyetik skaler potansiyeli hesabı için kullanılan Laplace denklemi sınır integral denklemine dönüştürülmüş ve sınır integral denklemi sınır elemanları yöntemi kullanılarak lineer denklem sistemi elde edilmiştir. Daha sonra bu lineer denklem sistemi matris formuna getirilerek zlmř ve sınırdaki manyetik skaler potansiyel ile manyetik skaler potansiyelin normale göre türev değerleri elde edilmiştir. Bu sınır değerler kullanılarak i noktalardaki manyetik skaler potansiyeller hesaplanmıştır.



2. MANYETİK ALAN

2.1. Temel Kavramlar

Elektromanyetik alanlarda karşılaşılan büyüklüklerin çoğu skaler ve vektörel olmak üzere iki sınıfta incelenebilir.

2.1.1. Skaler

Tam olarak büyüklüğü ile tanımlanabilen fiziksel bir miktar skaler olarak adlandırılır. Skaler miktarların bazı örnekleri; kütle, zaman, sıcaklık, iş ve elektrik yüküdür. Bu miktarların her biri tamamen bir tek sayı ile tanımlanabilir. 20 °C'lik sıcaklık, 100gr'lık bir kütle ve 0.5 Coloumb'luk bir yük skaler büyüklüklere örnektir.

2.1.2. Vektör

Yönü ile birlikte bir büyüklüğe sahip fiziksel bir miktar vektör olarak adlandırılır. Kuvvet, hız, manyetik alan ve ivme vektörel büyüklüklerdir. Vektörler herhangi bir harf üzerine bir ok yerleştirilmek suretiyle gösterilirler. Örneğin \vec{A} .

Birim büyüklüğe sahip bir vektöre birim vektör adı verilir. Bir vektör daima birim vektör ile temsil edilebilir. Örneğin \vec{A} vektörü;

$$\vec{A} = A \cdot \vec{a}_A \quad (2.1)$$

olarak yazılabilir. Burada A , \vec{A} 'nın büyüklüğü ve \vec{a}_A ise \vec{A} yönünde birim vektör olup aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{A}}{A} \quad (2.2)$$

2.2. Skaler ve Vektörel Alanlar

Bir skaler alan, boşluktaki bütün noktalarda bir fiziksel büyüklüğü tanımlayan bir fonksiyondur. Bir fiziksel büyüklük, skaler veya vektör olabileceğinden, bir alan skaler veya vektör alanı olabilir.

2.2.1. Skaler Alanlar

Bir skaler alan her noktada bir tek sayı ile belirlenir. Skaler alanlara bir gazın sıcaklığı ve elektriksel potansiyel örnek olarak verilebilir.

2.2.2. Vektörel Alanlar

Bir vektörel alan boşlukta her noktada hem büyüklüğü ve hem de yönü ile belirlenir. Bir akışkanın hızı ve ivmesi, yer çekimi kuvveti ve manyetik alan vektör alanlarına örnek olarak verilebilir.

2.3. Alanların Zamana Göre Sınıflandırılması

2.3.1. Statik Alanlar

Eğer bir alan zamanla değişmiyorsa buna statik alan denir. Durgun yüklerin oluşturduğu elektrostatik alanlar ve yüklerin kararlı hareketleriyle meydana gelen statik manyetik alanlar statik alanlara örnek olarak verilebilir.

2.3.2. Zamanla Değişen Alanlar

Bir alan zamanla değişiyorsa, böyle bir alana zamanla değişen alan denir. Elektromanyetik alanlar zamanla değişen alanlara örnek olarak verilebilir.

2.4. Elektromanyetik Alanların Sınıflandırılması

Elektromanyetik alan çalışmasında alanlar dört temel sınıflandırmaya tabi tutulur. Alan problemlerinin çözümünde, çalışılan alanın hangi sınıfa ait olduğu önemlidir. Çünkü bir problemin çözümü için kullanılması gereken işlemi belirler. Bu bakımdan şimdi her sınıfla ilgili alanların özelliklerinin incelenmesi gerekir.

2.4.1. I. Sınıf Alanlar

Bir \vec{F} vektör alanı eğer bir bölgenin her yerinde,

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad (2.4)$$

ise I.sınıf alan olarak dikkate alınır. Bununla beraber vektörün curl'ü sıfır ise vektör bir skaler fonksiyonun gradyanı ile yazılabilir.

$$\vec{F} = -\nabla f \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot (-\nabla f) = \nabla^2 f = 0 \quad (2.7)$$

elde edilir ki, bu bir Laplace denklemidir. I. Sınıf alanların elde edilmesi için bölgenin sınırındaki şartlara uygun olarak Laplace denklemini çözülmesi gerekir. Skaler f fonksiyonu bilindikten sonra \vec{F} vektör alanı $\vec{F} = -\nabla f$ olarak hesaplanabilir.

I.sınıf alanlara örnekler yüksüz ortamdaki elektrostatik alanlar ve akım geçmeyen bir ortamdaki manyetik alanlardır.

2.4.2. II. Sınıf Alanlar

Eğer bir \vec{F} vektör alanı bölgede,

$$\nabla \vec{F} \neq 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{F} = 0 \quad (2.9)$$

ise II.sınıf vektör alanı olarak adlandırılır. Burada yine $\nabla \times \vec{F} = 0$ $\vec{F} = -\vec{\nabla}f$ 'yi gösterir. Çünkü $\nabla \cdot \vec{F} \neq 0$ olduğundan, $\nabla \cdot \vec{F} = \rho$ olarak yazılabilir. Burada, ρ bölge içinde bir sabit veya bilinen bir fonksiyondur.

$$\nabla^2 f = -\rho \quad (2.10)$$

bu denklem bir Poisson denklemidir. Böylece II.sınıf alanlar sınır şartlarının sınırlamaları içinde Poisson denkleminin çözümüyle bulunabilir. Sonra \vec{F} vektör alanı, $\vec{F} = -\vec{\nabla}f$ olarak bulunabilir. Yüklü bir ortamdaki elektrostatik alan II.sınıf alana bir örnektir.

2.4.3. III. Sınıf Alanlar

Eğer bir \vec{F} vektör alanı bölgede,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{F} &= 0 \\ \nabla \times \vec{F} &\neq 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

ise III. sınıf alan olarak dikkate alınır. Eğer bir vektörün diverjansı sıfır ise bu durumda vektör başka bir vektörün curl'ü ile ifade edilebilir. $\nabla \cdot \vec{F} = 0$ için,

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.12)$$

olarak ifade edilebilir. Burada \vec{A} diğer bir vektör alanıdır. $\nabla \times \vec{F} \neq 0$ olduğundan bu denklem

$$\nabla \times \vec{F} = \vec{J} \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir. Burada \vec{J} bilinen bir vektör alanıdır. $\nabla \times \vec{F} = \vec{J}$ konularak,

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \quad (2.14)$$

şeklinde yazılır. Vektör özdeşliği kullanılarak bu denklem aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \vec{J} \quad (2.15)$$

Teklik teoremine göre \vec{A} 'nın bir tek vektör alanı olması için bunun diverjansının da tanımlanması gerekir. Eğer $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ olacak şekilde bir sınırlama konulursa,

$$\nabla^2 \vec{A} = -\vec{J} \quad (2.16)$$

elde edilir ki, bu denklem Poisson vektör denklemleri olarak adlandırılır. Bundan dolayı III.sınıf alanlar Poisson denkleminin çözümünü gerektirirler. \vec{F} vektör alanı \vec{A} 'dan $\vec{F} = \nabla \times \vec{A}$ olarak hesaplanabilir. Akım taşıyan bir iletken içindeki manyetik alan III. sınıf alanlara örnektir.

2.4.4. IV. Sınıf Alanlar

Bir \vec{F} vektör alanının IV. sınıf alan olması için hem diverjansının ve hem de curl'ünün sıfır olmaması gerekir. Bununla birlikte \vec{F} vektörü \vec{G} ve \vec{H} vektör alanlarına ayrılır ki, \vec{G} III. sınıf ve \vec{H} II.sınıfın ihtiyacını karşılamaktadır.

$$\vec{F} = \vec{G} + \vec{H} \quad (2.17)$$

$$\nabla \cdot \vec{G} = 0 \quad \nabla \times \vec{G} \neq 0 \quad (2.18)$$

$$\nabla \times \vec{H} = 0 \quad \nabla \cdot \vec{H} \neq 0 \quad (2.19)$$

yazılır.Böylece,

$$\vec{H} = -\nabla f \quad \vec{G} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.20)$$

$$\vec{F} = \nabla \times \vec{A} - \nabla f \quad (2.21)$$

sonucu elde edilir. Sıkıştırılabilen bir ortamdaki hidrodinamik alanlar IV.Sınıf alanlara örnektir (Gürdal, 2000).

2.5. Lorentz Kuvveti

Bir \vec{B} manyetik alanında, \vec{v} hızıyla hareket eden bir Q yüküne etkiyen manyetik kuvvet şöyledir:

$$\vec{F}_{\text{mag}} = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.22)$$

Bu manyetik kuvvet, $F_{\text{elek}} = QE$ elektriksel kuvvetiyle birleştirilirse bir Q yükü üzerindeki toplam elektromanyetik kuvveti veren Lorentz kuvveti ifadesi bulunur.

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{B})) \quad (2.23)$$

2.6. Biot-Savart Yasası

2.6.1. Kararlı Akımlar

Durgun yüklerin elektrik alanı zamanla değişmez; elektrostatik terimi de buradan kaynaklanır. Benzer şekilde kararlı akımların manyetik alanı zaman içinde sabit kalır. Kararlı akımların incelenmesine de manyetostatik denilmektedir.

Durgun yükler \Rightarrow Sabit elektrik alan; elektrostatik

Kararlı akımlar \Rightarrow Sabit manyetik alan; manyetostatik

Kararlı akım denildiğinde hiç değişmeden devam eden bir yük akımını anlaşılmalıdır. Ancak pratikte gerçekten kararlı bir akım yoktur (tıpkı gerçekten durgun bir yük olmadığı gibi). Bu anlamda elektrostatik ve manyetostatik sadece teoride kullanılan ifadelerdir. Fakat yük ve akım dağılımlarındaki değişimler küçük ise, gerçek durumu temsil etmesi açısından iyi bir yaklaşımdır.

2.6.2. Kararlı Bir Akımın Manyetik Alanı

Kararlı bir akım geçen telin manyetik alanı Biot-Savart yasası ile verilir.

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\vec{I} \times \hat{R}}{R^2} \cdot dl = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{dl \times \hat{R}}{R^2} \quad (2.24)$$

İntegral tel boyunca ve akım yönünde gidilerek alınır; dl küçük bir tel uzunluğudur. \hat{R} , akım parçasından P noktasına çizilen vektördür. μ sabiti boşluğun manyetik geçirgenliği (permeabilite) adını alır ve MKS sisteminde değeri $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ olur. Bu seçim sonucu \vec{B} manyetik alanı Newton/amper-metre veya Tesla (T) biriminde çıkar ($1T=1N/Amper$).

2.7. Ampere Yasası

Ampere yasasının diferansiyel ifadesi,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} \quad (2.25)$$

şeklindedir. Bunun integral ifadesini elde etmek için Stokes teoremi uygulanır.

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot da = \oint_C \vec{B} \cdot dl = \mu \int_S \vec{J} \cdot da \quad (2.26)$$

Burada, $\int_S \vec{J} \cdot da$ yüzeyden geçen toplam akımdır. Buna göre;

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I_{i\phi} \quad (2.27)$$

eşitliği Ampere yasasının integral ifadesi olur (Griffiths D., J., 1996).

2.8. Manyetik Vektör Potansiyeli

Manyetik akı yoğunluğunun diverjansı sıfır olduğundan daima süreklidir. Diverjansı sıfır olan bir vektör başka bir vektör biriminin curl'ü olarak ifade edilebilir.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.28)$$

Burada \vec{A} manyetik vektör potansiyeldir. \vec{A} 'nın bir ifadesini tanımlamak için ilk önce \vec{B} alanı için Biot-Savart kanunu yazılabilir. $P(x, y, z)$ noktasında, akım taşıyan bir iletkenin meydana getirdiği akı yoğunluğu;

$$\mathbf{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (2.29)$$

Burada $\mathbf{R} = (x - x')\hat{\mathbf{a}}_x + (y - y')\hat{\mathbf{a}}_y + (z - z')\hat{\mathbf{a}}_z$ 'dir. Üslü ifadeler kaynak noktasını, üssüz ifadeler alan koordinatlarını ifade eder.

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{R}}}{R^2} \quad (2.30)$$

olduğundan dolayı akı yoğunluğu ara işlemlerden sonra,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \left[\left(\frac{\mu I}{4\pi} \right) \int \frac{d\vec{l}'}{R} \right] \quad (2.31)$$

ile ifade edilir.

Denk.(2.28) ve denk.(2.31) karşılaştırılırsa vektör potansiyeli \vec{A} aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l}'}{R} \quad (2.32)$$

\vec{A} kullanılarak manyetik akı ϕ de tanımlanabilir.

$$\phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} \quad (2.33)$$

Stokes teoreminin doğrudan bir uygulanmasıyla denk.(2.33),

$$\phi = \oint_C A d\vec{l} \quad (2.34)$$

şeklini alır. Burada C, açık S yüzeyini çevreleyen çizgidir (Gürdal,2000).

2.9. Manyetik Skaler Potansiyel

V_m ile belirtilen ve negatif gradyantu manyetik alan şiddetini veren bir manyetik skaler potansiyelin varlığı kabul edilirse,

$$H = -\nabla V_m \quad (2.35)$$

yazılır. Negatif gradyantın seçilmesiyle manyetik skaler potansiyel ile elektrik potansiyel problemleri arasında daha yakın bir benzerlik sağlanacaktır.

Bu tanımlama, manyetik alan için daha önce elde edilen sonuçlarla örtüşmelidir. Bundan dolayı ,

$$\nabla \times H = J = \nabla \times (-\nabla V_m) \quad (2.36)$$

olmalıdır.

Fakat herhangi bir skalerin gradyantının curl'ü sıfır olduğundan, eğer H bir skaler potansiyelin gradyantu olarak tanımlanırsa, skaler manyetik potansiyelin tanımlandığı bölgede akım yoğunluğu sıfır olmalıdır. Dolayısıyla,

$$H = -\nabla V_m \quad (J=0) \quad (2.37)$$

elde edilir.

Manyetik devreler de iletkenler az bir kapladığından, skaler manyetik potansiyelin faydalı olabileceği açıktır. Sürekli mıknatıs durumunda da skaler manyetik potansiyel uygulanabilir. V_m 'in birimi amper-sarım'dır.

Bu skaler potansiyel Laplace denklemini de sağlar. Boşlukta;

$$\nabla \cdot B = \mu \nabla \cdot H = 0 \quad (2.38)$$

$$\mu \nabla \cdot (-\nabla V_m) = 0 \Rightarrow \nabla^2 V_m = 0 \quad (J=0) \quad (2.39)$$

V_m homojen manyetik malzemede her zaman Laplace denklemini doğrular; akım yoğunluğunun mevcut olduğu bölgede skaler manyetik potansiyel tanımlanamaz.

