

165883

BANACH ÖRGÜLERİNDE DEĞİŞMEZ ALT UZAYLAR

Sezer SORGUN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Haziran 2005
ANKARA**

Sezer SORGUN tarafından hazırlanan Banach Örgüleri Üzerinde Değişmez Altuzaylar adlı bu tezin Yüksek Lisans. Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Yard.DoçDr.Cevriye TONYALI
Tezin Yöneticisi

Bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan :Prof. Dr. Mefharet KOCATEPE (Bilkent Üni.)



Üye :Doç. Dr. Bahri TURAN (Gazi Üni.)



Üye :Yard. Doç. Dr. Cevriye TONYALI (Gazi Üni.-Danışman)



Üye : _____

Üye : _____

Bu tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.



BANACH ÖRGÜLERİNDE DEĞİŞMEZ ALT UZAYLAR

(Yüksek Lisans Tezi)

Sezer SORGUN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2005

ÖZET

Bu tez çalışmasında V.G.Troitsky' in "On the modulus of C.J.Read' s operator" ve "Lomonosov' s theorem cannot be extended to chains of four operators" adlı makaleleri ile Y.A.Abramovich-C.D.Aliprantis-G.Sirotkin-V.G.Troitsky' in "Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem" makalesi incelenmiştir. Adı geçen makalelerde $T:l_1 \rightarrow l_1$ Read operatörünün modülünün bir değişmez alt uzaya sahip olduğu ve T Read operatörüne karşılık, $TS_1 = S_1T$, $S_1S_2 = S_2S_1$ ve K kompakt olacak biçimde $S_2K = KS_2$ koşullarını sağlayan üç tane S_1 , S_2 , K operatörlerinin bulunduğu gösterilmiştir. Son makalede ise reel Banach uzayı üzerinde verilen bir T operatörünün iki kompleksleştirme yöntemi ve bu elde edilen kompleksleştirmeler ile T ' nin değişmez alt uzaylarına dair bazı sorular sunulmuştur. Buradaki çalışmada da konularla ilgili önbilgiler bir araya getirilmiş, kanıtlardaki boşluklar doldurularak gerekli bilgiler verilmiştir.

Bilim Kodu :403.03.01
Anahtar Kelimeler :Pozitif operatör, Read operatörü, değişmez alt uzaylar
Sayfa Adedi :74
Tezin Yöneticisi :Yard. Doç. Dr. Cevriye TONYALI

INVARIANT SUBSPACES OF BANACH LATTICES**(M. Sc. Thesis)****Sezer SORGUN****GAZI UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****June 2005****ABSTRACT**

In this thesis work we have studied the following papers by V.G.Troitsky: “On the modulus of C.J.Read’ s operator” and “Lomonosov’ s theorem cannot be extended to chains of four operators”, and by Y.A.Abramovich-C.D.Aliprantis-G.Sirotkin-V.G.Troitsky: “Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem”. In the above two papers, they have been shown that the modulus of Read’ s operator $T:l_1 \longrightarrow l_1$ has an invariant subspace, and there are three operators S_1 , S_2 and K such that T commutes with S_1 , S_1 commutes with S_2 , S_2 commutes with K , and K is compact. In the last paper the purpose is to examine two complexification methods of an operator T acting on a real Banach space and present some questions regarding the invariant subspaces of T and those of its complexifications. In the present work, we have collected the necessary definitions and results about the subject. We have given detailed proofs of their theorems.

Science Code : 403.03.01
Key Words :Positive operators, Read’ s operator, invariant subspaces
Page Number :74
Adviser :Associate Professor Cevriye TONYALI

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, tez çalışmamım her safhasında emeği olan, değerli ilgi ve yardımlarını benden esirgemeyen, tecrübesi ile beni yönlendiren ve kendisinden pek çok şey öğrendiğim danışmanım Sayın Yard. Doç. Dr. Cevriye TONYALI' ya, çok değerli fikirleri ile tez çalışmama çok önemli katkılarda bulunan Sayın Arş. Gör. Dr. M. Baki YAĐBASAN' a ve Öğr. Gör.Dr. İ.Onur KIYMAZ' a, çalışmalarımın her aşamasında içten desteğini bana hissettiren eşim Sayın Sevil SORGUN' a en derin saygılarımla teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR	4
2.1. Banach Örgüleri.....	4
2.2. Banach Örgülerinde Operatörler.....	6
2.3. Değişmez Alt Uzaylar.....	7
2.4. Lomonosov Teoremi.....	12
3. BANACH ÖRGÜLERİNDE DEĞİŞMEZ ALT UZAYLAR	23
3.1. I_p Uzayı Üzerinde Operatörler.....	23
3.2. Read Operatörünün Modülü Üzerine.....	25
3.3. Lomonosov Teoreminin Dört Operatör Zincirine Genişleyememesi.....	35
3.4. Read Operatörünün Kommutantları.....	37
3.5. Pozitif Operatörlerin Değişmez Alt Uzayları.....	40
3.6. $C(\Omega)$ Uzayı Üzerinde Çarpım Operatörleri	54
4. DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ VE BAZI AÇIK PROBLEMLER.....	58
KAYNAKLAR	72
ÖZGEÇMİŞ	74

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$x \vee y$	x ve y elemanlarının supremumu
$x \wedge y$	x ve y elemanlarının infimumu
$ x $	x elemanının modülü
x^+ ve x^-	x elemanının pozitif ve negatif kısmı
X^*	X Banach uzayının duali
E^+	E uzayının pozitif kısmı
$\mathcal{L}(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı lineer operatör uzayı
$\mathcal{L}_b(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı sıra sınırlı operatörler uzayı
$\mathcal{L}_r(E, F)$	E uzayından F uzayına tanımlı regüler operatörler uzayı
T^*	T operatörünün adjointi
$\{T\}'$	T operatörü ile değişmeli operatörler kümesi
$\sigma(T)$	T operatörünün spektrumu
$r(T)$	T operatörünün spektral yarıçapı
$r_e(T)$	T operatörünün esaslı spektral yarıçapı
$[A, B]$	A ve B operatörlerinin kommutantı
$[B]$	B operatörünün süper sağ kommutantı
$\langle B \rangle$	B operatörünün süper sol komutantı
N_B	B operatörünün sıfır ideali
R_A	A operatörünün rank ideali

E_u	u elemanı ile üretilen esas ideal
M_ϕ	ϕ fonksiyonu ile üretilen çarpım operatörü
$\ \cdot\ _X$	X Banach uzayı üzerindeki norm
ℓ_1	Mutlak toplanabilir seri teşkil eden dizilerin uzayı
$C(\Omega)$	Skaler değerli sürekli fonksiyonların uzayı
$C_b(\Omega)$	Skaler değerli sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı
$\mathcal{O}_T(x)$	T operatörünün yörünge uzayı
\mathcal{A}	Operatörler cebiri
pd	Yeteri kadar hızla artan dizi koşulu
$G(S)$	S operatörünün grafiği
X_T	T operatörü ile üretilen X uzayı üzerindeki karmaşık yapı

1. GİRİŞ

Matematikte uzun yıllar tartışmalara sebep olmuş bir problem değişmez (invaryant) alt uzay problemidir. Bu problemin ana teması, Banach uzaylar üzerinde her sınırlı operatörün bir aşikar olmayan (non-trivial) kapalı değişmez (invaryant) alt uzayının olup olmadığı sorusudur. Bu problem ile ilgili yapılan bazı önemli çalışmalara değinelim.

1950 yılında M.G.Krein, kompakt bir Hausdorff uzay üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı, $C(\Omega)$ üzerinde her pozitif operatörün bir değişmez alt uzaya sahip olduğunu ispatlamıştır (1).

1954 yılında, N.S.Aronszajn ve K.T.Smith, karmaşık bir Banach uzayı üzerinde tanımlanan her kompakt operatörün aşikar olmayan (non-trivial) kapalı değişmez (invaryant) bir alt uzaya sahip olduğunu ispatlamışlardır (2).

Değişmez alt uzay problemine ilginç bir katkı da 1966 yılında, A.R.Bernstein ve A.Robinson tarafından yapılmıştır. T bir Banach uzayın üzerinde tanımlı sınırlı bir operatör ve sıfırdan farklı bir p polinomu için $p(T)$ kompakt ise T 'nin, aşikar olmayan (non-trivial) kapalı değişmez (invaryant) alt uzaya sahip olduğunu ispatlamışlardır (3).

Değişmez alt uzay problemine en önemli katkıyı 1973 yılında, V.I.Lomonosov sağlamıştır. Lomonosov, karmaşık bir Banach uzay üzerinde tanımlı sınırlı bir T operatörü özdeşliğin bir katı olmayan (non-skaler) bir S operatörü ile değişmeli ve S operatörü de sıfırdan farklı bir K kompakt operatörü ile değişmeli ise T operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı olduğunu söylemiştir (4). Yapmış olduğu bu ispat ile matematik dünyasını oldukça memnun etmiştir.

Genelde değişmez alt uzay problemi olumsuz çözüme sahiptir. Fakat, 1966 yılında, P.Enflo, bir Banach uzayı üzerinde aşikar olmayan (non-trivial) kapalı değişmez alt

uzayları bulunmayan sürekli bir operatöre ilk örneği vermesine rağmen, halen bir çok uzayların yada operatörlerin özel sınıfları için problemin olumlu yönde çözümü umut edilmektedir (5).

Değişmez alt uzay problemi, Hilbert uzayları üzerinde tanımlı operatörler için halen açıktır. Banach örgüleri üzerinde tanımlı operatörlerin diğer geniş bir sınıfı olan pozitif operatörler için bazı özel durumlarda, değişmez alt uzay problemine olumlu cevap verilmektedir.

Banach örgüleri üzerinde pozitif operatörler için değişmez alt uzay problemi Y.A.Abramovich, C.D.Aliprantis ve O.Burkinshaw tarafından çalışılmıştır (6-7-8). 1994 yılında, ilk olarak yakın-kompakt operatörler tanıtılmıştır. Ayrıca gösterilmiştir ki quasinilpotent olan sıfırdan farklı yakın-kompakt (compact-friendly) operatörler ile değişmeli olan her pozitif operatör bir aşikar olmayan (non-trivial), kapalı değişmez alt uzaya sahiptir (7).

1985 yılında, C.J.Read ise ℓ_1 uzayı üzerinde değişmez alt uzaya sahip olmayan sürekli bir operatör örneği vermiştir (9).

Şimdi, yapılan bu çalışmalar ışığında tezin ikinci bölümünde bazı temel tanım ve kavramlar ile birlikte değişmez alt uzay problemi tanıtılıp, Banach uzaylar üzerinde değişmez alt uzaylarla ilgili kullanışlı teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Değişmez alt uzay probleminin ayrılabilir olmayan uzaylar üzerinde tanımlanan bütün sınırlı operatörler için olumlu cevap verdiği ispatlanmıştır. Bunun yanı sıra sonlu boyutlu uzaylar için de ispatlar yapılmıştır. Lomonosov teoremleri ve bununla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm, Banach örgüleri üzerinde değişmez alt uzay probleminde yapılan araştırmalara ayrılmıştır. Bu bölümün birinci kısmında ℓ_p uzayı üzerinde, bazı şartlar altında operatörlerin değişmez alt uzaylarının varlığı üzerinde durulacaktır. İkinci kısmında ise ℓ_1 uzayı üzerinde Read operatörü tanıtılarak, modülünün bir

değişmez alt uzaya sahip olduğu gösterilecektir. Daha sonra pozitif operatörler için değişmez alt uzaylarla (hatta ideallerle) ilgili bazı teorem ve ispatlar verilecektir. Y.A.Abramovich, C.D.Aliprantis ve O.Burkinshaw tarafından tanıtılan yakın-kompakt operatörler verilir, bu operatörlerin değişmez alt uzayları incelenecektir. Devamında Ω kompakt Hausdorff uzay olmak üzere $C(\Omega)$ üzerinde çarpım operatörleri tanıtılacak ve bazı önemli karakterizasyonları verilecektir.

Dördüncü bölümde ise bir reel Banach uzayı üzerine bir karmaşık yapı konularak bir karmaşık Banach uzayı elde edilecektir. Sonsuz boyutlu reel Banach uzay üzerinde bir operatörün aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayları bulunup bulunmayacağı araştırılmış ve bununla ilgili ortaya atılan bazı sonuç ve ortaya atılan tahminler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE BAZI SONUÇLAR

2.1. Banach Örgüleri

Tanım 2.1.1 : E reel vektör uzayı üzerinde bir " \leq " sıralama bağıntısı tanımlansın.

(E, \leq) sıralı kümesi

$$(i) \quad x, y \in E, x \leq y \Rightarrow \forall z \in E \text{ için } x+z \leq y+z,$$

$$(ii) \quad x, y \in E, x \leq y \Rightarrow \forall \alpha \geq 0 \text{ için } \alpha x \leq \alpha y,$$

koşullarını sağlıyorsa E' ye bir sıralı vektör uzayı denir.

Tanım 2.1.2 : E sıralı vektör uzayı olsun. Her bir $x, y \in E$ çifti için $x \vee y = \sup\{x, y\} \in E$ ($x \wedge y = \inf\{x, y\} \in E$) ise E' ye Riesz uzayı denir.

Riesz uzayı yerine, literatürde vektör örgüsü de kullanılmaktadır.

Tanım 2.1.3 : E Riesz uzayı için $E^+ = \{x : 0 \leq x \in E\}$ kümesine E' nin pozitif kısmı ve E^+ 'in elemanlarına da E' nin pozitif elemanları denilmektedir.

Tanım 2.1.4 : Riesz uzayında alınan bir x elemanının pozitif kısmı $x^+ = x \vee 0$, negatif kısmı $x^- = (-x) \vee 0$ ve modülü $|x| = x \vee (-x)$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.5 : Bir Riesz uzayının bir elemanı x olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

$$(i) \quad x = x^+ - x^-.$$

$$(ii) \quad |x| = x^+ + x^-.$$

$$(iii) \quad x^+ \wedge x^- = 0 \quad (10).$$

Teorem 2.1.6 : Bir Riesz uzayında keyfi x, y, z elemanları için aşağıdakiler sağlanır:

- (1) $\|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (2) $|x \vee z - y \vee z| \leq |x - y|$ ve $|x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$.
- (3) x, y, z elemanları pozitif ise $x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$ (10).

Tanım 2.1.7 : (E, \leq) Riesz uzayı üzerine kondurulan bir $\|\cdot\|$ -norm, eğer " $x, y \in E, |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$ " önermesini sağlarsa, $(E, \|\cdot\|)$ normlu Riesz uzayı denir.

Ayrıca, $(E, \|\cdot\|)$ normlu Riesz uzayı, üzerindeki norma göre tam ise E ' ye Banach örgüsü diyeceğiz.

Bazı önemli Banach örgü örnekleri şunlardır:

- 1) $C(\Omega)$; Ω topolojik uzay üzerinde bütün sürekli reel değerli fonksiyon uzayı,
- 2) $C_b(\Omega)$; Ω topolojik uzay üzerindeki bütün sürekli sınırlı reel değerli fonksiyon uzayı,
- 3) ℓ_∞ ; Ω kümesi üzerindeki bütün sınırlı reel değerli fonksiyon uzayı,
- 4) ℓ_p ($1 \leq p < \infty$); $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ şartını sağlayan bütün reel değerli (x_n) diziler uzayı.

5) Ω lokal kompakt uzay olmak üzere

$C_0(\Omega) = \{f : \Omega \xrightarrow{\text{sürekli}} \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \{w \in \Omega : |f(w)| > \varepsilon\} \text{ kümesi kompakt}\}$ uzayı.

Tanım 2.1.8 : E Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subset E$ alt kümesi verilsin.

" $x \in A, |y| \leq |x| \Rightarrow y \in A$ " önermesi sağlanırsa A ' ye bir katı (solid) küme denir.

Tanım 2.1.9 : Bir Riesz uzayının katı olan alt vektör uzaylarına ideal denir.

2.2. Banach Örgülerinde Operatörler

Tanım 2.2.1 : E, F iki sıralı vektör uzayı olmak üzere $T : E \longrightarrow F$ operatörü, “ $\forall x \geq 0$ için $T(x) \geq 0$ ” koşulu sağlanıyorsa, T operatörüne pozitif operatör denir. $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ biçimlerinde gösterilir.

Teorem 2.2.2 (Kantoroviç) : $T : E^+ \longrightarrow F^+$ toplamsal operatör olsun. T , E den F^+ ye tek ve pozitif olarak genişletilebilir. Üstelik bu tek genişleme her bir $x \in E$ için $T(x) = T(x^+) - T(x^-)$ şeklinde verilir (10).

Tanım 2.2.3 : E, F Riesz uzayı ve $T \in \mathcal{L}(E, F)$ olsun. $|T| = T \vee (-T) \in \mathcal{L}(E, F)$ ise $|T|$ ’ye T ’nin modülü denir.

Teorem 2.2.4 : $T : E \longrightarrow F$ operatörü verilsin. Her bir $x \in E^+$ için F içinde $\sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ elemanı bulunsun. Bu durumda T operatörünün modülü vardır ve her $x \in E^+$ için $|T|(x) = \sup\{|Ty| : |y| \leq x\}$ sağlanır (10).

Tanım 2.2.5 : Bir Riesz uzayının bir A altkümesi hem alttan hem de üstten sınırlı ise A kümesine Riesz uzayı içinde bir sıra sınırlı alt küme denir.

Tanım 2.2.6 : $T \in \mathcal{L}(E, F)$ olsun. Eğer T operatörü, E içindeki sıra sınırlı alt kümeleri F içindeki sıra sınırlı alt kümelere taşıyorsa, T operatörüne sıra sınırlı operatör adı verilir.

E ’den F içine tanımlı bütün sıra sınırlı operatörlerin kümesi,

$$\mathcal{L}_o(E, F) = \{T : E \longrightarrow F, A \subseteq E \text{ sıra sınırlı} \Rightarrow T(A) \subseteq F \text{ sıra sınırlı}\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.2.7 : Eğer bir $T \in \mathcal{L}(E, F)$ operatörü, $T_1, T_2 \geq 0$ olmak üzere $T = T_1 - T_2$ biçiminde yazılabiliyorsa T ' ye regüler operatör denir. Regüler operatörler uzayı, $\mathcal{L}_r(E, F)$ ile gösterilir.

$\mathcal{L}_b(E, F)$ ve $\mathcal{L}_r(E, F)$ kümeleri noktasal toplama ve çarpıma göre vektör uzaylarıdır. Ayrıca, $\mathcal{L}_r(E, F) \subseteq \mathcal{L}_b(E, F) \subseteq \mathcal{L}(E, F)$ dir.

Önerme 2.2.8 : Bir Riesz uzayı üzerinde tanımlı her pozitif operatör sıra sınırlıdır.

İspat: E, F Riesz uzayları ve $x, y \in E$ olsun. $A \subseteq [x, y]$ ise her $a \in A$ için $x \leq a \leq y$ dir. $T : E \longrightarrow F$ pozitif operatörü için $Tx \leq Ta \leq Ty$ dir. O halde $T(A) \subseteq [Tx, Ty]$ kapsaması F içinde sağlanır.

Teorem 2.2.9 : Bir Banach örgüsünden normlu Riesz uzayına tanımlanan her sıra sınırlı operatör sürekli olur (10).

Sonuç 2.2.10 : Banach örgüleri arasında tanımlanan bütün pozitif operatör süreklidir.

2.3. Değişmez Alt Uzaylar

Bu tez boyunca operatör denildiğinde “doğrusal operatör” anlaşılacaktır. X ve Y herhangi Banach uzaylar olmak üzere, $\mathcal{L}(X, Y)$ sembolü, X uzayından Y uzayına tanımlı bütün sınırlı (sürekli) operatörlerin vektör uzayını gösterecektir. $\mathcal{L}(X, X)$ yerine biz $\mathcal{L}(X)$ yazacağız. $Y = \mathbb{R}$ seçildiğinde $\mathcal{L}(X, Y)$, X' in norm duali olarak adlandırılır ve X^* ile gösterilir. X Banach uzayının karmaşık uzay olduğu belirtilmediği durumlarda reel Banach uzayı olduğu anlaşılacaktır.

Tanım 2.3.1 : X Banach uzayı, $V \subseteq X$ alt kümesi olsun. $V \neq \{0\}$ ve $V \neq X$ ise V alt kümesine aşık olmayan (trivial olmayan) küme denir.

Tanım 2.3.2 : X Banach uzayı ve $V \subseteq X$ olsun. $T : X \longrightarrow X$ sınırlı operatörü için $T(V) \subseteq V$ koşulu sağlandığında V 'ye T altında değişmezdir (invarianttır) yada kısaca T -değişmezdir (invarianttır) denir.

