

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**POISSON DENKLEMİ TİPİNDEKİ ELEKTRİK ALAN
PROBLEMLERİ İÇİN SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ**

Hüseyin ERİŞTİ

Tez Yöneticisi

Yrd.Doç. Dr. Selçuk YILDIRIM

169308

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ELAZIĞ, 2005

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POISSON DENKLEMİ TİPİNDEKİ ELEKTRİK ALAN PROBLEMLERİ İÇİN SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Hüseyin ERİŞTİ

Yüksek Lisans Tezi
Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı

Bu tez, 29.07.2005 tarihinde aşağıda belirtilen jüri tarafından oybirliği / ~~oyçokluğu~~
ile başarılı / ~~başarısız~~ olarak değerlendirilmiştir.

Danışman : Yrd.Doç.Dr. Selçuk YILDIRIM

Üye : Prof.Dr. Mehmet CEBECİ

Üye : Yrd.Doç.Dr. Hüseyin ALTUN

S. Yıldırım

M. Cebeci

H. Altun

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05.08.2005 tarih ve
2005-25.1.1 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

İÇİNDEKİLER LİSTESİ

İÇİNDEKİLER LİSTESİ.....	I
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	III
TABLOLAR LİSTESİ.....	VII
SİMGELER LİSTESİ.....	IX
ÖZET.....	X
ABSTRACT.....	XI

1.GİRİŞ.....	1
1.1. Genel Bilgi.....	1
1.2. Sınır Elemanları Yönteminin Tarihi Gelişimi.....	2
1.3. Mühendislik Problemlerinin Sayısal Çözümü.....	4
2. ELEKTRİK ALANLARI.....	7
2.1. Genel Bilgi.....	7
2.2. Elektrik Alan Vektörü.....	7
2.3. Elektrik Alanı Hesabı.....	8
2.4. Sürekli Yük Dağılımının Elektrik Alanı.....	10
2.5. Elektrik Alan Çizgileri	11
2.6. Gauss Yasası.....	13
2.7. Dielektrik Sertlik	14
2.8. Poisson ve Laplace Denklemleri.....	15
2.9. Elektriksel Potansiyel.....	15
2.10. Potansiyel ve Elektrik Alanı.....	16
2.11. Noktasal Yükün Oluşturduğu Potansiyel.....	18
3. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ.....	21
3.1. Sınır Şartları.....	21
3.2. Temel Çözüm.....	21
3.3. Sınır İntegral Denklemi.....	23
3.3.1. Sınır Noktaları İçin Sınır İntegral Denklemi.....	24
3.3.2. İç Nokta Formülasyonu.....	26
3.4. Gauss Sayısal İntegrasyonu.....	28
3.4.1. Bir Boyutlu Gauss Alan Hesabı.....	28
3.4.2. Üçgensel (Triangular) Bölgeler İçin İki Boyutu Gauss Alan Hesabı.....	29
4. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ.....	30
4.1. Sabit Elemanlar.....	32

4.1.1. Üzerinde Kaynak Noktası Bulunmayan	
Sabit Sınır Elemanları Üzerindeki İntegrasyon.....	33
4.1.2. Üzerinde Kaynak Noktası Bulunan	
Sabit Sınır Elemanları Üzerindeki İntegrasyon.....	36
4.2. Lineer Elemanlar.....	37
4.2.1. Üzerinde Kaynak Noktası Bulunmayan	
Lineer Sınır Elemanları Üzerindeki İntegrasyon.....	40
4.2.2. Üzerinde Kaynak Noktası Bulunan	
Lineer Sınır Elemanları Üzerindeki İntegrasyon.....	40
4.3. Parabolik Elemanlar.....	42
4.4 Bölge İntegrallerinin Hesaplanması.....	45
4.4.1 Hücre Yaklaşımı.....	45
4.5. Otomatik Üçgen Eleman Üretimi.....	47
5. BİLGİSAYAR PROGRAMLARI.....	48
5.1. H-BEM Programı.....	48
5.2. ELECTRO Programı.....	56
5.3. PDE Toolbox Programı.....	57
6. UYGULAMALAR.....	58
6.1 Genel Bilgi	58
6.2. Kare Sınırlı Elektrot Sistemi.....	58
6.3. Küre-Düzlem Elektrot Sistemi.....	65
6.4. Koaksiyel Kablo	73
6.5. Çubuk Topraklayıcı.....	78
6.6. Eksenel Simetrik Küre-Küre Elektrot Sistemi.....	83
7.SONUÇLAR.....	88
KAYNAKLAR.....	91
ÖZGEÇMİŞ.....	93

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1	Sınır elemanları yönteminin konusu üzerine yayınlanan dergi makalelerinin yıllara göre dağılımı.....	3
Şekil 1.2	Bir mühendislik probleminin simülasyonu için gerekli akış diyagramı.....	5
Şekil 2.1	Elektrik alanında artı ve eksi yüklere etkiyen kuvvetlerin yön ve doğrultuları.....	8
Şekil 2.2	Elektrik alan vektörlerinin toplamı.....	9
Şekil 2.3	Bazı örnek elektrik alanları.....	11
Şekil 2.4	(a) Pozitif yüklü bir tabakanın elektrik alan çizgileri (b) Zıt yüklü levhalar arasındaki elektrik alan çizgileri.....	12
Şekil 2.5	Birim yüzey elemanından geçen çizgi sayısı.....	13
Şekil 2.6	Düzgün elektrik alanı içerisinde q_0 deneme yükünün hareketi.....	17
Şekil 2.7	Düzgün olmayan elektriksel alan içerisinde q_0 deneme yükünün hareketi.....	18
Şekil 2.8	Pozitif bir q yükünün çevresinde oluşturduğu elektriksel alan.....	19
Şekil 3.1	(a) Dirichlet tipi sınır şartı (b) Neumann tipi sınır şartı (c) Karışık tip sınır şartı.....	21
Şekil 3.2	Dirac Delta fonksiyonu.....	22
Şekil 3.3	Sınırdaki 'i' noktasının gösterimi.....	24
Şekil 3.4	Sınırdaki 'i' noktasının geometriksel durumu.....	25
Şekil 3.5	Problem bölgesi içerisindeki 'i' noktasının gösterimi.....	26
Şekil 3.6	Problem bölgesi içerisindeki 'i' noktasının geometriksel durumu.....	27
Şekil 3.7	Üçgensel koordinatlar.....	29
Şekil 4.1	(a) Bölmelenmiş problem bölgesi (b) Sabit eleman (c) Lineer eleman (d) Parabolik eleman.....	31
Şekil 4.2	Sınır eleman ağının şematik gösterimi.....	32
Şekil 4.3	Sabit eleman koordinat sistemi.....	33
Şekil 4.4	Sabit elemana ait 'i' düğümünün integrasyon noktalarına uzaklıkları.....	34
Şekil 4.5	Üzerinde 'i' kaynak noktası bulunan sabit eleman.....	36
Şekil 4.6	Lineer interpolasyon fonksiyonlar.....	37
Şekil 4.7	Lineer elemana ait 'i' düğümünün integrasyon noktalarına uzaklıkları.....	40
Şekil 4.8	'i' düğümünün 'j' elemanının birinci düğümü üzerinde bulunması.....	41
Şekil 4.9	'i' düğümünün 'j-1' elemanının ikinci düğümü üzerinde bulunması.....	41

Şekil 4.10	Parabolik elemanın problem bölgesinde genel gösterimi.....	42
Şekil 4.11	Parabolik elemanın lokal koordinat ile gösterilmesi.....	43
Şekil 4.12	Bölgenin hücrelere ayrıştırılması.....	45
Şekil 4.13	Düğüm-Hücre ilişkisi.....	46
Şekil 5.1	H-BEM programının akış diyagramı.....	48
Şekil 6.1	Yük yoğunluğuna sahip problem bölgesi.....	58
Şekil 6.2	Kare sınırlı elektrot sisteminin 1342 adet üçgen, 80 adet sınır elemanı ile bölme yapılması.....	59
Şekil 6.3	Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	60
Şekil 6.4	Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin potansiyel dağılımı.....	61
Şekil 6.5	Problem bölgesinde $x=0.2, y=0.5$ noktasında 2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	62
Şekil 6.6	Problem bölgesinde 2 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	63
Şekil 6.7	Problem bölgesinde $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı....	64
Şekil 6.8	Dirichlet sınır şartlı kare sınırlı elektrot sisteminin $y=0.5$ eksen boyunda; (a) yük yoğunluğunun bulunmaması; (b) 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, (c) $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC noktasal yük, (d) 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük, (e) $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük, durumlarına ait potansiyel değişimleri	65
Şekil 6.9	Küre-düzlem elektrot sistemi.....	66
Şekil 6.10	Küre-düzlem elektrot sisteminin 3254 adet üçgen, 136 adet sınır elemanı ile bölme yapılması.....	66
Şekil 6.11	Problem bölgesinde herhangi bir yük yoğunluğu bulunmayan küre-düzlem elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	67
Şekil 6.12	Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan küre-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı.....	68

Şekil 6.13 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	69
Şekil 6.14 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı.....	70
Şekil 6.15 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	71
Şekil 6.16 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	72
Şekil 6.17 Küre-düzlem elektrot sisteminin $x=0.2$ eksenı boyunca; (a) yük yoğunluğunun bulunmaması; (b) 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, (c) 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.1$, $y=0.3$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük, (d) 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.8$, $y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük, durumlarına ait potansiyel değişimleri.....	73
Şekil 6.18 Çeyrek kesitli koaksiyel kablo kesiti.....	74
Şekil 6.19 Çeyrek kesitli koaksiyel kablonun 883 adet üçgen eleman 71 adet sınır elemanı ile bölmelenmesi	74
Şekil 6.20 Problem bölgesinde herhangi bir yük yoğunluğu bulunmayan çeyrek kesitli koaksiyel kablodaki eşpotansiyel dağılımı.....	75
Şekil 6.21 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan ve $\epsilon_r=3$ olan koaksiyel kablonun potansiyel dağılımı.....	77
Şekil 6.22 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan ve $\epsilon_r=5$ olan koaksiyel kablonun potansiyel dağılımı.....	77
Şekil 6.23 Koaksiyel kablonun radyal yönü boyunca boyunca; (a) yük yoğunluğunun bulunmaması; (b) $\epsilon_r=5$ olması ve 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması, (c) $\epsilon_r=3$ olması ve 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması, durumlarına ait potansiyel değişimleri.....	78
Şekil 6.24 Çubuk topraklayıcı modeli.....	79
Şekil 6.25 Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan çubuk topraklayıcı modelinin eşpotansiyel dağılımı.....	80

Şekil 6.26 Çubuk topraklayıcı modelinin PDE toolbox programıyla elde edilen eşpotansiyel dağılımı.....	80
Şekil 6.27 Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan çubuk topraklayıcının potansiyel değişimi.....	81
Şekil 6.28 Problem bölgesine noktasal yük bulunan çubuk topraklayıcı modeli.....	82
Şekil 6.29 Çubuk topraklayıcı modelinin H-BEM programıyla elde edilen eşpotansiyel dağılımı.....	82
Şekil 6.30 (a) Eksenel simetrik küre-küre elektrot sistemi, (b) Problem bölgesinin 1001 adet üçgen eleman 97 adet sınır elemanı ile bölmelenmesi.....	84
Şekil 6.31 (a) Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan, (b) Problem bölgesinde 10 nC/m^3 'lük yük yoğunluğu bulunan, eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	85
Şekil 6.32 (a) Problem bölgesinde $x=0.15$ ve $y=0.15$ koordinatında -1 nC 'luk noktasal yük, (b) Problem bölgesinde $x=0.02$ ve $y=0.15$ koordinatında 1 nC 'luk noktasal yük, bulunan eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı.....	86
Şekil 6.33 Eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin $x=0$ eksenı boyunca; (a) yük yoğunluğunun bulunmaması; (b) 10 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması, (c) $x=0.15$, $y=0.15$ 'de -1 nC 'luk noktasal yük bulunması, (d) $x=0.02$, $y=0.15$ 'de 1 nC 'luk noktasal yük bulunması, durumlarına ait potansiyel değişimleri.....	87

TABLÖLER LİSTESİ

Tablo 1.1	Bibliyografik araştırma.....	3
Tablo 3.1	Kurallı Gauss noktaları (apsisleri) ve ağırlık faktörleri.....	28
Tablo 3.2	Üçgenler için Düzeltilmiş Gauss noktaları ve ağırlık faktörleri.....	29
Tablo 6.1	Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin çözümü.....	61
Tablo 6.2	Problem bölgesinde $x=0.2$, $y=0.5$ noktasında 2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin çözümü.....	62
Tablo 6.3	Problem bölgesinde 2 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2$, $y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8$, $y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin çözümü.....	63
Tablo 6.4	Problem bölgesinde 2 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2$, $y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8$, $y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin çözümü.....	64
Tablo 6.5	Problem bölgesinde herhangi bir yük yoğunluğu bulunmayan küre-düzlem elektrot sisteminin çözümü.....	67
Tablo 6.6	Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin çözümü.....	69
Tablo 6.7	Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin çözümü.....	71
Tablo 6.8	Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin çözümü.....	72
Tablo 6.9	Problem bölgesinde herhangi bir yük yoğunluğu bulunmayan çeyrek kesitli koaksiyel kablo örneğinin çözümü.....	75
Tablo 6.10	Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan koaksiyel kablo örneğinin çözümü.....	77
Tablo 6.11	Yük etkisi bulunmayan çubuk topraklayıcı modelinin çözümü.....	81
Tablo 6.12	$x=10$ ve $y=20$ noktasında 200 nC 'luk yük bulunan çubuk topraklayıcı modelinin çözümü.....	83
Tablo 6.13(a)	Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan, (b) Problem bölgesinde 10 nC/m^3 'lük yük yoğunluğu bulunan, eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin çözümü.....	85

Tablo 6.14(a) Problem bölgesinde $x= 0.15$ ve $y=0.15$ koordinatında -1 nC'luk noktasal yük, (b) Problem bölgesinde $x= 0.02$ ve $y=0.15$ koordinatında 1 nC'luk noktasal yük, bulunan eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin çözümü.....	86
--	----

SİMGELER LİSTESİ

F	: Kuvvet (N).
Q	: Elektrik Yüğü (C).
W	: Enerji (J).
ϵ	: Dielektrik sabiti.
D	: Elektrik akı yoğunluğu (C/m ²).
E	: Elektrik alan şiddeti (V/m).
ρ	: Yüğü yoğunluğu.
Δ	: Dirac delta fonksiyonu.
u	: Potansiyel (V).
q	: Potansiyelin normale göre türevi.
u^*	: Laplace denkleminin temel çözümü.
q^*	: Temel çözümün normale göre türevi.
N_1, N_2	: Geometrik şekil fonksiyonları.
x, y	: Global koordinat sistemi.
ξ, η	: Lokal koordinat sistemi.
w	: Ağırlık fonksiyonu.
H, G	: Etki katsayıları.
b	: Poisson sabiti.
d	: Bölge integrali.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

POISSON DENKLEMİ TİPİNDEKİ ELEKTRİK ALAN PROBLEMLERİ İÇİN SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Hüseyin ERİŞTİ

Fırat Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Elektrik Eğitimi Anabilim Dalı

2005, Sayfa: 93

Bu çalışmada, yük yoğunluğuna sahip elektrik alan problemlerini tanımlayan Poisson denklemleri sınır elemanları yöntemiyle çözülmüştür. Problem bölgesinin sınırları, lineer sınır elemanlarıyla ayrıştırılmıştır. Yük yoğunluğunun uygulandığı problem bölgesi ise üçgen elemanlarla bölmelendirilmiştir. Bölge integrali içeren sınır integral denklemi çözülerek, sınırdaki bilinmeyen potansiyel (u) ve potansiyelin normale göre türevi (q) değerleri bulunmuştur. Daha sonra iç noktalardaki potansiyel değerleri hesaplanmıştır.

Ayrıca noktasal yük yoğunluğu olması durumunda çözümler yapılarak potansiyel dağılımları elde edilmiştir.

Poisson denklemiyle tanımlanan elektrik alan problemlerinin çözümü için MATLAB’da H-BEM isimli bir program yazılmıştır. H-BEM ile elde edilen sonuçlar, ELECTRO ve MATLAB PDE toolbox sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Poisson Denklemi, Sınır Elemanları Yöntemi, Elektrik Alanı, Potansiyel Dağılımı.

ABSTRACT

Master Thesis

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR ELECTRIC FIELD PROBLEMS DEFINED BY POISSON EQUATION

Hüseyin ERİŞTİ

Fırat University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Electrical Education

2005, Page: 93

In this study, Electric field problems with charge density and defined by Poisson equation were solved using Boundary Element Method (BEM). Boundaries of the problem are discretized by means of linear boundary elements. The problem region which has a charge density was subdivided into triangular elements. The boundary integral equation which includes the domain integral was solved, and unknown values of potential u and its normal derivative q on the boundary were determined. Then, the potential values of the internal points were calculated.

Furthermore, potential distributions for point charge were obtained.

For solving electric field problems defined by Poisson equation, software called H-BEM was developed using MATLAB. Results obtained from H-BEM compared with those obtained from ELECTRO and MATLAB PDE toolbox results.

Key Words: Poisson Equation, Boundary Element Method, Electric Field, Potential Distribution.

1. GİRİŞ

1.1. Genel Bilgi

Sınır elemanları yöntemi (Boundary Element Method, BEM), sınır değer problemlerinin çözümü için sayısal bir metottur. Sınır elemanları yöntemiyle, birçok mühendislik probleminin analizi sadece problem bölgesi sınırının bölmelendirilmesiyle rahat, hızlı ve hassas bir şekilde yapılmaktadır. Bu yöntemde, problem bölgesini tanımlayan kısmi diferansiyel denklemler, sınırların bölmelenmesiyle elde edilen sınır elemanlarının birbirine etkisinden oluşan etki integralleri yardımıyla çözülür. Sınır elemanları yöntemiyle yapılan analizlerde sonlu elemanlar yöntemi (Finite Element Method, FEM) ve sonlu farklar yönteminden (Finite Difference Method, FDM) farklı olarak problemin boyutsallığı bir derece indirgenir. Bu özelliğinden dolayı lineer denklem sistemleri, veri yapıları ve hesaplama işlemleri daha kısadır. Bu yöntemle açık alan ve karmaşık sınırlı problemlerin çözümü rahatlıkla yapılabilir (Gaul v.d., 2003).

Sınır elemanları yöntemi, bilim ve teknolojinin farklı branşlarındaki sınır değer problemlerinin çözümü için ortaya çıkarılan bir sayısal yöntemdir. Bu yöntem, sınır integral denklem yöntemi olarak bilinen integral denklem yönteminden ortaya çıkmıştır. Sınır integral denklem yönteminin aslında birbirine benzer gibi görülen farklı formülasyona sahip iki yaklaşımı vardır. Bunlardan biri, problemin fiziksel yönlerine bağlı olarak, bir kaynak yüzeyin sınır yüzeye dönüşümünü sağlayan “indirekt” yöntem olarak bilinir (Ekici, 2003). Bu yaklaşım geçmişte çoğunlukla akışkanlar mekaniği ve elektromanyetik alanları araştırmada kullanılmıştır. Günümüzde “direkt” yöntem olarak da bilinen sınır integral denklem formülasyonunun diğer bir çeşidi kullanılmaktadır. Bu yaklaşım, kısmi diferansiyel denklemlerin Green fonksiyon çözümlerini matematiksel yönleriyle incelemeye dayalıdır. Yöntemde geometrik sınırlar üzerinde tanımlanmış sınır şartları ile beraber verilen bir denklemin Green fonksiyonu bilindiğinde, böyle bir sınır değer problemi integral denklem haline getirilebilir ve sayısal olarak hesaplanabilir (Uyar, 2004).

Sınır elemanları yöntemiyle, elektrik alan ve manyetik alan problemlerinin analizinde doğru ve hızlı bir şekilde sayısal çözüm elde edilmesi sağlanır. Yöntem aynı zamanda elastisite, ısı iletimi, ısı transferi, akışkanlar mekaniği ve gerilme analizi gibi birçok mühendislik probleminin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır (Yıldırım, 1999).

Sınır elemanları yönteminde ilk önce, problem bölgesini temsil eden Laplace veya Poisson denkleminin sınır integral denklemi elde edilir. Sınırlar, üzerinde bilinmeyenlerin gösterildiği sınır elemanlarına ayrıştırıldıktan sonra bir lineer denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi, sadece sınır düğümlerindeki bilinmeyenlerden meydana gelmektedir. Buna karşılık, sistem matrisi doludur ve simetrik değildir. Ayrıca iç noktadaki sonuçların sadece istenen noktalarda hesaplanabilmesi, yöntemin diğer önemli bir özelliğidir (Yıldırım v.d., 2004).

Sınır Elemanları Yöntemi, diğer yöntemlerdeki zorlukları aşmak için geliştirilmiştir. Bu yöntemde, çözüm sadece sınırdan istendiğinden yöntem hareketli ve serbest yüzey problemleri için oldukça uygundur (Partridge v.d., 1992).

Laplace ve Poisson denkleminin analitik çözümü basit geometriler ve yük dağılımları için elde edilebilir. Fakat bu tip problemlerin çözümü oldukça sınırlı bir kullanım alanına sahiptir. Uygulamada sıkça kullanılan elektrik motorları ve özellikle de yüksek gerilim izolatör geometrileri, basit yük dağılımları ile analiz edilemez ve ayrıca analitik şekilde ifade edilemez (Lim, 1999).

Poisson denkleminde elde edilen sınır integral denkleminde Laplace denklemine ek olarak bir bölge integrali vardır. Poisson denkleminde elde edilen sınır integral denklemini sınır elemanları yöntemiyle çözmek için bazı yöntemler geliştirilmiştir. Bunlar, hücre yaklaşımı, DRM (Dual Reciprocity Method), MRM (Multiple Reciprocity Method) gibi yöntemlerdir (Brebbia v.d., 1984; Gümgüm, 2003)

1.2. Sınır Elemanları Yönteminin Tarihi Gelişimi

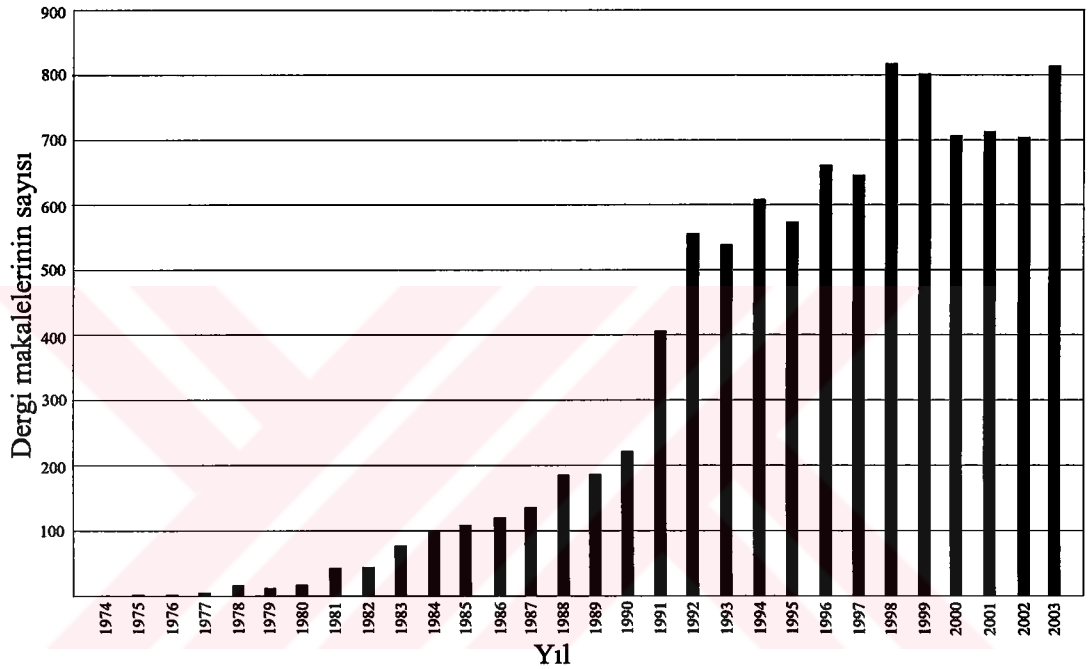
Somigliana (1885/86), Fredholm (1903), Kupradze (1965) 'nin çalışmaları sınır elemanları yönteminin gelişmesine öncülük etse de, Jaswon (1963) ve Symm (1963) 'ün yayınları yöntemin başlangıcı olarak düşünülebilir. Jaswon ve Symm bu çalışmalarında üçüncü Green özdeşliğini kullanarak potansiyel problemleri için direkt sınır integral yöntemini geliştirdiler. Bu yaklaşıma dayanarak Rizzo (1967) ve Cruse (1969), Somigliana'nın özdeşliğini kullanarak iki ve üç boyutlu elastostatik problemleri için sınır integral denklemleri yaklaşımlarını geliştirdi ve Laplace dönüşümünü kullanan geçici elastodinamikler için bir formül sundu.

Lachat ve Watson (1976) yöntemin sayısal yönleri ile ilgili önemli makaleler sundular. Çalışmalarında alt bölgeleri gösterdiler ve sınır integral denklemlerinde ortaya çıkan tekil integrallerin hesaplanması için algoritmalar tanımladılar. 1977 yılında Banerjee & Butterfield (1977), Brebbia & Dominguez (1977) ve Dominguez (1977) tarafından yapılan yayınlarla sınır elemanları yöntemi resmileşti ve takibindeki yılda (1978) yöntemin ilk kitabı Brebbia tarafından yayınlandı.

1980'in başlarından beri sınır elemanları yöntemi üzerine araştırma aktivitelerinde hızlı bir yükselme meydana geldi. Uygulamaların alanı yapı mekaniği, elektrodinamik ve akışkanlar mekaniği gibi diğer alanlarda hızlı bir şekilde yayıldı (Aydın, 2000).

Sınır elemanları yöntemini diğer sayısal yöntemlere göre objektif olarak değerlendirmek için online veritabanı '*Web of ScienceSM*' kullanarak bir araştırma yürütüldü. Anahtar kelime kullanılarak yapılan bu çalışmada '*Science Citation Index Expanded*' de bulunan dergi makale yayınlarının toplam sayısı birkaç sayısal yöntem için derlenildi. Tablo 1.1'de de görüldüğü gibi

bu araştırma sonucu açıkça işaret ediyor ki sonlu elemanlar yöntemi yaklaşık 66.000 kayıt ile çok yaygındır. Sonlu farklar yöntemi yaklaşık 19.000 kayıt ile (sonlu elemanlar yönteminin yaklaşık üçte biri) ikinci rağbette olan bir yöntemdir. Yaklaşık 10.000 kayıt ile üçüncü sırada bulunan sınır elemanları yöntemi yaklaşık olarak sonlu farklar yönteminin yarısı kadardır. Diğer yöntemlerden sonlu hacimler yöntemi (finite volume method, FVM) ve kollakasyon yöntemi (collocation method, CM)'nin ise çok az tercih edildiği görülmektedir. Bu araştırmadan, sınır elemanları yönteminin çok yönlülüğü ve yaygınlığının sonlu elemanlar ve sonlu farklar yöntemlerinin arkasında kaldığı sonucunu çıkarabiliriz.



Şekil 1.1 Sınır elemanları yönteminin konusu üzerine yayınlanan dergi makalelerinin yıllara göre dağılımı. (Araştırma tarihi: 3 mayıs 2004)

Tablo 1.1 Bibliyografik araştırma

Sayısal yöntem	Konu alanında araştırılan sözcük	Kayıtların sayısı
FEM	'Finite element' veya 'finite elements'	66.237
FDM	'Finite difference' veya 'finite differents'	19.531
BEM	'Boundary element' veya 'boundary elements'	10.126
FVM	'Finite volume method' veya 'finite volume methods'	1.695
CM	'Collacation method' veya 'collacation methods'	1.615

(Araştırma tarihi : 3 mayıs 2004)

Şekil 1.1'de bir anahtar kelime olarak dergi makalelerinde sınır elemanları yöntemi yayınları sayısının bir histogramı gösterilmiştir. Grafikten son yıllarda yaklaşık olarak her yıl 700-800 makale yayınlandığı gözlenebilir. Sonlu elemanlar yönteminde yaklaşık olarak her yıl 5.000 makale ve sonlu farklar için yaklaşık olarak her yıl 1.400 makale yayınlanmaktadır (Alexander v.d., 2005).

1.3. Mühendislik Problemlerinin Sayısal Çözümü

Mühendislik uygulamalarında sayısal simülasyonlar önemli bir role sahiptir. Bu durum deneylerin uygulama zorlukları ve pahalı olmasının yanı sıra bilgisayar simülasyonlarının daha hesaplı olması ve yazılım nitelikleri ile hesaplama gücündeki etkili avantajlara atfedilebilir. Bununla beraber sayısal simülasyonlarda deneylere ek yapmak veya tekrarlamakla simülasyondaki başarı, verim ve güven gibi gereksinimler daha güçlü duruma gelir. Bu gereksinimlerin yerine getirilip getirilmediği sadece simülasyon yapmak istediğimiz gerçek sistem için seçilecek fiziksel veya matematiksel modele bağlı değil aynı zamanda uygun simülasyon aracının seçimine (BEM, FEM, FDM, gibi) ve bu aracın kullanılmasıdaki başarıya bağlıdır.

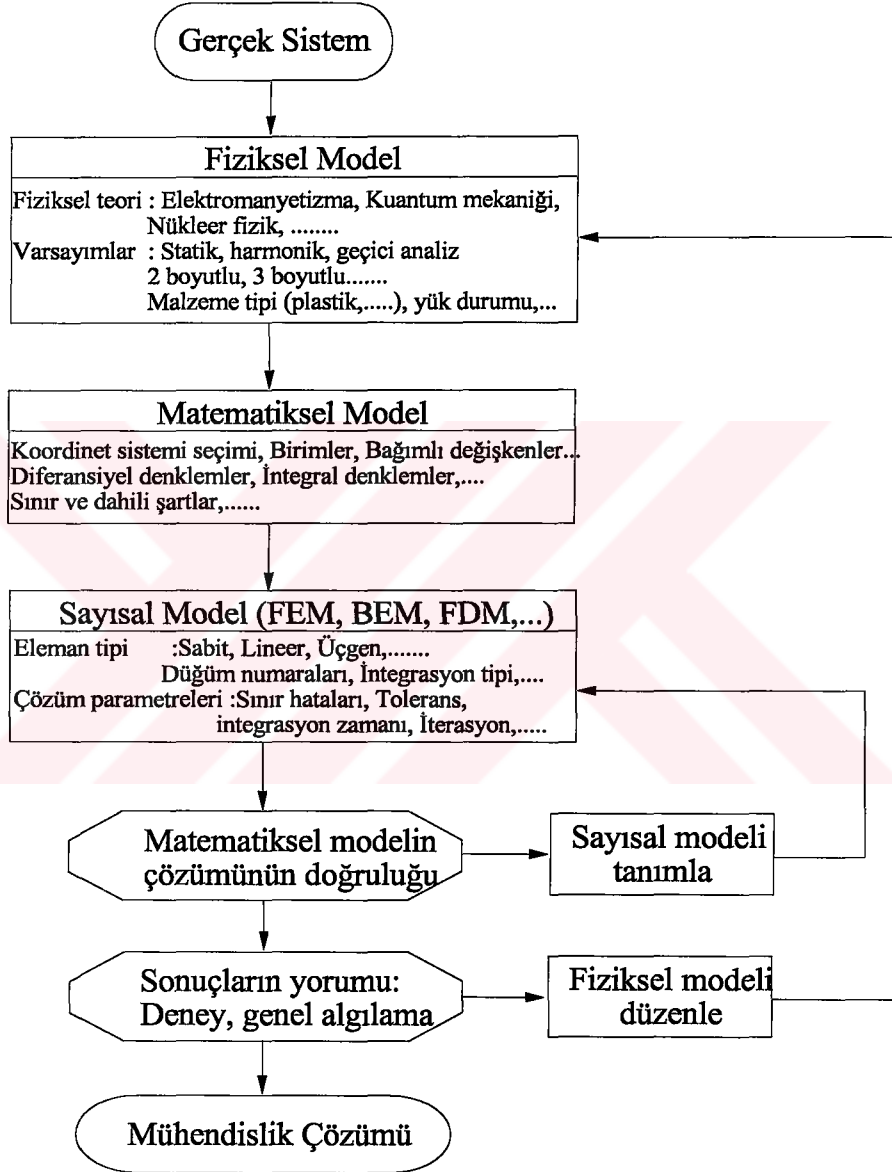
Şematik olarak Şekil 1.2, bir mühendislik problemin sayısal çözümünü elde etmek için takip edilmesi gereken adımları göstermektedir. İlk önce temel bir fiziksel teori seçilmesi gerekmektedir. Daha sonra ilgilenilen bütün özelliklerin yeterli doğrulukta tanımlanması için bu teoriye analizin tipi, problemin boyutu, malzeme türü, yük gibi veriler eklenir. Bu işlemler ile problemin fiziksel modeli oluşturulur.

Daha sonra bu fiziksel modelin uygun bir matematiksel modele dönüştürülmesi gerekir. Fiziksel model, matematiksel olarak birçok yol ile ifade edilebileceği için uygun bir koordinat sistemi, birimler veya bağımlı durum değişkenlerinin seçilmesi gibi ihtiyaçlara uyan bir yöntem seçilmesi gerekir. Bu durum, ek sınırlamalar ve sınır ile dahili şartların uygun matematiksel ifadesi olan diferansiyel veya integral denklemler vasıtasıyla problemin özel bir matematiksel modeli için yol gösterici olur.