2.10. Elektrik Alan Şiddeti İle Manyetik Alan Şiddeti Arasındaki Benzerlikler

Elektrik alan şiddeti ile elektriksel potansiyeli arasındaki bağıntı,

$$E = -\nabla V \quad (2.40)$$

şeklindedir. Bir manyetik skaler potansiyelin, manyetik alan şiddeti ile bağıntısı ise,

$$H = -\nabla V_m \quad (2.41)$$

şeklinde yazılır. Manyetik ile ilgili devrelerde V_m 'i magnetomotor kuvvet olarak tanımlamak mümkündür ve böyle yapıldığında manyetomotor kuvvet (*mmf*) ile elektromotor kuvvet (*emk*) arasında bir benzerlik olduğu kabul edilir. *mmf*'in birimi *ampere*'dir ve V_m akım olmayan bölgede tanımlanır.

A ve B noktaları arasındaki elektriksel potansiyel fark ,

$$V_{AB} = \int_A^B E dl \quad (2.42)$$

şeklindedir.

V_m (*mmf*) ile manyetik alan şiddeti arasında da benzer bir bağıntı,

$$V_{MAB} = \int_A^B H dl \quad (2.43)$$

şeklinde yazılabilir (William, H., R., 1983).

3. MATEMATİKSEL TEMELLER

3.1. İntegral Bağlımlar

Kısmi integrasyon, diferansiyel denklemlerin integral formülasyonunda sık sık kullanılır. İki boyutlu durumlarda kısmi integrasyon daha çok gradyant ve diverjans teoremi olarak bilinir. Burada sınır elemanları yönteminde kullanılan bazı önemli özdeşlikler incelenmiştir.

3.1.1. Gradyant Teoremi

$$\int_{\Omega} \text{grad} F dx dy \equiv \int_{\Omega} \nabla F dx dy = \oint_{\Gamma} \hat{n} F ds \quad (3.1)$$

veya

$$\int_{\Omega} \left(\hat{i} \frac{\partial F}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial F}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (n_x \hat{i} + n_y \hat{j}) F ds \quad (3.2)$$

Denk(3.2) (Eğer bileşenler eşitse iki vektör eşittir.) aşağıdaki bağıntının sağlandığını anlatır.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} n_x F ds, \quad \int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} n_y F ds \quad (3.3)$$

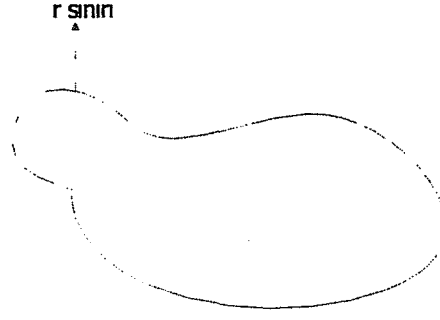
3.1.2. Diverjans Teoremi

$$\int_{\Omega} \text{div} G dx dy \equiv \int_{\Omega} \nabla \bullet G dx dy = \oint_{\Gamma} \hat{n} \bullet G ds \quad (3.4)$$

veya

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} (n_x G_x + n_y G_y) ds \quad (3.5)$$

Burada (\bullet) nokta vektörlerin skaler çarpımını belirtir. \hat{n} , Ω alanının sınıra dik olan birim vektör normalidir. n_x ve n_y (G_x ve G_y) $\hat{n}(G)$ 'nin kartezyen bileşenleridir. İntegral işareti üzerindeki daire integralin bütün sınır üzerinden alındığını belirtir (Şekil 3.1).



Şekil 3.1 Çözüm bölgesinin sınırları

Kosinüs yönündeki \hat{n} birim vektörünün bileşenleri olan n_x ve n_y

$$n_x = \text{Cos}(x, \hat{n}), n_y = \text{Cos}(y, \hat{n}) \quad (3.6)$$

olarak yazılabilir. Burada $\text{Cos}(x, \hat{n})$, pozitif x yönü ile \hat{n} birim vektörü arasındaki açının kosinüsüdür (Reddy, 1993).

3.2. Gauss İntegrasyonu

Problem olarak bir boyutlu integral göz önüne alındığında,

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (3.7)$$

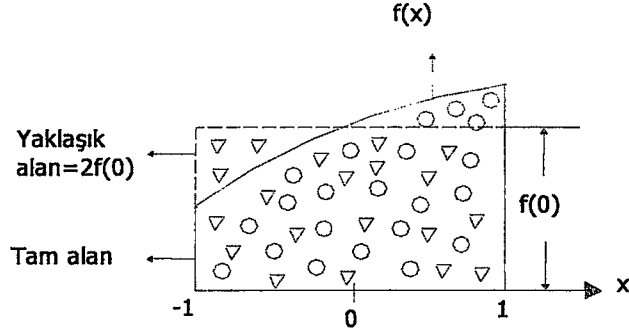
integralini elde etmek için Gauss alan hesabı yaklaşımı kullanılabilir.

n sayıdaki nokta yaklaşım ile,

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots + w_n f(\xi_n) \quad (3.8)$$

yazılabilir. Burada w_1, w_2, \dots, w_n ağırlık faktörleridir ve $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ örnek noktalar yada Gauss noktalarıdır. Gauss alan hesabındaki temel düşünce, denk(3.7)'in mümkün olduğu kadar yüksek dereceli bir $f(\xi)$ polinomunun tam cevabını sağlayacak şekilde, n Gauss noktasının ve n ağırlık faktörünün seçilmesidir.

3.2.1. Bir Noktalı Formül



Şekil 3.2 integrali alınacak bölge

$n = 1$ olan aşağıdaki formülü göz önüne alalım,

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) \quad (3.9)$$

w_1 ve ξ_1 olmak üzere iki parametre olduğundan, $f(\xi)$ birinci dereceden bir polinom olduğu zaman, tam çözüm olan denk(3.9)'deki formül göz önüne alınır. Dolayısıyla $f(\xi) = a_0 + a_1 \xi$ ise, aşağıdaki denklemlerin yazılması gerekir.

$$\text{Hata} = \int_{-1}^1 (a_0 + a_1 \xi_1) d\xi - w_1 f(\xi_1) = 0 \quad (3.10)$$

veya

$$\text{Hata} = 2a_0 - w_1(a_0 + a_1 \xi_1) = 0 \quad (3.11)$$

veya

$$\text{Hata} = a_0(2 - w_1) - w_1 a_1 \xi_1 = 0 \quad (3.12)$$

denk(3.12)'den görüleceği gibi $w_1 = 2, \xi_1 = 0$ olduğu zaman hatanın sıfırlandığı görülür. O zaman herhangi bir f fonksiyonu için

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx 2f(0) \quad (3.13)$$

elde edilir. Bunun da bilinen orta nokta kuralı olduğu görülür.(Şekil 3.3)

3.2.2. İki Noktalı Formül

n=2 olması durumunda,

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \approx w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) \quad (3.14)$$

yazılacağından 4 parametre gerekir. Bunlar w_1, w_2, ξ_1 ve ξ_2 'dir. Bundan dolayı kübik polinom için, denk(3.15)'deki formül tam çözümdür. Böylece, $f(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3$ seçilerek denk(3.15) elde edilir.

$$\text{Hata} = \left[\int_{-1}^1 (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3) d\xi \right] - [w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)] \quad (3.15)$$

burada, ihtiyaç duyulan sıfır hatayı aşağıdaki denklemler verir.

$$w_1 + w_2 = 2$$

$$w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 = 0$$

$$w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 = \frac{2}{3} \quad (3.16)$$

$$w_1 \xi_1^3 + w_2 \xi_2^3 = 0$$

Lineer olmayan bu denklemler tek çözüme sahiptirler.

$$w_1 = w_2 = 1, \quad -\xi_1 = \xi_2 = 1/\sqrt{3} = 0.5773502691..... \quad (3.17)$$

Buradan çıkan sonuç; Eğer f dercesi $(2n - 1)$ veya daha yüksek olan bir polinom ise n noktalı Gauss Quadrature tam cevabı sağlayacaktır. Tablo 1'de n=1'den n=6'ya kadar Gauss alan hesabı için w_i ve ξ_i değerleri verilmiştir. Gauss noktaları orjine göre simetrik olarak yerleştirilmiştir. Simetrik olarak yerleştirilen noktaların ağırlık faktörlerinin aynıdır.

Tablo 3.1 Gauss alan hesabı için Gauss noktaları ve ağırlık faktörleri

Noktaların Numaraları, n	Lokal Kordinatlar (Apsisler), ξ_i	Ağırlık Faktörleri, w_i
1	0.0	2.0
2	$\pm 1/\sqrt{3} = 0.5773502692$	1.0
3	± 0.7745966692 0.0	0.5555555556 0.8888888889
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346

(Chandrupatla, Belegundu, 1991).

3.3. Sınır Şartları

Bir kısmi diferansiyel denklemin bilinmeyen Φ fonksiyonu bulunurken Φ , bilinen bir R çözüm bölgesinde $L\Phi=g$ denklemini doğrular. Burada L bir operatördür (integral veya integro-diferansiyel) ve g bilinen bir kaynaktır. Φ , R'nin S sınırında belirli şartları sağlamalıdır. Genellikle bu sınır şartları, Dirichlet, Neumann tipi ve karışık tip sınır şartlarıdır.

1) Dirichlet sınır şartı:

$$\Phi(r)=0 \quad r, \quad S \quad \text{sınırında} \quad (3.19)$$

2) Neumann sınır şartı:

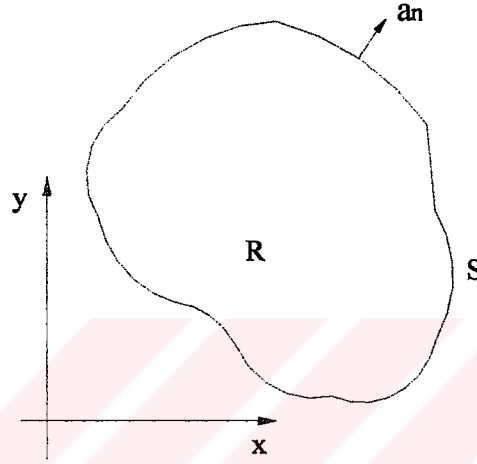
$$\frac{\partial \Phi(r)}{\partial n} = 0 \quad r, \quad S \quad \text{sınırında} \quad (3.20)$$

3) Karışık sınır şartı:

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{r})}{\partial n} + h(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r}, S \text{ sınırında} \quad (3.21)$$

Burada, $h(\mathbf{r})$ bilinen bir fonksiyondur ve S sınırının dış normal yönündeki türevidir.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \nabla\Phi \cdot \mathbf{a}_n \quad (3.22)$$



Şekil 3.3 S ile sınırlı bir R bölgesi

Şekil 3.4'de gösterildiği gibi \mathbf{a}_n , R bölgesinin dışa dönük birim vektörüdür. Neumann sınır şartı, $h(\mathbf{r})=0$ için karışık sınır şartının özel bir durumudur.

Denk.(3.19)'den denk.(3.21)'e kadar olan denklemlerdeki şartlar homojen sınır şartı olarak isimlendirilir. Daha genel şartlar homojen olmayan (inhomojen) şartlardır.

Dirichlet Sınır Şartı; $\Phi(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r}, S \text{ sınırında}$

Neumann Sınır Şartı; $\frac{\partial\Phi}{\partial n} = q(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r}, S \text{ sınırında}$

Karışık Sınır Şartı; $\frac{\partial\Phi}{\partial n} + h(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r}, S \text{ sınırında}$

Burada $p(\mathbf{r})$, $q(\mathbf{r})$ ve $w(\mathbf{r})$ sınırdaki net olarak bilinen fonksiyonlardır. Örneğin, $\Phi(0)=1$ bir inhomojen Dirichlet sınır şartı ve $\Phi(0)=0$ homojen sınır şartıdır. $\Phi'(0)=1$ ve $\Phi'(0)=0$ sırasıyla inhomojen ve homojen Neumann sınır şartıdır.

Örneğin, elektrostatikte S sınırında elektriksel potansiyelin değeri biliniyorsa Dirichlet sınır şartı olur. Eğer yük dağılımı $\left(\rho_s = D_n = \epsilon \frac{\partial u}{\partial n} \right)$ biliniyorsa o zaman sınır şartı Neumann'dır.

Φ veya $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ bölgenin sınırında biliniyorsa herhangi bir bölgede harmonik bir fonksiyonu bulma problemi Neumann problemi olarak adlandırılır(Matthew, Sadiku, 1992).

3.4. Temel Çözüm

İki boyutlu Laplace denkleminin için temel çözümü denklemin sınır elemanı formülasyonunda kullanılan ağırlık fonksiyonudur. Bundan dolayı sınır elemanları yöntemini uygulayabilmek için temel çözümün bulunması gerekir.

Ω alanındaki, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ Laplace denkleminin temel çözümü aşağıdaki denklemin

çözümüdür.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \delta(\varepsilon - x, \eta - y) = 0 \quad (3.23)$$

Bu arada (ε, η) tekil noktasında bir lokal silindirik koordinat sistemi kabul edilerek,

$$r = \sqrt{(\varepsilon - x)^2 + (\eta - y)^2} \text{ yazılırsa,}$$

$$\nabla^2 w = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \quad (3.24)$$

olur. $r > 0$ için, $\delta(\varepsilon - x, \eta - y) = 0$ ve simetri sebebiyle $\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$ sıfırdır. Böylece denk.(3.24)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0 \quad (3.25)$$

olur. Bu denklemin çözümü,

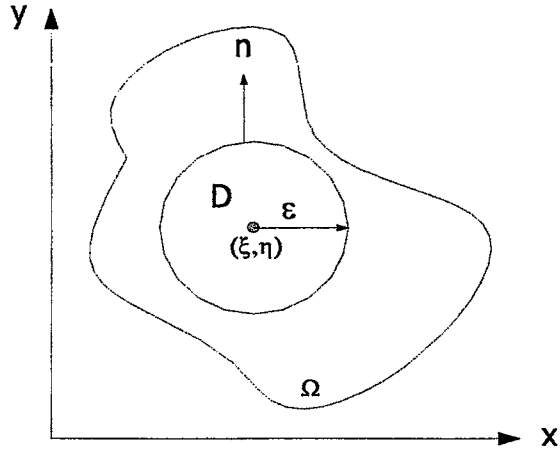
$$w = A \ln r + B \quad (3.26)$$

olur.

A ve B'yi bulmak için Delta fonksiyonun özelliği kullanılır. Denk.(3.23)'den ,

$$\int_D \nabla^2 w dD = - \int_D \delta dD = -1 \quad (3.27)$$

elde edilmelidir. Burada D $r = 0$ 'ı içeren herhangi bir bölgedir. Denk.(3.27)'i elde etmek için basit bir bölge seçilir.



Şekil 3.4 Temel çözüm için seçilen bölge

Eğer D , $r = 0$ merkezli $\varepsilon > 0$ yarıçaplı küçük bir disk ise o zaman diverjans teoreminden,

$$\int_D \nabla^2 w dD = \int_{\partial D} \frac{\partial w}{\partial n} ds = \int_{\partial D} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \frac{\partial w}{\partial r} r d\theta = -1 \quad (3.28)$$

$$w = -\frac{1}{2\pi} \ln r + B \quad (3.29)$$

olur. B keyfi bir sabittir ve genellikle sifıra eşittir. Böylece iki boyutlu Laplace denklemi için temel çözüm,

$$w = -\frac{1}{2\pi} \ln r = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (3.30)$$

şeklinde olur. Burada $r = \sqrt{(\varepsilon - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 'dir (Hunter, Pullan, 2003).