Tanım 2.3.3 : X Banach uzayı, $T : X \longrightarrow X$ sınırlı operatörü ve $V \subseteq X$ alt uzayı olsun. Eğer $ST = TS$ olacak biçimde her $S \in \mathcal{L}(X)$ sınırlı operatörü için $S(V) \subseteq V$ sağlanıyorsa V 'ye T -hiperdeğişmez (hyperinvariant) denir.

En genel değişmez alt uzay problemi aşağıdaki biçimdedir:

Banach uzay üzerinde sınırlı her bir operatörün bir aşıkak olmayan kapalı değişmez alt uzayı var mıdır? Yada, hangi şartlar altında bir aşıkak olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir?

Önerme 2.3.4 : Bir X Banach uzayı, bir $T : X \longrightarrow X$ sınırlı operatörü ve bir $V \subseteq X$ alt uzayı verilsin. Eğer V alt uzayı T -değişmez ise \bar{V} ' da T -değişmezdir.

İspat: $V \subseteq X$ alt uzayı T -değişmez olsun. Buna göre $T(V) \subseteq V$ sağlanır. Diğer taraftan T operatörü sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} T(\bar{V}) &\subseteq \overline{T(V)} \subseteq \bar{V} \\ \Rightarrow T(\bar{V}) &\subseteq \bar{V} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece \bar{V} , T -değişmezdir.

Tanım 2.3.5 : X Banach uzayı olmak üzere bir $T : X \longrightarrow X$ operatörü ve bir $0 \neq x \in X$ verilsin. $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$ kümesine x vektörünün T -yörüngesi denir.

$\{x, Tx, T^2x, \dots\}$ kümesi ile üretilen alt uzaya T -yörünge uzayı denir ve $\mathcal{O}_T(x)$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{O}_T(x) = Sp\{x, Tx, T^2x, \dots\} = \left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k T^k x : \alpha_k \in R, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

dır.

Önerme 2.3.6 : $\overline{\mathcal{O}_T(x)}$, T -değişmezdir.

Tanım 2.3.7 : X Banach uzayı, $T \in \mathcal{L}(X)$ olsun. Eğer $\overline{\mathcal{O}_T(x)} = X$ ise $x \in X$ elemanına devirlidir denir.

Sonuç 2.3.8 : X Banach uzayı, $T \in \mathcal{L}(X)$ olsun. T operatörünün bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip olması için gerek ve yeter koşul, sıfırdan farklı devirli olmayan bir elemanının olmasıdır.

İspat:

(\Rightarrow): V , bir aşikar olmayan kapalı T -değişmez alt uzay olsun. Bu durumda $T(V) \subseteq V$ sağlanır. $x \in V$ alalım. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $T^n(x) \in V$ sağlanır. Böylece,

$$\Rightarrow \mathcal{O}_T(x) \subseteq V$$

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{O}_T(x)} \subseteq \overline{V} = V \neq X$$

olur. Buna göre x vektörü devirli değildir.

(\Leftarrow): $0 \neq x \in X$ vektörü devirli değil ise $\overline{\mathcal{O}_T(x)} \neq X$ dir. $0 \neq x$ olduğundan $\mathcal{O}_T(x) \neq \{0\}$ olur ve $T(\overline{\mathcal{O}_T(x)}) \subseteq \overline{\mathcal{O}_T(x)}$ sağlanır.

Sonuç 2.3.9 : Ayrılabilir olmayan Banach uzayları üzerinde tanımlı her sınırlı operatör, bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

Buna göre değişmez alt uzay problemine ayrılabilir olmayan uzaylar için olumlu cevap verilmiştir.

Lemma 2.3.10 : X Banach uzayı ve $T \in \mathcal{L}(X)$ olsun. T operatörünün çekirdeği $\text{Çek}(T) = \{x \in X : Tx = 0\}$ ve görüntü kümesi $T(X)$, T -hiperdeğişmez alt uzaylardır (8).

Sonuç 2.3.11 : X Banach uzayı ve $T \in \mathcal{L}(X)$ olsun. $TS = ST$ olacak şekilde sıfırdan farklı $S \in \mathcal{L}(X)$ operatörü bire bir değil yada $\overline{S(X)} \neq X$ ise T operatörünün bir aşikar olmayan (non-trivial) kapalı değişmez alt uzayı vardır.

İspat: $0 \neq S \in \mathcal{L}(X)$ operatörü için $ST = TS$ sağlansın. S operatörü bire bir değilse $\text{Çek}S \neq \{0\}$ dir. Ayrıca, S operatörü sıfırdan farklı olduğundan $\text{Çek}S \neq X$ dir. Lemma 2.3.10 dan $\text{Çek}S$, aşikar olmayan kapalı T -değişmez alt uzaydır. Diğer taraftan $\overline{S(X)} \neq X$ olsun. Yine Lemma 2.3.10 dan $S(X)$, T -değişmezdir. Yani,

$$T(S(X)) \subseteq S(X)$$

sağlanır. T operatörü sınırlı (sürekli) bir operatör olduğundan $T(\overline{S(X)}) \subseteq \overline{S(X)}$ olur. O halde $\overline{S(X)}$, bir aşikar olmayan kapalı T -değişmez alt uzaydır.

Sonuç 2.3.12 : $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörü bir aşikar olmayan kapalı alt uzaya sahip değil ise $TS = ST$ olacak biçimde her $S \in \mathcal{L}(X)$ operatörü bire bir ve $\overline{S(X)} = X$ dir.

Tanım 2.3.13 : $\{0\} \neq X$ Banach uzayı ve $T \in \mathcal{L}(X)$ olsun. En az bir $0 \neq x \in X$ için $Tx = \lambda x$ koşulunu sağlayan λ sayısına T ' nin bir öz (eigen) değeri denir. Bu özelliği sağlayan $0 \neq x$ elemanına da T ' nin bir öz vektörü denir.

Tanım 2.3.14 : λ , T için bir öz değer olmak üzere

$$N_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$$

kümesine öz (eigen) uzay denir.

Tanım 2.3.15 : X Banach uzayı, $T : X \longrightarrow X$ sınırlı operatör olsun. $\forall x \in X$ için $Tx = \lambda x$ olacak biçimde bir $\lambda \in R$ varsa T 'ye skaler operatör denir. Her bir $\lambda \in R$ için $Tx \neq \lambda x$ olacak biçimde en az bir $x \in X$ varsa T 'ye skaler olmayan operatör denir.

Literatürde, özdeşlik operatörünün bir katı olan operatöre skaler operatör denir. Skaler olmayan operatörlere de skaler olmayan operatör denilmektedir.

Lemma 2.3.16 : X Banach uzayı, $T : X \longrightarrow X$ sınırlı bir operatör olsun. T 'ye göre her bir öz uzay T -hiperdeğişmezdir. Ayrıca T skaler olmayan operatör ise bu uzay aşikar olmayan (non-trivial) kapalı bir uzaydır (11).

Yukarıda verilenler ışığında aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 2.3.17 : X sonlu boyutlu karmaşık Banach uzayı ise her bir $T \in \mathcal{L}(X)$ skaler olmayan operatörü, bir aşikar olmayan kapalı hiperdeğişmez alt uzaya sahiptir.

İspat: X sonlu boyutlu karmaşık Banach uzayı olduğundan mutlaka bir öz değer bulunur. Böylece $T : X \longrightarrow X$ skaler olmayan operatörün bir $\lambda \in \mathbb{C}$ öz değeri vardır. $N_\lambda = \{x \in X : Tx = \lambda x\}$ öz (eigen) uzayını alırsak, Lemma 2.3.16' dan N_λ uzayı, aşikar olmayan kapalı T -hiperdeğişmez bir alt uzaydır.

Sonuç 2.3.18 : X sonlu boyutlu reel Banach uzayı üzerinde skaler olmayan bir T operatörü alalım. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- 1) X ' in boyutu birden büyük tek sayı ($\text{boy}X > 1$) ise T operatörü aşikar olmayan kapalı hiperdeğişmez alt uzaya sahiptir.
- 2) X ' in boyutu ikiden büyük çift sayı ($\text{boy}X > 2$) ise T operatörü aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir, fakat bu alt uzay hiperdeğişmez olmak zorunda değildir.

3) X ' in boyutu iki ($\dim X = 2$) ise T operatörü bir aşık olmayan değişmez alt uzaya sahip olmak zorunda değildir.

İspat: (11), Sonuç 10.7.

Yukarıda verilen sonuçlardan sonlu boyutlu Banach uzaylar için değişmez alt uzay problemine olumlu cevap verildiği açıktır. Yani;

“Sonlu boyutlu Banach uzaylar üzerinde tanımlanan sınırlı operatörler aşık olmayan kapalı değişmez alt uzaylara sahiptirler.”

Teorem 2.3.19: X Banach uzayı ve $T \in \mathcal{L}(X)$ skaler olmayan operatör verilsin. T veya T^* bir öz (eigen) değere sahip ise T ve T^* aşık olmayan kapalı hiperdeğişmez alt uzaylara sahiptir (11).

2.4. Lomonosov Teoremi

Tanım 2.4.1: $(x, y) \rightarrow xy$ ikili işlemi ile donatılmış bir \mathcal{A} vektör uzayı için aşağıdakiler sağlanırsa, \mathcal{A} ' ya bir cebir denir. $\forall x, y, z \in \mathcal{A}$ ve her α skaleri için

- (i) $(xy)z = x(yz)$ ve $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$.
- (ii) $x(y+z) = xy+xz$ ve $(x+y)z = xz+yz$.

Teorem 2.4.2 (Stone-Weierstrass): X kompakt bir uzay ve \mathcal{A} , X üzerinde tanımlı bütün sabit fonksiyonları içeren, X ' in noktalarını ayıran sürekli reel değerli fonksiyonların bir cebiri olsun. Bu durumda, $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$ dir (12).

Tanım 2.4.3: X Banach uzayı ile bir $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ alt vektör uzayı verilsin.

Her $S, T \in \mathcal{A}$ için $ST \in \mathcal{A}$

koşulu sağlanıyorsa \mathcal{A} ' ya $\mathcal{L}(X)$ içinde alt cebir yada operatörler cebiri denir. $I \in \mathcal{A}$ ise \mathcal{A} ' ya birimli alt cebir denilecek ve bir $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün ürettiği alt cebir ise \mathcal{A}_T ile gösterilecektir. Bu durumda,

$$\mathcal{A}_T = \{p(T) : p \text{ sabit terimi olmayan polinom}\}$$

olur.

Tanım 2.4.4 : $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ alt cebir ve $V \subset X$ alt uzayı verilsin. Eğer V , her $A \in \mathcal{A}$ için değişmez kalıyorsa V ' ye \mathcal{A} -değişmezdir denir.

Tanım 2.4.5 : $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ bir alt cebir olsun.

- (i) Eğer \mathcal{A} alt cebirinin aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı yoksa \mathcal{A} ' ya geçişmeli (transitive) alt cebir denir.
- (ii) Eğer \mathcal{A} alt cebirinin aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı varsa \mathcal{A} ' ya geçişmesiz (non-transitive) alt cebir denir.

Önerme 2.4.6 : \mathcal{A} alt cebir ve $x \in X$ olsun. $\mathcal{A}x = \{Ax : A \in \mathcal{A}\}$ kümesi X ' in alt vektör uzayıdır ve \mathcal{A} -değişmezdir.

Önerme 2.4.7 : X Banach uzayı ve $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ birimli alt cebir olsun. \mathcal{A} cebiri geçişmesizdir gerek ve yeter koşul, en az bir $x \in X$ için $\overline{\mathcal{A}x}$ aşikar olmayan bir alt uzayıdır.

İspat:

(\Rightarrow): \mathcal{A} geçişmesiz cebir olsun. Bu durumda \mathcal{A} ' nın aşikar olmayan kapalı bir V alt uzayı vardır ve \mathcal{A} -değişmezdir. Sıfırdan farklı bir $x \in V$ vektörünü sabitleyelim. Her $A \in \mathcal{A}$ için $A(x) \in \mathcal{A}(V) \subset V$ sağlanır. Her bir $A \in \mathcal{A}$ için bu sağlandığından,

$$Ax \subset V \Rightarrow \overline{Ax} \subset \overline{V} = V \neq X \Rightarrow \overline{Ax} \neq X$$

olur. Diğer taraftan, \mathcal{A} alt cebiri birimli olduğundan $I \in \mathcal{A}$ dır. $0 \neq x$ olduğundan $I(x) = x \in Ax$ eşitliğinden $Ax \neq \{0\}$ dır. O halde \overline{Ax} , bir aşikar olmayan kapalı alt vektör uzayıdır ve \mathcal{A} -değişmezdir.

(\Leftarrow): \overline{Ax} alt uzayı aşikar olmayan bir alt uzay olacak biçimde bir $x \in X$ vektörünü alalım. Önerme 2.3.4 ve Önerme 2.4.6' den \overline{Ax} , \mathcal{A} -değişmezdir.

Teorem 2.4.8 : X Banach uzayı ve $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ alt cebir olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

- (i) \mathcal{A} alt cebiri geçişmesizdir.
- (ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, A^* x^* \rangle = 0$ olacak şekilde en az bir $0 \neq x \in X$ ve en az bir $0 \neq x^* \in X^*$ vardır (11).

Sonuç 2.4.9 : X Banach uzayı ve $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$ alt cebiri geçişmesiz (non-transitive) ise \mathcal{A}^* alt cebiri de bir geçişmesiz alt cebirdir.

İspat: \mathcal{A} alt cebiri geçişmesiz olduğundan Teorem 2.4.8 dan,

$$\langle Ax, x^* \rangle = \langle x, A^* x^* \rangle = 0$$

olacak biçimde en az bir $0 \neq x \in X$ ve en az bir $0 \neq x^* \in X^*$ vardır. $x \in X \subset X^{**}$ olduğundan $x \in X^{**}$ olur. O halde her $A \in \mathcal{A}$ için

$$\langle x^*, (A^*)^* x \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece yine Teorem 2.4.8 dan $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{L}(X^*)$ alt cebiri bir geçişmesiz alt cebirdir.

Lemma 2.4.10 : $T \in \mathcal{L}(X)$ alalım. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

- (1) $\{T\}' = \{S \in \mathcal{L}(X) : ST = TS\}$ kümesi $\mathcal{L}(X)$ ' in bir kapalı birimli alt cebiridir.

(2) T' nin aşıkâr olmayan kapalı hiperdeğişmez alt uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\{T\}'$ nin geçişmesiz bir alt cebir olmasıdır (11).

Tanım 2.4.11 : X bir topolojik vektör uzayı olmak üzere bir $B \subset X$ alt kümesi verilsin. X uzayı içinde sıfırın her bir U komşuluğu için $B \subset B_0 + U$ olacak biçimde $B_0 \subset B$ sonlu alt kümesi bulunabilirse B alt kümesine total sınırlı küme denir.

Tanım 2.4.12 : X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ operatörü alalım. U , X 'in birim yuvarı olmak üzere $\overline{T(U)}$ kümesi, Y içinde kompakt ise T operatörüne kompakt operatör denir.

Tanım 2.4.13 : X Banach uzay üzerinde bir $T : X \longrightarrow X$ operatörünün spektrumu $\sigma(T)$, $(\lambda - T)$ operatörünün X üzerinde tersi olmayacak biçimdeki bütün λ karmaşık sayıların kümesidir. Yani,

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - T)^{-1} \text{ mevcut değildir} \}$$

boştan farklı kompakt kümesidir.

Tanım 2.4.14 : $T \in \mathcal{L}(X)$ keyfî operatörünün spektral yarıçapı $r(T)$, $\sigma(T)$ ' yi kapsayan $\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r \}$ kapalı yuvarlar için negatif olmayan en küçük r reel sayısıdır. Yani,

$$r(T) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(T) \} = \max \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(T) \}.$$

Teorem 2.4.15 (Gelfand) : $T \in \mathcal{L}(X)$ ise $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_n \|T^n\|^{1/n}$ sağlanır (13).

Tanım 2.4.16 : X Banach uzay üzerinde sürekli bir $T : X \longrightarrow X$ operatörü verilsin. Eğer bu operatörün spektral yarıçapı $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = 0$ ise T ' ye quasinilpotent operatör denir.

Tanım 2.4.17 : $T : X \longrightarrow X$ sürekli operatörü ile bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x_0\|^{1/n} = 0$ sağlanıyorsa, T operatörüne x_0 noktasında quasinilpotenttir denir.

Yukarıdaki tanım bazen yerel quasinilpotentlik olarak da adlandırılır.

Teorem 2.4.18 (Aronszajn-Smith-Lomonosov): Sonsuz boyutlu reel yada karmaşık Banach uzay üzerinde her bir sıfırdan farklı kompakt operatör, aşikar olmayan bir kapalı hiperdeğişmez alt uzaya sahiptir.

İspat: $K : X \longrightarrow X$ sıfırdan farklı kompakt operatör olsun. Geneli bozmadan $\|K\| = 1$ alabiliriz. İspatı iki aşamada yapacağız. İlk önce K operatörü quasinilpotent olsun, yani, $r(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|K^n\|^{1/n} = 0$ sağlansın.

$\mathcal{A} = \{K\}'$ alalım. Lemma 2.4.10 den \mathcal{A}' nın birimli alt cebir olduğunu biliyoruz.

Şimdi, \mathcal{A}' nın geçişmez cebir olduğunu göstereceğiz. Bunun içinde $\overline{\mathcal{A}x} \neq X$ olacak biçimde en az bir $x \neq 0$ elemanın varlığını göstermek yeterlidir.

$$\text{Her bir } x \neq 0 \text{ için } \overline{\mathcal{A}x} = X \quad [2.1]$$

sağlansın. $K \neq 0$ olduğundan,

$$\|x_0\| > 1 \text{ ve } \|Kx_0\| > 1 \text{ koşullarını sağlayan bir } x_0 \in X \quad [2.2]$$

vardır. Açıkça,

$K \neq 0$ ise $Kx_0 \neq 0$ olacak biçimde $\exists x_0 \in X$ vardır. $x_0 \neq 0$ ve $Kx_0 \neq 0$ olduğu için

$\|Kx_0\| > 0$ ve $\|x_0\| > 0$ koşulları sağlanır. Buradan,

$$0 < \frac{1}{\|Kx_0\|} < \frac{1}{n_2} \text{ ve } 0 < \frac{1}{\|x_0\|} < \frac{1}{n_1}$$

olacak biçimde $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ vardır. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ alınırsa,

$$\frac{1}{n_0} < \|x_0\| \text{ ve } \frac{1}{n_0} < \|Kx_0\|$$

elde edilir. Buna göre, $1 < \|n_0 x_0\|$ ve $1 < \|K(n_0 x_0)\|$ sağlanır. O halde,

$\|x_0\| > 1$ ve $\|Kx_0\| > 1$ koşullarını sağlayan bir $x_0 \in X$ seçebiliriz.

Şimdi, $U_0 = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarını alalım. [2.2] den,

$$0 \notin \overline{U_0} \quad \text{ve} \quad 0 \notin \overline{K(U_0)} \quad [2.3]$$

elde edilir. Bunu göstermek için $0 \in \overline{U_0} = U_0$ alalım. Bu durumda $\|x_0\| \leq 1$ olur. Bu

ise [2.2] de, x_0 vektörünün seçimine çelişki oluşturur. Diğer taraftan, $0 \in \overline{K(U_0)}$

olsaydı en az bir $(Kz_n) \subset K(U_0)$ dizisi için $Kz_n \longrightarrow 0$ sağlanacaktı. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|Kx_0\| - \|Kz_n\| &\leq \| \|Kx_0\| - \|Kz_n\| \| \leq \|Kz_n - Kx_0\| = \|K(z_n - x_0)\| \\ &\leq \|K\| \|z_n - x_0\| \leq 1 \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\|Kx_0\| - \|Kz_n\| \leq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } 0 < \|Kx_0\| - 1 \leq \|Kz_n\|$$

eşitsizliğinde $\|Kx_0\| - 1 = \alpha$ ve $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$ alındığında, $\forall n > n'$ için $\|Kz_n\| < \varepsilon = \frac{\alpha}{2}$

olacak biçimde $\exists n' \in \mathbb{N}$ bulunur. Bu ise ε ' nın seçiminden çelişkidir. O halde [2.3] de verilen iddia doğrudur.