BEM, FEM, FDM veya herhangi bir sayısal yöntem ile elde edebileceğimiz en iyi sonucu saptamak için bu modelleme süreci çok önemlidir. Böylece yapılacak olan program, sadece matematiksel denklem çözümlerinde bize yardım edeceği için modelleme sürecinde yapılan herhangi bir hata çözümde bir değişmez olarak kalacaktır. Bununla beraber iyi bir matematiksel modele sahip olduğumuzda uygun bir çözüm yönteminin seçimi hazırlık ve hesaplamaların minimize edilmesi açısından önemli bir konuma sahiptir.

Sayısal olarak bir problemi çözmek için kullanacağımız sayısal yöntemi tamamiyle anlamamız gerekir. Çözüm parametrelerinin bir dizisi seçilmesi gerekir. Bunların bazıları

çözüm sürecini hızlandırırken diğerleri bütünüyle mümkün bir çözümü yapmak için gerekli olabilir veya yanlış uygulandığında hatalı sonuçlar doğurabilir. Örneğin, sınır elemanları yöntemiyle dalga yayılımı problemlerinin çözümü için eleman tiplerini (üçgen, dörtgen, lineer veya parabolik şekil fonksiyonları), ağ yoğunluğu ve integrasyon zamanı için parametrelerin seçilmesi gerekir. Bu işlemlere sayısal modelleme adı verilir.



Şekil 1.2 Bir mühendislik probleminin simülasyonu için gerekli akış diyagramı

Sayısal analiz tamamlandığında sonuçlar analiz edilmeli, deney ve algılama ile değerlendirilmeli, diğer sayısal ve deneysel çözümlerle karşılaştırılmalıdır. İlk önce matematiksel modelin doğru bir çözüme ulaştığına emin olunması gerekir. Örneğin, dalga

yayılmı problemlerinin analizi için doğru matematiksel model seçilmiş olsa bile, uygunsuz zaman adımı veya boyutunun kullanımı istenilmeyen salınımlar ve sapmalar meydana getirebilir. Böylece hatalı sonuçlar ortaya çıkar. Bu durumda sayısal model süreci yeniden tanımlanmalı ve tekrarlanmalıdır.

Matematiksel modelin gerçekten doğru bir sonuca ulaştığına emin olduğunda simülasyon yapılması istenilen fiziksel değişkenin iyi bir tahmin olup olmadığını görmek için fiziksel bakış açısından bu sonucun yorumlanması gerekir. Eğer bu durum sağlanmaz ise fiziksel modelin düzenlenmesi veya tekrar edilmesi gerekir.

Sonuçta simülasyonu yapılmak istenen gerçek sistem için uygun bir mühendislik çözümü elde edilmiş olur. Böylece analiz süreci biter ve sonuçlar artık dizayn sürecinde kullanılabilir (Gaul v.d., 2003).

Bu çalışmanın amacı; Poisson denklemi ile tanımlanan elektrik alan problemlerinin sınır elemanları yöntemiyle analiz edilmesidir. Bu amaçla, hücre yaklaşımı yöntemi kullanılarak sınır integral denklemlerinde ortaya çıkan bölge integrali çözülecektir. Böylece hacimsel yük yoğunluğu altındaki problem bölgesinin potansiyel dağılımı elde edilecektir. Ayrıca noktasal yük yoğunluğunun etkisi de incelenecektir.

2. ELEKTRİK ALANLARI

2.1. Genel Bilgi

Fiziksel olayların anlatımında kolaylık sağlanması amacıyla alan kavramı geliştirilmiştir. İlgilenilen fiziksel olay için seçilen koordinat sisteminin belirli bir noktasına, aynı anda karşılık gelen fiziksel büyüklükler bir alan oluştururlar. Alan değişkeni vektörel veya skaler bir büyüklükte olabilir. Vektörel alana, yerküreye ait g vektörü ile tanımlanan kütle çekim alanını ve uzayın bir noktasında bulunan deneme yüküne etkiyen bir kuvvetin etkisini ile ortaya çıkan elektrik alanını örnek olarak verebilir. Televizyondaki hava raporlarında izlenen bir bölgedeki sıcaklık dağılımı da alanın skaler bir örneğidir. Alanı tanımlayan fiziksel büyüklükler zamanla değişebileceği gibi sabit değerli de olabilirler. Bir mıknatıs çubuğu saran, uzay bölgesinde bir manyetik alanın var olduğu söylenir. Elektrikle yüklü bir çubuğun çevresinde bir deneme yüküne bir kuvvet etkiyorsa, o noktada bir elektrik alanı vardır denilmektedir. Bu kuvvet, bu bölgede var olan yükler tarafından oluşturulmuştur.

Elektrik ve manyetik alan, elektromanyetizmanın en temel kavramlarıdır. Bu ikisini içine alıp inceleyen elektromanyetik radyasyon teorisinin gelişmesi ve pratik uygulamaları sonunda X ışınları tüpleri, katot ışınları tüpleri ve elektron mikroskobu gibi yararlı aletler yapılmıştır. Bu teoriye göre elektrik ve manyetik alanlar birbirlerine dik düzlemlerde dalga şeklinde salınırlarken bu düzlemlerin arakesiti boyunca da ışık hızı ile yayılırlar.

q_1 yükü, etrafındaki uzayda bir elektrik alanı oluşturur ve bu alana konan diğer bir q_2 üzerine F kuvveti uygular. Diğer taraftan da bu elektrik alanı, yükler arasındaki kuvvetlerin nedeni olarak düşünebilir. Bu durumda iki değişik problem ortaya çıkar:

- 1) Belirli bir yük dağılımının oluşturduğu elektrik alanının hesaplanması.
- 2) Yükler tarafından oluşturulan alanların, yükler üzerine uygulayacağı kuvvetlerin hesaplanması.

2.2. Elektrik Alan Vektörü

Herhangi bir bölgeye konmuş elektrik yüklü bir cisim üzerine, elektriksel kökenli bir kuvvet etkiyorsa bu noktada bir elektrik alan vardır denir. Kuvvetlerin elektrik kökenli olup olmadığını anlamak için deneme cismi yüklü veya yüksüz olduğunda üzerlerine etkiyen kuvvetler karşılaştırılır. Deneme cismi yüklü olduğunda ona etkiyen tüm kuvvetler elektriksel kökenlidir. Kuvvet vektörel bir büyüklük olduğundan, elektrik alanı da büyüklüğü ve doğrultusu olan vektörel bir büyüklüktür. Alanın her noktadaki E ile gösterilen değeri, bu noktaya konmuş olan pozitif bir deneme yüküne etkiyen F kuvvetinin deneme yükü değeri q_0 'a oranı olarak tanımlanır. Buna göre elektrik alan vektörü;

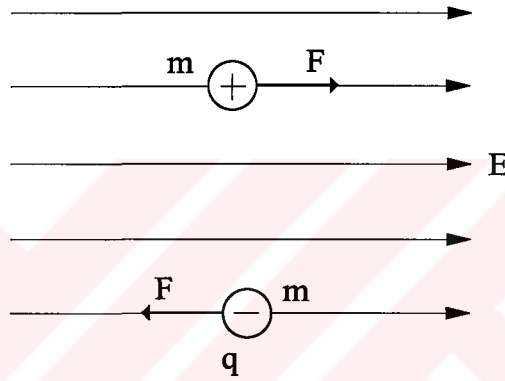
$$E = \frac{F}{q_0} \quad (2.1)$$

şeklindedir. Belli bir elektrik alanındaki pozitif yüklü cisim elektrik alan doğrultusu ve yönünde bir kuvvet etkisinde kalır. Negatif yüklü cisim ise elektrik alana ters yönde bir kuvvet etkisinde kalacaktır (Şekil 1.1). Elektrik alanının SI sistemindeki birimi N/C'dur.

Bir elektrik alanının her noktasında bir E alan vektörü vardır. Bu noktaya konulan küçük bir yüke etkiyen kuvvet denk.(1.1)'e göre,

$$F = q.E \quad (2.2)$$

olacaktır.



Şekil 2.1 Elektrik alanında artı ve eksi yüklere etkiyen kuvvetlerin yön ve doğrultuları

2.3. Elektrik Alanı Hesabı

Elektrik alanını oluşturan bütün yüklerin yer ve büyüklükleri bilinirse, istenilen bir noktadaki elektrik alan şiddeti, Coulomb yasasından yararlanarak hesaplanabilir. Bir noktasal yükten r uzaklıkta bulunan bir A noktasındaki elektrik alanını bulmak amacıyla A noktasına bir deneme q' yükü konulmuş olsun. Deneme yüküne etkiyen Coulomb kuvveti,

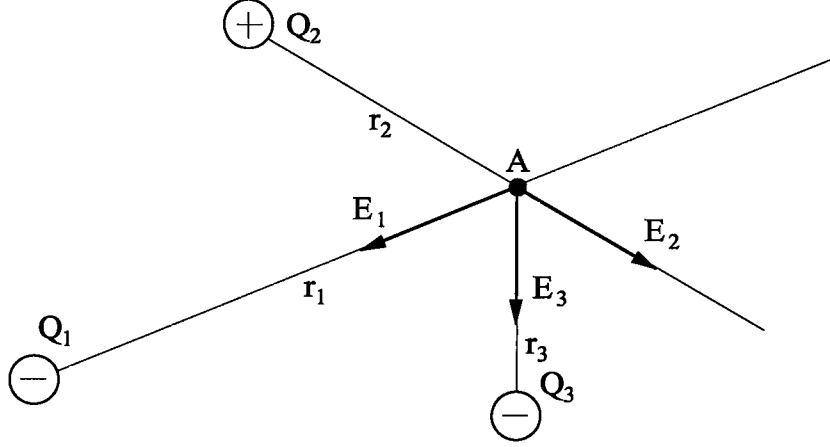
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.3)$$

olacaktır. Buna göre A'daki elektrik alan vektörü,

$$E = \frac{F}{q'} \quad (2.4)$$

şeklinde olur. Alanı oluşturan q yükü pozitif ise alan yönü q 'dan uzaklaşan yönde, negatif ise q 'ya doğrudur. Birden daha fazla yük Şekil 2.2'deki gibi dağılmışlarsa, bunların bir A

noktasında oluşturdıkları toplam elektrik alanı değeri E , her yük kendi başınaymış gibi kabul edilerek bu yüklere ait A noktasındaki elektrik alanları, bunların vektörel toplamı yapılarak bulunur.



Şekil 2.2 Elektrik alan vektörlerinin toplamı

Buna göre bileşke elektrik alanı değeri,

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_n \quad (2.5)$$

olacaktır. Elektrik yükleri sonlu büyüklükteki cisimler üzerinde dağılmışlarsa, bu yükler sonsuz küçük dq elemanına bölünebilirler ve bunların integrali alınarak bileşke elektrik alan şiddeti aşağıdaki bağıntılar yardımıyla hesaplanabilir:

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \quad (2.6)$$

$$E = \int dE \quad (2.7)$$

Noktasal yükler arasındaki Coulomb yasası, noktasal kütleler (m_1, m_2) arasındaki kütleçekimi veren Newton yasasına, aşağıda görüldüğü gibi oldukça benzerdir (γ evrensel kütle çekim sabiti).

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.8)$$

Diğer taraftan bir elektrik alan şiddetinin tanımı da kütleçekim alanının tanımıyla aynıdır.

$$G = \frac{F}{m_2} \quad (2.9)$$

2.4. Sürekli Yük Dağılımının Elektrik Alanı

Yüklerin bulundukları sistemden belli bir uzaklıktaki noktada oluşturdıkları etki incelenirken, yüklerin bu noktaya olan uzaklıklarına göre birbirlerine olan uzaklıklarının yakın olduğu varsayılabilir. Daha açık olarak birbirine yakın olan yüklerden oluşan sistem, bir hacim veya yüzey üzerinde sürekli biçimde dağılmış toplam yüke eşdeğer olarak ele alınabilir.

Sürekli yük dağılımı olan bir sistemin elektrik alanını hesaplamak için sistemi, her birinde Δq yüklerinin bulunduğu küçük parçalara ayırabiliriz. Bu küçük parçacığın Δq dan r uzaklıkta bir noktada oluşturduğu elektrik alanını hesaplayabiliriz. Böylece diğer bütün yüklü parçacıkların katkılarını da toplayarak istenilen noktadaki toplam elektrik alanını aşağıdaki gibi bulabiliriz:

$$\Delta q \text{ için,} \quad \Delta E = k \frac{dq}{r^2} \quad (2.10)$$

$$\text{Yük dağılımı için,} \quad E = k \sum_i \frac{dq}{r_i^2} = k \int \frac{dq}{r^2} \quad (2.11)$$

şeklindedir. Burada r ve r_i birim vektörleri göstermektedir. Eğer yükler arasındaki uzaklık elektrik alanı bulunacak noktaya göre çok küçükse son ifade,

$$E = k \lim_{\Delta q_i \rightarrow 0} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r^2} = k \int \frac{dq}{r^2} \quad (2.12)$$

şeklini alacaktır. Son bağıntıya ait hesaplamalar vektörel integral işlemi olduğundan yükün bir doğru boyunca veya bir hacime düzgün olarak dağıldığı varsayılır. Bu nedenle de tanımlamalar ve yük yoğunluğu kavramı kullanışlı olacaktır. Buna göre bir Q yükü bir V hacmine düzgün olarak dağılmışsa birim hacim başına düşen ρ_v yükü,

$$\rho_v = \frac{Q}{V} \quad (2.13)$$

ile tanımlanır. burada ρ_v 'nin birimi C/m^3 'dür. Bir Q yükü A yüzeyine düzgün olarak dağılmışsa birim yüzeye düşen yüzeysel yük yoğunluğu,

$$\rho_s = \frac{Q}{A} \quad (2.14)$$

dır. Burada ρ_s 'nin birimi C/m^2 'dir. Bir Q yükü ℓ uzunluğundaki bir doğru boyunca düzgün olarak dağılmışsa yük yoğunluğu,

$$\rho_\ell = \frac{Q}{\ell} \quad (2.15)$$

olur. Burada ρ_ℓ 'nin birimi C/m 'dir. Yük; bir hacim, yüzey veya doğru üzerinde düzgün olmayan bir şekilde dağılmışsa,

$$\rho_v = \frac{dQ}{dV} \quad \rho_s = \frac{dQ}{dA} \quad \rho_\ell = \frac{dQ}{d\ell} \quad (2.16)$$

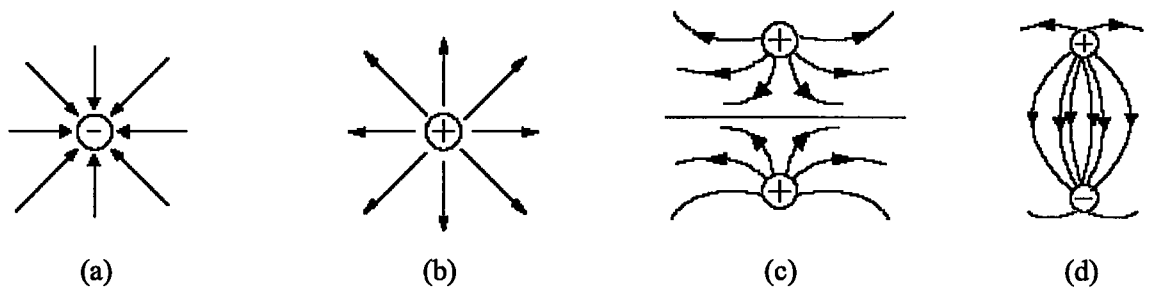
olarak yazılır.

2.5. Elektrik Alan Çizgileri

Vektörel bir büyüklük olan elektrik alanını, hidrodinamikteki sıvılara ait akım çizgilerine benzer şekilde gösterebiliriz. Elektrik alan çizgilerini gözümüzde canlandırabilmek için, yönü her noktada elektrik alan vektörüyle aynı doğrultulu eğriler çizebiliriz. Elektrik alan çizgileri denilen bu çizgiler, uzayın herhangi bir bölgesinde elektrik alanına aşağıdaki gibi bağlıdır;

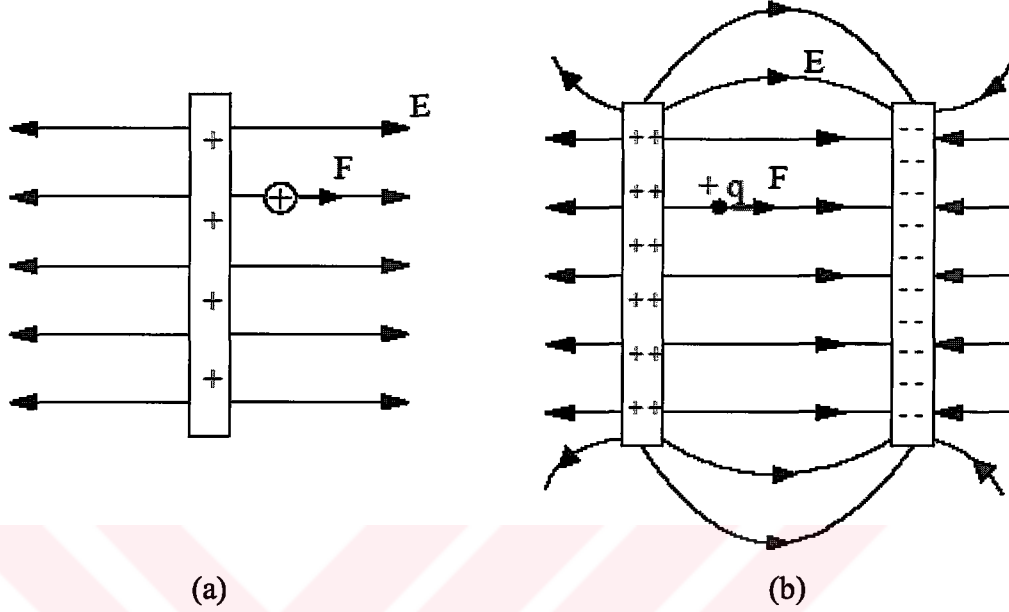
- E alan vektörü elektrik alan çizgisine teğettir.
- Alan çizgilerine dik birim yüzeyden geçen çizgilerin sayısı, o bölgedeki elektrik alan şiddeti ile orantılıdır. Böylece, alan çizgileri birbirlerine yakınsa E alanı büyük, uzak olduğunda da küçüktür. Alan düzgün olursa kuvvet çizgileri paralel olarak gösterilir.

Genelde elektrik alanına ait kuvvet çizgileri, uzayın verilen bir bölgesinde alanın nasıl değiştiğini resim şeklinde gösterir. Bazı örnek alanlar Şekil 2.3.a.b.c.d'de gösterilmiştir. Elektrik alan çizgileri sürekli değildir, bir pozitif yükten çıkarlar ve negatif yükte son bulurlar. Bunun nedeni yüklü bir iletken içinde yükün ve alanın olmamasıdır. Şekil 2.4'de pozitif yüklü düzgün bir tabakanın elektrik alan çizgileri gösterilmiştir.



Şekil 2.3 Bazı örnek elektrik alanları

Böyle bir tabakanın önünde serbest bırakılan pozitif bir deneme yükü levhaya dik bir çizgi üzerinde ondan uzaklaşır.



Şekil 2.4 (a) Pozitif yüklü bir tabakanın elektrik alan çizgileri.

(b) Zıt yüklü levhalar arasındaki elektrik alan çizgileri

Şekil 4.a'da zıt yüklü düzlem iki paralel levha arasındaki alan görülmektedir. Plakalar arasındaki alan düzgündür, fakat levhaların dış yüzlerine doğru alanın düzgünlüğü bozulur. Düzgün elektrik alanı, her yerde şiddeti ve doğrultusu aynı olan bir alandır. Düzgün alan paralel çizgilerle gösterilir.

Elektrik alanının iletken bir yüzeye teğet bileşeni olamaz. Eğer böyle olsaydı, iletken içindeki elektrik yükleri hemen harekete geçerdі ve o zaman elektrostatik konusu olmazdı. Buna göre, elektrik alan çizgilerinin daima bir iletkenin yüzeyine dik olarak çıkması ve ona dik olarak yaklaşması gerekmektedir. İletken bir madde içinde elektrik alan çizgileri olamaz.

Düzgün bir E elektrik alanının, kendisine dik bir S yüzeyinden geçirebileceği alan çizgisi sayısı N,

$$N = \epsilon_0 E S \quad (2.17)$$

olur. Bu bağıntıyı, merkezinde bir q yükü bulunan r yarıçaplı küreye uygularsak,

$$N = \epsilon_0 E S = \frac{1}{4\pi r^2} q 4\pi r^2 = q \quad (2.18)$$

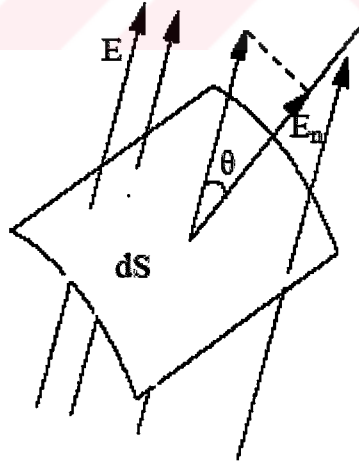
elde edilir. Denk.(2.18) ile kürenin yüzeyinden geçen toplam elektrik alan çizgisi sayısını buluruz. Bu sayı kürenin yarıçapına bağlı değildir, dolayısıyla yükü merkezde olan her küreden aynı sayıda kuvvet çizgisi geçer. Diğer taraftan kuvvet çizgileri hiç bir zaman kesişmezler. Eğer elektrik alan çizgileri yüzeye dik değilse, elektrik alanıyla dS yüzeyinin normali arasında θ açısı varsa bu sonlu yüzeyden geçen toplam elektrik alan çizgi sayısı,

$$N = E dS \cos\theta \quad (2.19)$$

olur. $1/\epsilon_0 = 36\pi \cdot 10^9$ olduğundan, denk.(2.13)'e göre bir Coulomb'luk pozitif yükten $36\pi \cdot 10^9$ sayısı kadar alan çizgisi çıkar.

2.6. Gauss Yasası

İçinde $(+Q)$ yükü bulunan bir küresel yüzeyden geçen elektrik alan kuvvet çizgilerinin N toplam sayısının, sayıca Q 'ya eşit olduğunu daha önce göstermiştik. Gauss yasası bu ifadenin genelleştirilmiş şeklidir. Gauss yasasına göre, cebirsel toplamı $+Q$ olan bir yük dağılımı kapalı bir yüzey içine kapatılmış olsun. Bu yüzeyin bir yüzey elemanı dS 'i gösterelim (Şekil 2.5). Buradaki E alan vektörü bütün yük dağılımı nedeniyle A noktasındaki alan şiddetidir ve yüzey elemanına normal ile bir θ açısı yapmaktadır. Bu yüzey elemanından geçen elektrik alan kuvvet çizgisi sayısı,



Şekil 2.5 Birim yüzey elemanından geçen çizgi sayısı

$$dN = \epsilon_0 (E \cos\theta) dS = \epsilon_0 E_n dS \quad (2.20)$$

ve kapalı yüzeyden geçen toplam elektrik kuvvet çizgisi sayısı,

$$N = \oint dN = \epsilon_0 \oint E_n dS \quad (2.21)$$

olur. Daha önce $N = Q = \sum Q$ olduğunu göstermiştik. Böylece,

$$\epsilon_0 \oint E dS \cos \theta = \epsilon_0 \oint E_n dS = \sum Q \quad (2.22)$$

$$\phi = \oint E_n dS \quad (2.23)$$

ve ϕ 'ye elektrik alan şiddeti akısı denildiğinden son eşitlik,

$$\phi = \oint E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum Q \quad (2.24)$$

olarak elde edilir. Gauss tarafından verilen bu bağıntı elektromanyetizmanın dört temel yasasından biridir. Gauss yasasına göre; herhangi bir kapalı yüzeyden çıkan toplam akı, bu kapalı yüzey içindeki net elektrik yükünün $1/\epsilon_0$ katına eşittir.

2.7. Dielektrik Sertlik

Bir yalıtkan veya dielektrik, içinde bir elektrik alanının etkisi altında devamlı olarak hareketli serbest yüklerin bulunmadığı bir maddedir. Bununla birlikte, her dielektriğin (yalıtkanın) bu özelliğini kaybedip bir iletken haline geldiği limit bir elektrik alan değeri vardır. Bir yalıtkanın, özelliği bozulmadan dayanabileceği maksimum elektrik alan şiddetine onun dielektrik (yalıtkanlık) sertliği denir. Örnek olarak, normal şartlardaki havanın dielektrik sertliği $E_m = 3 \cdot 10^6$ N/C'dur, oysa cam için bu değer iki veya üç misli daha fazladır. Buna göre 1 cm yarıçaplı bir kürenin hava ortamında tutabileceği maksimum yük miktarını belirleyen yüzeysel yük yoğunluğu,

$$\rho_s = \epsilon_0 E_m = \frac{3 \cdot 10^6}{36\pi \cdot 10^9} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$$

olarak bulunur. Böylece bu kürenin tutabileceği maksimum yük miktarı da,

$$Q = 4\pi a^2 \rho_s = 3,4 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

olarak hesaplanır. Gerçekte, hava içinde bir iletkenin diğerine kıvılcım atlamasına ait şartlar $E_m = 3 \cdot 10^6$ N/C değeri ile sınırlanamaz, bu şartlar çok daha karmaşıktır.

2.8. Poisson ve Laplace Denklemleri

Gauss kanunu doğrusal bir ortamda ifade edilebilir. Bu durumda $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ iken,

$$\nabla(\epsilon \vec{E}) = \rho_v \quad (2.25)$$

yazılabilir. Burada ρ_v hacimsel yük yoğunluğudur. Bu eşitlikte $\vec{E} = -\nabla V$ yerine konularak,

$$\nabla(-\epsilon \nabla V) = \rho_v \quad (2.26)$$

elde edilir ve bu denklem vektör özdeşliği kullanılarak,

$$\epsilon \nabla^2 V + \nabla V \nabla \epsilon = -\rho_v \quad (2.27)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklem, V potansiyel fonksiyonu ve ρ_v hacim yük yoğunluğu içeren ikinci dereceden kısmi bir diferansiyel eşitliktir. Bu eşitlik, sınır şartları ve ρ_v ile ϵ 'nin fonksiyonel bağımlılığı bilinirse çözülebilir.

Bununla beraber, eğer homojen bir ortamda (ϵ sabit olduğunda) öncelikle denk.(2.27) eşitliğinin çözümü ile ilgileniliyorsa, $\nabla \epsilon = 0$ olduğuna göre denk.(2.27),

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (2.28)$$

olur. Bu eşitlik Poisson denklemi olarak adlandırılır ve bir bölgede lokal yük dağılımına bağlı potansiyel dağılımını ifade etmektedir.

Elektrostatikte iletkenlerin yüzeyindeki yük dağılımlarını içeren bazı problemler vardır. Bu durumlarda, ilgili bölgede çoğu noktalarda hacim yük yoğunluğu sıfırdır. Böylece ρ_v 'nin olmadığı bölgede denk.(2.28),

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2.29)$$

olur ve böylece denk.(2.29) Laplace denklemi olarak adlandırılır.

2.9. Elektriksel Potansiyel

Elektrik yüklü bir çubuk çevresindeki elektrik alan, vektörel bir büyüklük olan alan vektörü E ile olduğu gibi, skaler bir büyüklük olan elektriksel potansiyel V ile de belirlenir. Bu iki büyüklük arasında yakın bir ilişki vardır. Problemin çözümünde hangisinin kullanılacağı, hangi büyüklüğün probleme uygun olduğuna bağlıdır.

A ve B noktaları arasındaki potansiyel farkı, elektrik alanı içine konulmuş q_0 deneme yükünün A noktasından B noktasına, denge durumunu koruyarak giderken, yapılan iş olarak tanımlanır. Dolayısıyla elektriksel potansiyel farkı,

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} \quad (2.30)$$

ile verilir. Yapılan W_{AB} işi pozitif, negatif veya sıfır olabilir. Bu durumlarda, B noktasının potansiyeli A noktasının potansiyeline göre sırasıyla, büyüktür, küçüktür ve aynıdır.

SI sisteminde potansiyel birimi denk.(2.30)'dan da görüleceği gibi, Joule/Coulomb'dur. Pratikte bu orana özel bir isim verilir: Volt (V).

$$1 \text{ Volt} = 1 \text{ Joule} / 1 \text{ Coulomb}$$

Genel olarak potansiyel farkının tanımlandığı A noktası, bütün yüklerde sonsuz uzakta seçilip, o noktadaki potansiyel de keyfi olarak sıfır kabul edilir. Dolayısıyla denk.(2.30)'da $V_A=0$ olduğundan B noktasındaki potansiyel,

$$V = \frac{W}{q_0} \quad (2.31)$$

şeklinde yazılır.

Potansiyel farkının tanımında kullandığımız W_{AB} ve potansiyel farkının kendisi (V_B-V_A), deneme yükünün A ve B noktaları arasında izlediği yola bağlı değildir. Potansiyelin izlenen yoldan bağımsız olması, bütün korunumlu alanlar için geçerlidir. Eğer böyle olmasaydı, B noktasının elektriksel (referans noktası A'nın potansiyeline göre) potansiyeli tek değerli olarak tanımlanmaz ve potansiyel kavramı bütün yararlılığını kaybederdi.

Elektrik potansiyelleri, birbirine eşit noktaların oluşturduğu geometrik yere eşpotansiyel yüzey denir. Her biri elektriksel potansiyelin değişik değerine sahip eşpotansiyel yüzeyler, elektrik alanının uzayın belirli bir bölgesinde açık bir şekilde anlaşılmasına imkan sağlar.

2.10. Potansiyel ve Elektrik Alanı

A ve B, düzgün bir elektrik alanı içinde bulunan iki nokta olsun. Şekil 2.6'da görüldüğü gibi, A noktasının B noktasından alan doğrultusu boyunca d kadar uzakta bulunduğu ve elektrik alanını herhangi bir yük sisteminin oluşturduğunu kabul edelim. Pozitif bir deneme yükünün " q_0 ", A noktasından B noktasına kadar, AB doğrultusu boyunca bir dış kuvvet etkisiyle ivmesiz olarak yer değiştirdiğini düşünelim.

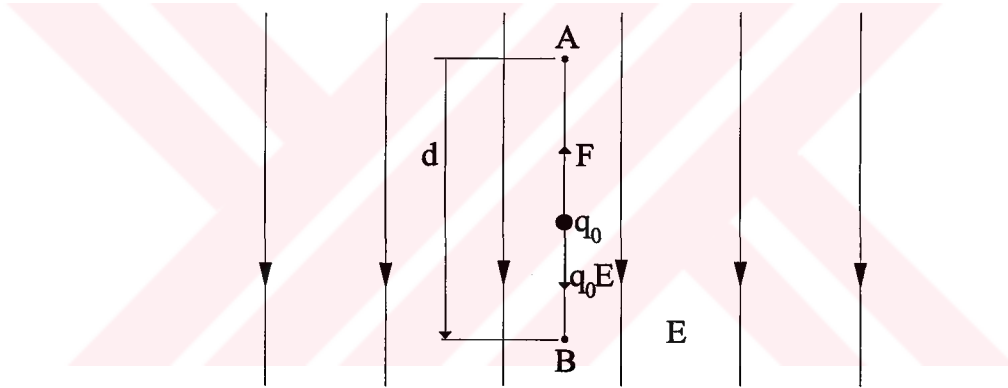
Yük üzerine etkin olan elektriksel kuvvet $q_0 E$ olup aşağıya doğru yönelmiştir. Daha önce belirttiğimiz gibi, yükü hareket ettirmek için, yönü elektrik kuvvetinin yönünün tersi şiddeti elektrik kuvvetinin şiddetinin aynısı olan, bir dış kuvvetin ettiğini düşünelim. Dış kuvvetin yaptığı iş,

$$W_{AB} = F d = q_0 E d \quad (2.32)$$

şeklindedir. Bu bağıntıyı denk.(2.30)'da yerine koyarsak,

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = E d \quad (2.33)$$

elde edilir. Bu eşitlik özel olarak bu basit durum için potansiyel farkı ve elektrik alanı arasındaki ilişkiyi verir. Buradan SI birim sistemi içinde, elektrik alanının diğer bir biriminin Volt/metre olduğu anlaşılır.

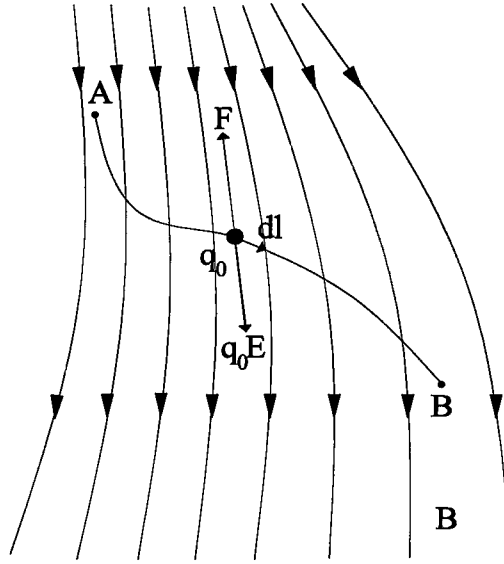


Şekil 2.6 Düzgün elektrik alanı içerisinde q_0 deneme yükünün hareketi

Şekil 2.6'daki B noktası, A noktasına göre daha yüksek bir potansiyeldedir. Bu beklenen durumdur. Çünkü dış kuvvet, deneme yükünü A noktasından B noktasına götürmek için pozitif bir iş yapmıştır. Bu durum yer çekimi alanında, bir taş parçasını bir noktadan diğer bir noktaya yükseltmek için pozitif bir iş yapılmasına benzemektedir.