4. POTANSİYEL PROBLEMLER

Fizik, mühendislik ve uygulamalı matematikte birçok problemi temsil eden Laplace ve Poisson denklemlerini gerektiren bazı fiziksel durumlar şunlardır:

- 1-Kararlı hal ısı iletimi problemleri
- 2-Katı mekanikteki burulma problemleri
- 3-Elektrostatik potansiyel problemleri
- 4-Manyetostatik problemler

Bu bölümde iki boyutlu kararlı potansiyel problemleri için sınır elemanları yöntemi incelenmiştir. Sınır elemanları yönteminde ilk olarak bölgenin sınırı sonlu sayıda sınır elemanlarına bölmelenir. Daha sonra yöntem, denklemin temel çözüm kullanılarak sınırda ayrıklaştırıldığı zaman tekil noktalar üretmesi hariç, ağırlıklı artıklar tekniğinin özel bir durumu haline gelir. Basitçe bu yöntem sınırda sınır değer problemlerinin temel çözümünün integralini almaktır.

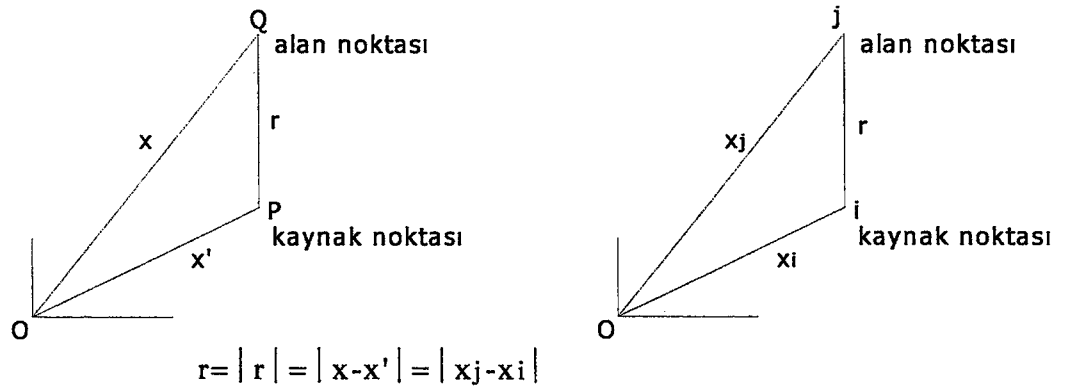
4.1. Laplace Denklemi

Laplace sınır değer probleminin çözümü şu şekilde yapılır.

$$\nabla^2 u = 0, u = u_0 \quad C_1 \text{ 'de}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = q = q_0 \quad C_2 \text{ 'de} \quad (4.1)$$

Burada $C = C_1 \cup C_2$ R bölgesinin sınırıdır. Bir i noktasında hareket eden yoğunlaştırılmış bir yük ile temsil edilen potansiyel sınır değer problemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\nabla^2 u^* = -\delta(i), u^* = u_0 \quad C_1 \text{ 'de}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial n} = q^* = q^*_0 \quad C_2 \text{ 'de} \quad (4.2)$$



Şekil 4.1 Kaynak ve alan noktası

Bu problemin çözümü, potansiyel problemler için temel çözüm olarak adlandırılır. Delta fonksiyonun özelliği gözönüne alındığında,

$$0 = \iint_{\mathbb{R}^2} u [\nabla^2 u^* + \delta(i)] dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} u \nabla^2 u^* dx dy + u(i) \quad (4.3)$$

olur. Burada $u(i)$, yükün uygulandığı i noktasında bilinmeyen u 'nun değerini belirtir. $u(i) = u(x_i)$ 'dir. Burada x_i kaynak noktasıdır. Dolayısıyla $r = |x_j - x_i|$ 'dir. (Şekil 4.1)

Denk.(4.1)'deki sınır değer problemine ağırlıklı artıklar uygulanırsa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\nabla^2 u) w dx dy = 0 \quad (4.4)$$

Denk.(4.4)'e Diverjans teoremini uygulanırsa,

$$- \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\mathbb{C}} w \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (4.5)$$

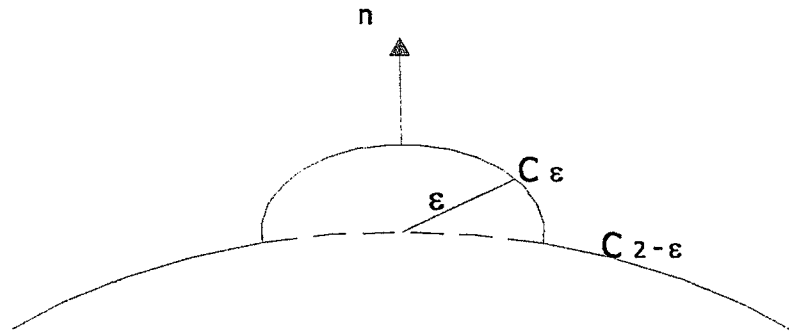
yazılır. Soldan ilk denkleme Diverjans teoremi tekrar uygulanacak olursa denk.(4.5),

$$- \iint_{\mathbb{R}^2} u \nabla^2 w dx dy - \int_{\mathbb{C}} u \frac{\partial w}{\partial n} ds + \int_{\mathbb{C}} w \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 \quad (4.6)$$

şekline gelir. $u = u_0$ C_1 'de, $\frac{\partial u}{\partial n} = q = q_0$ C_2 'de (burada $C = C_1 \cup C_2$) olduğundan dolayı w 'yi u^* , q 'u da q^* ile yer değiştirerek denk.(4.3)'den ve denk.(4.6)'dan aşağıdaki denklem elde edilir.

$$u(i) = \int_{C_1} u^* q ds + \int_{C_2} u^* q_0 ds - \int_{C_1} u_0 q^* ds - \int_{C_2} u q^* ds \quad (4.7)$$

burada $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ 'dir.



Şekil 4.2 İntegrallerin sınıra indirgenmesi

Denk.(4.7) bölgedeki herhangi bir i noktasında bilinmeyen potansiyel u değeri için gereklidir., Bununla birlikte denk.(4.7)'yi sınır elemanları yöntemi ile çözebilmek için, onu sınıra indirgemek gerekir.

Şekil(4.2)'de olduğu gibi iki boyutlu bir R bölgesinin sınırında ε yarıçaplı bir c_ε yarım çemberinde sınır noktası i bu yarım çemberin merkezi kabul edilirse, $\varepsilon \rightarrow 0$ olduğunda yarım çember i sınır noktasına indirgenir. Ayrıca R bölgesinin c sınırı düz ve $C = C_1 \cup C_2$ olduğu kabul edilerek, i sınır noktası c 'nin c_2 parçası üzerinde olmak şartıyla c_2 sınırını c_ε ve $c_{2-\varepsilon}$ olmak üzere iki parçaya bölünürse,

$$\int_{c_2} uq^* ds = \int_{c_\varepsilon} uq^* ds + \int_{c_{2-\varepsilon}} uq^* ds \quad (4.8)$$

yazılır. Temel çözüm, sağ taraftaki birinci denklemde yerine yazılıp limiti alındığında bu integral,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} uq^* ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} u \left(-\frac{1}{2\pi\varepsilon} \right) ds = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u}{2\pi\varepsilon} \int_{c_\varepsilon} ds = -\frac{u}{2} \quad (4.9)$$

sonucunu verir. Burada, $\int_{c_\varepsilon} ds = \pi\varepsilon$ (yarım çemberin çevresi), $\varepsilon = 0$ olduğundan $C_{2-\varepsilon}$ sınırı tekrar

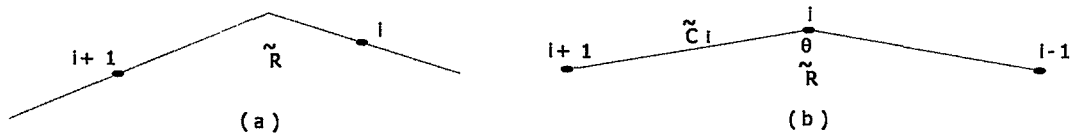
C_2 olur. Denk.(4.7)'nin sol tarafına da aynı işlem uygulanırsa şu sonucu verir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c_\varepsilon} u^* q ds = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{c_\varepsilon} ds = -\frac{q}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0 \quad (4.10)$$

Dolayısıyla limit alma işlemi denk.(4.7)'de herhangi bir yeni terim ifade etmez.

Denk.(4.9),denk.(4.7)'de yerine yazılarak C_2 sınırındaki i noktası için aşağıdaki iki boyutlu sınır integral denklemi elde edilir.

$$\frac{u(i)}{2} + \int_{c_1} u_0 q^* ds + \int_{c_2} uq^* ds = \int_{c_1} u^* q ds + \int_{c_2} u^* q_0 ds \quad (4.11)$$



Şekil 4.3 Düğüm noktaları

Eğer i noktasının, sınırın C_2 parçası yerine C_1 parçası üzerinde olduğu düşünülürse aynı sonuç elde edilir.

Genel olarak denk.(4.11) aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$c(i)u(i) + \int_c uq^* ds = \int_c u^* q ds, \quad C = C_1 \cup C_2 \quad (4.12)$$

Temel sınır şartları altında $u = u_0$ c_1 'de ve doğal sınır şartı $\frac{\partial u}{\partial n} = q = q_0$ c_2 'de şeklindedir. Burada iki boyutlu durumda,

$$c(i) = \begin{cases} 0, & i \text{ } R \cup C' \text{'in dışında ise} \\ 1, & i \text{ } R \text{ bölgesi içerisinde ise} \\ \frac{1}{2}, & i \text{ } C \text{ sınırının düz parçası üzerinde ise} \\ \frac{\theta}{2\pi}, & i \text{ köşe noktada ise} \end{cases} \quad (4.13)$$

θ , i noktasının bulunduğu köşenin iç açısının radyan cinsinden değeridir (Şekil 4.3b). Şekil 3a'da ise $c(i) = \frac{1}{2}$ değerindedir.

4.2. Poisson Denklemi

Poisson sınır değer probleminde ise Laplace denkleminden farklı olarak sağ taraf sıfır değildir.

$$\nabla^2 u = b, \quad u = u_0 \quad C_1 \text{'de}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = q = q_0 \quad C_2 \text{'de} \quad (4.14)$$

Burada $b = b(x, y)$ ve önceden olduğu gibi $C = C_1 \cup C_2$ iki boyutlu bir R bölgesinin sınırıdır.

Denk.(4.1)'in temel çözümü olan u^* , ağırlık fonksiyonu olarak alınıp, denk.(4.14)'ün integraline diverjans teoremi uygularsak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned} \iint_R (\nabla^2 u - b)u^* dx dy &= \iint_R (u \nabla^2 u^* - b u^*) dx dy + \int_{c_1} u^* q ds + \int_{c_2} u^* q_0 ds - \int_{c_1} u_0 q^* ds - \int_{c_2} u q^* ds \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.15)$$

Denk.(4.3)'teki gibi $\iint_R u \nabla^2 u^* dx dy = u(i)$ olduğundan $\nabla^2 u^* = -\delta(i)$ kullanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$0 = - \iint_R bu^* dx dy - u(i) + \int_{c_1} u^* q ds + \int_{c_2} u^* q_0 ds - \int_{c_1} u_0 q^* ds - \int_{c_2} u q^* ds$$

Burada

$$0 = \iint_R bu^* dx dy + u(i) + \int_{c_1} u_0 q^* ds + \int_{c_2} u q^* ds = \int_{c_1} u^* q ds + \int_{c_2} u^* q_0 ds \quad (4.16)$$

veya denk.(4.12)'de elde edilen tarzda, aşağıdaki gibi iki boyutlu bir sınır integral denklemi elde edilir:

$$c(i)u(i) + \iint_R bu^* dx dy + \int_c u q^* ds = \int_c u^* q ds \quad (4.17)$$

Burada $c(i)$ denk.(4.13) ile tanımlanır.

$$B_i = \iint_R bu^* dx dy \quad (4.18)$$

burada B_i alan integralidir.

4.2.1. B_i Alan İntegralinin Sınıra İndirgenmesi

4.2.1.1. Özel Çözüm

Poisson denklemi için sınır değer problemi, sınır şartlarına bağlı özel bir çözüm ortaya çıkartılarak, Laplace denkleminin sınır değer problemi şekline indirgenebilir.

Bu işlemi göstermek için, Poisson denklemini göz önüne alınmıştır. ϕ potansiyel fonksiyonu,

$$\phi = \tilde{\phi} + \hat{\phi} \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabildiğini kabul edelim. Burada $\tilde{\phi}$ Laplace denkleminin ($\nabla^2 \tilde{\phi} = 0$) ve $\hat{\phi}$ Poisson denkleminin ($\nabla^2 \hat{\phi} = b$) özel çözümüdür. Böylece alan integrali,

$$\int_v \phi^* b dv = \int_v \phi^* \nabla^2 \hat{\phi} dv \quad (4.20)$$

şeklinde yazılabilir.

İkinci Gren özdeşliği uygulanarak ϕ^* ve $\hat{\phi}$ fonksiyonları için B_i alan integrali,

$$\int_v \phi^* \nabla^2 \hat{\phi} dv = \int_v \hat{\phi} \nabla^2 \phi^* dv + \int_s \phi^* \hat{q} ds - \int_s \hat{\phi} q^* ds \quad (4.21)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

Burada, $q^* = \partial\phi^*/\partial n$ ve $\hat{q} = \partial\tilde{\phi}/\partial n$ 'dir. Gerekli işlemlerden sonra aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\phi(x') + \int_s \phi^* q ds - \int_s q^* \phi ds = \hat{\phi}(x') + \int_s \phi^* \tilde{q} ds - \int_s q^* \hat{\phi} ds \quad (4.22)$$

Bu denklemde bütün integraller sadece sınır boyunca hesaplanmaktadır. Denk.(4.22) yeni değişken $\tilde{\phi}$ 'nin bir fonksiyonu olarak daha genel bir sıkıştırılmış şekilde aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\tilde{\phi}(x') + \int_s \phi^* \tilde{q} ds - \int_s q^* \tilde{\phi} ds \quad (4.23)$$

Burada $\tilde{\phi} = \phi - \hat{\phi}$ denk.(4.19)'da verildiği şekliyle tüm sınır noktalarına uygulanırsa,

$$H\tilde{\phi} = G\tilde{\phi} \quad (4.24)$$

sistemini verir. Bu sistem,

$$H\phi - G\phi = H\tilde{\phi} - G\tilde{\phi} \quad (4.25)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada B,

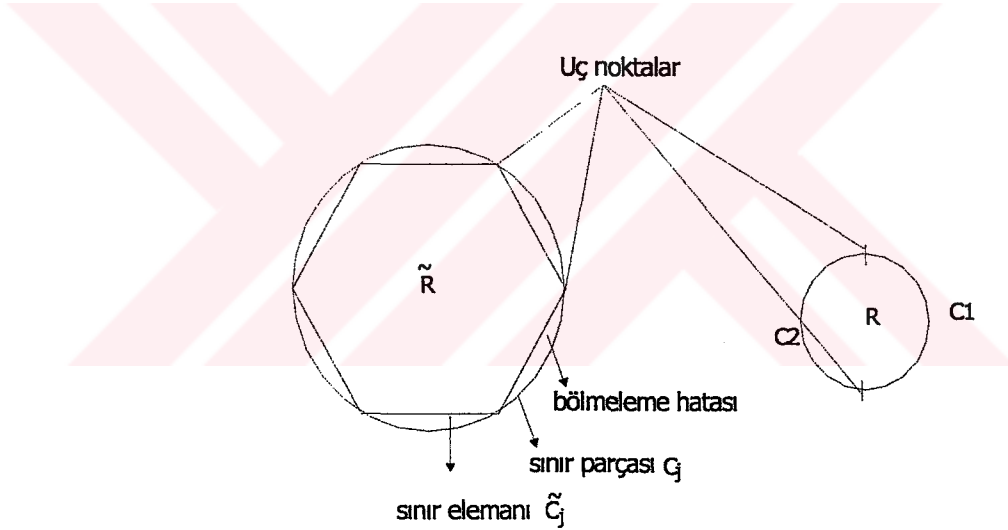
$$B = H\tilde{\phi} - G\tilde{\phi} \quad (4.26)$$

şeklindedir.