[2.1] den dolayı,

$$\text{her bir } x \neq 0 \text{ için } \exists A \in \mathcal{A} \text{ vardır ve } Ax \in U_0 \quad [2.4]$$

sağlanır. Açıkça, $A \neq 0$ dır. Sonuç olarak, A operatörü \mathcal{A}' da dolaştıkça

$\mathcal{O}_A = \{y \in X : \|Ay - x_0\| < 1\}$ açık kümeleri, $X/\{0\}$ kümesini örter. Bunu görmek

için, \mathcal{O}_A kümesinin $X/\{0\}$ kümesini örtmediğini varsayalım. Bu durumda

$\exists x \in X/\{0\}$ vardır ve $x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_A$ sağlanır.

$$x \notin \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_A \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A} \text{ için } x \notin \mathcal{O}_A$$

ve buradan

$$\forall A \in \mathcal{A} \text{ için } \|Ax - x_0\| \geq 1$$

bulunur. Bu ise [2.4]' e çelişki oluşturur. O halde $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_A = X/\{0\}$ sağlanır. Aynı

zamanda \mathcal{O}_A açık kümeleri $\overline{K(U_0)}$ kümesini de örter. Yani, $\overline{K(U_0)} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_A$

sağlanır. Diğer taraftan, $\overline{K(U_0)}$ kompakt bir küme olduğundan, $\overline{K(U_0)} \subset \bigcup_{j=1}^k \mathcal{O}_{A_j}$

olacak biçimde sonlu sayıda A_1, A_2, \dots, A_k operatörleri vardır. $c = \max_{1 \leq j \leq k} \|A_j\|$ alalım.

$Kx_0 \in K(U_0)$ olduğundan $Kx_0 \in \mathcal{O}_{A_{j_1}}$ olacak biçimde $1 \leq j_1 \leq k$ vardır ve böylece

$x_1 = A_{j_2} Kx_0 \in U_0$ sağlanır. $Kx_1 \in K(U_0)$ olduğundan $Kx_1 \in \mathcal{O}_{A_{j_2}}$ olacak biçimde

$1 \leq j_2 \leq k$ vardır ve böylece $x_2 = A_{j_2} Kx_1 \in U_0$ sağlanır. Böyle devam edilirse $\{j_n\}$

indisinin bir $\{x_n\}$ vektör dizisi buluruz ki $x_{n+1} = A_{j_{n+1}} Kx_n \in U_0$ sağlanır. $\mathcal{A} = \{K\}'$

olduğundan her bir A_j operatörü K ile değişmelidir. O halde,

$$x_1 = A_{j_1} Kx_0$$

$$x_2 = A_{j_2} Kx_1 = A_{j_2} K(A_{j_1} Kx_0) = A_{j_2} A_{j_1} K^2 x_0$$

ve böyle devam edilirse,

$$x_{n+1} = A_{j_{n+1}} Kx_n = A_{j_{n+1}} \dots A_{j_2} A_{j_1} K^{n+1} x_0$$

sağlanır. Buna göre x_{n+1} için,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= A_{j_{n+1}} A_{j_n} \dots A_{j_1} K^{n+1} x_0 \\ &= (c^{-1} A_{j_{n+1}}) (c^{-1} A_{j_n}) \dots (c^{-1} A_{j_1}) (cK)^{n+1} x_0 \end{aligned} \quad [2.5]$$

elde edilir. Şimdi, K operatörü quasinilpotent ise cK operatörünün de quasinilpotent olduğunu gösterelim. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|(cK)^n\| &= \|c^n K^n\| \leq |c^n| \cdot \|K^n\| \Rightarrow \|(cK)^n\|^{1/n} \leq c \|K^n\|^{1/n} \longrightarrow 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|(cK)^n\|^{1/n} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde K operatörü quasinilpotent ise herhangi bir katı da quasinilpotent olur. Açık olarak görülebilir ki $r(K) < 1$ olması için gerek ve yeter koşul, $\|K^n\| \longrightarrow 0$ dır (14). Böylece,

$$\|(cK)^{n+1}\| \longrightarrow 0 \quad [2.6]$$

sağlanır. Her bir $m=1, \dots, n$ için $\|c^{-1}A_{j_m}\| \leq 1$ olduğundan [2.5] eşitliğinin her iki tarafının normu alındığında,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}\| &= \|(c^{-1}A_{j_{n+1}})(c^{-1}A_{j_n}) \dots (c^{-1}A_{j_1})(cK)^{n+1}x_0\| \\ &\leq \|(c^{-1}A_{j_{n+1}})\| \dots \|(c^{-1}A_{j_1})\| \cdot \|(cK)^{n+1}\| \cdot \|x_0\| \\ &\leq \|(cK)^{n+1}\| \cdot \|x_0\| \end{aligned}$$

bulunur. $n \longrightarrow \infty$ için limitleri alınır, [2.6] dan dolayı,

$$\|x_{n+1}\| \longrightarrow 0$$

elde edilir. O halde $\{x_n\} \subset U_0$ dizisi için $\|x_n\| \longrightarrow 0$ sağlanır. Bu ise [2.3] formülündeki ilk özellik ile çelişir. O halde [2.1] önermesi yanlış olur. Yani, $\exists x \neq 0$ için $\overline{Ax} \neq X$ dır. Böylece K , bir aşık olmayan kapalı hiperdeğişmez alt uzaya sahiptir.

Şimdi ikinci aşama olarak K operatörü quasinilpotent olmasın. X uzayının karmaşık olması durumunu ele alalım. X kompleks Banach uzay olduğundan $\sigma(K) \neq 0$ dır. Ayrıca, K kompakt operatör olduğundan spektrumundaki bütün elemanlar öz (eigen) değerlerden oluşur ((11), Teorem 7.3). Yani, en az bir $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ elemanına sahiptir. Buna göre λ , K 'nin bir öz (eigen) değeridir. N_λ eigen uzayı üzerinde $K = \lambda I$ dır. $N_\lambda = \{x \in X : Kx = \lambda x\} = \{x \in X : K(x) = \lambda I(x)\}$ alındığında $\forall x \in N_\lambda$ için $Kx = \lambda I(x)$ olduğundan N_λ alt vektör uzayı üzerinde

$K = \lambda I$ olur. O halde, $K|_{N_\lambda} = \lambda I : N_\lambda \longrightarrow N_\lambda$ dır. K kompakt olduğundan kısıtlaması da kompakttır. Gerçekten, $B_\lambda = \{x \in N_\lambda : \|x\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvarı alınır,

$$B_\lambda \subset U = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

$$\Rightarrow K(B_\lambda) \subset K(U)$$

$$\Rightarrow \overline{K(B_\lambda)} \subset \overline{K(U)}$$

sağlanır. $\overline{K(U)}$ kümesi kompakt olduğundan $\overline{K(B_\lambda)}$ kümesi kompakt olur. Buna göre $K|_{N_\lambda} = \lambda I$ operatörü kompakt bir operatördür. Böylece $\text{boy}N_\lambda < \infty$ olmalıdır. Ayrıca, $\text{boy}X = \infty$ olduğundan $N_\lambda \neq X$ dır. $N_\lambda \neq \{0\}$ olduğu için de N_λ uzayı aşikar olmayan kapalı alt uzaydır ve K -hiperdeğişmezdir.

X ' in reel Banach uzay olması durumunu düşünelim. X ' in karmaşıklaştırılmışı olan $X_c = X \oplus iX$ uzayı ve $K_c : X_c \longrightarrow X_c$ operatörünü alalım. $z_n = x_n + iy_n \in X_c$ için $K_c z_n = Kx_n + iKy_n$ tanımlıdır ve $\|K_c\| = \|K\|$ sağlanır. K operatörü quasinilpotent olmadığından, açıkça, K_c operatörü de quasinilpotent değildir. X_c üzerinde N_λ öz (eigen) uzayı K_c -hiperdeğişmezdir. N_λ sonlu boyutlu olduğundan N_λ için $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ bazı olsun. $V = \text{span}\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ sonlu boyutlu uzayını alalım. $\text{boy}X = \infty$ olduğundan $V \neq X$ dir. O halde V aşikar olmayan alt uzaydır ve K -hiperdeğişmezdir.

Sonuç 2.4.19 : Sonsuz boyutlu reel yada karmaşık Banach uzayı üzerinde sınırlı bir $T : X \longrightarrow X$ operatörü sıfırdan farklı kompakt bir operatör ile değişmeli ise, T operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez bir alt uzayı vardır.

Tanım 2.4.20 : $T : X \longrightarrow X$ sınırlı operatörü verilsin. $p(T)$, T ' nin bir polinomunu göstermek üzere, eğer $p(T)$ ' yi kompakt bir operatör yapan sıfırdan farklı bir p polinomu bulunabilirse, T ' ye polinomsal kompakt operatör denir.

Sonuç 2.4.21 (Bernstein-Robinson) : Sonsuz boyutlu reel yada kompleks Banach uzayları üzerinde tanımlı her bir polinomsal kompakt operatör, aşikar olmayan kapalı değişmez bir alt uzaya sahiptir.

İspat: $\text{boy}X = \infty$ olacak biçimde bir X Banach uzayı ve $T : X \longrightarrow X$ bir sınırlı operatör olsun. T operatörü skaler bir operatör ise $T = \lambda I$ olacak biçimde en az bir $\lambda \in \mathbb{R}$ bulunur. $0 \neq x$ elemanı için $V = \text{Sp}\{x\}$ alt uzayı alınırsa V , bir aşikar olmayan kapalı T -değişmez alt uzaydır. Yani, her skaler operatör için bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzay bulunabilir. O halde T operatörünü skaler olmayan bir polinomsal kompakt operatör olarak alalım. Yani, $p(T)$ kompakt olacak biçimde $0 \neq p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$ polinomunu sabitleyelim.

$p(T) \neq 0$ ise Teorem 2.4.18 den sıfırdan farklı bir aşikar olmayan kapalı $p(T)$ -hiperdeğişmez alt uzay vardır. Bu uzay W ile gösterilirse, T operatörü $p(T)$ operatörü ile değişmeli olduğundan, W , T -değişmez olacaktır.

Şimdi, $p(T) = 0$ olsun. Yani,

$$p(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 = 0$$

olduğundan,

$$\Rightarrow T^n = \sum_{i=0}^{n-1} (-a_i)T^i$$

elde edilir. Sıfırdan farklı bir $x \in X$ vektörünü seçelim ve $\{x, Tx, T^2x, \dots, T^{n-1}x\}$ kümesi ile üretilen sıfırdan farklı kapalı alt uzayı V ile gösterelim. X uzayı sonsuz boyutlu olduğundan $V \neq X$ ve $0 \neq x \in V$ olduğundan dolayı V , bir aşikar olmayan kapalı T -değişmez alt uzaydır.

Teorem 2.4.22 (Lomonosov) : Bir reel yada kompleks Banach uzay üzerinde tanımlı operatörlerin bir geçişmeli cebiri \mathcal{A} olsun. Bu durumda, her bir sıfırdan farklı K kompakt operatörü için AK kompakt operatörü sıfırdan farklı bir sabit noktaya sahip

olacak biçimde bir $A \in \mathcal{A}$ vardır. Yani, $AKu = u$ koşulunu sağlayan bir $0 \neq u$ vardır (4).

Teorem 2.4.23 (Lomonosov) : Karmaşık Banach uzay üzerinde tanımlı skaler olmayan bir T operatörü ile sıfırdan farklı kompakt bir operatörü değişmeli ise, T , aşikar olmayan kapalı hiperdeğişmez bir alt uzaya sahiptir (4).

Teorem 2.4.24 (Lomonosov Değişmez Alt Uzay Teoremi) : Bir X karmaşık Banach uzayı ve bir $T : X \longrightarrow X$ sürekli operatörü alalım. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $S \in \mathcal{L}(X)$ verilsin:

- (i) S skaler olmayan bir operatör,
- (ii) S ile T değişmeli ($ST = TS$),
- (iii) S ile sıfırdan farklı bir kompakt operatör değişmelidir.

Bu durumda T , aşikar olmayan bir kapalı değişmez alt uzaya sahiptir (4).

Yukarıdaki (i), (ii), (iii) özelliklerini sağlayan T operatörüne Lomonosov Operatörü denilmektedir. Böylece her Lomonosov Operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzalarının mevcut olduğunu söyleyebiliriz.

3. BANACH ÖRGÜLERİNDE DEĞİŞMEZ ALT UZAYLAR

3.1. ℓ_p Uzayı Üzerinde Operatörler

Teorem 3.1.1 : $T: \ell_p \longrightarrow \ell_p$ ($1 \leq p < \infty$), modüllü sürekli bir operatör olsun.

Aşağıdaki şartları sağlayacak biçimde sıfırdan farklı bir $S: \ell_p \longrightarrow \ell_p$ pozitif operatörü verilsin:

$$(i) \quad S|T| = |T|S,$$

(ii) S operatörü sıfırdan farklı bir pozitif vektör için quasinilpotenttir.

Bu durumda T , aşikar olmayan kapalı değişmez bir ideale sahiptir.

İspat: Sıfırdan farklı bir S operatörü ve $0 \neq x_0$ elemanı için $S|T| = |T|S$ ile

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n x_0\|^{1/n} = 0$ koşulları sağlansın. İspat iki durumda ele alınacaktır.

$Sx_0 > 0$ olsun. S sürekli olduğundan $\exists k$ için $x_0 \geq e_k > 0$ ve $Se_k > 0$ olacak biçimde x_0 vektörünün uygun bir parçalanışı vardır. $F = Sp\{\alpha e_k : \alpha \in \mathbb{R}\}$ alt vektör uzayını alalım. F üzerine tanımlı doğal izdüşüm operatörü,

$$\begin{aligned} P: \ell_p &\longrightarrow \ell_p \\ x &\longrightarrow P(x) = x_k e_k \end{aligned}$$

ile tanımlansın. P izdüşüm olduğundan, $\forall 0 \leq x \in \ell_p$ için $0 \leq Px \leq x$ sağlanır. Bu durumda,

$$\text{Her bir } m \geq 0 \text{ için } P|T|^m Se_k = 0 \quad [3.1]$$

sağlanır. Bunu göstermek için $m \geq 0$ sayısını seçelim ve $\exists \alpha \geq 0$ için $P|T|^m Se_k = \alpha e_k$ olsun. $S|T|^m = |T|^m S$ olduğundan,

$$0 \leq \alpha^n e_k = \left(P(|T|^m S) \right)^n e_k \leq \left(|T|^m S \right)^n e_k = |T|^{mn} S^n e_k \leq |T|^{mn} S^n x_0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \alpha \leq \| |T|^m \| \| S^n x_0 \|^{1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

bulunur. Buna göre [3.1] ifadesi doğrudur. $\{|T|^m Se_k : m = 0, 1, \dots\}$ vektörlerinin ailesi ile üretilen sıralı ideal, $J = \left\{ x \in \ell_p : \exists \lambda \geq 0 \text{ ve } r \geq 0 \ni |x| \leq \lambda \sum_{i=0}^r |T|^i Se_k \right\}$ olsun. Özel olarak $\lambda = 1$ için $|Se_k| = Se_k \leq Se_k + |T|Se_k + \dots + |T|^r Se_k$ olduğundan $0 < Se_k \in J$ olur. Buna göre $J \neq \{0\}$ dir. [3.1] den dolayı,

$$\text{her } x \in J \text{ için } \langle e_k, x \rangle = \langle e_k, Px \rangle = 0$$

sağlanır. Gerçekten,

$$x \in J \Rightarrow |x| \leq \lambda \sum_{i=0}^r |T|^i Se_k$$

$$\Rightarrow 0 \leq |Px| \leq P|x| \leq \lambda \sum_{i=0}^r P|T|^i Se_k = 0$$

$$\Rightarrow Px = 0$$

bulunur. $\langle e_k, x \rangle = (x_1, \dots, x_k, \dots)(0, 0, \dots, \underset{k}{1}, 0, \dots) = x_k$ ve $\langle e_k, Px \rangle = x_k e_k \cdot e_k = x_k$

olduğundan $\langle e_k, x \rangle = \langle e_k, Px \rangle = 0$ olur. Sonuç olarak, her $x \in \bar{J}$ için $\langle e_k, x \rangle = 0$ elde edilir. Bu ise, \bar{J} ' nin ℓ_p uzayının aşikar olamayan kapalı bir ideali olduğunu gösterir ve \bar{J} , T -değişmezdir.

Şimdi, $Sx_0 = 0$ olsun. \mathcal{A} , ℓ_p uzayında bütün sürekli operatörlerin Banach cebirinde $|T|$ ile üretilen birimli cebir olsun. Yani, $\mathcal{A}_{|T|} = \{p(|T|) : p \text{ herhangi polinom}\}$ ile gösterelim. $J = \{x \in \ell_p : \exists A \in \mathcal{A} \text{ için } |x| \leq |A|x_0\}$ idealini alalım. Açıkça görülebilir ki J ideali T -değişmez idealdir. Gerçekten, $x \in J$ ise $|x| \leq |A|x_0$ olacak biçimde $\exists A \in \mathcal{A}$ vardır.

$$|Tx| \leq |T|(|x|) \leq |T||A|x_0$$

eşitsizliği alınırsa $|T| \in \mathcal{A}$, $|A| \in \mathcal{A}$ ve \mathcal{A} bir cebir olduğundan $|T||A| \in \mathcal{A}$ sağlanır. O halde yukarıdaki eşitsizlikten görülür ki $Tx \in J$ dir. Yani, J ideali T değişmezdir.

İspatı tamamlamak için $\bar{J} \neq \ell_p$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $x \in J$ alalım.

$|x| \leq |A|x_0$ ile $A \in \mathcal{A}$, $r \geq 0$ seçiminden bir $c > 0$ vardır ve $|A| \leq c \sum_{i=0}^r |T|^i$ sağlanır.

$$|Sx| \leq S|x| \leq S|A|x_0 \leq S \left(c \sum_{i=0}^r |T|^i \right) x_0 = c \sum_{i=0}^r |T|^i Sx_0 = 0$$

eşitsizliğinden görülür ki, her $x \in J$ için $S(x) = 0$, dolayısıyla da her $x \in \bar{J}$ için $S(x) = 0$ dir. Buradan, $\bar{J} = \ell_p$ çıkar, yani S operatörünün ℓ_p uzayı üzerinde sıfırdır. Bu ise hipotez ile bir çelişki yaratır. O halde $\bar{J} \neq \ell_p$ sağlanır. Böylece, \bar{J} , aşikar olmayan kapalı T -değişmez bir ideal olur.

Sonuç 3.1.2 : $T : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ sürekli operatörünün modülü var ve quasinilpotent ise T operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır (6).

Sonuç 3.1.3 : Sıfırdan farklı pozitif bir vektörde quasinilpotent olan ℓ_p üzerinde her bir pozitif operatör aşikar olmayan kapalı değişmez bir ideale sahiptir (6).

3.2. Read Operatörünün Modülü Üzerine

Tanım 3.2.1 : X Banach uzay ve $S : X \longrightarrow X$ sınırlı bir operatörün $\|S\|$ normu ile birlikte $\|S\|_e = \inf \{ \|S - K\| : K \text{ kompakt} \}$ yarı normuna, S ' nin esaslı (essential) yarınormu denir.

S ' nin esaslı (essential) spektral yarıçapı, $r_e(S) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|S^n\|_e}$ biçiminde tanımlanır.

Ve her zaman $\|S\|_e \leq \|S\|$ sağlanır.

Teorem 3.2.2 : Bir Banach örgüsü üzerinde pozitif bir operatör S ve $r_e(S) < r(S)$ olsun. Bu durumda $r(S)$, S^2 'nin bir pozitif öz (eigen) vektörüne karşılık gelen bir öz (eigen) değeridir (15).

Teorem 3.2.3 : $S: \ell_p \longrightarrow \ell_p$ değişmez ideali olmayan modüllü quasinilpotent bir operatör, S^- var ve kompakt olsun. Buna göre, $r(|S|)$ sayısı bir pozitif öz (eigen) vektöre karşılık gelen $|S|$ 'nin bir öz değeri olur. Üstelik, $|S|$ modülü değişmez bir alt uzaya sahiptir.

İspat: Açık olarak $|S|$ quasinilpotent değildir. Gerçekten, $|S|$ quasinilpotent olsaydı Sonuç 3.1.2 den S operatörünün bir değişmez ideali olurdu. Bu ise hipotezimize çelişki oluşturur. O halde $|S|$ operatörü quasinilpotent değildir, yani $r(|S|) > 0$ olur.

Şimdi $r_e(|S|) = 0$ olduğunu gösterelim.

$$|S| = S^+ + S^- \quad \text{ve} \quad S = S^+ - S^-$$

eşitliklerinden yararlanarak,

$$|S| = S + 2S^-$$

yazarız. Buradan,

$$|S|^n = (S + 2S^-)^n$$

olur. R , S ve S^- operatörlerini içeren bir polinom olmak üzere,

$$|S|^n = (S + 2S^-)^n = S^n + RS^-$$

biçimindedir. S^- kompakt bir operatör olduğundan RS^- bileşkesi de kompakt olacaktır.

$$\| |S|^n \|_e = \| S^n + RS^- \|_e = \inf \{ \| S^n + RS^- - K \| : K \text{ kompakt} \} \leq \| S^n + RS^- - K \|$$

bulunur. Özel olarak $K = RS^-$ alınırsa,

$$\| |S|^n \|_e \leq \| S^n \|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow r_e(|S|) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|S^n\|^{1/n} = r(S) = 0 \\ \Rightarrow r_e(|S|) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Teorem 3.2.2' e göre $r(|S|)$ sayısı $|S|$ ' in bir öz değeridir. $\lambda = r(|S|)$ alınırsa $N_\lambda = \{x \in \ell_p : |S|x = \lambda x\}$ öz (eigen) uzayı $|S|$ operatörü altında aşikar olmayan bir kapalı hiperdeğişmez alt uzay olur.