Eğer dış kuvvetin etkisi altında deneme yükü AB yolu üzerinde bir $d\ell$ kadar yer değiştiriyorsa, yapılan iş, $F.d\ell$ 'dir. Deneme yükünün A noktasından B noktasına kadar gitmesi için yapılan iş, tüm yol üzerinde sonsuz küçük yol elemanları boyunca yapılan işlerin toplamına (integrasyonuna) eşittir. Toplam iş,

$$W_{AB} = \int_A^B F d\ell = -q_0 \int_A^B E d\ell \quad (2.34)$$



Şekil 2.7 Düzgün olmayan elektriksel alan içerisinde q_0 deneme yükünün hareketi

şeklinde. Bu işleme çizgisel integrasyon denir. Anlaşılacağı gibi, dış kuvvet yerine $-q_0 E$ konulmuştur. Bu bağıntı denk.(2.30)'da yerine konulursa,

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = - \int_A^B E d\ell \quad (2.35)$$

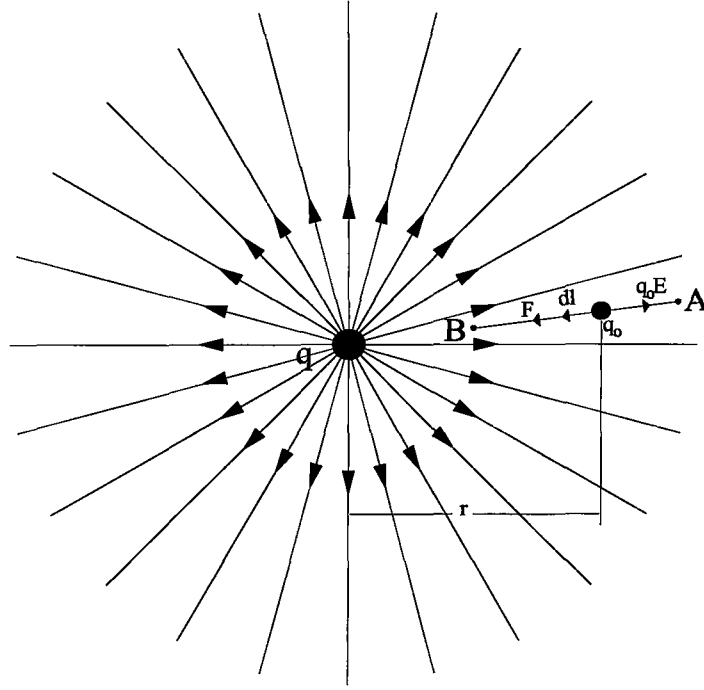
elde edilir. Eğer A noktası sonsuz uzakta alınır ve potansiyelin sonsuzdaki değeri sıfır kabul edilirse B noktasının potansiyeli,

$$V = - \int_{\infty}^B E d\ell \quad (2.36)$$

ile verilir. Bu iki eşitlik bize iki nokta arasındaki potansiyel farkını veya herhangi bir noktadaki potansiyelin değerini hesaplama imkanı sağlar. Ancak, E alanının her noktada bilinmesi zorunludur.

2.11. Noktasal Yükün Oluşturduğu Potansiyel

Şekil 2.8'de, izole edilmiş noktasal bir yükün yakınında bulunan A ve B noktaları gösterilmiştir. Kolaylık sağlaması için, A, B ve q 'nın aynı bir doğru üzerinde bulunduğunu kabul edilirse bir q_0 deneme yükünün radyal doğrultuda A noktasından B noktasına ivmesiz olarak yer değiştirdiği kabul edilerek, bu iki nokta arasındaki potansiyel farkı aşağıdaki biçimde hesaplanır.



Şekil 2.8 Pozitif bir q yükünün çevresinde oluşturduğu elektriksel alan

Şekil 2.8’de yol boyunca E daima sağa, $d\ell$ ise yer değiştirme doğrultusu olan sola yönelmiştir. Bu nedenle,

$$E d\ell = E \cos(180^\circ) d\ell = -E d\ell \quad (2.37)$$

olur. Ancak sola doğru yerleştirildiğinde, azalan yarıçap yönünde hareket edildiğinden,

$$d\ell = -dr \quad (2.38)$$

eşitliği sağlanır. Bu iki sonuç birleştirilirse,

$$E d\ell = E dr \quad (2.39)$$

bulunur. Bu bağıntıyı denk.(2.35)’de yerine yazıldığında,

$$V_B - V_A = \frac{W_{AB}}{q_0} = - \int_A^B E d\ell = - \int_{r_A}^{r_B} E dr \quad (2.40)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (2.41)$$

olduğuna göre denk.(2.40)'dan

$$V_B - V_A = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (2.42)$$

sonucu elde edilir.

Referans noktası A, sonsuzda seçilerek ($r_A \rightarrow \infty$) bu noktada V_A potansiyeli sıfır olarak kabul edilir. B indisini de göz önüne almadan potansiyel,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.43)$$

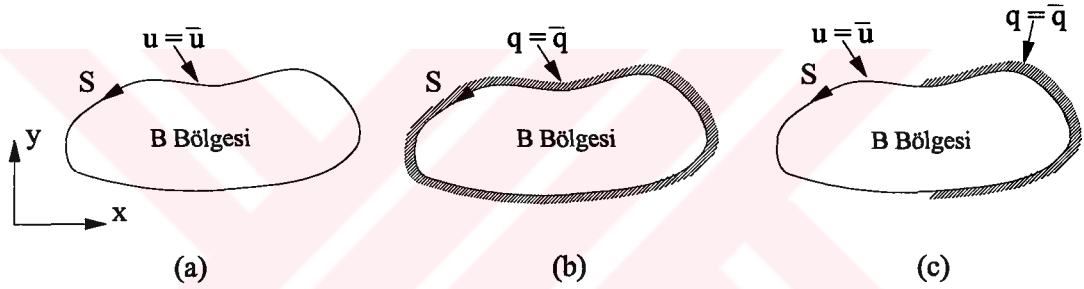
şeklinde yazılır. Elde edilen bu denklem, nokta bir yükün oluşturduğu eşpotansiyel yüzeylerin aynı merkezli küre yüzeyleri olduğunu gösterir (Yalçın, 1991).

3. SINIR İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Mühendislik uygulamalarında birçok problemler bölgeler halindedir. Bu problemlerin sayısal analizinde karşılaşılan diferansiyel denklemler Poisson denklemi veya onun homojen şekli olan Laplace denklemi tipindedir. Laplace veya Poisson denklemlerine ağırlıklı artıklar yöntemi ve Green teoremi uygulanması sonucunda sınır integral denklemleri elde edilir.

3.1. Sınır Şartları

Sınır elemanları yöntemiyle potansiyel dağılımı problemlerinin analizinin yapılmasında, bölge sınırı üzerinde tanımlı fiziki değerlere göre hesaplamalar yapılır. Bu fiziki değerler potansiyel ve potansiyelin normale göre türevidir (akı). Bu fiziki değerlerin sınır üzerindeki durumlarına göre problem bölgesi Dirichlet tipi, Neumann tipi veya karışık tipi sınır şartı ile tanımlanır.



Şekil 3.1 (a) Dirichlet tipi sınır şartı, (b) Neumann tipi sınır şartı, (c) Karışık tip sınır şartı

İncelenen problem bölgesinin sınırı üzerinde sadece potansiyel değer ($u = \bar{u}$) tanımlı ise problem bölgesi Dirichlet tipi sınır şartı ile tanımlanır (Şekil 3.1.a). Aynı şekilde problem bölgesinin sınırı üzerinde sadece potansiyelin normale göre türevi değeri ($q = \bar{q}$) tanımlı ise problem bölgesi Neumann tipi sınır şartı ile tanımlanır (Şekil 3.1.b). Eğer problem bölgesinin sınırı üzerinde hem potansiyel değeri ($u = \bar{u}$) hem de potansiyelin normale göre türevi değeri ($q = \bar{q}$) tanımlı ise problem bölgesi karışık tip sınır şartı ile tanımlanır (Şekil 3.1.c) (Choi, 1989).

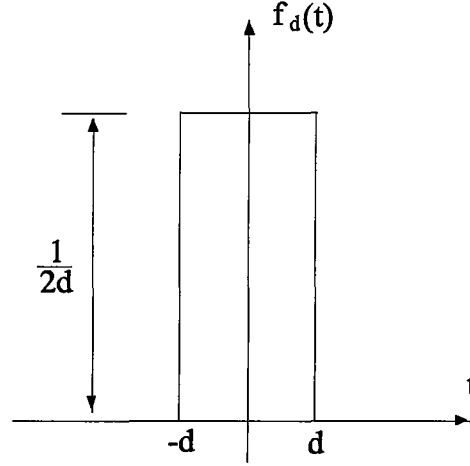
3.2. Temel Çözüm

Problem bölgesini ifade eden sınır integrallerinin çözümünü elde etmek için Poisson denkleminin homojen şekli olan Laplace denkleminin temel çözümünün bulunması gerekir. Temel çözüm, sınır eleman formülasyonunda kullanılan bir ağırlık fonksiyonudur.

Sonsuz bir bölgede herhangi bir 'i' noktası için yoğunlaştırılmış birim kaynağın (örneğin; sınır üzerindeki potansiyel değeri) etkisiyle tanımlanan temel çözüm,

$$\nabla^2 u + \Delta_i = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemde ‘ Δ_i ’ Dirac Delta fonksiyonudur.



Şekil 3.2 Dirac Delta fonksiyonu

Dirac Delta fonksiyonu geniş bir alana uygulanan fonksiyonun etki alanını inceler ve herhangi bir fonksiyonla çarpımının integrali,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_d(t) h(t) dt = \lim_{d \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} f_d(t) h(t) dt = h(0) \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda, Dirac Delta fonksiyonun herhangi bir fonksiyonla çarpımının integrali fonksiyonun tanımlanan noktasındaki değerine eşittir. Buna göre, ‘i’ noktası için,

$$\int_B u \nabla^2 u^* dB = \int_B u (-\Delta_i) dB = -u_i \quad (3.3)$$

elde edilebilir. Böylece denk.(3.1) ve denk.(3.3)’den faydalanılarak temel çözüm elde edilir ve iki ve üç boyutlu problem bölgeleri için,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (2 \text{ boyutlu durumda}) \quad (3.4)$$

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \quad (3 \text{ boyutlu durumda}) \quad (3.5)$$

şeklinde bulunur (Hunter v.d., 2002; DeFigueiredo, 1991).

3.3. Sınır İntegral Denklemi

Sınır elemanları yöntemiyle Laplace veya Poisson denklemi tipindeki potansiyel problemlerinin analizinde ilk önce, problem bölgesine ait bilinen sınır değerlerinin (u ve q) yardımıyla bilinmeyen sınır değerleri elde edilir. Daha sonra, bilinen ve elde edilen sınır değerleri ile istenilen bir iç noktadaki potansiyel değer elde edilir. Buna göre ilk önce sınırda, daha sonra iç noktada hesaplama yapılır. Bu hesaplamalarda kullanılan sınır integral denklemleri, sınır noktaları için sınır integral denklemi ve iç noktalar için sınır integral denklemi olarak iki farklı şekilde tanımlanır.

Laplace denklemine ait sınır integral denklemini elde etmek için, Laplace denklemine ağırlıklı artıklar ve Green teoreminin uygulanması gerekir. Buna göre, 'w' bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere,

$$\int_B (\nabla^2 u) w \, dB = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS - \int_B \nabla u \nabla w \, dS = 0 \quad (3.6)$$

elde edilir. Denk.(3.6) aynı zamanda sonlu elemanlar yöntemi için bir başlangıç denklemdir. Ağırlık fonksiyonu (w), temel çözümü temsil ederken, ağırlık fonksiyonunun normale göre türevini ($\partial u / \partial n$) ise q^* temsil etmektedir. Sınır elemanları yöntemine bir başlangıç denklemi türetmek için ise ikinci integral üzerinden tekrar bir Green teoremi uygulanmalıdır. Bu doğrultuda,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S \frac{\partial u}{\partial n} u^* \, dS - \int_B \nabla u \nabla u^* \, dS \\ 0 &= \int_S q u^* \, dS - \int_S u q^* \, dS + \int_B (\nabla^2 u^*) \, dB \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitliği elde edilir (Uyar, 2004). Bu denklem,

$$\int_B (\nabla^2 u^*) \, dB = \int_S u q^* \, dS - \int_S q u^* \, dS \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir.

Laplace denklemine uygulanan ağırlıklı artıklar ve Green teoreminin Poisson denklemine uygulanmasının sonucunda da sınır integral denklemi benzer şekilde elde edilir. Buna göre,

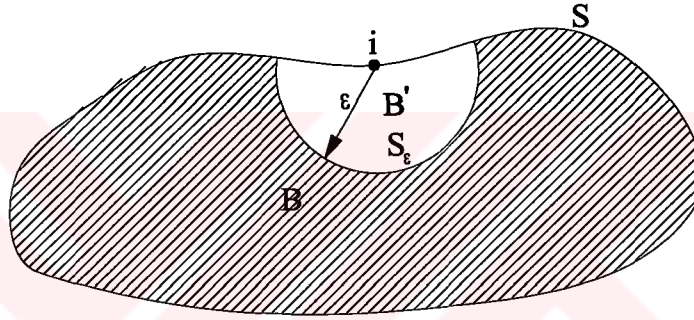
$$\int_B (\nabla^2 u - b) w \, dB = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} w \, dS - \int_B \nabla u \nabla w \, dS = 0 \quad (3.9)$$

elde edilir ve eşitliğin sağına ikinci kez Green teoreminin uygulanması sonucunda Poisson denklemi için sınır integral denklemi elde edilir (Beer, 1991):

$$\int_B (\nabla^2 u^*) \, dB - \int_B b u^* \, dB = \int_S u q^* \, dS - \int_S q u^* \, dS \quad (3.10)$$

3.3.1. Sınır Noktaları İçin Sınır İntegral Denklemi

Sınır noktalarındaki çözümler için gerekli sınır integral denkleminin elde edilmesinde Şekil.3.3’de görüldüğü gibi sınır üzerinde bir ‘i’ noktası etrafındaki ‘ε’ yarıçaplı, ‘S_ε’ sınırlı ‘B’ bölgesi dikkate alınır.



Şekil 3.3 Sınırdaki ‘i’ noktasının gösterimi

Denk.(3.8) ve denk.(3.10)’da eşitliğin sağında bulunan integral ifadeleri ‘ε’ yarıçapı sıfıra giderken limiti hesaplandığı göz önünde bulundurulduğunda,

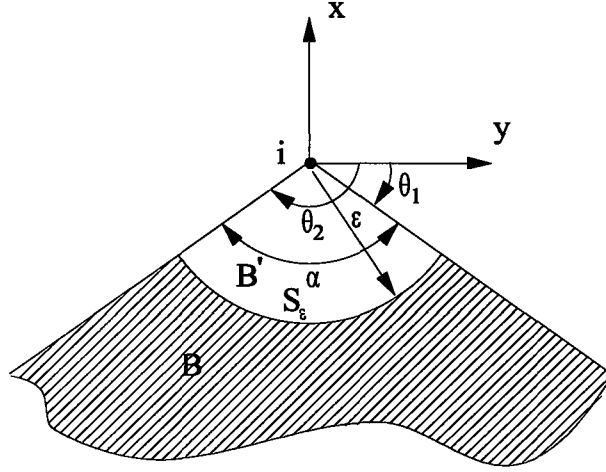
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \left[\frac{\partial u}{\partial n} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] dS + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon} \left[\frac{\partial u}{\partial n} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] dS \quad (3.11)$$

şeklinde ortaya çıkan denklemde, birinci limit ifadesi aşağıdaki dönüşümler kullanılarak, Şekil 3.4’e göre hesaplanır:

$$dS = \varepsilon d\theta$$

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} (-1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$



Şekil 3.4 Sınırdaki 'i' noktasının geometriksel durumu

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} u q^* dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} u \quad (3.12)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} q u^* dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-\ln \varepsilon}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} q \varepsilon d\theta \right) = 0 \quad (3.13)$$

Denk.(3.12)'de bulunan ifade tekil integrallerde ortaya çıkar ve

$$c_i = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (3.14)$$

şeklindeki katsayı ile tanımlanabilir. Ayrıca denk.(3.11)'deki ikinci integral ifadesinde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ olduğu için $S - S_\varepsilon \rightarrow S$ olacaktır:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S-S_\varepsilon} u q^* dS \right) = \int_S u q^* dS \quad (3.15)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{S-S_\varepsilon} q u^* dS \right) = \int_S q u^* dS \quad (3.16)$$

Laplace ve Poisson denklemlerinden elde edilen sınır integral denklemlerinde (denk.(3.8) ve denk.(3.10)) eşitliğin solunda bulunan birinci integral ifadeleri Dirac Delta fonksiyonunun özelliğiyle,

$$\int_B (\nabla^2 u^*) dB = - \int_B (\Delta_i) dB = 0 \quad (3.17)$$

sonucu elde edilir. Elde edilen bu çözümlerin denk.(3.8)'de yerine yazılmasıyla,

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS = \int_S q u^* dS \quad (3.18)$$

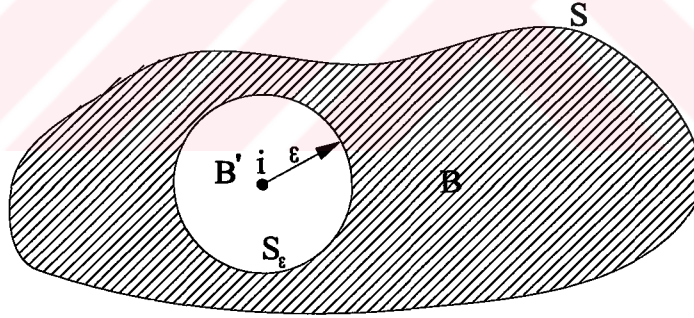
şeklinde Laplace denkleminde göre sınır noktaları için sınır integral denklemi ve denk.(3.10)'da yerine yazılmasıyla da,

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS + \int_B b u^* dB = \int_S q u^* dS \quad (3.19)$$

şeklinde Poisson denkleminde göre sınır noktaları için sınır integral denklemi elde edilir.

3.3.2. İç Nokta Formülasyonu

Problem bölgesi içindeki herhangi bir 'i' noktasının potansiyel değerinin hesaplanması için gerekli olan denklemi elde etmek için Şekil 3.5'de görüldüğü gibi 'B' problem bölgesi içerisindeki 'i' noktası etrafındaki 'ε' yarıçaplı ve 'S_ε' sınırlı 'B' problem bölgesi dikkate alınır.



Şekil 3.5 Problem bölgesi içerisindeki 'i' noktasının gösterimi

Problem bölgesi içindeki 'B' bölgesinin 'ε' yarıçapı sıfıra giderken limiti hesaplandığı göz önünde bulundurarak denk.(3.8) ve denk.(3.10)'da eşitliğin sağında bulunan integral ifadeleri,

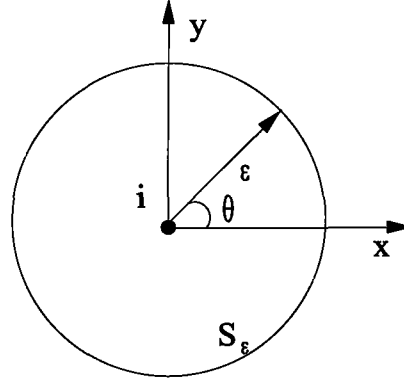
$$= \int_S \left[\frac{\partial u}{\partial n} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] dS + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} \left[\frac{\partial u}{\partial n} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial n} \right] dS \quad (3.20)$$

şeklinde yazılabilir. Denk.(3.20)'deki limit ifadesi,

$$dS = \varepsilon d\theta$$

$$u^* = -\frac{1}{2\pi} \ln(r)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} (-1) = \frac{1}{2\pi\varepsilon}$$



Şekil 3.6 Problem bölgesi içerisindeki 'i' noktasının geometrisel durumu

şeklindeki dönüşümlere ve Şekil 3.6'ya göre,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} u q^* dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \varepsilon d\theta = \frac{2\pi}{2\pi} u = u \quad (3.21)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} q u^* dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{-\ln \varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} q \varepsilon d\theta \right) = 0 \quad (3.22)$$

sonuçları elde edilir. Denk.(3.8) ve denk.(3.10)'da eşitliğin solunda bulunan integral ifadeleri yine denk.(3.17)'ye göre sıfıra eşittir. Böylece elde edilen sonuçların denk.(3.8)'de yerine yazılmasıyla, Laplace denkleminde göre iç noktalar için sınır integral denklemi elde edilir:

$$u_i = \int_S q u^* dS - \int_S u q^* dS \quad (3.23)$$

Benzer şekilde elde edilen sonuçların denk.(3.10)'da yerine yazılmasıyla, Poisson denkleminde göre iç noktalar için sınır integral denklemi elde edilir.

$$u_i = \int_S q u^* dS - \int_S u q^* dS - \int_B b u^* dB \quad (3.24)$$

3.4. Gauss Sayısal İntegrasyonu

Gauss sayısal integrasyon formülleri, kaynak noktası içermeyen sınır elemanları üzerindeki integrasyon için kullanılır. Eğer incelenmekte olan eleman kaynak noktası içeriyorsa integraller tekil olur. Bu durumda, ya analitik integrasyon (basit durumlar için) ya da logaritmik sayısal integrasyon formülleri kullanılmalıdır.

Gauss alan hesabı, kurallı integraller için doğru ve kullanımı basit olduğundan dolayı sayısal integrasyon işlemlerinde tercih edilmektedir. Ayrıca iç hücreler üzerindeki integrasyon için de Gauss sayısal integrasyonu kullanılmaktadır.

3.4.1. Bir Boyutlu Gauss Alan Hesabı

İki boyutlu problemlerde, bir boyutlu sınır elemanları üzerindeki integraller için bir boyutlu Gauss alan hesabı kullanılmaktadır. Her bir integral için,

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) w_i \quad (3.25)$$

yazılır. Burada n: integrasyon noktalarının sayısı, ξ_i : i noktasının lokal koordinatı ve w_i : ağırlık faktörüdür.

Tablo 3.1 Kurallı Gauss noktaları (apsisleri) ve ağırlık faktörleri

n	Apsisler, ξ_i	Ağırlık faktörleri, w_i
2	-0.5773502692 0.5773502692	1.0000000000 1.0000000000
3	± 0.7745966692 0.0000000000	0.5555555556 0.8888888888
4	± 0.8611363116 ± 0.3399810436	0.3478548551 0.6521451549
5	± 0.9061798459 ± 0.5384693101 0.0000000000	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888888
6	± 0.9324695142 ± 0.6612093865 ± 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346
7	± 0.9491079123 ± 0.7415311856 ± 0.4058451514 0.0000000000	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837
8	± 0.9602898565 ± 0.7966664774 ± 0.5255324099 ± 0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834

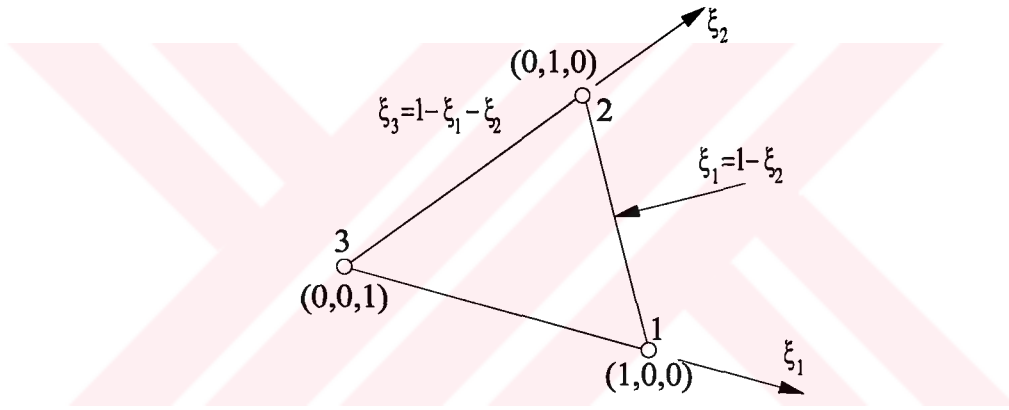
ξ_i değerleri ve w_i ağırlık faktörleri, sekiz noktaya kadar olan değerler için Tablo 4.1'de verilmiştir. Burada düğümler (apsisler) gerçekte Legendre polinomlarının kökleridir, ağırlık faktörleri ise bir denklem sisteminin çözümüyle elde edilmiştir (Mathews, 1992).

3.4.2. Üçgensel (Triangular) Bölgeler İçin İki Boyutu Gauss Alan Hesabı

Bir üçgen üzerinde sayısal integrasyon, Şekil 3.7'de gösterilen üçgensel koordinatlar (ξ_1 , ξ_2 , ξ_3) ile aşağıdaki denklem kullanılarak yapılır.

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-\xi_2} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=1}^n f(\xi_1^i, \xi_2^i, \xi_3^i) w_i \quad (3.26)$$

Burada n ; integrasyon noktalarının sayısı, ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 ; i ' integrasyon noktasının üçgensel koordinatları ve w_i , Gauss noktalarının ağırlık faktörleridir (Yıldırım, 1999).



Şekil 3.7 Üçgensel koordinatlar

Tablo 3.2 Üçgenler için Düzeltilmiş Gauss noktaları ve ağırlık faktörleri

n	i	ξ_1^i	ξ_2^i	ξ_3^i	w_i
1 (lineer)	1	1/3	1/3	1/3	1
2 (karesel)	1	1/2	1/2	0	1/3
	2	0	1/2	1/2	1/3
	3	1/2	0	1/2	1/3
4 (kübik)	1	1/3	1/3	1/3	-9/16
	2	3/5	1/5	1/5	25/48
	3	1/5	3/5	1/5	25/48
	4	1/5	1/5	3/5	25/48
7 (quintic)	1	0.33333333	0.33333333	0.33333333	0.22500000
	2	0.79742699	0.10128651	0.10128651	0.12593918
	3	0.10128651	0.79742699	0.10128651	0.12593918
	4	0.10128651	0.10128651	0.79742699	0.12593918
	5	0.05971587	0.47014206	0.47014206	0.13239415
	6	0.47014206	0.05971587	0.47014206	0.13239415
	7	0.47014206	0.47014206	0.05971587	0.13239415

4. SINIR ELEMANLARI YÖNTEMİ

Sınır elemanları yöntemi ile analiz edilen problemde, bölge sınırları keyfi olarak ayrıştırılır. Sınırlardaki her bir bölmeye sınır elemanı adı verilir. Sınırdaki elde edilen bu elemanlar üzerinde, etki integrallerinin hesaplanmasında referans alınan, aynı zamanda eleman üzerinde var olan ve hesaplanması gereken değerlerin bulunduğu noktalar mevcuttur. Sınırdaki bulunan bu noktalara genel olarak düğüm adı verilir (Yıldırım v.d., 2003).

Sınır elemanları yöntemiyle Poisson denklemi tipindeki problemlerin analizinde düğüm-eleman ilişkisi ve düğüm-bölge ilişkisi ile gerekli hesaplamalar yapılır. Buna göre sınır üzerindeki hesaplamalarda, sınırdaki her düğümün bütün elemanlarla ilişkisi incelenir. Böylece her bir düğüm-eleman ilişkisi yardımıyla çözüm elde edilir. Denk.(3.19)'da verilen sınır integral denklemindeki integraller,

$$\int_S q u^* dS = q_j G_{ij} \quad (4.1)$$

$$\int_S u q^* dS = u_j \hat{H}_{ij} \quad (4.2)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada 'i' düğüm noktası, 'j' ise sınırdaki elemandır. Bu denklemde $\hat{H}_{ij}$ ve G_{ij} katsayılarına, etki katsayıları (*influence coefficients*) adı verilir. Buna göre, sınır üzerinde N sayıda eleman bulunduğu göz önüne alınırsa, Denk.(3.19)'daki sınır integral denklemi,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j + d_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Her düğüm ve eleman ilişkisi ile ortaya çıkan $\hat{H}_{ij}$ ve G_{ij} katsayıları, $\hat{H}$ ve G matrisleriyle ifade edilebilir. Ayrıca $\hat{H}$ matrisinin köşegen terimlerine tekil integrallerde ortaya çıkan c_i katsayısı eklenebilir. Buna göre, ortaya çıkan yeni matris H ile gösterilirse,

$$H u + d = G q \quad (4.4)$$

sistemi elde edilir. Burada sınırdaki düğüm sayısı N ise H ve G ($N \times N$) boyutlu iki matris ve d bölge integrallerinin çözümü sonucunda ortaya çıkan ($N \times 1$) boyutlu matristir. Ayrıca u ve q ($N \times 1$) boyutlu vektörlerdir. Bu denklem sisteminin çözümü sonucunda sınırdaki bilinmeyen değerler elde edilir. Buna göre denk.(4.4)'deki sistemde bilinen değerler bir tarafa bilinmeyenlerse diğer tarafa taşınır. Bu durumda denklem,

$$A x = F \quad (4.5)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada x bilinmeyen u ve q değerlerini temsil eden $(N \times 1)$ boyutlu matrisi ifade eder. A , bilinmeyen u ve q değerlerine ait H ve G matris elemanlarını ifade eden $(N \times N)$ boyutlu matrisi gösterir. F ise bilinen u ve q değerlerinin kendilerine ait H ve G matris elemanlarının çarpım değeri ile d matris değerinin toplamını ifade eden $(N \times 1)$ boyutlu matristir.

İç noktadaki hesaplamalarda ise, belirlenen iç nokta ile bütün sınır elemanları arasındaki ilişki incelenir. Bu ilişki sonucunda denk.(3.24)'ün çözümü ile elde edilen sonuçlar sınırdaki N eleman bulunduğu göz önüne alınarak denk.(4.3)'teki terimler cinsinden yazılarak,

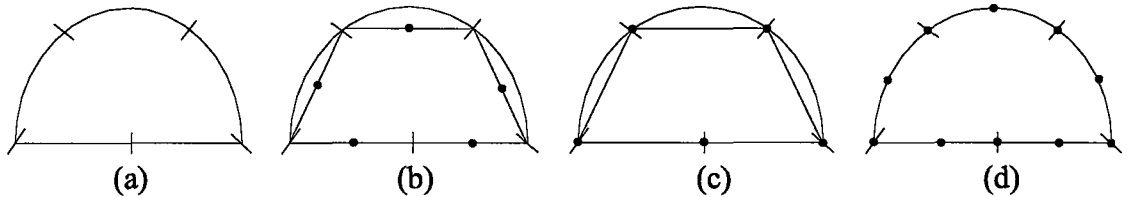
$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N H_{ij} u_j - d_i \quad (4.6)$$

sistemi elde edilir. Bu denklem,

$$u_i = G q + H u - d \quad (4.7)$$

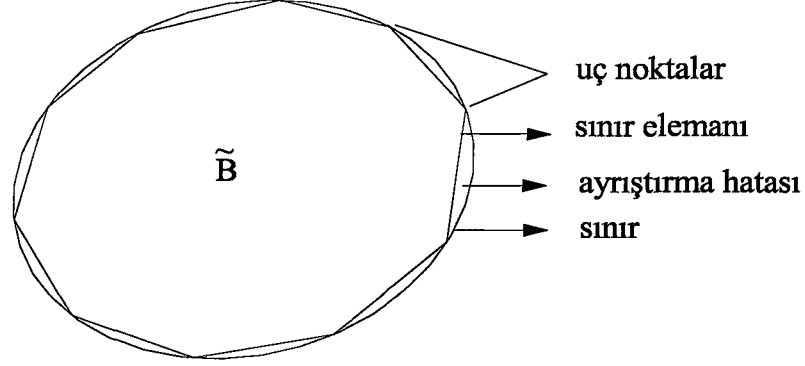
şeklinde matris sistemi ile yazılabilir. Bu denklemde H ve G , 'i' iç noktası ile sınırdaki bütün elemanlar arasındaki ilişki sonucunda ortaya çıkan $(1 \times N)$ boyutlu matris ve u ile q , sınırdaki bu elemanlar üzerindeki sınır değerlerini ifade eden $(N \times 1)$ boyutlu matristir. Ayrıca d , 'i' iç noktasına ait bölge integrallerin çözümüdür.

Bir eleman şekli için kullanılan şekil fonksiyonu ile eleman içindeki fiziksel değerlerin tanımı için kullanılan interpolasyon fonksiyonları göz önünde bulundurularak çeşitli sınır elemanları geliştirilmiştir. Bu elemanlar genel olarak; sabit, lineer ve parabolik elemanlardır. Buna göre, sabit elemanda bir düğüm bulunur ve bu düğüm de elemanın merkezindedir. Lineer elemanda ise iki düğüm bulunur ve bu düğümler elemanın uç noktalarındadır. Parabolik elemanda ise üç düğüm bulunur ve bu düğümlerin birisi elemanın merkezinde, diğer ikisi ise uç noktalarındadır (Yıldırım v.d., 2004).



Şekil 4.1 (a) Bölmelenmiş problem bölgesi, (b) Sabit eleman, (c) Lineer eleman, (d) Parabolik eleman

Ayrışımın yapıldığı kesim noktalarına sınır elemanının ‘uç noktaları’ adı verilir. Genellikle bir B bölgesinde sınır ayrışımı yapıldığında yaklaşık bir $\tilde{B}$ bölgesi ve yaklaşık bir $\tilde{S}_j$ sınırı meydana gelir. Dolayısıyla bu işlemler S sınırı ile yaklaşık $\tilde{S}_j$ sınırı arasında bir ayrıştırma hatası meydana getirecektir. Bu ayrıştırma hatasını en aza indirmek için doğru sınır elemanı seçilmelidir (Uyar, 2004).



Şekil 4.2 Sınır eleman ağının şematik gösterimi

Problem bölgesine ait sınır ve iç nokta hesaplamalarında gerekli H_{ij} ve G_{ij} etki katsayıları, üzerinde kaynak noktası bulunmayan sınır elemanları üzerindeki integrasyon (‘i’ noktasının ‘j’ elemanının üzerinde bulunmadığı durum) ve üzerinde kaynak noktası bulunan sınır elemanları üzerindeki integrasyon (‘i’ noktasının ‘j’ elemanı üzerinde bulunduğu) durum göz önünde bulundurularak elde edilir.

