

136659

GENİŞLETİLMİŞ JET DEMETLERİ ÜZERİNDE  
EULER - LAGRANGE VE HAMILTON  
DENKLEMLERİNİN LİFT'LERİ

Cansel AYCAN

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

2003



**THE LIFTS OF EULER – LAGRANGE  
AND HAMILTON EQUATIONS  
ON THE EXTENDED JET BUNDLES**

**Cansel AYCAN**

**Department of Mathematics**

**Thesis for Doctoral Degree**

**2003**

**YÖNERGİLE KÜTÜPHÜNE**  
2003/11/11

**GENİŞLETİLMİŞ JET DEMETLERİ ÜZERİNDE  
EULER – LAGRANGE VE HAMILTON  
DENKLEMLERİNİN LİFT'LERİ**

Cansel AYCAN

136659

Osmangazi Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca  
Matematik Anabilim Dalı  
Geometri Bilim Dalında  
Doktora Tezi  
Olarak Hazırlanmıştır.

136659

1. Danışman: Prof.Dr. Ali GÖRGÜLÜ
2. Danışman: Yrd.Doç.Dr. Şevket CİVELEK

Ağustos 2003

Cansel AYCAN 'ın Doktora tezi olarak hazırladığı

**GENİŞLETİLMİŞ JET DEMETLERİ ÜZERİNDE**  
**“ EULER – LAGRANGE VE HAMILTON ”**  
**DENKLEMLERİNİN LİFT'LERİ**

başlıklı bu çalışma jürimizce lisans üstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Prof. Dr. Ali GÖRGÜLÜ

Üye: Yrd. Doç. Dr.Şevket CİVELEK

Üye: Doç. Dr. A. Kadir Ceylan ÇÖKEN

Üye: Doç. Dr. İsmail KOCAYUSUFOĞLU

Üye: Yrd. Doç. Dr. Cumali EKİCİ

*A. Güneş*  
*Ş. Civelek*  
*A. Kadir Ceylan Çöken*  
*İsmail*  
*Cumali Ekici*

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ...22.12.2003. gün  
ve ...2003-18/21..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

*M. Selami Kılıçkaya*  
Prof. M. Selami KILIÇKAYA

Enstitü Müdürü

## ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, demet ve lift teorisi, jet manifoldlar, manifold ve demet genişletmeleri, genişletilmiş jet demetler ve  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir elemanların (fonksiyon, vektör alanı, 1-form'un) yüksek mertebeden düşey ve tam lift'leri ile ilgili temel tanım, teorem ve örnekler verilmiştir. Ayrıca, Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde,  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde yaklaşık tanjant yapı ve gerekli geometrik yapılar verilerek Euler- Lagrange denklemleri elde edilmiştir. Daha sonra, elde edilen Euler-Lagrange denklemleri lift teori kullanılarak genişletilmiş jet demetlerine genelleştirilmiştir. Ayrıca, zamana bağlı Euler- Lagrange denklemleri oluşturulmuş ve benzer şekilde bu denklemler de zamana bağlı genişletilmiş jet demetleri üzerinde ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde,  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde Hamilton denklemleri elde edilmiş ve lift teori kullanılarak, bu denklemler genişletilmiş jet demetleri üzerine taşınmış ve genişletilmiş jet demetleri üzerinde zamana bağlı olan Hamilton denklemleri de elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, yapılan bu çalışmaların sonuç ve değerlendirmesi verilmiştir.

## SUMMARY

This thesis consists of four sections.

In the first section, bundle and lift theory, jet manifolds, manifolds and bundle extensiveness, extended jet bundles, and basic definitions, theory and examples related to high order vertical and complete lifts of differentiable elements (function, vector field, and 1-form), which are defined on  $J^k\pi$  jet bundles, are given. Besides, basic definitions and theories related to Euler-Lagrange and Hamilton equations are given.

In the second section, Euler- Lagrange equations are obtained by giving approximate tangent forms and required geometric forms on the  $J^k\pi$  jet bundle. After that, by using lift theory, the obtained Euler- Lagrange equations are generalized to extended jet bundles. Besides, time depended Euler-Lagrange equations, are formed and in the same way, these equations are expressed on time depended extended jet bundles.

In the third section, on the  $J^k\pi$  jet bundles, the Hamilton equations are obtained, and by using lift theory these equations are moved on the extended jet bundles. After that, with a similar perspective, Hamilton equations, which are depended on time, are formed.

In the last section, the conclusion and evaluation of these studies are expressed.

## TEŞEKKÜR

Doktora çalışmamı yöneten ve bu tezin hazırlanması sırasında, çalışma boyunca vakit ayırarak ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın;

**Prof.Dr. Ali GÖRGÜLÜ**

ve

**Yrd.Doç.Dr.Şevket CİVELEK**

e saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eskişehir , 2003

Cansel AYCAN

## SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	Açıklamalar
$E, M$	$C^\infty$ manifoldlar
$\pi$	Örten submersion
$(E, \pi, M)$	Demet
$({}^i E, \pi^i, {}^i M)$	$\pi$ demetininin $i$ . genişletilmiş demeti
${}^k M$	$M$ manifoldunun $k$ . mertebeden genişletilmiş
$J^k \pi$	$k$ . jet manifold
$J^k \pi^i$	$\pi^i$ demeti üzerindeki jet manifold
$f^{v^m}, f^{c^m}$	$f$ fonksiyonunun $m$ . mertebeden düşey ve tam lift'i
$d f^{c^{m-1}}$	$f^{c^{m-1}}$ fonksiyonunun diferensiyeli
$X^{v^m}, X^{c^m}$	$X$ vektör alanının $m$ . mertebeden düşey ve tam lift'i
$\omega^{v^m}, \omega^{c^m}$	$\omega$ , 1-formunun $m$ . mertebeden düşey ve tam lift'i
$L$	Lagrange fonksiyonu
$H$	Hamilton fonksiyonu
$E_L$	$L$ , Lagrange fonksiyonuna bağlı enerji fonksiyonu
$\Lambda^p(TM)$	$M$ manifoldunun tanjant demeti $TM$ üzerindeki $p$ -formların cümlesi
$d_J$	Düşey diferensiyel
$i_J$	Düşey türev
$\xi$	Semispray
$i_X \omega$	$M$ manifoldu üzerinde herbir $X$ vektör alanı ile bir $\omega$ p-formunun iç çarpımı
$V$	Liouville vektör alanı
$\phi_L$	$M$ manifoldunun $TM$ tanjant demeti üzerinde kapalı 2-form
$\xi_L$	Euler-Lagrange vektör alanı

$X_H$	Hamilton vektör alanı
$\lambda_M$	Liouville form
$J$	Yaklaşık tanjant yapı
$J^{v^m}, J^{c^m}$	Yaklaşık tanjant yapının m. mertebeden düşey ve tam lift'i
$\tilde{J}$	Zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı
$\tilde{J}^{v^m}, \tilde{J}^{c^m}$	Zamana bağlı yaklaşık tanjant yapının m. mertebeden düşey ve tam lift'i
$\chi(TM)$	TM üzerindeki vektör alanlarının cümlesi
$\chi(TM)^*$	TM üzerindeki 1-formların cümlesi
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	M den $\mathbb{R}$ ye $C^\infty$ fonksiyonların cümlesi
$\chi(J^k\pi)$	$J^k\pi$ jet manifoldu üzerinde jet vektör alanlarının cümlesi
$H_t$	Zamana bağlı Hamilton fonksiyonu
$X_{H_t}$	Zamana bağlı Hamilton vektör alanı
$C$	Zamana bağlı Liouville vektör alanı
$L^{v^m}, L^{c^m}$	Lagrange fonksiyonunun m. mertebeden düşey ve tam lift'i
$H^{v^m}, H^{c^m}$	Hamilton fonksiyonunun m. mertebeden düşey ve tam lift'i
$V^{v^m}, V^{c^m}$	Liouville vektör alanının m. mertebeden düşey ve tam lift'i
$C^{v^m}, C^{c^m}$	Zamana bağlı Liouville vektör alanının m. mertebeden düşey ve tam lift'i
$X_H^{v^m}, X_H^{c^m}$	Hamilton vektör alanının m. mertebeden düşey ve tam lift'i
$X_{H_t}^{v^m}, X_{H_t}^{c^m}$	Zamana bağlı Hamilton vektör alanının m. mertebeden düşey ve tam lift'i

# İçindekiler

<b>1</b>	<b>TEMEL KAVRAMLAR</b>	<b>1</b>
1.1	Demetler ve Manifold Genişletmeleri . . . . .	2
1.2	Jet Demetler ve Jet Demet Genişletmeleri . . . . .	9
1.3	Genişletilmiş Jet Demetlerine Yüksek Mertebeden Lift'ler . . .	18
1.4	Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemleri . . . . .	32
<b>2</b>	<b>GENİŞLETİLMİŞ JET DEMETLERİ ÜZERİNDE EULER - LAGRANGE DENKLEMLERİ</b>	<b>44</b>
2.1	$J^k\pi$ Üzerinde Euler-Lagrange Denklemi . . . . .	44
2.2	Euler - Lagrange Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Düşey Lift'leri . . . . .	51
2.3	Euler- Lagrange Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Tam Lift'leri	61
2.4	$J^k\pi$ Üzerinde Zamana Bağlı Euler - Lagrange Denklemi . . . . .	70
2.5	Zamana Bağlı Euler - Lagrange Denklemlerinin Yüksek Mer- tebeden Düşey Lift'leri . . . . .	80
2.6	Zamana Bağlı Euler - Lagrange Denklemlerinin Yüksek Mer- tebeden Tam Lift'leri . . . . .	88
<b>3</b>	<b>GENİŞLETİLMİŞ JET DEMETLERİ ÜZERİNDE HAMIL- TON DENKLEMLERİ</b>	<b>97</b>

3.1	$J^k\pi$ Üzerinde Hamilton Denklemi . . . . .	97
3.2	Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Düşey Lift'leri .	100
3.3	Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Tam Lift'leri . .	103
3.4	$J^k\pi$ Üzerinde Zamana Bağlı Hamilton Denklemi . . . . .	106
3.5	Zamana Bağlı Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Düşey Lift'leri . . . . .	109
3.6	Zamana Bağlı Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Tam Lift'leri . . . . .	112
<b>4</b>	<b>SONUÇ VE DEĞERLENDİRME</b>	<b>116</b>



# Bölüm 1

## TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, öncelikle jetlerin tanımı verilmiş, daha sonra vektör demet genişletmeleri baz alınarak genişletilmiş jet demetleri tanımlanmıştır. Ayrıca, Civelek Ş., 1993'de yapılan çalışmada verilen herhangi bir vektör demeti üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir elemanların, aynı demetin genişletilmiş vektör demetlerine yüksek mertebeden düşey (vertical) ve tam (complete) lift'leri ile ilgili özellikler göz önüne alınarak, bu çalışmada genişletilmiş jet demetleri üzerinde yüksek mertebeden düşey ve tam lift'ler elde edilerek geliştirilmiştir.

Bunların yanısıra, diğer bölümlerde genişletilmiş jet demetleri üzerinde elde edilen Euler-Lagrange ve Hamilton denklemleri ile ilgili tanımlar verilmiştir. Çalışma boyunca, tüm manifoldlar ve dönüşümlerin diferensiyellenebilir olduğu, ayrıca tekrar eden indisler üzerinden toplam alındığı kabul edilmiştir.

## 1.1 Demetler ve Manifold Genişletmeleri

**Tanım 1.1.1.**  $E$  ve  $M$   $C^\infty$ - manifoldlar,  $\pi : E \rightarrow M$  bir  $C^\infty$ - dönüşüm olsun. Eğer  $\pi$  bir örten submersion ise,  $(E, \pi, M)$  üçlüsüne bir *lifli (fibred) manifold* denir. Bir  $(E, \pi, M)$  lifli manifoldunda,  $E$  ye total uzay,  $M$  ye taban uzay,  $\pi$  ye projeksiyon ve her bir  $p \in M$  noktası için  $E$  nin  $\pi^{-1}(p)$  altcümlesine de  $p$  üzerindeki *lif* denir (Civelek, 1993).

Kısalık için  $\pi^{-1}(p)$  lifi  $E_p$  ve bir  $(E, \pi, M)$  lifli manifoldu da  $E$  veya  $\pi$  ile gösterilecektir.

Bir  $(E, \pi, M)$  lifli manifoldunun  $\pi$  projeksiyonu bir örten submersion olduğundan,  $E_p$  lifinin herbir irtibatlı bileşeni  $E$  nin bir altmanifoldudur.

$$\text{boy } E_p = \text{boy } E - \text{boy } M$$

sayısına  $\pi$  nin lif boyutu denir.

**Tanım 1.1.2.** Bir lifli manifold  $(E, \pi, M)$ ,  $\text{boy } M = m$ ,  $\text{boy } E = m + n$  ve  $U \subset E$  açık altcümlesi üzerinde bir koordinat sistemi,

$$y : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

olsun.

$$p_{r_1} : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

olmak üzere,  $a, b \in U$  ve

$$\pi(a) = \pi(b) = p \implies p_{r_1}(y(a)) = p_{r_1}(y(b))$$

önermesi doğru ise,  $y$ 'ye bir *uyarlanmış (adapted) koordinat sistemi* denir (Civelek, 1993).

Bir uyarlanmış koordinat sisteminin bileşen fonksiyonları ile ilgilenirken genellikle şu notasyon kullanılır:

$M$  üzerindeki koordinat fonksiyonları  $x^i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) ise,  $E$  üzerindeki koordinat fonksiyonları  $(x^i, u^\alpha)$ , ( $1 \leq \alpha \leq n$ ) şeklinde ifade edilecektir. Burada  $x^i$  sembolü için,  $\pi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu ve  $U \rightarrow \pi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  bileşke fonksiyonu kullanılacaktır.

**Tanım 1.1.3.** Bir lifli manifold  $(E, \pi, M)$  ve bir  $C^\infty$ - manifold  $F$  olmak üzere, eğer  $t : E \rightarrow M \times F$  dönüşümü

$$p_{r_1} \circ t = \pi$$

olacak şekilde bir diffeomorfizm ise  $(F, t)$  ikilisine  $\pi$  nin bir trivializasyonu,  $F$  ye  $\pi$  nin model (tipik) lifi ve en azından bir trivializasyona sahip bir  $(E, \pi, M)$  lifli manifolduna da *trivial lifli manifold* denir (Civelek, 1993).

**Tanım 1.1.4.** Bir lifli manifold  $(E, \pi, M)$  ve  $p \in M$  olsun.  $F_p$  bir  $C^\infty$ - manifold,  $p$  nin bir komşuluğu  $W_p$  ve

$$t_p : \pi^{-1}(W_p) \rightarrow W_p \times F_p$$

dönüşümü  $p_{r_1} \circ t_p = \pi|_{\pi^{-1}(W_p)}$  şartını sağlayan bir diffeomorfizm ise, o zaman  $(W_p, F_p, t_p)$  üçlüsüne  $p$  nin komşuluğunda  $\pi$  nin bir lokal trivializasyonu ve taban uzayın her bir noktası civarında en az bir lokal trivializasyona sahip bir  $(E, \pi, M)$  lifli manifolduna da *lokal trivial lifli manifold veya demet* denir (Civelek, 1993).

**Örnek 1.1.1.**  $m$  boyutlu bir  $M$ ,  $C^\infty$ - manifoldunun tanjant manifoldu  $TM$  ve  $\tau_M : TM \rightarrow M$ ,  $M$  nin herhangi bir noktasındaki tanjant vektörü  $p$  noktasına karşılık getiren kanonik projeksiyon olsun. O zaman  $(TM, \tau_M, M)$  üçlüsü  $\mathbb{R}^m$  model lifi ile birlikte bir demettir. Çünkü,  $M$  nin  $\{x^i : 1 \leq i \leq m\}$  lokal koordinat sistemine göre herhangi bir  $\xi \in TM$  elemanı  $\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$ ,  $\tau_M(\xi) = p$  şeklinde ifade edilebilir. Eğer,  $\xi, t = 0$  noktasında bir  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$

eğrisinin teğet vektörü olarak alınırsa, o zaman,  $\xi$  nin bileşenlerinin katsayıları olan  $\xi^i$  reel sayıları,

$$\xi^i = (x^i \circ \gamma)'(0) \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

şeklinde yazılabilir. Böylece,  $TM$  üzerindeki uyarlanmış koordinat sistemi  $(x^i, \dot{x}^i) = (x^i, y^i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  şeklinde olur. Buradaki  $x^i$  ve  $y^i$  koordinatları ise,  $y^i(\xi) = \xi[x^i] = \xi^i$  şeklinde tanımlanır.

$x^i$  koordinat fonksiyonları  $p \in M$  için  $W_p \subset M$  koordinat komşuluğunda tanımlı olacak şekilde;

$$t_p : \tau_M^{-1}(W_p) \longrightarrow W_p \times \mathbb{R}^m$$

dönüşümü,

$$t_p(\eta) = (\tau_M(\eta), \dot{x}(\eta)) = (p, y(\eta))$$

olarak tanımlansın. Böylece aşağıdaki diyagram oluşturulabilir.

$$\begin{array}{ccc} & & t_p \\ & & \rightarrow \\ \tau_M^{-1}(W_p) & \rightarrow & W_p \times F_p \\ \tau_M|_{\tau_M^{-1}(W_p)} \downarrow & & \downarrow p_{r_1} \\ W_p & \rightarrow & W_p \\ & & id_{W_p} \end{array}$$

Bu diyagram değişmelidir. Çünkü,  $\forall \xi \in \tau_M^{-1}(W_p)$  tanjant vektörü için,

$$(p_{r_1} \circ t_p)(\xi) = p_{r_1}(t_p(\xi)) = p_{r_1}(p, \dot{x}(\xi)) = p \quad (1.1.1)$$

$$(id_{W_p} \circ \tau_M|_{\tau_M^{-1}(W_p)})(\xi) = id_{W_p}(\tau_M(\xi)) = p \quad (1.1.2)$$

eşitlikleri elde edilir. (1.1.1) ve (1.1.2) eşitlikleri  $\forall \xi \in \tau_M^{-1}(W_p)$  tanjant vektörü için sağlandığından;

$$(p_{r_1} \circ t_p) = id_{W_p} \circ \tau_M|_{\tau_M^{-1}(W_p)}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece;  $t_p$  bir diffeomorfizm olup,  $\tau_M$  lifli manifoldu için bir lokal trivializasyon olur.  $(TM, \tau_M, M)$  bir demettir (Civelek, 1993).

**Tanım 1.1.5.**  $M$  ve  $N$ ,  $C^\infty$ - manifoldlar,  $\varphi : M \rightarrow N$  bir  $C^\infty$ - dönüşüm,  $p \in M$  ve bir  $V_p \in T_p M$  tanjant vektörüne  $p$  noktasında teğet olan bir eğri  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  olsun. Bu durumda,

$$\varphi_*|_p(V_p) = W_{\varphi(p)} \in T_{\varphi(p)}N$$

tanjant vektörü,  $\varphi \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow N$  eğrisine  $\varphi(p)$  noktasında teğet olan bir tanjant vektör olmak üzere

$$\varphi_*|_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)}N$$

ile tanımlanan dönüşüme  $\varphi$  nin  $p \in M$  noktasındaki *türev dönüşümü* denir (Civelek, 1993).

$(\varphi_*)|_p$  türev dönüşümü bazen  $T_p\varphi$  sembolü ile de gösterilecektir.

**Tanım 1.1.6.**  $(E, \pi, M)$  bir demet olsun. Bu durumda,  $\pi_* : TE \rightarrow TM$ ,  $\pi$  nin türev dönüşümü olmak üzere,  $\pi_* = (TE, \pi_*, TM)$  üçlüsü bir demet olup;  $\pi_*$  ye  $\pi$  nin *tanjant demeti* denir (Civelek, 1993).

**Tanım 1.1.7.**  $(E, \pi, M)$  bir lifli manifold ve  $\varphi : M \rightarrow E$  bir dönüşüm olsun. Eğer  $\pi \circ \varphi = id_M$  koşulu gerçekleşiyorsa,  $\varphi$  ye  $\pi$  nin bir *kesiti* denir ve  $\pi$  nin tüm kesitlerinin cümlesi  $\Gamma(\pi)$  ile gösterilir (Civelek, 1993).

**Tanım 1.1.8.**  $(E, \pi, M)$  ve  $(H, \rho, N)$  iki demet olsun. Eğer,  $f : E \rightarrow H$ ,  $\bar{f} : M \rightarrow N$  dönüşümleri için  $\rho \circ f = \bar{f} \circ \pi$  ise o zaman  $(f, \bar{f})$  ikilisine  $\pi$  den  $\rho$  ya bir *demet morfizmi*,  $\bar{f}$  dönüşümüne de  $f$  nin *projeksiyonu* denir (Civelek, 1993).

**Örnek 1.1.2.**  $M$  ve  $N$   $C^\infty$ - manifoldlar ve  $f : M \rightarrow N$  bir

$C^\infty$ – dönüşüm olsun. Bu durumda  $(f_*, f)$  dönüşümü  $(TM, \tau_M, M)$  demetinden  $(TN, \tau_N, N)$  tanjant demetine bir demet morfizmidir.  $f_*$  dönüşümü  $T_p M$  lifini,  $T_{f(p)} N$  lifine dönüştürür.

$$\begin{array}{ccc} & f_* & \\ & TM \rightarrow TN & \\ \tau_M \downarrow & & \downarrow \tau_N \\ & M \rightarrow N & \\ & f & \end{array}$$

Bu diyagram değişmeli olup,  $\tau_N \circ \bar{f}_* = f \circ \tau_M$  dir (Civelek, 1993).

**Tanım 1.1.9.**  $M$  bir  $C^\infty$ – manifold olsun.  ${}^0M, {}^1M, {}^2M, C^\infty$ – manifoldlar ve  ${}^0\pi, {}^1\pi, C^\infty$ – dönüşümler olmak üzere

$${}^0M \xleftarrow{{}^0\pi} {}^1M \xleftarrow{{}^1\pi} {}^2M \quad (1.1.3)$$

şeklinde tanımlı  $C^\infty$ – manifoldlar dizisi için,  ${}^0\pi$  in tanım kümesi ile  ${}^1\pi$  in görüntü kümesi eşit ise, yani  $D({}^0\pi) = R({}^1\pi)$  ise (1.1.3) dizisine,  $M$  manifoldunun bir *kısa tam dizisi* denir (Civelek, 1988).

**Tanım 1.1.10.**  $M$  bir  $C^\infty$ – manifold ve  $M$  üzerinde

$${}^0M \xleftarrow{{}^0\pi} {}^1M \xleftarrow{{}^1\pi} {}^2M \xleftarrow{{}^2\pi} \dots \quad (1.1.4)$$

bir  $C^\infty$ – manifoldlar dizisi olsun.  $\forall i \in \mathbb{Z}^+$  için,

$${}^{i-1}M \xleftarrow{{}^{i-1}\pi} {}^iM \xleftarrow{{}^i\pi} {}^{i+1}M$$

dizileri birer kısa tam dizi ise, yani;  $D({}^{i-1}\pi) = R({}^i\pi)$  ise, bu durumda (1.1.4) dizisine,  $M$  manifoldunun bir *tam dizisi* denir (Civelek, 1988).

Eğer (1.1.4) dizisinin en son manifoldu  ${}^mM$  ise, dizinin uzunluğu  $m$ , tersine olarak bu dizinin sonsuz tane manifoldu varsa, dizinin uzunluğu sonsuz olacaktır.

$\forall k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  için,  ${}^k\pi$  dönüşümünün türev dönüşümü  ${}^k\pi_*$  ve  ${}^kM$  manifoldunun tanjant demeti de  $T({}^kM)$  ile gösterilsin. Buna göre

$${}^kT_\pi : T({}^kM) \longrightarrow {}^kM$$

dönüşümü de doğal projeksiyon olsun.

**Tanım 1.1.11.**  $M$  bir manifold ve  $M$  nin bir tam dizisinin uzunluğu  $m \in \mathbb{N}$  olsun. Eğer,

i)  $1 \leq k \leq m$  tamsayıları için,

$$\begin{array}{ccc} & & {}^{k-1}\pi \\ & & \downarrow \\ & {}^kM & \longrightarrow & {}^{k-1}M \\ & \downarrow & & \uparrow & {}^{k-1}T_\pi \\ {}^{k-1}I & & T({}^{k-1}M) & \longrightarrow & T({}^{k-1}M) \\ & & id & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde,

$${}^{k-1}I : {}^kM \longrightarrow T({}^{k-1}M)$$

imbedding dönüşümleri mevcut ve

ii)  $1 \leq k < m$  tamsayıları için,

$$\begin{array}{ccc} & & {}^{k-1}\pi_* \\ & & \downarrow \\ & T({}^kM) & \longrightarrow & T({}^{k-1}M) \\ & \downarrow & & \uparrow & {}^{k-1}I \\ {}^kT_\pi & & {}^kM & \longrightarrow & {}^kM \\ & & id & & \end{array}$$

diyagramı  ${}^kI : {}^{k+1}M \longrightarrow T({}^kM)$  olmak üzere  ${}^kI({}^{k+1}M)$  üzerinde tamamen değişmeli ise, o zaman  $M$  nin bu  $\{{}^0M, {}^1M, \dots, {}^kM\}$  manifoldlar dizisine,  $M$

nin  $m$ -uzunluklu bir genişletilmiş dizisi ve  ${}^k M$  manifolduna da  $M$  nin  $k$ . genişletilmiş denir (Civelek, 1988).

$M$  manifoldunun keyfi bir  $({}^i M)$  tam manifoldlar dizisini gözönüne alalım. Eğer, dizinin ilk manifoldu  ${}^0 M = M$  alınırsa, bu durumda  $M$  nin kanonik genişletmeleri elde edilir.  ${}^0 M = M$  olduğundan  $T({}^0 M) = TM$  tanjant demeti olup,

$${}^0 T_\pi = \pi_M : TM \longrightarrow M$$

kanonik projeksiyonu olur.  ${}^1 M = TM$  olmak üzere,  ${}^0 I : {}^1 M \rightarrow TM$  dönüşümü özdeşlik dönüşümü olarak alınırsa;

$${}^0 \pi = {}^0 I \circ \pi_M = \pi_M$$

eşitliği yazılabilir ve  ${}^1 M$  e,  $M$  nin *birinci kanonik genişletilmiş* denir.