Sonuç 3.2.4 : Yukarıdaki teoremin hipotezleri altında S^+ mevcut olsun. Bu durumda S^+ da aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.

İspat: İki durumda ispatı ele alalım. Önce S^+ quasinilpotent olsun. Sonuç 3.1.2 ile S^+ operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez bir ideale sahip olduğu görülür.

Şimdi, S^+ operatörünün quasinilpotent olmadığını kabul edelim. Yani, $r(S^+) > 0$ dır. $S^+ = S + S^-$ alalım. Yine yukarıdaki teoremden iddia edildiği gibi $r_e(S^+) = 0$ dır. R', S ve S^- operatörlerini içeren polinom olmak üzere,

$$\begin{aligned} (S^+)^n &= (S + S^-)^n = S^n + R'S^- \\ \Rightarrow \|(S^+)^n\|_e &= \|S^n + R'S^-\|_e \leq \|S^n\| \\ \Rightarrow r_e(S^+) &= 0 \end{aligned}$$

olur. $0 = r_e(S^+) < r(S^+)$ olduğundan Teorem 3.2.2' ye göre $r(S^+)$ sayısı S^+ için bir öz değerdir. $N_{r(S^+)} = \{x \in \ell_p : S^+x = r(S^+)x\}$ öz uzayı aşikar olmayan kapalı S^+ -değişmez bir alt uzay olur.

Tanım 3.2.5 : X, Y Banach uzaylar, $S: X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. Eğer S , $x_i^* \in X^*, y_i \in Y$ ve $\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i^*\| \|y_i\| < \infty$ olmak üzere $S = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* \otimes y_i$ formunda yazılabiliyorsa, S ' ye nükleer operatör denir.

Nükleer norm ise $\gamma(S) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \|x_i^* \cdot \|y_i\| \right\}$ biçiminde tanımlanır. Buradaki infimum,

S operatörünün bütün nükleer gösterimleri üzerinden alınmaktadır.

Bilindiği gibi her sonlu-rank operatörü kompakttır. Buna göre her bir nükleer operatöre sonlu-rank operatörleriyle yaklaşılabilir.

Önerme 3.2.6 : Her nükleer operatör kompakttır.

İspat: X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $S : X \longrightarrow Y$ nükleer operatör olsun. S

nükleer operatör olduğundan $x_i^* \in X^*, y_i \in Y$ ve $\sum_{i=0}^{\infty} \|x_i^* \cdot \|y_i\| < \infty$ için $S = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* \otimes y_i$

formunda yazılır. $S_n : X \longrightarrow Y$ sonlu-rank operatörlerini ise S ' in yazılımından

yararlanarak $S_n = \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes y_i$ biçiminde tanımlayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|S_n(x) - S(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i^*(x)y_i - \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x)y_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^*(x)y_i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \|x_i^*\| \|y_i\| \end{aligned}$$

ve $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|x_i^*\| \|y_i\|$ serisi yakınsak olduğundan sağ taraftaki seri sifira yakınsar. O halde

$S_n \longrightarrow S \in \mathcal{L}(X, Y)$ sağlanır. Buradan görülür ki, (S_n) dizisi kompakt operatörlerden oluştuğundan S operatörü de kompakt olur..

Tanım 3.2.7 : ℓ_1 içindeki $(f_i)_{i=0}^{\infty}$ standart birim vektörleri tarafından üretilen, ℓ_1 ' in

yoğun doğrusal alt uzayını F ile gösterelim. $d = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$ pozitif tamsayıların

kesin artan dizisi olsun. $a_0 = 1, v_0 = 0, n \geq 1$ için $v_n = n(a_n + b_n)$ alalım. Aşağıdaki

özellikleri sağlayan bir tek $(e_i)_{i=0}^{\infty} \subset F$ dizisi vardır (16):

$$0) f_0 = e_0.$$

A) r, n, i tamsayı ve $0 < r \leq n$ olsun. $i \in [ra_n, v_{n-r} + ra_n]$ olsun. Bu takdirde,

$$f_i = (n^{ra_n} e_i - e_{i-ra_n}) (n-r)^{i-ra_n} a_{n-r}.$$

B) r, n, i tamsayı ve $0 < r < n$ olsun. $i \in (ra_n + v_{n-r}, (r+1)a_n)$ olsun. Buna göre,

$$f_i = n^i 2^{((r+1/2)a_n - i)/\sqrt{a_n}} e_i.$$

İkinci durum olarak $1 \leq n$ ve $i \in (v_{n-1}, a_n)$ olduğunda,

$$f_i = n^i 2^{(1/2a_n - i)/\sqrt{a_n}} e_i.$$

C) r, n, i tamsayı ve $0 < r \leq n$ olsun. $i \in [r(a_n + b_n), na_n + rb_n]$ olsun. Bu takdirde,

$$f_i = n^i e_i - b_n n^{i-b_n} e_{i-b_n}.$$

D) r, n, i tamsayı ve $0 < r < n$ olsun. $i \in (na_n + rb_n, (r+1)(a_n + b_n))$ olsun. Bu takdirde,

$$f_i = n^i 2^{((r+1/2)b_n - i)/\sqrt{b_n}} e_i.$$

Yukarıdaki tanıma göre bütün e_i , lineer bağımsızdır ve F kümesini gerer. Yani;

$$F = Sp\{e_i : i = 0, \dots, n\} = Sp\{f_i : i = 0, \dots, n\} \quad [3.2]$$

dır.

Tanım 3.2.8 : $d = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots)$ kesin artan dizisi verilsin. G ve H , pozitif tamsayı değerli fonksiyonlar olmak üzere, eğer d dizisi,

$$a_n \geq G(n, a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}),$$

ve

$$b_n \geq H(n, a_0, b_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n),$$

şartlarını sağlarsa, d ' ye yeteri kadar hızla artan dizi denilmektedir ve kısaca pd ile gösterilmektedir.

C.J.Read, $Te_i = e_{i+1}$ koşulunu sağlayan bir tek $T:F \longrightarrow F$ lineer operatörünün bulunduğunu göstermiştir. $\overline{F} = \ell_1$ olduğundan bu lineer operatörü ℓ_1 üzerine genişletmiştir. Ayrıca bunun yanında bu sınırlı operatörün, hiçbir değişmez alt uzayı olmayan quasinilpotent bir operatör olduğunu gözlemlemiştir (17).

Şimdi biz Read operatörünün modülü ile ilgileneceğiz ve Read operatörünün modülünün her zaman bir değişmez alt uzaya sahip olduğunu göreceğiz.

Lemma 3.2.9: pd koşulunu sağlayan bir Read operatörü T olsun. Bu durumda, T^- operatörü nükleer operatördür.

İspat: $(t_{ij})_{i,j=0}^{\infty}$ ve $(t_{ij}^-)_{i,j=0}^{\infty}$ sırası ile T ve T^- operatörlerinin sonsuz matris gösterimi olsun. $t_{ki} = (Tf_i)_{(k)}$ alalım. Şimdi standart birim vektörlerin T altında görüntülerine bakalım.

(0) $Tf_0 = Te_0 = e_1$ ve $n=1$ için Tanım 3.2.7 (B) nin ikinci durumundan $1 \in (0, a_1)$ olduğundan $f_1 = 2^{\left(\frac{1}{2}a_1 - 1\right)/\sqrt{a_1}} e_1$ eşitliği vardır. Böylece bu eşitlikte e_1 vektörü yalnız bırakılırsa,

$$Tf_0 = Te_0 = e_1 = 2^{\left(\frac{1}{2}a_1 - 1\right)/\sqrt{a_1}} f_1$$

elde edilir. Böylece, $T^- f_0 = 0$ olur.

(A) $i < v_{n-r} + ra_n \Rightarrow Tf_i = (n-r)^{-1} f_{i+1}$ bulunur. Böylece $T^- f_0 = 0$ olur.

$$\begin{aligned} i = v_{n-r} + ra_n &\Rightarrow Tf_i = T\left(a_{n-r} (n-r)^{i-ra_n} (n^{ra_n} e_i - e_{i-ra_n})\right) \\ &\Rightarrow Tf_i = a_{n-r} (n-r)^{v_{n-r}} (n^{ra_n} e_{1+ra_n+v_{n-r}} - e_{1+v_{n-r}}) \end{aligned} \quad [3.3]$$

elde edilir. $r=1$ için $1+v_{n-r} \in (v_{n-1}, a_n)$ olduğundan Tanım 3.2.7 (B) koşulundan

$$f_{1+v_{n-r}} = n^{1+v_{n-r}} 2^{\left(\frac{1}{2}a_n - (1+v_{n-r})\right)/\sqrt{a_n}} e_{1+v_{n-r}} \text{ olur. Buradan,}$$

$$e_{1+v_{n-r}} = n^{-1-v_{n-r}} 2^{((1+v_{n-r})-1/2a_n)/\sqrt{a_n}} f_{1+v_{n-r}} \quad [3.4]$$

bulunur. Diğer taraftan, $r < n$ için $1+ra_n + v_{n-r} \in (ra_n + v_{n-r}, (r+1)a_n)$ olduğundan yine Tanım 3.2.7 (B) koşulundan, $f_{1+ra_n+v_{n-r}} = n^{1+ra_n+v_{n-r}} 2^{((r+1/2a_n)-(1+ra_n+v_{n-r}))/\sqrt{a_n}} e_{1+ra_n+v_{n-r}}$ olur. Buradan,

$$e_{1+ra_n+v_{n-r}} = n^{-1-ra_n-v_{n-r}} 2^{((1+ra_n+v_{n-r})-(r+1/2a_n))/\sqrt{a_n}} f_{1+ra_n+v_{n-r}} \quad [3.5]$$

bulunur. [3.4] ve [3.5] formülleri [3.3] de yerine yazılırsa,

$$\varepsilon_1 = a_{n-r} n^{ra_n} (n-r)^{v_{n-r}} n^{-1-ra_n-v_{n-r}} 2^{((1+ra_n+v_{n-r})-(r+1/2a_n))/\sqrt{a_n}}$$

ve

$$\varepsilon_2 = a_{n-r} (n-r)^{v_{n-r}} n^{-1-v_{n-r}} 2^{((1+v_{n-r})-1/2a_n)/\sqrt{a_n}}$$

olmak üzere,

$$Tf_i = \varepsilon_1 f_{1+ra_n+v_{n-r}} - \varepsilon_2 f_{1+v_{n-r}}$$

elde edilir. $Tf_i = T^+ f_i - T^- f_i$ eşitliğinden,

$$T^- f_i = \varepsilon_2 f_{1+v_{n-r}} \quad [3.6]$$

bulunur.

(B) $i < (r+1)a_n - 1$ yada $i < a_n - 1$ olması durumunda, $Tf_i = n^{-1} 2^{1/\sqrt{a_n}} f_{i+1}$

bulunur ve böylece $T^- f_0 = 0$ olur.

$i = (r+1)a_n - 1$ için

$$Tf_i = n^i 2^{\left(\frac{1-a_n}{2}\right)/\sqrt{a_n}} e_{(r+1)a_n} \quad [3.7]$$

bulunur. $(r+1)a_n \in [ra_n, ra_n + v_{n-r}]$ olduğundan, Tanım 3.2.7 (A) koşulundan

$f_i = (n^{ra_n} e_i - e_{i-ra_n}) (n-r)^{i-ra_n} a_{n-r}$ ile belirlenir. r yerine $r+1$ alınırsa ($r \rightarrow r+1$),

$$f_i = (n^{(r+1)a_n} e_i - e_{i-(r+1)a_n}) (n-r-1)^{i-(r+1)a_n} a_{n-r-1}$$

ve buradan da i ' nin değeri yazılırsa,

$$f_{(r+1)a_n} = (n^{(r+1)a_n} e_{(r+1)a_n} - e_0) a_{n-r-1}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten $e_{(r+1)a_n}$ çekilirse,

$$e_{(r+1)a_n} = n^{-(r+1)a_n} \left(a^{-1}_{n-r-1} f_{(r+1)a_n} + f_0 \right) \quad [3.8]$$

bulunur ve [3.7] formülünde yerine yazılırsa,

$$Tf_i = n^{-1} 2^{\left(1 - \frac{a_n}{2}\right) / \sqrt{a_n}} \left(a^{-1}_{n-r-1} f_{(r+1)a_n} + f_0 \right)$$

eşitliği elde edilir. Böylece $T^- f_0 = 0$ olur.

$i = a_n - 1$ için

$$Tf_i = n^i 2^{\left(1 - \frac{a_n}{2}\right) / \sqrt{a_n}} e_{a_n} \quad [3.9]$$

bulunur. $r = 1$ için $a_n \in [a_n, v_{n-1} + a_n]$ olduğundan Tanım 3.2.7 (A) koşulundan,

$$f_{a_n} = \left(n^{a_n} e_{a_n} - e_0 \right) a_{n-1}$$

elde edilir ve buradan e_{a_n} vektörü çekilirse,

$$e_{a_n} = n^{-a_n} \left(a_{n-1}^{-1} f_{a_n} + f_0 \right)$$

bulunur. Bu son eşitlik [3.9] de yerine yazılırsa $T^- f_0 = 0$ eşitliği görülür.

(C) $i < na_n + rb_n$ olması durumunda, $Tf_i = n^{-1} f_{i+1}$ eşitliği sağlanır ve $T^- f_0 = 0$ olur.

$i = na_n + rb_n$ için

$$Tf_i = n^{na_n + rb_n} e_{1+na_n + rb_n} - b_n n^{na_n + (r-1)b_n} e_{1+na_n + (r-1)b_n}$$

bulunur. Yukarıdaki işlemlere benzer olarak,

$$\varepsilon_1 > 0 \text{ ve } \varepsilon_2 = b_n n^{-1} 2^{\left(1 + na_n - \frac{b_n}{2}\right) / \sqrt{b_n}} f_{1+na_n + (r-1)b_n}$$

olmak üzere

$$Tf_i = \varepsilon_1 f_{1+na_n + rb_n} - \varepsilon_2 f_{1+na_n + (r-1)b_n}$$

elde edilir. Böylece,

$$T^- f_{na_n + rb_n} = \varepsilon_2 f_{1+na_n + (r-1)b_n} \quad [3.10]$$

bulunur.

(D) $i = (r+1)(a_n + b_n) - 1$ olması durumunda,

$$Tf_i = n^i 2^{((r+1/2)b_n - i)/\sqrt{b_n}} e_{(r+1)(a_n + b_n)} \quad [3.11]$$

bulunur. $i = (r+1)(a_n + b_n) = r(a_n + b_n) + (a_n + b_n) \in [r(a_n + b_n), na_n + rb_n]$ olduğuna göre Tanım 3.2.7 (C) koşulundan,

$$f_{(r+1)(a_n + b_n)} = n^{(r+1)(a_n + b_n)} e_{(r+1)(a_n + b_n)} - b_n n^{r(a_n + b_n) + a_n} e_{r(a_n + b_n) + a_n}$$

elde edilir. Buradan da,

$$e_{(r+1)(a_n + b_n)} = n^{-(r+1)(a_n + b_n)} \left\{ f_{(r+1)(a_n + b_n)} + b_n n^{r(a_n + b_n) + a_n} e_{r(a_n + b_n) + a_n} \right\} \quad [3.12]$$

eşitliği çıkar.

$r(a_n + b_n) + a_n \in [r(a_n + b_n), na_n + rb_n]$ olduğundan,

$$f_{r(a_n + b_n) + a_n} = n^{r(a_n + b_n) + a_n} e_{r(a_n + b_n) + a_n} - b_n n^{r(a_n + b_n) + a_n - b_n} e_{r(a_n + b_n) + a_n - b_n}$$

ve buradan da,

$$e_{r(a_n + b_n) + a_n} = n^{-r(a_n + b_n) - a_n} \left\{ f_{r(a_n + b_n) + a_n} + b_n n^{r(a_n + b_n) + a_n - b_n} e_{r(a_n + b_n) + a_n - b_n} \right\} \quad [3.13]$$

eşitliği elde edilir. [3.13] formülünü [3.12] de yerine yazarsak,

$$e_{(r+1)(a_n + b_n)} = n^{-(r+1)(a_n + b_n)} \left\{ f_{(r+1)(a_n + b_n)} + b_n f_{r(a_n + b_n) + a_n} + b_n^2 n^{r(a_n + b_n) + a_n - b_n} e_{r(a_n + b_n) + a_n - b_n} \right\}$$

formülü elde edilir. Yukarıda yapılan işlemleri tekrar ederek,

$$e_{(r+1)(a_n + b_n)} = n^{-(r+1)(a_n + b_n)} \left\{ f_{(r+1)(a_n + b_n)} + b_n f_{r(a_n + b_n) + a_n} + \dots + n_n^r f_{(r+1)a_n + b_n} \right\} + b_n^{r+1} n^{-(r+1)b_n} e_{(r+1)a_n} \quad [3.14]$$

elde edilir. Bu son eşitlikte, $e_{(r+1)a_n}$ vektörünün [3.8] de verilen değeri yazıldığında bütün katsayıların pozitif olduğu görülür. O halde $T^- f_i = 0$ olur.

Bu hesaplamalar ışığında T^- operatörünün sıfırdan farklı girişleri sadece [3.6] ve [3.10] eşitlikleridir. [3.6] ile

$$t_{1+v_{n-r}, v_{n-r} + ra_n}^- = a_{n-r} (n-r)^{v_{n-r}} n^{-1-v_{n-r}} 2^{((1+v_{n-r})-1/2a_n)/\sqrt{a_n}} \quad [3.15]$$

ve [3.10] ile de

$$t_{na_n+(r-1)b_n+1, na_n+rb_n}^- = b_n n^{-1} 2^{\left(1+na_n-\frac{b_n}{2}\right)/\sqrt{b_n}} f_{1+na_n+(r-1)b_n} \quad [3.16]$$

elde edilir. T^- operatörünün nükleer olduğunu göstermek için $\sum_{k=0}^{\infty} \|T_{(k)}^-\| < \infty$

koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir. T^- operatörünün sıfırdan farklı girişleri içeren bileşenlerine bakalım. [3.15] den,

$$t_{1+v_{n-r}, v_{n-r}+ra_n}^- \leq a_{n-r} 2^{((1+v_{n-r})-1/2a_n)/\sqrt{a_n}} \leq 2^{-(1+v_{n-r})}$$

eşitsizliği bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} \|T_{(1+v_m)}^-\|_{\infty} &< 2^{-(1+v_m)} \\ \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \|T_{(1+v_m)}^-\|_{\infty} &\leq \sum_{m=0}^{\infty} 2^{-(1+v_m)} < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan [3.16] eşitliğinden $\forall n \geq 1$

$$t_{na_n+(r-1)b_n+1, na_n+rb_n}^- = b_n n^{-1} 2^{\left(1+na_n-\frac{b_n}{2}\right)/\sqrt{b_n}} \leq 2^{-n}$$

sağlanır. Her iki tarafı toplam olarak yazarsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-1} 2^{\left(1+na_n-\frac{b_n}{2}\right)/\sqrt{b_n}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$$

elde edilir. Böylece, $\gamma(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \|T_{(k)}^-\|_{\infty} < 2$ olur. O halde T^- , nükleer operatördür.

Sonuç 3.2.10 : T Read operatörü için aşağıdakiler sağlanır:

- (i) $|T|$, T^+ ve T^- , pozitif öz (eigen) vektörlere sahiptir.
- (ii) Ne $|T|$ nede T^+ bir değişmez ideale sahiptir.

İspat:

- (i) $T: \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ Read operatörü quasilpotent ve T^- kompakt olduğundan Teorem 3.2.3' e göre $|T|$, bir pozitif öz vektöre sahiptir. Sonuç 3.2.4' e göre de T^+ , bir pozitif öz vektöre sahip olacaktır. Lemma 3.2.9' un ispatında, $T^- f_0 = 0$ sağlandığından, T^- operatörü pozitif bir öz vektöre sahip olur.