4.1. Sabit Elemanlar

Sabit eleman türünde, sınır üzerinde bulunan değerlerin eleman boyunca sabit bir değişime sahip olduğu kabul edilir ve bu sınır değerleri elemanın orta noktasında bulunan tek bir düğümün üzerinde tanımlanır.

Sabit elemana ait düğüm, düz bir elemanın orta noktasında bulunduğu için denk.(3.14)’deki α açısı π ’ye (180°) eşittir. Dolayısıyla sabit elemanda c_i katsayısı sürekli olarak,

$$c_i = \frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

dir. Buna göre sınır noktalarındaki hesaplamalar,

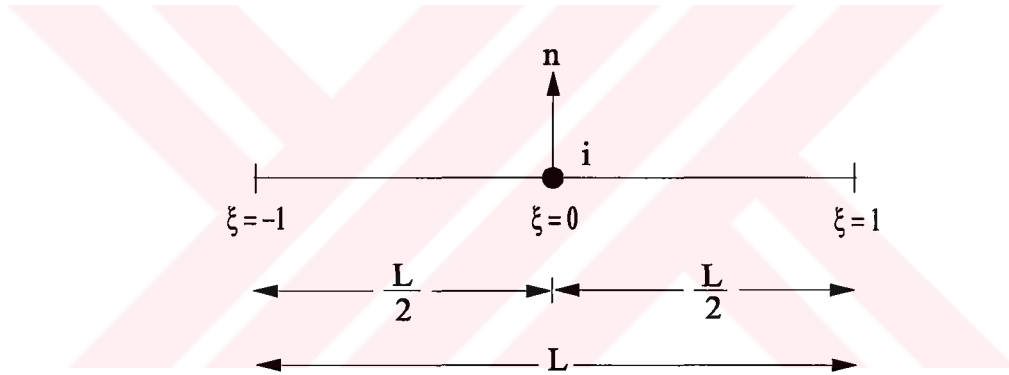
$$\frac{1}{2}u_i + \sum_{j=1}^N \hat{H}_{ij} u_j + d_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j \quad (4.8)$$

denkleminde göre yapılır. Ayrıca iç noktadaki hesaplamalar denk.(4.6)'ya göre yapılır:

$$u_i = \sum_{j=1}^N G_{ij} q_j - \sum_{j=1}^N H_{ij} u_j - d_i$$

4.1.1. Üzerinde Kaynak Noktası Bulunmayan Sabit Sınır Elemanları Üzerindeki İntegrasyon

Sınır elemanları yönteminde, sınır elemanı lokal koordinatlarda ifade edilmektedir. Eleman üzerindeki sayısal integrasyon noktaları da bu koordinatlara göre belirtilmiştir. Lokal koordinat sisteminde verilen bir eleman üzerindeki noktanın koordinatları, global koordinatlarda yazılabilir (Erişti, 2003).



Şekil 4.3 Sabit eleman koordinat sistemi

Sabit eleman üzerindeki herhangi bir noktanın global koordinat sistemine göre gösterimi;

$$x(\xi) = N_1 x_1 + N_2 x_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)x_2 \rightarrow x(\xi) = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\xi \quad (4.9)$$

$$y(\xi) = N_1 y_1 + N_2 y_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)y_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)y_2 \rightarrow y(\xi) = \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2}\xi \quad (4.10)$$

şeklinde ifade edilir. Sınır integrallerinin hesaplanılmasında sabit eleman üzerindeki herhangi bir nokta lokal koordinat sistemi ile ifade edileceği için $dS \rightarrow d\xi$ dönüşümü yapılması gerekir.

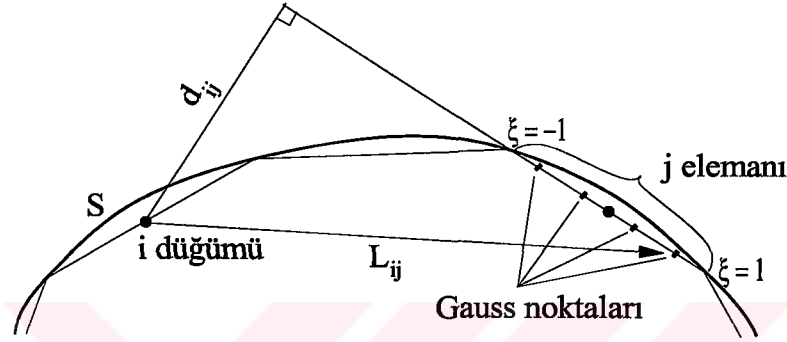
Buna göre,

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\frac{(dx)^2}{\xi} + \frac{(dy)^2}{\xi}} \quad \xi = J(\xi)d\xi \quad (4.11)$$

şeklindeki bir ifade elde edilir. Buradan sabit eleman için,

$$dS = \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2}} d\xi = \frac{L_j}{2} d\xi \quad (4.12)$$

şeklinde dönüşüm ifadesi elde edilir.



Şekil 4.4 Sabit elemana ait 'i' düğümünün integrasyon noktalarına uzaklıkları

Denk.(4.6) ve denk.(4.8)'deki H_{ij} ve G_{ij} etki katsayıları lokal koordinat cinsinden yazılarak ve Gauss alan hesabı dönüşümü kullanılarak sayısal olarak hesaplanabilir. Buna göre G_{ij} etki katsayısı,

$$G_{ij} = \int_S u^* dS = \int_S \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (4.13)$$

$$G_{ij} = \int_S \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{2\pi} \frac{L_j}{2} \int_{-1}^{+1} \ln\left(\frac{1}{r}\right) d\xi \quad (4.14)$$

şeklinde elde edilir. Denk.(4.14)'de elde edilen ifade denk.(3.25)'e göre düzenlendiğinde,

$$G_{ij} = \frac{L_j}{4\pi} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \quad (4.15)$$

şeklinde G_{ij} etki katsayısı hesaplanır. Ayrıca bu denklemde 'n' Gauss noktalarının sayısı, L_j elemanın boyu, r_k düğüm ile eleman üzerindeki Gauss noktası arasındaki uzaklık ve w_k Gauss noktasının ağırlık faktörüdür.

Benzer şekilde H_{ij} etki katsayısı,

$$H_{ij} = \int_S q^* dS = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial u}{\partial r}(\xi) \frac{\partial r}{\partial n} |J(\xi)| d\xi \quad (4.16)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde q^* temel çözümün normale göre türevi olarak tanımlanır. Temel çözüm u^* ,

$$u^* = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{r}\right)$$

şeklinde tanımlandığına göre normale göre türevi q^* ise,

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (4.17)$$

şeklinde tanımlanır. Denk.(4.20)'nin sağ tarafındaki kısmi türevler ayrı ayrı ele alındığında,

$$\frac{\partial u^*}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{d_{ij}}{r L_j} \quad (4.19)$$

çözümleri elde edilir. Elde edilen bu çözümlerin denk.(4.16)'da yerine yazılmasıyla,

$$H_{ij} = \int_{-1}^{+1} \frac{\partial u}{\partial r}(\xi) \frac{\partial r}{\partial n} |J(\xi)| d\xi = \int_{-1}^{+1} -\frac{1}{2\pi r} \frac{d_{ij}}{r L_j} |J(\xi)| d\xi \quad (4.20)$$

$$H_{ij} = -\frac{1}{2\pi L_j} \frac{L_j}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d_{ij}}{r^2} d\xi \quad (4.21)$$

sonucu elde edilir. Denk.(4.21)'de elde edilen ifade denk.(3.25)'e göre düzenlendiğinde,

$$H_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{d_{ij}}{r_k^2} w_k \quad (4.22)$$

şeklinde H_{ij} etki katsayısı hesaplanır. Ayrıca bu denklemde ' d_{ij} ' düğüm ile eleman arasındaki dik uzaklıktır.

4.1.2. Üzerinde Kaynak Noktası Bulunan Sabit Sınır Elemanları Üzerindeki İntegrasyon

Sınır noktalarındaki hesaplamalarda 'i' düğümünün 'j' elemanının üzerinde olması durumunda gerekli H ve G etki katsayılarının analitik olarak hesaplanması gerekir. Bu durumda etki katsayıları H_{ii} ve G_{ii} olarak ifade edilebilir.

Sabit elemanda 'n' normali ile eleman üzerindeki integrasyon noktasına olan 'r' uzaklığının daima birbirine dik olmasından dolayı H_{ii} terimleri sıfır olur.

$$H_{ii} = \int_S q^* dS = \int_S \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS = 0 \quad (4.23)$$

H_{ii} ve G_{ii} etki katsayıları denk.(4.4)'de ifade edilen H ve G matrislerinin köşegen terimleridir. Bu durumda H matrisinin bütün köşegen terimlerinin sıfır olması gerekir. Ancak H matrisinin özel bir durumu vardır. Bu durum ise 'c_i' katsayısının H matrisinin köşegen terimine eklenmesidir. Buna göre H matrisinin köşegen terimi 'c_i' katsayısını ifade eder.

Uniform potansiyel u'nun tüm sınır üzerine uygulandığı ve q normal türevinin sıfır olduğu şartlar altında değerlendirilir. Dolayısıyla,

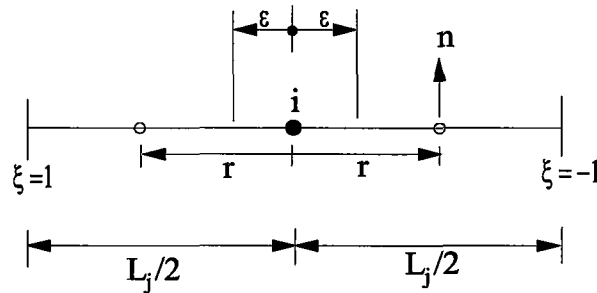
$$HI = 0 \quad (4.24)$$

olarak değişecektir. Burada I sütun vektörüdür. Denk.(4.24) satırlarda H'nin bütün elemanlarının toplamının sıfır olması gerektiği anlamını taşımaktadır. Bundan dolayı, tüm köşegen olmayan elemanlar bilindiğinde köşegen olan elemanların değerleri,

$$H_{ii} = - \sum_{j=1, i \neq j}^N H_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4.25)$$

bağıntısıyla kolaylıkla belirlenebilir. Böylece elde edilen ifade 'c_i' katsayısıdır.

Sabit elemanlı sınır elemanında G_{ii} etki katsayısı analitik integrasyon kullanarak elde edilir.



Şekil 4.5 Üzerinde 'i' kaynak noktası bulunan sabit eleman

$$G_{ii} = \int_S u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_S \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS \quad (4.26)$$

Elemanın merkezinde bulunan 'i' düğümü, simetri hesabına göre,

$$G_{ii} = \frac{1}{2\pi} \int_{-L_j/2}^0 \ln\frac{1}{r} dS + \frac{1}{2\pi} \int_0^{L_j/2} \ln\frac{1}{r} dS \quad (4.27)$$

$$G_{ii} = \frac{1}{\pi} \int_0^{L_j/2} \ln\frac{1}{r} dS \quad (4.28)$$

şeklinde yazılabilir. Şekil 4.5'de gösterilen 'i' noktası etrafındaki 'ε' yarıçapının limiti sıfıra götürülerek tekil integral ifadesi elde edilir.

$$G_{ii} = -\frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [r \ln(r) - r]_{\varepsilon}^{L_j/2} \quad (4.29)$$

$$G_{ii} = \frac{L_j}{2\pi} \left(1 + \ln\left(\frac{2}{L_j}\right) \right) \quad (4.30)$$

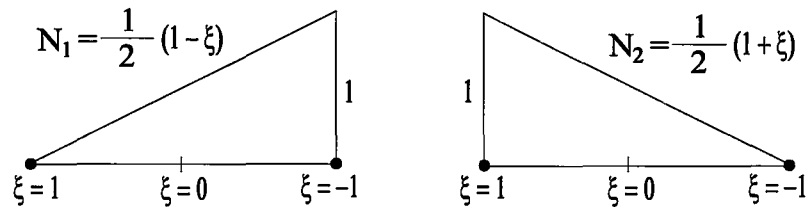
4.2. Lineer Elemanlar

Sınır elemanları yönteminin bu eleman türünde sınır üzerinde bulunan değerlerin (u ve q) lineer bir değişim gösterdiği kabul edilir. Lineer eleman üzerinde bulunan iki düğüm, elemanın her iki uç kısımlarında tanımlanır. Lineer elemana ait bu düğümlerin interpolasyon fonksiyonları,

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (4.31)$$

$$N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (4.32)$$

şeklinde tanımlanır (Paris v.d., 1997).



Şekil 4.6 Lineer interpolasyon fonksiyonlar

Sınır üzerindeki hesaplamalarda gerekli sınır integral denklemi,

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS + \int_B b u^* dB = \int_S q u^* dS \quad (4.33)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemde ‘ c_i ’ katsayısının değeri sabit elemandaki gibi sabit bir katsayı değildir. Çünkü elemanın uç kısımlarında bulunan düğümlere ait ‘ α ’ açısı (denk.(3.14)’e göre) problem sınırına göre değişkenlik gösterir. Buna göre her sınır parçası için ‘ c_i ’ katsayısının değeri ayrıca hesaplanması gerekir. Diğer bir tanımla ‘ c_i ’ katsayısı, H matrisinin terimlerinin toplanmasıyla elde edilir. Bu ifadeye göre lineer elemanda ‘ c_i ’ katsayısı,

$$c_i = - \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=1}^2 H_{ij}^{\alpha} \quad (4.34)$$

denklemleriyle de elde edilebilir.

Sınır üzerindeki ‘ u ’ ve ‘ q ’ değerlerinin lineer bir değişim gösterdiği göz önünde bulundurarak eleman üzerinde lokal koordinatlarla ifade edilen herhangi bir noktanın ‘ u ’ ve ‘ q ’ değerleri,

$$u(\xi) = N_1 u_1 + N_2 u_2 = [N_1 \quad N_2] [u_1 \quad u_2]^T \quad (4.35)$$

$$q(\xi) = N_1 q_1 + N_2 q_2 = [N_1 \quad N_2] [q_1 \quad q_2]^T \quad (4.36)$$

şeklinde düğüm değerleri ve interpolasyon fonksiyonları ile belirlenir. Buna göre denk.(4.33)’deki sınır integral ifadeleri,

$$\int_S u q^* dS = \int_S [N_1 \quad N_2] [u_1 \quad u_2]^T q^* dS = [H_{ij}^1 \quad H_{ij}^2] [u_{j1} \quad u_{j2}]^T \quad (4.37)$$

$$\int_S q u^* dS = \int_S [N_1 \quad N_2] [q_1 \quad q_2]^T u^* dS = [G_{ij}^1 \quad G_{ij}^2] [q_{j1} \quad q_{j2}]^T \quad (4.38)$$

denklemleriyle ifade edilebilir. Bu durumda ‘ j ’ elemanı üzerindeki birinci düğüme ait etki integralleri,

$$H_{ij}^1 = \int_S N_1 q^* dS \quad (4.39)$$

$$G_{ij}^1 = \int_S N_1 u^* dS \quad (4.40)$$

şeklinde ifade edilir. 'j' elemanı üzerindeki ikinci düğüme ait etki integralleri ise,

$$H_{ij}^2 = \int_S N_2 q^* dS \quad (4.41)$$

$$G_{ij}^2 = \int_S N_2 u^* dS \quad (4.42)$$

şeklinde ifade edilir. Buna göre sınır noktalarındaki hesaplamalar,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N [H_{ij}^1 \quad H_{ij}^2] [u_{j1} \quad u_{j2}] + d_i = \sum_{j=1}^N [G_{ij}^1 \quad G_{ij}^2] [q_{j1} \quad q_{j2}]^T \quad (4.43)$$

denkleminde yapılır. Ayrıca iç noktalardaki hesaplamalar,

$$u_i = \sum_{j=1}^N [G_{ij}^1 \quad G_{ij}^2] [q_{j1} \quad q_{j2}]^T - \sum_{j=1}^N [H_{ij}^1 \quad H_{ij}^2] [u_{j1} \quad u_{j2}] - d_i \quad (4.44)$$

denkleminde yapılır.

Lineer elemana göre yapılan hesaplamalarda problem bölgesi tek bir sınır parçasından meydana gelmişse, sınır üzerindeki 'j' elemanın birinci düğümü ile 'j-1' elemanın ikinci düğümünün ortaklığı söz konusudur. Ayrıca birinci elemanın birinci düğümü ile sonuncu elemanın (N.) ikinci düğümünün ortaklığı da söz konusudur. Buna göre bu ortak düğüm üzerindeki potansiyel her iki elemandaki duruma göre sürekliliğini korur. Bu duruma ait integral ifadeleri,

$$H_{i1} u_1 = (H_{i1}^1 + H_{iN}^2) u_1 \quad (\text{birinci ve sonuncu düğüm ortaklığı}) \quad (4.45)$$

$$H_{ij} u_j = (H_{ij}^1 + H_{i(j-1)}^2) u_j \quad (j \text{ elemanı 1. düğümü ve } j-1 \text{ elemanı 2. düğümü ortaklığı}) \quad (4.46)$$

şeklinde sade biçimde ifade edilebilir. Ancak akı değerinin, eleman üzerinde tanımlanmasından dolayı ortak düğümden öncesinde ve sonrasında sürekliliğini korumayabilir. Bu durum ise,

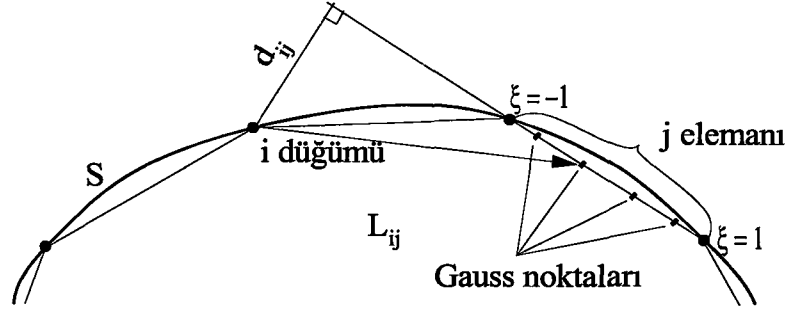
$$G_{i1} q_j = G_{i1}^1 q_j + G_{iN}^2 q_N \quad (\text{birinci ve sonuncu düğüm ortaklığı}) \quad (4.47)$$

$$G_{ij} q_j = G_{ij}^1 q_j + G_{i(j-1)}^2 q_{j-1} \quad (j \text{ elemanı 1. düğümü ve } j-1 \text{ elemanı 2. düğümü ortaklığı}) \quad (4.48)$$

şeklinde sade bir biçimde gösterilebilir. Eğer problem bölgesi iki veya daha fazla sınır parçasından meydana gelmişse, yukarıdaki denklemler her sınır parçasına ayrı ayrı uygulanmalıdır.

4.2.1. Üzerinde Kaynak Noktası Bulunmayan Lineer Sınır Elemanları Üzerindeki İntegrasyon

Lineer eleman üzerinde bulunan her iki düğüme ait etki katsayıları, Gauss alan hesabı formülleri ve sabit elemanda da kullanılan gerekli dönüşümler yardımıyla sonucunda sayısal olarak hesaplanabilir.



Şekil 4.7 Lineer elemana ait 'i' düğümünün integrasyon noktalarına uzaklıkları

Buna göre H_{ij}^1 ve H_{ij}^2 etki katsayıları,

$$H_{ij}^1 = \frac{L_j}{8\pi} \sum_{k=1}^n (1 - \xi_k) \frac{d_{ij}}{r_k} w_k \quad (4.49)$$

$$H_{ij}^2 = \frac{L_j}{8\pi} \sum_{k=1}^n (1 + \xi_k) \frac{d_{ij}}{r_k} w_k \quad (4.50)$$

denklemleriyle hesaplanabilir ve benzer şekilde G_{ij}^1 ve G_{ij}^2 etki katsayıları,

$$G_{ij}^1 = \frac{L_j}{8\pi} \sum_{k=1}^n (1 - \xi_k) \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \quad (4.51)$$

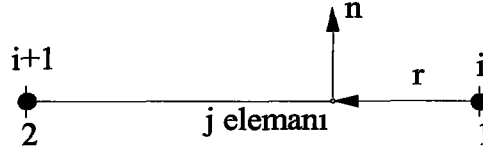
$$G_{ij}^2 = \frac{L_j}{8\pi} \sum_{k=1}^n (1 + \xi_k) \ln\left(\frac{1}{r_k}\right) w_k \quad (4.52)$$

denklemleriyle elde edilebilir.

4.2.2. Üzerinde Kaynak Noktası Bulunan Lineer Sınır Elemanları Üzerindeki İntegrasyon

'i' düğümünün 'j' elemanı üzerinde olması nedeniyle meydana gelen bu durumda H ve G'ye ait tekil integraller ayrı ayrı hesaplanır. Bu hesaplamalarda iki durum söz konusudur. İlk durum 'i' düğümünün 'j' elemanının birinci düğümü üzerinde bulunması ve ikinci durum ise 'i' düğümünün 'j-1' elemanının ikinci düğümü üzerinde bulunmasıdır.

Buna göre birinci duruma ait H tekil integralleri, 'n' normali ile eleman üzerindeki integrasyon noktasına olan 'r' uzaklığı daima birbirine dik olmasından dolayı,



Şekil 4.8 'i' düğümünün 'j' elemanının birinci düğümü üzerinde bulunması

$$H_{ii}^1 = \int_s N_1 q^* dS = \int_s \frac{1}{2} (1 - \xi) \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS = 0 \quad (4.53)$$

$$H_{ii}^2 = \int_s N_2 q^* dS = \int_s \frac{1}{2} (1 + \xi) \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS = 0 \quad (4.54)$$

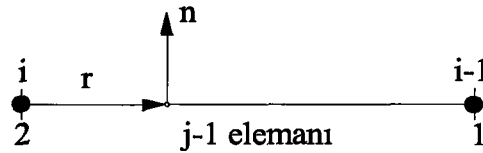
şeklinde sıfıra eşittir. G tekil integralleri ise,

$$G_{ii}^1 = \int_s N_1 u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_s \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{L_j}{2} d\xi = \frac{L_j}{2\pi} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{L_j}\right) \right] \quad (4.55)$$

$$G_{ii}^2 = \int_s N_2 u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_s \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{L_j}{2} d\xi = \frac{L_j}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{L_j}\right) \right] \quad (4.56)$$

şeklindeki denklemler ile elde edilir.

İkinci duruma ait H tekil integralleri yine birinci duruma benzer olarak,



Şekil 4.9 'i' düğümünün 'j-1' elemanının ikinci düğümü üzerinde bulunması

$$H_{ii-1}^1 = \int_s N_1 q^* dS = \int_s \frac{1}{2} (1 - \xi) \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS = 0 \quad (4.57)$$

$$H_{ii-1}^2 = \int_s N_2 q^* dS = \int_s \frac{1}{2} (1 + \xi) \frac{\partial u^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} dS = 0 \quad (4.58)$$

şeklinde sıfıra eşittir. Bu duruma ait G tekil integralleri ise,

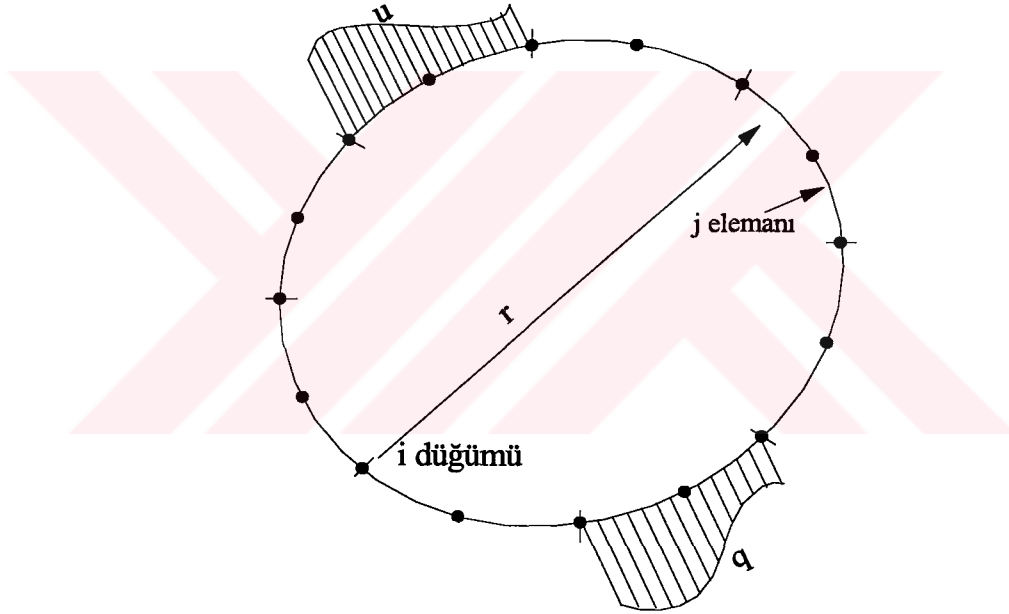
$$G_{ii-1}^1 = \int_S N_1 u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1 - \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{L_j}{2} d\xi = \frac{L_j}{2\pi} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{L_j}\right) \right] \quad (4.59)$$

$$G_{ii-1}^2 = \int_S N_2 u^* dS = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) dS = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1 + \xi) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \frac{L_j}{2} d\xi = \frac{L_j}{2\pi} \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{L_j}\right) \right] \quad (4.60)$$

şeklindeki denklemleriyle elde edilir.

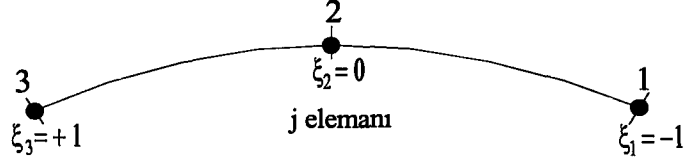
4.3. Parabolik Elemanlar

Sınır elemanları yönteminin bu eleman türünde, eleman üzerinde bulunan düğüm değerlerinin (u ve q) eleman boyunca parabolik değişime sahip olduğu kabul edilir. Düğümler eleman boyunca biri merkezde, diğer ikisi ise elemanın uç noktalarında tanımlanır (Şekil 4.9).



Şekil 4.10 Parabolik elemanın problem bölgesinde genel gösterimi

Parabolik elemanda eleman sınırı, problem sınırına denk olarak değişkenlik gösterir. Bu durum izoparametrik olarak adlandırılır. Bu parabolik elemanın en önemli avantajıdır. Buna göre elde edilen çözümler çok hassastır. Belli başlı dezavantajları ise; eleman üzerinde bulunan düğümlere ait etki integralleri ve tekil integrallerin oldukça karmaşık ve hesaplamalarının daha zor olmasıdır.



Şekil 4.11 Parabolik elemanın lokal koordinat ile gösterilmesi

Parabolik elemanda, düğümlere ait interpolasyon fonksiyonları,

$$N_1 = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (4.61)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \quad (4.62)$$

$$N_3 = \frac{1}{2}\xi(\xi + 1) \quad (4.63)$$

şeklinde tanımlanır. Eleman üzerindeki herhangi bir noktanın global koordinat cinsinden ifadesi ise;

$$x(\xi) = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \quad (4.64)$$

$$y(\xi) = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \quad (4.65)$$

şeklindedir. Sınırdaki bir dS parçası için,

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} d\xi = J d\xi \quad (4.66)$$

şeklinde koordinat dönüşümü yapılır. Bu denklemde $\frac{dx}{d\xi}$ ve $\frac{dy}{d\xi}$ 'yi elde etmek için denk.(4.64)

ve denk.(4.65)'in türevleri alınırsa,

$$\frac{dx}{d\xi} = (2\xi - 1)\frac{x_1}{2} - 2\xi x_2 + (2\xi + 1)\frac{x_3}{2} \quad (4.67)$$

$$\frac{dy}{d\xi} = (2\xi - 1)\frac{y_1}{2} - 2\xi y_2 + (2\xi + 1)\frac{y_3}{2} \quad (4.68)$$

denklemleri elde edilir.

Parabolik elemanda, sınırdaki düğümler üzerinde bulunan u ve q değerleri, genel olarak ifade edilen sınır integral denkleminde elde edilir:

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS + \int_B b u^* dB = \int_S q u^* dS \quad (4.69)$$

Bu denklemde u ve q değerleri, eleman üzerindeki değerleri ifade eder. Bu değerler, eleman üzerinde üç düğüm bulunması nedeniyle,

$$u(\xi) = (N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3) = [N_1 \ N_2 \ N_3] [u_1 \ u_2 \ u_3]^T \quad (4.70)$$

$$q(\xi) = (N_1 q_1 + N_2 q_2 + N_3 q_3) = [N_1 \ N_2 \ N_3] [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \quad (4.71)$$

denklemleri ile tanımlanır. Böylece denk.(4.69),

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N \int_S [N_1 \ N_2 \ N_3] [u_1 \ u_2 \ u_3]^T q^* dS = \sum_{j=1}^N \int_S [N_1 \ N_2 \ N_3] [q_1 \ q_2 \ q_3]^T u^* dS \quad (4.72)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda düğümlere ait etki integralleri ise,

$$H_{ij}^1 = \int_S N_1 q^* dS \quad H_{ij}^2 = \int_S N_2 q^* dS \quad H_{ij}^3 = \int_S N_3 q^* dS \quad (4.73)$$

$$G_{ij}^1 = \int_S N_1 u^* dS \quad G_{ij}^2 = \int_S N_2 u^* dS \quad G_{ij}^3 = \int_S N_3 u^* dS \quad (4.74)$$

denklemleri ile tanımlanır. Bu etki integralleri, sınır noktalarında genel olarak,

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^N [H_{ij}^1 \ H_{ij}^2 \ H_{ij}^3] [u_1 \ u_2 \ u_3]^T + d_i = \sum_{j=1}^N [G_{ij}^1 \ G_{ij}^2 \ G_{ij}^3] [q_1 \ q_2 \ q_3]^T \quad (4.75)$$

denklemiyle tanımlanır. Bu denklemde c_i katsayısının ise, eleman geometrisine bağlı olarak hesaplanması gerekir. Ancak parabolik elemanda, eleman sınırı eğrisel sınırlarla ifade edileceği için her bir c_k katsayısını hesaplamak zordur. Bunun için c_i katsayısı, H matrisinin terimlerinin toplanmasıyla elde edilebilir. Buna göre c_i katsayısı,

$$c_i = - \sum_{j=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 H_{ij}^{\alpha} \quad (4.76)$$

denklemiyle elde edilir.

İç noktalarda sınır integral denklemi ise,

$$u_i = \sum_{j=1}^N [G_{ij}^1 \ G_{ij}^2 \ G_{ij}^3] [q_1 \ q_2 \ q_3]^T - \sum_{j=1}^N [H_{ij}^1 \ H_{ij}^2 \ H_{ij}^3] [u_1 \ u_2 \ u_3]^T - d_i \quad (4.77)$$

şeklinde tanımlanır (Erişti, 2003).

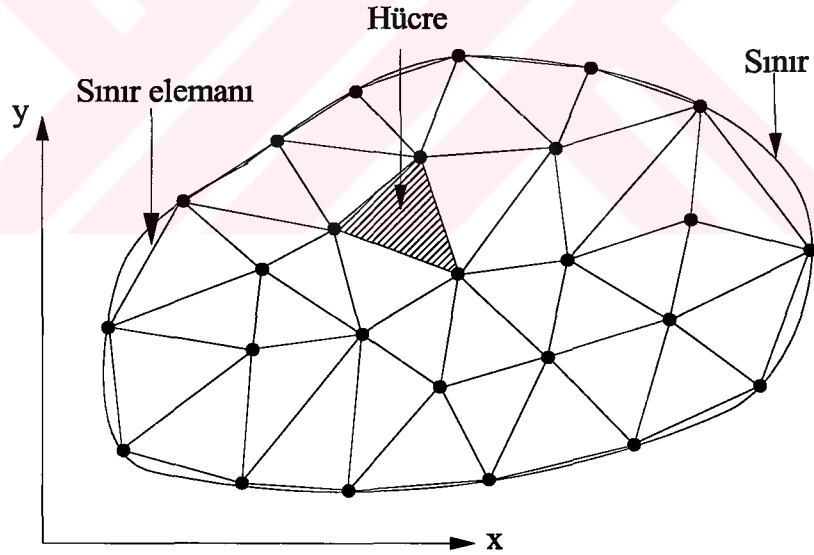
4.4 Bölge İntegrallerinin Hesaplanması

Elektrik alan problemleri hesaplamalarında incelenen problem bölgesi matematiksel olarak Poisson denklemi tipi ile tanımlanıyorsa, problem bölgesine ait sınır integral denklemlerinde ayrıca bir bölge integrali bulunur.

Problem bölgesine ait bölge integralinin hesaplanmasının en genel yöntemi hücre yaklaşımı yöntemidir.

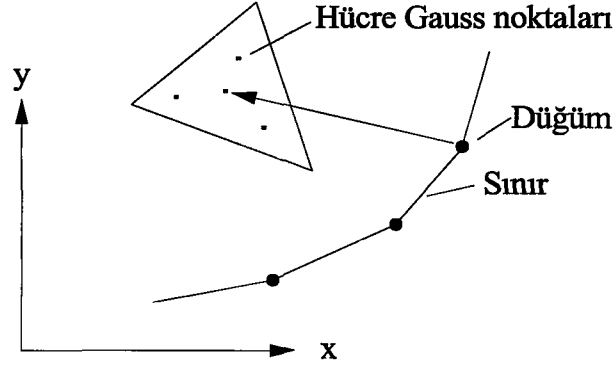
4.4.1 Hücre Yaklaşımı

Hücre yaklaşımı yöntemi, sınır elemanları yönteminde bölge integrallerinin çözümü için kullanılan bir yoldur. Bu yöntemde, problem bölgesi sonlu elemanlar yöntemindeki gibi hücreler ile bölmelendirilir.