${}^1 M = TM$  olduğundan, tanjant demeti  $T({}^1 M) = TTM$  dir.

$$\begin{array}{ccc} & & (\pi_M)_* \\ & & \rightarrow \\ T({}^1 M) = TTM & \rightarrow & T({}^0 M) = TM \\ \downarrow & & \uparrow \\ {}^1 T_\pi & & {}^0 I \\ {}^1 M = TM & \rightarrow & {}^1 M = TM \\ & & id \end{array}$$

diyagramı da değişmeli olup,  $(\pi_M)_* = {}^0 I \circ {}^1 T_\pi$  eşitliği yazılabilir. Bu diyagram kullanılarak,  ${}^0 I(TM)$  üzerinde  $\exists A \in TTM$  için,

$$(\pi_M)_*(A) = {}^0 I({}^1 T_\pi(A)) = {}^1 T_\pi(A) \quad (1.1.5)$$

eşitliği yazılabilir. (1.1.5) eşitliğini sağlayan  $A \in TTM$  tanjant vektörlerinin cümlesi  ${}^2 M$  ile gösterilirse,

$${}^2 M = \{ A \in TTM \mid (\pi_M)_*(A) = {}^1 T_\pi(A) \}$$

olur.  ${}^2M \subset TTM$  bir  $C^\infty$ - manifolddur (Civelek, 1988).

$$M \stackrel{0}{=} M \xleftarrow[0\pi]{1} M \xleftarrow[1\pi]{2} M$$

dizisi  $M$  nin 2 -uzunluklu bir genişletilmiş dizisi olup, bu dizi kanonik dizi ve  ${}^2M$  de,  $M$  nin *ikinci kanonik genişletilmiştir*.

Benzer şekilde  $M$  nin  $(k + 1)$ . *kanonik genişletilmiştir* olarak,

$${}^{k+1}M = \{H : H \in T({}^kM), ({}^{k-1}\pi)_*(H) = {}^{k-1}I \circ {}^kT_\pi(H)\} \subset T({}^kM)$$

ve  $M$  nin  $(k+1)$ - uzunluklu kanonik genişletilmiş dizisi olarak da

$$M \stackrel{0}{=} M \xleftarrow[0\pi]{1} M \xleftarrow[1\pi]{2} \dots \xleftarrow[k\pi]{k+1} M$$

dizisi oluşturulabilir.

## 1.2 Jet Demetler ve Jet Demet Genişletmeleri

**Tanım 1.2.1.**  $(E, \pi, M)$  bir demet ve  $p \in M$  olsun.  $\phi, \varphi \in \Gamma_p(\pi)$  lokal kesitleri,  $p$  noktasında  $\phi(p) = \varphi(p)$  ve  $\phi(p)$  civarında  $(x^i, u^\alpha)$  uyarlanmış koordinat sisteminde

$$\left. \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \right|_p \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n)$$

ise *birinci mertebeden denk* olarak tanımlanır.  $\phi$  yi içeren denklik sınıflarına  $\phi$  nin  $p$  noktasındaki *birinci jeti* denir ve  $j_p^1\phi$  ile gösterilir (Saunders, 1989).

**Tanım 1.2.2.**  $(E, \pi, M)$  bir demet olsun.

$$\{j_p^1\phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$$

cümlesine  $\pi$  demetinin *birinci jet manifoldu* denir ve  $J^1\pi$  ile gösterilir (Saunders, 1989).

$\pi_1$  kaynak ve  $\pi_{1,0}$  hedef projeksiyonları sırasıyla,

$$\begin{aligned} \pi_1 : J^1\pi &\longrightarrow M & \text{ve} & & \pi_{1,0} : J^1\pi &\longrightarrow E \\ j_p^1\phi &\longrightarrow p & & & j_p^1\phi &\longrightarrow \phi(p) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 1.2.3.**  $(E, \pi, M)$  bir demet ve  $(U, u)$ ,  $u = (x^i, u^\alpha)$  olmak üzere  $E$  üzerinde uyarlanmış koordinat sistemi olsun. Bu durumda  $J^1\pi$  üzerinde  $(U^1, u^1)$  indirgenmiş koordinat sistemi,

$$U^1 = \{j_p^1\phi : \phi(p) \in U\} \quad u^1 = (x^i, u^\alpha, u_i^\alpha)$$

ile tanımlı olup, burada  $x^i(j_p^1\phi) = x^i(p)$ ,  $u^\alpha(j_p^1\phi) = u^\alpha(\phi(p))$  ve yeni  $mn$  adet  $u_i^\alpha : U^1 \longrightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları

$$u_i^\alpha(j_p^1\phi) = \left. \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \right|_p$$

şeklinde belirlidir.  $u_i^\alpha$  türevsel koordinatlar olarak adlandırılır (Saunders, 1989).

**Teorem 1.2.1.**  $E$  üzerinde  $(U, u)$  haritalarının bir atlası verildiğinde, buna karşılık  $(U^1, u^1)$  haritalarının bir koleksiyonu da  $J^1\pi$  üzerinde bir sonlu boyutlu  $C^\infty$ - atlasdır (Saunders, 1989).

**Teorem 1.2.2.**  $(E, \pi, M)$  bir demet ise  $(J^1\pi, \pi_1, M)$  de bir demettir (Saunders, 1989).

**Tanım 1.2.4.**  $(E, \pi, M)$  bir demet ve  $p \in M$  olsun.  $\phi, \varphi \in \Gamma_p(\pi)$  lokal kesitleri,  $p$  noktasında  $\phi(p) = \varphi(p)$  ve  $\phi(p)$  civarında  $(x^i, u^\alpha)$  uyarlanmış koordinat sisteminde

$$\left. \frac{\partial \phi^\alpha}{\partial x^i} \right|_p = \left. \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \right|_p \quad \text{ve} \quad \left. \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \right|_p = \left. \frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} \right|_p \quad (1 \leq i, j \leq m, 1 \leq \alpha \leq n)$$

ise *ikinci mertebeden denk* olarak tanımlanır.  $\phi$  yi içeren denklik sınıflarına,  $\phi$  nin  $p$  noktasındaki *ikinci jeti* denir ve  $j_p^2\phi$  ile gösterilir (Saunders, 1989).

**Tanım 1.2.5.**  $(E, \pi, M)$  bir demet olsun.

$$\{j_p^2\phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$$

cümlesine  $\pi$  demetinin *ikinci jet manifoldu* denir ve  $J^2\pi$  ile gösterilir (Saunders, 1989).

$\pi_2, \pi_{2,0}$  ve  $\pi_{2,1}$  fonksiyonları sırasıyla kaynak, hedef ve birinci jet projeksiyonları olarak adlandırılıp,

$$\begin{array}{lll} \pi_2 : J^2\pi \longrightarrow M & , & \pi_{2,0} : J^2\pi \longrightarrow E & \text{ve} & \pi_{2,1} : J^2\pi \longrightarrow J^1\pi \\ j_p^2\phi \longrightarrow p & & j_p^2\phi \longrightarrow \phi(p) & & j_p^2\phi \longrightarrow j_p^1\phi \end{array}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Tanım 1.2.6.**  $(E, \pi, M)$  bir demet ve  $u = (x^i, u^\alpha)$  olmak üzere  $(U, u)$   $E$  üzerinde uyarlanmış koordinat sistemi olsun. Bu durumda  $J^2\pi$  üzerinde  $(U^2, u^2)$  indirgenmiş koordinat sistemi,

$$U^2 = \{j_p^2\phi : \phi(p) \in U\} \quad u^2 = (x^i, u^\alpha, u_i^\alpha, u_{ij}^\alpha)$$

şeklinde tanımlı olup, burada  $x^i(j_p^2\phi) = x^i(p)$ ,  $u^\alpha(j_p^2\phi) = u^\alpha(\phi(p))$ ;  $u_i^\alpha(j_p^2\phi) = u_i^\alpha(j_p^1\phi)$  ve yeni  $\frac{1}{2}mn(m+1)$  adet yeni

$$u_{ij}^\alpha : U^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları

$$u_{ij}^\alpha(j_p^2\phi) = \left. \frac{\partial^2 \phi^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} \right|_p$$

olarak belirlidir.  $u_i^\alpha$  ve  $u_{ij}^\alpha$  fonksiyonlarına *türevsel koordinatlar* denir (Saunders, 1989).

**Teorem 1.2.3.**  $E$  üzerinde  $(U, u)$  haritalarının bir atlası verildiğinde, buna karşılık  $(U^2, u^2)$  haritalarının bir koleksiyonu da  $J^2\pi$  üzerinde bir sonlu boyutlu  $C^\infty$ -atlasdır (Saunders, 1989).

Bu çalışmada; genişletilmiş jet demet dizisini oluştururken koordinatların gösteriminde basitlik olması açısından, bundan böyle birinci jet manifold  $J^1\pi$  nin koordinatları  $(x^i, u^\alpha, u_{1i}^\alpha)$  ve ikinci jet manifold  $J^2\pi$  nin koordinatları  $(x^i, u^\alpha, u_{1i}^\alpha, u_{2i}^\alpha)$  olarak alınacaktır. Dikkat edilirse,  $u_i^\alpha$  ve  $u_{ij}^\alpha$  türevsel koordinatları  $u_{1i}^\alpha$  ve  $u_{2i}^\alpha$  olarak değiştirilmiştir.  $k$ . jet manifold  $J^k\pi$  nin aşağıda sunulacak olan tanımında da bu değişikliğe göre koordinatlar verilecektir.

Birinci ve ikinci jetler  $\phi \in \Gamma_p(\pi)$  lokal kesitlerinin,  $p$  de gerekli şartları sağlayan denklik sınıfları olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlama yardımıyla, kesitlerin yüksek mertebeden türevlerinin eşitliği gözönüne alınarak, bu şartı gerçekleyen kesitlerin birer denklik sınıfı oluşturulabilir. Yani bir kesitin  $k$ . jeti,  $k$ . mertebeden kısmi türevleri aynı olan böyle kesitleri içeren denklik sınıfı olarak tanımlanır.

**Tanım 1.2.7.**  $(E, \pi, M)$  bir demet ve  $p \in M$  olsun.  $\phi, \varphi \in \Gamma_p(\pi)$  lokal kesitleri,  $p$  noktasında  $\phi(p) = \varphi(p)$  ve  $\phi(p)$  civarında  $(x^i, u^\alpha)$  uyarlanmış koordinat sisteminde

$$\left. \frac{\partial^k \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j \dots \partial x^k} \right|_p = \left. \frac{\partial^k \varphi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j \dots \partial x^k} \right|_p$$

ise  $k$ . mertebeden denk olarak tanımlanır.  $\phi$  yi içeren denklik sınıflarına  $\phi$  nin  $p$  noktasındaki  $k$ . jeti denir ve  $j_p^k \phi$  ile gösterilir (Saunders, 1989).

**Tanım 1.2.8.**  $(E, \pi, M)$  bir demet olsun.

$$\{j_p^k \phi : p \in M, \phi \in \Gamma_p(\pi)\}$$

cümlesine  $\pi$  demetinin  $k$ . jet manifoldu denir ve  $J^k\pi$  ile gösterilir (Saunders, 1989).

$\pi_k, \pi_{k,0}$  ve  $\pi_{k,l}$  fonksiyonları sırasıyla kaynak, hedef ve  $l$ . jet projeksiyonları olarak adlandırılıp, ( $1 \leq l < k$ )

$$\begin{array}{lll} \pi_k : J^k\pi \longrightarrow M & , & \pi_{k,0} : J^k\pi \longrightarrow E & , & \pi_{k,l} : J^k\pi \longrightarrow J^l\pi \\ j_p^k\phi \longrightarrow p & & j_p^k\phi \longrightarrow \phi(p) & & j_p^k\phi \longrightarrow j_p^l\phi \end{array}$$

şeklinde tanımlıdırlar.

**Tanım 1.2.9.**  $(E, \pi, M)$  bir demet ve  $u = (x^i, u^\alpha)$  olmak üzere  $(U, u)$   $E$  üzerinde bir uyarlanmış koordinat sistemi olsun. Bu durumda  $J^k\pi$  üzerinde  $(U^k, u^k)$  indirgenmiş koordinat sistemi,

$$U^k = \{j_p^k\phi : \phi(p) \in U\} \quad u^k = (x^i, u^\alpha, u_{1i}^\alpha, u_{2i}^\alpha, \dots, u_{ki}^\alpha)$$

şeklinde tanımlı olup, burada  $x^i(j_p^k\phi) = x^i(p)$ ,  $u^\alpha(j_p^k\phi) = u^\alpha(\phi(p))$ ; ve  $\frac{1}{k!}mn(m+1)\dots(k+m-1)$  adet yeni  $u_{ki}^\alpha : U^k \longrightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonları,

$$u_{ki}^\alpha(j_p^k\phi) = \left. \frac{\partial^k \phi^\alpha}{\partial x^i \partial x^j \dots \partial x^k} \right|_p$$

olarak belirlidir ve *türevsel koordinatlar* olarak adlandırılır (Saunders, 1989).

**Teorem 1.2.4.**  $E$  üzerinde  $(U, u)$  haritalarının bir atlası verildiğinde, buna karşılık  $(U^k, u^k)$  haritalarının bir koleksiyonu da  $J^k\pi$  üzerinde bir sonlu boyutlu  $C^\infty$ - atlasdır (Saunders, 1989).

**Teorem 1.2.5.**  $(E, \pi, M)$  bir demet ise  $(J^k\pi, \pi_k, M)$  de bir demettir (Saunders, 1989).

Yukarıdaki verilen tanım ve teoremler dikkate alınarak, şimdi genişletilmiş jet demet dizisi oluşturulacak ve bu dizi üzerinde koordinatlar tanımlanacaktır.  $(E, \pi, M)$  herhangi bir demet,  $E$  ve  $M$  manifoldlarının Tanım 1.1.9 ve Tanım 1.1.10 un şartlarını sağlayan genişletilmiş kanonik manifold dizileri

sırasıyla;

$$E = {}^0 E \xleftarrow{{}_0\rho} {}^1 E \xleftarrow{{}_1\rho} {}^2 E \xleftarrow{{}_2\rho} \dots$$

ve

$$M = {}^0 M \xleftarrow{{}_0\pi} {}^1 M \xleftarrow{{}_1\pi} {}^2 M \xleftarrow{{}_2\pi} \dots$$

olsun. Bu durumda,  $E^i : {}^i E \longrightarrow {}^i M$  dönüşümleri örten submersiyonlar,

$\pi^i = ({}^i E, \pi^i, {}^i M)$  demetler ve  $({}^i \rho, {}^i \pi)$  demet morfizmleri olmak üzere,

$D({}^i \rho, {}^i \pi) = R({}^{i+1} \rho, {}^{i+1} \pi)$  olup

$$\begin{array}{ccc} \pi^i & \xleftarrow{({}^i \rho, {}^i \pi)} & \pi^{i+1} \\ & & \xleftarrow{({}^{i+1} \rho, {}^{i+1} \pi)} \\ & & \pi^{i+2} \end{array}$$

demet dizileri birer kısa tam dizi oluşturur. Bu durumda aşağıda verilen (1.2.1) dizisi  $\pi$  demetinin bir tam dizisidir.

$$\pi = \pi^0 \xleftarrow{({}^0 \rho, {}^0 \pi)} \pi^1 \xleftarrow{({}^1 \rho, {}^1 \pi)} \pi^2 \xleftarrow{({}^2 \rho, {}^2 \pi)} \dots \quad (1.2.1)$$

**Tanım 1.2.10.**  $\pi = (E, \pi, M)$  herhangi bir demet ve  $\pi$  nin  $m \in \mathbb{N}$  uzunluklu dizisi (1.2.1) deki gibi verilsin. Herbir  $k$  tamsayısı için  $\pi^k = ({}^k E, \pi^k, {}^k M)$  demetinin tanjant demeti  $\pi_*^k = (T({}^k E), \pi_*^k, T({}^k M))$ ,

$${}^k T_\rho : T({}^k E) \longrightarrow {}^k E \quad {}^k T_\pi : T({}^k M) \longrightarrow {}^k M$$

kanonik projeksiyonlar ve  $({}^k T_\rho, {}^k T_\pi), ({}^k T_\rho, {}^k T_\pi) : T\pi^k \longrightarrow \pi^k$  demet projeksiyonu olmak üzere eğer,

i)  $1 \leq k \leq m$  tamsayıları için,

$$\begin{array}{ccc} & & ({}^{k-1} \rho, {}^{k-1} \pi) \\ & & \downarrow \\ \pi^k & \longrightarrow & \pi^{k-1} \\ {}^{kk-1} I \downarrow & & \uparrow ({}^{k-1} T_\rho, {}^{k-1} T_\pi) \\ T\pi^{k-1} & \longrightarrow & T\pi^{k-1} \\ & & id \end{array}$$

diagramı değişmeli olacak biçimde,  ${}^{kk-1}I : \pi^k \longrightarrow T\pi^{k-1}$  imbedding dönüşümleri mevcut ve  $({}^{k-1}\rho, {}^{k-1}\pi)$  demet morfizmleri imbeddingdir,

ii) Herbir  $1 \leq k < m$  tamsayısı için,

$$\begin{array}{ccc}
 & & ({}^{k-1}\rho, {}^{k-1}\pi)_* \\
 T\pi^k & \longrightarrow & T\pi^{k-1} \\
 ({}^kT_\rho, {}^kT_\pi) \downarrow & & \uparrow \quad {}^{kk-1}I \\
 \pi^k & \longrightarrow & \pi^k \\
 & & id
 \end{array}$$

diyagramı  $T\pi^k$  tanjant demeti üzerinde tamamen değişmeli ise o zaman (1.2.1) dizisine  $\pi$  demetinin *m-uzunluklu genişletilmiş dizisi* ve  $\pi^k$  demetine de  $\pi$  nin *k. genişletilmiş demeti* denir (Civelek, 1993).

$({}^iE)$  ve  $({}^iM)$  manifold dizilerinde  ${}^0E = E$  ve  ${}^0M = M$  alınmakla  $\pi^0 = \pi$  demetinin kanonik genişletilmiş demet dizisi ve kanonik genişletilmiş demetleri elde edilir.

**Örnek 1.2.1.**  $M$  nin  $({}^1M)$  ve  $E$  nin  $({}^1E)$  dizisi verilsin.

$$\begin{array}{ccc}
 & & {}^0\pi \\
 {}^1M = TM & \longrightarrow & {}^0M = M \\
 {}^0I \quad \downarrow & & \uparrow \quad {}^0T_\pi = \pi_M \\
 T({}^0M) = TM & \longrightarrow & T({}^0M) = TM \\
 & & id
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & {}^0\rho \\
 {}^1E = TE & \longrightarrow & {}^0E = E \\
 {}^0I \quad \downarrow & & \uparrow \quad {}^0T_\rho = \rho_M \\
 T({}^0E) = TE & \longrightarrow & T({}^0E) = TE \\
 & & id
 \end{array}$$

diyagramları değişmeli olacak şekilde;  ${}^0I$  bir özdeşlik dntştm olarak alınrsa,  ${}^0I$  dntştm aynı zamanda bir imbeddingdir.

Şimdi,  $\pi = (E, \pi, M)$  ve  $\pi$  nin  $({}^1\pi)$  dizisini alalım. Aynı zamanda  $\pi$  nin tanjant demeti  $(TE, \pi_*, TM)$  olsun.

$$\begin{array}{ccc}
 & & ({}^0\rho, {}^0\pi) \\
 & & \longrightarrow \\
 \pi^1 = \pi_* & \longrightarrow & \pi^0 = \pi \\
 {}^{10}I \quad \downarrow & & \uparrow \quad ({}^0T_\rho, {}^0T_\pi) \\
 T(\pi^0) = \pi_* & \longrightarrow & T(\pi^0) = \pi_* \\
 & & id
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde;  ${}^{10}I : \pi^1 = \pi_* \rightarrow T(\pi^0) = \pi_*$  şeklinde tanımlı bir özdeşlik dntştm olarak alınrsa,  ${}^{10}I$  dntştm aynı zamanda bir imbedding olur. Burada,

$${}^0T_\rho : T({}^0E) \rightarrow E, \quad {}^0T_\pi : T({}^0M) \rightarrow M$$

kanonik projeksiyonlar ve  $({}^0T_\rho, {}^0T_\pi)$  ise bir demet projeksiyonudur.

$$({}^0\rho, {}^0\pi) = ({}^0T_\rho, {}^0T_\pi) \circ id \circ {}^{10}I = ({}^0T_\rho, {}^0T_\pi)$$

yazılabilir.  $\pi^1 = \pi_* = T\pi$  olduğundan  $T(\pi^1) = TT\pi = T\pi_*$  dir.

$({}^1T_\rho, {}^1T_\pi) : TT\pi \rightarrow T\pi = \pi_*$  projeksiyonu ise  $(T_{T_\rho}, T_{T_\pi})$  doğal projeksiyonudur. Bylece

$$\begin{array}{ccc}
 & & ({}^1\rho, {}^1\pi) \\
 & & \longrightarrow \\
 T(\pi^1) = T\pi_* & \longrightarrow & T\pi = \pi_* \\
 {}^{21}I \quad \downarrow & & \uparrow \quad ({}^1T_\rho, {}^1T_\pi) \\
 \pi^1 = \pi_* & \longrightarrow & \pi^1 = \pi_* \\
 & & id
 \end{array}$$

diyagramı da değişmeli olup  $({}^1\rho, {}^1\pi) = ({}^1T_\rho, {}^1T_\pi) \circ id \circ {}^{21}I$  yazılabilir. Buna

göre

$$\begin{array}{ccc} (\pi^0 & \longleftarrow & \pi^1) \equiv (\pi & \longleftarrow & \pi_*) \\ ({}^0\rho, {}^0\pi) & & (\rho, \pi) \end{array}$$

1-uzunluklu demet dizisi  $\pi$  demetinin birinci genişletilmiş demet dizisidir.

(1.2.1) genişletilmiş dizisi yardımıyla genişletilmiş jet demet dizisi oluşturulabilir:

**Tanım 1.2.11.**  $\forall i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ ,  $\pi^i = ({}^iE, \pi^i, {}^iM)$  demetler ve  $\pi^i$  demetleri üzerinde k. jet manifoldlar  $J^k\pi^i$  olmak üzere;

$$\begin{array}{ccccccc} J^k\pi & = & J^k\pi^0 & \xleftarrow{{}^0h} & J^k\pi^1 & \xleftarrow{{}^1h} & J^k\pi^2 & \xleftarrow{{}^2h} & \dots & \xleftarrow{{}^{k-1}h} & J^k\pi^k & \xleftarrow{\dots} & \dots \\ & & \downarrow \pi_k^0 & & \downarrow \pi_k^1 & & \downarrow \pi_k^2 & & & & \downarrow \pi_k^k & & \\ & & {}^0M & \xleftarrow{{}^0\pi} & {}^1M & \xleftarrow{{}^1\pi} & {}^2M & \xleftarrow{{}^2\pi} & \dots & \xleftarrow{{}^{k-1}\pi} & {}^kM & \xleftarrow{\dots} & \dots \end{array}$$

dizisi kısaca,

$$J^k\pi^0 \longleftarrow J^k\pi^1 \longleftarrow J^k\pi^2 \longleftarrow \dots J^k\pi^k \longleftarrow \dots \quad (1.2.2)$$

şeklinde gösterilirse, bu diziyeye *genişletilmiş jet demet dizisi* denir.

Ayrıca m-uzunluklu genişletilmiş  $\pi^i$  dizisi üzerinde k. jet manifoldlar tanımlanarak elde edilen  $J^k(\pi^i)$  dizisi ile  $J^k(\pi^0)$  demetinin m-uzunluklu genişletilmiş jet dizisi olan  $(J^k\pi^0)^i$  dizisi aynıdır, yani

$$J^k(\pi^i) = (J^k\pi^0)^i$$

dir. Bu çalışmada, parantez kullanılmadan bu dizi sadece  $J^k\pi^i$  olarak gösterilecek ve m. genişletilmiş  $J^k\pi^m$  manifoldu olarak tanımlanacaktır.

Genişletilmiş demetler ve genişletilmiş jet demetler üzerinde uyarlanmış koordinatlar Tablo 2.1 de verilmiştir.

Genişletilmiş Demetler	Genişletilmiş Demetler üzerinde koordinatlar
$\pi^0 = \pi$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}) \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n)$
$J^k \pi^0$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}) \quad (r = 1, 2, \dots, k)$
$\pi^1 = T\pi$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, x^{1i}, u^{1\alpha})$
$J^k \pi^1$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, x^{1i}, u^{1\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}, u_{ri}^{1\alpha})$
$\pi^2$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, x^{1i}, u^{1\alpha}, x^{2i}, u^{2\alpha})$
$J^k \pi^2$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, x^{1i}, u^{1\alpha}, x^{2i}, u^{2\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}, u_{ri}^{1\alpha}, u_{ri}^{2\alpha})$
....	...
$\pi^m$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, x^{1i}, u^{1\alpha}, \dots, x^{mi}, u^{m\alpha})$
$J^k \pi^m$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, x^{1i}, u^{1\alpha}, \dots, x^{mi}, u^{m\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}, u_{ri}^{1\alpha}, \dots, u_{ri}^{m\alpha})$

Tablo 2.1. Genişletilmiş jet demetlerde uyarlanmış koordinatlar

### 1.3 Genişletilmiş Jet Demetlerine Yüksek Mer- tebeden Lift'ler

Bu bölümde, herhangi bir  $(E, \pi, M)$  demeti üzerinde olan diferensiyel elemanların,  $\pi$  nin genişletilmiş demetleri üzerine yüksek mertebeden liftleri (Civelek, 1993) esas alınarak;  $\pi$  demetinin jet manifoldları üzerindeki diferensiyel elemanların genişletilmiş jet demetleri üzerine yüksek mertebeden lift'leri elde edilmiştir.

Bu bölümde  $\tau_{J^k \pi^i}$  dönüşümleri  $(1 \leq i \leq m-1)$ ,  $\tau_{J^k \pi^i} : J^k \pi^{i+1} \rightarrow J^k \pi^i$  olarak tanımlı doğal projeksiyonları göstermektedir.

**Tanım 1.3.1.** Herhangi bir  $(E, \pi, M)$  demetinin  $k$ . jet manifoldu  $J^k \pi$  olmak üzere,  $J^k \pi$  üzerinde tanımlı bir  $C^\infty$ - fonksiyon  $f$  olsun. Birinci kanonik genişletilmiş jet demeti  $J^k \pi^1$  olduğundan bu durumda,

$$f^v = f \circ \tau_{J^k \pi}$$

eşitliği ile tanımlı  $f^v \in C^\infty(J^k\pi^1, \mathbb{R})$  fonksiyonuna,  $f$  nin  $J^k\pi^1$  jet demetine *birinci mertebeden düşey lifti* denir.

**Tanım 1.3.2.**  $J^k\pi$  jet demetinin birinci ve ikinci genişletilmiş jet demetleri  $J^k\pi^1$  ve  $J^k\pi^2$ ,  $J^k\pi$  üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun  $J^k\pi^1$  e düşey lifti  $f^v \in C^\infty(J^k\pi^1, \mathbb{R})$  olsun. Buna göre,

$$f^{vv} = f^v \circ \tau_{J^k\pi^1}$$

eşitliği ile tanımlı  $f^{vv} \in C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R})$  fonksiyonuna,  $f$  nin  $J^k\pi^2$  ye *ikinci mertebeden düşey lifti* denir.  $f^{vv}$  kısaca  $f^{v^2}$  ile gösterilecektir.