Bu yaklaşımın temel dezavantajı özel çözüm $\hat{\phi}$ 'yi analitik bir şekilde bulma ihtiyacıdır. Bu bazı durumlarda zor ve bazı durumlarda imkansızdır (Wroble, 2002).

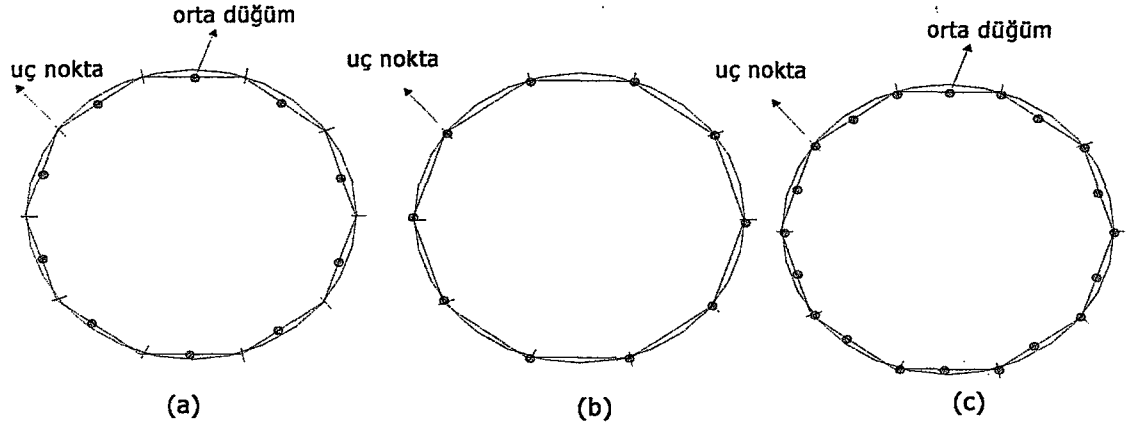
5. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

İki boyutlu R bölgesinin düz C sınırı N parçaya bölünürse, bölmeleme noktalarını birleştiren doğrular sınır elemanları olarak adlandırılır(Şekil 5.1). Bölmeleme noktaları sınır elemanlarının uç noktaları olarak adlandırılır. Sınırın bölmelemesi genelde yaklaşık bir \tilde{R} bölgesinin ve yaklaşık bir \tilde{C} sınırının oluşmasına neden olur. C sınırı ile yaklaşık \tilde{C} sınırı arasında kalan bölge bölmeleme hatasına neden olur. Sınır elemanları seçimi bu bölmeleme hatasını daima minimize edecek yönde olmalıdır. Eğer sınır şartları karışık ise yani temel ve tabii sınır şartları C_1 ve C_2 ($C = C_1 \cup C_2$) parçalarına uygulanırsa, bu iki parçanın ortak noktası uç nokta olarak alınır. Sıfır bölmeleme hatası durumunda $\tilde{R} = R$ ve $\tilde{C} = C$ alınır. Verilen sınır şartlarına göre u ve q 'nun hem bilinen hem de bilinmeyen değerlerinin göz önüne alındığı noktalar düğüm olarak adlandırılır. Şekil 5.2'de üç tip eleman düğümü gösterilmiştir.



Şekil 5.1 Çözüm bölgesinin sınırlarının bölmelemesi

1. Sabit elemanlar, her bir elemanın orta noktasında olan orta düğümlere sahiptir(Şekil 5.2a).
 2. Lineer elemanlar, iki elemanın kesişme noktasında yer alan uç düğümlere sahiptir(Şekil 5.2b)
 3. Parabolik elemanlar hem orta hem de uç düğümlere sahiptirler(Şekil 5.2c).
- Burada sadece ilk iki tip eleman(sabit ve lineer sınır elemanları) incelenmiştir.



Şekil 5.2 Sınır elemanlarının düğümleri

5.1. Sabit Elemanlar

R bölgesinin düzgün sınırı C_1, N_1 'e, C_2, N_2 'e olmak üzere toplam N parçaya bölünsün. Bu bölmeleme sonucunda yaklaşık bir \tilde{R} bölgesi ve \tilde{C} sınırı elde edilir. Her bir eleman üzerinde u ve $q \equiv \frac{\partial u}{\partial n}$ değerlerinin sabit olduğu ve bu değerlerin, her bir elemanın ortasındaki düğüm değerine eşit olduğunu kabul edelim. Denk.(4.12) verilen i düğümü için aşağıdaki şekli alır.

$$\frac{u(i)}{2} + \sum_{j=1}^N u_j \int_{c_j} q^* ds = \sum_{j=1}^N q_j \int_{c_j} u^* ds \quad (5.1)$$

Burada $q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n}$ 'dir. Bu sınır integral denklemi i noktasına uygulanır. Üzerinden integral alınan j parçasının i düğümüyle ilişkili olan \int_{c_j} terimlerine dikkat edelim. Denk.(5.1)'in sol

tarafındaki $\int_{c_j} q^* ds$ integralleri \hat{H}_{ij} ile ve sağ tarafında bulunan $\int_{c_j} u^* ds$ integralleri \hat{G}_{ij} ile

belirtilir. Bu integraller, i düğümünün j elemanına etkisini içerdiğinden etki integralleri olarak adlandırılır. O zaman denk.(5.1) aşağıdaki gibi olur.

$$\frac{u(i)}{2} + \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N q_j \hat{G}_{ij} \quad (5.2)$$

Sabit eleman durumunda \hat{H}_{ij} ve \hat{G}_{ij} etki integrallerini elde etmek kolaydır. Bu integraller Gauss alan hesabı kullanılarak hesaplanmaktadır.

$$\sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij} = \sum_{j=1}^N q_j \hat{G}_{ij} \quad (5.3)$$

Burada,

$$\hat{H}_{ij} = \begin{cases} \hat{H}_{ij} & i \neq j \\ \hat{H}_{ij} + \frac{1}{2} & i = j \end{cases} \quad (5.4)$$

denk.(5.1) matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$HU = GQ \quad (5.5)$$

Burada manyetostatik alanlarda U yerine manyetik skaler potansiyel (V_m) ve Q yerine de manyetik alan şiddeti (H) yazılır ve denklem şu şekilde ifade edilir.

$$HV_m = GH \quad (5.6)$$

$N = N_1 + N_2$ 'dir. u 'nun N_1 , q 'nun N_2 tane bilinen değeri vardır. Böylece denk.(5.5)'de N tane bilinmeyen ortaya çıkar.

H_{ii} terimleri $c(i)$ (düzgün sınırdaki $\frac{1}{2}$ 'dir. Şekil 4.3(a)) katsayılarını içermektedir. Bu terimler şu şart altında elde edilebilir. Bir uniform u potansiyeli, sonlu bölgenin iç kısmına uygulandığı zaman $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ 'nin değeri sıfır olmalıdır. O zaman denk.(5.5) aşağıdaki gibi olur.

$$HI = 0 \quad (5.7)$$

Burada I birim sütun vektörüdür. Denk.(5.6)'ya göre herhangi bir satırdaki H 'ın bütün elemanlarının toplamı sıfır olmalıdır. Böylece köşegen olmayan katsayıların değerleri bilindiği zaman köşegen katsayıların değerleri kolaylıkla hesaplanabilir. Yani,

$$H_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N H_{ij}, \quad i = 1, \dots, N \quad (5.8)$$

u 'nun bilinmeyen N_2 değerleri \hat{u} ile ve q 'nun bilinmeyen N_1 değerleri \hat{q} ile belirtilirse,. denk.(5.5)'i bütün bilinmeyenler sağ tarafta olacak şekilde tekrar düzenlenebilir. Bu durumda denk.(5.5) aşağıdaki gibi yazılır.

$$AX = F \quad (5.9)$$

Burada X bilinmeyen u ve q 'nun vektörüdür. Bundan dolayı \tilde{C} sınırındaki u ve q 'nun bütün değerleri denk.(5.8)'den belirlenebilir. Bu durumda u 'nun herhangi bir iç noktadaki değeri aşağıdaki denklem ile hesaplanabilir.

$$u(i) = \sum_{j=1}^N q_j \hat{G}_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j \hat{H}_{ij} \quad (5.10)$$

İç noktadaki $q_x = \partial u / \partial x$ ve $q_y = \partial u / \partial y$ akıları denk.(4.7)'nin türevi alınarak hesaplanabilir. Böylece i düğümünde,

$$q_x(i) = \int_{\tilde{c}} q \frac{\partial u^*}{\partial x} ds - \int_{\tilde{c}} u \frac{\partial q^*}{\partial x} ds = \sum_{j=1}^N q_j \left(\int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial u^*}{\partial x} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left(\int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial q^*}{\partial x} ds \right) \quad (5.11)$$

$$q_y(i) = \int_{\tilde{c}} q \frac{\partial u^*}{\partial y} ds - \int_{\tilde{c}} u \frac{\partial q^*}{\partial y} ds = \sum_{j=1}^N q_j \left(\int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial u^*}{\partial y} ds \right) - \sum_{j=1}^N u_j \left(\int_{\tilde{c}_j} \frac{\partial q^*}{\partial y} ds \right) \quad (5.12)$$

denklemleri elde edilir. Burada,

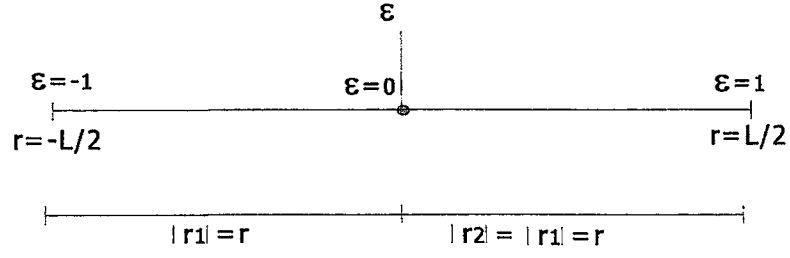
$$\frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} (-\ln r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} (-\ln r) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} n_1 + \frac{\partial r}{\partial y} n_2 \right) \right] \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial q^*}{\partial y} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x} n_1 + \frac{\partial r}{\partial y} n_2 \right) \right]$$

olarak yazılabilir. n_1, n_2 normal birim vektörü olan \hat{n} 'nin bileşenleridir. Denk.(5.10) ve denk.(5.11)'deki integraller Gauss alan hesabı yardımıyla sayısal olarak bulunabilir. \hat{H}_{ij} ve \hat{G}_{ij} integrasyonları da bütün elemanlar için $j \neq i$, aynı şekilde sayısal integrasyonla hesaplanır.



Şekil 5.3 Bir sabit eleman

$i=j$ durumunda bir tekillilik ortaya çıkar ve bu durumda \hat{G}_{ii} analitik olarak hesaplanır.

$$G_{ii} = \int_{c_i} u^* ds = \frac{1}{2\pi} \int_{c_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \frac{L_i}{2\pi} \left[1 - \ln\left(\frac{L_i}{2}\right) \right] \quad (5.14)$$

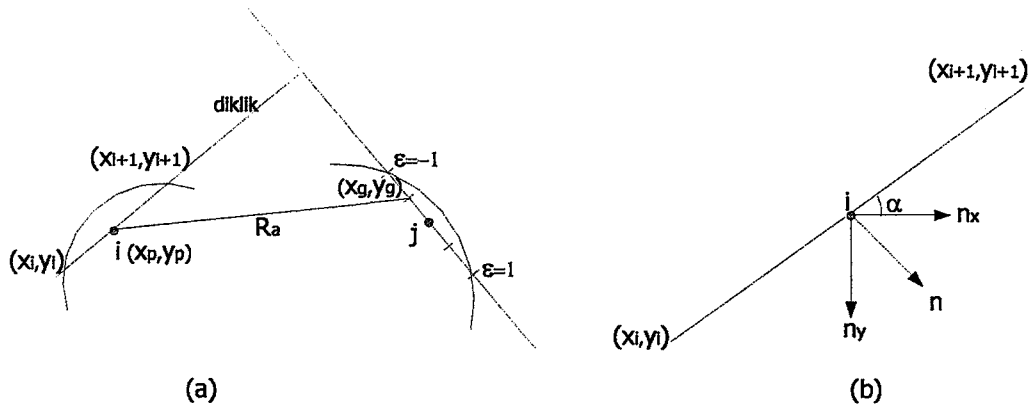
Burada $L_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$ i elemanının uzunluğudur (Şekil 5.3).

Denk.(5.13)'ü elde etmek için, $r = \varepsilon L_i/2$ alınır. $\varepsilon = 0$ 'da, $r = 0$ ve $\varepsilon = \pm 1$ 'de, $r = \pm L_i/2$ 'dir. Bu durumda $\ln\left(\frac{1}{r}\right)$, $r = \varepsilon = 0$ noktasında bir logaritmik tekilliğe sahip olduğundan,

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{c_i} \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^1 \ln\left(\frac{2}{\varepsilon L_i}\right) \frac{L_i}{2} d\varepsilon = \frac{L_i}{2\pi} \left[\varepsilon \ln\left(\frac{2}{L_i}\right) - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \right]_0^1 = \frac{L_i}{2\pi} \left[1 + \ln\left(\frac{2}{L_i}\right) \right] \quad (5.15)$$

elde edilir.