Şekil 4.12 Bölgenin hücelere ayrıştırılması

Bölge integral terimi Gauss alan yöntemine dönüştürülerek çözüm elde edilebilir. Buna göre, her sınır düğümü ile bütün hücreler arasındaki ilişki sonucunda bölge integralleri hesaplanır. Bu hesaplamalarda hücre üzerindeki Gauss noktaları baz alınır.



Şekil 4.13 Düğüm-Hücre ilişkisi

Poisson denklemi tipindeki potansiyel problemlerin hücre yaklaşımı yöntemiyle analizinde,

Sınır noktalarındaki hesaplamalar için;

- Sınırdaki her düğümün sınır üzerindeki bütün sınır elemanları ile ilişkisi,
- Sınırdaki her düğümün bütün iç hücreler ile ilişkisi,

incelenir. İç noktalarındaki hesaplamalar için;

- Potansiyeli hesaplanacak düğümün sınır üzerindeki bütün sınır elemanları ile ilişkisi,
- Potansiyeli hesaplanacak düğümün bütün iç hücreler ile ilişkisi,

incelenir.

Bu durumda, sınır integral denklemlerinde ifade edilen ve her bir sınırdaki 'i' düğümüne göre tanımlanan 'd_i' bölge integrali ifadesi Gauss alan dönüşümü kullanılarak,

$$d_i = \int_B b u^* dB = \sum_{e=1}^M \left[\sum_{k=1}^R w_k (bu^*)_k \right] \Omega_e \quad (4.78)$$

şeklindeki denklemlerle sayısal olarak hesaplanabilir. Bu denkleme göre bölge integrali, 'M' toplam hücre sayısı olmak üzere birden M'e kadar değişen farklı hücreler üzerindeki bir toplam vasıtasıyla hesaplanır. 'w_k' Gauss integrasyon ağırlığı ve 'b' Poisson sabitidir. 'bu*' fonksiyonunun çözümü, 'R' hücre üzerindeki Gauss noktalarının sayısı olmak üzere birden R'ye kadar değişen her bir hücre üzerindeki 'k' noktasına göre hesaplanılır. Ayrıca 'Ω_e' her bir 'e' hücresinin alanıdır. Buna göre 'd_i' terimi, sınırdaki her bir 'i' düğümüne göre hesaplanılmış olur (Partridge v.d., 1992).

Sınır elemanları yöntemiyle yoğunlaştırılmış bir elektrik yükü kaynağına göre hesaplamalar yapılması oldukça kolaydır. Ancak bu kaynağa göre hesaplamaların yapılması sonlu elemanlar ve sonlu farklar yönteminde oldukça zordur (Gaul v.d., 2003).

Bu yoğunlaştırılmış kaynaklar, 'k' iç kaynak noktasında 'b' fonksiyonu için özel durumunda ortaya çıkar. Bu durum,

$$b = Q_k \Delta_k \quad (4.79)$$

denklemleriyle tanımlanır. Bu denklemde ' Δ_i ' Dirac delta fonksiyonu ve 'Q' kaynağın büyüklüğüdür. Bu duruma ait sınır integral ifadesi,

$$c_i u_i + \int_S u q^* dS + \int_B b u^* dB + \sum_{k=1}^P Q_k u_k^* = \int_S q u^* dS \quad (4.80)$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemde 'P' bölge içerisinde yoğunlaştırılmış kaynaklarının sayısı ve ' u_k ' k noktasındaki temel çözümü ifade eder (Kytke, 1995).

4.5. Otomatik Üçgen Eleman Üretimi

Hücre yaklaşımı ile bölge integrallerinin çözümünde, problem bölgesinin üçgen elemanlarla bölmelenmesi gerekir. Bilgisayar ortamında yapılan hesaplamalarda, basit problem bölgeleri kağıt üzerinde üçgen elemanlara bölmelendirilip ortaya çıkan koordinatlar gerekli çözümlerin yapılması için bilgisayar ortamına aktarılabilir. Ancak problem bölgesinin karmaşık sınırlara sahip olması veya fazla eleman sayısına bölmelendirilmek istenmesi durumunda kağıt üzerinde bölmelendirme yapmak oldukça zor olur ve zaman alır. Bu durum, bilgisayar ortamında çeşitli yöntemler kullanılarak yapılan otomatik üçgen eleman üretimiyle gerçekleştirilerek ortadan kaldırılabilir.

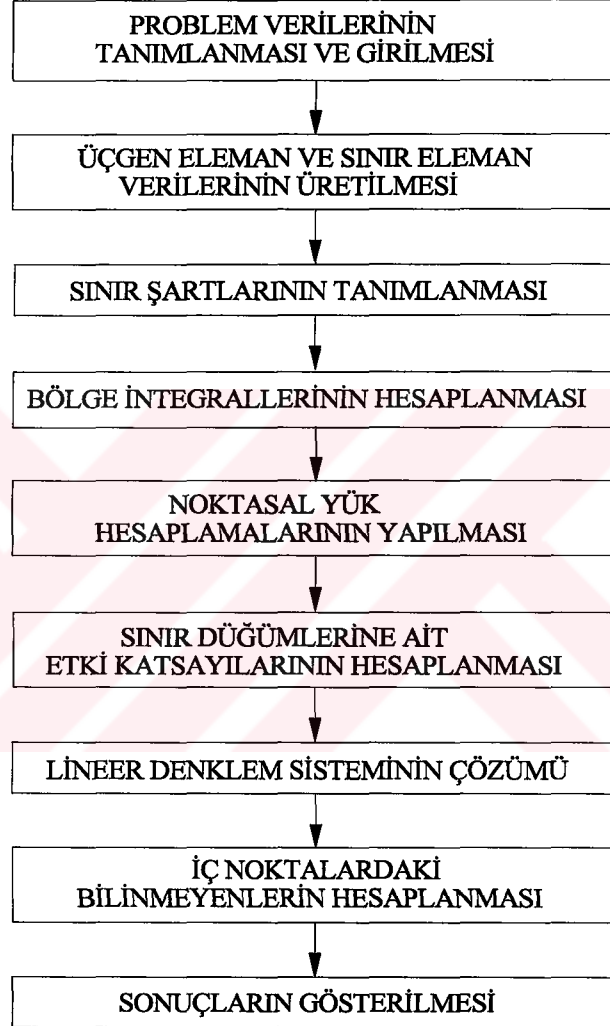
Yapılan analizlerde problem bölgesini otomatik üçgen elemanlara bölmek için MATLAB'da kullanılan bazı fonksiyonlara eklemeler yapılmıştır. Bu fonksiyonlarda bölmeme işlemi için Delaunay üçgenleme yöntemi kullanılmıştır. Delaunay üçgenleme yöntemiyle problem bölgesi düzensiz bir şekilde üçgen elemanlara bölmelendirilebilir. Özellikle problem bölgesinin tümünün fazla elemanlara bölmelendirilmesinden ziyade hassas kısımlarını daha fazla üçgen elemanlara bölmelendirilmesi ile daha az işlem yapılarak ve daha hassas hesaplamalar yapılabilir.

Problem bölgesi üçgen elemanlara bölmelendikten sonra üçgen elemanların sınır üzerindeki kenarları, sınır elemanı olarak hesaplamalara katılır. Böylece otomatik sınır elemanları da üretilmiş olur.

5. BİLGİSAYAR PROGRAMLARI

5.1 H-BEM Programı

MATLAB programı kullanılarak, sınır elemanları yöntemi ile iki boyutlu Poisson ve Laplace denklemleri tipindeki elektrik alan problemlerinin çözümünü yapan bir bilgisayar programı geliştirilmiştir. Bu program H-BEM olarak isimlendirilmiştir.



Şekil 5.1 H-BEM programının akış diyagramı

H-BEM programı ile sınır elemanları yöntemine ait hücre yaklaşımı yöntemi ve lineer eleman türü kullanılarak Poisson denklemleri tipindeki elektrik alan problemlerinin analizi yapılmaktadır. Şekil 5.1’de H-BEM programının akış diyagramı gösterilmiştir.

H-BEM programı ile yapılan analizlerde gerekli veri girişleri ve işlem basamakları Şekil 5.1’deki akış diyagramında da görüldüğü gibi kısımlara ayrılmıştır. Program kullanıcısının bu

akış diyagramına göre gerekli verileri girmesi gerekir. Bu akış diyagramındaki kısımlar ve bu kısımlarda kullanılan bazı program değişkenleri ile alt programlardan kesitler aşağıda açıklanarak gösterilmiştir.

- **Problem Verilerinin Tanımlanması ve Girilmesi**

(gin, gia, gsn, gsa) Gauss noktalarının koordinatları ve ağırlık katsayılarına ait veriler: Problemlerin analizlerinde gerekli sınır integral denklemleri, Gauss alan hesabı dönüşümü yapılması ile sayısal olarak hesaplanmaktadır. Buna göre bu akış diyagramı kısmında sınır elemanları ve üçgen elemanlar üzerinde tanımlı Gauss noktalarının koordinatları ve ağırlık katsayılarına ait veriler ayrı ayrı tanımlanmıştır.

%Giriş verileri

gsn =

[0.333333333,0.333333333,0.333333333;0.059715871,0.470142064,0.470142064;0.470142064,0.059715871,0.470142064;0.470142064,0.470142064,0.059715871;0.797426985,0.101286507,0.101286507;0.101286507,0.797426985,0.101286507;0.101286507,0.101286507,0.797426985]

gsa =

[0.2250,0.132394152,0.132394152,0.132394152,0.125939180,0.125939180,0.125939180];

gin = [-0.86113631,-0.33998104,0.33998104,0.86113631];

gia = [0.34785485,0.65214515,0.65214515,0.34785485];

(sab) Poisson sabiti veri girişi: Poisson sabiti, ortama ait yük yoğunluğuna ve dielektrik katsayısına bağlı olarak,

$$b = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

şeklinde ifade edilen denkleme göre hesaplanması ve elde edilen verinin girilmesi gerekir.

%Yük yoğunluğu tanımlanması (yoksa 'sab=0')

sab =2261.94;

(spt) Problem türü tanımlama: Uygulama örneği olarak kare sınırlı sistem, koaksiyel kablo, çubuk topraklayıcı ve küre-düzlem elektrot sistemleri seçilerek bu örneklerle ait programlar yazılmıştır. Bu uygulama örneklerine ait analizler için 'spt' değişkenine yukarıdaki örnek sırasına göre 1, 2, 3 veya 4 olarak değer verilmesi gerekir. Bu veri girişinin ardından program

seçilen problem türüne ait sınır ve üçgen eleman bölmeleme verisini 'usd' ve eşpotansiyel dağılımı hesaplama verisini 'ssa, ssb' otomatik olarak belirler.

(NQ1, NQ1x, NQ1y, NQ2, NQ2x , NQ2y) Noktasal yük tanımlama veri girişleri: Problem bölgesi üzerinde bulunabilecek noktasal yüklerin değerlerini ve koordinatlarını tanımlama veri girişidir. Problem bölgesi üzerinde hacimsel yük yoğunluğunun yanı sıra noktasal bir yükün etkisi de söz konusu olabilir. Buna göre program içerisinde iki farklı noktasal yüke ait değer ve koordinat veri girişleri bulunmaktadır. Problem bölgesi üzerinde hiçbir noktasal yük yok ise 'NQ1' ve 'NQ2' yük değişkenlerine sıfır değeri girilmelidir.

%Noktasal yük tanımlama

%1.Yük Q1=değeri Q1x=x koordinatı Q1y=y koordinatı (yoksa Q=0)

NQ1=0;

NQ1x=0.2;

NQ1y=0.5;

%2.Yük Q2=değeri Q2x=x koordinatı Q2y=y koordinatı (yoksa QQ=0)

NQ2=0;

NQ2x=0.8;

NQ2y=0.5;

(ist) Eşpotansiyel eğri veya koordinat seçimi ile sonuç gösterimini belirleme veri girişi: Elde edilen sonuçların eşpotansiyel grafik veya koordinat girişine göre ekranda gösterilmesi için gerekli veri girişidir. Bu veri değeri 1 veya 2 şeklinde girilmesi gerekir.

(tft) Eşpotansiyel aralıklarını tanımlama veri girişi: Eşpotansiyel eğri sonuç gösterimi seçilmesine bağlı olarak ekranda gösterilecek olan eşpotansiyel eğrilerin aralıklarını belirlemek için gerekli veri girişidir. Örneğin 1'den 10'a kadar 1 V aralıklarla eşpotansiyel eğri çizdirmek için,

tft=0:1:10

şeklinde veri girişi yapılabilir.

- **Üçgen Eleman ve Sınır Eleman Verilerinin Üretilmesi**

Etki katsayılarının ve bölge integrallerinin hesaplanmasında gerekli sınır elemanları ve üçgen elemanlar bu kısımda otomatik olarak üretilmektedir. Ayrıca bu eleman sayıları kolay bir şekilde artırılıp azaltılabilir.

Gerekli üçgen eleman ve sınır eleman verileri, MATLAB programına ait 'initmesh' ile 'pdeplot' fonksiyonları kullanılması ve gerekli eklemelerin yapılmasıyla birlikte programa ek olarak yazılan 'duzelektrot', 'koakcey', 'kureduzlem' ve 'cubtop' fonksiyonları vasıtasıyla otomatik olarak üretilmektedir. Bu fonksiyonların kullanılması sonucunda,

- Sınır elemanları uç koordinatları,
- Üçgen elemanları uç düğüm koordinatları,
- Üçgen eleman bağlantı düğüm numaraları,
- Sınır elemanı sayısı,
- Üçgen eleman sayısı,

verileri üretilmektedir.

%Üçgen eleman ve sınır elemanı veri üretimi

```
[pa pb pc]=initmesh(stg,'Hmax',usd);
```

```
pdemesh(pa,pb,pc);
```

```
load ver.mat;
```

```
SL=size(YY,1)/3;
```

```
for k=1:SL
```

```
    Xa(k)=XX(3*k-2);
```

```
    Ya(k)=YY(3*k-2);
```

```
end
```

```
%Sınır eleman sayısı
```

```
ses = size(Xa,2);
```

```
%Sınır düğüm sayısı
```

```
sds = size(Xa,2);
```

```
%Dahili düğüm ve dahili hücre sayısı
```

```
dds = size(pa,2)-size(Xa,2);
```

```
dhs = size(pc,2);
```

```
%sınır düğümleri koordinatları
```

```
xss=Xa;
```

```
yss=Ya;
```

Örnek olarak program içerisinde 'düzelektrot' sisteminin üçgen eleman ve sınır elemanlarla bölmelenmesi, "[pa pb pc]=initmesh(stg,'Hmax',usd)" komut satırı ile yapılmaktadır. Bu komut satırında stg değişkeni 'duzelektrot' ve usd değişkeni 0,1 seçilmesi ile problem bölgesi toplam 328 üçgen eleman ve 40 sınır elemanı üretilir ve üretilen bu elemanlara ait veriler 'pa', 'pb' ve 'pc' değişkenlerine atanır. Benzer şekilde a değişkeni 0,5 seçilirse 16 üçgen

eleman ve 8 sınır elemanı, a değışkeni 0,05 seçilirse 1342 üçgen eleman ve 80 sınır elemanı üretilmektedir. Buna göre a değışkeni düşük değeri seçilirse daha çok üçgen eleman ve sınır elemanı üretilmektedir. Böylece yapılan analiz daha hassas olur. Ancak eleman sayısı arttığında analiz süresi de artar.

- **Sınır Şartlarının Tanımlanması**

Problem türüne ait sınır parçalarının sınır şartlarını belirleme işlemi bu kısımda yapılır. Uygulamalarda verilen problemlere ait sınır şartları aynı şekilde oluşturulan sınır elemanları üzerine atanır.

- **Bölge İntegrallerinin Hesaplanması**

İncelenen problem bölgesi Poisson denklemi tipinde ise problemin matematiksel formülasyonunda sınır integral denklemlerinin yanı sıra bölge integralleri de bulunur. Programın bu kısmında bölge integralleri hücre yaklaşımı yöntemiyle hesaplanır. Bu hesaplama işlemi sınır düğümü ile üçgen eleman ilişkisi ve daha önce girilen Poisson sabitine göre yapılır. Ayrıca gerekli hesaplama işlemi için her bir üçgen elemanın alanı da hesaplanmaktadır.

%Bölge integrallerinin hesaplanması

%Düğümün koordinatları

xs=pa(1,:);

ys=pa(2,:);

%üçgen hücrelerin bağımlı olduğu düğümlerin tanımlanması

hbd=pc';

for k=1:dhs

A1=hbd(k,1);A2=hbd(k,2);A3=hbd(k,3);

AB1=ys(A2)-ys(A3);

AB2=ys(A3)-ys(A1);

AB3=xs(A3)-xs(A2);

AB4=xs(A1)-xs(A3);

ha(k)=abs((AB1*AB4-AB2*AB3)/2);

end

for o=1:sds

xxd=xs(o);

yyd=ys(o);

top=0;

for l=1:dhs

```

AL=ha(1);
n1=hbd(1,1);n2=hbd(1,2);n3=hbd(1,3);
xp1=xs(n1);xp2=xs(n2);xp3=xs(n3);
yp1=ys(n1);yp2=ys(n2);yp3=ys(n3);
for k=1:7
    g1=gsn(k,1);g2=gsn(k,2);g3=gsn(k,3);
    xgn=xp1*g1 + xp2*g2 + xp3*g3;
    ygn=yp1*g1 + yp2*g2 + yp3*g3;
    drx=xxd-xgn;
    dry=yyd-ygn;
    rg=sqrt(drx^2+dry^2);
    top=top-gsa(k)*AL*log(1/rg)*sab/(2*pi);
end
end
Dp(o)=top;
end

```

- **Noktasal Yüklere Ait Hesaplamalar**

Problem bölgesi üzerinde noktasal yük bulunması durumunda gerekli hesaplamaların yapıldığı kısımdır.

```

%Noktasal yüklere ait hesaplamalar
for hf=1:sds
    RQ=sqrt((NQ1x-xss(hf))^2+(NQ1y-yss(hf))^2);
    NY(hf)=NQ1*log(1/RQ)/(2*pi);
end
for hf=1:sds
    RQ=sqrt((NQ2x-xss(hf))^2+(NQ2y-yss(hf))^2);
    NY1(hf)=NQ2*log(1/RQ)/(2*pi);
end

```

- **Sınır Düzgümlerine Ait Etki Katsayılarının Hesaplanması**

Sınır elemanları yöntemiyle yapılan analizlerde ilk önce problem sınır üzerinde bilinmeyen sınır değerleri bulunur. Programın bu kısmında, bilinmeyen sınır değerlerini hesaplamak için gerekli olan etki katsayıları, sınır düğümü ile sınır elemanı arasındaki ilişkiye

göre elde edilir. Ayrıca burada, bu hesaplama için düğümün elamana olan dik uzaklığı 'D1' ve sınır elemanının boyu 'L' hesaplanmaktadır. Bu hesaplamalar sonucunda elde edilen etki katsayıları elemanın birinci düğümü için 'A1' ve 'B1', ikinci düğümü için 'A2' ve 'B2' matrisleri ile ifade edilmiştir.

Programın bu kısmında yapılan diğer bir hesaplama ise 'c_i' katsayısının bulunması ve 'A1' ile 'A2' matrislerinin köşegen terimlerine eklenmesidir.

%Sınır noktalarındaki Hij ve Gij matrisleri hesaplanması

for i=1:a

for j=1:a

L=sqrt (m(j)^2+n(j)^2);

if j==i

A1(i,j)=0;

A2(i,j)=0;

B1(i,j)=L*((3/4)+(1/2)*log(1/L))/(2*pi);

B2(i,j)=L*((1/4)+(1/2)*log(1/L))/(2*pi);

elseif x1(i)==x2(j) & y1(i)==y2(j)

A1(i,j)=0;

A2(i,j)=0;

B1(i,j)=L*((1/4)+(1/2)*log(1/L))/(2*pi);

B2(i,j)=L*((3/4)+(1/2)*log(1/L))/(2*pi);

else

for k=1:4

RX=(x1(i)-(xx(j,k)))^2+(y1(i)-yy(j,k))^2;

AA1(k)=L*D1(i,j)*W(k)*(E(k)-1)/(8*pi*RX);

AA2(k)=-L*D1(i,j)*W(k)*(E(k)+1)/(8*pi*RX);

BB1(k)=-L*W(k)*(E(k)-1)*log(1/sqrt(RX))/(8*pi);

BB2(k)=L*W(k)*(E(k)+1)*log(1/sqrt(RX))/(8*pi);

end

A1(i,j)=(AA1(1)+AA1(2)+AA1(3)+AA1(4));

A2(i,j)=(AA2(1)+AA2(2)+AA2(3)+AA2(4));

B1(i,j)=(BB1(1)+BB1(2)+BB1(3)+BB1(4));

B2(i,j)=(BB2(1)+BB2(2)+BB2(3)+BB2(4));

end

end

end

- **Lineer Denklem Sisteminin Çözümü**

Sınır noktalarına ait etki katsayılarının ve bölge integrallerinin hesaplanılmasından sonra sınır üzerindeki bilinmeyen sınır değerlerinin hesaplanması gerekir. Buna göre $A \cdot x = F$ şeklinde bir lineer denklem sistemi oluşturulur ve bu denklem sistemin çözümü sonucunda sınır bilinmeyenleri elde edilir.

- **İç Noktalardaki Potansiyellerin Hesaplanması**

Sınır noktalarında bilinen ve elde edilen sınır değerlerine göre problem bölgesinin herhangi bir noktasındaki potansiyel değeri programın bu kısmında hesaplanır. Bu hesaplama işleminde 'ist' değeri 1 olarak seçilmişse problem bölgesi üzerinde otomatik olarak 70 x yönünde ve 70 y yönünde olmak üzere tarama yapar. Böylece bölge içerisinde 4900 noktada hesaplama yapar. 'ist' değeri 2 olarak seçilmişse, MATLAB komut penceresi üzerinde hesap noktasının koordinat verilerinin girilmesi istenir ve girilen bu koordinata ait potansiyel değeri hesaplanarak yine komut penceresi üzerinde görüntülenir.

% İç noktalardaki potansiyel değerlerinin koordinat girişi ile hesaplanması

```
for i=1:a
    LL=sqrt (m(i)^2+n(i)^2);
    for j=1:4
        RR=((bv-xx(i,j))^2+(cv-yy(i,j))^2);
        AL1(j)=LL*DD1(i)*W(j)*(E(j)-1)/(8*pi*RR);
        AL2(j)=-LL*DD1(i)*W(j)*(E(j)+1)/(8*pi*RR);
        BL1(j)=-LL*W(j)*(E(j)-1)*log(1/sqrt(RR))/(8*pi);
        BL2(j)=LL*W(j)*(E(j)+1)*log(1/sqrt(RR))/(8*pi);
    end
    AC1(i)=(AL1(1)+AL1(2)+AL1(3)+AL1(4));
    AC2(i)=(AL2(1)+AL2(2)+AL2(3)+AL2(4));
    BC1(i)=(BL1(1)+BL1(2)+BL1(3)+BL1(4));
    BC2(i)=(BL2(1)+BL2(2)+BL2(3)+BL2(4));
end
for i=1:a
    if i==1
        BCC2(i)=BC2(a);
        ACC2(i)=AC2(a);
    else
```

```

        BCC2(i)=BC2(i-1);
        ACC2(i)=AC2(i-1);
    end
end
RQ=sqrt((NQ1x-bv)^2+(NQ1y-cv)^2);
NYY=NQ1*log(1/RQ)/(2*pi);
RQ=sqrt((NQ2x-bv)^2+(NQ2y-cv)^2);
NYY1=NQ2*log(1/RQ)/(2*pi);
ui=(BC1*S')+(BCC2*R')-(AC1*P')-(ACC2*P')+DP+NYY+NYY1
end
end

```

• Sonuçların Gösterilmesi

Bir önceki program kısmında ‘ist’ değerinin 1 olarak seçilmesi sonucunda problem bölgesi üzerinde 4900 noktada hesaplama yapılır. Bu hesaplama sonuçları eşpotansiyel dağılımı grafiği üzerinde gösterilir. Bu eşpotansiyel dağılımı grafiği için “[hn nh]= contour(xxf,yyf,ui,tft)” komut satırı yazılmıştır. Bu komut satırında ‘xxf’ ile ‘yyf’ x ve y koordinatları, ‘ui’ bu koordinatların potansiyel değeri ve ‘tft’ ise eşpotansiyel değer aralıklarına ait değişkenlerdir. Program kullanıcısı “tft=-100:2:100” şeklindeki komut satırında potansiyel başlangıç, bitiş ve aralık değerleri değiştirilerek grafik üzerindeki eşpotansiyel aralıkları değiştirebilir.

Ayrıca programın bu kısmında “clabel(hn,nh)” komutu ile çizdirilen eğrilerin etiketleri grafik üzerinde gösterilmektedir.

Eğer kullanıcı ‘ist’ değişkenini 2 olarak belirler ise, komut penceresinden gireceği iç noktanın koordinat verilerine göre hesaplama yapılır ve hesaplama sonucu yine komut penceresi üzerinde gösterilir. Girilen bu koordinatın potansiyel değeri gösterildikten sonra program başka bir noktaya ait koordinat verilerinin girilmesi ister ve böylece hesaplama işlemi devam eder. Eğer hesaplama yapılması istenmiyorsa ve programa son verilmek isteniyorsa ‘enter’ tuşuna iki defa basılması gerekir.

5.2. ELECTRO Programı

ELECTRO, Integrated Engineering Software (IES) tarafından hazırlanan ve iki boyutlu elektrostatik alan analizi yapan bir paket programdır.

ELECTRO yazılımında, sınır elemanları yöntemi kullanılarak analiz yapılmaktadır. Analiz için ilk önce ‘Geometry’ menüsü altında bulunan ‘Arc’, ‘Circle’, ‘Poly Line’, ‘Spline’ gibi seçenekler kullanılarak problemin geometrik modeli oluşturulur. Daha sonra ‘Physics’

menüsünde bulunan 'Material Table' seçeneği kullanılarak malzeme seçilir, 'Elements' seçeneği kullanılarak eleman sayısı girilir, 'Subareas' seçeneği kullanılarak problem bölgesi üçgen elemanlara bölmelenir, 'Boundary Conditions' seçeneği kullanılarak sınır şartları belirlenir ve 'Volume Charge' seçeneği kullanılarak problem bölgesinde bulunan hacimsel yük yoğunluğunun değeri girilir. Bu işlemlerden sonra 'Analysis' menüsündeki 'Analysis' seçeneği kullanılarak alan analizi yapılır. Analiz sonucunda elde edilen potansiyel ve elektrik alan değerleri skaler büyüklük olarak görülebilir veya grafikler çizilerek sonuçlar değerlendirilebilir. (Integrated Engineering Software Inc., 1997)

5.3. PDE Toolbox Programı

PDE toolbox, The Matworks tarafından hazırlanan MATLAB programına ait bölge analizi yapan hazır bir programdır. PDE toolbox ile 'Electrostatic' analiz türü seçilerek elektrostatik alan analizleri sonlu elemanlar yöntemiyle yapılmaktadır.

PDE toolbox programıyla yapılacak olan analiz için ilk önce araç çubuğu üzerinde bulunan kare, daire, elips gibi nesneler kullanılarak problem bölgesinin geometrisi oluşturulur. Daha sonra 'Boundary' menüsünden 'Boundary Mode' seçilir ve sınırlara tıklanarak sınır şartları girilir. 'Mesh' menüsünden 'Initialize Mesh' ve 'Refine Mesh' seçenekleri kullanılarak problem bölgesi üçgen elemanlara bölmendirilir. 'PDE' menüsünden 'PDE Specification' seçeneği kullanarak problem bölgesine ait dielektrik katsayısı 'epsilon' ve yük yoğunluğu 'rho' değerleri girilir. Bu işlemlerden sonra 'Solve' menüsünden 'Solve PDE' seçeneği kullanılarak alan analizi yapılır. Analiz sonucunda elde edilen potansiyel değerleri skaler büyüklük olarak görülebilir veya grafikler çizilerek sonuçlar değerlendirilebilir. (The Mathworks, 2002)

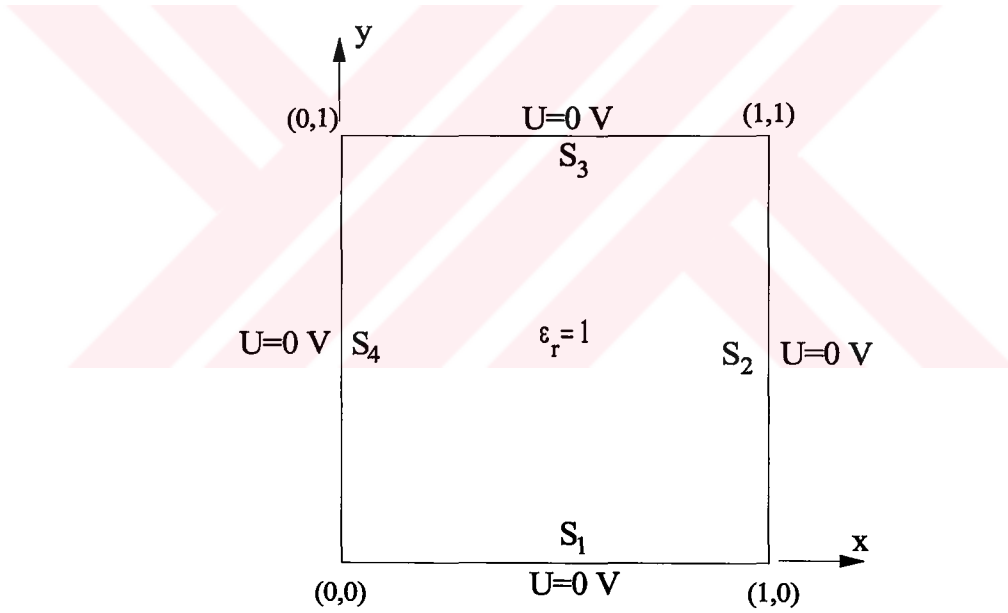
6. UYGULAMALAR

6.1. Genel Bilgi

Uygulama örneği olarak kare sınırlı elektrot, küre-düzlem elektrot, koaksiyel kablo, çubuk topraklayıcı ve küre-küre sistemleri incelenmiştir. Bu uygulama örnekleri, problem bölgesinde hacimsel yük yoğunluğunun bulunmadığı ortam, hacimsel yük yoğunluğunun bulunduğu ortam ve bölge içerisinde noktasal yük bulunduğu durumlar için ayrı ayrı analiz edilmiştir. Bu sistemlere ait H-BEM, ELECTRO ve PDE toolbox programlarından elde edilen sonuçlar eşpotansiyel eğri, tablo ve grafikler ile gösterilerek karşılaştırmalar yapılmıştır.

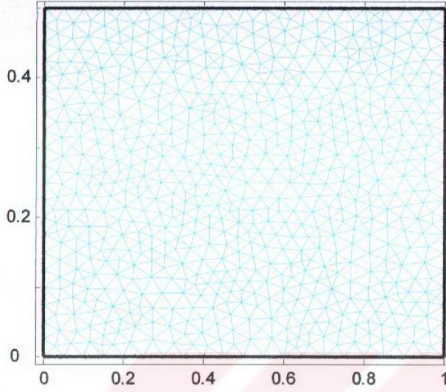
6.2. Kare Sınırlı Elektrot Sistemi

Bu uygulama örneğinde Şekil 6.1'de görüldüğü gibi, Dirichlet sınır şartlı ve her bir kenarı 1 m olan kare sınırlı elektrot sistemi seçilmiştir. Elektrotlar arasındaki bağıl dielektrik katsayısının değeri 1 ($\epsilon_r=1$) olarak alınmıştır.



Şekil 6.1 Yük yoğunluğuna sahip problem bölgesi

H-BEM programı ile kare sınırlı elektrot sisteminin problem bölgesi otomatik olarak 1342 adet üçgen, 80 adet lineer sınır elemanı ile bölmelendirilerek analizleri yapılmıştır.



Şekil 6.2 Kare sınırlı elektrot sisteminin 1342 adet üçgen, 80 adet sınır elemanıya bölmelenmesi

Bu örnekte, Şekil 6.1'deki sistemin sınırlarına $U=0$ volt (Dirichlet tipi sınır şartı) olarak uygulanmıştır. Bu sınır şartına göre,

- a) Problem bölgesinde yük yoğunluğunun bulunmaması,
- b) Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması,
- c) Problem bölgesinde $x=0.2$ $y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunması,
- d) Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2$, $y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8$, $y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yüklerin bulunması,
- e) Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2$, $y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8$ $y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yüklerin bulunması,

durumları için analizler yapılmıştır.