**Tanım 1.3.3.**  $J^k\pi$  jet demetinin  $(m-1)$ . ve  $m$ . mertebeden genişletilmiş jet demetleri  $J^k\pi^{m-1}$  ve  $J^k\pi^m$ ,  $J^k\pi$  üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun  $J^k\pi^{m-1}$  e düşey lifti  $f^{v^{m-1}} \in C^\infty(J^k\pi^{m-1}, \mathbb{R})$  olsun.

$$f^{v^m} = f^{v^{m-1}} \circ \tau_{J^k\pi^{m-1}}$$

veya

$$f^{v^m} = f \circ \tau_{J^k\pi} \circ \tau_{J^k\pi^1} \circ \dots \circ \tau_{J^k\pi^{m-1}}$$

eşitliği ile tanımlı  $f^{v^m} \in C^\infty(J^k\pi^m, \mathbb{R})$  fonksiyonuna,  $f$  nin  $J^k\pi^m$  ye  $m$ . mertebeden *düşey lifti* denir.

**Tanım 1.3.4.**  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde tanımlı bir fonksiyon  $f$  ve  $J^k\pi$  nin uyarlanmış koordinatları  $(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha})$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d : C^\infty(J^k\pi, \mathbb{R}) &\longrightarrow \chi^*(J^k\pi) \\ f &\longrightarrow df \end{aligned}$$

olup

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^{0i}} dx^{0i} + \frac{\partial f}{\partial u^{0\alpha}} du^{0\alpha} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial f}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha}$$

eşitliği ile tanımlı 1-forma,  $f$  nin *diferensiyeli* denir.

Burada,

$$\iota_1 : \chi^*(J^k\pi) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^1, \mathbb{R})$$

lineer dönüşümü,  $\iota_1(dx^{0i}) = x^{1i}$ ,  $\iota_1(du^{0\alpha}) = u^{1\alpha}$ ,  $\iota_1(du_{ri}^{0\alpha}) = u_{ri}^{1\alpha}$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) şeklinde tanımlanırsa aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 1.3.5.**  $J^k\pi$  üzerinde tanımlı bir  $f$  fonksiyonunun diferensiyeli  $df$  olsun.

$$f^c = \iota_1(df) = x^{1i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^{0i}} \right)^v + u^{1\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial u^{0\alpha}} \right)^v + \sum_{r=1}^k u_{ri}^{1\alpha} \left( \frac{\partial f}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^v$$

eşitliği ile tanımlı  $f^c \in C^\infty(J^k\pi^1, \mathbb{R})$  fonksiyonuna,  $f$  nin  $J^k\pi^1$  e *birinci merbeden tam lift*' i denir.

**Tanım 1.3.6.**  $J^k\pi^1$  demeti üzerinde tanımlı bir fonksiyon  $f^c$  olsun.

$$\begin{aligned} d : C^\infty(J^k\pi^1, \mathbb{R}) &\longrightarrow \chi^*(J^k\pi^1) \\ f^c &\longrightarrow df^c \end{aligned}$$

olup

$$df^c = \sum_{s=0}^1 \left( \frac{\partial f^c}{\partial x^{si}} dx^{si} + \frac{\partial f^c}{\partial u^{s\alpha}} du^{s\alpha} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial f^c}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \right)$$

eşitliği ile tanımlı 1-forma  $f^c$  nin *diferensiyeli* denir.

Burada,

$$\iota_2 : \chi^*(J^k\pi^1) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R})$$

lineer dönüşümü;  $\iota_2(dx^{si}) = x^{s+1i}$ ,  $\iota_2(du^{s\alpha}) = u^{s+1\alpha}$ ,  $\iota_2(du_{ri}^{s\alpha}) = u_{ri}^{s+1\alpha}$ ,

$0 \leq s \leq 1$ , ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) şeklinde tanımlanırsa aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 1.3.7.**  $J^k\pi^1$  demeti üzerinde tanımlı bir  $f^c$  fonksiyonunun diferensiyeli  $df^c$  olsun.

$$f^{cc} = \iota_2(df^c) = \sum_{s=0}^1 \left( x^{s+1i} \left( \frac{\partial f^c}{\partial x^{si}} \right)^v + u^{s+1\alpha} \left( \frac{\partial f^c}{\partial u^{s\alpha}} \right)^v + \sum_{r=1}^k u_{ri}^{s+1\alpha} \left( \frac{\partial f^c}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right)^v \right)$$

eşitliği ile tanımlı  $f^{cc} \in C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R})$  fonksiyonuna  $f$  nin  $J^k\pi^2$  ye *ikinci mertebeden tam lift'i* denir.  $f^{cc}$  kısaca  $f^{c^2}$  ile gösterilir.

Benzer düşünceyle, fonksiyonların  $J^k\pi$  nin  $J^k\pi^m$  genişletilmiş jet demeti üzerine  $m$ . mertebeden tam lift'i aşağıdaki gibi genelleştirilir.

**Tanım 1.3.8.**  $J^k\pi^{m-1}$  demeti üzerinde tanımlı bir  $f^{c^{m-1}}$  fonksiyonunun diferensiyeli  $df^{c^{m-1}}$  olsun.

$$\begin{aligned} d: C^\infty(J^k\pi^{m-1}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \chi^*(J^k\pi^{m-1}) \\ f^{c^{m-1}} &\longrightarrow df^{c^{m-1}} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$df^{c^{m-1}} = \sum_{s=0}^{m-1} \left( \frac{\partial f^{c^{m-1}}}{\partial x^{si}} dx^{si} + \frac{\partial f^{c^{m-1}}}{\partial u^{s\alpha}} du^{s\alpha} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial f^{c^{m-1}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \right)$$

eşitliği ile tanımlı 1-forma  $f^{c^{m-1}}$  nin *diferensiyeli* denir.

Burada,

$$\iota_m: \chi^*(J^k\pi^{m-1}) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^m, \mathbb{R})$$

lineer dönüşümü,  $\iota_m(dx^{si}) = x^{s+1i}$ ,  $\iota_m(du^{s\alpha}) = u^{s+1\alpha}$ ,  $\iota_m(du_{ri}^{s\alpha}) = u_{ri}^{s+1\alpha}$ ,

$0 \leq s \leq m-1$ , ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) şeklinde tanımlanırsa aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 1.3.9.**  $J^k\pi^{m-1}$  demeti üzerinde tanımlı bir  $f^{c^{m-1}}$  fonksiyonunun diferensiyeli  $df^{c^{m-1}}$  olsun.

$$f^{c^m} = \iota_m(df^{c^{m-1}})$$

$$= \sum_{r=0}^{m-1} \left( x^{s+1i} \left( \frac{\partial f^{c^{m-1}}}{\partial x^{si}} \right)^v + u^{s+1\alpha} \left( \frac{\partial f^{c^{m-1}}}{\partial u^{s\alpha}} \right)^v + \sum_{r=1}^k u_{ri}^{s+1\alpha} \left( \frac{\partial f^{c^{m-1}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right)^v \right)$$

eşitliği ile tanımlı  $f^{c^m} \in C^\infty(J^k\pi^m, \mathbb{R})$  fonksiyonuna  $f$  nin  $J^k\pi^m$  ye  $m$ . *mer- tebeden tam lift'i* denir.

**Özellik 1.3.1.**  $\forall f, g \in C^\infty(J^k\pi, \mathbb{R})$  fonksiyonları için,

$$\text{i) } (f + g)^{v^m} = f^{v^m} + g^{v^m}$$

$$\text{ii) } (fg)^{v^m} = f^{v^m} g^{v^m}$$

$$\text{iii) } (f + g)^{c^m} = f^{c^m} + g^{c^m}$$

$$\text{iv) } (fg)^{c^m} = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} f^{c^{m-n}v^n} g^{c^n v^{m-n}}$$

$$\text{v) } \left( \frac{\partial f}{\partial x^{0i}} \right)^{c^m} = \frac{\partial f^{c^m}}{\partial x^{0i}}, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial u^{0\alpha}} \right)^{c^m} = \frac{\partial f^{c^m}}{\partial u^{0\alpha}}, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{c^m} = \frac{\partial f^{c^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}$$

$$\text{vi) } \left( \frac{\partial f}{\partial x^{0i}} \right)^{v^m} = \frac{\partial f^{c^m}}{\partial x^{mi}} = \frac{\partial f^{v^m}}{\partial x^{0i}}, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial u^{0\alpha}} \right)^{v^m} = \frac{\partial f^{c^m}}{\partial u^{m\alpha}} = \frac{\partial f^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}},$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{v^m} = \frac{\partial f^{c^m}}{\partial u_{ri}^{m\alpha}} = \frac{\partial f^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}$$

$$\text{vii) } \left( \frac{\partial f}{\partial x^{0i}} \right)^{c^{m-s}v^s} = \frac{\partial f^{c^s}}{\partial x^{si}}, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial u^{s\alpha}} \right)^{c^{m-s}v^s} = \frac{\partial f^{c^s}}{\partial u^{s\alpha}}, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s}v^s} = \frac{\partial f^{c^s}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}}$$

özellikleri vardır.

**Tanım 1.3.10.**  $J^k\pi$  demeti üzerinde tanımlı bir jet vektör alanı,

$$X = X^{0i} \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + X^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + \sum_{r=1}^k X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \quad (1.3.1)$$

olsun. O zaman

$$X^v : C^\infty(J^k\pi^1, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^1, \mathbb{R})$$

$X^v(f^c) = (Xf)^v$ ,  $\forall f \in C^\infty(J^k\pi, \mathbb{R})$  eşitliği ile tanımlı  $X^v$ ,  $J^k\pi^1$  üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, bu  $X^v$  vektör alanına,  $X$  in  $J^k\pi^1$  e *düşey lift*'i denir.

**Teorem 1.3.1.**  $X \in \chi(J^k\pi)$  jet vektör alanının bileşensel yapısı (1.3.1) ile verilsin.  $X$  in  $J^k\pi^1$  genişletilmiş jet demetine düşey lift'i

$$X^v = (X^{0i})^v \frac{\partial}{\partial x^{1i}} + (X^{0\alpha})^v \frac{\partial}{\partial u^{1\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^v \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{1\alpha}}$$

dir.

**Sonuç 1.3.1.**  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{0i}}, \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right\} = \chi(J^k\pi)$  olmak üzere,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right)^v = \frac{\partial}{\partial x^{1i}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right)^v = \frac{\partial}{\partial u^{1\alpha}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^v = \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{1\alpha}}$$

olup,  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{si}}, \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} : 0 \leq s \leq 1, 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k\pi^1)$  dir.

**Tanım 1.3.11.**  $J^k\pi$  demeti üzerinde tanımlı  $X$  jet vektör alanının  $J^k\pi^2$  demeti üzerine düşey lift'i  $X^{vv}$  ve bir  $f$  fonksiyonunun  $J^k\pi^2$  ye tam lift'i  $f^{cc}$  olmak üzere,

$$X^{vv} : C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R})$$

$X^{vv}(f^{cc}) = (Xf)^{vv}$ ,  $\forall f \in C^\infty(J^k\pi, \mathbb{R})$  eşitliği ile tanımlı  $X^{vv}$ ,  $J^k\pi^2$  üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, bu  $X^{vv}$  vektör alanına,  $X$  in  $J^k\pi^2$  ye *ikinci mertebeden düşey lift'i* denir.  $X^{vv}$  kısaca  $X^{v^2}$  ile gösterilir.

**Teorem 1.3.2.**  $X \in \chi(J^k\pi)$  jet vektör alanının bileşensel yapısı (1.3.1) ile verilsin.  $X$  in  $J^k\pi^2$  demetine ikinci mertebeden düşey lift'i

$$X^{vv} = (X^{0i})^{vv} \frac{\partial}{\partial x^{2i}} + (X^{0\alpha})^{vv} \frac{\partial}{\partial u^{2\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^{vv} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{2\alpha}}$$

dir.

**Sonuç 1.3.2.**  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{0i}}, \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} : 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k\pi)$  olmak üzere,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right)^{vv} = \frac{\partial}{\partial x^{2i}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right)^{vv} = \frac{\partial}{\partial u^{2\alpha}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{vv} = \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{2\alpha}}$$

olup,  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{si}}, \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} : 0 \leq s \leq 2, 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k \pi^2)$  dir.

Benzer düşünceyle, vektör alanlarının düşey lift'i ile ilgili yukarıdaki tanımlar aşağıdaki gibi genelleştirilir.

**Tanım 1.3.12.**  $J^k \pi$  demeti üzerinde tanımlı bir  $X$  jet vektör alanının  $J^k \pi^m$  demeti üzerine düşey lift'i  $X^{v^m}$  ve bir  $f$  fonksiyonunun  $J^k \pi^m$  e tam lift'i  $f^{c^m}$  olmak üzere,

$$X^{v^m} : C^\infty(J^k \pi^m, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(J^k \pi^m, \mathbb{R})$$

$X^{v^m}(f^{c^m}) = (Xf)^{v^m}$ ,  $\forall f \in C^\infty(J^k \pi, \mathbb{R})$  eşitliği ile tanımlı  $X^{v^m}$ ,  $J^k \pi^m$  üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, bu  $X^{v^m}$  vektör alanına,  $X$  in  $J^k \pi^m$  ye  $m$ . mertebeden düşey lift'i denir.

**Teorem 1.3.3.**  $X \in \chi(J^k \pi)$  jet vektör alanının bileşensel yapısı (1.3.1) ile verilsin.  $X$  in  $J^k \pi^m$  demetine  $m$ . mertebeden düşey lift'i

$$X^{v^m} = (X^{0i})^{v^m} \frac{\partial}{\partial x^{mi}} + (X^{0\alpha})^{v^m} \frac{\partial}{\partial u^{m\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^{v^m} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{m\alpha}}$$

dır.

**Sonuç 1.3.3.**  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{0i}}, \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} : 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k \pi)$  olmak üzere,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right)^{v^m} = \frac{\partial}{\partial x^{mi}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right)^{v^m} = \frac{\partial}{\partial u^{m\alpha}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{v^m} = \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{m\alpha}}$$

olup,  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{si}}, \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} : 0 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k \pi^m)$  dir.

**Tanım 1.3.13.**  $J^k \pi$  demeti üzerinde tanımlı bir jet vektör alanı  $X$  olsun. O zaman;

$$X^c : C^\infty(J^k \pi^1, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(J^k \pi^1, \mathbb{R})$$

$X^c(f^c) = (Xf)^c$ ,  $\forall f \in C^\infty(J^k\pi, \mathbb{R})$  eşitliği ile tanımlı  $X^c$ ,  $J^k\pi^1$  üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, bu  $X^c$  vektör alanına,  $X$  in  $J^k\pi^1$  e *tam lift*'i denir.

**Teorem 1.3.4.**  $X \in \chi(J^k\pi)$  jet vektör alanının bileşensel yapısı (1.3.1) ile verilsin.  $X$  in  $J^k\pi^1$  e tam lift'i

$$\begin{aligned} X^c = & (X^{0i})^v \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + (X^{0\alpha})^v \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^v \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + (X^{0i})^c \frac{\partial}{\partial x^{1i}} \\ & + (X^{0\alpha})^c \frac{\partial}{\partial u^{1\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^c \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{1\alpha}} \end{aligned}$$

dir.

**Sonuç 1.3.4.**  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{0i}}, \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} : 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k\pi)$  olmak üzere ,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right)^c = \frac{\partial}{\partial x^{0i}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right)^c = \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^c = \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}$$

olup,  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{si}}, \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} : 0 \leq s \leq 1, 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k\pi^1)$  dir.

**Tanım 1.3.14.**  $J^k\pi$  demeti üzerinde tanımlı jet vektör alanı  $X$  olsun.

$$X^{cc} : C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R})$$

$X^{cc}(f^{cc}) = (Xf)^{cc}$ ,  $\forall f \in C^\infty(J^k\pi, \mathbb{R})$  eşitliği ile tanımlı  $X^{cc}$ ,  $J^k\pi^2$  üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, bu  $X^{cc}$  vektör alanına,  $X$  in  $J^k\pi^2$  ye *ikinci mertebeden tam lift*'i denir.  $X^{cc}$  kısaca  $X^{c^2}$  ile gösterilir.

**Teorem 1.3.5.**  $X \in \chi(J^k\pi)$  jet vektör alanının bileşensel yapısı (1.3.1) ile verilsin.  $X$  in  $J^k\pi^2$  demetine ikinci mertebeden tam lift'i

$$\begin{aligned}
X^{c^2} = & (X^{0i})^{vv} \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + (X^{0\alpha})^{vv} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^{vv} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \\
& + 2(X^{0i})^{cv} \frac{\partial}{\partial x^{1i}} + 2(X^{0\alpha})^{cv} \frac{\partial}{\partial u^{1\alpha}} + 2 \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^{cv} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{1\alpha}} + \\
& + (X^{0i})^{cc} \frac{\partial}{\partial x^{2i}} + (X^{0\alpha})^{cc} \frac{\partial}{\partial x^{2\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^{cc} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

dir.

**Sonuç 1.3.2.**  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{0i}}, \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} : 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k \pi)$  olmak üzere,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right)^{c^{m-2v^2}} = \frac{\partial}{\partial x^{2i}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right)^{c^{m-2v^2}} = \frac{\partial}{\partial u^{2\alpha}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-2v^2}} = \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{2\alpha}}$$

olup,  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{si}}, \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} : 0 \leq s \leq 2, 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k \pi^2)$  dir.

Benzer düşünceyle, vektör alanlarının tam lift'i ile ilgili yukarıdaki tanımlar aşağıdaki gibi genelleştirilir.

**Tanım 1.3.15.**  $J^k \pi$  demeti üzerinde tanımlı jet vektör alanı  $X$  olsun.  $O$  zaman;

$$X^{c^m} : C^\infty(J^k \pi^m, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(J^k \pi^m, \mathbb{R})$$

$X^{c^m}(f^{c^m}) = (Xf)^{c^m}$ ,  $\forall f \in C^\infty(J^k \pi, \mathbb{R})$  eşitliği ile tanımlı  $X^{c^m}$ ,  $J^k \pi^m$  demeti üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, bu  $X^{c^m}$  vektör alanına,  $X$  in  $J^k \pi^m$  ye  $m$ .mertebeden tam lift'i denir.

**Teorem 1.3.6.**  $X \in \chi(J^k \pi)$  jet vektör alanının bileşensel yapısı (1.3.1) ile verilsin.  $X$  in  $J^k \pi^m$  ye tam lift'i,

$$X^{c^m} = \sum_{s=0}^m \left\{ \binom{m}{s} (X^{0i})^{v^{m-s}c^s} \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \binom{m}{s} (X^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} + \sum_{r=1}^k \binom{m}{s} (X_{ri}^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right\}$$

dir.

**Sonuç 1.3.6.**  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{0i}}, \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} : 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k \pi^m)$  olmak üzere,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right)^{c^{m-s} v^s} = \frac{\partial}{\partial x^{si}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s} v^s} = \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}}, \quad \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s} v^s} = \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}}$$

olup,  $Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{si}}, \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} : 0 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq k \right\} = \chi(J^k \pi^m)$  dir.

**Özellik 1.3.2.**  $\forall X, Y \in \chi(J^k \pi)$  jet vektör alanları,  $\forall f \in C^\infty(J^k \pi, \mathbb{R})$  fonksiyonu için,

- i)  $(X + Y)^{v^m} = X^{v^m} + Y^{v^m}$
- ii)  $(X + Y)^{c^m} = X^{c^m} + Y^{c^m}$
- iii)  $(fX)^{v^m} = f^{v^m} X^{v^m}$
- iv)  $(fX)^{c^m} = \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} f^{v^{m-s} c^s} X^{c^{m-s} v^s}$
- v)  $(fX)^{c^s v^n} = \sum_{h=0}^s \binom{s}{h} f^{v^{s-h} c^h} X^{c^{s-h} v^{h+n}}, \quad 0 \leq n, s \leq m \quad (n + s = m)$

eşitlikleri vardır.

**Tanım 1.3.16.**  $J^k \pi$  demeti üzerinde tanımlı bir jet 1-form,

$$\omega = \omega_{0i} dx^{0i} + \omega_{0\alpha} du^{0\alpha} + \sum_{r=1}^k \omega_{0\alpha}^{ri} du_{ri}^{0\alpha} \quad (1.3.2)$$

olsun. O zaman,

$$\omega^v : \chi(J^k \pi^1) \longrightarrow C^\infty(J^k \pi^1, \mathbb{R})$$

$\omega^v(X^c) = (\omega X)^v$ ,  $\forall X \in \chi(J^k \pi)$  eşitliği ile tanımlı  $\omega^v$ ,  $J^k \pi^1$  demeti üzerinde tanımlı bir 1-form olup, bu  $\omega^v$  1-formuna,  $\omega$  nın  $J^k \pi^1$  genişletilmiş jet demetine *birinci mertebeden düşey lift*'i denir.

**Teorem 1.3.7.**  $\omega \in \chi^*(J^k\pi)$  jet 1-formunun bileşensel yapısı (1.3.2) ile verilsin.  $\omega$  nın  $J^k\pi^1$  genişletilmiş jet demetine birinci mertebeden düşey lift'i,

$$\omega^v = (\omega_{0i})^v dx^{0i} + (\omega_{0\alpha})^v du^{0\alpha} + \sum_{r=1}^k (\omega_{0\alpha}^{ri})^v du_{ri}^{0\alpha}$$

dir.

**Sonuç 1.3.7.**  $Sp\{dx^{0i}, du^{0\alpha}, du_{ri}^{0\alpha} : 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi)$  olmak üzere,

$$(dx^{0i})^v = dx^{0i}, \quad (du^{0\alpha})^v = du^{0\alpha}, \quad (du_{ri}^{0\alpha})^v = du_{ri}^{0\alpha}$$

olup,  $Sp\{dx^{si}, du^{s\alpha}, du_{ri}^{s\alpha} : 0 \leq s \leq 1, 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi^1)$  dir.

**Tanım 1.3.17.**  $J^k\pi$  demeti üzerinde tanımlı bir jet 1-form  $\omega$  olsun. O zaman;

$$\omega^{vv} : \chi(J^k\pi^2) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R})$$

$\omega^{vv}(X^\alpha) = (\omega X)^\alpha$ ,  $\forall X \in \chi(J^k\pi)$  eşitliği ile tanımlı  $\omega^{vv}$ ,  $J^k\pi^2$  demeti üzerinde tanımlı bir 1-form olup, bu  $\omega^{vv}$  1-formuna  $\omega$  nın  $J^k\pi^2$  ye *ikinci mertebeden düşey lift*'i denir.  $\omega^{vv}$  kısaca  $\omega^{v^2}$  ile gösterilir.

**Teorem 1.3.8.**  $\omega \in \chi^*(J^k\pi)$  jet 1-formunun bileşensel yapısı (1.3.2) ile verilsin.  $\omega$  nın  $J^k\pi^2$  demetine ikinci mertebeden düşey lift'i

$$\omega^{vv} = (\omega_{0i})^{vv} dx^{0i} + (\omega_{0\alpha})^{vv} du^{0\alpha} + \sum_{r=1}^k (\omega_{0\alpha}^{ri})^{vv} du_{ri}^{0\alpha}$$

dir.

**Sonuç 1.3.8.**  $Sp\{dx^{0i}, du^{0\alpha}, du_{ri}^{0\alpha} : 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi)$  olmak üzere,

$$(dx^{0i})^{vv} = dx^{0i}, \quad (du^{0\alpha})^{vv} = du^{0\alpha}, \quad (du_{ri}^{0\alpha})^{vv} = du_{ri}^{0\alpha}$$

olup,  $Sp\{dx^{si}, du^{s\alpha}, du_{ri}^{s\alpha} : 0 \leq s \leq 2, 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi^2)$  dir.

Benzer düşünce ile, 1-formların düşey lift'i ile ilgili yukarıda verilen tanımlar aşağıdaki gibi genelleştirilebilir.

**Tanım 1.3.18.**  $J^k\pi$  demeti üzerinde tanımlı jet 1-form  $\omega$  olsun. O zaman;

$$\omega^{v^m} : \chi(J^k\pi^m) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^m, \mathbb{R})$$

$\omega^{v^m}(X^{c^m}) = (\omega X)^{v^m}$ ,  $\forall X \in \chi(J^k\pi)$  eşitliği ile tanımlı  $\omega^{v^m}$ ,  $J^k\pi^m$  üzerinde tanımlı bir 1-form olup, bu  $\omega^{v^m}$  1-formuna,  $\omega$  nın  $J^k\pi^m$  ye *m. mertebeden düşey lift'i* denir.

**Teorem 1.3.9.**  $\omega \in \chi^*(J^k\pi)$  jet 1-formunun bileşensel yapısı (1.3.2) ile verilsin.  $\omega$  nın  $J^k\pi^m$  genişletilmiş jet demetine *m. mertebeden düşey lift'i*

$$\omega^{v^m} = (\omega_{0i})^{v^m} dx^{0i} + (\omega_{0\alpha})^{v^m} du^{0\alpha} + \sum_{r=1}^k (\omega_{0\alpha}^{ri})^{v^m} du_{ri}^{0\alpha}$$

dir.

**Sonuç 1.3.9.**  $Sp\{dx^{0i}, du^{0\alpha}, du_{ri}^{0\alpha} : 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi)$  olmak üzere,

$$(dx^{0i})^{v^m} = dx^{0i}, (du^{0\alpha})^{v^m} = du^{0\alpha}, (du_{ri}^{0\alpha})^{v^m} = du_{ri}^{0\alpha}$$

olup,  $Sp\{dx^{si}, du^{s\alpha}, du_{ri}^{s\alpha} : 0 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi^m)$  dir.

**Tanım 1.3.19.**  $J^k\pi$  demeti üzerinde tanımlı bir jet 1-form,  $\omega$  olsun.

$$\omega^c : \chi(J^k\pi^1) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^1, \mathbb{R})$$

$\omega^c(X^c) = (\omega X)^c$ ,  $\forall X \in \chi(J^k\pi)$  eşitliği ile tanımlı  $\omega^c$ ,  $J^k\pi^1$  demeti üzerinde tanımlı bir 1-form olup, bu  $\omega^c$  1-formuna,  $\omega$  nın  $J^k\pi^1$  e *birinci mertebeden tam lift'i* denir.