(ii) J , $|T|$ yada T^+ operatörleri altında aşikar olmayan kapalı değişmez ideal olsun. $0 \neq x \in J$ elemanını alalım. $0 \neq x \in J$ olduğundan en az bir $k \geq 0$ için $x_k \neq 0$ olur. Böylece $f_k \in J$ dır. Lemma 3.2.9' un ispatında $|T|f_i$ ve T^+f_i , sıfırdan farklı $(i+1)$. bileşene sahiptir. Buna göre $|T|(J) \subset J$ veya $T^+(J) \subset J$ olduğundan $f_{k+1} \in J$ sağlanır. Tümevarım ile $\forall i \geq k$ için $f_i \in J$ bulunur. Yine Lemma 3.2.9' un ispatından, sonsuz çoklukta i ' ler için $(|T|f_i)_0 \neq 0$ ve $(T^+f_i)_0 \neq 0$ dır. O halde $\forall i \geq 0$ için $f_i \in J$ sağlanır. Böylece $J = \ell_1$ olur ki bu da J idealinin aşikar olmayan bir ideal olmasına çelişki oluşturur.

Her ideal aynı zamanda bir alt vektör uzayı olduğundan Sonuç 3.2.10 den anlaşılacağı gibi $|T|$ değişmez bir ideale sahip değildir. Ancak Teorem 3.2.3' e göre mutlaka bir değişmez alt uzaya sahip olacaktır.

3.3. Lomonosov Teoreminin Dört Operatör Zincirine Genişleyememesi

Bu kısımda bütün Banach uzayları sonsuz boyutlu ayrılabilir uzay, bütün operatörler de doğrusal ve sınırlıdır. ℓ_1 uzayı üzerinde tanımlanan Read operatöründen yararlanılarak, Lomonosov Teoreminin dört operatöre uygulanamaz olduğu gösterilecektir.

Önerme 3.3.1 : pd koşulunu sağlayan Read operatörü $T: \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ olsun. Bu durumda $TS_1 = S_1T$, $S_1S_2 = S_2S_1$ ve K kompakt olmak üzere $S_2K = KS_2$ olacak biçimde skaler olmayan S_1, S_2 ve K operatörleri vardır.

İspat: Tanım 3.2.8 ile verilen a_n ve b_n tamsayıları çift ve T ise Read operatörü olsun. Skaler olmayan S_1 operatörünü, T^2 ile tanımlayalım. Yani, $S_1 = T^2$ olsun. Böylece $TS_1 = S_1T$ sağlanır.

$$S_2 : F \longrightarrow F$$

$$e_i \longrightarrow S_2 e_i = \begin{cases} e_i, & i \text{ çift} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

operatörünü tanımlayalım. Açık olarak,

$$S_2 f_i = \begin{cases} f_i, & i \text{ çift} \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

da sağlanır. Gerçekten, Tanım 3.2.8 dan

$$(0) \quad S_2 f_0 = S_2 e_0 = e_0 = f_0$$

(A) a_n çift tamsayı olduğundan,

$$S_2 f_i = a_{n-r} (n-r)^{i-ra_n} (n^{ra_n} S_2 e_i - S_2 e_{i-ra_n}) = \begin{cases} a_{n-r} (n-r)^{i-ra_n} (n^{ra_n} e_i - e_{i-ra_n}) = f_i, & i \text{ çift ise} \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

$$(B) \quad S_2 f_i = n^i 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} S_2 e_i = \begin{cases} n^i 2^{(h-i)/\sqrt{a_n}} e_i = f_i, & i \text{ çift ise} \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

sağlanır.

(C) b_n sayısı çift olduğundan,

$$S_2 f_i = (n^i S_2 e_i - b_n n^{i-b_n} S_2 e_{i-ra_n}) = \begin{cases} (n^i e_i - b_n n^{i-b_n} e_{i-ra_n}) = f_i, & i \text{ çift ise} \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

sağlanır.

$$(D) \quad S_2 f_i = n^i 2^{(h-i)/\sqrt{b_n}} S_2 e_i = \begin{cases} n^i 2^{(h-i)/\sqrt{b_n}} e_i = f_i, & i \text{ çift ise} \\ 0, & d.d. \end{cases}$$

bulunur.

S_2 operatörü F kümesi üzerinde sınırlıdır ve $\overline{F} = \ell_1$ olduğundan bu operatör ℓ_1 uzayına genişletilebilir. Ayrıca $S_1 = T^2$ ile S_2 operatörleri F üzerinde değişmelidirler. Gerçekten her $i \geq 0$ için

$$T^2 S_2 e_i = \begin{cases} T^2 e_i = e_{i+2}, & i \text{ çift olduğunda} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$S_2 T^2 e_i = S_2 e_{i+2} = \begin{cases} e_{i+2} & , i \text{ çift olduğunda} \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bulunur. Böylece, her $x \in F$ için $T^2 S_2 x = S_2 T^2 x$ elde edilir ve $\overline{F} = \ell_1$ olduğundan dolayı T^2 ve S_2 operatörleri ℓ_1 uzayında değişmelidir.

Son olarak, $K : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ operatörünü,

$$Kf = \begin{cases} Kf_0 = f_0 & , f = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i f_i, \alpha_0 \neq 0 \\ 0 & , \alpha_0 = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlarsak K , ℓ_1 uzayında sınırlı bir boyutlu operatör olur ve $KS_2 = S_2K$ sağlanır.

Şimdi her n tamsayısı için α_n ve b_n tamsayılarını bölecek şekilde bir m sayısı alıp önceki yapıya benzer olarak T^2 yerine $T^m = S_1$ koyulursa Lomonosov teoreminden T^m ' in aşikar olmayan kapalı bir değişmez alt uzayı bulunur.

3.4. Read Operatörünün Kommutantları

$\mathfrak{M} = \left\{ (a_{ij})_{i,j=0}^{\infty} = A : \text{reel sonsuz matris} \right\}$ kümesini alalım. $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}$ alt ailesi ve

$\mathcal{F} = \left\{ (a_{ij})_{i,j=0}^{\infty} : \text{ancak sonlu sayıda } a_{ij} \text{ sıfırdan farklı} \right\}$ olarak seçilsin. $A \in \mathfrak{M}$ için

$A^{(j)} = Af_j$ notasyonu A matrisinin j . kolonunu gösterebilir.

Önerme 3.4.1 : $Sf_j = f_{j+1}$ sağ-kayma operatörü verilsin. Buna göre $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$

kuvvet serisi verildiğinde $p(S) = p_0 I + p_1 S + p_2 S^2 + \dots$ matrisi \mathfrak{M} kümesine aittir ve

$$\begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad [3.17]$$

formundadır.

İspat: $Sf_j = f_{j+1}$ kayma operatörü ve $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ kuvvet serisi verilsin. $p(S)$ matrisinin [3.17] formunda yazılabildiğini göstermek için her $i \geq 0$ için f_i vektörünün görüntüsüne bakalım.

$$\begin{aligned} p(S)f_i &= p_0 f_i + p_1 S f_i + p_2 S^2 f_i + \dots \\ &= p_0 f_i + p_1 f_{i+1} + p_2 f_{i+2} + \dots \\ &= p_0 (0, 0, \dots, \underset{i}{\downarrow} 1, 0, \dots) + p_1 (0, 0, \dots, 0, \underset{(i+1)}{\downarrow} 1, 0, \dots) + p_2 (0, 0, \dots, 0, 0, \underset{(i+2)}{\downarrow} 1, 0, \dots) + \dots \\ &= (0, 0, 0, \dots, \underset{i}{\downarrow} p_0, \underset{(i+1)}{\downarrow} p_1, \underset{(i+2)}{\downarrow} p_2, \dots) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Böylece,

$$p(S) = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

formunda olduğu görülür.

Lemma 3.4.2 : $A \in \mathfrak{M}$ matrisi S ile değişmeli ise bir p kuvvet serisi için $A = p(S)$ dir.

İspat: $(AS)_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik} s_{kj} = a_{i,j+1}$ yazılabilir. Yani,

$$(AS)_{ij} = (ASf_j)_i = (Af_{j+1})_i = a_{i,j+1}$$

dır. Diğer taraftan,

$$(SA)_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} s_{ik} a_{kj} = \begin{cases} a_{i-1,j} & , i \geq 1 \\ 0 & , i = 0 \end{cases}$$

olarak da yazılabilir. $AS = SA$ olduğundan dolayı $A = p(S)$ formunda olacaktır.

Gerçekten, $i = 0$ için $(SA)_{0j} = (AS)_{0j}$ eşitliğinden,

$$0 = a_{0,j+1}$$

sağlanır. $i = 1$ için $(SA)_{1j} = (AS)_{1j}$ eşitliğinden,

$$a_{0j} = a_{1,j+1}$$

sağlanır. $i = 2$ için $(SA)_{2j} = (AS)_{2j}$ eşitliğinden,

$$a_{1j} = a_{2,j+1}$$

sağlanır. Böyle devam edilirse, $i = k$ için $(SA)_{kj} = (AS)_{kj}$ eşitliğinden de,

$$a_{k-1,j} = a_{k,j+1}$$

bulunur. A matrisini,

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{0j} & \cdot \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1j} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i0} & a_{i1} & a_{i2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

biçiminde yazarsak, yukarıdaki eşitliklerden,

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ a_{10} & a_{00} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \\ a_{20} & a_{10} & a_{00} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{30} & a_{20} & a_{10} & a_{00} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

elde edilir.

Önerme 3.4.3: T Read operatörü olmak üzere, $\{T\}' = \left\{ A \in \mathcal{L}(\ell_1) : A = \sum_{n=0}^{\infty} p_n T^n \right\}$

dir.

İspat: Her $j \geq 0$ için $Qf_j = Q^{(j)} = e_j$ olarak tanımlanan $Q \in \mathfrak{M}$ matrisini alalım. [3.2] eşitliğinden $Q \in \mathcal{F}$ ve Q tersinir matristir. Yani, $Q^{-1} \in \mathcal{F}$ dir. $A \in \mathfrak{M}$ olmak üzere $\tilde{A} = Q^{-1}AQ$ dönüşümünü alalım. Bu dönüşüm her $A \in \mathfrak{M}$ için tanımlı, bire bir, örten ve $A = Q\tilde{A}Q^{-1}$ eşitliğini sağlayacaktır. Şimdi tekrar $Te_j = e_{j+1}$ biçiminde tanımlı Read operatörünü ve $Sf_j = f_{j+1}$ kayma operatörünü düşünerek,

$$\begin{aligned} TQf_j &= Te_j = e_{j+1} = Qf_{j+1} \\ &\Rightarrow Q^{-1}TQf_j = f_{j+1} \end{aligned}$$

elde edilecektir. Buradan,

$$\tilde{T}f_j = Q^{-1}TQf_j = f_{j+1} = Sf_j \Rightarrow \tilde{T} = S$$

çıkar. $RT = TR$ koşulunu sağlayan bir $R \in \mathcal{L}(\ell_1)$ alalım. Bu durumda, $\tilde{R}\tilde{T} = Q^{-1}RQ^{-1}TQ = Q^{-1}RTQ = Q^{-1}TRQ = \tilde{T}\tilde{R}$ bulunur. $\tilde{T} = S$ olduğundan $\tilde{R}S = S\tilde{R}$ elde edilir. Böylece, Lemma 3.4.2 ile bir $p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$ polinomu için $\tilde{R} = p(S)$ dir.

Buna göre,

$$R = Q\tilde{R}Q^{-1} = Qp(S)Q^{-1} = p(QSQ^{-1}) = p(T)$$

elde edilir. O halde $\sum_{n=0}^{\infty} p_n T^n$ biçimindeki her sınırlı operatör T Read operatörü ile değişmelidir.

3.5. Pozitif Operatörlerin Değişmez Alt Uzayları

Tanım 3.5.1 : X Banach uzay, $A, B: X \longrightarrow X$ iki sınırlı operatör ise A ve B operatörlerinin komütatörü, $[A, B] = AB - BA$ şeklinde gösterilir.

Açık olarak görülür ki, herhangi iki operatörün değişmeli olması için gerek ve yeter koşul, komütatörlerinin sıfır olmasıdır.

Tanım 3.5.2 : Bir E Banach örgüsü ve bir $B: E \longrightarrow E$ pozitif operatör verilsin. B 'nin süper sağ kommutantı, $[A, B] \geq 0$ olacak biçimdeki bütün $A: E \longrightarrow E$ pozitif operatörlerin ailesidir ve $[B)$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, B 'nin süper sol kommutantı, $[A, B] \leq 0$ olacak biçimdeki bütün $A: E \longrightarrow E$ pozitif operatörlerinin ailesidir ve $\langle B]$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.3 : Bir $B: E \longrightarrow E$ pozitif operatörünün sıfır (null) ideali, $N_B = \{x \in E: B|x| = 0\}$ dir.

Tanım 3.5.4 : Bir $B: E \longrightarrow E$ pozitif operatörünün görüntüsü ile üretilen ideale bu operatörün görüntü ideali denir ve bu ideal de $R_B = \{y \in E: \exists x \in E^+ \ni |y| \leq Bx\}$ biçimindedir.

Lemma 3.5.5 : Bir $B: E \longrightarrow E$ pozitif operatörü için $A \in [B)$ ise,

- (i) N_B ideali A - değişmezdir.
- (ii) R_A ideali B - değişmezdir (11).

Tanım 3.5.6 : E Banach örgüsü içinde E_u , u ile üretilen esas ideal olmak üzere $\overline{E_u} = E$ ise u elemanına bir yarı iç nokta (quasi-interior point) denir.

Lemma 3.5.7 : $u > 0$, bir E Banach örgüsü içinde bir yarı iç nokta (quasi-interior point) olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

1) Her bir $0 \neq y \in E_u$ için $V(y) > 0$ ve " $\forall x \in E$ için $|Vx| \leq |x|$ " koşullarını sağlayacak biçimde bir $V: E \longrightarrow E$ operatörü vardır.

2) $0 \leq v \leq u$ sağlayan her v elemanı için, $U(u) = v$ ve $|Ux| \leq |x|$ olacak biçimde bir $U: E \longrightarrow E$ operatörü vardır (7).

Lemma 3.5.8 : E bir Banach örgüsü olmak üzere bir pozitif $u > 0$ elemanı için aşağıdakiler denktir:

- (1) u ile üretilen esas ideal E içinde yoğundur ($\overline{E_u} = E$).
- (2) Her bir $x \in E^+$ için $\|x \wedge nu - x\| \longrightarrow 0$ sağlanır (10).

Tanım 3.5.9 : E Banach örgüsü üzerinde, B pozitif olmak üzere $T, B: E \longrightarrow E$ iki operatör verisin.

$$\text{Her bir } x \in E \text{ için} \quad |T(x)| \leq B(|x|)$$

koşulu sağlanıyorsa T operatörü B operatörü ile sınırlanır veya B operatörü T operatörünü sınırlar denir.

Teorem 3.5.10 : $B: E \rightarrow E$ pozitif operatör ve aşağıdaki şartlar sağlanacak biçimde bir $S: E \longrightarrow E$ pozitif operatörü verilsin.

- 1) $S \in \langle B \rangle$.
- 2) S , en az bir pozitif vektörde quasinilpotenttir.
- 3) S , sıfırdan farklı kompakt operatörü sınırlar.

Bu durumda B , aşıkâr olmayan bir kapalı değişmez ideale sahiptir.

İspat: B, S ve x_0 teoremden istenilen özellikleri sağlasın. K sıfırdan farklı ve S ile sınırlanmış bir kompakt operatör olsun. Bu durumda,

$$\forall x \in E \text{ için} \quad |Kx| \leq S(|x|)$$

olur. $\|B\| < 1$ varsayabiliriz. Böylece $A = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$ serisi yakınsak olup E üzerinde de

bir pozitif operatör tanımlayacaktır. $SB \leq BS$ olduğundan her bir k için $SB^k \leq B^k S$ ve $SA^k \leq A^k S$ sağlanır. Birinci eşitsizlik tümevarım ile gösterilebilir. Açıkça, her bir k için $SB^k \leq B^k S$ doğru ise $SB^{k+1} = SB^k B \leq B^k SB \leq B^k BS = B^{k+1} S$ olur. Diğer eşitsizliği gösterelim.

$$SA = S \left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} SB^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} B^n S = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B^n \right) S = AS$$

dır. Buna göre her $k \geq 0$ için $SA^k \leq A^k S$ olur. Şimdi her bir $x > 0$ için Ax ile üretilen esas ideali J_x ile gösterelim. Yani,

$$J_x = \{y \in E : \exists \lambda > 0 \text{ için } |y| \leq \lambda Ax\}.$$

$x \in J_x$ olduğundan $J_x \neq \{0\}$ çıkar. J_x , B -değişmezdir. Gerçekten, $y \in J_x$ ise en az bir $\lambda > 0$ için $|y| \leq \lambda Ax$ elde edilir ve buradan da,

$$|By| \leq B|y| \leq \lambda BAx = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} B^n x \leq \lambda Ax$$

olur. Böylece $By \in J_x$ sağlanır. O halde $\overline{J_x}$, sıfırdan farklı kapalı B -değişmez idealdir. En az bir $x > 0$ için $\overline{J_x} \neq E$ olduğu gösterilebilir ise ispat tamamlanmış olur.

$$\text{Her bir } x > 0 \text{ için } \overline{J_x} = E \quad [3.18]$$

olsun. Genelliği bozmadan $Kx_0 \neq 0$ varsayabiliriz. Bunu göstermek için J_{x_0} idealini düşünelim. Her bir $0 < y \in J_{x_0}$ için $Ky_0 = 0$ ise J_{x_0} üzerinde $K = 0$ olur ve sonuç olarak [3.18] ile K , E üzerinde de sıfır olur. Bu da K operatörünün sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Böylece, en az bir $0 < y \in J_{x_0}$ için $Ky_0 \neq 0$ dır. S , x_0 vektöründe quasinilpotent ve bir $\lambda > 0$ için $y_0 \leq \lambda Ax_0$ olduğundan S operatörü y_0 vektörü içinde quasinilpotenttir. Açıkça,

$$\begin{aligned} S^n y_0 &\leq \lambda S^n Ax_0 \leq \lambda AS^n x_0 \\ \Rightarrow \|S^n y_0\| &\leq \lambda \|AS^n x_0\| \leq \lambda \|A\| \cdot \|S^n x_0\| \\ \Rightarrow \|S^n y_0\|^{1/n} &\leq \lambda^{1/n} \|A\|^{1/n} \cdot \|S^n x_0\|^{1/n} \longrightarrow 0 \\ \Rightarrow \|S^n y_0\| &\longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Böylece x_0 ve y_0 vektörlerini yer değiştirerek, $Kx_0 \neq 0$ varsayabiliriz. Şimdi $\|K\| = 1$ olsun. $Kx_0 \neq 0$ olduğundan $\|x_0\| > 1$ ve $\|Kx_0\| > 1$ kabul edebiliriz. $U_0 = \{x \in E : \|x - x_0\| \leq 1\}$ kapalı birim yuvar olsun. $\|K\| = 1, \|x_0\| > 1$ ve $\|Kx_0\| > 1$ olduğundan,

$$0 \notin \overline{U_0} \quad \text{ve} \quad 0 \notin \overline{K(U_0)} \quad [3.19]$$

dır. Her bir $x > 0$ için $\overline{J_x} = E$ olduğundan, her bir $x \neq 0$ için $\overline{J_{|x|}} = E$ dir. Diğer yandan $A(|x|)$, E içinde bir yarı iç (quasi-interior) vektördür. Sonuç olarak Lemma 3.5.8 dan $\forall y \geq 0$ için $\{y \wedge nA(|x|)\}$ dizisi norm yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y \wedge nA(|x|) = y$ sağlanır. Özel olarak her bir $x \neq 0$ için $\exists n$ vardır $\ni \|x_0 - x_0 \wedge nA(|x|)\| < 1$. Şimdi,

$$\begin{aligned} f: E &\longrightarrow E \\ z &\longrightarrow f(z) = x_0 \wedge nA(|z|) \end{aligned}$$

fonksiyonunu alalım. Şimdi f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için keyfi bir $z_0 \in E$ de sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $\forall \varepsilon > 0$ için $\|z - z_0\| < \delta$ olduğunda $\|f(z) - f(z_0)\| < \varepsilon$ olacak biçimde $\exists \delta > 0$ sayısı bulmalıyız.

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |x_0 \wedge nA(|z|) - x_0 \wedge nA(|z_0|)| \\ &\leq |nA(|z|) - nA(|z_0|)| \\ &= n|A(|z|) - A(|z_0|)| \\ &\leq nA\|z| - |z_0|| \\ &\leq nA\|z - z_0|. \end{aligned}$$

Eşitsizliği ile E ' nin Banach örgüsü olduğu kullanılırsa,

$$\|f(z) - f(z_0)\| \leq n\|A\| \cdot \|z - z_0\| \leq n\|A\| \delta < \varepsilon$$

elde edilir. Böylece, $\delta = \frac{\varepsilon}{n\|A\|} > 0$ sayısı seçebiliriz. O halde f fonksiyonu sürekli

olduğundan, her bir n için $S_n = \{z \in E : \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1\}$ kümesi açık bir kümedir. $0 \notin \overline{K(U_0)}$ olduğundan,

$$\overline{K(U_0)} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in E : \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1\}$$

sağlanır. n büyüdükçe $S_n = \{z \in E : \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1\}$ kümesi genişler.