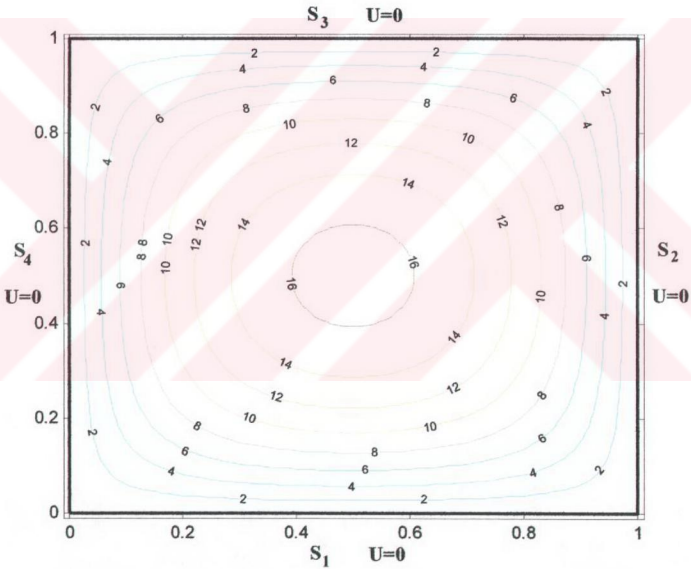
a) Problem bölgesinde yük yoğunluğunun bulunmaması: Yapılan analizde problem bölgesi üzerinde yük yoğunluğunun bulunmaması ve problem bölgesinin sınırlarının 0 V 'luk potansiyele sahip olması durumunda problem bölgesinin 0 V 'luk potansiyele sahip olduğu gözlenmiştir.

b) Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması: Bu analizde, Dirichlet sınır şartlı kare sınırlı elektrot sistemine ait problem bölgesinde homojen olarak

2 nC/m³'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması durumunda potansiyel dağılımı hesaplanmıştır. Buna göre problem bölgesinin bağlı dielektrik katsayısının 1 birim ($\epsilon_r=1$) olması nedeniyle Poisson sabiti,

$$\rho = 2 \text{ nC/m}^3 \rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{2 \cdot 10^{-9}}{1 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} = -72\pi = -226,194 \quad b = -\frac{\rho}{\epsilon} = -226,194$$

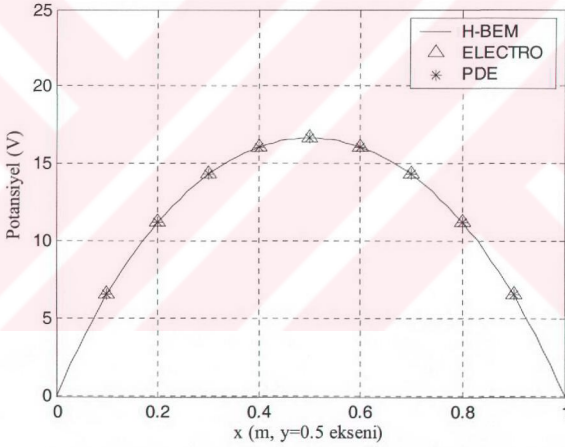
olur. H-BEM, ELECTRO ve PDE toolbox programları yardımıyla bulunan sonuçlar Tablo 6.1 ve Şekil 6.4'de gösterilmiştir. Şekil 6.3'de ise H-BEM programıyla elde edilen problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 6.3 Problem bölgesinde 2 nC/m³'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

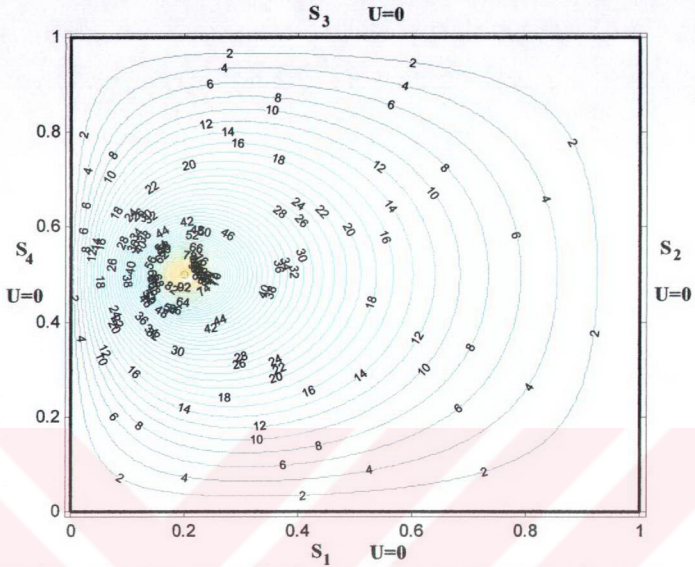
Tablo 6.1 Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)		
		H-BEM	ELECTRO	PDE
0.1	0.5	6.567	6.564	6.569
0.2	0.5	11.242	11.231	11.241
0.3	0.5	14.337	14.323	14.336
0.4	0.5	16.095	16.097	16.093
0.5	0.5	16.666	16.648	16.663
0.6	0.5	16.092	16.080	16.093
0.7	0.5	14.337	14.324	14.334
0.8	0.5	11.239	11.234	11.241
0.9	0.5	6.566	6.567	6.571



Şekil 6.4 Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin potansiyel dağılımı

c) Problem bölgesinde 2 nC 'luk noktasal yük bulunması: Bu analizde, Dirichlet sınır şartlı kare sınırlı elektrot sistemine ait problem bölgesinin $x=0.2, y=0.5$ noktasında bulunan 2 nC 'luk noktasal yükün meydana getirdiği potansiyel dağılımı H-BEM programı yardımıyla hesaplanmıştır.



Şekil 6.5 Problem bölgesinde $x=0.2$, $y=0.5$ noktasında 2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.2 Problem bölgesinde $x=0.2$, $y=0.5$ noktasında 2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin çözümü

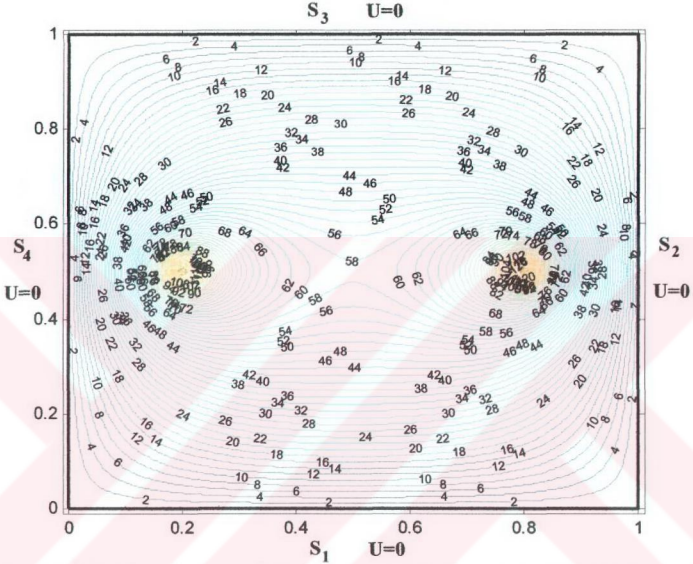
x	y	Potansiyel (V)
		H-BEM
0.1	0.5	37.197
0.2	0.5	∞
0.3	0.5	51.349
0.4	0.5	31.240
0.5	0.5	20.771
0.6	0.5	14.066
0.7	0.5	9.314
0.8	0.5	5.686
0.9	0.5	2.697

Yapılan analizde, noktasal yükün tanımlandığı $x=0.2$, $y=0.5$ noktasında potansiyel değer sonsuz olarak elde edilmiştir. Bu durum bölüm 2'de bir noktasal yükün meydana getirdiği potansiyel,

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (6.1)$$

denklemlle ifade edilmiştir. Bu formüle göre, noktasal yük üzerinde ($r=0$) hesaplanan potansiyel değerinin sonsuz değer alacağı açık olarak görülmektedir.

d) Problem bölgesinde 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yüklerin bulunması: Bu analizde, Dirichlet sınır şartlı kare sınırlı elektrot sistemine ait problem bölgesinde homojen olarak 2 nC/m^3 'lük yük yoğunluğu ve $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ile $x=0.8, y=0.5$ 'de 2 nC 'luk iki ayrı noktasal yükün bulunması durumunda meydana gelen potansiyel dağılımı H-BEM programıyla hesaplanmıştır.

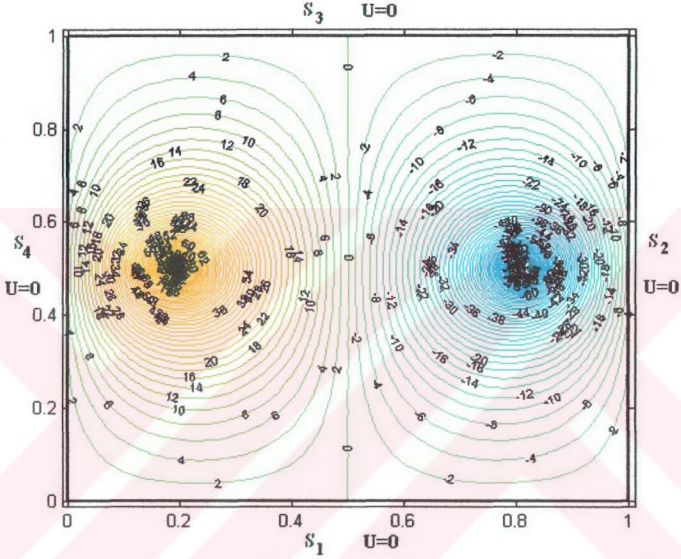


Şekil 6.6 Problem bölgesinde 2 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.3 Problem bölgesinde 2 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)
		H-BEM
0.1	0.5	46.462
0.2	0.5	∞
0.3	0.5	75.001
0.4	0.5	61.402
0.5	0.5	58.210
0.6	0.5	61.399
0.7	0.5	75.001
0.8	0.5	∞
0.9	0.5	46.461

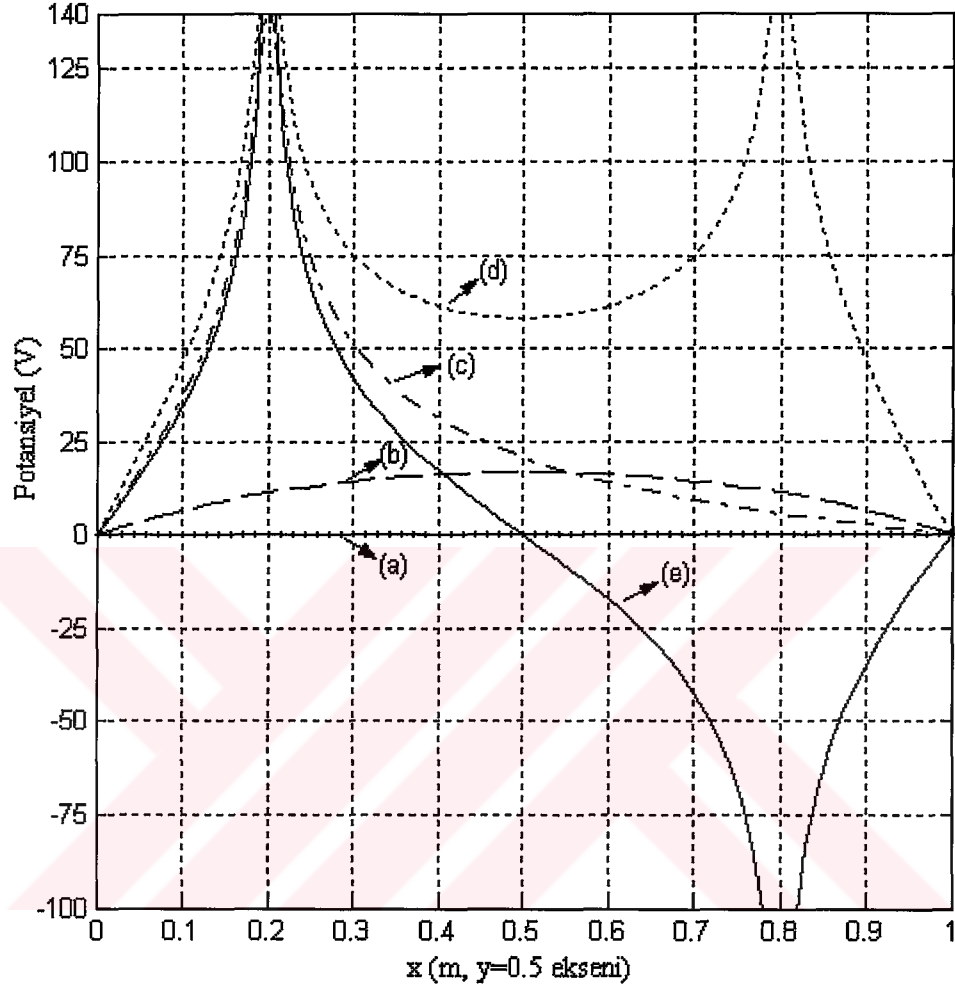
e) Problem bölgesinde $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yüklerin bulunması: Bu analizde, Dirichlet sınır şartlı kare sınırlı elektrot sistemine ait problem bölgesinde $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de -2 nC 'luk zıt kutuplu iki noktasal yükün bulunması durumunda meydana gelen potansiyel dağılımı H-BEM programı yardımıyla hesaplanmıştır.



Şekil 6.7 Problem bölgesinde $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.4 Problem bölgesinde $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük bulunan kare sınırlı elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)
		H-BEM
0.1	0.5	34.500
0.2	0.5	$+\infty$
0.3	0.5	42.034
0.4	0.5	17.174
0.5	0.5	0
0.6	0.5	-17.174
0.7	0.5	-42.034
0.8	0.5	$-\infty$
0.9	0.5	-34.500



Şekil 6.8 Dirichlet sınır şartlı kare sınırlı elektrot sisteminin $y=0.5$ eksenı boyunca;

- (a) yük yoğunluğunun bulunmaması;
 - (b) 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu,
 - (c) $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC noktasal yük,
 - (d) 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük,
 - (e) $x=0.2, y=0.5$ 'de 2 nC ve $x=0.8, y=0.5$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük,
- durumları için potansiyel değişimleri.

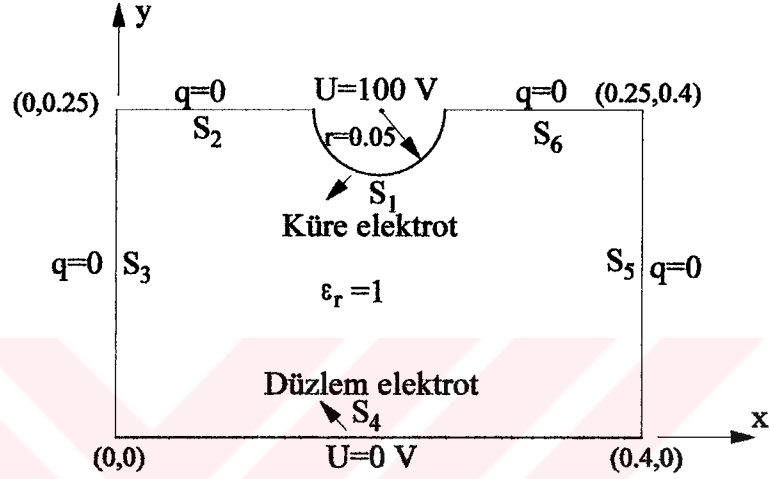
6.3. Küre-Düzlem Elektrot Sistemi

Bu uygulama örneğinde, Şekil 6.9'daki karışık sınır şartlı küre-düzlem elektrot sistemi seçilmiştir. Küre ile düzlem arasındaki bağıl dielektrik katsayısının değeri 1 birim ($\epsilon_r=1$) olarak alınmıştır. Sınır şartları olarak küre elektrot $U=100 \text{ V}$, düzlem elektrot $U=0 \text{ V}$ ve arakesitlerde $q=0$ olarak belirlenmiş ve,

- a) Problem bölgesinde yük yoğunluğunun bulunmaması,

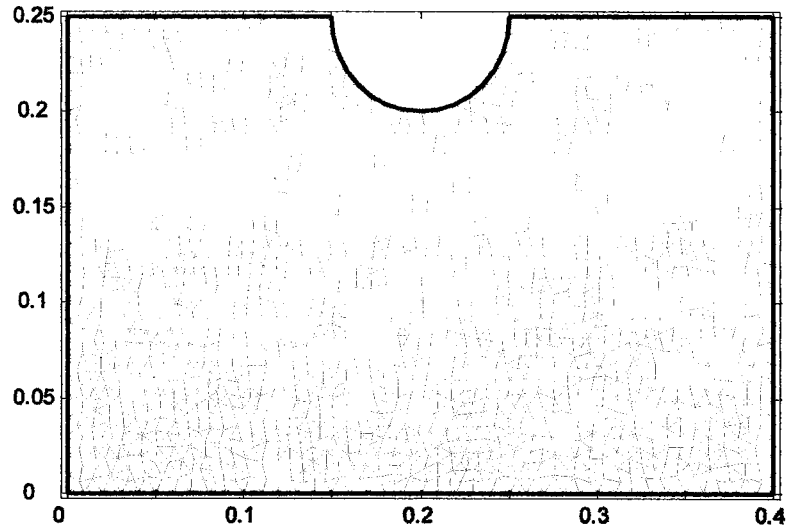
- b) Problem bölgesinde 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması,
c) Problem bölgesinde 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de 2 nC 'luk noktasal yüklerin bulunması,
d) Problem bölgesinde 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de -2 nC 'luk noktasal yüklerin bulunması,

durumları için analizler yapılmıştır.



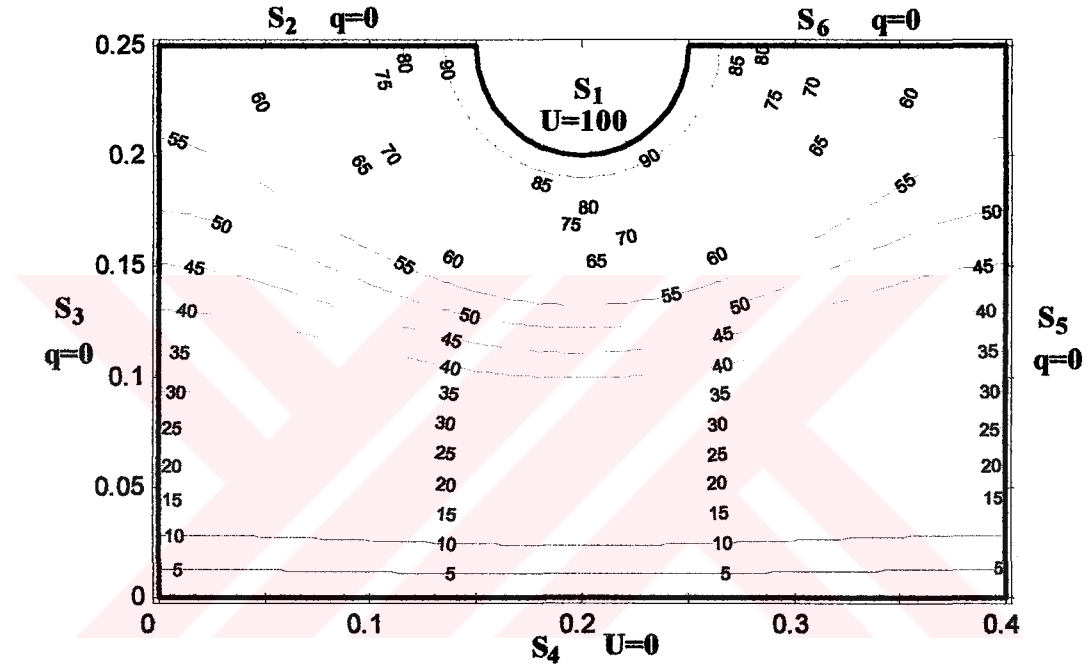
Şekil 6.9 Küre-düzlem elektrot sistemi

H-BEM programı ile küre-düzlem elektrot sisteminin problem bölgesi otomatik olarak 3254 adet üçgen, 136 adet lineer sınır elemanı ile bölmelendirilerek analizler yapılmıştır.



Şekil 6.10 Küre-düzlem elektrot sisteminin 3254 adet üçgen, 136 adet sınır elemanı ile bölmelenmesi

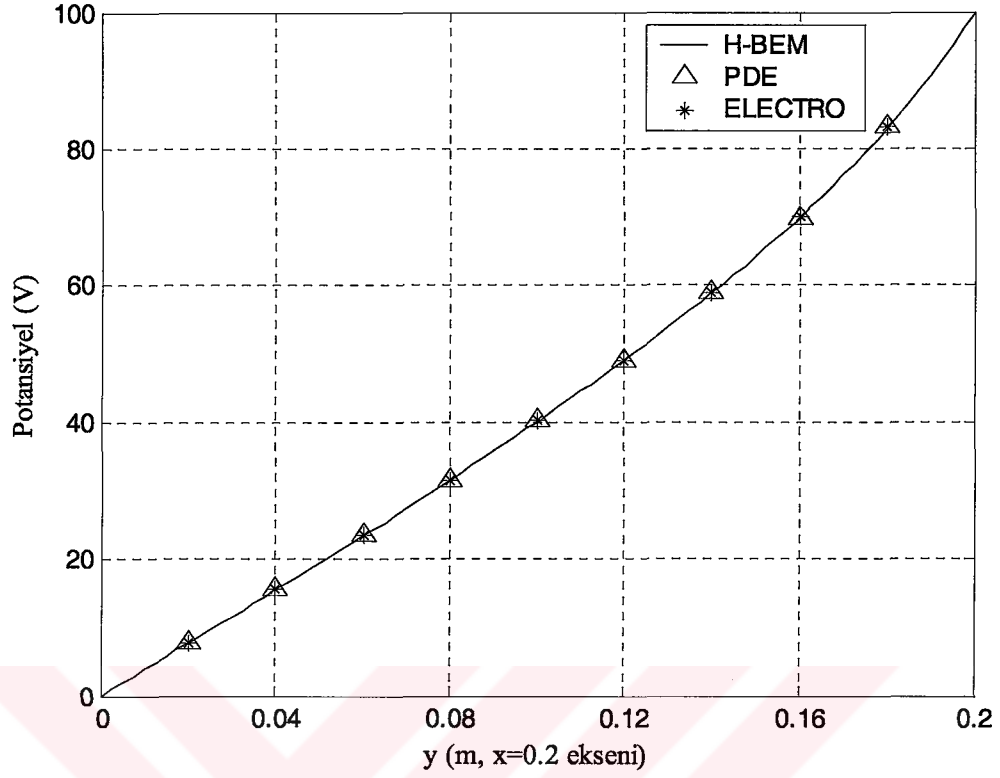
a) **Problem bölgesi üzerinde yük yoğunluğunun bulunmaması:** Küre-düzlem elektrot sistemi için yapılan bu analizde, analiz edilen bölge içerisinde herhangi bir noktasal yük ve yük yoğunluğunun bulunmaması durumu incelenmiştir. Bu durumda problem bölgesi, Laplace denklemiyle tanımlanır. Dolayısıyla problem bölgesinin üçgen elemanlarla bölmelenmesine gerek yoktur. H-BEM programı ile problem bölgesi sınırı 136 adet lineer sınır elemanı ile bölmelenerek analiz yapılmıştır. H-BEM, ELECTRO ve PDE toolbox programları yardımıyla bulunan sonuçlar Tablo 6.5 ve Şekil 6.12’de gösterilmiştir. Şekil 6.11’de ise H-BEM programıyla elde edilen problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 6.11 Problem bölgesinde herhangi bir yük yoğunluğu bulunmayan küre-düzlem elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.5 Problem bölgesinde herhangi bir yük yoğunluğu bulunmayan küre-düzlem elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)		
		H-BEM	ELECTRO	PDE
0.2	0.02	7.718	7.718	7.724
0.2	0.04	15.500	15.507	15.510
0.2	0.06	23.415	23.429	23.430
0.2	0.08	31.554	31.574	31.573
0.2	0.10	40.038	40.064	40.063
0.2	0.12	49.042	49.076	49.050
0.2	0.14	58.837	58.087	58.897
0.2	0.16	69.874	69.926	69.629
0.2	0.18	82.978	83.041	83.067



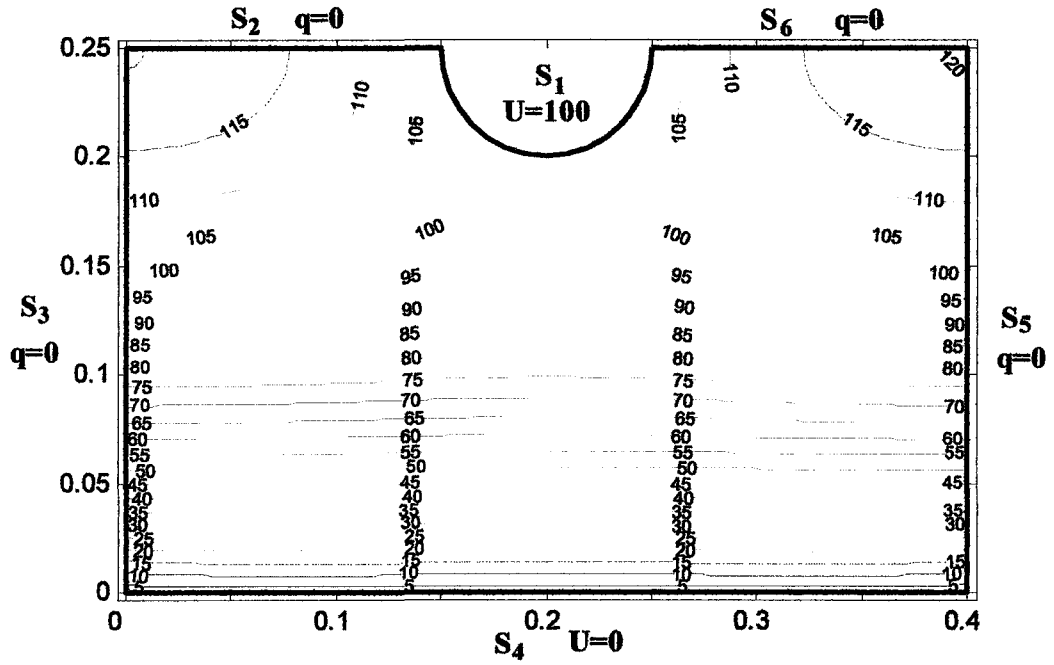
Şekil 6.12 Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan küre-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı

b) Problem bölgesinde 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması: Yapılan bu analizde, küre-düzlem elektrot sistemine ait problem bölgesinde homojen olarak 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması durumunda potansiyel dağılımı elde edilmiştir. H-BEM ve PDE toolbox programları yardımıyla bulunan sonuçlar Tablo 6.6 ve Şekil 6.14'de gösterilmiştir. Şekil 6.13'de ise H-BEM programı yardımıyla elde edilen sonuçlarla problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.

Buna göre problem bölgesinin bağıl dielektrik katsayısı 1 olması nedeniyle ($\epsilon_r=1$) Poisson sabiti,

$$\rho = 40 \text{ nC/m}^3 \rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{40 \cdot 10^{-9}}{1 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} = -1440\pi = -4523,88 \quad b = -\frac{\rho}{\epsilon} = -4523,88$$

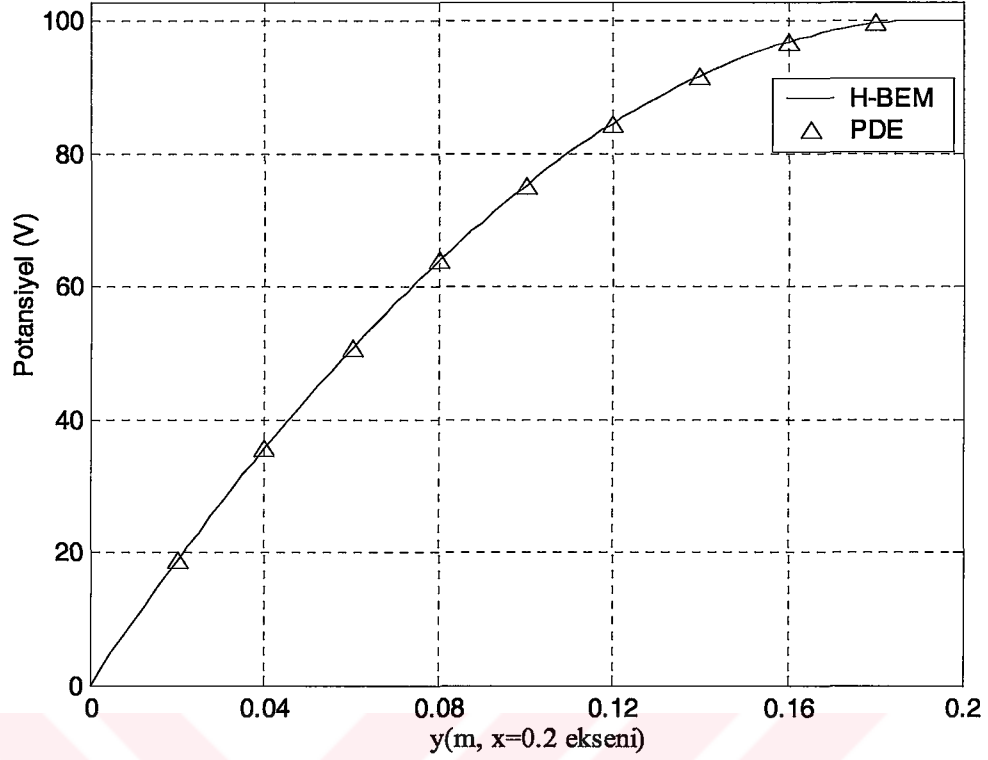
olur.



Şekil 6.13 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

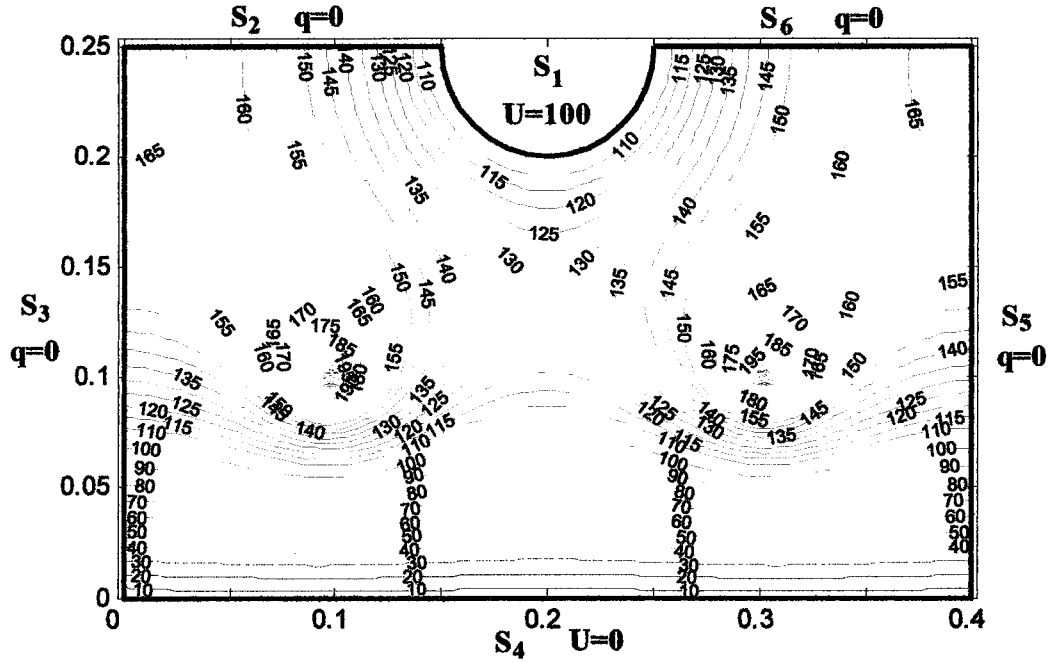
Tablo 6.6 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)	
		H-BEM	PDE
0.2	0.02	18.767	18.623
0.2	0.04	35.699	35.439
0.2	0.06	50.783	50.434
0.2	0.08	63.983	63.579
0.2	0.10	75.266	74.814
0.2	0.12	84.576	84.146
0.2	0.14	91.837	91.420
0.2	0.16	96.936	96.575
0.2	0.18	99.709	99.475



Şekil 6.14 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin potansiyel dağılımı

c) Problem bölgesinde 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de 2 nC 'luk noktasal yüklerin bulunması: Yapılan bu analizde, küre-düzlem elektrot sistemine ait problem bölgesinde homojen olarak 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu ve $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ile $x=0.3$, $y=0.1$ 'de 2 nC 'luk iki ayrı noktasal yükün bulunması durumunda meydana gelen potansiyel dağılımı H-BEM programıyla hesaplanmıştır.

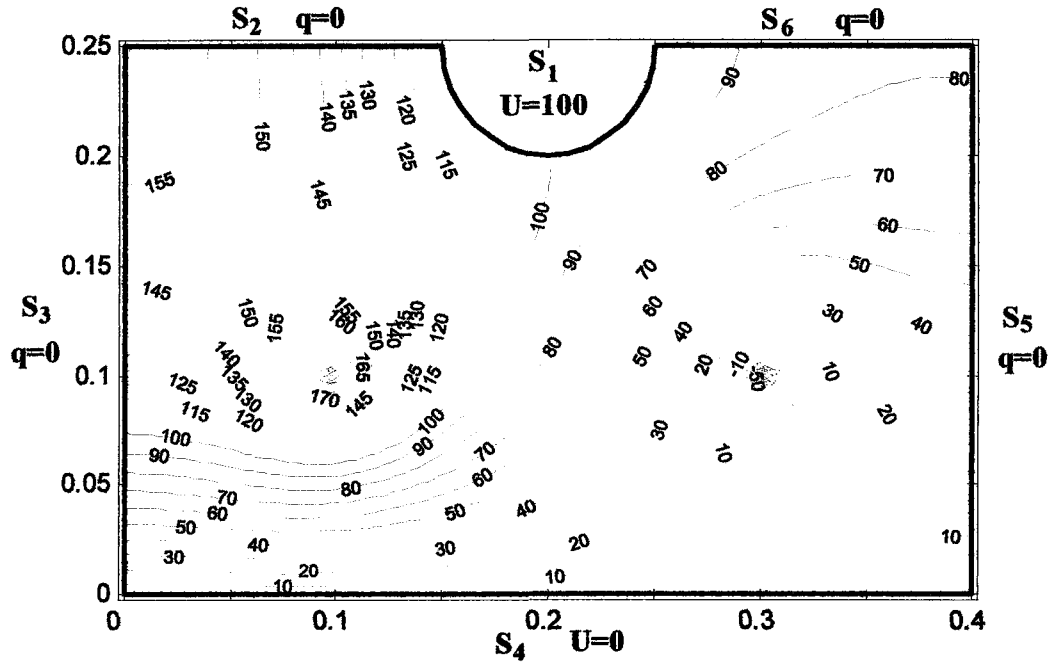


Şekil 6.15 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.7 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)
		H-BEM
0.2	0.02	30.732
0.2	0.04	58.877
0.2	0.06	83.559
0.2	0.08	103.756
0.2	0.10	118.518
0.2	0.12	127.263
0.2	0.14	129.914
0.2	0.16	126.601
0.2	0.18	117.089

d) Problem bölgesinde 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de -2 nC 'luk noktasal yüklerin bulunması: Yapılan bu analizde, küre-düzlem elektrot sistemine ait problem bölgesinde homojen olarak 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu ve $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ile $x=0.3$, $y=0.1$ 'de -2 nC 'luk iki zıt kutuplu noktasal yükün bulunması durumunda meydana gelen potansiyel dağılımı H-BEM programıyla hesaplanmıştır.