**Teorem 1.3.10.**  $\omega \in \chi^*(J^k\pi)$  jet 1-formunun bileşensel yapısı (1.3.2) ile verilsin.  $\omega$  nın  $J^k\pi^1$  genişletilmiş jet demetine tam lift'i

$$\begin{aligned}\omega^c &= (\omega_{0i})^c dx^{0i} + (\omega_{0\alpha})^c du^{0\alpha} + \sum_{r=1}^k (\omega_{0\alpha}^{ri})^c du_{ri}^{0\alpha} + (\omega_{0i})^v dx^{1i} \\ &+ (\omega_{0\alpha})^v du^{1\alpha} + \sum_{r=1}^k (\omega_{0\alpha}^{ri})^v du_{ri}^{1\alpha}\end{aligned}$$

dir.

**Sonuç 1.3.10.**  $Sp\{dx^{0i}, du^{0\alpha}, du_{ri}^{0\alpha} : 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi)$  olmak üzere,

$$(dx^{0i})^c = dx^{1i}, \quad (du^{0\alpha})^c = du^{1\alpha}, \quad (du_{ri}^{0\alpha})^c = du_{ri}^{1\alpha}$$

olup,  $Sp\{dx^{si}, du^{s\alpha}, du_{ri}^{s\alpha} : 0 \leq s \leq 1, 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi^1)$  dir.

**Tanım 1.3.20.**  $J^k\pi$  demeti üzerinde tanımlı bir jet 1-form  $\omega$  olsun.

$$\omega^{cc} : \chi(J^k\pi^2) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^2, \mathbb{R})$$

$\omega^{cc}(X^{cc}) = (\omega X)^{cc}$ ,  $\forall X \in \chi(J^k\pi)$  eşitliği ile tanımlı  $\omega^{cc}$ ,  $J^k\pi^2$  üzerinde tanımlı bir 1-form olup, bu  $\omega^{cc}$  1-formuna  $\omega$  nın  $J^k\pi^2$  ye *ikinci mertebeden tam lift*'i denir.  $\omega^{cc}$  kısaca  $\omega^{c^2}$  ile gösterilir.

**Teorem 1.3.11.**  $\omega \in \chi^*(J^k\pi)$  jet 1-formunun bileşensel yapısı (1.3.2) ile verilsin.  $\omega$  nın  $J^k\pi^2$  demetine tam lift'i

$$\begin{aligned}\omega^{c^2} &= (\omega_{0i})^{cc} dx^{0i} + (\omega_{0\alpha})^{cc} du^{0\alpha} + \sum_{r=1}^k (w_{0\alpha}^{ri})^{cc} du_{ri}^{0\alpha} \\ &+ 2(\omega_{0i})^{cv} dx^{1i} + 2(\omega_{0\alpha})^{cv} du^{1\alpha} + 2 \sum_{r=1}^k (\omega_{0\alpha}^{ri})^{cv} du_{ri}^{1\alpha} \\ &+ (\omega_{0i})^{vv} dx^{2i} + (\omega_{0\alpha})^{vv} du^{2\alpha} + (w_{0\alpha}^{ri})^{vv} du_{ri}^{2\alpha}\end{aligned}$$

dir.

**Sonuç 1.3.11.**  $Sp\{dx^{0i}, du^{0\alpha}, du_{ri}^{0\alpha} : 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi)$  olmak üzere,

$$(dx^{0i})^{v^{2-s}c^s} = dx^{si}, \quad (du^{0\alpha})^{v^{2-s}c^s} = du^{s\alpha}, \quad (du_{ri}^{0\alpha})^{v^{2-s}c^s} = du_{ri}^{s\alpha}$$

olup,  $Sp\{dx^{si}, du^{s\alpha}, du_{ri}^{s\alpha} : 0 \leq s \leq 2, 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi^2)$  dir.

Benzer düşünceyle, 1 -formların tam lift'i ile ilgili yukarıda verilen tanımlar aşağıdaki gibi genelleştirilir.

**Tanım 1.3.21.**  $J^k\pi$  demeti üzerinde tanımlı bir jet 1-form  $\omega$  olsun.

$$\omega^{c^m} : \chi(J^k\pi^m) \longrightarrow C^\infty(J^k\pi^m, \mathbb{R})$$

$\omega^{c^m}(X^{c^m}) = (\omega X)^{c^m}$ ,  $\forall X \in \chi(J^k\pi)$  eşitliği ile tanımlı  $\omega^{c^m}$ ,  $J^k\pi^m$  üzerinde tanımlı bir 1-form olup, bu  $\omega^{c^m}$  1-formuna,  $\omega$  nın  $J^k\pi^m$  ye  $m$ . mertebeden tam lift'i denir.

**Teorem 1.3.12.**  $\omega \in \chi^*(J^k\pi)$  jet 1-formunun bileşensel yapısı (1.3.2) ile verilsin.  $\omega$  nın  $J^k\pi^m$  genişletilmiş jet demetine  $m$ . mertebeden tam lift'i

$$\begin{aligned} \omega^{c^m} &= \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (\omega_{0i})^{v^{m-s}c^s} (dx^{0i})^{c^{m-s}v^s} + \binom{m}{s} (\omega_{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} (du^{0\alpha})^{c^{m-s}v^s} \\ &\quad + \binom{m}{s} (\omega_{ri}^{r\alpha})^{v^{m-s}c^s} (du_{ri}^{0\alpha})^{c^{m-s}v^s} \end{aligned}$$

dir.

**Sonuç 1.3.12.**  $Sp\{dx^{0i}, du^{0\alpha}, du_{ri}^{0\alpha} : 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi)$  olmak üzere,

$$(dx^{0i})^{v^{m-s}c^s} = dx^{si}, \quad (du^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} = du^{s\alpha}, \quad (du_{ri}^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} = du_{ri}^{s\alpha}$$

olup,

$$Sp\{dx^{si}, du^{s\alpha}, du_{ri}^{s\alpha} : 0 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq k\} = \chi^*(J^k\pi^m)$$

dir.

**Özellik 1.3.3.**  $\forall \omega, \lambda \in \chi^*(J^k\pi)$  ve  $\forall f \in C^\infty(J^k\pi, \mathbb{R})$  fonksiyonları için,

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad (\omega + \lambda)^{v^m} &= \omega^{v^m} + \lambda^{v^m} \\
 \text{ii)} \quad (\omega + \lambda)^{c^m} &= \omega^{c^m} + \lambda^{c^m} \\
 \text{iii)} \quad (f\omega)^{v^m} &= f^{v^m} \omega^{v^m} \\
 \text{iv)} \quad (f\omega)^{c^m} &= \sum_{s=0}^k \binom{m}{s} f^{v^{m-s}} c^s \omega^{c^{m-s} v^s} \\
 \text{v)} \quad (f\omega)^{c^n v^s} &= \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} f^{v^{n-h} c^h} \omega^{c^{n-h} v^{h+s}}, \quad 0 \leq n, s \leq m \quad (n+s=m)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri vardır.

## 1.4 Euler-Lagrange ve Hamilton Denklemleri

Bu bölümde, ilerideki bölümlerde çalışılacak olan ve klasik mekanikte önemli bir yer tutan Lagrange ve Hamilton formülleri ile ilgili gerekli geometrik yapılar verilecektir.

**Tanım 1.4.1.**  $2m$  boyutlu bir manifold  $M$  ve  $M$  nin tanjant demeti  $TM$  olsun.  $TM$  üzerinde  $J^2 = 0$  eşitliğini sağlayan ve  $\text{rank} J = m$  ile verilen  $TM$  üzerinde (1,1) tipinden  $J$  tensör alanına *yaklaşık tanjant yapı* denir.  $M$  manifoldu üzerinde lokal koordinatlar  $(q^i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  ve  $TM$  üzerinde lokal koordinatlar  $(q^i, v^i)$  olmak üzere  $TM$  üzerinde  $J$  yaklaşık tanjant yapısı,

$$J \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right) = \frac{\partial}{\partial v^i}, \quad J \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right) = 0$$

olarak tanımlanır (De Leon, Rodrigues, 1989).

Yaklaşık tanjant yapı şu şekilde de verilebilir:

$E$ ,  $(k+1) \cdot m$  boyutlu manifold ve  $J : TE \rightarrow TE$  bir endomorfizm olsun.

$$J^{k+1} = 0 \quad \text{ve} \quad \text{rank} J = km$$

ise  $J$  ye  $E$  üzerinde ( $k$ .mertebeden) *yaklaşık tanjant yapı* ve  $(E, J)$  ikilisine de *yaklaşık tanjant manifold* denir (De Leon, Rodrigues, 1986).

**Tanım 1.4.2.**  $m$  boyutlu bir manifold  $M$  ve  $M$  nin tanjant demeti  $TM$  olsun.  $TM$  üzerindeki bir vektör alanına  $M$  üzerinde *Semispray* (ikinci mertebeden diferensiyel denklem) denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

Bir semispray aynı zamanda  $TM$  tanjant demetinin bir kesitidir.  $\xi$  vektör alanı  $M$  üzerinde bir semispray olsun. Bu durumda  $\xi$  lokal olarak,

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

$\xi^i = \xi^i(q^i, v^i) = \dot{v}^i$ ,  $v^i = \dot{q}^i$  ile verilir.

**Tanım 1.4.3.**  $M$  manifoldu üzerinde  $\xi$  bir semispray olmak üzere, bu manifold üzerinde verilen bir  $\sigma$  eğrisi eğer  $\xi$  nin integral eğrisi oluyorsa; bu eğriye  $\xi$  nin bir çözümü (path veya solution) denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.4.**  $J$ ,  $m$  boyutlu  $M$  manifoldunun tanjant demeti üzerinde bir yaklaşık tanjant yapı olsun. Bu durumda  $TM$  üzerinde lokal koordinatlar  $(q^i, v^i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  ve

$$\xi = v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

vektör alanı  $M$  üzerinde semispray olmak üzere

$$V = J\xi = v^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

ile verilen  $V$  vektör alanına Liouville vektör alanı denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Teorem 1.4.1.**  $TM$  üzerinde tanımlı  $\xi$  vektör alanının bir semispray olması için gerek ve yeter şart  $J\xi = V$  olmasıdır (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.5.**  $M$ ,  $m$  boyutlu bir manifold ve  $TM$  tanjant demeti olsun.  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  bir  $C^\infty$ -fonksiyon olmak üzere,  $TM$  üzerindeki  $\phi_L = -dd_J L$  ile tanımlı kapalı 2-formu için  $E_L = VL - L$  eşitliğine  $L$  ile birleşen *enerji fonksiyonu* ve  $L$  ye de  $TM$  tanjant demeti üzerindeki *Lagrange fonksiyonu* denir.  $TM$  ise  $M$  konfigürasyon manifoldunun hız uzayı olarak adlandırılır. (De Leon, Rodrigues, 1989).

Şimdi  $J$  nin adjoint operatörü  $J^*$  ı gözönüne alalım.  $TM$  üzerindeki  $p$ -formların cümlesi  $\wedge^p(TM)$  ve  $TM$  üzerindeki vektör alanlarının cümlesi  $\chi(TM)$  olsun. Bu durumda  $J^*$ ,

$$J^*(f) = f \quad , \quad f \in C^\infty(TM)$$

$$(J^*\omega)(X_1, \dots, X_p) = \omega(JX_1, \dots, JX_p), \quad X_1, \dots, X_p \in \chi(TM), \quad \omega \in \wedge^p(TM)$$

olarak tanımlanır.  $J^*$  lokal olarak,

$$J^*(dq^i) = 0 \quad , \quad J^*(dv^i) = dq^i$$

şeklinde karakterize edilir.

**Tanım 1.4.6.**  $M$  manifoldunun tanjant demeti  $TM$  üzerindeki  $p$  formların cümlesi sırasıyla  $\wedge^p(TM)$  ve vektör alanlarının cümlesi  $\chi(TM)$  olsun.

$$i_J f = 0 \quad , \quad f \in C^\infty(TM)$$

$$i_J f(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, JX_i, \dots, X_p); \quad \omega \in \wedge^p(TM), \quad X_1, \dots, X_p \in \chi(TM)$$

olarak tanımlı  $i_J$  fonksiyonuna *düşey türev* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

Aynı zamanda,

$$i_J(df) = J^*(df) \quad , \quad f \in C^\infty(TM)$$

olup

$$i_J(dq^i) = 0, \quad i_J(dv^i) = dq^i$$

dir.

**Tanım 1.4.7.**  $\omega \in \wedge^p M$ ,

$$\omega = \sum_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

ise  $\omega$   $p$ -formunun diferensiyeli

$$d\omega = \sum_{i_1 \dots i_p} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

şeklinde tanımlı bir  $p + 1$ -formdur.  $d\omega \in \wedge^{p+1} M$  için  $x \in M$  de,

$$d\omega(x) = \sum_{i_1 \dots i_p} (d\omega_{i_1 \dots i_p})(x) \wedge dx^{i_1}(x) \wedge \dots \wedge dx^{i_p}(x)$$

şeklinde değer alır (Kobayashi, Nomizu, 1963).

**Tanım 1.4.8.**  $M$  manifoldunun tanjant demeti  $TM$  üzerindeki  $p$  ve  $p + 1$  formların cümlesi sırasıyla  $\wedge^p(TM)$  ve  $\wedge^{p+1}(TM)$  olsun.

$d_j : \wedge^p(TM) \longrightarrow \wedge^{p+1}(TM)$ ,  $d_j = [i_j d, d] = i_j d - d i_j$  ile tanımlanan  $TM$  üzerindeki  $d_j$  fonksiyonuna *düşey diferensiyel* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.9.**  $\forall X \in \chi(M)$  vektör alanı ile bir  $\omega$   $p$ -formunun  $i_X \omega$  iç çarpımı aşağıdaki şartları sağlayan bir  $(p - 1)$  - formdur;

- i)  $i_X \omega = 0$  eğer  $p = 0$
- ii)  $i_X \omega = \omega(X)$  eğer  $p = 1$
- iii)  $i_X \omega(Y_1, \dots, Y_{p-1}) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_{p-1})$   $Y_1, \dots, Y_{p-1} \in \chi(M)$

bu durumda  $i_X \omega \in \wedge^{p-1}(M)$  olur (DeLeon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.10.**  $M$ ,  $m$ -boyutlu bir manifold ve  $M$  nin  $TM$  tanjant demeti üzerinde  $\phi$  bir 2-form olsun. Eğer  $\phi$  maksimal ranklı bir kapalı 2-form

ise,  $(M, \phi)$  ikilisine *simplektik manifold* denir. Burada maksimal ranklı  $\phi$  2-formuna da *simplektik* adı verilir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Sonuç 1.4.1.**  $TM$  üzerinde  $\phi_L = -dd_JL$  kapalı 2-form olmak üzere, eğer  $\phi_L$  simplektik ise, bu durumda  $L:TM \rightarrow \mathbb{R}$  Lagrange fonksiyonu regülerdir (veya non-dejeneredir) (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.11.**  $(M, \phi)$  simplektik manifold olmak üzere;  $L$  regüler Lagrange fonksiyonuna karşılık gelen  $E_L$  enerji fonksiyonuna *Hamilton enerji fonksiyonu* (veya Hamilton fonksiyonu) denir ve bu fonksiyon  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  ile gösterilir (De Leon, Rodrigues, 1985).

Şimdi,

$$M_\phi : X \in \chi(M) \rightarrow M_\phi(X) = i_X\omega \in \wedge^1(M)$$

izomorfizimini gözöntüne alalım. Burada  $i_X\omega$ ,  $X$  vektör alanı ve  $\omega$  2-formunun iç çarpımıdır.

**Tanım 1.4.12.**  $(M, \phi)$  simplektik manifold, kooordinatları ise  $(q^i, p_i)$  olsun.  $M$  üzerinde

$$X_H = M_\phi^{-1}(dH) = \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \frac{\partial}{\partial q^i} - \left( \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \frac{\partial}{\partial p_i}$$

olarak tanımlı vektör alanına Hamilton vektör alanı denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.13.**  $TM$  tanjant demeti üzerinde  $\phi_L = -dd_JL$  kapalı 2-form,  $E_L$  enerji fonksiyonu,  $\xi$  bir semispray olmak üzere;  $i_\xi\phi_L = dE_L$  denkleminde Lagrange sistemleri için dinamik denklemini denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.14.**  $(M, \phi)$  simplektik manifoldu üzerinde  $H$  Hamilton enerji fonksiyonu,  $X_H$  Hamilton vektör alanı olmak üzere;  $i_{X_H}\phi = dH$  denkleminde

Hamilton sistemleri için dinamik denklemi yada Hamilton sistemlerinin simplektik (esas) formu denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Teorem 1.4.2.**  $i_{\xi}\phi_L = dE_L$  denklemini sağlayan bir tek  $\xi$  vektör alanı vardır (De Leon, Rodrigues, 1985).

**Tanım 1.4.15.**  $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$  Lagrange fonksiyonu olsun.  $i_{\xi}\phi_L = dE_L$  denklemini sağlayan bir tek  $\xi$  semisprayine  $L$  için *Euler - Lagrange vektör alanı* denir ve  $\xi_L$  ile gösterilir.  $(M, \phi_L, E_L)$  üçlüsüne de *Lagrange sistem* adı verilir (De Leon, Rodrigues, 1989).

$\xi_L$  lokal olarak,

$$\xi_L = v^i \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right) + \xi^i \left( \frac{\partial}{\partial v^i} \right)$$

$\xi^i = \xi^i(q^i, v^i)$  olarak ifade edilir.

**Tanım 1.4.16.** Bir  $M$  manifoldunun  $TM$  tanjant demeti üzerinde lokal koordinatlar  $(q^i, v^i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  olsun.  $i_{\xi_L}\phi_L = dE_L$  eşitliğinden,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad \dot{q}^i = v^i \quad (1.4.1)$$

denklemini elde edilir. (1.4.1) ile verilen denkleme *Euler - Lagrange denklemi* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.17.**  $M$ ,  $m$ -boyutlu bir manifold,  $M$  nin kotanjant demeti  $T^*M$  ve  $\pi_M : T^*M \rightarrow M$  kanonik projeksiyon olsun.  $M$  nin koordinatları  $(q^i)$  ve  $T^*M$  nin uyarlanmış koordinatları  $(q^i, p_i)$  olarak verilsin.

$$\lambda_M(p)(X) = \langle T\pi_M(X), p \rangle, \quad X \in T_p(T^*M), \quad p \in T^*M$$

şeklinde tanımlı  $\lambda_M$ ,  $T^*M$  üzerinde bir (kanonik) 1-form olup

$$\lambda_M = p_i dq^i$$

ile ifade edilir.  $\lambda_M$  ye *Liouville form* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

$\lambda_M$ ,  $T^*M$  üzerinde bir Liouville form ise, bu durumda  $T^*M$  üzerinde tanımlı

$$\phi_M = -d\lambda_M = dq^i \wedge dp_i$$

simplektik formu *kanonik simplektik form* olarak bilinir.

**Tanım 1.4.18.**  $(M, \emptyset)$  simplektik manifold ve  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M$  üzerinde tanımlı Hamilton fonksiyonu olsun.  $i_{X_H}\phi = dH$  denklemini sağlayan bir tek  $X_H$  vektör alanına,  $H$  Hamilton enerji fonksiyonu ile birleşen *Hamilton vektör alanı* denir.  $(M, \phi, X_H)$  veya  $(M, \phi, H)$  üçlüsüne de Hamilton sistemi adı verilir.

**Tanım 1.4.19.**  $(M, \emptyset)$  simplektik manifoldu üzerindeki uyarlanmış koordinatlar  $(q^i, p_i)$  olsun.  $i_{X_H}\phi = dH$  simplektik formu kullanılarak,

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad (1.4.2)$$

denklemleri elde edilir. (1.4.2) ile verilen denklemlere *Hamilton denklemleri* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

Şimdi, yukarıda verilen tanım ve teoremlerin zamana bağlı Euler-Lagrange ve Hamilton sistemlerdeki karşılıkları aşağıdaki tanım ve teoremlerle ifade edilecektir.

Zamana bağlı Lagrange sistemleri oluşturmak için jet manifoldlardan yararlanılacaktır.  $M$ ,  $m$ -boyutlu bir manifold ve  $(E = M \times \mathbb{R}, \rho, \mathbb{R})$  bir trivial demet olsun.  $M$  nin koordinatları  $(q^i)$ ,  $1 \leq i \leq m$  ve  $\mathbb{R}$  Öklid uzayının koordinatı  $(t)$  olarak verilsin. Önceki bölümde jetler kesitler üzerinde tanımlanmıştı, bu kısımda ise jetler dönüşümler üzerinde verilecektir.

$\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$  dönüşümlerinin  $0 \in \mathbb{R}$  orjin noktasındaki birinci jetlerin cümlesi olan  $J_0^1(\mathbb{R}, M)$ , aynı zamanda  $M$  manifoldunun hız uzayıdır. O halde,

$J_0^1(\mathbb{R}, M)$  ile  $TM$  özdeşdir.  $J^1(\mathbb{R}, M)$  birinci jet manifoldu  $M$  nin değişim uzayıdır.  $J^1(\mathbb{R}, M)$  de  $\mathbb{R} \times TM$  ile izomorftur.  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eğrisinin  $t$  noktasındaki birinci jetleri  $j_t^1\sigma$  ve  $\sigma$  nın  $\sigma(t)$  noktasındaki tanjant vektörü  $\dot{\sigma}(t)$  olsun.

$$j_t^1\sigma \rightarrow (t, \dot{\sigma}(t))$$

dönüşümü ile bu izomorfizm verilir. Böylece,  $(E, \rho, \mathbb{R})$  trivial demet ise  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$  dönüşümlerinin ve  $(E, \rho, \mathbb{R})$  demetinin  $k$ -jetleri özdeşleştirilebilir.  $\sigma$  eğrisinin  $t$  noktasında birinci jetleri  $j_t^1\sigma$  olmak üzere, birinci jetlerin cümlesi olan birinci jet manifold  $J^1(\mathbb{R}, M)$  ile gösterilir, koordinatları ise  $(t, q^i, v^i)$ ,  $v^i = \dot{q}^i$  dir.

$J^1(\mathbb{R}, M)$  üzerinde zamana bağlı Lagrange fonksiyonu

$L : J^1(\mathbb{R}, M) \rightarrow \mathbb{R}$  şeklinde tanımlı bir  $C^\infty$ -dönüşümüdür.

Böylece,  $J^1(\mathbb{R}, M)$  üzerinde  $(\tilde{J})^2 = 0$  eşitliğini sağlayan ve  $\text{rank} \tilde{J} = m$  ile verilen  $(1, 1)$  tipinden  $\tilde{J}$  tensör alanı zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı olur (De Leon, Rodrigues, 1989).

Ayrıca,  $V$  bir Liouville vektör alanı olmak üzere,

$$\tilde{J} = J - V \otimes dt$$

eşitliği ile verilen  $\tilde{J}$  yaklaşık tanjant yapısı,

$$\tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -V \quad , \quad \tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial}{\partial v^i} \quad , \quad \tilde{J}\left(\frac{\partial}{\partial v^i}\right) = 0$$

şeklinde tanımlanır.

Zamana bağlı durumda,  $\wedge(J^1(\mathbb{R}, M))$  üzerinde  $\tilde{J}$  ile birleşen  $i_{\tilde{J}}$  ve  $d_{\tilde{J}}$  operatörleri,

$$i_{\tilde{J}}\omega(X_1, \dots, X_p) = \sum_{i=1}^p \omega(X_1, \dots, \tilde{J}X_i, \dots, X_p)$$

$$d_{\tilde{J}} = [i_{\tilde{J}}, d] = i_{\tilde{J}}d - di_{\tilde{J}}$$

olarak ifade edilir.

Ayrıca,  $\pi_1 : J^1(\mathbb{R}, M) \rightarrow \mathbb{R}$  kanonik projeksiyonu  $\pi_1(j_t^1\sigma) = t$  olarak tanımlıdır.

$M$  manifoldu üzerinde bir  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow M$  eğrisinin *birinci jet prolongasyonu*,  $(J^1(\mathbb{R}, M), \pi_1, \mathbb{R})$  lifli manifoldunun  $j^1\sigma$  ile gösterilen bir kesitidir. Bu kesit,

$$j^1\sigma : t \in \mathbb{R} \rightarrow (j_t^1\sigma)(t) = j_t^1\sigma \in J^1(\mathbb{R}, M)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca,  $j^1\sigma, J^1(\mathbb{R}, M)$  de bir eğridir (De Leon, Rodrigues, 1989).

$\pi_1$  demetinin bir  $\mu$  kesiti,  $M$  manifoldu üzerinde bir eğrinin kanonik prolongasyonu ise, bu durumda  $\theta^i = dq^i - v^i dt$ ,  $1 \leq i \leq m$ ,  $\theta^i \in \wedge^1(J^1(\mathbb{R}, M))$  olmak üzere  $\mu^*\theta^i = 0$  dir. Böylece,  $\mu$  *holonomik* olarak adlandırılır.

**Tanım 1.4.20.** İntegral eğrileri holonomik olan  $J^1(\mathbb{R}, M)$  üzerinde tanımlı bir vektör alanına bir *semispray* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Teorem 1.4.3.**  $J^1(\mathbb{R}, M)$  üzerinde bir  $\xi$  vektör alanının semispray olması için gerek ve yeter şart  $J\xi = V$ ,  $\tilde{J}\xi = 0$  olmasıdır (De Leon, Rodrigues, 1989).

Bu durumda zamana bağlı  $\xi$  semisprayi lokal olarak,

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial v^i}$$

$\xi^i = \xi^i(t, q^i, v^i)$ ,  $v^i = \dot{q}^i$ ,  $1 \leq i \leq m$  şeklinde ifade edilir.

**Tanım 1.4.21.**  $\xi, J^1(\mathbb{R}, M)$  üzerinde bir semispray olsun.  $M$  de bir  $\sigma$  eğrisine, eğer kanonik prolongasyonu  $\xi$  nin bir integral eğrisi ise  $\xi$  nin bir *çözümü* (veya path'i) denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

$M$  üzerinde ki  $\sigma$  eğrisi  $(q^i(t))$  olarak tanımlansın. Birinci jetler,  $(t, q^i(t), \left(\frac{dq^i}{dt}\right)(t))$  olmak üzere,  $\sigma$  nun  $\xi$  nin bir çözümü olması için gerek

ve yeter şart

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} = \xi^i \left( t, q^i, \frac{dq^i}{dt} \right), \quad 1 \leq i \leq m$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemini sağlamasıdır.