Gerçekten,

$$z \in S_n \Rightarrow \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1$$

ve

$$\begin{aligned} n \leq m &\Rightarrow nA(|z|) \leq mA(|z|) \Rightarrow x_0 \wedge nA(|z|) \leq x_0 \wedge mA(|z|) \\ &\Rightarrow x_0 - x_0 \wedge mA(|z|) \leq x_0 - x_0 \wedge nA(|z|) \\ &\Rightarrow |x_0 - x_0 \wedge mA(|z|)| \leq |x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)| \\ &\Rightarrow \|x_0 - x_0 \wedge mA(|z|)\| \leq \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1 \\ &\Rightarrow \|x_0 - x_0 \wedge mA(|z|)\| < 1 \\ &\Rightarrow S_n \subseteq S_m \end{aligned}$$

sağlanır.

n büyüdükçe $S_n = \{z \in E : \|x_0 - x_0 \wedge nA(|z|)\| < 1\}$ kümesi genişlediğinden ve $\overline{K(U_0)}$ kümesinin kompaktlığından, en az bir m için

$$\overline{K(U_0)} \subseteq \{z \in E : \|x_0 - x_0 \wedge mA(|z|)\| < 1\}$$

sağlanır. Diğer taraftan $x \in \overline{K(U_0)}$ iken $x_0 \wedge mA(|x|) \in U_0$ olacak biçimde en az bir m sabiti vardır. Ayrıca, $x_1 = x_0 \wedge mA(|Kx_0|) \in U_0$ sağlanır. Böylece, $Kx_1 \in K(U_0)$ ve $x_2 = x_0 \wedge nA(|Kx_1|) \in U_0$ olur. Böyle devam edilirse U_0 içinde, $x_{n+1} = x_0 \wedge nA(|Kx_n|)$ genel terimli pozitif vektörlerin bir $\{x_n\}$ dizisini elde edilir.

$$\text{Her bir } n \text{ için} \quad 0 \leq x_n \leq m^n A^n S^n x_0$$

Eşitsizliğinin gerçekleştiğini tümevarımla görelim. $n=1$ için

$$x_1 = x_0 \wedge mA(|Kx_0|) \leq mA(Sx_0) \text{ doğrudur. } n=k \text{ için } 0 \leq x_k \leq m^k A^k S^k x_0 \text{ doğru olsun.}$$

$n=k+1$ için

$$0 \leq x_{k+1} = x_0 \wedge mA(|Kx_k|) \leq mA(|Kx_k|) \leq mA(Sx_k) \leq m^{k+1} A(SA^k S^k x_0) \leq m^{k+1} A^{k+1} S^{k+1} x_0$$

çıkar. Böylece her bir n için $0 \leq x_n \leq m^n A^n S^n x_0$ sağlanır. Şimdi bu eşitsizliğin normu alınırsa,

$$\|x_n\| \leq \|m^n A^n S^n x_0\| \leq m^n \|A^n\| \|S^n x_0\|$$

$$\|x_n\|^{1/n} \leq m \|A\| \|S^n x_0\|^{1/n}$$

elde edilir. Sağ tarafın limiti sıfır olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^{1/n} = 0$, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ olur. Buna göre $\{x_n\} \subset U_0$ ve $0 \in \overline{U_0} = U_0$ olduğu görülür. Bu da [3.19] ile çelişir. O halde kabulümüz yanlış olur, yani, bir $x > 0$ için $\overline{J_x} \neq E$ dir. Böylece $\overline{J_x}$, aşıkâr olmayan kapalı B -değişmez bir idealdir.

Tanım 3.5.11 : Bir E Banach örgüsü üzerinde tanımlı bir operatör $T : E \longrightarrow E$ olsun. Her bir $a, b \in E$ için $T[a, b]$ norm-total sınırlı bir küme oluyorsa, T operatörüne AM-kompakt operatör denir.

Önerme 3.5.12 : Her kompakt operatör bir AM-kompakt operatördür.

İspat: E bir Banach örgüsü ve $T : E \longrightarrow E$ kompakt bir operatör olsun. Bir $[x, y]$ kapalı aralığı verildiğinde, her $a \in [x, y]$ için $x \leq a \leq y$ sağlanır. Diğer taraftan, Riesz uzayının elemanter özelliklerinden,

$$a \leq y \leq |y| \leq |y| \vee |x| \quad [3.20]$$

elde edilir. $-|x| \leq x \leq a$ ve $-|x| \wedge -|y| \leq -|x|$ eşitsizlikleri birlikte düşünülerek,

$$-(|x| \vee |y|) \leq -|x| \leq x \leq a \quad [3.21]$$

bulunur. [3.20] ve [3.21] den,

$$\begin{aligned} -(|x| \vee |y|) \leq -|x| \leq |x| \vee |y| &\Rightarrow |a| \leq |x| \vee |y| \\ &\Rightarrow \|a\| \leq \| |x| \vee |y| \| = M \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre her $a \in [x, y]$ için $\|a\| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. O halde $[x, y]$ aralığı norm sınırlıdır. Ayrıca, T operatörü kompakt olduğundan, $T[x, y]$ kümesi norm total sınırlıdır. Yani, T operatörü bir AM-kompakt bir operatör olur.

Teorem 3.5.13 : Bir $B : E \rightarrow E$ pozitif operatörü ile aşağıdaki koşulları sağlayan bir $S : E \rightarrow E$ pozitif operatörü verilsin:

1. $S \in \langle B \rangle$,
2. $\exists x_0 > 0$ elemanı için $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|S^n x_0\|^{1/n} = 0$ dır,
3. S , sıfırdan farklı bir AM-kompakt operatörünü sınırlar,

Bu durumda B , aşikar olmayan bir kapalı değişmez ideale sahiptir.

İspat : $K : E \rightarrow E$ AM-kompakt ve $\forall x \in E$ için $|Kx| \leq S(|x|)$ sağlansın. $\|B\| < 1$

almak geneli bozmaz. Bir $A : E \rightarrow E$ operatörünü $A = \sum_{n=0}^{\infty} B^n$ biçiminde

tanımlayalım. $\|A\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|B\|^n = \frac{1}{1-\|B\|} < \infty$ ve her mutlak yakınsak seri yakınsak

olduğundan A serisi yakınsaktır. Bunun yanında E üzerinde bir pozitif operatör tanımlar. $SB \leq BS$ olduğundan tümevarım metoduyla her bir n için $SB^n \leq B^n S$ ve $SA^n \leq A^n S$ sağlanır. Her bir $x > 0$ için Ax ile üretilen esas ideali J_x ile gösterelim.

Yani,

$$J_x = \{y \in E : \exists \lambda > 0 \text{ için } |y| \leq \lambda Ax\}.$$

$x \in J_x$ olduğundan $J_x \neq \{0\}$. İddia ediyoruz ki J_x , B -değişmezdir. Gerçekten, $y \in J_x$ ise $\exists \lambda > 0$ için $|y| \leq \lambda Ax$ sağlanır, bundan dolayı,

$$|By| \leq B|y| \leq \lambda BAx = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} B^n x \leq \lambda Ax$$

olur ve $By \in J_x$ sağlanır. O halde $\overline{J_x}$, sıfırdan farklı bir kapalı B -değişmez idealdir.

Şimdi,

$$\text{Her bir } x > 0 \text{ için } \overline{J_x} = E \quad [3.22]$$

olsun. Geneli bozmadan $Kx_0 \neq 0$ varsayabiliriz. $Kx_0 = 0$ ise J_{x_0} idealini alalım.

$\forall 0 < y \in J_{x_0}$ için $Ky = 0$ ise $K|_{J_{x_0}} = 0$ olur. Yani, K operatörü J_{x_0} üzerinde sıfır

olur. Böylece, [3.22] ile K operatörü, E üzerinde de sıfır olur. Bu da K operatörünün sıfırdan farklı olmasıyla çelişir. Böylece $\exists 0 < y \in J_{x_0}$ için $Ky_0 \neq 0$ dir. S , x_0 vektöründe quasinilpotent ve $\exists \lambda > 0$ için $y_0 \leq \lambda Ax_0$ olduğundan, S operatörü y_0 vektöründe de quasinilpotenttir. Açıkça,

$$\begin{aligned} S^n y_0 &\leq \lambda S^n Ax_0 \leq \lambda AS^n x_0 \\ \|S^n y_0\| &\leq \lambda \|AS^n x_0\| \leq \lambda \|A\| \cdot \|S^n x_0\| \\ \|S^n y_0\|^{1/n} &\leq \lambda^{1/n} \|A\|^{1/n} \cdot \|S^n x_0\|^{1/n} \longrightarrow 0 \\ \|S^n y_0\| &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece x_0 ve y_0 vektörlerini yer değiştirerek $Kx_0 \neq 0$ varsayabiliriz.

$\|K\| = 1$ kabul edebiliriz. Gerçekten, $K' = \frac{K}{\|K\|}$ operatörü alınırsa K , AM-kompakt olduğundan K' operatörü de AM-kompakt operatördür. Ayrıca K , S operatörü ile sınırlandığından,

$$|K'x| = \left| \frac{K}{\|K\|} x \right| \leq \frac{1}{\|K\|} |Kx| \leq \frac{1}{\|K\|} S(|x|)$$

yazılır. $S' = \frac{1}{\|K\|} S$ ile gösterilirse, her $x \in E$ için $|K'x| \leq S'(|x|)$ sağlanır. Buna göre

S' operatörü teoremin ikinci koşulunu da sağlar. O halde $\|K\| = 1$ almakta hiçbir sakınca yoktur.

$Kx_0 \neq 0$ olduğundan $\|x_0\| > 1$ ve $\|Kx_0\| > 1$ alınabilir. Bu durumda

$U_0 = \{y \in E : \|x_0 - y\| \leq 1\}$ şeklinde tanımlanan U_0 için

$$0 \notin \overline{U_0} \quad \text{ve} \quad 0 \notin \overline{K(U_0)}. \quad [3.23]$$

sağlanır. Her bir $0 \neq x \in E$ için [3.22] den dolayı $\overline{J_{|x|}} = E$ olacaktır. Böylece $A(|x|)$, E içinde bir yarı iç (quasi-interior) vektör olur ve sonuç olarak Lemma 3.5.8 dan her $y \geq 0$ için $\{y \wedge nA(|x|)\}$ dizisi norm yakınsaktır ve $\lim_{n \rightarrow \infty} y \wedge nA(|x|) = y$ dir. Özel

olarak $\varepsilon = 1$ alınırsa her bir $x \neq 0$ için $\exists n$ vardır $\ni \|x_0 - x \wedge nA(|x|)\| < 1$ sağlanır.

Şimdi,

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E \\ z &\longrightarrow f(z) = x_0 \wedge nA(|z|) \end{aligned}$$

sürekli dönüşümünü ve $S_n = \{z \in E : \|x_0 - x \wedge nA(|z|)\| < 1\}$ kümesini tanımlayalım.

$S_n = f^{-1}\{z \in E : \|x_0 - z\| < 1\}$ ve f sürekli olduğundan, her bir n için S_n kümesi

açıktır. Her bir $x \in E \setminus \{0\}$ için [3.23] den dolayı $x \in S_n$ olur. Ayrıca, $x \in S_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$

olduğundan, $E \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ sağlanır. Diğer taraftan,

$$U_0 \cap [0, x_0] \subset [0, x_0] \Rightarrow \overline{K(U_0 \cap [0, x_0])} \subset \overline{K([0, x_0])}$$

kapsaması vardır. K , AM-kompakt olduğundan $\overline{K([0, x_0])}$ kompakt ve dolayısıyla

$\overline{K(U_0 \cap [0, x_0])}$ kümesi kompakttır. Bunun yanında, $0 \notin \overline{K(U_0 \cap [0, x_0])}$

olduğundan

$$\overline{K(U_0 \cap [0, x_0])} \subseteq E \setminus \{0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

sağlanır. O halde $\{S_n\}$ ailesi, $\overline{K(U_0 \cap [0, x_0])}$ kümesi için bir açık örtüdür.

Dolayısıyla $\overline{K(U_0 \cap [0, x_0])}$ kompakt kümesi sonlu bir alt örtüye sahiptir. Yani,

$$\overline{K(U_0 \cap [0, x_0])} \subseteq \bigcup_{r=1}^k S_{n_r}$$

olacak biçimde $\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \in \mathbb{N}$ sonlu kümesi vardır. S_n kümesi artan olduğundan,

$m = \max\{n_1, \dots, n_k\}$ için $\bigcup_{r=1}^k S_{n_r} = S_m$ olur. Böylece,

$$\overline{K(U_0 \cap [0, x_0])} \subseteq S_m$$

sağlanır.

$x_0 \in U_0 \cap [0, x_0]$ ise $K(x_0) \in K(U_0 \cap [0, x_0]) \subset \overline{K(U_0 \cap [0, x_0])} \subset S_m$ olduğundan $x_1 = x_0 \wedge mA(|Kx_0|) \in U_0$ elde edilir. $0 < x_1 \leq x_0$ olduğundan $K(x_1) \in K(U_0 \cap [0, x_0])$ ve $x_2 = x_0 \wedge nA(|Kx_1|) \in U_0$ çıkar. Böyle devam edilirse $U_0 \cap [0, x_0]$ kümesinin elemanlarından oluşan $\{x_n\}$ dizisi bulunabilir ve $x_{n+1} = x_0 \wedge nA(|Kx_n|)$ sağlanır. Her bir n için

$$0 \leq x_n \leq m^n A^n S^n x_0 \quad [3.24]$$

elde edilir. Tümevarımla;

$n = 1$ için

$$0 \leq x_1 = x_0 \wedge mA(|Kx_0|) \leq mA(|Kx_0|) \leq mASx_0.$$

$n = k$ için

$$0 \leq x_k \leq m^k A^k S^k x_0$$

doğru olsun.

$n = k + 1$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq x_{k+1} &= x_0 \wedge mA(|Kx_k|) \leq mA(|Kx_k|) \leq mASx_k \\ &\leq mAS(m^k A^k S^k x_0) \\ &\leq m^{k+1} AA^k SS^k x_0 \\ &= m^{k+1} A^{k+1} S^{k+1} x_0 \end{aligned}$$

sağlanır. O halde [3.24] eşitsizliği doğru olur. Banach örgüsünün özelliğinden,

$$\begin{aligned} \|x_n\| &\leq \|m^n A^n S^n x_0\| \leq m^n \|A\|^n \|S^n x_0\| \\ 0 \leq \|x_n\|^{1/n} &\leq m \|A\| \|S^n x_0\|^{1/n} \end{aligned}$$

çıkar. Ayrıca, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|S^n x_0\|^{1/n} = 0$ olduğundan $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|^{1/n} = 0$ sağlanır. Buna göre

$0, \{\|x_n\|^{1/n}\}$ dizisi için bir yığılma noktasıdır. Böylece $x_n \xrightarrow{\mathbb{H}} 0$ olur. Bu ise

$0 \in \overline{U_0} = U_0$ olmasını gerektirir. Oysa [3.23]' e göre bu bir çelişki oluşturur. O halde

$\exists x \in E^+$ için $\overline{J_x} \neq E$ olur. Böylece, $\overline{J_x}$, aşikar olmayan bir kapalı B -değişmez idealdir.

Yukarıdaki teoremlerde $S \in \langle B \rangle$ özelliği B ve S ' in değişmeli olması şartından daha zayıf bir özelliktir. Teorem 3.5.10 ve Teorem 3.5.13 deki birinci koşulun $S \in [B]$ olması durumunda değişmez alt uzayın olup olmayacağı halen açık bir problemdir.

Teorem 3.5.14 : $B: E \rightarrow E$ pozitif operatör ile aşağıdaki koşulları sağlayan bir $S: E \rightarrow E$ pozitif operatörü verilsin:

- 1) $S \in [B]$.
- 2) S , quasinilpotenttir.
- 3) S , sıfırdan farklı kompakt operatörü sınırlar.

Bu durumda B , aşikar olmayan bir kapalı değişmez ideale sahiptir (11).

Teorem 3.5.15 : $B: E \rightarrow E$ pozitif operatör ile aşağıdaki koşulları sağlayan bir $S: E \rightarrow E$ pozitif operatörü verilsin:

- 1) $SB \geq BS$ dir.
- 2) S , quasinilpotenttir.
- 3) S , sıfırdan farklı bir AM-kompakt operatörü sınırlar.

Bu durumda B , aşikar olmayan bir kapalı değişmez ideale sahiptir (11).

Teorem 3.5.16 : $B, S: E \rightarrow E$ sıfırdan farklı iki değişmeli pozitif operatör alalım.

Bu operatörlerden biri sıfırdan farklı pozitif vektörde quasinilpotent ve diğeri de sıfırdan farklı bir kompakt operatörü sınırlarsa, B ve S aynı aşikar olmayan kapalı değişmez ideale sahiptir (11).

Sonuç 3.5.17 : Aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $B: E \rightarrow E$ pozitif operatörü verilsin:

(1) B , en az bir pozitif vektörde quasinilpotenttir.

(2) B 'nin bir kuvveti sıfırdan farklı kompakt operatörü sınırlar.

Buna göre, B 'nin aşikar olmayan kapalı değişmez ideali vardır (8).

Tanım 3.5.18 : Bir E Banach örgüsü üzerinde tanımlı pozitif bir T operatörü verilsin. Eğer,

(i) $RT = TR$, (ii) $\forall x \in E$ için $|Cx| \leq R|x|$, (iii) $\forall x \in E$ için $|Cx| \leq K|x|$,

olacak biçimde $0 \neq R, K, C : E \longrightarrow E$ (R pozitif, K pozitif kompakt) operatörleri varsa, T operatörüne bir yakın-kompakt (compact-friendly) operatör denir.

Bazı yakın kompakt operatör örnekleri aşağıdaki sunulmuştur:

- 1) Pozitif kompakt operatörler,
- 2) Sıfırdan farklı pozitif kompakt operatörler ile değişmeli operatörler,
- 3) Sıfırdan farklı pozitif kompakt operatörleri sınırlayan pozitif operatörler,
- 4) Kompakt operatörlerle sınırlanmış pozitif operatörler.

Teorem 3.5.19 : $E \xrightarrow{M_1} F \xrightarrow{M_2} G \xrightarrow{M_3} H$ olacak biçimde E, F, G Banach örgüleri üzerinde tanımlı M_1, M_2, M_3 sürekli operatörleri, pozitif kompakt operatörlerle sınırlanmış ise $M_3 M_2 M_1$ bileşkesi de kompakt operatör olur (18).

Teorem 3.5.20 : Quasinilpotent olan her pozitif yakın-kompakt operatör aşikar olmayan bir kapalı değişmez ideale sahiptir.

İspat : E bir Banach örgüsü ve $B : E \longrightarrow E$ ise sıfırdan farklı bir yakın-kompakt operatör olsun. $TB = BT$ koşulunu sağlayan başka bir $T : E \longrightarrow E$ pozitif operatörü alalım.