5.1.1. \hat{G}_{ij} ve \hat{H}_{ij} Etki İntegralleri



Şekil 5.4 Kaynak noktasının integrasyon noktasına uzaklığı ve normal vektörünün bileşenleri

\hat{G}_{ij} ve \hat{H}_{ij} etki integralleri gauss alan hesabıyla aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\hat{G}_{ij} = \int_{\tilde{c}_j} u^* ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 \ln\left(\frac{1}{R_a}\right) w_i \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ij} &= \int_{\tilde{c}_j} q^* ds = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 D_{\hat{n}} \ln\left(\frac{1}{r}\right)_i w_i \frac{\sqrt{(x_j - x_{j+1})^2 + (y_j - y_{j+1})^2}}{2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{(R_a)^2} (r_x n_x + r_y n_y) w_i \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Burada $R_a = \sqrt{(x_p - x_g)^2 + (y_p - y_g)^2}$, (x_p, y_p) 'i' düğümünün koordinatlarıdır. (x_g, y_g) gauss noktalarının koordinatlarıdır. $\sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \frac{L_i}{2}$, $A_x = \frac{(x_{j+1} - x_i)}{2}$ ve $A_y = \frac{(y_{j+1} - y_i)}{2}$ 'dir. L_i ,

\tilde{C}_i elemanın uzunluğudur. $D_{\hat{n}} \ln\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla f \cdot \hat{n} = -\frac{r_x n_x + r_y n_y}{(R_a)^2}$ 'dir. $D_{\hat{n}}$, \hat{n} yönünde türev almayı ifade eder. $r_x = \frac{(x_g - x_p)}{R_a} = \cos \alpha$, $r_y = \frac{(y_g - y_p)}{R_a} = \sin \alpha$ (Şekil 5.4a)

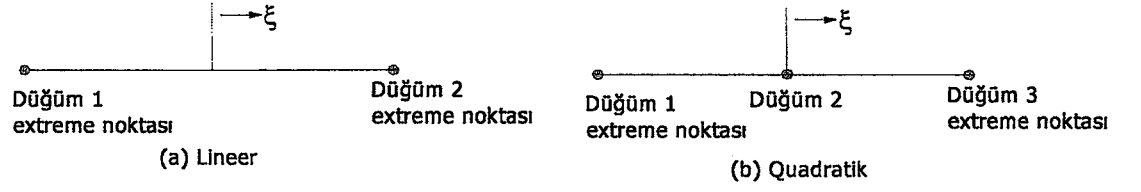
5.2. Lineer Elemanlar

bu eleman türünde her bir elemandaki u ve q'nun değişimi lineer kabul edilir. Düğümler düz elemanların kesişim noktasında olduklarından uç düğüm olarak adlandırılırlar(Şekil 5.2b). Bu durumda sınır integral denklemi N eleman için aşağıdaki gibi ayrıştırılır.

$$c(i)u(i) + \sum_{j=1}^N \int_{\tilde{c}_j} u q^* ds = \sum_{j=1}^N \int_{\tilde{c}_j} q u^* ds \quad (5.18)$$

Denk.(4.12)'nin aksine, her bir elemanda u_j ve q_j lineer olarak değiştiğinden, u_j ve q_j ,

integral dışına çıkarılamaz. $c(i)$ sadece düz sınırlar için $\frac{1}{2}$ 'ye eşittir.



Şekil 5.5 Lineer ve parabolik sınır elemanları

Burada ε doğal koordinattir. $\varepsilon = x/(l/2) = 2x/l$ 'dir. ϕ_1 ve ϕ_2 interpolasyon fonksiyonlarıdır.

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \varepsilon) \quad (5.19)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon) \quad (5.20)$$

Şekil 5.5(a)'da gösterildiği gibi keyfi bir parçayı göz önüne alalım. Bu parçanın herhangi bir noktasında u ve q değerleri, noktasal değerlerine ve iki interpolasyon fonksiyonuna göre belirlenebilir (bu durumda u ve q lineer olarak değişir).

Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$u(\varepsilon) = \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 = [\phi_1 \ \phi_2] [u_1 \ u_2]^T \quad (5.21)$$

$$q(\varepsilon) = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 = [\phi_1 \ \phi_2] [q_1 \ q_2]^T \quad (5.22)$$

Denk.(5.17)'in sol tarafı,

$$\int_{\bar{c}_j} u q^* ds = \int_{\bar{c}_j} [\phi_1 \ \phi_2] [u_1 \ u_2]^T q^* ds = \int_{\bar{c}_j} [\phi_1 \ \phi_2] q^* ds \cdot [u_1 \ u_2]^T = [h_{i1} \ h_{i2}] [u_1 \ u_2]^T \quad (5.23)$$

şeklını alır. Burada,

$$h_{i1} = \int_{\bar{c}_j} u q^* ds = a_1, h_{i2} = \int_{\bar{c}_j} u q^* ds = a_2 \quad (5.24)$$

denk.(5.17)'in sağ tarafı için,

$$\int_{\bar{c}_j} q u^* ds = \int_{\bar{c}_j} [\phi_1 \ \phi_2] u^* ds \cdot [q_1 \ q_2]^T = [g_{i1} \ g_{i2}] [q_1 \ q_2]^T \quad (5.25)$$

yazılır. Burada,

$$g_{i1} = \int_{\tilde{c}_j} qu^* ds = b_1, \quad g_{i2} = \int_{\tilde{c}_j} qu^* ds = b_2 \quad (5.26)$$

yazılabilir. Bütün j elemanları için denk.(5.22) ve denk.(5.24)'i denk.(5.17)'de yerine yazılırsa, i düğümü için aşağıdaki denklem elde edilir.

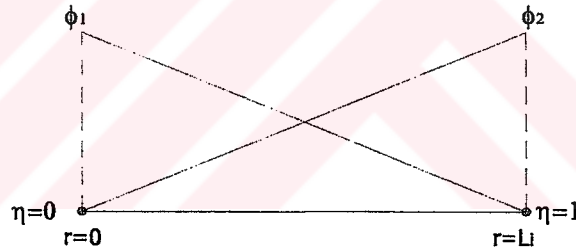
$$c(i)u(i) + [\hat{H}_{i1} \hat{H}_{i2} \dots \hat{H}_{in}] [u_1 u_2 \dots u_n]^T = [\hat{G}_{i1} \hat{G}_{i2} \dots \hat{G}_{in}] [q_1 q_2 \dots q_n]^T \quad (5.27)$$

$$\hat{H}_{ij} = j \text{ elemanlarının } h_{i1} \text{ terimi} + (j-1) \text{ elemanının } h_{i2} \text{ terimi} = a_1 + a_2 \quad (5.28)$$

benzer şekilde,

$$\hat{G}_{ij} = j \text{ elemanlarının } g_{i1} \text{ terimi} + (j-1) \text{ elemanının } g_{i2} \text{ terimi} = b_1 + b_2 \quad (5.29)$$

5.2.1. Tekil Noktalar



Şekil 5.6 Şekil fonksiyonları

$i=j$ için, tekil bir durum ortaya çıkar.

$$G_{ii} = \frac{i}{2\pi} \int_{\tilde{c}_j} u^* ds = \frac{i}{2\pi} \int_{\tilde{c}_j} [u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2] ds = \frac{i}{2\pi} (u_1 G_{ii}^1 + u_2 G_{ii}^2) \quad (5.30)$$

yazıldığında $\phi_1 = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)$ ve $\phi_2 = \frac{1}{2}(1+\varepsilon)$ ile tanımlanan ϕ_1 ve ϕ_2 interpolasyon

fonksiyonları H_{ii} 'nin bulunmasında kullanılmasına rağmen G_{ii} 'yi hesaplamak için kullanıldığı zaman $\varepsilon = 0$ 'daki tekilliliği gideremez. Bundan dolayı $\varepsilon = 1 - 2(1-\eta)$ dönüşümünü kullanarak $\phi_{1,2}$ fonksiyonlarını değiştirilir. Bu durumda $\phi_1 = 1-\eta$, $\phi_2 = \eta$ $0 \leq \eta \leq 1$ elde edilir. Daha sonra $r = L\eta$ ($ds = dr = L\eta$ (Şekil 5.6) denklemi kullanılarak aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$G^1_{ii} = \int_{\bar{c}_j} \phi_1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \int_0^1 (1-\eta) \ln\left(\frac{1}{L_i \eta}\right) L_i d\eta = L_i \int_0^1 (1-\eta) (-\ln L_i - \ln \eta) d\eta$$

$$= \frac{L_i}{2} \left[\frac{3}{2} - \ln L_i \right] \quad (5.31)$$

$$G^2_{ii} = \int_{\bar{c}_j} \phi_2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) ds = \int_0^1 \eta \ln\left(\frac{1}{L_i \eta}\right) L_i d\eta = L_i \int_0^1 \eta (-\ln L_i - \ln \eta) d\eta$$

$$= \frac{L_i}{2} \left[\frac{1}{2} - \ln L_i \right] \quad (5.32)$$

Denk.(5.26) genel bir ifadeyle,

$$c(i)u(i) + \sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n \hat{G}_{ij} q_j \quad (5.33)$$

olarak veya toplam şeklinde,

$$\sum_{j=1}^n \hat{H}_{ij} u_j = \sum_{j=1}^n \hat{G}_{ij} q_j \quad (5.34)$$

veya matris formunda,

$$HU = GQ \quad (5.35)$$

şeklinde yazılır.

Denk.(4.9)'da elde edilen $-u/2$ yüzey düz olmadıkça geçerli değildir. Bununla birlikte H'n köşe terimleri şu yöntemle hesaplanabilir; sınırın iç yüzeyine uniform bir potansiyel uygulandığı zaman, normale göre türevi (yani q değerleri) sıfır olmalıdır. Bu nedenle denk.(5.27c) $HU = 0$ şekline gelir. Bunun anlamı; H'n herhangi bir satırındaki elemanların toplamı sıfır olmalıdır. Böylece köşe elemanlarının değerleri, köşe olmayan elemanlarının değerleri bilindiği zaman, kolaylıkla elde edilebilir. Yani,

$$H_{ii} = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^N H_{ij} \quad (5.36)$$

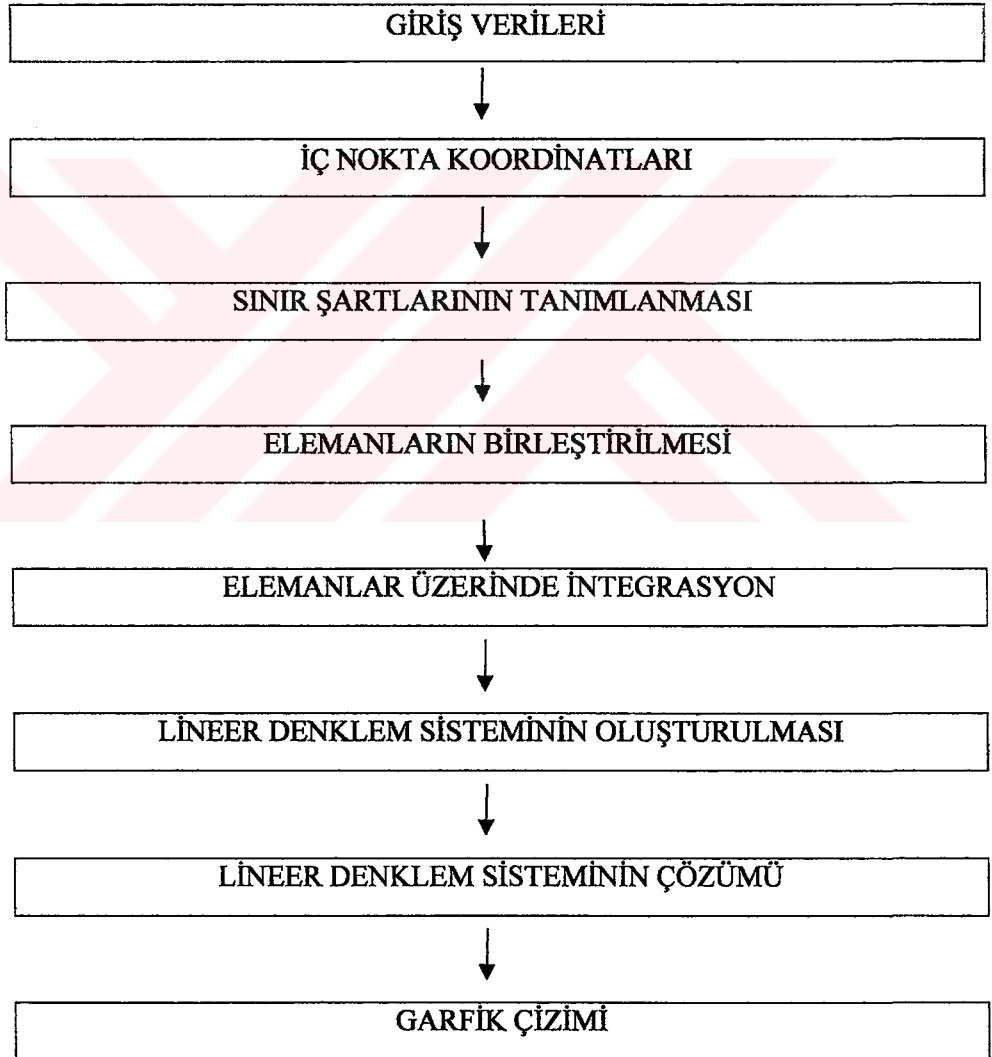
olur. Dolayısıyla $c(i)$ değerinin hesaplanmasının gerekli olmadığı görülmektedir.

6. BİLGİSAYAR PROGRAMI

6.1 Programın Genel Yapısı

Bu bölümde, iki boyutlu manyetostatik alan problemleri için direkt sınır elemanları yöntemi ile çözüm yapabilen MATLAB’da hazırlanmış MSOLV adında bir programın temel yapısı anlatılmıştır.

Laplace denklemi ile tanımlanan bir manyetostatik problemin sınır elemanları yöntemi ile çözümü için ilk olarak problem bölgesi sabit sınır elemanlarıyla bölmelenir. Daha sonra sınır elemanlarının koordinatları eleman sayısı ve sınır şartlarının girilmesiyle problem kolaylıkla çözülebilir.



Şekil 6.1 MSOLV programının genel yapısı

- **Giriş Verileri**

Problem bölgesinin sınırlarının bölmelenip sınır sayısının , analizi yapılacak bölgenin x ve y koordinatlarının hesaplanacak iç noktaların koordinatlarının ve gauss noktaları için apsisler ve katsayıların girişinin yapıldığı kısımdır.

```
clear
```

```
clc
```

```
%sınır elemanlarının koordinatları
```

```
x=[0 0.0125 0.025 0.0375 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 0.0375 0.025  
0.0125 0 0 0 0 0.025 0.0125 0.0375 0.025 0.0125 0.0375];
```

```
y=[0 0 0 0 0 0.0125 0.025 0.0375 0.05 0.05 0.05 0.05 0.05 0.0375  
0.025 0.0125 0 0.0001 0.0375 0.0375 0.025 0.0125 0.0125];
```

```
Z=[-0.861136311594053,-0.339981043584856, 0.339981043584856,  
0.861136311594053];
```

```
W=[0.347854845137454,0.652145154862546,0.652145154862546,0.34785  
4845137454];
```

```
%sınır eleman sayısı
```

```
N=16;
```

- **İç Nokta Koordinatları**

Manyetik skaler potansiyel ve manyetik alanın hesaplanacağı iç noktaların sayısının(L) girildiği program basamağıdır.

```
%iç nokta sayısı
```

```
L=6;
```

- **Sınır Şartlarının Tanımlanması**

Problemde Dirichlet ve Neumann üzere iki tip sınır şartı kullanılmaktadır. Öncelikle sınır şartı(Bc) girişleri yapılmakta ve daha sonra KOD=0 ile Dirichlet sınır şartı, KOD=1 ile Neumann sınır şartının ataması yapılmaktadır.

```
%sınır şartları
```

```
Bc=[0;0;0;0;0;0;0;0;100;100;100;100;0;0;0;0];
```

```
KOD=[0;0;0;0;1;1;1;1;0;0;0;0;1;1;1;1];
```

- **Elemanların Birleştirilmesi**

Bu kısımda koordinatları girilmiş olan sınır elemanları birleştirilmektedir.

```
% eleman bağlantılarının belirlenmesi
```

```
for k=1:N;
```

```
inc(k,1)=k;
```

```

inc(k,2)=k+1;
if k==N;
inc(k,2)=1;
end
m(k) = (x(k+1) + x(k))/2;
n(k) = (y(k+1) + y(k))/2;
end

```

- **Elemanlar Üzerinden İntegrasyon**

Manyetik skaler potansiyel ve manyetik alan hesabı için gerekli olan etki katsayılarının girilen integrasyon noktaları için girilen apsiler ve ağırlık faktörlerinin kullanılarak hesaplandığı kısımdır.