**Tanım 1.4.22.**  $L : J^1(\mathbb{R}, M) \longrightarrow \mathbb{R}$  zamana bağlı Lagrange fonksiyonu olsun.  $J^1(\mathbb{R}, M)$  üzerinde,

$$\alpha_L = d\tilde{J}L + Ldt$$

1-formuna *Poincare - Cartan 1-formu* ve

$$\Omega_L = dd\tilde{J}L + dL \wedge dt$$

2-formuna *Poincare - Cartan 2-formu* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.23.**  $J^1(\mathbb{R}, M)$  jet manifoldu üzerinde,

$$i_{\xi_L} \Omega_L = 0, \quad i_{\xi_L} dt = 1 \quad (1.4.3)$$

denklemlerini sağlayan bir tek  $\xi_L$  vektör alanına *zamana bağlı*

*Euler - Lagrange vektör alanı* ve  $(J^1(\mathbb{R}, M), \Omega_L, \xi_L)$  üçlüsüne de *zamana bağlı Lagrange sistemi* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Teorem 1.4.4.**  $L$  zamana bağlı Lagrange fonksiyonu,  $\xi_L$  (1.4.3) ile verilen bir vektör alanı olsun.  $\xi_L, J^1(\mathbb{R}, M)$  üzerinde integral eğrileri Euler- Lagrange denklemlerinin çözümleri olan bir semispraydır (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.24.**  $J^1(\mathbb{R}, M)$  jet manifoldu üzerinde  $\xi_L$  zamana bağlı bir Euler - Lagrange vektör alanı olmak üzere, (1.4.3) eşitliklerinden,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad (1.4.4)$$

denklemleri elde edilir. (1.4.4) ile verilen denklemlere *zamana bağlı Euler - Lagrange denklemleri* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

Zamana bağlı Hamilton sistemler aşağıdaki şekilde ifade edilecektir.

$(M, \phi)$  bir simplektik manifold,  $\mathbb{R}$  Öklid uzayı olmak üzere,  $\mathbb{R} \times M$  çarpım manifoldu üzerinde  $p_M : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  kanonik projeksiyonu

$$p_M(t, x) = x$$

olarak tanımlansın. Böylece,  $\mathbb{R} \times M$  üzerinde bir kapalı 2-form

$$\phi' = (p_M)^* \phi$$

şeklinde ifade edilecektir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.25.**  $(M, \phi)$  bir simplektik manifold ve  $\mathbb{R} \times M$  üzerinde tanımlı bir Hamilton fonksiyonu  $H : \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda  $\forall t \in \mathbb{R}$  için  $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $H_t(x) = H(t, x)$  olarak tanımlanan fonksiyona *zamana bağlı Hamilton enerji fonksiyonu* (veya Hamilton fonksiyonu) denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.26.**  $(M, \phi)$  bir simplektik manifold ve  $\mathbb{R} \times M$  üzerinde bir vektör alanı  $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$  olsun.  $\forall t \in \mathbb{R}$  için  $X_t : M \rightarrow TM$ ,  $X_t(x) = X(t, x) \in T_x M$ ,  $x \in M$  olarak tanımlanan  $X_t$  vektör alanına *zamana bağlı vektör alanı* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

**Tanım 1.4.27.**  $(M, \phi)$  bir simplektik manifold olsun. Bu durumda  $M$  üzerinde,  $i_{X_{H_t}} \phi = dH_t$  denklemini sağlayan  $X_{H_t}$  vektör alanına *zamana bağlı Hamilton vektör alanı* ve  $(M, \phi, X_{H_t})$  üçlüsüne de *zamana bağlı Hamilton sistemi* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

Böylece;  $X_{H_t}$  lokal olarak,

$$\begin{aligned} X_{H_t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H_t}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H_t}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir.

$M$  manifoldunun koordinatları  $(q^i, p_i)$  ve  $\phi$  2-formu,  $\phi = dq^i \wedge dp_i$  ise  $\phi'$  2-formunun lokal ifadesi de aynı şekilde verilecektir. Yani,  $\phi' = dq^i \wedge dp_i$  dir.

$\sigma : I = (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R} \times M$ ,  $\epsilon > 0$  için  $X_{H_t}$  vektör alanının bir integral eğrisi olsun. Böylece,

$$\sigma(t) = (t, q^i(t), p_i(t))$$

ve ayrıca  $\sigma$ ,  $X_{H_t}$  nin bir integral eğrisi olduğunda

$$\dot{\sigma}(t) = X_{H_t}(\sigma(t)) = \frac{\partial}{\partial t} + X_t(q^i(t), p_i(t))$$

olur.

**Tanım 1.4.28.**  $X_{H_t}$  zamana bağlı bir Hamilton vektör alanı ve  $\sigma$ ,  $X_{H_t}$  nin bir integral eğrisi olsun. Bu durumda  $i_{X_{H_t}}\phi = dH_t$  simplektik formu kullanılarak elde edilen

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad 1 \leq i \leq m \quad (1.4.5)$$

denklemlerine,  $(M, \phi)$  simplektik manifoldu üzerinde tanımlı *zamana bağlı Hamilton denklemleri* denir (De Leon, Rodrigues, 1989).

## Bölüm 2

# GENİŞLETİLMİŞ JET DEMETLERİ ÜZERİNDE EULER - LAGRANGE DENKLEMLERİ

Bu bölümde, öncelikle  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde Euler - Lagrange denklemi elde edilmiş ve bu denklem lift teori kullanılarak genişletilmiş jet demetleri üzerine taşınmıştır. Daha sonra; benzer bir uygulama ile, genişletilmiş jet demetleri üzerinde zamana bağlı olan Euler - Lagrange denklemleri elde edilmiştir.

### 2.1 $J^k\pi$ Üzerinde Euler-Lagrange Denklemi

Bu kısımda,  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde gerekli tanım ve teoremler verilerek Euler - Lagrange formülü ve denklemi elde edilecektir.

**Tanım 2.1.1.**

$k \in \mathbb{Z}$  için  $J^k\pi$ ,  $\pi$  demeti üzerinde,  $m + n + \frac{1}{k!}m(m+1)\dots(m+k-1)n$  boyutlu  $k$ . jet manifold olmak üzere,

$$i) \text{rank} J = \frac{1}{k!}m(m+1)\dots(m+k-1)n$$

$$ii) J^{k+1} = 0$$

şartlarını sağlayan (1,1) tipinden  $J$  tensör alanına  $J^k\pi$  üzerinde bir *yaklaşık tanjant yapı* denir.

Böylece,  $J^k\pi$  üzerindeki  $J$  tensör alanı lokal olarak,

$$J = \sum_{r=0}^{k-1} (du_{ri}^{0\alpha} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} dx^{0i}) \otimes \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \quad (2.1.1)$$

şeklinde verilir. Ayrıca,  $J$  tensör alanı

$$\begin{aligned} J \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right) &= - \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \\ J \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, k-1 \\ J \left( \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$J^k\pi$   $k$ . jet manifoldu üzerinde uyarlanmış koordinatlar  $(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha})$  olmak üzere;  $J\xi = 0$  ile verilen  $\xi$  vektör alanı bir *semispray* olup, lokal ifadesi,

$$\xi = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \quad (2.1.2)$$

$1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n, \xi^i = \xi^i(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}), r = 0, 1, \dots, k$  olarak tanımlıdır.

Ayrıca,  $L : J^k\pi \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $J^k\pi$  üzerinde bir Lagrange fonksiyonu ve  $J, J^k\pi$  manifoldu üzerinde bir yaklaşık tanjant yapı olmak üzere,

$$J \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right) = - \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}}$$

ifadesi  $J\left(\frac{\partial}{\partial x^{0i}}\right) = -V$  eşitliği ile gösterilirse, bu durumda

$$V = \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \quad (2.1.3)$$

vektör alanı,  $J^k\pi$  üzerinde *Liouville vektör alanı* olur.

L, Lagrange fonksiyonuna bağlı enerji fonksiyonu  $E_L = VL - L$  şeklinde olup,

$$E_L = \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - L$$

ile ifade edilir.

**Tanım 2.1.2.**  $J^k\pi$ , k. jet manifoldu üzerinde,

$$\alpha_L = d_J L + L dx^{0i}$$

1-formuna *Poincare - Cartan 1-formu* ve

$$\Omega_L = dd_J L + dL \wedge dx^{0i}$$

2-formuna *Poincare - Cartan 2-formu* denir.

Poincare - Cartan 1-formu lokal koordinatlarda

$$\begin{aligned} \alpha_L &= d_J L + L dx^{0i} \\ &= -\sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{0i} + \frac{\partial L}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} + L dx^{0i} \end{aligned}$$

eşitliği ile ifade edilir. Böylece Poincare - Cartan 2-formu,

$$\begin{aligned} \Omega_L &= d \left( -\sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{0i} + \frac{\partial L}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \right) \\ &+ \left( \frac{\partial L}{\partial x^{0i}} dx^{0i} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial L}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} + \frac{\partial L}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} \right) \wedge dx^{0i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= -\sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0j} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{0j} \wedge dx^{0i} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{0i} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad - \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \wedge dx^{0i} - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\partial L}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \wedge dx^{0i} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\beta} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\beta} \wedge du_{ri}^{0\alpha} - \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} \wedge dx^{0i} \\
&\quad - \frac{\partial L}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} \wedge dx^{0i} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} + \frac{\partial L}{\partial x^{0j}} dx^{0j} \wedge dx^{0i} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial L}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \wedge dx^{0i} + \frac{\partial L}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} \wedge dx^{0i} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0j} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial x^{0j}} \right) dx^{0i} \wedge dx^{0j} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{0i} \wedge du_{ki}^{0\alpha} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\beta} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\beta} \wedge du_{ri}^{0\alpha} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha}
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

biçiminde elde edilir.

Ayrıca;  $(\Omega_L, dx^{0i})$  de,  $J^k\pi$  üzerinde bir yaklaşık yapı olup, *kosimplektik yapı* olarak bilinir.

**Tanım 2.1.3.**  $\xi$ ,  $J^k\pi$  de bir semispray olmak üzere, eğer  $E$  de bir  $\sigma$  eğrisinin kanonik prolongasyonu  $\xi$  nin bir integral eğrisi ise, bu durumda  $\sigma$  nun prolongasyonuna  $\xi$  nin bir *çözümü* denir.

Yukarıdaki tanımı gerçekleyen  $E$  deki bir  $\sigma$  eğrisi lokal olarak  $(u^{0\alpha}(t))$  ile verilsin. Böylece  $\sigma$  nun  $k$ . jeti,

$$(J^k\sigma)(t) = (x^{0i}(t), u^{0\alpha}(t), u_{ri}^{0\alpha}(t)), r = 1, 2, \dots, k$$

olup;  $\sigma$  nun  $\xi$  nin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^{k+1}u^{0\alpha}}{dx^{0i^{k+1}}} = \frac{du_{ki}^{0\alpha}}{dx^{0i}} = \xi^{0i}(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}), r = 1, 2, \dots, k, 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n,$$

( $k+1$ ). mertebeden diferensiyel denklemi gerçeklemesidir.

$\Omega_L$  Poincare - Cartan 2-formu olduğunda,  $J^k\pi$  üzerinde,

$$i_{\xi_L}\Omega_L = 0, i_{\xi_L}dx^{0i} = 1 \quad (2.1.5)$$

denklemlerini sağlayan bir tek  $\xi_L$  vektör alanı vardır. Bu durumda  $\xi_L$  bir semispray olup, aynı zamanda  $J^k\pi$  üzerinde bir *Euler - Lagrange vektör alanı*dır.

Eğer,  $i_{\xi_L}dx^{0i} = 1$  ise, o zaman  $\xi_L$  lokal olarak;

$$\xi_L = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}}$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\xi_L$  aynı zamanda  $i_{\xi_L}\Omega_L = 0$  eşitliğini sağladığı için, (2.1.4) ifadesinden,

$$\begin{aligned} i_{\xi_L}\Omega_L &= \Omega_L(\xi_L) \\ &= \Omega_L\left(\frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ \left( \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial x^{0i}} \right) - \left( \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0j} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial x^{0j}} \right) \right. \\
&\quad - \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} \right) \\
&\quad \left. - \xi^{0i} \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] dx^{0i} + \left[ \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\beta} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\beta} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\beta}} + \xi^{0i} \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] du_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad + \left[ \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] du_{ki}^{0\alpha}
\end{aligned}$$

bulunur ve  $i_{\xi_L} \Omega_L = 0$  olduğundan,

- 1)  $\sum_{r=0}^{k-1} \left( X_{ri}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} \right) + \xi^{0i} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) = 0$
- 2)  $\sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} \right) = 0$
- 3)  $\sum_{r=0}^{k-1} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$

eşitlikleri elde edilir. 3) denkleminde  $\forall r = 0, 1, \dots, k-1$  için

$\frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \neq 0$  olduğundan  $u_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} = 0$  yani  $X_{ri}^{0\alpha} = u_{(r+1)i}^{0\alpha}$  olur.

Buradan,

$$1) \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} \right) = 0$$

$$2) \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} \right) = 0$$

şeklinde düzenlenir. 2) denklemindeki ifade kullanılarak 1) denklemini

$$u_{(r+1)i}^{0\alpha} \cdot 0 = 0$$

olur. Buradan,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} = 0 \quad (2.1.6)$$

denkleminde ulaşılır. Böylece  $\xi_L$  Euler-Lagrange vektör alanı,

$$\xi_L = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \quad (2.1.7)$$

olarak elde edilir.

Eğer  $\sigma$ ,  $\xi_L$  nin bir çözümünü ise, bu durumda (2.1.6) denklemini,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \left( \frac{du_{ri}^{0\alpha}}{dx^{0i}} \right) \left( \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) + \left( \frac{du_{ki}^{0\alpha}}{dx^{0i}} \right) \left( \frac{\partial^2 L}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} = 0$$

biçiminde ifade edilir. Bu denkleme  $J^k\pi$  üzerinde *Euler - Lagrange denklemini* denir.

$M$  de  $\frac{\partial}{\partial x^{0i}}$  vektör alanının  $J^k\pi$  deki görüntüsü,

$$\frac{d}{dx^{0i}} = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{du_{ri}^{0\alpha}}{dx^{0i}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \left( \frac{du_{ki}^{0\alpha}}{dx^{0i}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}}$$

olarak ifade edilir.

$$\xi^{0i} = \frac{d^{k+1}u^{0\alpha}}{dx^{0i}{}^{k+1}} = \frac{du_{ki}^{0\alpha}}{dx^{0i}} = u_{(k+1)i}^{0\alpha}$$

olduğundan burada,

$$\frac{d}{dx^{0i}} = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \quad (2.1.8)$$

olarak alınacaktır. Bundan dolayı  $J^k\pi$  üzerinde Euler - Lagrange denklemi;

$$\frac{d}{dx^{0i}} \left( \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial L}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} = 0$$

ya da,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{d}{dx^{0i}} \left( \frac{\partial L}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^{0\alpha}} = 0 \quad (2.1.9)$$

ifadesine sahiptir. Bu çalışmada, kısalık için  $J^k\pi$  üzerinde Euler - Lagrange denklemi (2.1.9) denklemi ile temsil edilecektir.

**Sonuç 2.1.1.**  $J^k\pi$  manifoldu üzerinde verilen bir  $\xi$  semisprayının çözümleri aynı zamanda Euler - Lagrange denkleminin çözümleridir.

## 2.2 Euler - Lagrange Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Düşey Lift'leri

Bu kısımda,  $J^k\pi$ , k.jet manifoldu üzerinde elde edilen Euler - Lagrange denklemlerinin  $J^k\pi^m$  m. genişletilmiş jet demeti üzerine m. mertebeden düşey lift'leri elde edilmiş olup, bu geometrik formül ve yapılar bütün jet demetleri üzerinde

Euler - Lagrange denklemini tanımlamaya imkan sağlayacaktır.

$J^k\pi^m$ , m. genişletilmiş jet demeti üzerinde tanımlı lokal koordinatlar

$$(x^{si}, u^{s\alpha}, u_{ri}^{s\alpha}), \quad s = 0, 1, \dots, m; \quad r = 1, 2, \dots, k$$

dır.  $L^{v^m} : J^k\pi^m \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $J^k\pi^m$  üzerinde Lagrange fonksiyonu olsun.  $J^k\pi$  de yaklaşık tanjant yapı  $J$  nin m. mertebeden düşey lift'i  $J^k\pi^m$  üzerinde (1,1) tipinde bir tensör alanı olup  $J^{v^m}$  ile gösterilir.

$$J = \sum_{r=0}^{k-1} (du_{ri}^{0\alpha} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} dx^{0i}) \otimes \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}}$$

ise

$$\begin{aligned} J^{v^m} &= \sum_{r=0}^{k-1} (du_{ri}^{0\alpha} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} dx^{0i})^{v^m} \otimes \left( \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{v^m} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \left( (du_{ri}^{0\alpha})^{v^m} - (u_{(r+1)i}^{0\alpha})^{v^m} (dx^{0i})^{v^m} \right) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{v^m} \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$J^{v^m} = \sum_{r=0}^{k-1} (du_{ri}^{0\alpha} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} dx^{0i}) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{m\alpha}} \right) \quad (2.2.1)$$

olarak elde edilir. O halde,  $J^{v^m}$  tensör alanı,

$$\begin{aligned} J^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right) &= - \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{m\alpha}} \\ J^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right) &= \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{m\alpha}}, \quad r = 0, 1, \dots, k-1 \\ J^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

$J^k \pi$  jet manifoldu üzerinde  $V = \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}}$  şeklinde ifade edilen Liouville vektör alanının m.mertebeden düşey lift'i

$$V^{v^m} = \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{m\alpha}}$$

olup  $J^k \pi^m$  m. genişletilmiş jet demeti üzerinde bir vektör alanıdır. Böylece,

$$J^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right) = -V^{v^m}$$

eşitliği gerçekleşir.

$J^k\pi$  de tanımlanan  $\xi$  semisprayının  $m$ . mertebeden düşey lift'i  $\xi^{v^m}$  ile gösterilip  $J^k\pi^m$  demeti üzerinde bir vektör alanıdır. Lokal olarak;

$$\begin{aligned}\xi^{v^m} &= \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \right)^{v^m} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right)^{v^m} + \sum_{r=0}^{k-1} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \right)^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{v^m} + (\xi^{0i})^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \right)^{v^m}\end{aligned}$$

veya

$$\xi^{v^m} = \frac{\partial}{\partial x^{mi}} + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{m\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{m\alpha}} \quad (2.2.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$J^k\pi$  jet manifoldu üzerinde Poincare - Cartan 1-formunun  $m$ . mertebeden düşey lift'i  $\alpha_L^{v^m}$  ile gösterilip,  $J^k\pi^m$   $m$ . genişletilmiş jet demeti üzerinde bir 1-formdur.  $\alpha_L^{v^m}$  1-formu,

$$\alpha_L^{v^m} = d_J L^{v^m} + L^{v^m} dx^{0i}$$

şeklinde ifade edilir. Aynı şekilde Poincare - Cartan 2-formunun  $m$ . mertebeden düşey lift'i  $\Omega_L^{v^m}$ ,

$$\Omega_L^{v^m} = dd_J L^{v^m} + dL^{v^m} \wedge dx^{0i}$$

olup  $J^k\pi^m$  demeti üzerinde bir 2-formdur.

Böylece,

$$\begin{aligned}\alpha_L^{v^m} &= d_J L^{v^m} + L^{v^m} dx^{0i} \\ &= - \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{0i} + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} + L^{v^m} dx^{0i}\end{aligned}$$

dır. Buradan Poincare - Cartan 2-formunun düşey lift'i,

$$\Omega_L^{v^m} = d \left( - \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{0i} + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \right) + dL^{v^m} \wedge dx^{0i}$$

olarak bulunur. Burada;

$$d = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} dx^{0i} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} + \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} + \dots + \frac{\partial}{\partial x^{mi}} dx^{mi} \\ + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{m\alpha}} du_{ri}^{m\alpha} + \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{m\alpha}} du_{ki}^{m\alpha}$$

diferensiyel operatörü, kısalık için

$$d = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} dx^{si} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} + \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \right)$$

biçiminde alınacaktır. Böylece Poincare - Cartan 2-formunun düşey lift'i,

$$\Omega_L^{v^m} = - \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{si} \wedge dx^{0i} + \sum_{s=0}^m \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{si} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\ - \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \wedge dx^{0i} \\ - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \wedge dx^{0i} + \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\ - \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \wedge dx^{0i} \\ - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} \wedge dx^{0i} + \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\ + \sum_{s=0}^m \frac{\partial L^{v^m}}{\partial x^{si}} dx^{si} \wedge dx^{0i} + \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \wedge dx^{0i} \\ + \sum_{s=0}^m \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \wedge dx^{0i}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left[ \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial x^{si}} \right) dx^{0i} \wedge dx^{si} + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dx^{si} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ri}^{s\alpha} + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) du_{ri}^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ki}^{s\alpha} \\
&\quad + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ki}^{0\alpha} \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) du_{ki}^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) du_{ki}^{0\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \right]
\end{aligned}$$

böylece,

$$\begin{aligned}
\Omega_{L^{v^m}} &= \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left[ \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial x^{si}} \right) dx^{0i} \wedge dx^{si} \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dx^{si} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad \left. + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ri}^{s\alpha} + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) du_{ri}^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \\
& + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ki}^{s\alpha} \\
& + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dx^{0i} \wedge du_{ki}^{0\alpha} \\
& + \left[ \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) du_{ki}^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) du_{ki}^{0\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \right]
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

eşitliği ile elde edilir.

**Tanım 2.2.1.**  $\Omega_L^{v^m}$ ,  $J^k \pi^m$  m. genişletilmiş jet demeti üzerinde Poincare - Cartan 2-formu göz önüne alınırsa,

$$i_{\xi_L}^{v^m} \Omega_L^{v^m} = 0, \quad i_{\xi_L}^{v^m} dx^{0i} = 1 \tag{2.2.4}$$

denklemlerini sağlayan bir tek  $\xi_L^{v^m}$  semisprayına, *Euler - Lagrange vektör alanının m. mertebeden düşey lift'i* denir.

Ayrıca,  $i_{\xi_L}^{v^m} dx^{0i} = 1$  olduğundan  $\xi_L^{v^m}$  vektör alanı lokal olarak,

$$\xi_L^{v^m} = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

$\xi_L^{v^m}$  vektör alanı aynı zamanda  $i_{\xi_L}^{v^m} \Omega_L^{v^m} = 0$  eşitliğini sağladığı için (2.2.3)

eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
i_{\xi_L}^{v^m} \Omega_L^{v^m} &= \Omega_{L^{v^m}} (\xi_L^{v^m}) \\
&= \Omega_{L^{v^m}} \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) \\
&= \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial x^{si}} \right) dx^{si} \right. \\
&\quad + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \right) du_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) du_{ri}^{s\alpha} + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) dx^{si} \\
&\quad + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{si} \\
&\quad - X_{ri}^{0\alpha} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \right) dx^{0i} \\
&\quad - X_{ri}^{s\alpha} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) dx^{0i} + X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{0\alpha} \\
&\quad - \xi^{si} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) dx^{0i} - \xi^{0i} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dx^{0i} \\
&\quad \left. + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left[ -X_{ri}^{0\alpha} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \right) \right. \right. \\
&\quad - X_{ri}^{s\alpha} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) - \xi^{si} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) \\
&\quad \left. - \xi^{0i} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) \right] dx^{0i} + \left[ u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial x^{si}} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] dx^{si} \\
&\quad + \left[ u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} + X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \\
&\quad \left. + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] du_{ri}^{0\alpha} + \left[ u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] du_{ri}^{s\alpha} \\
&\quad + \left[ u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] du_{ki}^{0\alpha} \\
&\quad \left. + \left[ u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] du_{ki}^{s\alpha} \right\} \\
&\quad \text{elde edilir. } i_{\xi^{v^m}} \Omega_{L^{v^m}} = 0 \text{ olduğundan,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1) \quad &\sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \right) + X_{ri}^{s\alpha} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) + \xi^{si} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) + \xi^{0i} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0
\end{aligned}$$

$$2) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial x^{si}} = 0$$

$$3) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \\ + X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} = 0$$

$$4) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} = 0$$

$$5) \sum_{r=0}^{k-1} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$$

$$6) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} = 0$$

denklemlerine ulaşılır. 5) denkleminden  $r = 0, \dots, k-1$  için  $\frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \neq 0$

olduğundan  $X_{ri}^{0\alpha} = u_{(r+1)i}^{0\alpha}$  bulunur. Böylece, 6) dan,  $\frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} = 0$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ );

yani  $L^{v^m}$  fonksiyonu  $u_{ki}^{s\alpha}$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) koordinat fonksiyonlarını içermez.

Aynı zamanda, 4) den  $\frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} = 0$  ( $r = 0, 1, \dots, k-1$ ;  $s = 1, 2, \dots, m$ ) olup

$L^{v^m}$  fonksiyonu  $u_{ri}^{s\alpha}$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) koordinat fonksiyonlarını da içermez.

Böyle devam edilirse; 2) den  $\frac{\partial L^{v^m}}{\partial x^{si}} = 0$  olduğundan  $L^{v^m}$  fonksiyonu  $x^{si}$

( $s = 1, 2, \dots, m$ ) koordinat fonksiyonlarını içermez. Bu bilgilerin yardımıyla,

$$3) \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} = 0$$

ve

$$1) \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) = 0$$

eşitliklerine ulaşılır. 3) denklemdeki ifade kullanılarak 1) denklemi

$$u_{(r+1)i}^{0\alpha}(0) = 0$$

olur. Buradan;

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} = 0 \quad (2.2.5)$$

denklemine ulaşılır.

Aynı zamanda Euler - Lagrange vektör alanının m. mertebeden düşey lift'i,

$$\xi_L^{v^m} = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) \quad (2.2.6)$$

olarak verilebilir.

Şimdi,  $\sigma^{m+1} : \mathbb{R} \rightarrow {}^m E$  eğrisi,  $\xi_L^{v^m}$  vektör alanının bir çözümü, yani bu eğri  $\xi_L^{v^m}$  nin bir integral eğrisi olsun.  $\sigma^{m+1}(t) = (u^{0\alpha}(t), u^{1\alpha}(t), \dots, u^{m\alpha}(t))$  ise bu durumda k. jet,

$$(j^k \sigma^{m+1})(t) = (x^{si}(t), u^{s\alpha}(t), u_{ri}^{s\alpha}(t)) \quad (r = 1, 2, \dots, k; s = 0, 1, \dots, m)$$

olup,  $\sigma^{m+1}$  eğrisinin  $\xi_L^{v^m}$  nin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^{k+1} u^{s\alpha}}{dx^{si^{k+1}}} = \frac{du_{ki}^{s\alpha}}{dx^{si}} = \xi^{si}(x^{si}, u^{s\alpha}, u_{ri}^{s\alpha}) ; s = 0, 1, \dots, m, r = 1, 2, \dots, k \quad (2.2.7)$$

diferensiyel denklem sistemini sağlamasıdır.

$$\xi^{si} = u_{(k+1)i}^{s\alpha}, s = 0, 1, \dots, m$$

olduğundan ve  $J^k \pi^m$  jet demeti üzerinde  $\frac{d}{dx^{0i}}$  vektör alanı,

$$\frac{d}{dx^{0i}} = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{du_{ri}^{0\alpha}}{dx^{0i}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \left( \frac{du_{ki}^{0\alpha}}{dx^{0i}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}}$$

olarak ifade edilebildiği için, (2.2.7) denklemleri de göz önüne alınarak (2.2.5) denklemi;

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial x^{0i} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \left( \frac{du_{ri}^{0\alpha}}{dx^{0i}} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \left( \frac{du_{ki}^{0\alpha}}{dx^{0i}} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial u_{ki}^{0\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} = 0$$

olup, buradan;

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{d}{dx^{0i}} \left( \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} = 0 \quad (2.2.8)$$

eşitliği elde edilir. (2.2.8) denklemine *Euler - Lagrange denklemlerinin m. mertebeden düşey lift'i* denir.