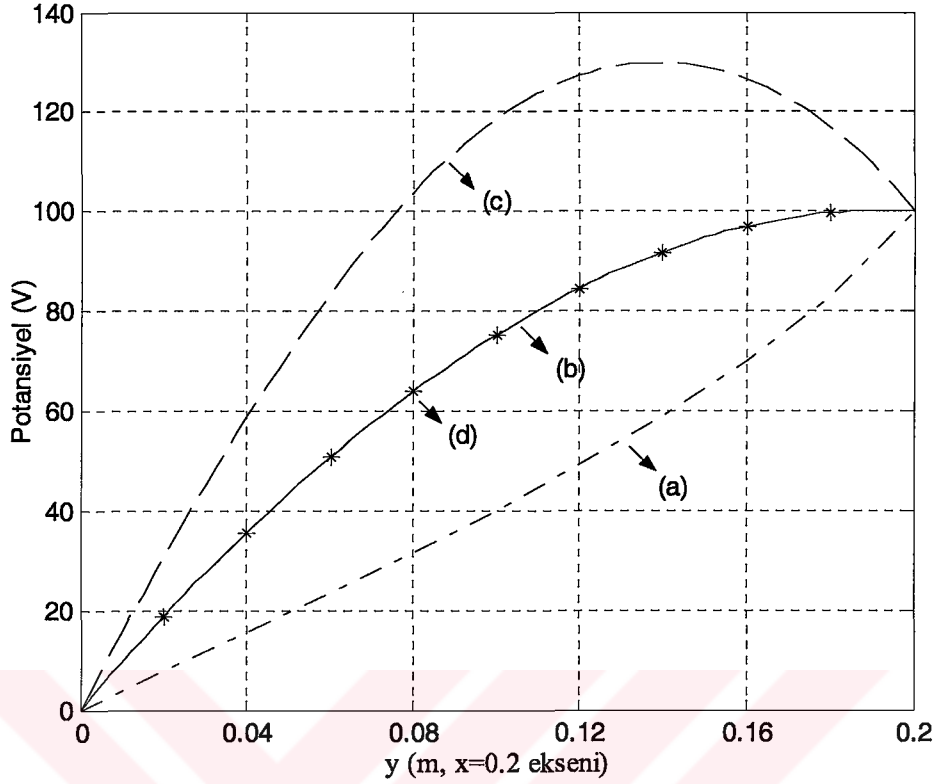


Şekil 6.16 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.8 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.3$, $y=0.1$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük bulunan küre-düzlem elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)
		H-BEM
0.2	0.02	18.767
0.2	0.04	35.699
0.2	0.06	50.783
0.2	0.08	63.983
0.2	0.10	75.266
0.2	0.12	84.576
0.2	0.14	91.837
0.2	0.16	96.936
0.2	0.18	99.709

Yapılan bu analizde $x=0.2$ eksenini boyunca elde edilen potansiyel değerlerinin, problem bölgesinde sadece 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğunun bulunduğu örnekte elde edilen değerlere eşit olduğu görülmektedir. Bu durum denk.(6.1) gözönünde bulundurularak, bir 'a' noktasına eşit uzaklıkta bulunan zıt kutuplu eşit büyüklükte iki noktasal yükün 'a' noktasında birbirine eşit ve zıt büyüklükte potansiyel değerler oluşturacağı sonucu çıkarılır.



Şekil 6.17 Küre-düzlem elektrot sisteminin $x=0.2$ eksenı boyunca;

(a) yük yoğunluğunun bulunmaması;

(b) 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu,

(c) 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.1$, $y=0.3$ 'de 2 nC 'luk noktasal yük,

(d) 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, $x=0.1$, $y=0.1$ 'de 2 nC ve $x=0.1$, $y=0.3$ 'de -2 nC 'luk noktasal yük,

durumlarına ait potansiyel değişimleri

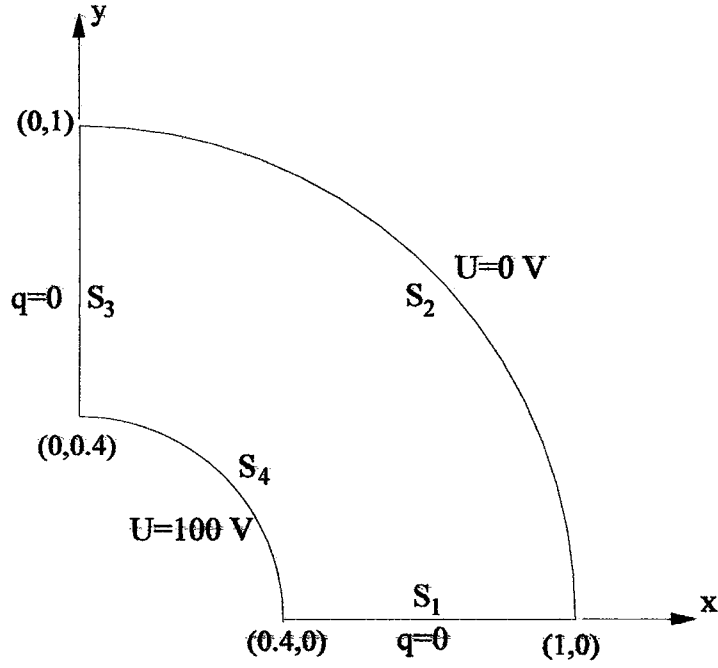
6.4. Koaksiyel Kablo

Bu örnekte, Şekil 6.18'de görüldüğü gibi homojen yapıya sahip çeyrek kesitli bir koaksiyel kablunun içteki sınırına $U=100 \text{ V}$, dıştaki sınırına $U=0 \text{ V}$ ve arakesitler $q=0$ olmak üzere karışık tip sınır şartı uygulanmış ve potansiyel dağılımı hesaplanmıştır. Problem bölgesi, hazırlanan H-BEM programı ile otomatik olarak 883 adet üçgen eleman ve 71 adet lineer sınır elemanı ile bölmelendirilerek,

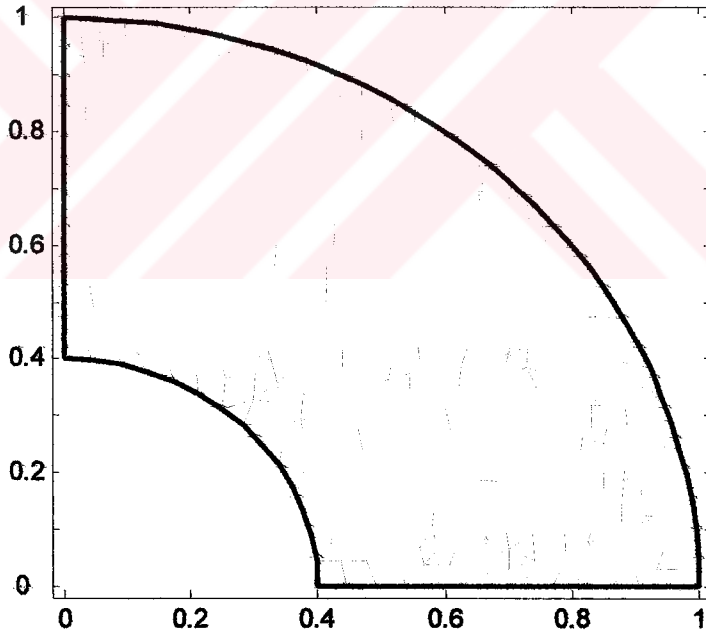
a) Problem bölgesi üzerinde yük yoğunluğunun bulunmaması,

b) Problem bölgesi üzerinde 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması,

durumları için analiz edilmiştir. Bu analiz sonucunda elde edilen potansiyel değerleri eşpotansiyel eğri, tablo ve grafikler ile gösterilmiştir.



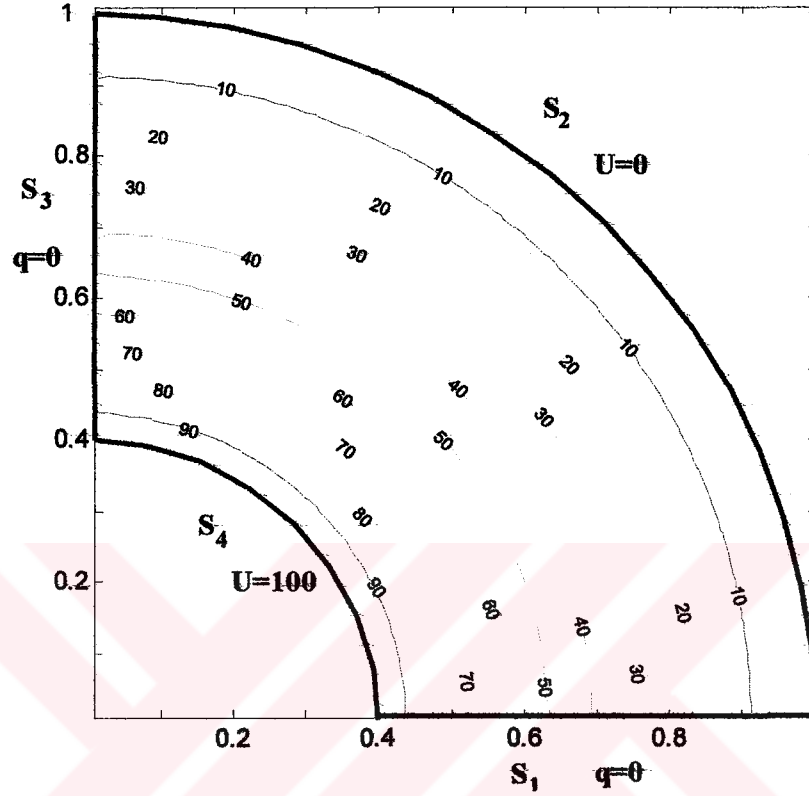
Şekil 6.18 Çeyrek kesitli koaksiyel kablo kesiti



Şekil 6.19 Çeyrek kesitli koaksiyel kablonun 883 adet üçgen eleman 71 adet sınır elemanı ile bölünmesi

a) Problem bölgesinde yük yoğunluğunun bulunmaması: Çeyrek kesitli koaksiyel kablonun bu analiz türünde, analiz edilen bölge içerisinde herhangi bir noktasal yük ve yük yoğunluğunun bulunmaması durumu incelenmiştir. Bu durumda problem bölgesi, Laplace denklemiyle

tanımlanır. H-BEM, ELECTRO ve PDE toolbox programları yardımıyla bulunan sonuçlar Tablo 6.9 ve Şekil 6.23’de gösterilmiştir. Şekil 6.20’de ise H-BEM programıyla elde edilen problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 6.20 Problem bölgesinde herhangi bir yük yoğunluğu bulunmayan çeyrek kesitli koaksiyel kablodaki eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.9 Problem bölgesinde herhangi bir yük yoğunluğu bulunmayan çeyrek kesitli koaksiyel kablo örneğinin çözümü

x	y	Potansiyel (V)		
		H-BEM	ELECTRO	PDE
0.32526	0.32526	84.702	84.747	84.765
0.36769	0.36769	71.328	71.366	71.371
0.41012	0.41012	59.415	59.448	59.458
0.45254	0.45254	48.678	48.706	48.710
0.49497	0.49497	38.901	38.926	38.933
0.53740	0.53740	29.929	29.951	29.961
0.57982	0.57982	21.641	21.659	21.665
0.62225	0.62225	13.936	13.952	13.962
0.66468	0.66468	6.739	6.753	6.756

b) Problem bölgesinde 40 nC/m³'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması: Çeyrek kesitli koaksiyel kabloya ait yapılan bu analizde, Şekil 6.18'de verilen problem bölgesinde homojen 40 nC/m³'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması durumunda $\epsilon_r=3$ ve $\epsilon_r=5$ şeklinde iki farklı bağıl dielektrik katsayısı değerleri için ayrı ayrı potansiyel dağılımı hesaplanmıştır.

Poisson sabiti ($\epsilon_r=3$),

$$\rho = 40 \text{ nC/m}^3 \rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{40 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} = -480\pi = -1507,96 \quad b = -\frac{\rho}{\epsilon} = -1507,96$$

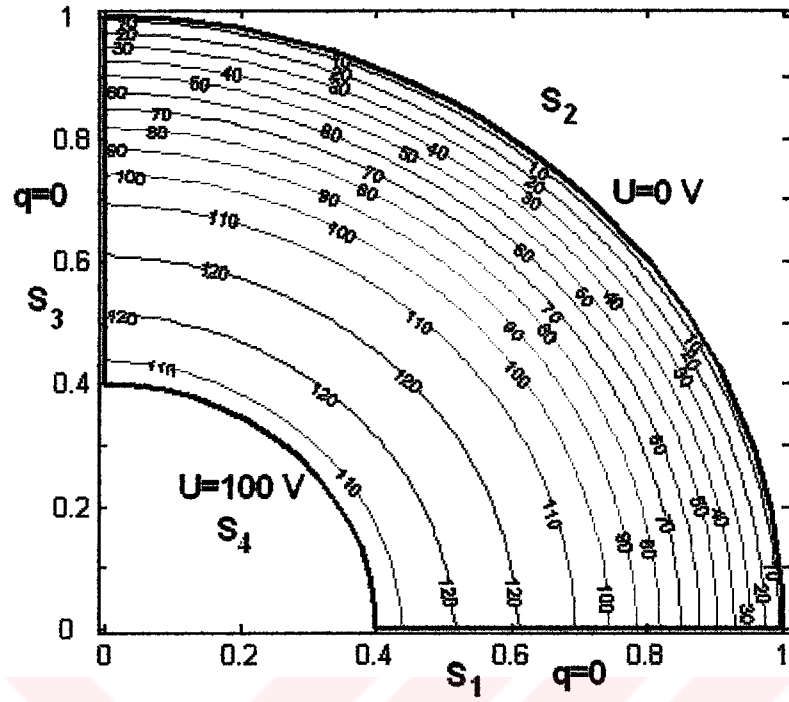
Poisson sabiti ($\epsilon_r=5$),

$$\rho = 40 \text{ nC/m}^3 \rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{40 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} = -288\pi = -904,78 \quad b = -\frac{\rho}{\epsilon} = -904,78$$

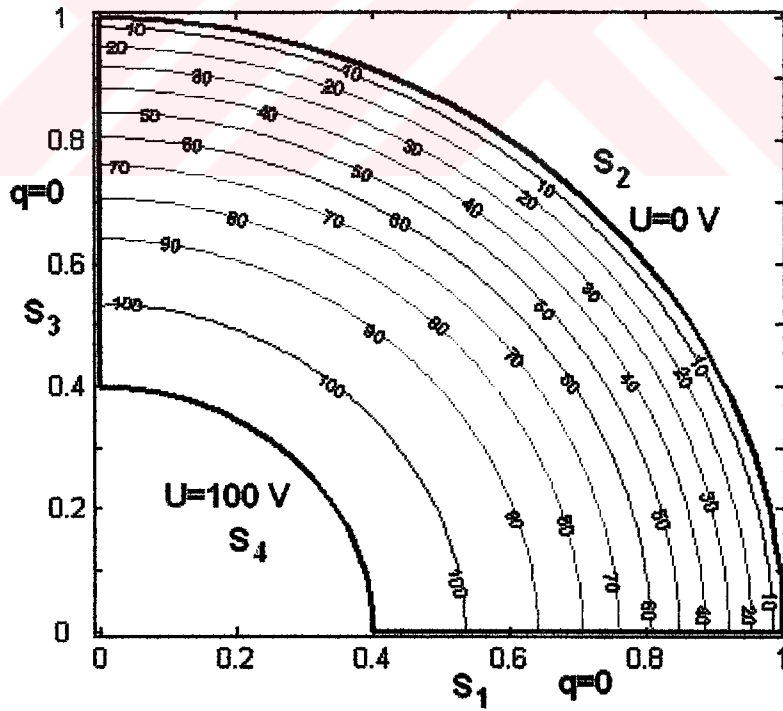
H-BEM ve PDE toolbox programları yardımıyla bulunan sonuçlar tablo 6.10 ve Şekil 6.23'de gösterilmiştir. Şekil 6.21 ve Şekil 6.22'de ise H-BEM programıyla $\epsilon_r=3$ ve $\epsilon_r=5$ durumlarına göre elde edilen problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.

Tablo 6.10 Problem bölgesinde 40 nC/m³ hacimsel yük yoğunluğu bulunan koaksiyel kablo örneğinin çözümü

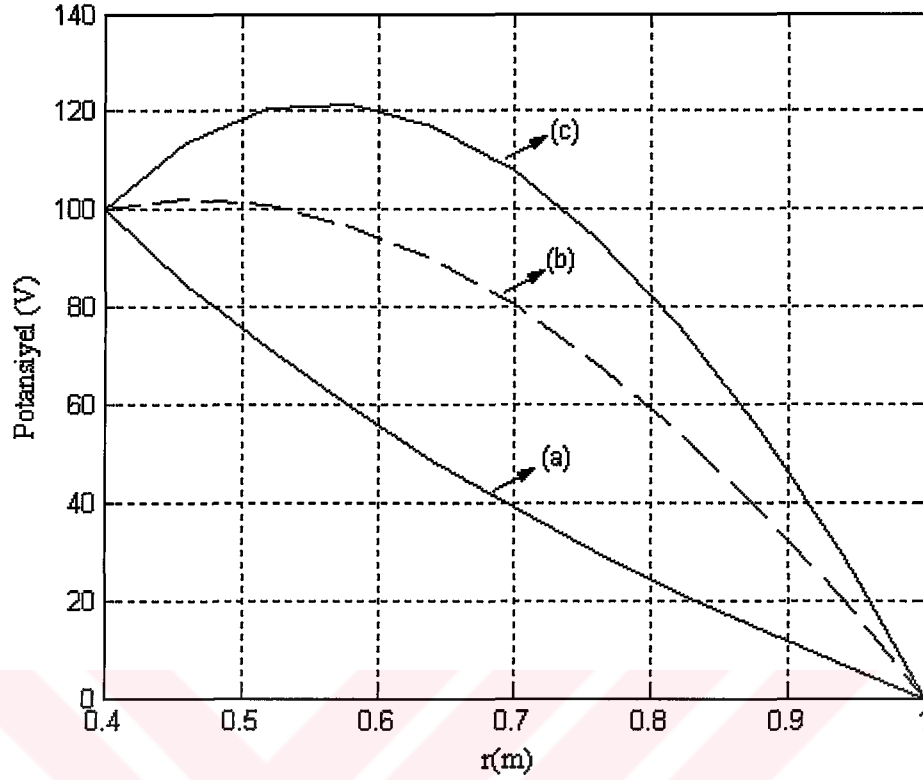
x	y	Potansiyel (V)			
		H-BEM ($\epsilon_r=3$)	PDE ($\epsilon_r=3$)	H-BEM ($\epsilon_r=5$)	PDE ($\epsilon_r=5$)
0.32526	0.32526	113.633	113.584	102.061	102.054
0.36769	0.36769	120.426	120.404	100.787	100.795
0.41012	0.41012	121.354	121.355	96.578	96.594
0.45254	0.45254	117.035	117.027	89.693	89.707
0.49497	0.49497	107.906	107.937	80.304	80.336
0.53740	0.53740	94.306	94.326	68.555	68.572
0.57982	0.57982	76.533	76.563	54.576	54.598
0.62225	0.62225	54.771	54.823	38.437	38.492
0.66468	0.66468	29.205	29.279	20.219	20.284



Şekil 6.21 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan ve $\epsilon_r=3$ olan koaksiyel kablonun potansiyel dağılımı



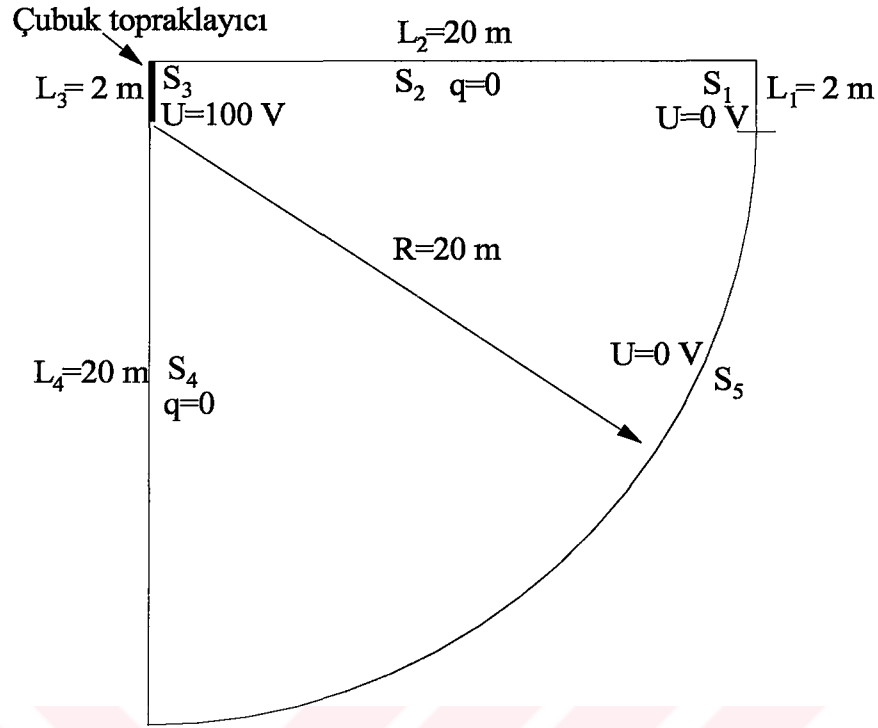
Şekil 6.22 Problem bölgesinde 40 nC/m^3 hacimsel yük yoğunluğu bulunan ve $\epsilon_r=5$ olan koaksiyel kablonun potansiyel dağılımı



Şekil 6.23 Koaksiyel kablonun radyal yönü boyunca; (a) yük yoğunluğunun bulunmaması, (b) $\epsilon_r=5$ olması ve 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması, (c) $\epsilon_r=3$ olması ve 40 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması, durumlarına ait potansiyel değişimleri

6.5. Çubuk Topraklayıcı

Bu uygulama örneğinde, elektrik tesislerindeki topraklamada yaygın olarak kullanılan topraklayıcı türlerinden biri olan çubuk topraklayıcı seçilmiştir. Bu analizi yapmak amacıyla model olarak 16 mm çapında ve 2 m boyunda bir çubuk topraklayıcı gözönüne alınmıştır. Referans toprak kavramına uygun olarak bu topraklayıcıdan 20 m uzakta bulunan her noktada potansiyel değerinin sıfır volt olduğu kabul edilmiştir. Çubuk topraklayıcısının gerilim değeri, diğer gerilim değerlerine geçişi normalize ederek kolaylaştırmak amacıyla 100 volt olarak kabul edilmiştir. Bu şekilde düşünülerek oluşturulan model Şekil 6.24'de gösterilmiştir. Böylece bu modelin sınır şartları, Şekil 6.24'te de görüldüğü gibi S_3 sınırlarında $U=100 \text{ V}$, S_1 ile S_5 sınırlarında $U=0 \text{ V}$ ve S_2 ile S_4 sınırlarında $q=0$ şeklinde karışık tip sınır şartından meydana gelmiştir (Kalenderli v.d., 2003).

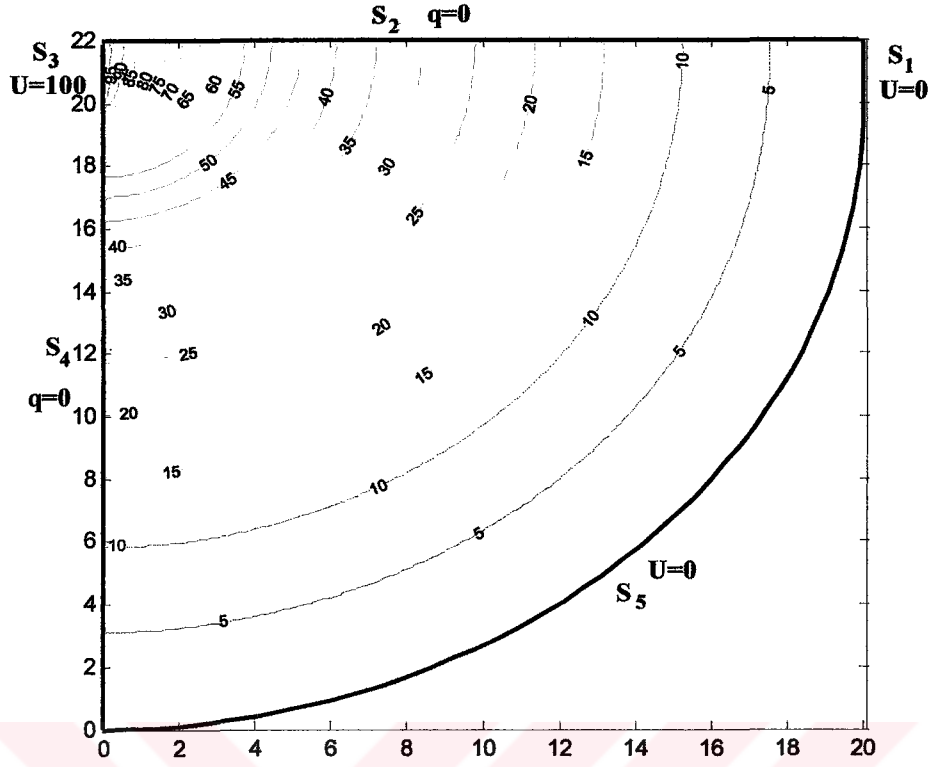


Şekil 6.24 Çubuk topraklayıcı modeli

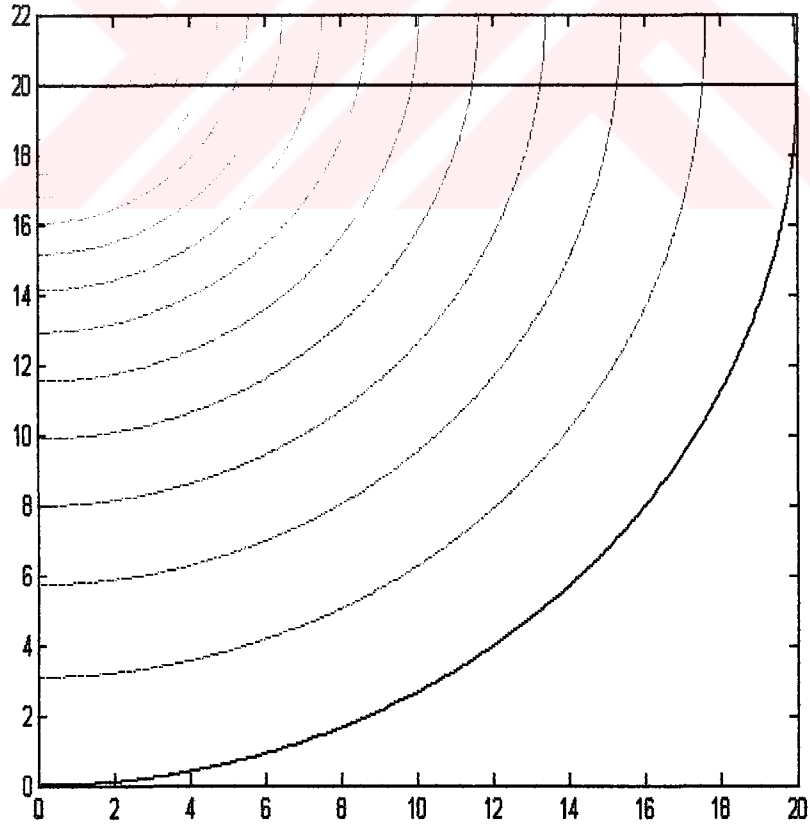
Çubuk topraklayıcı modeli,

- a) Problem bölgesinde herhangi bir yük etkisinin bulunmaması,
 - b) Problem bölgesinde $x=10$ ve $y=20$ koordinatında 200 nC' luk noktasal yük bulunması,
- durumlarına göre analizi yapılmıştır.

a) Problem bölgesinde herhangi bir yük etkisinin bulunmaması: Çubuk topraklayıcının bu analizinde, analiz edilen bölge içerisinde herhangi bir noktasal yük ve yük yoğunluğunun bulunmaması durumu incelenmiştir. Bu durumda problem bölgesi Laplace denklemiyle tanımlanır. Toprak yüzeyinde çubuk topraklayıcıdan itibaren 2 m aralıklarla H-BEM, ELECTRO ve PDE toolbox programları yardımıyla bulunan sonuçlar Tablo 6.11 ve Şekil 6.26'da gösterilmiştir. Tablo 6.11'deki sonuçlar sadece sınır üzerinde yapılan hesaplamalar sonucunda bulunmuştur. Şekil 6.25'de H-BEM programıyla elde edilen sonuçlarla problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.