%etki katsayılarının hesaplanması

```

for j=1:N;
n1=inc(j,1);
n2=inc(j,2);
X1 = x(n1);
X2 = x(n2);
Y1 = y(n1);
Y2 = y(n2);
Ax = (X2 - X1)/2;
Bx = (X2 + X1)/2;
Ay = (Y2 - Y1)/2;
By = (Y2 + Y1)/2;
HL = sqrt((Ax)^2 + (Ay)^2);
nx = Ay/HL;
ny = -Ax/HL;
G(i,j)= 0;
H(i,j)= 0;
ux(i,j)=0;
uy(i,j)=0;
qx(i,j)=0;
qy(i,j)=0;
for k=1:4
if i~=j
Xg(k) = Ax*Z(k) + Bx;
Yg(k) = Ay*Z(k) + By;

```

```

Ra = sqrt((Xp - Xg(k))^2 + (Yp - Yg(k))^2);
rx = (Xg(k)-Xp)/Ra;
ry = (Yg(k)-Yp)/Ra;
rn = rx*nx + ry*ny;
ux(i,j)=ux(i,j)+rx*W(k)*HL/Ra;
uy(i,j)=uy(i,j)+ry*W(k)*HL/Ra;
qx(i,j)=qx(i,j)-((2*(rx^2)-1)*nx+2*rx*ry*ny)*W(k)*HL/(Ra^2);
qy(i,j)=qy(i,j)-((2*(ry^2)-1)*ny+2*rx*ry*nx)*W(k)*HL/(Ra^2);
H(i,j)= H(i,j)-rn*W(k)*HL/(Ra*2*pi);
G(i,j)= G(i,j)+ log(1/Ra) * W(k)*HL/(2*pi);
else
G(i,j) = 2* HL*(1.0 - log(HL))/(2*pi);
H(i,j)=0.5;
end
end
end
end

```

- **Linear Denkleminin Oluşturulması**

Bir önceki kısımda bulunan etki katsayıları yerlerine yazıldıklarında $H_u = G_q$ şeklinde bir eşitlik elde edilir. Bu eşitlikte bilinenler bir tarafa, bilinmeyenler diğer tarafa atılarak $A.X = y$ şeklinde bir denklem sistemi elde edilir.

%AX=y denklem sisteminin oluşturulması

```

for i=1:N
if KOD(i)==1
for j=1:N
temp=G(j,i);
G(j,i)=-H(j,i);
H(j,i)=-temp;
end
end
end
for i=1:N
for j=1:N
A(i,j)=G(i,j);
B(i,j)=H(i,j);

```

```
end
end
```

- **Lineer Denklem Sisteminin Çözümü**

Elde edilen $A.X=y$ denklem sistemi çözülerek sınırdaki bilinmeyenler hesaplanır.

Daha sınır değerler kullanılarak iç noktalardaki potansiyeller hesaplanabilir.

%AX=y denklem sisteminin çözümü

```
F=B*Bc;
K=inv(A)*F;
for i=1:N
if KOD(i)==1
temp=Bc(i);
Bc(i)=K(i);
K(i)=temp;
end
end
for i=N+1:N+L;
U(i-N)=0;
q1(i-N)=0;
q2(i-N)=0;
for j=1:N;
U(i-N) =U(i-N) -H(i,j)*Bc(j)+G(i,j)*K(j);
q1(i-N)=q1(i-N)+(ux(i,j)*K(j)-qx(i,j)*Bc(j))/(2*pi);
q2(i-N)=q2(i-N)+(uy(i,j)*K(j)-qy(i,j)*Bc(j))/(2*pi);
end
end
for j=1:L
Qc(j)=sqrt(q1(j)^2+q2(j)^2);
end
```

- **Grafik Çizimi**

Bu kısımda eş potansiyel eğriler çizilmektedir.

%Hava aralığının eş potansiyel eğrilerinin çizilmesi

```
for i=1:N
figure(1)
line([x(i),x(i+1)], [y(i),y(i+1)])
end
```

```

hold on
for i=1:N-1
for j=1:N
if fix(Bc(i))==fix(Bc(j)) | round(Bc(i))==round(Bc(j))
line([m(i),m(j)], [n(i),n(j)])
end
end
end
hold on

```

6.2. MSOLV Programında Kullanılan Semboller

Programda kullanılan genel değişkenler anlamları ile birlikte aşağıda verilmiştir.

x	: Sınır elemanlarının uç noktalarının x koordinatlarını temsil eden vektör
y	: Sınır elemanlarının uç noktalarının y koordinatlarını temsil eden vektör
Bc	: Sınır şartlarını belirten vektör
N	: Sınır eleman sayısı
L	: İç nokta sayısı
Z	: Gauss integrasyon noktalarının apsisleri
W	: Gauss integrasyon noktalarının ağırlık faktörleri
İnc	: Eleman bağlantısı
Xp	: Kaynak noktasının x yönündeki koordinatı
Yp	: Kaynak noktasının y yönündeki koordinatı
HL	: Sınır elemanının uzunluğu
nx	: Normalin x eksenini yönündeki bileşeni
ny	: Normalin y eksenini yönündeki bileşeni
G; H	: Etki katsayıları matris
Xg, Yg	: Gauss integrasyon noktası
Ra	: Kaynak noktasının integrasyon noktasına uzaklığı

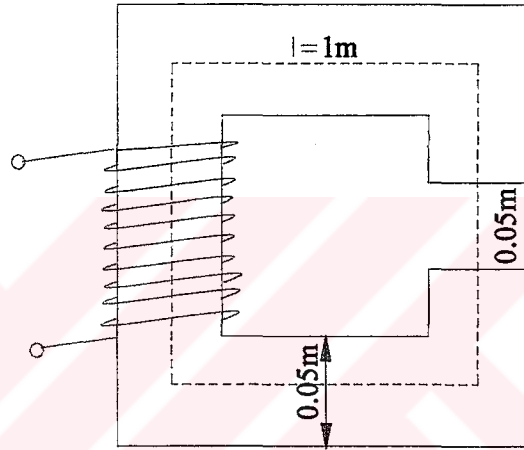
7. UYGULAMALAR

7.1 Uygulama-1

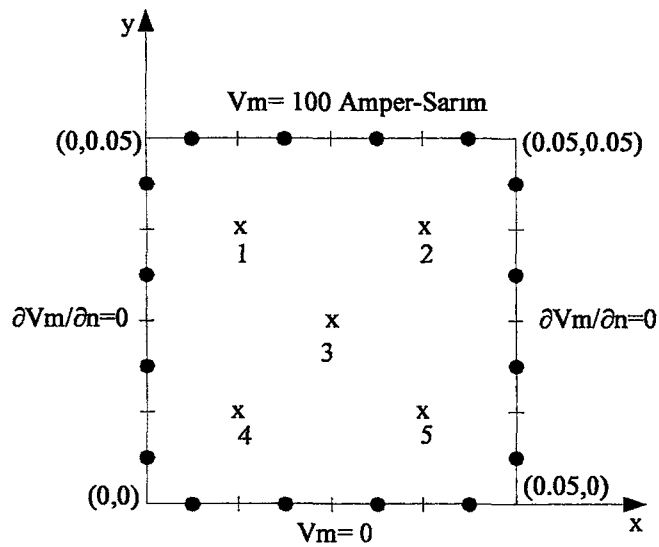
Uygulama için, Dirichlet ve Neumann sınır şartları verilen ve analitik çözümü bilinen basit bir demir nüvenin hava aralığı seçilmiştir (Şekil 7.1). Bu sistem, 8, 16 ve 32 adet sabit sınır elemanı ile bölmelendikten sonra etki katsayıları hesaplanarak, sınırlarda ve (0.0125, 0.0375), (0.0375, 0.0375), (0.025, 0.025), (0.0125, 0.0125), (0.0375, 0.0125), iç noktalarındaki manyetik skaler potansiyel değerleri hesaplanmıştır.

Örnek problemin analitik çözümü ise aşağıdaki formül ile elde edilebilir.

$$V_m = H \cdot \ell \quad (7.1)$$



Şekil 7.1. Örnek uygulama-1



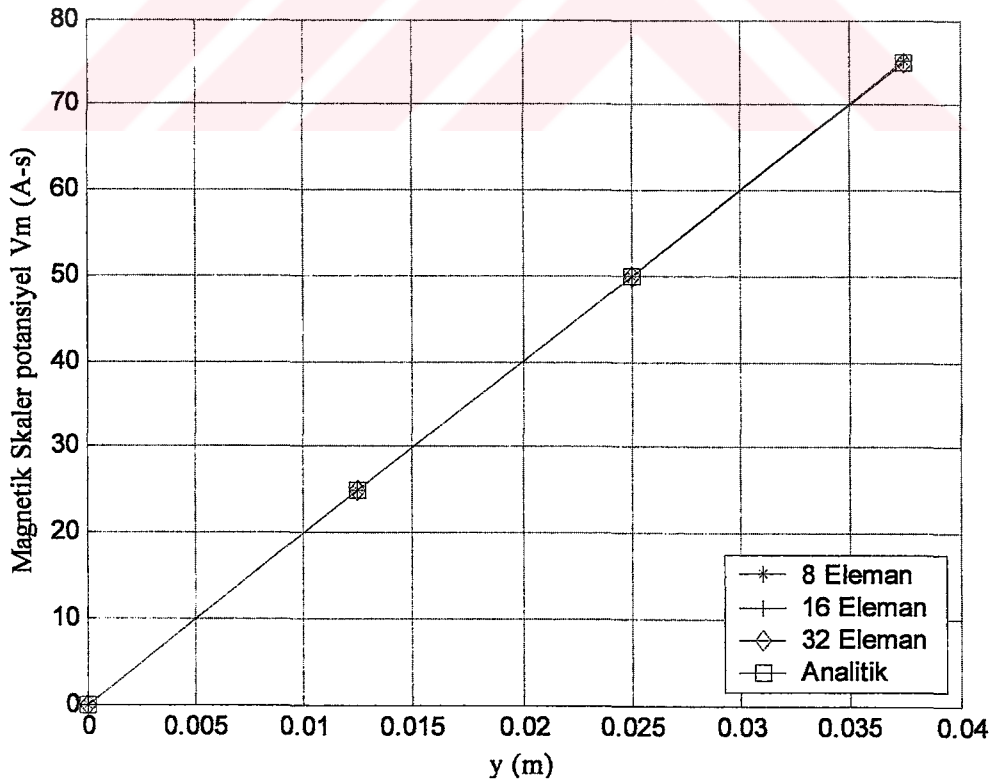
Şekil 7.2 Örnek uygulama-1'in hava aralığı

Tablo 7.1. Örnek uygulama-1'in manyetik skaler potansiyel değerleri

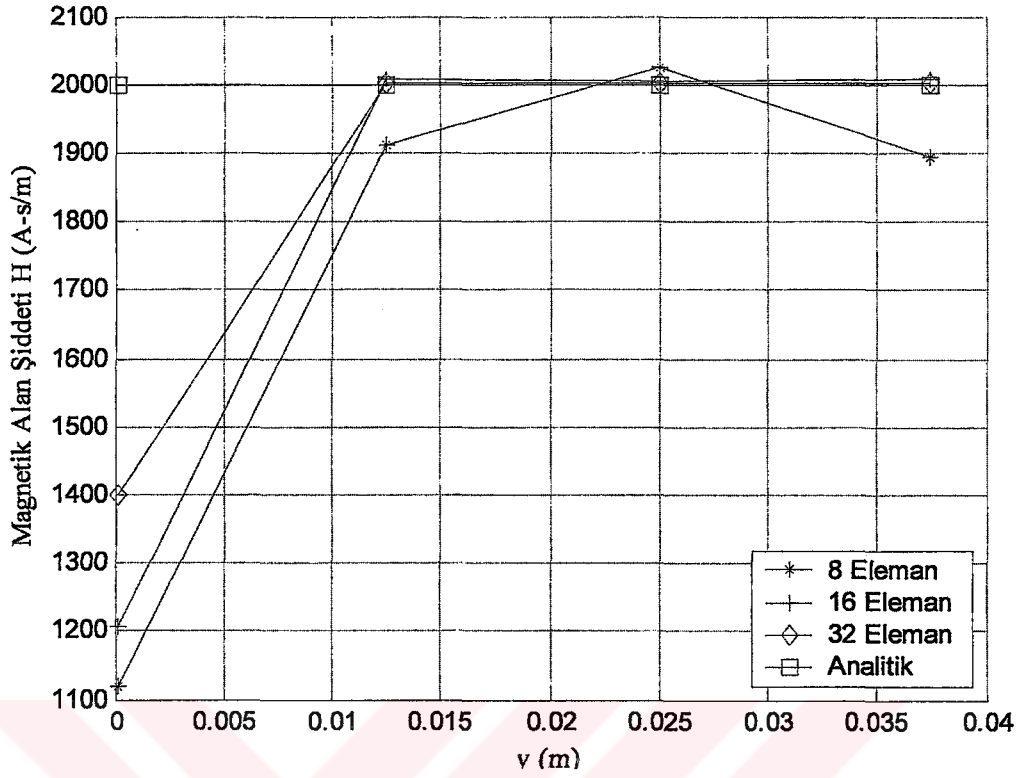
İç Nok.	Koordinatlar (m)		MSOLV Programı $V_m(A-s)$						Analitik Çözüm $V_m(A-s)$
	x	y	8Elm	%Hata	16Elm	%Hata	32Elm	%Hata	
1	0.0125	0.0375	75.140	0.188	75.116	0.154	75.045	0.06	75.000
2	0.0375	0.0375	75.140	0.188	75.116	0.154	75.045	0.06	75.000
3	0.025	0.025	50.003	0.006	50.002	0.004	50.001	0.002	50.000
4	0.0125	0.0125	24.796	0.816	24.887	0.452	24.957	0.172	25.000
5	0.0375	0.0125	24.796	0.816	24.887	0.452	24.957	0.172	25.000

Tablo 7.2 Örnek uygulama-1'in manyetik alan şiddeti değerleri

İç Nok.	Koordinatlar (m)		MSOLV Programı $H(A-s/m)$						Analitik Çözüm $H(A-s/m)$
	x	y	8Elm	%Hata	16Elm	%Hata	32Elm	%Hata	
1	0.0125	0.0375	1895.0	5.25	2008.1	0.405	2001.4	0.07	2000.0
2	0.0375	0.0375	1895.0	5.25	2008.1	0.405	2001.4	0.07	2000.0
3	0.025	0.025	2024.5	1.225	2005.7	0.285	2002.1	0.105	2000.0
4	0.0125	0.0125	1912.6	4.37	2008.1	0.405	2001.5	0.075	2000.0
5	0.0375	0.0125	1912.6	4.37	2008.1	0.405	2001.5	0.075	2000.0



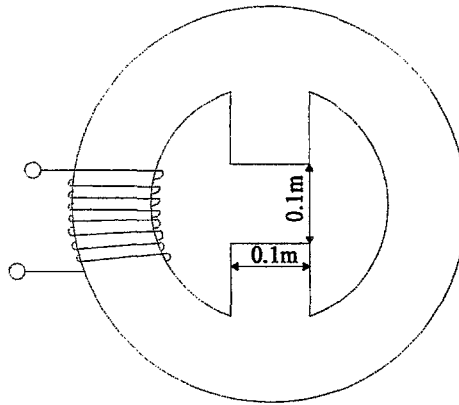
Şekil 7.3 Örnek uygulama-1 için manyetik skaler potansiyelin y eksenine göre değişimi



Şekil 7.4 Örnek uygulama-1 için manyetik alan şiddetinin y eksenine göre değişimi

7.2 Uygulama 2

Uygulama için, Dirichlet ($V_m = 200 A-s$) ve Neumann ($\frac{\partial V_m}{\partial n} = 0$) sınır şartları verilen ve analitik çözümü bilinen demir nüvenin hava aralığı seçilmiştir (Şekil-7.5). Bu sistem, 8, 16 ve 32 adet sabit sınır elemanı ile bölmelendikten sonra etki katsayıları hesaplanarak, sınırlarda ve (0.025, 0.025), (0.05, 0.05), (0.075, 0.075), (0.025, 0.075), (0.075, 0.025), iç noktalarındaki manyetik skaler potansiyel değerleri hesaplanmıştır.