**Sonuç 2.2.1.**  $J^k \pi^m$  genişletilmiş jet demeti üzerinde bir semispray olan  $\xi^{v^m}$  vektör alanının çözümleri,  $J^k \pi^m$  üzerindeki Euler - Lagrange denkleminin çözümleridir.

## 2.3 Euler- Lagrange Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Tam Lift'leri

Bu kısımda,  $J^k \pi$ , k. jet manifoldu üzerinde elde edilen Euler - Lagrange denklemlerinin  $J^k \pi^m$ , m. genişletilmiş jet demeti üzerine m. mertebeden tam lift'leri elde edilmiştir. Böylece, bütün genişletilmiş jet demetleri üzerinde Euler - Lagrange denklemlerinin tam lift'leri tanımlanabilir.

$J^k \pi^m$ , m. genişletilmiş jet demeti üzerinde tanımlı lokal koordinatlar

$$(x^{si}, u^{s\alpha}, u_{ri}^{s\alpha}), s = 0, 1, \dots, m, r = 1, 2, \dots, k$$

dır.  $L^{c^m} : J^k \pi^m \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $J^k \pi^m$  üzerinde Lagrange fonksiyonu olsun.  $J^k \pi$  üzerinde  $J$  yaklaşık tanjant yapısının m. mertebeden tam lift'i  $J^k \pi^m$

üzerinde (1,1) tipinden bir tensör alanı olup,  $J^{c^m}$  ile gösterilir.

$$J = \sum_{r=0}^{k-1} (du_{ri}^{0\alpha} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} dx^{0i}) \otimes \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}}$$

ise, tam lift özelliklerinden;

$$\begin{aligned} J^{c^m} &= \left( \sum_{r=0}^{k-1} (du_{ri}^{0\alpha} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} dx^{0i}) \otimes \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{c^m} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \left( \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (du_{ri}^{0\alpha} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} dx^{0i})^{v^{m-s} c^s} \otimes \left( \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s} v^s} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( (du_{ri}^{0\alpha})^{v^{m-s}} - (u_{(r+1)i}^{0\alpha})^{v^{m-s}} (dx^{0i})^{v^{m-s}} \right)^{c^s} \otimes \left( \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{v^s} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (du_{ri}^{0\alpha} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} dx^{0i})^{c^s} \otimes \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( (du_{ri}^{0\alpha})^{c^s} - \sum_{n=0}^s \binom{s}{n} (u_{(r+1)i}^{0\alpha})^{v^{s-n} c^n} (dx^{0i})^{c^{s-n} v^n} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( du_{ri}^{s\alpha} - \sum_{n=0}^s \binom{s}{n} (u_{(r+1)i}^{0\alpha})^{c^n} (dx^{(s-n)i})^{v^n} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( du_{ri}^{s\alpha} - \sum_{n=0}^s \binom{s}{n} u_{(r+1)i}^{n\alpha} dx^{(s-n)i} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}} \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

olarak elde edilir.

Böylece,  $J^{c^m}$  tensör alanı,

$$J^{c^m} \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} \right) = -\binom{m}{s} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}}$$

$$J^{c^m} \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) = \binom{m}{s} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}}$$

$$J^{c^m} \left( \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) = 0$$

eşitliklerini gerçekler.

$J^k \pi$ ,  $k$ . jet manifoldu üzerinde tanımlı Liouville vektör alanı

$$V = \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}}$$

olup  $m$ . mertebeden tam lift'i,

$$\begin{aligned} V^{c^m} &= \sum_{r=0}^{k-1} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{c^m} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \right)^{v^{m-s} c^s} \left( \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s} v^s} \quad (2.3.2) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} u_{(r+1)i}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece,

$$J^{c^m} \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right) = -V^{c^m}$$

koşulu gerçeklenir.

$J^k\pi$  de tanımlanan  $\xi$  semispray'ının  $m$ . mertebeden tam lift'i,

$$\begin{aligned}\xi^{c^m} &= \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \right)^{c^m} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} \right)^{c^m} + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \right)^{v^{m-s}c^s} \left( \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s}v^s} \\ &\quad + (\xi^{0i})^{v^{m-s}c^s} \left( \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s}v^s}\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( u_{(r+1)i}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right)$$

olarak elde edilir.

$J^k\pi$ ,  $k$ . jet manifoldu üzerinde Poincare - Cartan 1-formunun  $m$ . mertebeden tam lift'i  $\alpha_L^{c^m}$  ile gösterilip,  $J^k\pi^m$ ,  $m$ . genişletilmiş jet demeti üzerinde bir 1-formdur.  $\alpha_L^{c^m}$  1-formu,

$$\alpha_L^{c^m} = d_{J^c m} L^{c^m} + \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} L^{v^{m-s}c^s} dx^{(m-s)i}$$

şeklinde ifade edilir. Aynı şekilde Poincare - Cartan 2-formunun  $m$ . mertebeden tam lift'i  $\Omega_L^{c^m}$ ,

$$\Omega_L^{c^m} = dd_{J^c m} L^{c^m} + \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} dL^{v^{m-s}c^s} \wedge dx^{(m-s)i}$$

olup,  $J^k\pi^m$  demeti üzerinde bir 2-formdur.

Böylece,

$$\begin{aligned}\alpha_L^{c^m} &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (-u_{(r+1)i}^{0\alpha}) \frac{\partial L^{v^{m-s}c^s}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{(m-s)i} \\ &\quad + \frac{\partial L^{v^{m-s}c^s}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{(m-s)\alpha} + L^{v^{m-s}c^s} dx^{(m-s)i}\end{aligned}$$

olup indislerde düzenleme yapılırsa,

$$\alpha_L^{c^m} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} (-u_{(r+1)i}^{0\alpha}) \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{si} + \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} + L^{v^s c^{m-s}} dx^{si} \quad (2.3.4)$$

elde edilir. Poincare - Cartan 1-formu, Poincare - Cartan 2-formunun elde edilmesinde kolaylık sağlaması açısından (2.3.4) eşitliği ile ifade edilecektir.

O halde,  $d$  diferensiyel operatör burada,

$$d = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} dx^{si} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} + \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \right)$$

olduğundan Poincare - Cartan 2-formu,

$$\begin{aligned} \Omega_L^{c^m} &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( -u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{sj} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{sj} \wedge dx^{si} + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} dx^{si} \wedge du_{ri}^{s\alpha} \right. \\ &+ \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{sj}} dx^{sj} \wedge dx^{si} - u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \wedge dx^{si} \\ &+ \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\beta} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\beta} \wedge du_{ri}^{s\alpha} + \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \wedge dx^{si} \\ &- u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \wedge dx^{si} + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{s\alpha} \\ &\left. + \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \wedge dx^{si} \right) - \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \wedge dx^{si} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left\{ \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{sj} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{sj}} \right) dx^{si} \wedge dx^{sj} \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) dx^{si} \wedge du_{ri}^{s\alpha} \\
&\quad + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) dx^{si} \wedge du_{ki}^{s\alpha} + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\beta} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\beta} \wedge du_{ri}^{s\alpha} \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{s\alpha} \right\} - \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} \wedge dx^{si}
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

eşitliği ile elde edilir.

**Tanım 2.3.1.**  $\Omega_L^m$ ,  $J^k \pi^m$  m. genişletilmiş jet demeti üzerinde Poincare - Cartan 2-form ise, bu durumda,

$$i_{\xi_L^m} \Omega_L^m = 0, \quad i_{\xi_L^m} dx^{si} = 1 \tag{2.3.6}$$

denklemlerini sağlayan bir tek  $\xi_L^m$  semisprayına, *Euler - Lagrange vektör alanının m. mertebeden tam lift'i* denir.

Ayrıca,  $i_{\xi_L^m} dx^{si} = 1$  olduğundan,  $\xi_L^m$  vektör alanı lokal olarak

$$\xi_L^m = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right)$$

şeklinde ifade edilir.  $\xi_L^m$  vektör alanı aynı zamanda  $i_{\xi_L^m} \Omega_L^m = 0$  eşitliğini sağladığı için, (2.3.5) eşitliği de kullanılarak,

$$i_{\xi_L^m} \Omega_L^m = \Omega_L^m (\xi_L^m)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left\{ \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) du_{ri}^{s\alpha} \right. \\
&\quad + \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) du_{ki}^{s\alpha} \\
&\quad - X_{ri}^{s\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) dx^{si} \\
&\quad - X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ki}^{s\alpha} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \\
&\quad \left. - \xi^{si} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) dx^{si} \right\} \\
&\quad + \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left\{ \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{0\alpha} - \left( X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) dx^{si} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left[ -X_{ri}^{s\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \xi^{si} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) \right\} dx^{si} \\
&\quad + \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u^{0\alpha}} \left. \right\} du_{ri}^{s\alpha} + \left\{ \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \right. \\ \left. \left. - X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) \right\} du_{ki}^{s\alpha}$$

elde edilir.

Ayrıca,  $i \xi_L^m \Omega_L^m = 0$  ve

$$\frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} = \frac{\partial^2 L^m}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}}$$

olduğundan,

$$1) \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left[ X_{ri}^{s\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) \right] \\ + \xi^{si} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right) - \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right. \\ \left. + \xi^{si} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{0\alpha}} \right) = 0$$

$$2) \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u^{0\alpha}} \right) =$$

$$3) \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( u_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{s\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$$

denklemlerine ulaşılır. Yukarıda verilen eşitlikler dikkate alınarak,

$$\frac{\partial^2 L^m}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}} \neq 0$$

olduğu için  $X_{ri}^{s\alpha} = u_{(r+1)i}^{0\alpha}$  elde edilir. Bu koşul altında 2) denklemdeki ifade kullanılarak 1) denklemi  $X_{ri}^{0\alpha}(0) = 0$  olur. Dolayısıyla,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u^{0\alpha}} \right) = 0 \quad (2.3.7)$$

denklemini elde edilir.

Aynı zamanda Euler - Lagrange vektör alanının m. mertebeden tam lift'i,

$$\xi_L^{c^m} = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \sum_{r=0}^{k-1} u_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}} \right)$$

olarak verilebilir.

Şimdi,  $\alpha^{m+1}: \mathbb{R} \rightarrow^m E$  eğrisi  $\xi_L^{c^m}$  nin bir çözümü, yani bu eğri  $\xi_L^{c^m}$  nin bir integral eğrisi olsun. Eğer,  $\alpha^{m+1}(t) = (u^{0\alpha}(t), u^{1\alpha}(t), \dots, u^{m\alpha}(t))$  ise bu durumda k. jet,

$$(J^k \alpha^{m+1})(t) = (x^{si}(t), u^{s\alpha}(t), u_{ri}^{s\alpha}(t)) \quad , (s = 0, 1, \dots, m; r = 1, 2, \dots, k)$$

olup,  $\alpha^{m+1}$  eğrisinin  $\xi_L^{c^m}$  nin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^{k+1} u^{s\alpha}}{dx^{si^{k+1}}} = \frac{du_{ki}^{s\alpha}}{dx^{si}} = \xi^{si}(x^{si}, u^{s\alpha}, u_{ri}^{s\alpha}) \quad , (r = 1, 2, \dots, k) \quad (2.3.8)$$

diferensiyel denklem sistemini sağlamasıdır.

Ayrıca,  $J^k \pi^m$  m. genişletilmiş jet demeti üzerinde  $\frac{d}{dx^{si}}$  vektör alanı,

$$\frac{d}{dx^{si}} = \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{du_{ri}^{s\alpha}}{dx^{si}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} + \left( \frac{du_{ki}^{s\alpha}}{dx^{si}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{s\alpha}}$$

olarak ifade edildiği için, (2.3.8) kullanılarak, (2.3.7) denklemi,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial x^{si} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \left( \frac{du_{ri}^{s\alpha}}{dx^{si}} \right) \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ri}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \\ \left. + \left( \frac{du_{ki}^{s\alpha}}{dx^{si}} \right) \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{ki}^{s\alpha} \partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u^{0\alpha}} \right) = 0$$

dolayısı ile

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \frac{d}{dx^{si}} \left( \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial u^{0\alpha}} = 0 \quad (2.3.9)$$

eşitliği ile elde edilir.

Lift teori özellikleri kullanılarak bu denklem,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \frac{d}{dx^{si}} \left( \frac{\partial L^{c^m}}{\partial u_{(r+1)i}^{s\alpha}} \right) - \frac{\partial L^{c^m}}{\partial u^{s\alpha}} = 0 \quad (2.3.10)$$

olarak düzenlenebilir. (2.3.10) denkleminin *Euler - Lagrange denkleminin* *m. mertebeden tam lift'i* denir.

**Sonuç 2.3.1.**  $J^k \pi^m$  genişletilmiş jet demeti üzerindeki  $\xi^{c^m}$  semisprayının çözümleri aynı zamanda,  $J^k \pi^m$  üzerindeki Euler - Lagrange denkleminin çözümleridir.

## 2.4 $J^k \pi$ Üzerinde Zamana Bağlı Euler - Lagrange Denklemi

Bu kısımda,  $J^k \pi$  jet demeti üzerinde gerekli tanım ve teoremler verilerek; zamana bağlı Euler - Lagrange formülü ve denklemleri elde edilecektir. Klasik mekanik de önemli bir yeri olan zamana bağlı Euler - Lagrange denklemlerinin incelenmesi uzayda farklı zaman parametrelerinin dikkate alınması açısından önem kazanmaktadır.

$(E, \pi, M)$  demeti üzerinde  $k$ . jet manifold, birinci bölümde kesitler yardımı ile tanımlanmış ve  $J^k \pi$  ile gösterilmişti. Aynı zamanda  $(J^k \pi, \pi_k, M)$  de bir demet olarak tanımlanmıştı. Bu bölümde  $k$ . jet manifold  $J^k \pi$  üzerinde yeni bir hız uzayı tanımlanacaktır. Bu uzayda zaman parametresi olarak, klasik mekanikteki zaman parametresi  $t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) alınacaktır.

**Teorem 2.4.1.**  $(\mathbb{R} \times J^k\pi, p_{r_1}, \mathbb{R})$  bir demettir.

**İspat:**  $M$  ve  $F$  birer manifold,  $p_{r_1}$  izdüşüm dönüşümü olmak üzere özdeşlik dönüşümü ile  $(M \times F, p_{r_1}, M)$  üçlüsü bir lifli manifold ve aynı zamanda bir demettir.

Kabul edelim ki,  $\forall p \in M$  için  $g_p : F \rightarrow F$  dönüşümü  $g_p(q) = g(p, q)$  şeklinde tanımlı bir diffeomorfizm olacak şekilde  $g : M \times F \rightarrow F$  dönüşümü var olsun. Böylece  $t : M \times F \rightarrow M \times F$  dönüşümü  $t(p, q) = (p, g_p(q))$  olarak tanımlıdır.

$$\begin{array}{ccc} M \times F & \xrightarrow{t} & M \times F \\ p_{r_1} \downarrow & & \downarrow p_{r_1} \quad p_{r_1} \circ t = p_{r_1} \\ M & \xrightarrow{id_M} & M \end{array}$$

O halde  $t$  dönüşümü diğer bir trivializasyondur. Bu trivializasyon ile  $(M \times F, p_{r_1}, M)$  üçlüsü trivial lifli manifoldların en iyi örneği olup bir demettir (Saunders, 1989).

Burada  $F$  manifoldu yerine 1-boyutlu Öklid uzayı  $\mathbb{R}$  yi alırsak,  $(\mathbb{R} \times M, p_{r_1}, \mathbb{R})$  üçlüsüne *trivial doğru demeti* denir. Ayrıca  $(\mathbb{R}^n \times M, p_{r_1}, \mathbb{R}^n)$  demetine ise *trivial n. düzlem demeti* denir.

Herhangi bir  $M$  manifoldu yerine, burada özel olarak  $J^k\pi$ , k. jet manifoldu alınırsa,  $(\mathbb{R} \times J^k\pi, p_{r_1}, \mathbb{R})$  üçlüsü de bir demet olur. Böylece  $(\mathbb{R} \times J^k\pi, p_{r_1}, \mathbb{R})$  demetinin kesitlerinin k. jetleri ile beraber  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow J^k\pi$  eğrisi tanımlanabilir. Bu eğrinin  $t$  noktasında birinci jetlerin cümlesi  $j_t^1\sigma$  olsun. Birinci jetlerin cümlesi olan birinci jet manifold  $J^1(\mathbb{R}, J^k\pi)$  ile gösterilir.  $J^k\pi$ , k. jet manifoldu üzerinde lokal koordinatlar  $(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{r_i}^{0\alpha})$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) olduğuna göre  $J^1(\mathbb{R}, J^k\pi)$  jet manifoldu üzerinde uyarlanmış lokal koordinatlar,

$$(t^0, x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{r_i}^{0\alpha}, \dot{x}^{0i}, \dot{u}^{0\alpha}, \dot{u}_{r_i}^{0\alpha}) \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\dot{x}^{0i} = \frac{dx^{0i}}{dt^0}, \dot{u}^{0\alpha} = \frac{du^{0\alpha}}{dt^0}, \dot{u}_{ri}^{0\alpha} = \frac{du_{ri}^{0\alpha}}{dt^0}$$

dir.  $J^1(\mathbb{R}, J^k\pi)$  manifolduna  $J^k\pi$  nin değişim uzayı denir.  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow J^k\pi$  eğrisinin  $t$  noktasında birinci jetlerin cümlesi  $j_t^1\sigma$  ve  $\sigma(t)$  noktasında tanjant vektör  $\dot{\sigma}(t)$  ile gösterilmek üzere,

$$j_t^1\sigma \rightarrow (t, \dot{\sigma}(t))$$

dönüşümü ile  $J^1(\mathbb{R}, J^k\pi)$  ve  $\mathbb{R} \times TJ^k\pi$  manifoldlarının özdeş olduğu görülür. Böylece bu özdeşleşme ile  $TJ^k\pi$  üzerinde verilen bütün geometrik yapılar  $J^1(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde de ifade edilebilir.

Yukarıda verilen jet manifoldlar için zamana bağlı durum aşağıdaki şekilde geliştirilecek ve zamana bağlı durumda genişletilmiş jet demet dizisi oluşturulacaktır.

$J^k\pi$  manifoldunun bir  $p \in M$  noktasındaki tanjant uzayı  $T_p J^k\pi$  olsun. O halde,

$$J^k(\mathbb{R}^p, J^k\pi) \cong \mathbb{R}^p \times T_p J^k\pi$$

dir.

Birinci bölümde jetler  $({}^iE, \pi^i, {}^iM)$  demetlerinin kesitleri üzerinde tanımlanmış ve genişletilmiş jet demet dizisi ise (1.2.2) ile ifade edilmişti. Bu bölümde jetler dönüşümler üzerinde tanımlanmıştır. Ayrıca  $\pi^i$  demeti üzerinde jet demeti  $(J^k\pi^i, \pi_k^i, {}^iM)$  ya da kısaca  $J^k\pi^i = J^k({}^iE, {}^iM)$  olarak ifade edilmiştir. O halde  $\pi^i$  demeti üzerinde zamana bağlı durumda jet demet  $(J^k(\mathbb{R}^{i+1}, J^k\pi^i), \pi_{J^k\pi^i}^i, J^k\pi^i, \mathbb{R}^{i+1})$  olarak ya da kısaca  $J^k(\mathbb{R}^{i+1}, J^k\pi^i)$  olarak ifade edilecektir. Burada,

$$J^k(\mathbb{R}^{i+1}, J^k\pi^i) \cong \mathbb{R}^{i+1} \times J^k\pi^i$$

dir. Böylece zamana bağlı genişletilmiş jet demet dizisi,

$$J^k(\mathbb{R}^1, J^k\pi) \longleftarrow J^k(\mathbb{R}^2, J^k\pi^1) \longleftarrow J^k(\mathbb{R}^3, J^k\pi^2) \longleftarrow \dots \longleftarrow J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m) \quad (2.4.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi^m)$  manifoldu üzerinde lokal koordinatlar

$$\left( t^0, x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}, \frac{d^i x^{0i}}{dt^{0i}}, \frac{d^i u^{0\alpha}}{dt^{0i}}, \frac{d^i u_{ri}^{0\alpha}}{dt^{0i}} \right), \quad (1 \leq i \leq m)$$

dir. Kısalık için bu koordinatlar  $(t^0, v_{0i}^{0\alpha}, v_{1i}^{0\alpha}, v_{2i}^{0\alpha}, \dots, v_{ki}^{0\alpha})$  olarak alınacaktır.

Burada

$$v_{0i}^{0\alpha} = (t^0, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}), v_{1i}^{0\alpha} = \frac{d^1 v_{0i}^{0\alpha}}{dt^{01}}, v_{2i}^{0\alpha} = \frac{d^2 v_{0i}^{0\alpha}}{dt^{02}}, \dots, v_{ki}^{0\alpha} = \frac{d^k v_{0i}^{0\alpha}}{dt^{0k}}$$

dır. Yukarıdaki gösterime göre,  $1 \leq i \leq m$  için  $v_{ri}^{0\alpha} = \frac{d^r v_{0i}^{0\alpha}}{dt^{0r}}$  alınabilir.

Böylece zamana bağlı genişletilmiş jet demet dizisi üzerinde uyarlanmış lokal koordinatlar Tablo 2.2 ile verilmiştir.

Zamana bağlı genişletilmiş jet demetler	Zamana bağlı genişletilmiş jet demetler üzerinde koordinatlar
$J^k\pi^0$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}) = v_{0i}^{0\alpha} \quad (1 \leq r \leq k)$
$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi^0)$	$(t^0, v_{0i}^{0\alpha}, v_{1i}^{0\alpha}, v_{2i}^{0\alpha}, \dots, v_{ki}^{0\alpha})$
$J^k\pi^1$	$(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha}, x^{1i}, u^{1\alpha}, u_{ri}^{1\alpha}) = (v_{0i}^{0\alpha}, v_{0i}^{1\alpha})$
$J^k(\mathbb{R}^2, J^k\pi^1)$	$(t^0, t^1, v_{0i}^{0\alpha}, v_{0i}^{1\alpha}, v_{ri}^{0\alpha}, v_{ri}^{1\alpha})$
$\vdots$	$\vdots$
$J^k\pi^m$	$(x^{si}, u^{s\alpha}, u_{ri}^{s\alpha}) = v_{0i}^{s\alpha} \quad (0 \leq s \leq m)$
$J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$	$(t^s, v_{0i}^{s\alpha}, v_{ri}^{s\alpha}) \quad (0 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq k)$

Tablo 2.2

Böylece; zamana bağlı genişletilmiş jet demetleri üzerinde Euler - Lagrange denklemlerini oluşturmak için gerekli tanım ve özellikler aşağıda sunulacaktır.

$L : J^k(\mathbb{R}, J^k\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  diferensiyellenebilir fonksiyonuna zamana bağlı Lagrange fonksiyonu denir.

**Tanım 2.4.1.**  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde  $(\tilde{J})^{k+1} = 0$  eşitliğini sağlayan ve  $\text{rank } \tilde{J} = k \binom{1}{ki} m(m+1) \dots (m+k-1)n$  ile verilen (1,1) tipinden  $\tilde{J}$  tensör alanına zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı denir.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde  $\tilde{J}$  tensör alanı,

$$\tilde{J} = \sum_{r=0}^{k-1} (dv_{ri}^{0\alpha} - v_{(r+1)i}^{0\alpha} dt^0) \otimes \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \quad (2.4.2)$$

şeklinde ifade edilir.

Böylece  $\tilde{J}$  tensör alanı lokal olarak,

$$\begin{aligned} \tilde{J} \left( \frac{\partial}{\partial t^0} \right) &= - \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \\ \tilde{J} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \right) &= \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}}, \quad 0 \leq r \leq k-1 \\ \tilde{J} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanacaktır.

Zamana bağlı durumda Liouville vektör alanı  $C$  ile gösterilirse; o zaman

$$C = \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \quad (2.4.3)$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla,

$$\tilde{J} \left( \frac{\partial}{\partial t^0} \right) = -C$$

eşitliği ile gösterilecektir.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde bir  $\xi$  vektör alanına;  $\tilde{J}$  zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı olmak üzere,  $\tilde{J}\xi = 0$  şartını sağlıyorsa bir *semispray* denir.

$\xi$  vektör alanı lokal olarak,

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \quad (2.4.4)$$

$\xi^i = \xi^i(t^0, v_{ri}^{0\alpha}, v_{ki}^{0\alpha})$ ,  $0 \leq r \leq k-1$  şeklinde tanımlıdır.

$L$  zamana bağlı Lagrange fonksiyonu, bir  $E_L = CL - L$  zamana bağlı enerji fonksiyonu indirger. Bu durumda,

$$E_L = \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - L$$

ile ifade edilir.

**Tanım 2.4.2.**  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  jet manifoldu üzerinde,

$$\alpha_L = d_{\tilde{J}}L + Ldt^0$$

1-formuna *Poincare - Cartan 1-formu* ve

$$\Omega_L = dd_{\tilde{J}}L + dL \wedge dt^0$$

2-formuna *Poincare - Cartan 2-formu* denir.

Böylece  $\alpha_L$  Poincare - Cartan 1-formu lokal koordinatlarda,

$$\begin{aligned} \alpha_L &= d_{\tilde{J}}L + Ldt^0 \\ &= -\sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 + \frac{\partial L}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} + Ldt^0 \end{aligned}$$

eşitliği ile ifade edilir. Aynı zamanda,  $\Omega_L$  Poincare - Cartan 2-formu,

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= dd_{\bar{t}}L + dL \wedge dt^0 \\
&= d \left( - \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 + \frac{\partial L}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} + L dt^0 \right) \\
&= - \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 \wedge dt^0 + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 \wedge dv_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad + \frac{\partial L}{\partial t^0} dt^0 \wedge dt^0 - \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \wedge dt^0 \\
&\quad - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\partial L}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \wedge dt^0 + \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\beta} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\beta} \wedge dv_{ri}^{0\alpha} + \frac{\partial L}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \wedge dt^0 \right) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dt^0 - \frac{\partial L}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dt^0 \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dv_{ri}^{0\alpha} + \frac{\partial L}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dt^0 \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) dt^0 \wedge dv_{ri}^{0\alpha} \right. \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\beta} \partial v_{ri}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\beta} \wedge dv_{ri}^{0\alpha} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 \wedge dv_{ki}^{0\alpha} \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dv_{ri}^{0\alpha} \right\}
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

olarak hesaplanır.