(i) $RB = BR$, (ii) $\forall x \in E$ için $|Cx| \leq R|x|$, (iii) $\forall x \in E$ için $|Cx| \leq K|x|$,

koşulları sağlanacak biçimde $0 \neq R, K, C : E \longrightarrow E$ (R pozitif, K pozitif kompakt) operatörlerini alalım. Geneli bozmadan $\|B+T\| < 1$ alabiliriz. $A = \sum_{n=0}^{\infty} (B+T)^n$ serisini tanımlayalım. Açıkça, A operatörü, B ve T operatörleri ile değişmeli pozitif operatördür. Ayrıca,

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} (B+T)^n x = x + (B+T)x + \dots \Rightarrow x \leq Ax$$

olur. Buna göre her bir $x \geq 0$ için $Ax \geq x$ sağlanır. Her bir $x > 0$ için Ax ile üretilen esas ideali $J[x] = \{y \in E : |y| \leq \lambda Ax : \exists \lambda > 0\}$ ile gösterelim. $0 < x \in J[x]$ olduğundan $J[x] \neq \{0\}$ dir. Ayrıca, $\overline{J[x]}$, $(B+T)$ -değişmez idealdir. Eğer, $\exists x > 0$ için $\overline{J[x]} \neq E$ ise $\overline{J[x]}$, aşık olmayan kapalı $(B+T)$ -değişmez bir idealdir.

$$\text{Her bir } x > 0 \text{ için } \overline{J[x]} = E \quad [3.25]$$

sağlansın. Bu durumda Ax , E içinde bir yarı iç nokta olur. $C \neq 0$ olduğundan, $Cx_1 \neq 0$ olacak biçimde $\exists x_1 > 0$ vektörü vardır. $Cx_1 \neq 0$ olduğundan $A|Cx_1|$, bir yarı iç noktadır ve $|Cx_1| \leq A|Cx_1|$ sağlanır. Lemma 3.5.7, birinci koşuldan $V_1 Cx_1 > 0$ ve her bir $x \in E$ için $|V_1 x| \leq |x|$ olacak biçimde $V_1 : E \longrightarrow E$ operatörü vardır. $V_1 Cx_1 = x_2$ ve $M_1 = V_1 C$ alalım. Her bir $x \in E$ için

$$|M_1 x| = |V_1 Cx| \leq |Cx| \leq R(|x|) \quad \text{ve} \quad |M_1 x| = |V_1 Cx| \leq |Cx| \leq K(|x|)$$

olduğundan M_1 operatörü K pozitif kompakt operatörü ve R pozitif operatörü ile sınırlanır. [3.25]' e göre $\overline{J[x_2]} = E$ ve $C \neq 0$ olduğundan, $Cy \neq 0$ olacak biçimde $0 < y \leq Ax_2$ vektörü vardır. Ax_2 , bir yarı iç nokta ve yine Lemma 3.5.7, ikinci koşuldan, $UAx_2 = y$ ve her bir $x \in E$ için $|Ux| \leq |x|$ koşulları sağlanacak biçimde bir $U : E \longrightarrow E$ operatörü vardır. $A|Cy|$ elemanı bir yarı iç nokta ve $|Cy| \leq A|Cy|$ olduğundan tekrar Lemma 3.5.7, birinci koşuldan $x_3 = V_2 Cy = V_2 CUAx_2 > 0$ olacak biçimde bir $V_2 : E \longrightarrow E$ operatörü vardır. $M_2 = V_2 CUA$ alalım. Her bir $x \in E$ için

$$|M_2 x| = |V_2 CUAx| \leq |CUAx| \leq K(|UAx|) \leq K(|Ax|) \leq KA(|x|)$$

ve

$$|M_2x| = |V_2CUAx| \leq |CUAx| \leq R(|UAx|) \leq R(|Ax|) \leq RA(|x|)$$

sağlandığından M_2 operatörü, KA kompakt operatörü ve RA pozitif operatörü ile sınırlanır. Şimdi, x_2 ve x_3 vektörlerinin yerlerini değiştirerek yukarıda yapılan işlemler tekrarlanırsa, $M_3x_3 > 0$ ve KA , RA operatörleri ile sınırlı bir $M_3 : E \rightarrow E$ operatörü daha bulunur. Burada, $M_3M_2M_1x_1 = M_3x_3 > 0$ dir. Teorem 3.5.18 den $M_3M_2M_1$ sıfırdan farklı kompakt bir operatördür. Üstelik,

$$|M_3M_2M_1(x)| \leq RARAR(|x|) \leq (RARAR+T)[|x|]$$

sağlanır. $S = RARAR+T$ alalım. Buna göre B ve S değişmeli iki operatör, S operatörü $M_3M_2M_1$ kompakt operatörünü sınırlar ve B operatörü quasinilpotenttir. Teorem 3.5.16 dan B ve S bir aşikar olmayan kapalı değişmez ideale sahiptir.

Teorem 3.5.21 : $r_0(B) = 0$ olacak biçimdeki her B yakın-kompakt operatörü bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir (16).

Teorem 3.5.22 : Ω bir kompakt Hausdorff uzay ise $C(\Omega)$ üzerinde her skaler olmayan pozitif operatör, bir aşikar olmayan kapalı hiperdeğişmez alt uzaya sahiptir (11).

Teorem 3.5.23 : Ω lokal kompakt Hausdorff uzay olmak üzere, $B : C_0(\Omega) \rightarrow C_0(\Omega)$ pozitif operatörü sıfırdan farklı bir pozitif vektörde quasinilpotent ise B bir aşikar olmayan kapalı değişmez ideale sahiptir (11).

3.6. $C(\Omega)$ Uzayı Üzerinde Çarpım Operatörleri

Tanım 3.6.1 : Ω bir kompakt Hausdorff uzay ve $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir sürekli fonksiyon olmak üzere her bir $x \in C(\Omega)$ ve her bir $w \in \Omega$ için $(M_\varphi x)(w) = \varphi(w)x(w)$

biçiminde tanımlanan $M_\varphi : C(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$ dönüşümüne φ ile üretilen çarpım operatörü denir.

φ fonksiyonu bu çarpım operatörünün çarpanı olarak bilinir.

Lemma 3.6.2 : Bir $\varphi \in C(\Omega)$ fonksiyonu verilsin. M_φ ile değişmeli sınırlı bir $T : C(\Omega) \longrightarrow C(\Omega)$ operatörü için aşağıdakiler doğrudur:

- (i) $C(\Omega)$ uzayında φ ile üretilen \mathcal{A}_φ kapalı birimli alt cebir içinde, her bir x için $Tx = hx$ olacak şekilde bir $h \in C(\Omega)$ vardır.
- (ii) Her bir $f \in \mathcal{A}_\varphi$ için $TM_f = M_fT$ dir.
- (iii) φ bire bir ise T ' nin kendisi bir çarpım operatörü olur. Ayrıca, φ bire bir ise $\{M_\varphi\}' = \{M_f : f \in C(\Omega)\}$ dir.

İspat :

(i) $TM_\varphi = M_\varphi T \Rightarrow$ her bir $x \in C(\Omega)$ için $T(\varphi x) = \varphi T(x)$ dir. Tümevarım ile $\forall n \geq 0$ ve $\forall x \in C(\Omega)$ için $T(\varphi^n x) = \varphi^n T(x)$ elde edilir. Böylece, her bir p polinomu ve bütün $x \in C(\Omega)$ vektörleri için

$$T(p(\varphi)x) = p(\varphi)Tx \quad [3.26]$$

olur.

$x = 1$ sabit fonksiyonu için $h = T1$ alınırsa her bir p polinomu için [3.26] ifadesi $T(p(\varphi)) = hp(\varphi)$ eşitliğine dönüşür. Diğer yandan, $\forall x \in \mathcal{A}_\varphi$ için $Tx = hx$ sağlanır.

(ii) $f \in \mathcal{A}_\varphi$ alalım. $x \in C(\Omega)$ ise (i) den,

$$TM_f(x) = T(fx) = fT(x) = M_fT(x)$$

elde edilir. Böylece $TM_f = M_fT$ olur.

(iii) φ bire bir ise Stone-Weierstrass yaklaşım teoremi ile $\mathcal{A}_\varphi = C(\Omega)$ olur. Buna göre (i) ile $T = M_\varphi$ olur.

Teorem 3.6.3 : Bir $\varphi \in C(\Omega)$ fonksiyonu, Ω ' nın boştan farklı açık bir alt kümesinde sabit olsun. Bu durumda, M_φ çarpım operatörü rankı bir (rank-one) pozitif operatörü ile değişmelidir ve M_φ çarpım operatörü yakın-kompakt olur (19).

Teorem 3.6.4 : Bir $\varphi \in C(\Omega)$ fonksiyonu ile üretilen bir M_φ çarpım operatörü için aşağıdakiler denktir:

1. φ fonksiyonu, Ω ' nın boştan farklı açık olan en az bir alt kümesinde sabittir.
2. M_φ , rankı bir olan pozitif bir operatör ile değişmelidir.
3. M_φ , rankı bir olan bir operatör ile değişmelidir.
4. M_φ , sıfırdan farklı sonlu rank operatör ile değişmelidir (19).

Sonuç 3.6.5 : $C(\Omega)$ uzayı üzerinde tanımlı her çarpım operatörü bir Lomonosov operatörüdür.

İspat : Ω en az iki noktaya sahip olsun ve $\varphi \in C(\Omega)$ alalım. $w_0 \in \Omega$ elemanını ve $w_0 \in V \subset \bar{V} \subseteq W$ ve $W^c \neq \emptyset$ olacak biçimde iki açık V ve W kümelerini seçelim. Buna göre Ω normal uzay olduğundan, W^c üzerinde $f = 0$ ve \bar{V} üzerinde $f = 1$ olacak biçimde $f \in C(\Omega)$ seçebiliriz. Böylece M_f sıfırdan farklı skaler olmayan bir operatör olup, M_φ ile değişmelidir. Ayrıca, Teorem 3.6.4 den M_f rank-bir operatörü ile değişmelidir.

Böylece, her Lomonosov operatörü aşikar olmayan değişmez bir alt uzaya sahip olduğundan, $C(\Omega)$ uzayının üzerinde tanımlanan her çarpım operatörü, aşikar olmayan kapalı değişmez bir alt uzaya sahiptir.



4. DEĞİŞMEZ ALT UZAY PROBLEMİ VE BAZI AÇIK PROBLEMLER

Bu bölümde yine X , sonsuz boyutlu ayrılabilir reel Banach uzayı olarak kabul edilecektir.

Tanım 4.1.1: $X_c = X + iX = \{x + iy : x, y \in X\}$ biçiminde tanımlanmaktadır. Bunun yanı sıra,

(i) Her $(x_1 + iy_1), (x_2 + iy_2) \in X_c$ için

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

(ii) $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(\alpha + i\beta) \cdot (x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$

işlemlerine göre X_c bir karmaşık vektör uzayı oluşturur.

X_c karmaşık vektör uzayı üzerinde tanımlanan

$$\|x + iy\|_c = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| \text{ fonksiyonu bir normdur.}$$

Gerçekten norm olması için (i) $\|z\|_c = 0 \Leftrightarrow z = 0$, (ii) Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\|\lambda z\|_c = |\lambda| \|z\|_c$,

(iii) $\forall z_1, z_2 \in X_c$ için $\|z_1 + z_2\|_c \leq \|z_1\|_c + \|z_2\|_c$ koşullarını sağlaması gerekir. Şimdi bunu göstereyim.

(i) $z = x + iy \in X_c$ seçelim.

$$\|z\|_c = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| = 0 \Leftrightarrow \forall \theta \in [0, 2\pi] \text{ için } \|x \cos \theta + y \sin \theta\| = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cos \theta + y \sin \theta = 0$$

bulunur.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ için } x \cos \frac{\pi}{2} + y \sin \frac{\pi}{2} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ve } \theta = 0 \text{ için } x \cos 0 + y \sin 0 = 0 \Rightarrow y = 0$$

elde edilir. Yani, $z = 0$ dır.

(ii) $z = x + iy \in X_c$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ elemanlarını seçelim.

$$\|\lambda z\|_c = \|\lambda(x + iy)\|_c = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|\lambda x \cos \theta + \lambda y \sin \theta\|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|\lambda(x \cos \theta + y \sin \theta)\| \\
&= |\lambda| \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| \\
&= |\lambda| \|z\|_c
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii) $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ vektörlerini alalım.

$$\begin{aligned}
\|z_1 + z_2\|_c &= \|(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)\|_c = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|(x_1 + x_2) \cos \theta + (y_1 + y_2) \sin \theta\| \\
&\leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta\| + \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta\| \\
&\leq \|z_1\|_c + \|z_2\|_c
\end{aligned}$$

bulunur.

Önerme 4.1.2: $z = x + iy \in X_c$ için $\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \leq \|z\|_c \leq \|x\| + \|y\|$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\|z\|_c = \|x + iy\|_c = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \|x \cos \theta + y \sin \theta\|$ eşitliğini göz

önüne alalım.

$$\begin{aligned}
\|x \cos \theta + y \sin \theta\| &\leq |\cos \theta| \|x\| + |\sin \theta| \|y\| \leq \|x\| + \|y\| \\
\Rightarrow \|z\|_c &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} \|x \cos \theta + y \sin \theta\| \leq \|x\| + \|y\|
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\theta = 0 \text{ için } \|x\| = \|x \cos 0 + y \sin 0\| \leq \|z\|_c$$

ve

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ için } \|y\| = \|x \cos \frac{\pi}{2} + y \sin \frac{\pi}{2}\| \leq \|z\|_c$$

eşitsizliklerinden,

$$\|x\| + \|y\| \leq 2 \|z\|_c$$

bulunur. Buna göre $\frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) \leq \|z\|_c \leq \|x\| + \|y\|$ eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Önerme 4.1.3 : X_c uzayı Banach uzaydır.

İspat : $(z_n) \subset X_c$ cauchy dizisi olsun. Yani, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve $\forall n, m > n_0$ için $\|z_n - z_m\|_c < \varepsilon$ sağlanır. Önerme 4.1.2 den,

$$\frac{1}{2}(\|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|) \leq \|z_n - z_m\|_c < \varepsilon$$

sağlanır. Buna göre $\forall n, m > n_0$ için $\|x_n - x_m\| < 2\varepsilon$ ve $\|y_n - y_m\| < 2\varepsilon$ olur. O halde $(x_n) \subset X$ ve $(y_n) \subset X$ cauchy dizileri olurlar. Diğer taraftan, X uzayı tam uzay olduğundan $x_n \xrightarrow{x} x$ ve $y_n \xrightarrow{x} y$ olacak biçimde $x, y \in X$ vardır. Yani, $\forall n > n_1$ için $\|x_n - x\| < 2\varepsilon$ ve $\|y_n - y\| < 2\varepsilon$ olacak biçimde $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ bulunur. O halde $z = x + iy$ olmak üzere,

$$\|z_n - z\|_c = \|(x_n - x) + i(y_n - y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| < 4\varepsilon$$

bulunur. Yani, $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|_c} z \in X_c$ olur. Buna göre X_c uzayından alınan her cauchy dizisi $\|\cdot\|_c$ -normuna göre yakınsaktır. Böylece X_c , karmaşık Banach uzayıdır.

Tanım 4.1.4 : X, Y reel vektör uzayları olmak üzere her $T : X \longrightarrow Y$ operatörü verilsin. $T_c(x + iy) = Tx + iTy$ ile tanımlanan $T_c : X_c \longrightarrow Y_c$ operatörü bir karmaşık lineer operatördür.

Sanı 4.1.5 : *Ayrılabilir Banach örgüleri üzerinde tanımlı her pozitif operatör bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.*

Sanı 4.1.6 : *Her eşlenik (adjoint) operatör bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahiptir.*

Sanı 4.1.7 : *T_c operatörü bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip değildir.*

Önerme 4.1.8 : Sonsuz boyutlu ayrılabilir reel Banach uzayı üzerinde bir $T : X \longrightarrow X$ operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı olmasın. $W \subset X_c$ alt uzayı aşikar olmayan kapalı T_c -değişmez olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur:

(i) W alt uzayı sonsuz boyutludur.

İspat : W alt uzayı sonlu boyutlu olsun. W için bir baz $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ ve $Y = Sp\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ olsun. Açık olarak $Y \neq \{0\}$ ve $Y \neq X$ olduğundan Y alt uzayı aşikar olmayan alt uzaydır. Ayrıca, X Banach uzay olduğundan sonlu boyutlu her alt uzayı da kapalıdır. Yani, Y alt uzayı aşikar olmayan kapalı alt uzaydır.

$$\begin{aligned} u \in Y &\Rightarrow u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j y_j \\ &\Rightarrow Tu = \sum_{i=1}^n \alpha_i T x_i + \sum_{j=1}^m \beta_j T y_j \in Y \\ &\Rightarrow T(Y) \subset Y \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise T operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzaya sahip olduğu çelişkisini verir. O halde W alt uzayı sonsuz boyutlu olmak zorundadır.

(ii) $z = x + iy \in W$, $x = 0$ veya $y = 0$ ise, $z = 0$ dir.

İspat : $V = \{y \in X : 0 + iy \in W\} \subset X$ alt uzayını alalım. Bu alt uzay kapalıdır.

Gerçekten, $(y_n) \subset V$ dizisi için $y_n \xrightarrow{X} y$ sağlansın. $(y_n) \in V$ ise $0 + iy_n \in W$ dir.

W kapalı uzay olduğundan $0 + iy_n \xrightarrow{X_c} 0 + iy \in W$ sağlanır. O halde $y \in V$ dir.

$$\begin{aligned} y \in V &\Rightarrow T_c(0 + iy) = 0 + iTy \in W \\ &\Rightarrow Ty \in V \end{aligned}$$

olur ki, buda V uzayının T -değişmez olduğunu verir. Ayrıca, W alt uzayı aşikar olmayan alt uzay olduğundan, $W \neq \{0\}$ dir. Yukarıdaki önermenin doğruluğu için

$V = \{0\}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki $V \neq \{0\}$ olsun. T operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı bulunmadığı için $V = X$ sağlanır. Diğer taraftan,

$$W = V + iV = X + iX = X_c$$

olur ki, bu ise $W \neq X_c$ olmasına bir çelişkidir. O halde $V = \{0\}$ dır. Böylece $x = 0$ alındığında önerme ispatlanmış olur. $y = 0$ içinde benzer ispat yapılabilir.

(iii) $x \in X$ ise $x + iy \in W$ olacak biçimde en fazla bir tane $y \in X$ vardır.

İspat : $x \in X$, $x + iy \in W$ ve $x + iy_1 \in W$ olsun. $(x + iy) - (x + iy_1) = 0 + i(y - y_1) \in W$ ise (ii) den $y - y_1 = 0$ olur. O halde $y = y_1$ dır. Yani, bir tek $y \in X$ vardır.

(iv) $S : \Delta \longrightarrow \Delta$ lineer operatördür ve $S^2 = -I$ sağlanır.

İspat :

İspatı yapmadan önce yazımda kolaylık sağlayan bazı notasyonlar verelim:

$\Delta = \{x \in X : \exists y \in X \ni x + iy \in W\} \subset X$ kümesi X ' in bir alt uzayıdır. $S : \Delta \longrightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere W alt uzayı $W = \{x + iy : x, y \in X\} = \{x + iSx : x \in \Delta\}$ olarak da tanımlanabilir. Yani, $x \in X$ ve $x + iy \in W \Rightarrow y = Sx$ olur.

$x \in \Delta$ olsun. $x + iy \in W \Rightarrow -i(x + iSx) \in W$

$$\Rightarrow Sx - ix \in W$$

$$\Rightarrow Sx + i(-x) \in W$$

$$\Rightarrow Sx \in \Delta$$

sağlanır. Buna göre $S(\Delta) \subset \Delta$ olur. Diğer taraftan, $Sx - ix \in W$ olduğundan kolaylıkla görülür ki $S^2x = -x = -I(x)$ dır. Yani, $S^2 = -I$ sağlanır.

(v) Δ alt uzayı T -değişmezdir ve S ile T operatörleri, Δ üzerinde değişmelidirler. Ayrıca, $\bar{\Delta} = X$ dır.

İspat : $x \in \Delta$ olsun. $x + iy = x + iSx \in W$ ve W alt uzayı T_c -değişmez olduğundan, $T_c(x + iSx) = Tx + iT_Sx \in W$ elde edilir. Buna göre $Tx \in \Delta$, yani, $T(\Delta) \subset \Delta$ bulunur. Diğer taraftan, $x \in \Delta$ olduğundan $\Delta \xrightarrow{S} X \xrightarrow{T} X$ olur. Bu ise $ST = TS$ olduğunu gösterir. Ayrıca T operatörünün aşık olmayan kapalı değişmez alt uzayı olmadığından $\overline{\Delta} = X$ sağlanır.

(vi) $S : \Delta \longrightarrow \Delta$ operatörü tersi mevcut kapalı operatördür.

İspat : S operatörünün kapalı operatör olması için gerek ve yeter koşul, S' nin grafiğinin kapalı olmasıdır. $G(S) = \{(x, Sx) : x \in \Delta\}$ alalım. $(x_n, Sx_n) \in G(S)$, $(x_n, Sx_n) \xrightarrow{X \times X} (x, y)$ ise $x_n \longrightarrow x$ ve $Sx_n \longrightarrow y$ olur. Buradan da $x_n + iSx_n \xrightarrow{X} x + iy$ sağlanır. $(x_n + iSx_n) \in W$ ve W kapalı olduğundan $x + iy \in W$ dir. Buna göre $x \in \Delta$ ve $y = Sx$ dir. Böylece, $(x, Sx) \in G(S)$ olur, yani $G(S)$ kapalıdır.

(vii) Δ vektör uzayı $x \in \Delta$ için $\|x\| = \|x\| + \|Sx\|$ normu altında Banach uzayıdır.

İspat : $(x_n) \subset \Delta$ cauchy dizisi olsun. Buna göre $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n, m > n_0$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ sağlanır. $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olduğundan $(x_n) \subset X$ cauchy dizisidir ve X uzayı tam olduğundan $x_n \xrightarrow{X} x$ olacak biçimde $x \in X$ vardır. Diğer taraftan, $\|Sx_n - Sx_m\| \leq \|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olduğundan $(Sx_n) \subset X$ cauchy dizisidir ve $Sx_n \xrightarrow{X} y$ olacak biçimde $y \in X$ vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \|x_n - x\| + \|Sx_n - Sx\| < \varepsilon \\ &\Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \end{aligned}$$

olur. Böylece Δ bir Banach uzayıdır.