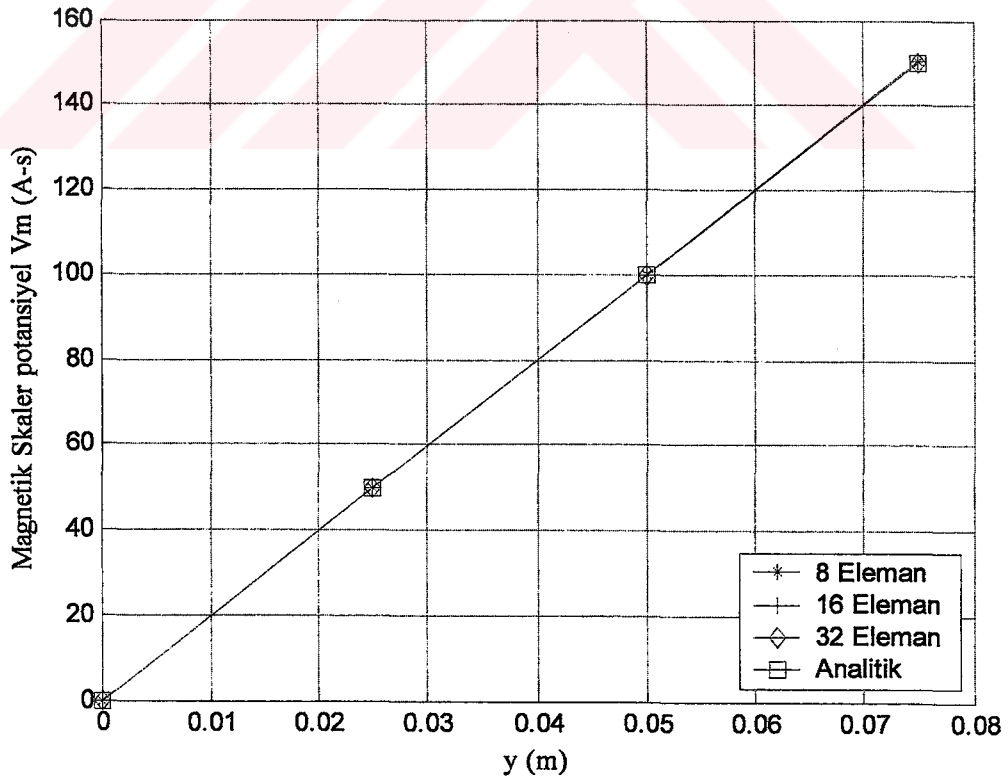
Şekil 7.5 Örnek uygulama-2

Tablo 7.3 Örnek uygulama-2'in manyetik skaler potansiyel değerleri

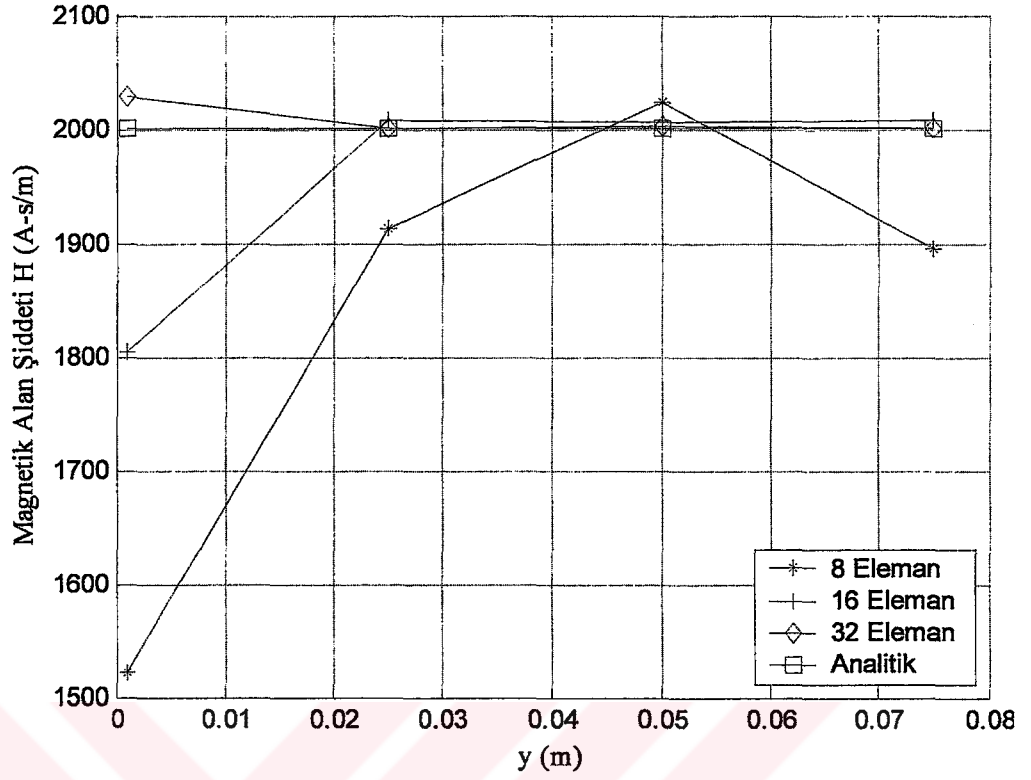
İç Nok.	Koordinatlar (m)		MSOLV Programı						Analitik Çözüm $V_m(A-s)$
			$V_m(A-s)$						
	x	y	8Elm	%Hata	16Elm	%Hata	32Elm	%Hata	
1	0.025	0.025	49.593	0.813	49.775	0.488	49.915	0.168	50.000
2	0.05	0.05	100.00	0.006	100.00	0.004	100.00	0.002	100.000
3	0.075	0.075	150.28	0.187	150.23	0.155	150.09	0.06	150.000
4	0.025	0.075	150.28	0.187	150.23	0.155	150.09	0.06	150.000
5	0.075	0.025	49.593	0.813	49.775	0.488	49.915	0.168	50.000

Tablo 7.4 Örnek uygulama-2'in manyetik alan şiddeti değerleri

İç Nok.	Koordinatlar (m)		MSOLV Programı						Analitik Çözüm $H(A-s/m)$
			$H(A-s/m)$						
	x	y	8Elm	%Hata	16Elm	%Hata	32Elm	%Hata	
1	0.025	0.025	1912.6	4.37	2008.1	0.405	2001.5	0.075	2000.0
2	0.05	0.05	2024.5	1.225	2005.7	0.285	2002.1	0.105	2000.0
3	0.075	0.075	1895.0	5.25	2008.1	0.405	2001.4	0.07	2000.0
4	0.025	0.075	1895.0	5.25	2008.1	0.405	2001.4	0.07	2000.0
5	0.075	0.025	1912.6	4.37	2008.1	0.405	2001.5	0.075	2000.0



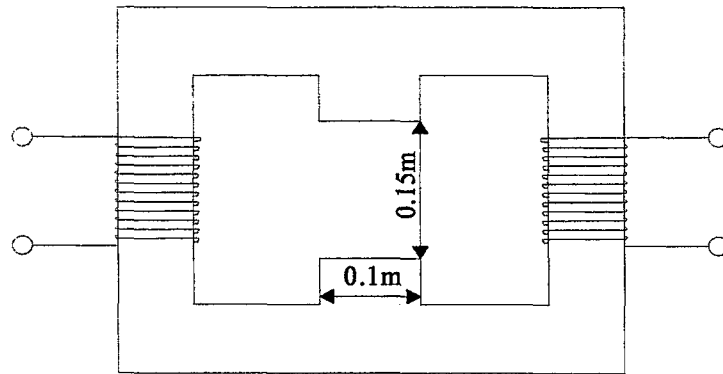
Şekil 7.6 Örnek uygulama-2 için manyetik skaler potansiyelin y eksenine göre değişimi



Şekil 7.7 Örnek uygulama-2 için manyetik alan şiddetinin y eksenine göre değişimi

7.3 Uygulama 3

Uygulama için, Dirichlet ($V_m = 300 \text{ A-s}$) ve Neumann ($\frac{\partial V_m}{\partial n} = 0$) sınır şartları verilen ve analitik çözümü bilinen transformatörün hava aralığı seçilmiştir (Şekil 7.3). Bu sistem, 8, 16 ve 32 adet sabit sınır elemanı ile bölmelendikten sonra etki katsayıları hesaplanarak, sınırlarda ve (0.025, 0.0375), (0.05, 0.075), (0.075, 0.075), (0.075, 0.05), (0.075, 0.01), iç noktalarındaki manyetik skaler potansiyel değerleri hesaplanmıştır.



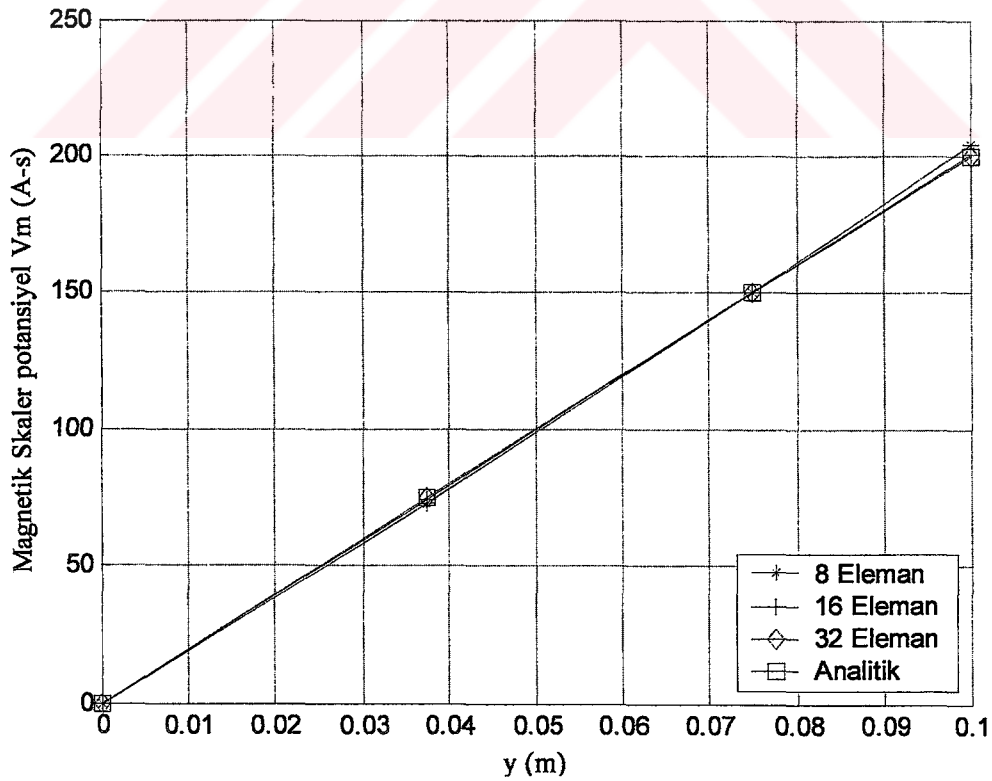
Şekil-7.8. Örnek uygulama-3

Tablo 7.5 Örnek uygulama-3'ün manyetik skaler potansiyel değerleri

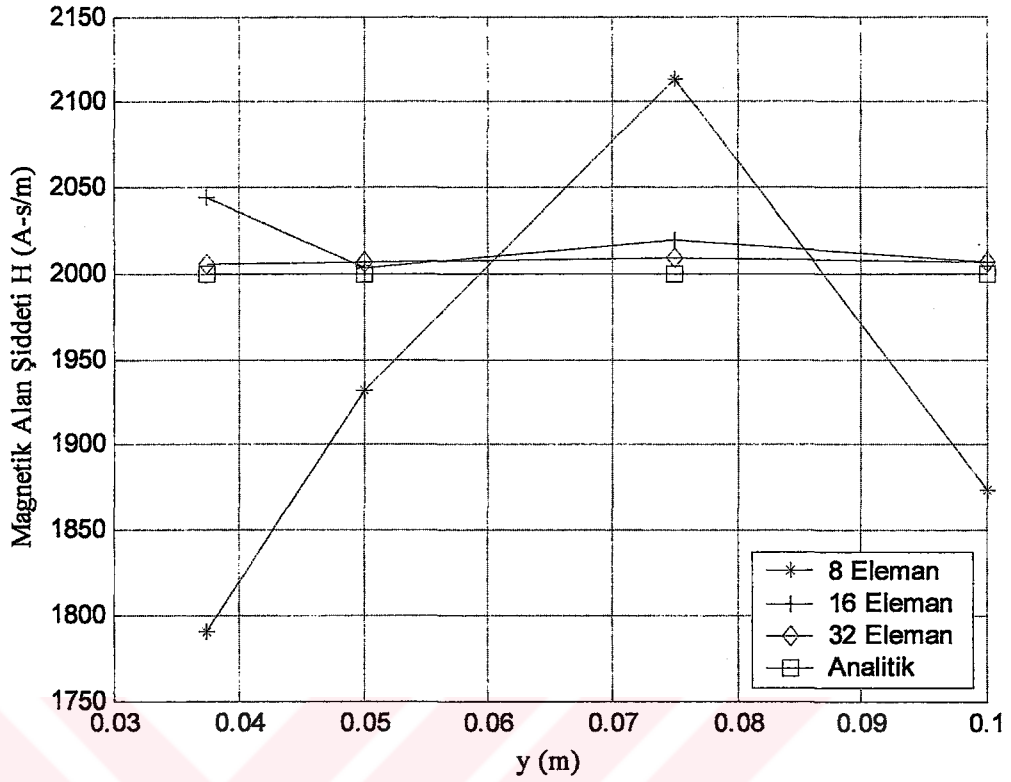
İç Nok.	Koordinatlar (m)		MSOLV Programı						Analitik Çözüm $V_m(A-s)$
	x	y	$V_m(A-s)$		$V_m(A-s)$		$V_m(A-s)$		
			8Elm	%Hata	16Elm	%Hata	32Elm	%Hata	
1	0.025	0.0375	72.918	2,775	74.229	1.027	74.723	0.368	75.000
2	0.05	0.075	150.04	0.027	150.02	0.017	150.01	0.009	150.000
3	0.075	0.075	149.97	0.017	150.02	0.016	150.01	0.01	150.000
4	0.075	0.05	96.227	3.77	99.601	0.399	99.802	0.197	100.000
5	0.075	0.1	204.55	2.278	200.45	0.226	200.22	0.113	200.000