**Tanım 2.4.3.**  $\xi$ ,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  de bir semispray olsun.  $J^k\pi$  manifoldu üzerinde bir  $\alpha$  eğrisinin, kanonik prolangasyonu  $\xi$  nin bir integral eğrisi ise, bu eğriye  $\xi$  nin bir *çözümü* denir.

Şimdi,  $J^k\pi$ , k. jet manifoldunda bir  $\alpha$  eğrisi alalım.  $\alpha$  eğrisi lokal olarak,  $(v_{0i}^{0\alpha}(t))$  ile verilsin. Bu durumda k. jet,

$$(J^k\alpha)(t) = (t^0, v_{0i}^{0\alpha}(t), v_{ri}^{0\alpha}(t)), \quad r = 1, 2, \dots, k$$

olup;  $\alpha$  nın,  $\xi$  nin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^{k+1}v_{0i}^{0\alpha}}{dt^{0^{k+1}}} = \frac{dv_{ki}^{0\alpha}}{dt^0} = \xi^{0i}(t^0, v_{0i}^{0\alpha}, v_{ri}^{0\alpha}), \quad r = 1, 2, \dots, k$$

$(k+1)$ . mertebeden diferensiyel denklem sistemini gerçeklemedir.

$\Omega_L$  bir Poincare - Cartan 2-formu ise,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde,

$$i_{\xi_L}\Omega_L = 0, \quad i_{\xi_L}dt^0 = 1 \quad (2.4.6)$$

denklemlerini sağlayan bir tek  $\xi_L$  semisprayına *zamana bağlı Euler - Lagrange vektör alanı* denir.

Böylece,  $i_{\xi_L}dt^0 = 1$  olduğundan  $\xi_L$  lokal olarak,

$$\xi_L = \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}}$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\xi_L$  aynı zamanda  $i_{\xi_L}\Omega_L = 0$  eşitliğini sağladığı için, (2.4.5) ifadesinden,

$$i_{\xi_L}\Omega_L = \Omega_L(\xi_L)$$

$$\begin{aligned}
&= \Omega_L \left( \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \right) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) dv_{ri}^{0\alpha} \right. \\
&\quad + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) dt^0 \\
&\quad \left. - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} - \xi^{0i} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \right\} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left[ -X_{ri}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \xi^{0i} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] dt^0 \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) dv_{ri}^{0\alpha} \\
&\quad \left. + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dv_{ki}^{0\alpha} \right\}
\end{aligned}$$

olup,  $i_{\xi_L} \Omega_L = 0$  olduğundan,

$$1) \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) + \xi^{0i} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$$

$$2) \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) = 0$$

$$3) \sum_{r=0}^{k-1} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$$

denklemleri elde edilir. 3) denkleminden  $\frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \neq 0$  olduğundan

$X_{ri}^{0\alpha} = v_{(r+1)i}^{0\alpha}$  bulunur.

Buradan 3) ve 2) denklemleri kullanılarak, 1) denklemindeki ifade

$v_{(r+1)i}^{0\alpha} \cdot 0 = 0$  olur. Böylece,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = 0 \quad (2.4.7)$$

denkleme ulaşılır. Aynı zamanda zamana bağlı Euler - Lagrange vektör alanı,

$$\xi_L = \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \quad (2.4.8)$$

olarak elde edilir.

Şimdi,  $\alpha$ ,  $\xi_L$  vektör alanının bir çözümü olsun. Böylece (2.4.7) denklemi,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \left( \frac{dv_{ri}^{0\alpha}}{dt^0} \right) \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) + \left( \frac{dv_{ki}^{0\alpha}}{dt^0} \right) \left( \frac{\partial^2 L}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = 0$$

şeklinde ifade edilir. Bu denkleme  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde zamana bağlı Euler - Lagrange denklemi denir.

$\mathbb{R}$  de  $\frac{\partial}{\partial t^0}$  vektör alanının  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  deki görüntüsü,

$$\frac{d}{dt^0} = \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{dv_{ri}^{0\alpha}}{dt^0} \right) \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \left( \frac{dv_{ki}^{0\alpha}}{dt^0} \right) \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}}$$

olarak temsil edilir. Dolayısı ile zamana bağlı Euler-Lagrange denklemi kısaca,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{d}{dt^0} \left( \frac{\partial L}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = 0 \quad (2.4.9)$$

şeklinde yazılabilir. Bu çalışmada  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde zamana bağlı Euler - Lagrange denklemi (2.4.9) ile temsil edilecektir.

## 2.5 Zamana Bağlı Euler - Lagrange Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Düşey Lift'leri

Bu kısımda,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde elde edilen zamana bağlı Euler - Lagrange denklemlerinin  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  m. genişletilmiş jet demeti üzerine m. mertebeden düşey lift'leri elde edilmiştir.

$J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde tanımlı uyarlanmış lokal koordinatlar  $(t^s, v_{0i}^{s\alpha}, v_{ri}^{s\alpha})$ ,  $(0 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq k)$  dir.  $L^{v^m} : J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  üzerinde zamana bağlı Lagrange fonksiyonudur.  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demetinde zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı  $\tilde{J}$  nin m. mertebeden düşey lift'i  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  üzerinde (1,1) tipinde bir tensör alanı olup,  $\tilde{J}^{v^m}$  ile gösterilir ve düşey lift özelliklerinden;

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{v^m} &= \sum_{r=0}^{k-1} \left( dv_{ri}^{0\alpha} - v_{(r+1)i}^{0\alpha} dt^0 \right)^{v^m} \otimes \left( \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{v^m} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \left( (dv_{ri}^{0\alpha})^{v^m} - (v_{(r+1)i}^{0\alpha})^{v^m} (dt^0)^{v^m} \right) \otimes \left( \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{v^m} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \left( dv_{ri}^{0\alpha} - v_{(r+1)i}^{0\alpha} dt^0 \right) \otimes \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

olarak elde edilir. Böylece,  $\tilde{J}^{v^m}$  tensör alanı,

$$\begin{aligned}\tilde{J}^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial t^0} \right) &= - \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{m\alpha}} \\ \tilde{J}^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \right) &= \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}}, \quad r = 0, 1, \dots, k-1 \\ \tilde{J}^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \right) &= 0\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

(2.4.3) ile ifade edilen Liouville vektör alanının m. mertebeden düşey lift'i,

$$\begin{aligned}C^{v^m} &= \left( \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{v^m} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \right)^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{v^m} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{m\alpha}}\end{aligned} \quad (2.5.2)$$

şeklinde hesaplanır. Böylece  $C^{v^m}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde bir vektör alanı olup

$$\tilde{J}^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial t^0} \right) = -C^{v^m}$$

eşitliğini gerçekler.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde tanımlanan  $\xi$  semisprayının m. mertebeden düşey lift'i  $\xi^{v^m}$  ile gösterilir.  $\xi^{v^m}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde tanımlı bir vektör alanı olup, lokal olarak; düşey lift özelliklerinden,

$$\begin{aligned}\xi^{v^m} &= \left( \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \right)^{v^m} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t^0} \right)^{v^m} + \sum_{r=0}^{k-1} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \right)^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \right)^{v^m} + (\xi^{0i})^{v^m} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \right)^{v^m}\end{aligned}$$

veya

$$\xi^{v^m} = \frac{\partial}{\partial t^m} + \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{m\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{m\alpha}} \quad (2.5.3)$$

şeklinde hesaplanır.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde  $\alpha_L$  Poincare - Cartan 1-formu yardımıyla

$$\alpha_L^{v^m} = d_j L^{v^m} + L^{v^m} dt^0$$

ile tanımlı,  $\alpha_L^{v^m}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde bir 1-form olup, bu  $\alpha_L^{v^m}$  1-formuna  $\alpha_L$  Poincare - Cartan 1-formunun  $m$ . mertebeden düşey lift'i denir. Benzer şekilde,  $\Omega_L$  Poincare - Cartan 2-formunun  $m$ . mertebeden düşey lift'i;

$$\Omega_L^{v^m} = dd_j L^{v^m} + dL^{v^m} \wedge dt^0$$

şeklinde tanımlı olup  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde bir 2-formdur.

Böylece,  $\alpha_L^{v^m}$  lokal olarak

$$\alpha_L^{v^m} = \sum_{r=0}^{k-1} \left( -v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} + L^{v^m} dt^0 \right)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca  $\Omega_L$  Poincare - Cartan 2-formunun düşey lift'i,

$$\Omega_L^{v^m} = d \left( \sum_{r=0}^{k-1} \left( -v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dt^0 + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} + L^{v^m} \wedge dt^0 \right)$$

bulunur.  $d$  diferensiyel operatör,

$$d = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} + \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \right)$$

olduğundan  $\Omega_L$  Poincare - Cartan 2-formunun düşey lift'i,

$$\begin{aligned} \Omega_L^{v^m} = & \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( -v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^s \wedge dt^0 + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^s \wedge dv_{ri}^{0\alpha} \right. \\ & + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial t^s} dt^s \wedge dt^0 - v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \wedge dt^0 + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \wedge dv_{ri}^{0\alpha} \\ & \left. + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \wedge dt^0 - v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \wedge dt^0 + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \wedge dv_{ri}^{0\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dt^0 \Big) - \sum_{r=1}^{k-1} \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \wedge dt^0 - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dt^0 \\
= & \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial t^s} \right) dt^0 \wedge dt^s + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \wedge dv_{(r+1)i}^{0\alpha} \right. \\
& + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^s \wedge dv_{ri}^{0\alpha} + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) dt^0 \wedge dv_{ri}^{s\alpha} \\
& + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) dt^0 \wedge dv_{ki}^{s\alpha} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \wedge dv_{(r+1)i}^{0\alpha} \\
& + \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) dt^0 \wedge dv_{ri}^{0\alpha} \\
& \left. + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 \wedge dv_{ki}^{0\alpha} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dv_{(r+1)i}^{0\alpha} \right\} \tag{2.5.4}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

**Tanım 2.5.1.**  $\Omega_L^{v^m}, J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  jet demeti üzerinde Poincare - Cartan 2-form olduğunda,

$$i_{\xi_L^{v^m}} \Omega_{L^{v^m}} = 0, \quad i_{\xi_L^{v^m}} dt^0 = 1 \tag{2.5.5}$$

denklemlerini sağlayan bir tek  $\xi_L^{v^m}$  semisprayına zamana bağlı

Euler - Lagrange vektör alanının  $m$ . mertebeden düşey lift'i denir.

Ayrıca,  $i_{\xi_L^{v^m}} dt^0 = 1$  olduğundan  $\xi_L^{v^m}$  vektör alanı lokal olarak,

$$\xi_L^{v^m} = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right)$$

şeklinde ifade edilebilir.  $\xi_L^{v^m}$  vektör alanı aynı zamanda  $i_{\xi_L^{v^m}} \Omega_{L^{v^m}} = 0$  eşitliğini

sağladığı için, (2.5.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
i_{\xi}^{v^m} \Omega_{L^{v^m}} &= \Omega_{L^{v^m}} (\xi^{v^m}) \\
&= \Omega_{L^{v^m}} \left( \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{s=0}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) \right) \\
&= \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial t^s} \right) dt^s + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) dv_{ri}^{s\alpha} + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) dv_{ki}^{s\alpha} \right\} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) dv_{ri}^{0\alpha} \right. \\
&\quad \left. + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \right\} + \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \right. \\
&\quad \left. - X_{ri}^{s\alpha} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) dt^0 \right\} \\
&\quad + \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( -X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^s \right. \\
&\quad \left. - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \right) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) dt^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \\
& + \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ -\xi^{si} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) dt^0 + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \right\} \\
& - \sum_{r=0}^{k-1} \xi^{0i} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^0 + \sum_{r=0}^{k-1} \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \\
= & \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left\{ \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial t^s} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dt^s \right. \\
& + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) dv_{ri}^{s\alpha} \\
& + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) dv_{ki}^{s\alpha} \\
& + \left[ -X_{ri}^{s\alpha} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) - \xi^{si} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) \right. \\
& \left. - X_{ri}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) - \xi^{0i} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right] dt^0 \\
& + \left( X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right. \\
& \left. + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dv_{ri}^{0\alpha} + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \left. \right\} \tag{2.5.6}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $i_{\xi^m} \Omega_{L^{v^m}} = 0$  olduğundan,

$$1) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial t^s} = 0$$

$$2) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} = 0$$

$$3) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} = 0$$

$$4) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} X_{ri}^{s\alpha} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) + \xi^{si} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) \\ + X_{ri}^{0\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) + \xi^{0i} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$$

$$5) \sum_{s=1}^m \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) \\ + X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$$

$$6) \sum_{r=0}^{k-1} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$$

denklemlerine ulaşılır. 6) denkleminde  $\frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \neq 0$  olduğundan

$r = 0, 1, \dots, k-1$  için  $X_{ri}^{0\alpha} = v_{(r+1)i}^{0\alpha}$  bulunur. Böylece 1), 2) ve 3) denklemlerinden sırasıyla

$$\frac{\partial L^{v^m}}{\partial t^s} = 0, \quad \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} = 0, \quad \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} = 0$$

eşitlikleri elde edilir, yani  $L^{v^m}$  fonksiyonu  $t^s, v_{ri}^{s\alpha}$  ve  $v_{ki}^{s\alpha}$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ )

koordinat fonksiyonlarını içermez. Bu bilgilerin yardımıyla,

$$5) \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = 0$$

$$4) \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \cdot (0) = 0$$

olduğundan

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = 0 \quad (2.5.7)$$

denklemini elde edilir

Böylece elde edilen eşitlikler yardımıyla Euler - Lagrange vektör alanının m. mertebeden düşey lift'i,

$$\xi_L^{v^m} = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) \quad (2.5.8)$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi  $\alpha^{m+1} : \mathbb{R} \rightarrow J^k \pi^m$  eğrisi,  $\xi_L^{v^m}$  vektör alanının bir çözümü, yani bu eğri  $\xi_L^{v^m}$  nin bir integral eğrisi olsun. Eğer,  $\alpha^{m+1}(t) = (v_{0i}^{s\alpha}(t))$  ( $s = 0, 1, \dots, m$ ) ise bu durumda k. jet,

$$(j^k \alpha^{m+1})(t) = (t^s, v_{0i}^{s\alpha}(t), v_{ri}^{s\alpha}(t))$$

( $r = 1, 2, \dots, k$ ) olup,  $\alpha^{m+1}$  eğrisinin  $\xi_L^{v^m}$  nin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^{k+1} v_{0i}^{s\alpha}}{dt^{0^{k+1}}} = \frac{dv_{ki}^{s\alpha}}{dt^0} = \xi^{si}(t^s, v_{0i}^{s\alpha}, v_{ri}^{s\alpha})$$

diferensiyel denklem sistemini sağlamasıdır. Dolayısıyla (2.5.7) denklemini,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial t^0 \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \left( \frac{dv_{ri}^{0\alpha}}{dt^0} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \left( \frac{dv_{ki}^{0\alpha}}{dt^0} \right) \frac{\partial^2 L^{v^m}}{\partial v_{ki}^{0\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = 0 \quad (2.5.9)$$

şeklinde düzenlenebilir. Ayrıca  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  jet demeti üzerinde  $\frac{d}{dt^0}$  vektör alanı,

$$\frac{d}{dt^0} = \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} \left( \frac{dv_{ri}^{0\alpha}}{dt^0} \right) \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \left( \frac{dv_{ki}^{0\alpha}}{dt^0} \right) \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}}$$

olarak tanımlandığı için (2.5.8) denklemi,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \frac{d}{dt^0} \left( \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = 0 \quad (2.5.10)$$

şeklinde düzenlenebilir. (2.5.10) denkleminde zamana bağlı Euler - Lagrange denklemlerinin  $m$ . mertebeden düşey lift'i denir.

## 2.6 Zamana Bağlı Euler - Lagrange Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Tam Lift'leri

Bu kısımda,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde elde edilen zamana bağlı Euler - Lagrange denklemlerinin  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$ ,  $m$ . genişletilmiş jet demeti üzerine  $m$ . mertebeden tam lift'leri elde edilmiştir.

$J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde tanımlı uyarılmış koordinatlar  $(t^s, v_{0i}^{s\alpha}, v_{ri}^{s\alpha})$ ,  $(s = 0, 1, \dots, m, r = 1, 2, \dots, k)$  dir.  $L^{c^m} : J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m) \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  üzerinde zamana bağlı Lagrange fonksiyonudur.  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demetinde zamana bağlı yaklaşık tanjant yapı  $\tilde{J}$  nın  $m$ . mertebeden tam lift'i  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  üzerinde (1,1) tipinde bir tensör alanı olup  $\tilde{J}^{c^m}$  ile gösterilir. Böylece; tam ve düşey lift özelliklerinden,

$$\begin{aligned} \tilde{J}^{c^m} &= \left( \sum_{r=0}^{k-1} (dv_{ri}^{0\alpha} - v_{(r+1)i}^{0\alpha} dt^0) \otimes \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{c^m} \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (dv_{ri}^{0\alpha} - v_{(r+1)i}^{0\alpha} dt^0)^{v^{m-s} c^s} \otimes \left( \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s} v^s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( (dv_{ri}^{0\alpha})^{v^{m-s}} - (v_{(r+1)i}^{0\alpha})^{v^{m-s}} (dt^0)^{v^{m-s}} \right)^{c^s} \otimes \left( \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{v^s} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( dv_{ri}^{0\alpha} - v_{(r+1)i}^{0\alpha} dt^0 \right)^{c^s} \otimes \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{s\alpha}} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( (dv_{ri}^{0\alpha})^{c^s} - \sum_{n=0}^s \binom{s}{n} (v_{(r+1)i}^{0\alpha})^{v^{s-n}c^n} (dt^0)^{c^{s-n}v^n} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{s\alpha}} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( dv_{ri}^{s\alpha} - \sum_{n=0}^s \binom{s}{n} v_{(r+1)i}^{n\alpha} dt^{s-n} \right) \otimes \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{s\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

olarak elde edilir.

$\tilde{J}^{c^m}$ , aynı zamanda;

$$\begin{aligned}
\tilde{J}^{c^m} \left( \frac{\partial}{\partial t^s} \right) &= -\binom{m}{s} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{s\alpha}} \\
\tilde{J}^{c^m} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) &= \binom{m}{s} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{s\alpha}} \\
\tilde{J}^{c^m} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) &= 0
\end{aligned}$$

( $0 \leq s \leq m, 0 \leq r \leq k-1$ ) eşitliklerini de gerçekler.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  manifoldu üzerinde tanımlı zamana bağlı Liouville vektör alanının m. mertebeden tam lift'i, düşey ve tam lift özelliklerinden

$$\begin{aligned}
C^{c^m} &= \sum_{r=0}^{k-1} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right)^{c^m} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (v_{(r+1)i}^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} \left( \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{s\alpha}} \right)^{c^{m-s}v^s} \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} v_{(r+1)i}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{(r+1)i}^{s\alpha}}
\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

şeklinde hesaplanır. Böylece  $C^{c^m}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde bir vektör alanı olup,

$$\tilde{J}^{c^m} \left( \frac{\partial}{\partial t^0} \right) = -C^{c^m}$$

eşitliğini gerçekler.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde tanımlanan bir  $\xi$  semisprayının  $m$ . mertebeden tam lift'i  $\xi^{c^m}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde bir vektör alanı olup düşey ve tam lift özelliklerinden,

$$\begin{aligned}\xi^{c^m} &= \left( \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \right)^{c^m} \\ \xi^{c^m} &= \left( \frac{\partial}{\partial t^0} \right)^{c^m} + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \right)^{v^{m-s}c^s} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s}v^s} \right. \\ &\quad \left. + \left( \xi^{0i} \right)^{v^{m-s}c^s} \left( \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \right)^{c^{m-s}v^s} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^m} + \binom{m}{s} v_{(r+1)i}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} + \binom{m}{s} \xi^{si} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right)\end{aligned}\tag{2.6.3}$$

şeklinde hesaplanır.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde verilen bir Poincare - Cartan 1-formu yardımıyla

$$\alpha_L^{c^m} = d_{j_{c^m}} L^{c^m} + \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} L^{v^{m-s}c^s} dt^{m-s}$$

şeklinde tanımlanan  $\alpha_L^{c^m}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde tanımlı bir 1-form olup,  $\alpha_L^{c^m}$  ye  $\alpha_L$  nin  $m$ . mertebeden tam lift'i denir. Benzer şekilde Poincare - Cartan 2-formu  $\Omega_L$  nin  $m$ . mertebeden tam lift'i de,

$$\Omega_L^{c^m} = dd_{j_{c^m}} L^{c^m} + \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} dL^{v^{m-s}c^s} \wedge dt^{m-s}$$

şeklinde tanımlanırsa;  $\Omega_L^{c^m}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde bir 2-formdur.

Böylece, düşey ve tam lift özelliklerinden;

$$\alpha_L^{c^m} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} \left( -v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^{m-s}c^s}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^{m-s} + \frac{\partial L^{v^{m-s}c^s}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{(m-s)\alpha} + L^{v^{m-s}c^s} dt^{m-s} \right)$$

eşitliği elde edilir. İndislerde düzenleme yapılırsa;

$$\alpha_L^{c^m} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( -v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^s + \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} + L^{v^s c^{m-s}} dt^s \right) \quad (2.6.4)$$

olur. Ayrıca Poincare - Cartan 2-formunun elde edilmesinde kolaylık sağlanması bakımından Poincare - Cartan 1-formu (2.6.4) eşitliği ile ifade edilecektir. Böylece,  $d$  diferensiyel operatör,

$$d = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} dt^s + \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} + \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \right)$$

olduğundan Poincare - Cartan 2-formu,

$$\begin{aligned} \Omega_L^{c^m} = & \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( -v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^s \wedge dt^s \right. \\ & + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dt^s \wedge dv_{ri}^{s\alpha} + \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s} dt^s \wedge dt^s \\ & - v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \wedge dt^s + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\beta} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\beta} \wedge dv_{ri}^{s\alpha} \\ & + \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \wedge dt^s - v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \wedge dt^s \\ & \left. + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \wedge dv_{ri}^{s\alpha} + \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \wedge dt^s \right) \\ & - \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \wedge dt^s \\ & - \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dt^s \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left\{ \left( -v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s} \right) dt^s \wedge dt^s \right. \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) dt^s \wedge dv_{ri}^{s\alpha} \\
&\quad + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\beta} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\beta} \wedge dv_{ri}^{s\alpha} + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) dt^s \wedge dv_{ki}^{s\alpha} \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} \wedge dv_{ri}^{s\alpha} \right\} - \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \wedge dt^s \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} \wedge dt^s \right)
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

olarak hesaplanır.

**Tanım 2.6.1.**  $\Omega_L^{c^m}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerinde Poincare - Cartan 2-formu ise bu durumda,

$$i_{\xi_L^{c^m}} \Omega_L^{c^m} = 0, \quad i_{\xi_L^{c^m}} dt^s = 1 \tag{2.6.6}$$

denklemlerini sağlayan bir tek  $\xi_L^{c^m}$  semisprayına zamana bağlı Euler -Lagrange vektör alanının  $m$ . mertebeden tam lift'i denir.

Ayrıca,  $i_{\xi_L^{c^m}} dt^s = 1$  olduğundan,  $\xi_L^{c^m}$  vektör alanı lokal olarak,

$$\xi_L^{c^m} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right)$$

şeklinde ifade edilir.  $\xi_L^{c^m}$  vektör alanı aynı zamanda  $i_{\xi_L^{c^m}} \Omega_L^{c^m} = 0$  eşitliğini sağladığı için (2.6.5) eşitliği de kullanılarak,

$$\begin{aligned}
i_{\xi_L^m} \Omega_L^{c^m} &= \Omega_L^{c^m} (\xi_L^m) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left\{ \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) dv_{ri}^{s\alpha} + \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) dv_{ki}^{s\alpha} \right. \\
&\quad \left. - X_{ri}^{s\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) dt^s \right. \\
&\quad \left. - X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ki}^{s\alpha} - \xi^{si} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) dt^s \right. \\
&\quad \left. + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \right\} + \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} dv_{ki}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} dt^s + \xi^{0i} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} dt^s \right) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left[ -X_{ri}^{s\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) - \xi^{si} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) \right] \\
&\quad + \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( -X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} + \xi^{0i} \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \right) dt^s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \\
& \left. + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) dv_{ri}^{s\alpha} \\
& + \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) dv_{ki}^{s\alpha}
\end{aligned}$$

elde edilir.  $i_{\xi c^m} \Omega_L^{c^m} = 0$  olduğundan,

$$\begin{aligned}
1) \quad & \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left[ X_{ri}^{s\alpha} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) \right. \\
& \left. + \xi^{si} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \\
& \left. - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$3) \quad \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( v_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{ri}^{s\alpha} \right) \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} = 0$$

denklemlerine ulaşılır. 3) denkleminden  $\frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \neq 0$  olduğu için

$X_{ri}^{s\alpha} = v_{(r+1)i}^{0\alpha}$  elde edilir. Bu koşul altında 2) denklemindeki ifade kullanılarak

1) denklemini,  $X_{ri}^{s\alpha} \cdot (0) = 0$  olur. Buradan,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) = 0 \quad (2.6.7)$$

denkleminde ulaşılır.

Aynı zamanda Euler - Lagrange vektör alanının m. mertebeden tam lift'i,

$$\xi_L^{c^m} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + v_{(r+1)i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} + \xi^{si} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right) \quad (2.6.8)$$

olarak tanımlanabilir.