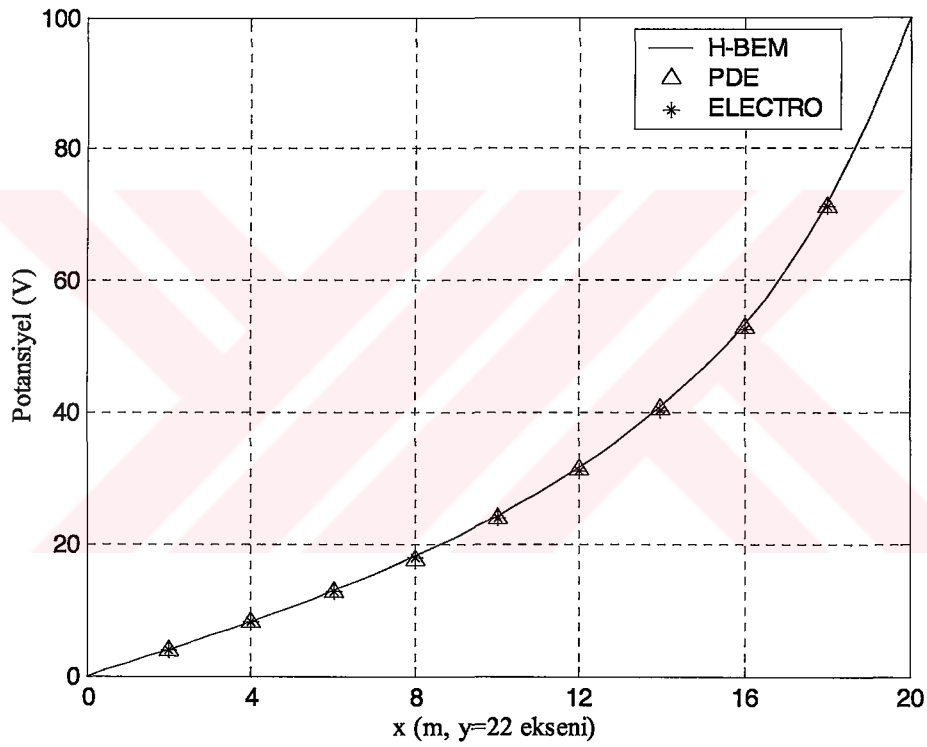
Şekil 6.25 Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan çubuk topraklayıcı modelinin eşpotansiyel dağılımı



Şekil 6.26 Çubuk topraklayıcı modelinin PDE toolbox programıyla elde edilen eşpotansiyel dağılımı

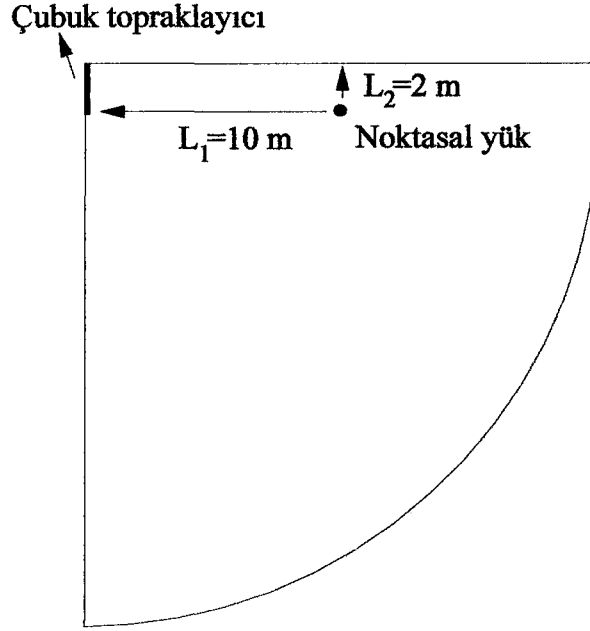
Tablo 6.11 Yük etkisi bulunmayan çubuk topraklayıcı modelinin çözümü

x	y	Potansiyel (V)		
		H-BEM	ELECTRO	PDE
2	22	71.841	71.087	71.324
4	22	53.373	52.633	52.871
6	22	40.911	40.298	40.495
8	22	31.653	31.163	31.323
10	22	24.297	23.915	24.040
12	22	18.176	17.888	17.571
14	22	12.907	12.701	12.768
16	22	8.241	8.110	8.152
18	22	3.998	3.985	3.951

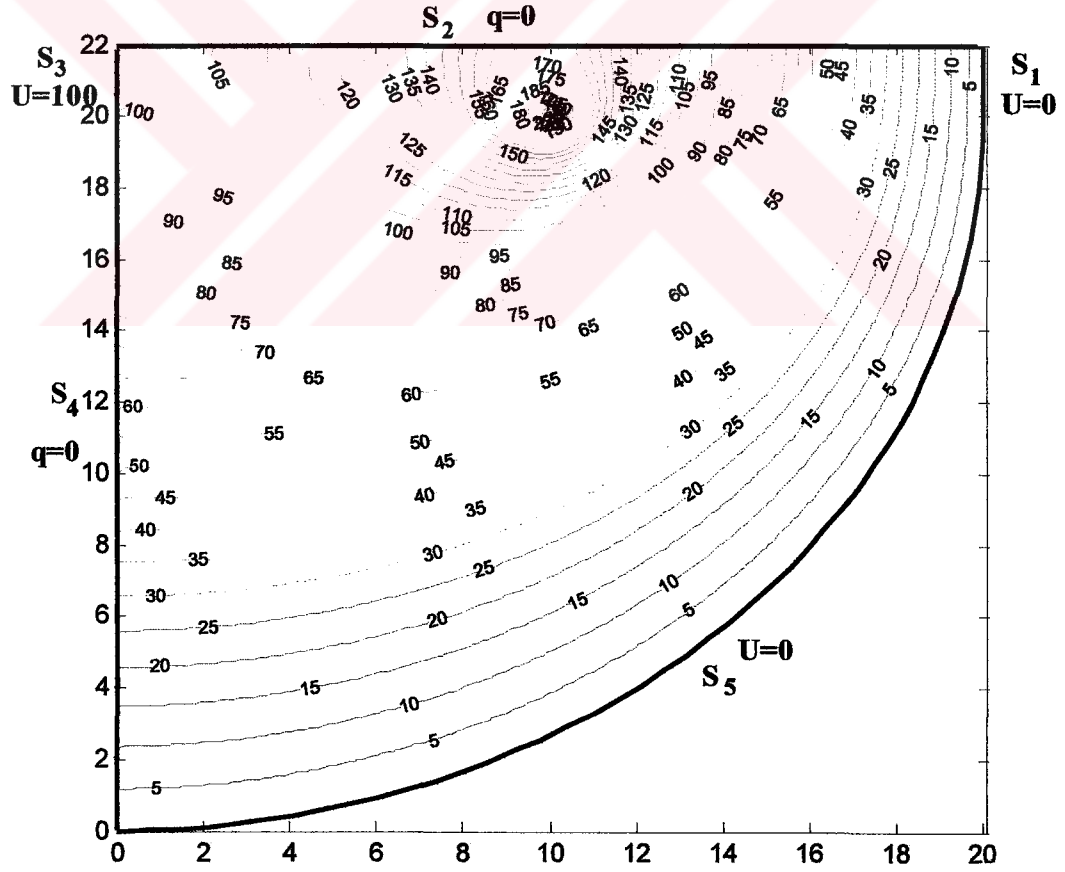


Şekil 6.27 Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan çubuk topraklayıcının potansiyel dağılımı

b) Problem bölgesinde $x=10$ ve $y=20$ koordinatında 200 nC 'luk noktasal yük bulunması: Yapılan bu analizde, Şekil 6.26'da görüldüğü gibi çubuk topraklayıcıdan 10 m uzakta ve yerin 2 m altında 200 nC 'luk bir noktasal yük durumuna göre çubuk topraklayıcı modelinin potansiyel dağılımı incelenmiştir. Toprağın bağıl dielektrik katsayısı 10 birim ($\epsilon_r=10$) olarak hesaplamaya katılmıştır. Şekil 6.28'de H-BEM programı ve Şekil 6.29'da PDE toolbox programlarıyla elde edilen sonuçlarla problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir. Tablo 6.13'de toprak yüzeyinde çubuk topraklayıcıdan itibaren 2 m aralıklarla elde edilen potansiyel değerleri verilmiştir.



Şekil 6.28 Problem bölgesinde noktasal yük bulunan çubuk topraklayıcı modeli



Şekil 6.29 Çubuk topraklayıcı modelinin H-BEM programıyla elde edilen eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.12 $x=10$ ve $y=20$ noktasında 200 nC'luk yük bulunan çubuk topraklayıcı modelinin çözümü

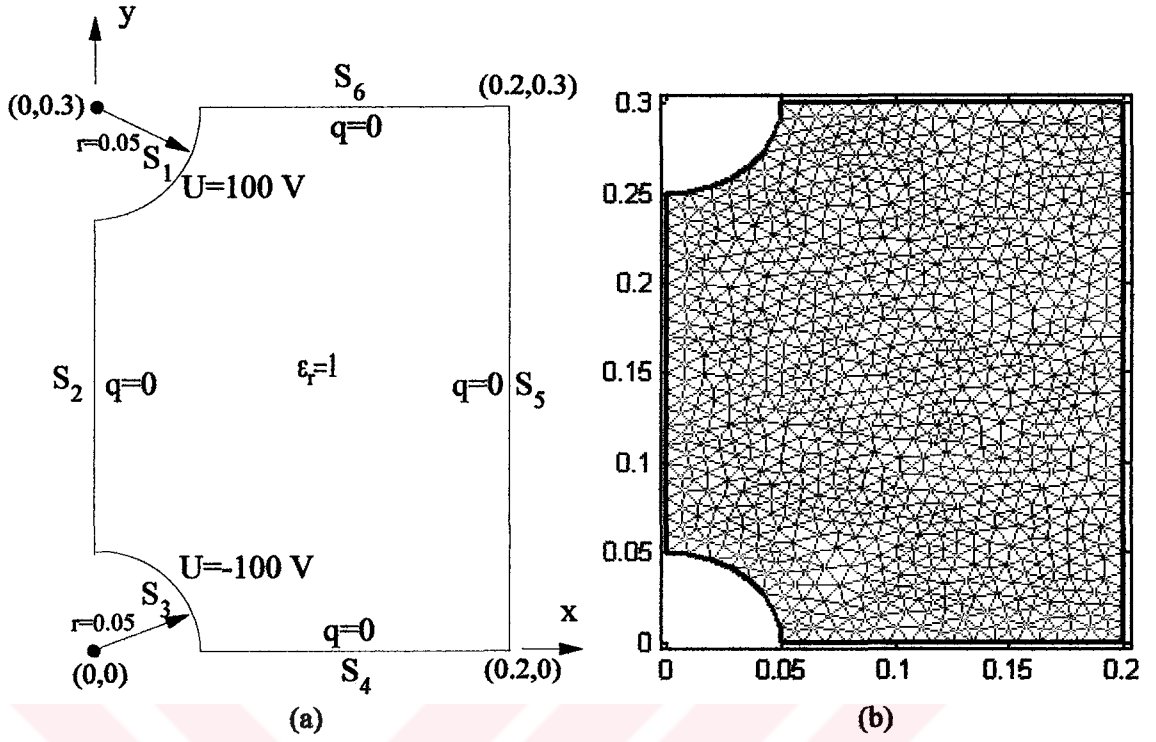
x	y	Potansiyel (V)
		110 sınır-2454 üçgen eleman
2	22	104.085
4	22	112.461
6	22	127.459
8	22	150.643
10	22	166.290
12	22	132.297
14	22	90.299
16	22	55.769
18	22	26.569

6.6. Eksenel Simetrik Küre-Küre Elektrot Sistemi

Bu örnekte, Şekil 6.30.a'da görüldüğü gibi homojen yapıya sahip, bağıl dielektrik katsayısı 1 birim olan ($\epsilon_r=1$) eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin potansiyel dağılımı hesaplanmıştır. Problem bölgesi, hazırlanan H-BEM programı ile otomatik olarak 1001 adet üçgen eleman ve 97 adet lineer sınır elemanı ile bölmeleştirilerek,

- Problem bölgesi üzerinde yük yoğunluğunun bulunmaması,
- Problem bölgesi üzerinde 10 nC/m³'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması,
- Problem bölgesinde $x=0.15$ ve $y=0.15$ koordinatında -1 nC'luk noktasal yük bulunması,
- Problem bölgesinde $x=0.02$ ve $y=0.15$ koordinatında 1 nC'luk noktasal yük bulunması,

durumları için analiz edilmiştir. Bu analiz sonucunda elde edilen potansiyel değerleri eşpotansiyel eğri, tablo ve grafikler ile gösterilmiştir.



Şekil 6.30 (a) Eksenel simetrik küre-küre elektrot sistemi, (b) Problem bölgesinin 1001 adet üçgen eleman 97 adet sınır elemanı ile bölünmesi

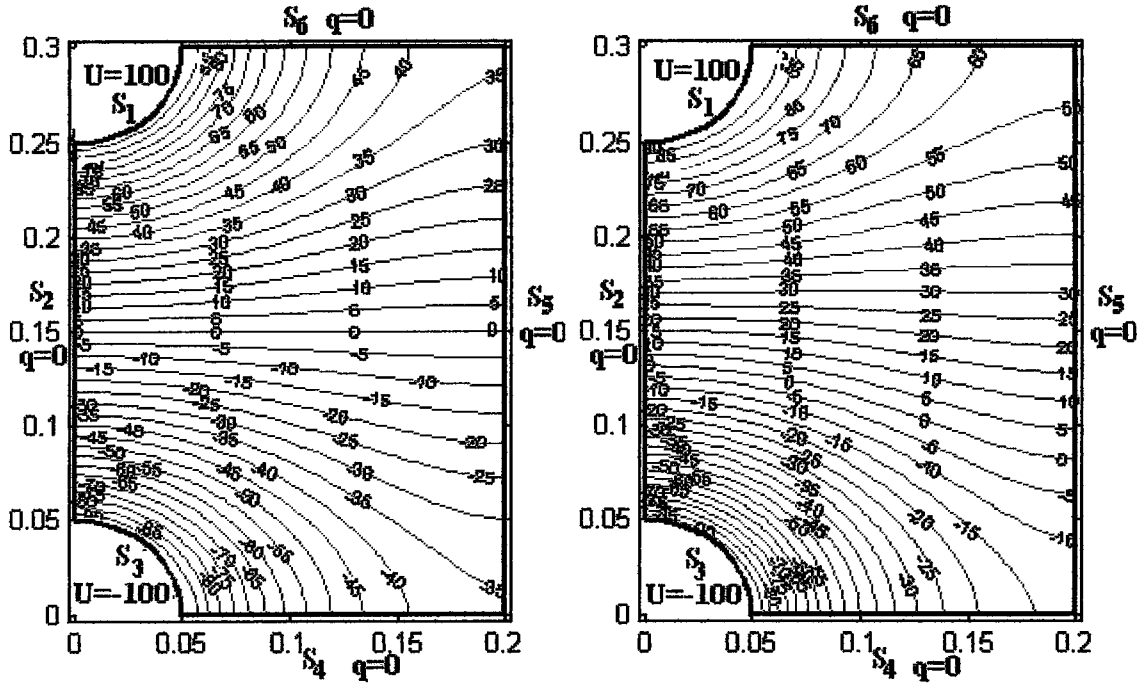
a) Problem bölgesi üzerinde yük yoğunluğunun bulunmaması: Eksenel simetrik küre-küre elektrot sistemi için yapılan bu analizde, analiz edilen bölge içerisinde herhangi bir noktasal yük ve yük yoğunluğunun bulunmaması durumu incelenmiştir. H-BEM programı ile problem bölgesi sınırı 136 adet lineer sınır elemanı ile bölünerek analiz yapılmıştır. H-BEM programıyla bulunan sonuçlar Tablo 6.13 ve Şekil 6.33'de gösterilmiştir. Şekil 6.31.a'da ise problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.

b) Problem bölgesinde 1 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması: Yapılan bu analizde, küre-küre elektrot sistemine ait problem bölgesinde homojen olarak 1 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması durumunda potansiyel dağılımı elde edilmiştir. H-BEM ve PDE toolbox programları yardımıyla bulunan sonuçlar Tablo 6.13 ve Şekil 6.33'de gösterilmiştir. Şekil 6.31.b'de ise problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.

Buna göre problem bölgesinin bağıl dielektrik katsayısı 1 olması nedeniyle ($\epsilon_r=1$) Poisson sabiti,

$$\rho = 10 \text{ nC/m}^3 \rightarrow -\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{10 \cdot 10^{-9}}{1 \cdot \frac{10^{-9}}{36\pi}} = -360\pi = -1130.94 \quad b = -\frac{\rho}{\epsilon} = -1130.94$$

olur.



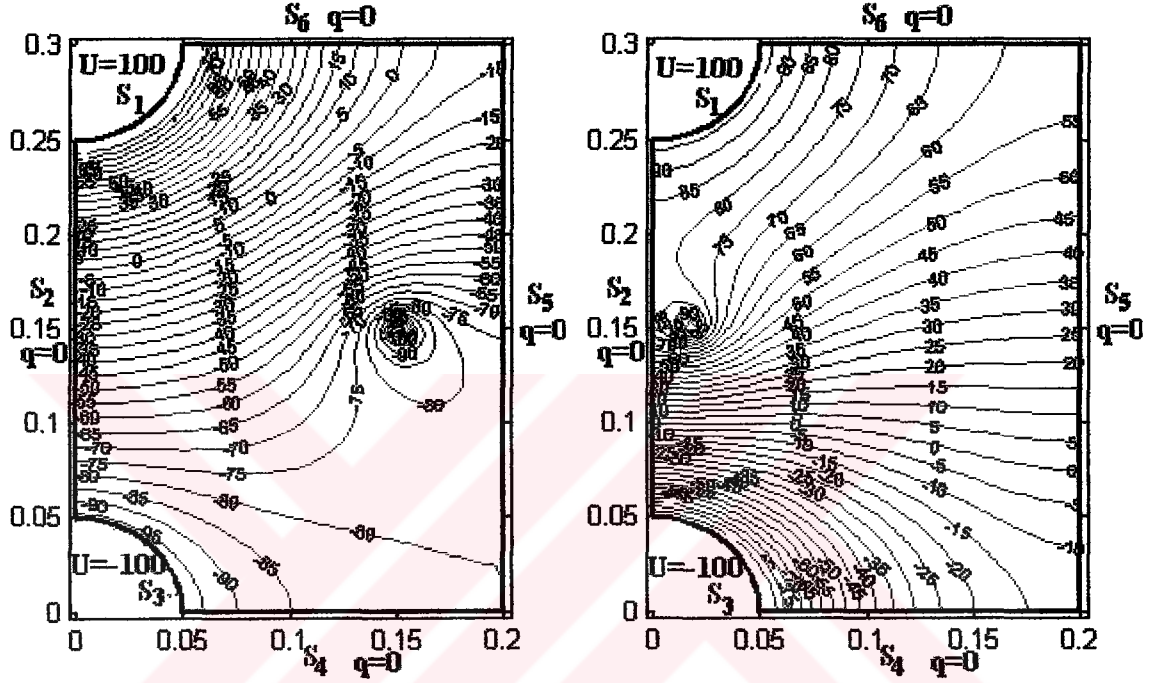
Şekil 6.31 (a) Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan, (b) Problem bölgesinde 10 nC/m^3 'lük yük yoğunluğu bulunan, eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.13(a) Problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmayan, (b) Problem bölgesinde 10 nC/m^3 'lük yük yoğunluğu bulunan, eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)	
		(a)	(b)
0	0.23	72.571	78.764
0	0.21	51.223	61.467
0	0.19	32.874	45.722
0	0.17	16.094	30.409
0	0.15	0.000	14.790
0	0.13	-16.094	-1.778
0	0.11	-32.874	-20.025
0	0.09	-51.223	-40.978
0	0.07	-72.572	-66.378

c) Problem bölgesinde $x=0.15$ ve $y=0.15$ koordinatında -1 nC 'luk noktasal yük bulunması: Yapılan bu analizde, eksenel simetrik küre-küre elektrot sistemine ait problem bölgesinde $x=0.15$ ve $y=0.15$ koordinatında -1 nC 'luk noktasal yük bulunması, durumunda meydana gelen potansiyel dağılımı H-BEM programıyla hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 6.14 ve Şekil 6.33'de gösterilmiştir. Şekil 6.32.a'da ise problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.

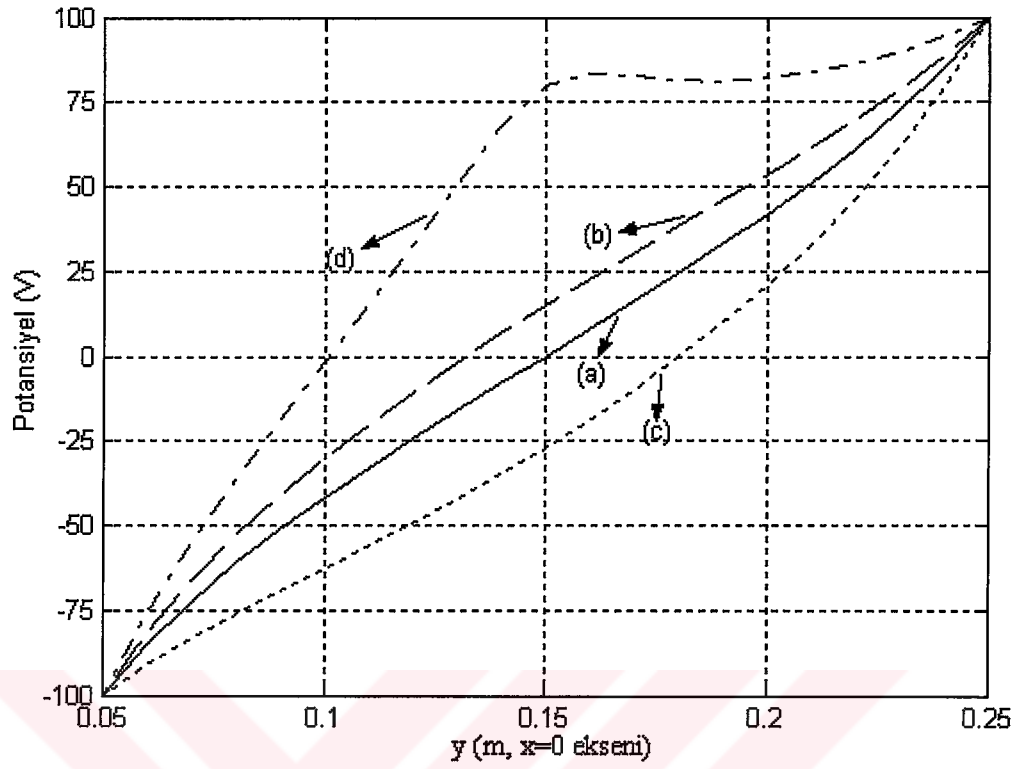
d) Problem bölgesinde $x=0.02$ ve $y=0.15$ koordinatında 1 nC 'luk noktasal yük bulunması: Yapılan bu analizde, aksenal simetrik küre-küre elektrot sistemine ait problem bölgesinde $x=0.02$ ve $y=0.15$ koordinatında 1 nC 'luk noktasal yük bulunması, durumunda meydana gelen potansiyel dağılımı H-BEM programıyla hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar Tablo 6.14 ve Şekil 6.32'de gösterilmiştir. Şekil 6.32.b'de ise problem bölgesinin eşpotansiyel dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 6.32 (a) Problem bölgesinde $x=0.15$ ve $y=0.15$ koordinatında -1 nC 'luk noktasal yük, (b) Problem bölgesinde $x=0.02$ ve $y=0.15$ koordinatında 1 nC 'luk noktasal yük, bulunan aksenal simetrik küre-küre elektrot sisteminin eşpotansiyel dağılımı

Tablo 6.14(a) Problem bölgesinde $x=0.15$ ve $y=0.15$ koordinatında -1 nC 'luk noktasal yük, (b) Problem bölgesinde $x=0.02$ ve $y=0.15$ koordinatında 1 nC 'luk noktasal yük, bulunan aksenal simetrik küre-küre elektrot sisteminin çözümü

x	y	Potansiyel (V)	
		(a)	(b)
0	0.23	61.766	89.922
0	0.21	33.008	83.697
0	0.19	9.698	81.165
0	0.17	-9.966	82.688
0	0.15	-27.011	79.646
0	0.13	-42.155	50.500
0	0.11	-56.050	15.416
0	0.09	-69.438	-18.749
0	0.07	-83.377	-55.221



Şekil 6.33 Eksenel simetrik küre-küre elektrot sisteminin $x=0$ eksenı boyunca;
 (a) yük yoğunluğunun bulunmaması;
 (b) 10 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu bulunması,
 (c) $x=0.15$, $y=0.15$ 'de -1 nC 'luk noktasal yük bulunması,
 (d) $x=0.02$, $y=0.15$ 'de 1 nC 'luk noktasal yük bulunması,
 durumlarına ait potansiyel değişimleri

7. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Poisson denklemi tipindeki elektrik alan problemlerinin çözümü için sınır elemanları yöntemi kullanılmıştır. Bu amaca yönelik olarak, sınır elemanları yönteminin matematiksel teorisi incelendikten sonra MATLAB’da lineer sınır elemanları kullanılarak elektrik alan analizi yapan H-BEM isimli bir bilgisayar programı yazılmıştır.

Poisson denklemi tipindeki elektrik alan problemlerinin sınır elemanları yöntemiyle analizi için; ilk önce, problemi bölgede sağlayan Poisson tipindeki ikinci dereceden kısmi diferansiyel denklem ağırlıklı artıklar yöntemi uygulanarak sınır integral denklemlerine dönüştürülür. Bu sınır integral denklemlerinde tanımlanan fiziksel değişkenler (potansiyel ve normale göre türevi) lineer interpolasyon fonksiyonları ile ifade edildikten sonra sınır integral denklemi ayrıştırılarak sistem matrisi elde edilir. Poisson denkleminde elde edilen sınır integral denkleminde ayrıca bir bölge integral terimi de bulunur. Bu bölge integralinin çözümü için hücre yaklaşımı yöntemi kullanılmıştır. Hücre yaklaşımı yöntemine göre yapılan analizlerde, problem bölgesi sonlu elemanlar yöntemindeki gibi hücreler ile bölmelendirilmiştir. Bölge integral terimi, Gauss alan yöntemine dönüştürülerek her sınır düğümü ile bütün hücreler arasındaki ilişki sonucunda hesaplanılmıştır. Sınır şartları uygulandıktan sonra sınırdaki bilinmeyen değerler sistem matrislerinin çözümüyle elde edilir. Bulunan ve bilinen sınır değerleri kullanılarak, iç noktalarda oluşturulan sistem matrisi çözümü sonucunda iç noktalardaki potansiyel değeri hesaplanır.

Problem bölgesi üzerinde yük yoğunluğunun yanı sıra, noktasal bir yükün etkisi de söz konusu olabilir. Sınır elemanları yöntemiyle bu noktasal yüklere göre elektrik alan analizi oldukça basit ve rahat bir şekilde yapılır.

Uygulama örnekleri olarak kare sınırlı elektrot, koaksiyel kablo, küre-düzlem elektrot, küre-küre elektrot ve çubuk topraklayıcı sistemleri seçilmiştir. Bu uygulama örnekleri H-BEM programı ile problem bölgesi üzerinde yük yoğunluğunun bulunmaması, yük yoğunluğunun bulunması ve noktasal yük bulunması durumlarına göre ayrı ayrı incelenmiştir. Analiz edilen problemin sınırları lineer sınır elemanlarıyla, bölgesi ise üçgen elemanlarla bölmelenmiştir. Ayrıca bu örneklerin ELECTRO ve MATLAB tabanlı PDE toolbox programları ile analizleri yapılmıştır. Yapılan analizler sonucunda H-BEM programının sonuçları ile ELECTRO ve PDE toolbox programının sonuçlarının örtüştüğü görülmüştür.

H-BEM programıyla, analiz edilen problemin sınırlarının lineer sınır elemanlara ve bölgesinin üçgen elemanlara ayrıştırılması için otomatik bölmeleme yapılmıştır. Bunun için analizi yapılacak olan problemlerin sınır parçalarını tanımlayan programlar yazılmış ve MATLAB programına ait bazı program komutları yardımıyla otomatik bölmeleme işlemleri yapılmıştır.

H-BEM programıyla problem bölgesinde yük yoğunluğu bulunmaması ve bulunması durumlarının analizlerinin yanı sıra, problem bölgesinde noktasal yük bulunması durumuna göre analizlere de yer verilmiş ve uygulama örneklerinde bu duruma ait hesaplamalar yapılmıştır. Problem bölgesinde noktasal yük bulunması durumunda ELECTRO ve PDE toolbox programlarıyla analizler yapılamamaktadır.

Kare sınırlı elektrot örneği Dirichlet tipi sınır şartı ile incelenmiştir. Buna göre yapılan ilk analizde, problem bölgesi üzerinde yük yoğunluğunun bulunmaması ve problem bölgesinin sınırlarının 0 V'luk potansiyele sahip olması durumunda problem bölgesinin 0 V'luk potansiyele sahip olduğu gözlenmiştir. Bu örneğe ait ikinci analizde ise problem bölgesinde homojen olarak 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğunun bulunması durumu incelenmiştir. Analiz sonucunda sınırlardaki 0 V'luk potansiyel değeri, dielektrik katsayısı ve 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğunun etkisi nedeniyle pozitif değerli potansiyel dağılımı elde edilmiş ve 0 V'luk sınırlardan uzaklaştıkça potansiyel değerin arttığı görülmüştür. Kare sınırlı düzlemsel elektrot örneğine ait üçüncü analizde ise S_4 sınırına yakın bir noktada 2 nC'luk bir noktasal yük bulunması durumu incelenmiştir. Bu analiz sonucunda, sınırlardaki 0 V'luk potansiyel değeri, noktasal yükün büyüklüğü ve ortamın dielektrik katsayısının etkisi nedeniyle pozitif değerli potansiyel dağılımı elde edilmiştir. Noktasal yükün tanımlandığı noktada yükün pozitif değerli olması nedeniyle pozitif sonsuz potansiyel değeri elde edilmiş ve noktasal yükten uzaklaşıp sınırlara yaklaştıkça potansiyel değerin sıfıra yaklaştığı görülmüştür. Kare sınırlı düzlemsel elektrot örneğine ait dördüncü analizde ise problem bölgesinde homojen olarak 2 nC/m^3 'lük hacimsel yük yoğunluğu, S_4 sınırına yakın bir noktada 2 nC'luk bir noktasal yük ve S_2 sınırına yakın bir noktada 2 nC'luk bir noktasal yük bulunması durumu incelenmiştir. Bu analiz sonucunda, sınırlardaki 0 V'luk potansiyel değeri, hacimsel yük yoğunluğu, noktasal yüklerin büyüklüğü ve ortamın dielektrik katsayısının etkisi nedeniyle pozitif değerli potansiyel dağılımı elde edilmiştir. Noktasal yüklerden uzaklaştıkça ve sınırlara yaklaştıkça potansiyel değerin sıfıra yaklaştığı görülmüştür. Ayrıca iki noktasal yükün arasındaki potansiyel dağılımın artı sonsuz değerden azalarak tam orta noktada 58 V civarına geldiği görülmüştür. Kare sınırlı düzlemsel elektrot örneğine ait beşinci analizde ise problem bölgesinin S_4 sınırına yakın bir noktada 2 nC'luk bir noktasal yük ve S_2 sınırına yakın bir noktada -2 nC'luk bir noktasal yük bulunması durumu incelenmiştir. Bu analiz sonucunda, sınırlardaki 0 V'luk potansiyel değeri, noktasal yüklerin büyüklüğü ve ortamın dielektrik katsayısının etkisi nedeniyle pozitif ve negatif değerli potansiyel değerler elde edilmiştir. Pozitif değerli noktasal yükün tanımlandığı noktada pozitif sonsuz potansiyel değeri ve negatif değerli noktasal yükün tanımlandığı noktada negatif sonsuz potansiyel değeri elde edilmiştir. İki noktasal yükün eşit ve zıt büyüklükte olması nedeniyle

aralarındaki potansiyel dağılımının artı ve eksi sonsuz değerden azalarak tam orta noktada 0 V olduğu görülmüştür.

Koaksiyel kablo örneğinde iki farklı dielektrik ortam için çözüm yapılmıştır. Aynı yük yoğunluğunda ortamın dielektrik sabiti arttıkça potansiyel değerinin azaldığı ve dolayısıyla elektrik alanının azaldığı görülmektedir.

Analizi yapılan diğer uygulama örneklerinde ise benzer durumlar meydana geldiği gözlenmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmada Poisson denklemi tipindeki elektrik alanların analizinde sınır elemanları yönteminin kullanılmasıyla rahat, hızlı ve hassas sonuçlar elde edilmiştir.

Daha sonraki çalışmalarda Poisson denklemi tipindeki elektrik alanları, karşılıklı sınır elemanları yöntemi (Dual Reciprocity Method, DRM) ile problem bölgesi üçgen elemana bölmelenmeksizin analiz yapılabilir. Ayrıca üç boyutlu elektrik alan problemlerinin analizi için sınır elemanları yöntemi kullanılabilir.



KAYNAKLAR

- Alexander H., D., C., and Daisy, T., C., 2005, *Heritage and Early History of The Boundary Element Method*, Elsevier.
- Aydın, S. H., 2000, "Poisson Denklemi İçin Tekrarlı Radyal Baz Fonksiyonları Kullanarak Karşılıklı Sınır Elemanları Metodu, Yüksek Lisans Tezi, O.D.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Beer, G., and Watson, J. O., 1991, *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineering*, John Wiley and Sons, New York.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., and Wrobel, L.C., 1984, *Boundary Element Techniques (Theory and Applications in Engineering)*, Springer-Verlag.
- DeFigueiredo, T.G.B., 1991, *A New Boundary Element Formulation in Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, New York, London.
- Ekici, S., 2003, *İndirekt Sınır Elemanları Yöntemiyle İki Boyutlu Potansiyel Dağılımının Hesaplanması, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.*
- Erişti, B., 2003, *Sınır Elemanları Yöntemiyle Elektrostatik Alan Problemlerinin Analizinde Parabolik İnterpolasyon Fonksiyonlarının Kullanılması. Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.*
- Gaul, L., Kögl, M., and Wagner, M., 2003, *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*, Springer.
- Gümgüm, S., 2003, *Zamana Bağlı Difüzyon Denklemi İçin Karşılıklı Sınır elemanları Metodu, Yüksek Lisans Tezi, O.D.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.*
- Hunter, P., and Pullan, A., 2002, *FEM-BEM Notes*, The University of Auckland, New Zealand.
- Integrated Engineering Software Inc., 1997, *ELECTRO: Two Dimensional Electric Field Solver, Version 4.1, User and Technical Manual*, Winnipeg, Manitoba, Canada.
- Kalenderli, Ö., Şentürk, E., Öztürk, O.İ., 2003, *Bir Çubuk Topraklayıcı Çevresinde Potansiyel Dağılımının Sonlu Farklar Yöntemi ile Hesaplanması, Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği 10.Ulusal Kongresi, İstanbul.*
- Kythe, P.K., 1995, *An Introduction to Boundary Element Methods*, CRC Press, London, Tokyo, Boca Raton.
- Lim, B. H., 1999, *Computation of Electric Field in High Voltage Insulators*, Thesis Submitted For The Degree of Bachelor, The University of Queensland, Australia.
- Mathews, J. H., 1992, *Numerical Methods for Mathematics, Science and Engineering*, Prentice-Hall, Inc., USA.

- Paris, F., and Canas, J. 1997, Boundary Element Method-Fundamentals and Applications, Oxford University Press, Oxford, New York, Tokyo.
- Patridge, P.W., Brebbia, C.A., and Wrobel, L.C. 1992, The Dual Reciprocity Boundary Element Methods, CMP, Elsevier, Berlin, New York.
- Uyar, M., 2004, Sınır Elemanları Yöntemiyle Elektrik Alan Analizi, Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- The Mathworks, 2002, MATLAB, Version 6.5.
- Yalçın, C., 1991, Fiziğin Temelleri, ODTÜ Fizik Bölümü, Ankara.
- Yıldırım, S., 1999, Yüksek Gerilimli Sistemlerde Elektrik Alanlarının Sınır Elemanları Yöntemi Yardımıyla İncelenmesi, Doktora Tezi, Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Yıldırım, S., Erişti, B., and Erişti, H., 2003, Solution of Electrostatic Field Problem with Parabolic Boundary Elements, Third International Conference on Electrical and Electronics Engineering, Bursa.
- Yıldırım, S., Erişti H., 2004, Çok Yüzeyle Potansiyel Problemlerine Sınır Elemanları Yönteminin Uygulanması, ELECO-2004, Elektrik-Elektronik-Bilgisayar Mühendisliği Sempozyumu, Bursa.

ÖZGEÇMİŞ

Hüseyin ERİŞTİ

Fırat Üniversitesi
Tunceli Meslek Yüksek Okulu
Elektrik Programı, Tunceli
e.posta: heristi@firat.edu.tr

- 1979 Mersin’de doğdu.
- 1992-1995 Mersin Atatürk Endüstri Meslek Lisesi, Elektrik Bölümü’nden mezun oldu.
- 1996-2000 Elazığ Fırat Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi, Elektrik Eğitimi Bölümü’nden mezun oldu.
- 2000-... Fırat Üniversitesi, Tunceli Meslek Yüksekokulu, Elektrik Bölümü’nde okutman olarak çalışmaktadır.
- 2003-... Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elektrik Eğitimi Anabilim Dalında yüksek lisans çalışmasına başladı.