Tablo 7.6 Örnek uygulama-3'ün manyetik alan şiddeti değerleri

İç Nok.	Koordinatlar (m)		MSOLV Programı						Analitik Çözüm $H(A-s/m)$
	x	y	$H(A-s/m)$		$H(A-s/m)$		$H(A-s/m)$		
			8Elm	%Hata	16Elm	%Hata	32Elm	%Hata	
1	0.025	0.025	1789.9	10.505	2044.1	2.205	2005.4	0.27	2000.0
2	0.05	0.05	2112.9	5.645	2019.9	0.995	2006.9	0.345	2000.0
3	0.075	0.075	2347.4	17.37	2056.4	2.82	2009.4	0.47	2000.0
4	0.025	0.075	1931.7	3.415	2003.5	0.175	2007.3	0.365	2000.0
5	0.075	0.025	1873.1	6.345	2006.6	0.33	2007.2	0.36	2000.0



Şekil 7.9 Örnek uygulama-3 için manyetik skaler potansiyelin y eksenine göre değişimi



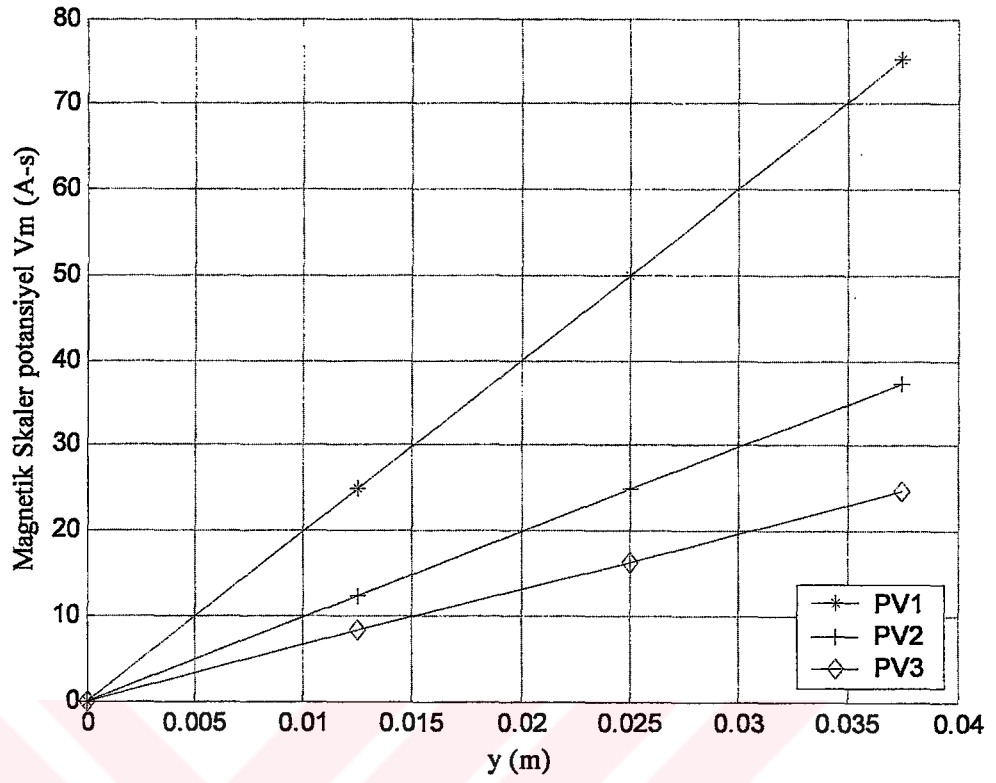
Şekil 7.10 Örnek uygulama-3 için manyetik alan şiddetinin y eksenine göre değişimi

7.4 Hava Aralığının Büyüklüğünün Değiştirilmesi

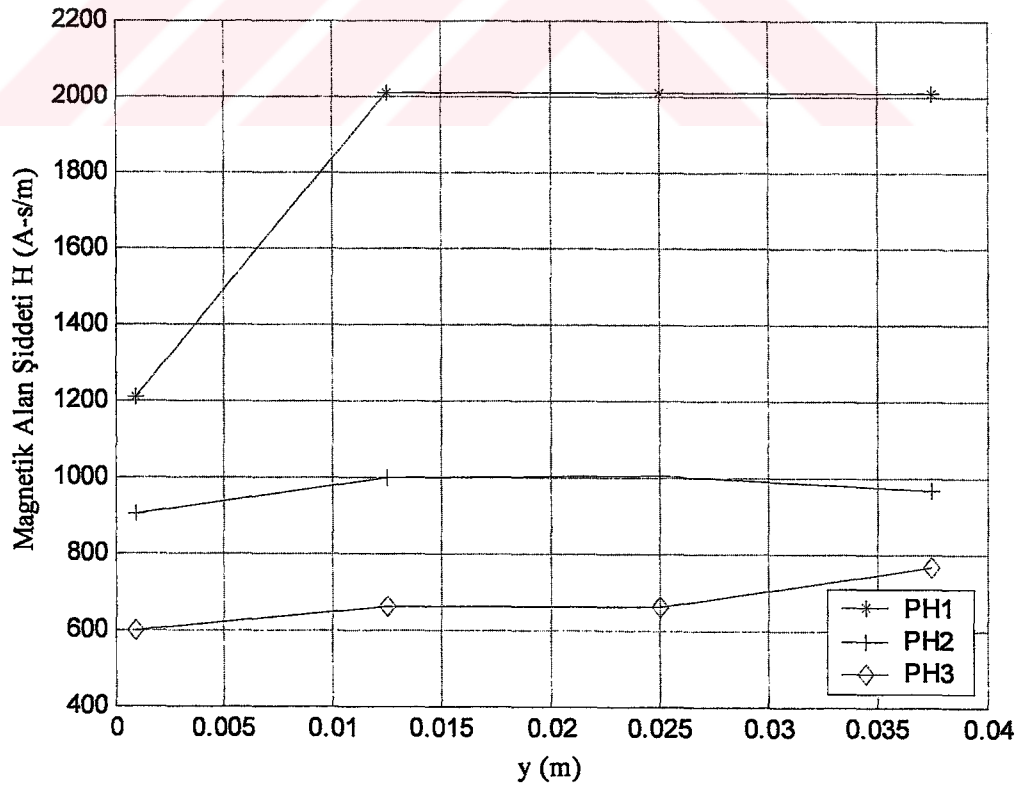
Hava aralığının büyüklüğü değiştirilerek manyetik skaler potansiyellerin (P1, P2, P3) ve manyetik alan şiddetlerinin (PH1, PH2, PH3) değişimleri incelenmiştir.

Şekil 7.10 ve Şekil 7.11 incelendiğinde hava aralığının büyüklüğü artırıldığında belirlenen iç noktalardaki manyetik skaler potansiyellerin ve manyetik alan şiddetlerinin azaldığı, hava aralığının büyüklüğü azaltıldığında ise belirlenen iç noktalardaki manyetik skaler potansiyellerin ve manyetik alan şiddetlerinin arttığı gözlemlenmektedir.

İlk uygulamada hava aralığı (0.05, 0.05), ikinci uygulamadaki hava aralığından (0.1, 0.1) küçük olduğundan P1 ve PH1 eğrileri üzerindeki manyetik skaler potansiyellerin ve manyetik alan şiddetlerinin, P2 ve PH2 eğrileri üzerindeki manyetik skaler potansiyeller ve manyetik alan şiddetlerinden büyük olduğu gözlemlenmektedir.



Şekil 7.11 Hava aralığının büyüklüğüne göre manyetik skaler potansiyelin değişimi



Şekil 7.12 Hava aralığının büyüklüğüne göre manyetik alan şiddetinin değişimi

8. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında, sınır elemanları yöntemi kullanılarak bir manyetik devrenin hava aralığında iki boyutlu manyetik skaler potansiyelin analizi gerçekleştirilmiştir. Bunun için öncelikle sınır elemanları yönteminin temel denklemleri verilerek, analiz için gerekli formülasyonlar elde edilmiştir. Daha sonra manyetik skaler potansiyel problemlerinin çözümü için MATLAB'da, MSOLV adında bir program geliştirilerek örnek uygulamalar yapılmıştır.

Öncelikle manyetik skaler potansiyeli matematiksel olarak ifade eden Laplace denklemi sınır integral denklemine dönüştürülmüş ve daha sonra bu sınır integral denklemi, sınır elemanları yöntemi kullanılarak bir lineer denklem sistemine dönüştürülmüştür. Bu lineer denklem sistemi de matris formunda yazılmış ve bu matris çözülerek sınırdaki bilinmeyenler (potansiyel ve potansiyelin normale göre türevi) hesaplanmış ve sınırdaki değerler kullanılarak iç noktadaki bilinmeyenler hesaplanmıştır.

MATLAB'da yazılmış olan MSOLV programında, sınır elemanlarından sabit eleman kullanılarak çözümler gerçekleştirilmiştir. Bunun için öncelikle manyetik skaler potansiyel analizi yapılmak istenen bölge, sabit sınır elemanlarıyla bölmelenmiş ve elemanların koordinatları giriş verisi olarak girilmiştir. Daha sonra elemanların bağlantıları, elemanın uzunluğu ve gauss integrasyon noktaları belirlenmiştir. Etki integralleri hesaplanarak, matris formundaki lineer denklem sistemi oluşturulmuş ve bu sistem çözülerek sınırdaki bilinmeyenler (potansiyel ve potansiyelin normale göre türevi) hesaplanmıştır. Daha sonra sınırdaki değerler kullanılarak iç noktalardaki değerler hesaplanmış ve analitik sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

MATLAB'da yazılmış olan MSOLV programıyla değişik uygulamalar yapılmıştır. Bu örnek uygulamalarda manyetik devrenin hava aralığının belirli noktalarında manyetik skaler potansiyeller ve manyetik alan şiddetleri hesaplanmıştır. Her bir manyetik devrenin hava aralığında yapılan hesaplama 4, 8 ve 16 sabit eleman kullanılarak tablo halinde verilmiştir. Tabloda 8, 16 ve 32 sabit sınır elemanın kullanılmasıyla elde edilen bu değerler ile analitik değerler karşılaştırılmış ve grafiği çizilmiştir. Grafikler ve tablolar inceleyerek, eleman sayısı artırıldığı takdirde hassasiyetin de arttığı gözlemlenmiştir. Hata oranları karşılaştırıldığında 8 elemanda manyetik skaler potansiyel için hata oranı en fazla %3.77, manyetik alan şiddeti için %17.37, 32 elemanda ise manyetik skaler potansiyel için hata oranı en fazla %0.368, manyetik alan şiddeti için %0.47 olduğu görülmüştür.

Uygulama bölümünde yapmış olduğumuz çalışmalardan yola çıkarak sınır elemanları yönteminin manyetik skaler potansiyel ile manyetik alan şiddetinin hesaplanması için etkili ve kullanılabilir bir yöntem olduğunu söylenebilir.

KAYNAKLAR

- Akpınar, S. ve Kürüm, H., 2001, Sayısal Çözümleme, Fırat Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Elazığ.
- Brebbia, C., A., Magureanu, R. The Boundary Element Method for Electromagnetic Problems.
- Heperkan, H., Kesgin, U., 2003 Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler için Sayısal Yöntemler, Literatür Yayıncılık, İstanbul.
- Chandrupatla, T., R., Belegundu, A., D.,1991, İntroduction to Finite Elements İn Engineering, Prentice-Hall.
- Dönmez, A., 2001, Reel Analiz, Seçkin Yayıncılık, Ankara.
- Ekici, S., 2003, İndirekt Sınır Elemanları Yöntemiyle İki Boyutlu Potansiyel Dağılımın Hesaplanması, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 64s.Elazığ
- Gün, V., 1993, Açık Sınırlı Elektrik Alan Problemlerinde Dış Bölgelerin Modellenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Elazığ.
- Gürdal, O., 2000, Elektromanyetik Alan Teorisi. Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- Griffiths D., J., 1996, Elektromagnetik Teori. Güven Yayınevi.
- Hunter, P. and Pullan, A., 2002 FEM/BEM Notes, New Zealand, 145p.
- Kythe, P., K., 1995, An Introduction to Boundary Element Methods, CRC Pres, London-Tokyo, 368p.
- Kükner, A., Tapkan, K., K., 1999, Başlangıçta Serbest Yüzeyinde Sinüzoidal Dalga Formuna Sahip Bir Tankta Çalkantı Probleminin Sınır Eleman Yöntemiyle Çözümü, Gemi İnşaatı ve Deniz Teknolojisi Teknik Kongresi 99 – Bildiri Kitabı, İstanbul.
- Matthew, Sadiku, N., O., 1992, Numerical Techniques in Electromagnetics, CRC Pres Inc. 684s.
- Rucker, W., M. , Richter, K., R. , 1988, Three-Dimensional Magnetostatic Field Calculation Using Boundary Element Method, IEEE TRANSACTION ON MAGNETICS
- Rucker, W., M. , Richter, K., R. , 1988, Calculation of Two-Dimensional Eddy Current Problems with The Boundary Element Method, IEEE TRANSACTION ON MAGNETICS
- Reddy, J., N., 1993, An İntroduction to the Finite Element Method, The Universities press, Singapore.
- Suciu, R., De Mey, G., De Baetselier, 2000, BEM Solution of Possion's Equation with Source Function Satisfying $\nabla^2 \rho = constant$, ELSEVIER
- Uyar, M., 2004, Sınır Elemanları Yöntemiyle Elektrik Alan Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 77s.Elazığ

- Wroble, L., C., 2002, The Boundary Element Method Volume 1 Application in Thermo-Fluids and Acoustics, Jhon and Sons Ltd., England.
- William, H., H., J., R., 1983, Electromagnetic Engineering.
- Yıldırım, S., 1999, Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 113s., Elazığ
- Yildir, Y., B., Klimpke, B., W., Prasad, K., M., 1991, Magnetic Analysis of Brushless Dc Motors Using The Boundary Element Method, Integrated Engineering Software.