(viii) $S : \Delta \longrightarrow \Delta$ sürekli olması için gerek ve yeter koşul, $\Delta = X$ olmasıdır.

İspat : (\Leftarrow) $\Delta = X$ ise $G(S)$ kapalı olduğundan kapalı grafik teoreminden S süreklidir.

(\Rightarrow) $S : \Delta \longrightarrow \Delta$ sürekli olsun. O halde S düzgün süreklidir. Bu durumda verilen her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ vardır ve $\|x - y\| < \delta$ iken $\|Sx - Sy\| < \varepsilon$ sağlanır. O halde $\bar{\Delta} = X$ olduğundan, $\exists (x_n) \subset \Delta$ vardır ve $x_n \xrightarrow{X} x$ sağlanır. S sürekli olduğundan, $S_1 x = \lim_{n \rightarrow \infty} Sx_n = Sx$ biçiminde tanımlanan $S_1 : X \longrightarrow X$ genişlemesi vardır. Şimdi $x \in X$ alalım. $(x_n) \subset \Delta$ ve $\{x_n + iSx_n\} \subseteq W$ olduğu göz önüne alınırsa, $x_n \xrightarrow{X} x$ ve $Sx_n \xrightarrow{X} S_1 x$ den $x_n + Sx_n \xrightarrow{X_\varepsilon} x + S_1 x$ olur. Diğer taraftan W alt uzayı kapalı olduğundan $x + iSx \in W$ ve $x \in \Delta$ sağlanır. Böylece $\Delta = X$ dir.

Lemma 4.1.9 : $S : \Delta \longrightarrow \Delta$ sürekli ise $T_c : W \longrightarrow W$ operatörünün bir aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayı yoktur. Yani W uzayı, T_c operatörünün minimal kapalı değişmez alt uzayıdır.

İspat : S operatörü sürekli ise Önerme 4.1.8, (viii) den dolayı $\Delta = X$ dir. $W = \{x + iSx : x \in \Delta = X\}$ olmak üzere $W_1 \subset W$ alt uzayı T_c -değişmez olsun. W_1 alt uzayı için $\Delta_1 = \{x \in X : \exists y \in W \ni x + iy \in W_1\}$ kümesini ve $S_1 : \Delta_1 \longrightarrow X$ operatörünü tanımlayalım. $\Delta_1 \subset \Delta$ olduğundan her bir $x \in \Delta_1$ için $S_1 x = Sx$ elde edilir. S sürekli operatör olduğundan $S_1 : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_1$ operatörü de sürekli olur ve yine Önerme 4.1.8, (viii) den $\Delta_1 = X$ bulunur. O halde $W_1 = \{x + iSx : x \in X\} = W$ olur. Buna göre W , minimal T_c -değişmez bir alt uzayıdır.

Lemma 4.1.10 : X_c uzayının aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayının olması için gerek ve yeter koşul, T ile değişmeli ve $S^2 = -I$ koşulunu sağlayan bir $S : \Delta \longrightarrow \Delta$ kapalı operatörünün olmasıdır (20).

Tanım 4.1.11 : X reel Banach uzayı olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanacak biçimde $(\lambda, x) \longrightarrow \lambda x$ reel skaler çarpım X üzerinde karmaşık çarpıma genişletilebiliyorsa X bir karmaşık yapıya izin veriyor denir.

- (1) X genişletilmiş skaler çarpım ve orijinal toplama işlemine göre bir karmaşık vektör uzayıdır.
- (2) X karmaşık vektör uzayı üzerindeki yeni norma göre bir Banach uzayıdır ve bu normun X üzerine kısıtlanması orijinal norma denktir.

Açık olarak her karmaşık Banach uzayını karmaşık yapıya izin veren bir reel uzay olarak düşünebiliriz.

Lemma 4.1.12 : X reel Banach uzayının bir karmaşık yapıya izin vermesi için gerek ve yeter koşul, $S^2 = -I$ olacak biçimde $S : X \longrightarrow X$ sınırlı bir operatörün olmasıdır. Üstelik aşağıdakiler sağlanır:

- (1) X karmaşık yapıya izin verirse $Sx = ix$ biçiminde tanımlanan $S : X \longrightarrow X$ operatörü X üzerinde sınırlıdır ve $S^2 = -I$ sağlanır.
- (2) $S^2 = -I$ olacak biçimde bir $S : X \longrightarrow X$ operatörü varsa,
 - (i) Her bir $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ve her bir $x \in X$ için $(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta Sx \in X$ dir.
 - (ii) Her bir $x \in X$ için $\|x\|_c = \sup \{ \|e^{i\theta} x\| : \theta \in [0, 2\pi] \}$ dir.

özellikleri ile X üzerinde bir karmaşık yapı elde edilir.

İspat : (\Rightarrow) X karmaşık yapıya izin versin. $\forall x \in X$ için $Sx = ix$ ile tanımlı $S : X \longrightarrow X$ operatörünü alalım. $S^2 x = S(Sx) = iix = -x = -I(x)$ eşitliği sağlandığından $S^2 = -I$ bulunur. Diğer yandan, $\|Sx\|_c = \|ix\|_c = |i|\|x\|_c = \|x\|_c$ olduğundan $\|S\| = 1$ olur ve S sınırlı operatördür.

(\Leftarrow) $S: X \longrightarrow X$ operatörü için $S^2 = -I$ sağlansın. $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ve $x \in X$ için $(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta Sx \in X$ olsun. Böylece, X karmaşık vektör uzayıdır.

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_c : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \|x\|_c = \sup \{ \|e^{i\theta} x\| : \theta \in [0, 2\pi] \} \end{aligned}$$

normu verildiğinde $(X, \|\cdot\|_c)$ normlu uzay olur. Bu yeni tanımlanan norm ile ilk norm birbirine denktir. Gerçekten,

$$\theta = 0 \text{ için } \|x\|_X \leq \|x\|_c \quad [4.1]$$

eşitsizliği ve

$$\begin{aligned} \|x\|_c &= \sup \{ \|e^{i\theta} x\| \} \\ &= \sup \{ \|x \cos \theta + ix \sin \theta\| \} \\ &= \sup \{ \|x \cos \theta + Sx \sin \theta\| \} \\ &= \sup \{ |\cos \theta| \|x\| + |\sin \theta| \|Sx\| \} \\ &\leq \|x\| + \|Sx\| \\ &\leq \|x\| + \|S\| \|x\| \\ &\leq (1 + \|S\|) \|x\| \end{aligned} \quad [4.2]$$

eşitsizliği göz önüne alındığında,

$$\|x\| \leq \|x\|_c \leq (1 + \|S\|) \|x\| \quad [4.3]$$

bulunur. O halde yeni tanımlanan norm ile ilk norm birbirlerine denk normlardır. Şimdi X uzayının bu yeni tanımlanan norma göre Banach uzayı olduğunu gösterelim:

$(x_n) \subset X$, $\|\cdot\|_c$ -normuna göre bir cauchy dizisi olsun. Yani, verilen her bir $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni \forall n, m > n_0$ için $\|x_n - x_m\|_c < \varepsilon$ sağlanır. [4.1] eşitsizliği kullanılırsa $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olur. O halde $(x_n) \subset X$, ilk norma göre bir cauchy dizisi olur. Bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ Banach uzay olduğundan $x_n \xrightarrow{X} x$ olacak biçimde tek bir $x \in X$ vardır. Böylece,

$$\varepsilon > 0 \text{ için } \exists n_1 \in \mathbb{N} \text{ vardır } \ni \forall n > n_1 \text{ için } \|x_n - x\|_X < \frac{\varepsilon}{1 + \|S\|}$$

sağlanır. [4.3] eşitsizliğinden de,

$$\begin{aligned}\|x_n - x\|_c &\leq (1 + \|S\|)\|x_n - x\| \\ &\leq (1 + \|S\|) \frac{\varepsilon}{(1 + \|S\|)} = \varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_c} x$ sağlanır. Böylece, $(X, \|\cdot\|_c)$ Banach uzayıdır.

Tanım 4.1.13 : $S^2 = -I$ ise S operatörüne 90° -dönme operatörü denir. Burada

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \text{ dir.}$$

Tanım 4.1.14 : X reel Banach uzayı ve $S : X \longrightarrow X$, 90° -dönme operatörü olsun.

S ile üretilen X üzerindeki karmaşık yapı X_S ile gösterilir. $S, T : X \longrightarrow X$ iki 90° -dönme operatörü olsun. $X_S \cong X_T$ ise S ile T karşılaştırılabilir denir.

Önerme 4.1.15 : Sonlu boyutlu uzaylardan sadece çift boyutlu olanlar karmaşık yapıya izin verir.

İspat : $S : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 90° -dönme operatörü olsun.

$$0 < (\det S)^2 = \det(S^2) = \det(-I) = (-1)^n$$

olduğundan n mutlaka birçift sayı olmalıdır.

Önerme 4.1.16 : X bir reel Banach uzayı ve $S : X \longrightarrow X$ bir 90° -dönme operatörü olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

- (i) $W \subset X$ alt uzayı S -değişmezdir.
- (ii) W, X_S üzerinde S -değişmezdir.
- (iii) $W \subset X_S$ alt uzayıdır.

İspat : $x \in W$ ve W, S -değişmez olsun. Yani, $Sx \in W \Leftrightarrow ix \in W \Leftrightarrow W \subset X_S$ alt uzayıdır.

Lemma 4.1.17: X reel Banach uzayı ve $S: X \rightarrow X$, 90° -dönme operatörü olsun.

- (a) X_S 'nin bütün alt vektör uzayları tam olarak X 'in S -değişmez alt uzaylarıdır.
 (b) $\text{boy}X > 2$ ise S 'nin aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayları vardır.

İspat:

(a) Önerme 4.1.16 da açıktır.

(b) $0 \neq x \in X$ elemanını alalım. Bu durumda,

$$U = \text{Sp}\{x, Sx\} = \{\alpha x + \beta Sx : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \text{Sp}\{x\}_{X_S} = W \subset X_S$$

sağlanır. $\text{boy}U = 2 < \text{boy}X$ olduğundan $U \neq X$ ve $0 \neq x$ olduğundan da $U \neq \{0\}$ dir. Banach uzayların sonlu boyutlu alt uzayları kapalı olduğundan U kapalıdır. Böylece U , aşikar olmayan kapalı alt uzaydır. Diğer taraftan, $\alpha x + \beta Sx \in U$ alalım. Buna göre, $S(\alpha x + \beta Sx) = \alpha Sx - \beta x \in U$ olur. O halde U alt uzayı S -değişmezdir.

Lemma 4.1.18: X bir reel Banach uzayı, $S: X \rightarrow X$ bir 90° -dönme operatörü ve $T \in \mathcal{L}(X)$ sınırlı bir operatör olsun. $T \in \mathcal{L}(X_S)$ olması için gerek ve yeter koşul, $T \in \{S\}'$ olmasıdır.

İspat:

(\Leftarrow): $T \in \mathcal{L}(X)$ alalım.

$$T((\alpha + i\beta)x) = T(\alpha x + \beta Sx) = \alpha T(x) + \beta TSx = \alpha Tx + \beta STx = (\alpha + i\beta)Tx$$

eşitliğinden T , X_S üzerinde operatör olur. Diğer taraftan,

$$\|e^{i\theta}Tx\| = \|Tx \cos \theta + STx \sin \theta\| \leq \|Tx\| + \|STx\| \leq (1 + \|S\|)\|Tx\|$$

ve T operatörü sınırlı olduğundan,

$$\|e^{i\theta}Tx\| \leq M(1 + \|S\|)\|x\| \Rightarrow \|Tx\|_S \leq A\|x\|$$

elde edilir. Buna göre $T \in \mathcal{L}(X_S)$ dir.

(\Rightarrow): $T \in \mathcal{L}(X_S)$ olsun. $\forall x \in X$ için $TSx = T(ix) = iT(x) = S(Tx)$ sağlanır. Buna göre $TS = ST$ ve böylece de $T \in \{S\}'$ olur.

Sonuç 4.1.19 : Sonsuz boyutlu reel Banach uzayı üzerinde tanımlı sınırlı bir operatör aşikar olmayan kapalı değişmez bir alt uzaya sahip değilse herhangi bir 90° -dönme operatörü ile değişmeli olamaz (20).

Teorem 4.1.20 : Reel bir Banach uzayı üzerinde tanımlı, sürekli bir T operatörünün değişmez alt uzayı olmasın. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) Bir S kapalı operatörü için

$$\text{Tan}(S) = \text{Değ}(S), ST = TS \text{ ve } S^2 = -I$$

sağlansın. Buna göre T_c 'nin aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayları tam olarak S operatörünün grafiğidir. Üstelik, T_c operatörünün aşikar olmayan kapalı değişmez alt uzayının olmaması için gerek ve yeter koşul, böyle bir S operatörünün olmamasıdır.

(ii) $S^2 = -I$ olacak biçimde sürekli $S \in \{T\}'$ varsa, S operatörünün grafiği T_c 'nin aşikar olmayan kapalı minimal değişmez alt uzayıdır (20).

Önerme 4.1.21 : Bir X Banach uzayı ve bir $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörü alalım. Eğer T operatörü ikinci dereceden bir indirgenemez denklemi sağlıyorsa, $\alpha \neq 0$ olmak üzere $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları ve $S = \alpha T + \beta I$ operatörü için $S^2 = -I$ sağlanır.

İspat: İkinci dereceden reel kökleri olmayan bir polinom $p(x) = 0$ olsun. Bu durumda, $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ olacak biçimde $a, b, c \in \mathbb{R}$ vardır. Yani, $p(x) = ax^2 + bx + c = 0$ alabiliriz. Hipotez gereği T operatörü bu denklemi sağlayacağından, $aT^2 + bT + c = 0$ olur. $a \neq 0$ olmak üzere $a = \alpha$, $b = 2\beta$ ve $c = 4\delta$ alalım.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4\beta^2 - 16\alpha\delta = 4(\beta^2 - 4\alpha\delta) < 0$$

$$\Rightarrow \beta^2 - 4\alpha\delta < 0$$

olur. $r = \beta^2 - 4\alpha\delta$ seçelim. Şimdi, $S = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}T + \frac{\beta}{\sqrt{r}}I$ tanımlayalım.

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{r}[(\alpha^2 T^2 + 2\beta\alpha T) + \beta^2 I] = \frac{1}{r}[\alpha(\alpha T^2 + 2\beta T) + \beta^2 I] \\ &= \frac{1}{r}[(-4\delta\alpha + \beta^2)I] \\ &= -I \end{aligned}$$

olduğundan $S^2 = -I$ sağlanır.

Dolayısıyla, X uzayının boyutu ikiden büyük ise $T \in \mathcal{L}(X)$ operatörünün, iki boyutluları da kapsayan çok sayıda aşık olmayan kapalı değişmez alt uzayları vardır. Gerçekten, $x \neq 0$ olmak üzere $W = Sp\{x, Sx\} \subset X$ alt uzayı alınırsa, W , S -değişmez olur. Bunun yanında,

$$S(W) = (\alpha T + \beta I)(W) \subset W \Rightarrow T(W) \subset W$$

sağlanır. O halde, W alt uzayı T -değişmezdir. $x \neq 0$ olduğunda, $W \neq \{0\}$ ve $\dim W > 2$ olduğundan da $W \neq X$ dir. Banach uzayında sonlu boyutlu her alt uzayı kapalı olduğundan W kapalıdır. Böylece, W alt uzayı, aşık olmayan kapalı T -değişmezdir.

Lomonosov Teoreminin ne reel durumda ne de karmaşık durumda sağlanamayacağına bir örnek verelim.

Örnek 4.1.22: $S: X \rightarrow X$ operatörü için $S^2 = -I$ sağlansın. $0 \neq x \in X$ seçelim.

$f(x) = 1$ ve $f(Sx) = 0$ olacak biçimde $f \in X^*$ bulunur.

$$K = x \otimes S^* f + Sx \otimes f$$

ile tanımlı bir sonlu-rank operatörünü alalım. $w \in X$ için $K(w) = S^* f(w)x + f(w)Sx \subset Sp\{x, Sx\}$ sağlanır. Her sonlu-rank operatörü kompakt olduğundan, K kompakttır ve ayrıca S ile değişmelidir. Gerçekten, $w \in X$ için

$$\begin{aligned}
 KS(w) &= (S^* f \otimes x + f \otimes Sx)(S(w)) \\
 &= S^* f(S(w)).x + f(S(w)).Sx \\
 &= S^* f(w).Sx + f(S^2(w)).x \\
 &= -f(w).x + S^* f(w).Sx \\
 &= f(w).(S^2x) + S^* f(w).Sx \\
 &= S(S^* f(w).x + f(w).Sx) = SK(w)
 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi, S ve T operatörlerinin değişmeli olduğunu kabul edelim. İlk bakışta Lomonosov Teoreminin hipotezleri sağlanıyor görünür. Oysa, bununla birlikte reel durumda bu teorem çalışmaz. Çünkü, $S^2 + I = 0$ dır ve S ile üretilen karmaşık yapıyı X_S ile gösterelim. K , X_S üzerinde kompakt; T , X_S üzerinde sürekli ve bunun yanında $ST = TS$; $KS = SK$ olur. Ancak yine de Lomonosov Teoremi uygulanamaz. Bunun nedeni Lomonosov Teoreminin ancak skaler olmayan operatörler için uygulanabilmesidir. Oysa, S operatörü skaler bir operatördür. Yani, $S = iI$ dır.

KAYNAKLAR

1. Krein, M.G. and Rutman, M.A., "Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space" , *Uspehi Matem. Nauk (N.S.)*, 3 (1(23)): 3-95 (1948).
2. Aronsajn, N. and Smith, K.T., "Invariant subspaces of completely continuous operators" , *Ann. of Math.*, 60: 345-350 (1954).
3. Bernstein, A.R. and Robinson, A., "Solution of an invariant subspace problem of K.T.Smith and P.R.Halmos" , *Pacific J. Math.*, 16: 421-431 (1966).
4. Lomonosov, V.I., "Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator" , *Funktsional. Anal. i Prilozhen*, 7 (3): 55-56 (1973) (Russian).
5. Enflo, P., "On the invariant subspace problem for Banach spaces" , Seminaire Maurey-Schwarz, *Acta Math.*, 158: 213-313 (1987).
6. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., "Invariant subspaces of operators on ℓ_p -spaces" , *J. Funct. Analysis*, 115 (2): 418-424 (1993).
7. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., "Invariant subspaces for positive operators" , *J. Funct. Analysis*, 124 (1): 95-111 (1994).
8. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., "The invariant subspace problem: Some Recent Advances" , *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* 29, 1-76 (1998).
9. Read, C.J., "A solution to the invariant subspace problem on the space ℓ_1 " , *Bull. London Math. Soc.* , 17: 305-317 (1985).

10. Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., "Positive Operators" , *Academic Pres*, London, (1985).
11. Abramovich, Y.A. and Aliprantis, C.D., "An invitation to operator theory, Volume 50" , *American Mathematical Society Providence*, Rhode Island, (2000).
12. Royden, H.L., "Real Analysis, Third Edition" , *Prentice Hall*, New Jersey, (1988).
13. Gelfand, I.M., "Normierte ringe" , *Mat.Sb. (N.S.)*, 9 (51): 3-24 (1941).
14. Abramovich, Y.A. and Aliprantis, C.D., "Problems in Operator Theory, Volume 51" , *American Mathematical Society Providence*, Rhode Island, (2000).
15. Nussbaum, R.D., "Eigenvectors of nonlinear positive operators and the linear Krein-Rutman theorem" , *Fixed Point Theory*, Springer Verlag yellow series, 886: 309-330 (1981).
16. Troitsky, V.G., "On the modulus of C.J.Read's operator" , *Positivity*, 2: 257-264 (1998).
17. Read, C.J., "Quasinilpotent operators and the invariant subspace problem" , *J. Lond. Math.Soc.* , 56: 595-606 (1997).
18. Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., "Positive compact operators on Banach lattices" , *Math. Z.*, 174: 289-298 (1980).
19. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O., "Multiplication and Compact-friendly Operators" , *Positivity*, 1: 171-180 (1997).
20. Abramovich, Y.A., Aliprantis, C.D., Sirotkin, G. and Troitsky, V.G., "Some open problems and conjectures associated with the invariant subspace problem" , *Positivity, to appear*

ÖZGEÇMİŞ

20.05.1979 tarihinde Kayseri' de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kayseri Aydınlikevler ortaokulunda, lise öğrenimini Kayseri Melikgazi Lisesi' nde tamamladı. 1998 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde okumaya hak kazandı. 1999 yılında yatay geçişle Kayseri Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne girdi. 2002 yılında mezun oldu. Aynı yıl Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü' nde yüksek lisans eğitimine başladı. 2003 yılında Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne araştırma görevlisi olarak atandı. Halen aynı birimde araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır. Yabancı dili İngilizcedir.