şimdi  $\alpha^{m+1} : \mathbb{R} \rightarrow J^k \pi^m$  eğrisi,  $\xi_L^{c^m}$  vektör alanının bir çözümü, yani bu eğri  $\xi_L^{c^m}$  nin bir integral eğrisi olsun. Eğer,  $\alpha^{m+1}(t) = (v_{0i}^{s\alpha}(t))$  ise bu durumda k. jet,

$$(j^k \alpha^{m+1}(t)) = (t^s(t), v_{0i}^{s\alpha}(t), v_{ri}^{s\alpha}(t))$$

olup,  $\alpha^{m+1}$  eğrisinin  $\xi_L^{c^m}$  nin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^{k+1} v_{0i}^{s\alpha}}{dt^{s^{k+1}}} = \frac{dv_{ki}^{s\alpha}}{dt^s} = \xi^{si}(t^s, v_{0i}^{s\alpha}, v_{ri}^{s\alpha}) ; s = 0, 1, \dots, m$$

diferensiyel denklem sistemini sağlamasıdır. Dolayısıyla (2.6.7) denklemi,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \left( \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial t^s \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} + \left( \frac{dv_{ri}^{s\alpha}}{dt^s} \right) \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ri}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right. \\ \left. + \left( \frac{dv_{ki}^{s\alpha}}{dt^s} \right) \frac{\partial^2 L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{ki}^{s\alpha} \partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \right) = 0$$

olarak verilebilir. Ayrıca  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k \pi^m)$  demeti üzerinde  $\frac{d}{dt^s}$  vektör alanı,

$$\frac{d}{dt^s} = \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^0} + \left( \frac{dv_{ri}^{s\alpha}}{dt^s} \right) \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} + \left( \frac{dv_{ki}^{s\alpha}}{dt^s} \right) \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{s\alpha}} \right)$$

olarak ifade edildiği için (2.6.9) denklemi ,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \frac{d}{dt^s} \left( \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{(r+1)i}^{0\alpha}} \right) - \frac{\partial L^{v^s c^{m-s}}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = 0 \quad (2.6.9)$$

eşitliği ile elde edilir. Lift teori özellikleri kullanılarak bu denklem,

$$\sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^m \binom{m}{m-s} \frac{d}{dt^s} \left( \frac{\partial L^{c^m}}{\partial v_{(r+1)i}^{s\alpha}} \right) - \frac{\partial L^{c^m}}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} = 0 \quad (2.6.10)$$

olarak düzenlenebilir. (2.6.10) denkleminin zamana bağlı Euler - Lagrange denkleminin  $m$ . mertebeden tam lift'i denir.

## Bölüm 3

# GENİŞLETİLMİŞ JET DEMETLERİ ÜZERİNDE HAMILTON DENKLEMLERİ

Bu bölümde, öncelikle  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde Hamilton denklemi elde edilmiş ve lift teori kullanarak; bu denklem  $J^k\pi^m$  genişletilmiş jet demeti üzerine taşınmıştır. Daha sonra da, benzer bir düşünce ile genişletilmiş jet demetleri üzerinde zamana bağlı olan Hamilton denklemleri oluşturulmuştur.

### 3.1 $J^k\pi$ Üzerinde Hamilton Denklemi

$k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$  için  $J^k\pi$ ,  $\pi = (E, \pi, M)$  demeti üzerinde

$$m + n + \frac{1}{k!} m(m+1) \dots (m+k-1)n$$

boyutlu  $k$ . jet manifold,  $TJ^k\pi$  tanjant demeti,  $\tau_{J^k\pi} : TJ^k\pi \rightarrow J^k\pi$  kanonik projeksiyon olsun.  $J^k\pi$  de lokal koordinatlar  $(x^{0i}, u^{0\alpha}, u_{ri}^{0\alpha})$  ( $r = 1, 2, \dots, k$ ) ve  $J^k\pi$  nin herhangi bir  $p$  noktasındaki tanjant ve kotanjant uzayların bazları

sırasıyla;

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{0i}}, \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq r \leq k \right\}$$

ve

$$\{ dx^{0i}, du^{0\alpha}, du_{ri}^{0\alpha} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n, 1 \leq r \leq k \}$$

olarak verilsin.

Aynı zamanda;  $J^k\pi$  üzerindeki Liouville formu,

$$\lambda = u_{(r+1)i}^{0\alpha} du^{0\alpha}$$

olarak ifade edilir.

$J^k\pi$  üzerinde  $\lambda$  bir Liouville form ve  $\lambda$  ile birleşen kanonik simplektik form  $\phi$  olmak üzere,

$$\phi = -d\lambda = \sum_{r=0}^{k-1} du^{0\alpha} \wedge du_{(r+1)i}^{0\alpha}$$

şeklinde tanımlanır.

**Tanım 3.1.1.**  $J^k\pi$  üzerinde  $\phi$  simplektik formu eğer non-dejenere ve kapalı ise, bu durumda  $(J^k\pi, \phi)$  ikilisine bir *simplektik manifold* adı verilir.

**Tanım 3.1.2.**  $(J^k\pi, \phi)$  bir simplektik manifold,  $J^k\pi$  üzerinde  $H : J^k\pi \rightarrow \mathbb{R}$  bir Hamilton enerji fonksiyonu ve

$$J^k\pi_\phi : \chi(J^k\pi) \rightarrow \wedge^1(J^k\pi)$$

bir lineer izomorfizm olsun. Bu durumda,  $J^k\pi$  üzerinde

$$i_{X_H}\phi = dH \quad (3.1.1)$$

eşitliğini sağlayan  $X_H$  vektör alanına bir *Hamilton vektör alanı* ve  $(J^k\pi, \phi, X_H)$  üçlüsüne de bir *Hamilton sistemi* denir.

**Teorem 3.1.1.**  $(J^k\pi, \phi)$  simplektik manifoldu üzerindeki Hamilton vektör alanı lokal olarak,

$$X_H = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} - \frac{\partial H}{\partial u^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right) \quad (3.1.2)$$

dir.

**İspat:** Kabul edelim ki,  $X_H$  Hamilton vektör alanı,

$$X_H = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + X^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + X_{1i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{1i}^{0\alpha}} + \dots + X_{ki}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ki}^{0\alpha}}$$

yani

$$X_H = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + X^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + \sum_{r=1}^k X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}$$

olsun. Bu durumda  $J^k \pi_\phi$  izomorfizmi göz önüne alınırsa,  $\phi$ ,  $J^k \pi$  üzerinde kapalı 2-form olup,

$$J^k \pi_\phi : X_H \in \chi(J^k \pi) \longrightarrow J^k \pi_\phi(X_H) = i_{X_H} \phi \in \wedge^1(J^k \pi)$$

izomorfizmine göre,

$$\begin{aligned} J^k \pi_\phi &= i_{X_H} \phi \\ &= \sum_{r=1}^k (du^{0\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha}) \left( \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + X^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right) \\ &= X^{0\alpha} du_{1i}^{0\alpha} + X^{0\alpha} du_{2i}^{0\alpha} + \dots + X^{0\alpha} du_{ki}^{0\alpha} - X_{1i}^{0\alpha} du^{0\alpha} - \dots - X_{ki}^{0\alpha} du^{0\alpha} \\ &= \sum_{r=1}^k (X^{0\alpha} du_{ri}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} du^{0\alpha}) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.  $i_{X_H} \phi = dH$  ve  $dH = \frac{\partial H}{\partial x^{0i}} dx^{0i} + \sum_{r=0}^k \frac{\partial H}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} du_{ri}^{0\alpha}$  olduğuna göre,

$$\frac{\partial H}{\partial x^{0i}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial u^{0\alpha}} = -X_{ri}^{0\alpha} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} = X^{0\alpha} \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

denkleminde ulaşılır. Buna göre  $X_H$  vektör alanı,

$$X_H = \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right) \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + \left( -\frac{\partial H}{\partial u^{0\alpha}} \right) \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi,  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J^k\pi$ ;  $\alpha(t) = (x^{0i}(t), u^{0\alpha}(t), u_{ri}^{0\alpha}(t))$  eğrisi  $X_H$  Hamilton vektör alanının integral eğrisi ise,

$$X_H(\alpha(t)) = \dot{\alpha}(t), \quad t \in I \quad (3.1.3)$$

olur. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= X_H(x^{0i}(t), u^{0\alpha}(t), u_{ri}^{0\alpha}(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} - \frac{\partial H}{\partial u^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \right) \end{aligned}$$

ve

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{dx^{0i}}{dt} \frac{\partial}{\partial x^{0i}} + \frac{du^{0\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial u^{0\alpha}} + \sum_{r=1}^k \frac{du_{ri}^{0\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}$$

olduğundan (3.1.3) eşitliğine göre,

$$\frac{du^{0\alpha}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}, \quad \frac{du_{ri}^{0\alpha}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u^{0\alpha}} \quad (r = 1, 2, \dots, k) \quad (3.1.4)$$

denklemleri elde edilir.

(3.1.4) denklemlerine  $J^k\pi$  demeti üzerinde *Hamilton denklemleri* denir.

## 3.2 Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Düşey Lift'leri

Bu kısımda,  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde hesaplanan Hamilton denklemlerinin  $J^k\pi^m$  genişletilmiş jet demeti üzerine  $m$ . mertebeden düşey lift'leri elde edilecektir.

$J^k\pi^m$  genişletilmiş jet demeti üzerindeki lokal koordinatlar  $(x^{si}, u^{s\alpha}, u_{ri}^{s\alpha})$  ( $s = 0, 1, \dots, m$ ;  $r = 1, 2, \dots, k$ ) olmak üzere,  $J^k\pi^m$  manifoldunun herhangi bir  $p$  noktasındaki tanjant ve kotanjanant uzaylarının bazıları sırasıyla,

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^{si}}, \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}}, \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} : 1 \leq r \leq k, 0 \leq s \leq m \right\}$$

ve

$$\{dx^{si}, du^{s\alpha}, du_{ri}^{s\alpha} : 1 \leq r \leq k, 0 \leq s \leq m\}$$

olarak verilsin.

$J^k\pi$  manifoldu üzerinde verilen bir  $\phi$  2-formunun  $m$ . mertebeden düşey lift'i,

$$\begin{aligned} \phi^{v^m} &= d\lambda^{v^m} \\ &= d\left(\sum_{r=1}^k (u^{0\alpha})^{v^m} (du_{ri}^{0\alpha})^{v^m}\right) \\ &= d\left(\sum_{r=1}^k u^{0\alpha} du_{ri}^{0\alpha}\right) \\ &= \sum_{r=1}^k du^{0\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca  $\phi^{v^m}$ ,  $J^k\pi^m$  demeti üzerinde bir simplektik yapıdır.

**Tanım 3.2.1.**  $(J^k\pi^m, \phi^{v^m})$  genişletilmiş simplektik manifold ve  $H^{v^m} : J^k\pi^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J^k\pi^m$  manifoldu üzerinde bir Hamilton fonksiyonu ve

$$J^k\pi_{\phi^{v^m}}^m : \chi(J^k\pi^m) \rightarrow \wedge^1 J^k\pi^m$$

bir lineer izomorfizm olsun. Bu durumda,  $J^k\pi^m$  üzerinde

$$i_{X_{H^{v^m}}} \phi^{v^m} = dH^{v^m} \quad (3.2.2)$$

eşitliğini sağlayan  $X_{H^{v^m}}$  vektör alanına *Hamilton vektör alanının  $m$ . mertebeden düşey lift'i* ve  $(J^k\pi^m, \phi^{v^m}, X_{H^{v^m}})$  üçlüsüne de  $J^k\pi$  üzerindeki *Hamilton sistemin  $m$ . mertebeden düşey lift'i* denir.

**Teorem 3.2.1.**  $(J^k\pi, \phi)$  simplektik manifoldu üzerindeki  $X_H$  Hamilton vektör alanının  $J^k\pi^m$  demetine  $m$ . mertebeden düşey lift'i,

$$X_H^{v^m} = \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} - \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) \quad (3.2.3)$$

dir.

**İspat:** Kabul edelim ki,  $X_H$  vektör alanının  $(J^k\pi^m, \phi^{v^m})$  simplektik manifoldu üzerine m. mertebeden düşey lift'i,

$$X_H^{v^m} = \frac{\partial}{\partial x^{si}} + (X^{0\alpha})^{v^m} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^{v^m} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}}$$

olsun. (3.2.1) e göre,  $J^k\pi$  üzerindeki kapalı  $\phi$ , 2-formunun m. mertebeden düşey lift'i,

$$\phi^{v^m} = du^{0\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha}$$

dir.  $J^k\pi_{\phi^{v^m}}^m$  izomorfizmine göre,

$$\begin{aligned} i_{X_H^{v^m}} \phi^{v^m} &= \phi^{v^m} (X_H^{v^m}) \\ &= \sum_{r=1}^k (du^{0\alpha} \wedge du_{ri}^{0\alpha}) \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + (X^{0\alpha})^{v^m} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} + (X_{ri}^{0\alpha})^{v^m} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) \\ &= \sum_{r=1}^k (X^{0\alpha})^{v^m} du_{ri}^{0\alpha} - (X_{ri}^{0\alpha}) du^{0\alpha} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan Hamilton fonksiyonunun m. mertebeden düşey lift'inin diferensiyeli,

$$dH^{v^m} = \frac{\partial H^{v^m}}{\partial x^{si}} dx^{si} + \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u^{s\alpha}} du^{s\alpha} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \quad (3.2.5)$$

olur. (3.2.2) izomorfizmine göre, (3.2.4) ve (3.2.5) eşitlenirse;

$$(X^{0\alpha})^{v^m} = \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}, \quad (X_{ri}^{0\alpha})^{v^m} = -\frac{\partial H^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}}$$

olup, Hamilton vektör alanının m. mertebeden düşey lift'i,

$$X_H^{v^m} = \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} - \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right)$$

şeklinde elde edilir.

$\alpha^{m+1} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J^k\pi^m$  eğrisinin  $X_H^{v^m}$  Hamilton vektör alanının integral eğrisi olduğunu kabul edelim. Diğer bir ifadeyle,

$$X_H^{v^m} (\alpha^{m+1}(t)) = \dot{\alpha}^{m+1}(t), \quad t \in I \quad (3.2.6)$$

eşitliği doğru olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^{m+1}(t) &= X_H^{v^m}(x^{si}(t), u^{s\alpha}(t), u_{ri}^{s\alpha}(t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} - \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right)\end{aligned}$$

ve

$$\dot{\alpha}^{m+1}(t) = \sum_{s=0}^m \left( \frac{dx^{si}}{dt} \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \sum_{r=0}^k \frac{du_{ri}^{s\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right)$$

olduğundan (3.2.6) eşitliğine göre,

$$\frac{du^{s\alpha}}{dt} = \frac{\partial H^{v^m}}{\partial u_{ri}^{0\alpha}}, \quad \frac{du_{ri}^{s\alpha}}{dt} = -\frac{\partial H^{v^m}}{\partial u^{0\alpha}} \quad (3.2.7)$$

denklemleri elde edilir. (3.2.7) denklemlerine  $J^k\pi$  demeti üzerindeki *Hamilton denklemlerinin*,  $J^k\pi^m$  demeti üzerine  $m$ . mertebeden *düşey lift*'i denir.

### 3.3 Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Tam Lift'leri

Bu bölümde,  $J^k\pi$  jet demeti üzerinde kurulan Hamilton denklemlerinin  $J^k\pi^m$  genişletilmiş jet demeti üzerine  $m$ . mertebeden tam lift'leri elde edilecektir. Ayrıca,  $J^k\pi^m$  genişletilmiş jet demeti üzerinde tanımlı notasyonlar, Bölüm 3.2 de tanımlandığı şekliyle alınacaktır.

$J^k\pi$  manifoldu üzerinde verilen bir  $\phi$  kapalı 2-formunun  $m$ . mertebeden tam lift'i,

$$\begin{aligned}\phi^{c^m} &= d\lambda^{c^m} \\ &= d \left( \sum_{r=1}^k u^{0\alpha} du_{ri}^{0\alpha} + u^{1\alpha} du_{ri}^{1\alpha} + \dots + u^{m\alpha} du_{ri}^{m\alpha} \right) \\ &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m du^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{s\alpha}\end{aligned} \quad (3.3.1)$$

şeklinde hesaplanır. Ayrıca,  $\phi^{c^m}$   $J^k\pi^m$  demeti üzerinde bir simplektik yapıdır.

**Tanım 3.3.1.**  $(J^k\pi^m, \phi^{v^m})$  genişletilmiş simplektik jet manifold ve  $H^{c^m} : J^k\pi^m \longrightarrow \mathbb{R}$ ,  $J^k\pi^m$  manifoldu üzerinde bir Hamilton fonksiyonu ve

$$J^k\pi_{\phi^{c^m}}^m : \chi(J^k\pi^m) \longrightarrow \wedge^1(J^k\pi^m)$$

bir lineer izomorfizm olsun. Bu durumda,  $J^k\pi^m$  üzerinde

$$i_{X_{H^{c^m}}}\phi^{c^m} = dH^{c^m} \quad (3.3.2)$$

eşitliğini sağlayan  $X_{H^{c^m}}$  vektör alanına Hamilton vektör alanının  $m$ . mertebeden tam lift'i ve  $(J^k\pi^m, \phi^{c^m}, X_H^{c^m})$  üçlüsüne de  $J^k\pi$  üzerindeki Hamilton sisteminin  $m$ . mertebeden tam lift'i denir.

**Teorem 3.3.1.**  $(J^k\pi, \phi)$  simplektik jet manifoldu üzerindeki  $X_H$  Hamilton vektör alanının  $J^k\pi^m$  demetine  $m$ . mertebeden tam lift'i,

$$X_{H^{c^m}} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} - \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) \quad (3.3.3)$$

dir.

**İspat:** Kabul edelim ki,  $X_H$  vektör alanının  $(J^k\pi^m, \phi^{c^m})$  simplektik manifoldu üzerine  $m$ . mertebeden tam lift'i

$$\begin{aligned} X_{H^{c^m}} &= \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \binom{m}{s} (X^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} + \sum_{r=1}^k \binom{m}{s} (X_{ri}^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) \\ &= \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \binom{m}{s} X^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} + \sum_{r=1}^k \binom{m}{s} X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda, (3.3.1) e göre,  $J^k\pi$  üzerindeki  $\phi$ , 2-formunun  $m$ . mertebeden tam lift'i,

$$\phi^{c^m} = \sum_{s=0}^m du^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{s\alpha}$$

dir.  $J^k \pi_{\phi^{c^m}}^m$  izomorfizmine göre,

$$\begin{aligned}
i_{X_{H^{c^m}}} \phi^{c^m} &= \phi^{c^m} (X_{H^{c^m}}) \\
&= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m (du^{s\alpha} \wedge du_{ri}^{s\alpha}) \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \binom{m}{s} X^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} + \sum_{r=1}^k \binom{m}{s} X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right) \\
&= \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} X^{s\alpha} du_{ri}^{s\alpha} - \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} X_{ri}^{s\alpha} du^{s\alpha} \\
&= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (X^{s\alpha} du_{ri}^{s\alpha} - X_{ri}^{s\alpha} du^{s\alpha})
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

şeklinde ifade edilir. Diğer taraftan Hamilton fonksiyonunun m. mertebeden tam lift'inin diferensiyeli,

$$dH^{c^m} = \frac{\partial H^{c^m}}{\partial x^{si}} dx^{si} + \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u^{s\alpha}} du^{s\alpha} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} du_{ri}^{s\alpha} \tag{3.3.5}$$

olur. (3.3.2) izomorfizmine göre (3.3.4) ve (3.3.5) eşitlenirse,

$$\binom{m}{s} X^{s\alpha} = \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}}, \quad \binom{m}{s} X_{ri}^{s\alpha} = -\frac{\partial H^{c^m}}{\partial u^{s\alpha}}$$

olup; Hamilton vektör alanının m. mertebeden tam lift'i,

$$X_{H^{c^m}} = \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} - \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right)$$

şeklinde elde edilir.

Kabul edelim ki,

$$\alpha^{m+1} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow J^k \pi^m$$

eğrisi  $X_{H^{c^m}}$  Hamilton vektör alanının integral eğrisi olsun.

Yani,

$$X_{H^{c^m}} (\alpha^{m+1}(t)) = \dot{\alpha}^{m+1}(t), \quad t \in I \tag{3.3.6}$$

gerçekleşsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}^{m+1}(t) &= X_{H^{c^m}} (x^{si}(t), u^{s\alpha}(t), u_{ri}^{s\alpha}(t)) \\
&= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial u^{s\alpha}} - \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\dot{\alpha}^{m+1}(t) = \sum_{s=0}^m \left( \frac{dx^{si}}{dt} \frac{\partial}{\partial x^{si}} + \sum_{r=0}^k \frac{du_{ri}^{s\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial u_{ri}^{s\alpha}} \right)$$

olduğundan (3.2.6) eşitliğine göre,

$$\frac{du^{s\alpha}}{dt} = \frac{\partial H^{c^m}}{\partial u_{ri}^{s\alpha}}, \quad \frac{du_{ri}^{s\alpha}}{dt} = -\frac{\partial H^{c^m}}{\partial u^{s\alpha}} \quad (3.3.7)$$

denklemleri elde edilir. (3.3.7) denklemlerine  $J^k\pi$  demeti üzerindeki Hamilton denklemlerinin,  $J^k\pi^m$  demeti üzerine  $m$ . mertebeden tam lift'i denir.

### 3.4 $J^k\pi$ Üzerinde Zamana Bağlı Hamilton Denklemleri

Bu kısımda, Bölüm 2.4 de elde edilen  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  jet manifoldu göz önüne alınarak; zamana bağlı Hamilton denklemleri elde edilmiştir.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerindeki lokal koordinatlar  $(t^0, v_{0i}^{0\alpha}, v_{ri}^{0\alpha})$  ( $1 \leq r \leq k$ ) ve  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  manifoldunun herhangi bir  $p$  noktasındaki tanjant ve kotanjant uzayların bazları sırasıyla

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t^0}, \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{0\alpha}}, \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} : 1 \leq r \leq k \right\}$$

ve  $\{dt^0, dv_{0i}^{0\alpha}, dv_{ri}^{0\alpha} : 1 \leq r \leq k\}$  olarak verilsin.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde Liouville formu,

$$\lambda = \sum_{r=0}^{k-1} v_{(r+1)i}^{0\alpha} dv_{0i}^{0\alpha}$$

olarak tanımlanırsa,  $\phi$  kanonik simplektik 2-formu,

$$\phi_t = -d\lambda = \sum_{r=0}^{k-1} dv_{0i}^{0\alpha} \wedge dv_{(r+1)i}^{0\alpha} \quad (3.4.1)$$

şeklinde hesaplanır.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde non-dejenere  $\phi_t$  2-formuna yaklaşık simplektik form, buna bağlı olarak  $(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi), \phi_t)$  ikilisine *yaklaşık simplektik manifold* denir.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde  $\phi_t$  yaklaşık simplektik formu kapalı ise *simplektik form* olarak adlandırılır. Buna bağlı olarak  $(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi), \phi_t)$  ikilisine de *zamana bağlı simplektik manifold* denir.

**Tanım 3.4.1:**  $(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi), \phi_t)$  bir simplektik manifold,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde  $H_t : J^k(\mathbb{R}, J^k\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  zamana bağlı Hamilton enerji fonksiyonu,

$$(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi))_{\phi_t} : \chi(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)) \rightarrow \Lambda^1(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)) \quad (3.4.2)$$

bir lineer izomorfizm olsun. Bu durumda,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerinde

$$i_{X_{H_t}}\phi_t = dH_t \quad (3.4.3)$$

eşitliğini sağlayan  $X_{H_t}$  vektör alanına *zamana bağlı hamilton vektör alanı* ve  $(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi), \phi_t, X_{H_t})$  üçlüsüne *zamana bağlı hamilton sistemi* denir.

**Teorem 3.4.1.**  $(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi), \phi_t)$  simplektik manifoldu üzerindeki zamana bağlı Hamilton vektör alanı

$$X_{H_t} = \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H_t}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} - \frac{\partial H_t}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \right) \quad (3.4.4)$$

dır.

**İspat:**  $X_{H_t}$  vektör alanı,

$$\begin{aligned} X_{H_t} &= \frac{\partial}{\partial t^0} + X_{0i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} + X_{1i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{1i}^{0\alpha}} + \dots + X_{ki}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ki}^{0\alpha}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=0}^k X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \end{aligned}$$

olsun. (3.4.1) den  $\phi_t$ ,

$$\phi_t = \sum_{r=0}^{k-1} dv_{0i}^{0\alpha} \wedge dv_{(r+1)i}^{0\alpha}$$

olduğundan (3.4.2) izomorfizmine göre,

$$\begin{aligned}
i_{X_{H_t}} \phi_t &= \phi_t(X_{H_t}) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \left( dv_{0i}^{0\alpha} \wedge dv_{(r+1)i}^{0\alpha} \right) \left( \frac{\partial}{\partial t^0} + X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \right) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \left( X_{0i}^{0\alpha} dv_{(r+1)i}^{0\alpha} - X_{(r+1)i}^{0\alpha} dv_{0i}^{0\alpha} \right) \\
&= \sum_{r=1}^k \left( X_{0i}^{0\alpha} dv_{ri}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} dv_{0i}^{0\alpha} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.  $i_{X_{H_t}} \phi_t = dH_t$  ve  $dH_t = \frac{\partial H}{\partial t^0} dt^0 + \sum_{r=0}^k \frac{\partial H_t}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} dv_{ri}^{0\alpha}$  olduğuna göre,

$$\frac{\partial H_t}{\partial t^0} = 0, \quad \frac{\partial H_t}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} = -X_{ri}^{0\alpha}, \quad \frac{\partial H_t}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} = X_{0i}^{0\alpha}, \quad r = 1, 2, \dots, k$$

denklemlerine ulaşılır. Buna göre  $X_{H_t}$  vektör alanı,

$$X_{H_t} = \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H_t}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} - \frac{\partial H_t}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \right)$$

olarak elde edilir.

Şimdi,  $\sigma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$ ,  $\sigma(t) = (t^0(t), v_{0i}^{0\alpha}(t), v_{ri}^{0\alpha}(t))$ ,  $r = 1, 2, \dots, k$ ;  $X_{H_t}$  zamana bağlı Hamilton vektör alanının integral eğrisi olsun. Yani,

$$X_{H_t}(\sigma(t)) = \dot{\sigma}(t), \quad t \in I \quad (3.4.5)$$

olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}(t) &= X_{H_t}(t^0(t), v_{0i}^{0\alpha}(t), v_{ri}^{0\alpha}(t)) \\
&= \frac{\partial}{\partial t^0} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H_t}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} - \frac{\partial H_t}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \right)
\end{aligned}$$

ve

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{dt^0}{dt} \frac{\partial}{\partial t^0} + \frac{dv_{0i}^{0\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} + \sum_{r=1}^k \frac{dv_{ri}^{0\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{0\alpha}}$$

olduğundan (3.4.5) eşitliğine göre,

$$\frac{dv_{0i}^{0\alpha}}{dt} = \frac{\partial H_t}{\partial v_{ri}^{0\alpha}}, \quad \frac{dv_{ri}^{0\alpha}}{dt} = -\frac{\partial H_t}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \quad (r = 1, 2, \dots, k) \quad (3.4.6)$$

denklemleri elde edilir. (3.4.6) denklemlerine  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde zamana bağlı Hamilton denklemleri denir.

### 3.5 Zamana Bağlı Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Düşey Lift'leri

Bu kısımda,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  jet demeti üzerinde hesaplanan zamana bağlı Hamilton denklemlerinin,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  genişletilmiş jet demeti üzerine m. mertebeden düşey lift'leri elde edilecektir.

$J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  genişletilmiş jet demeti üzerindeki lokal koordinatlar

$$\{t^s, v_{0i}^{s\alpha}, v_{ri}^{s\alpha} : 0 \leq s \leq m, 0 \leq r \leq k\}$$

dir. Ayrıca,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  manifoldunun herhangi bir  $p$  noktasındaki tangent ve kotanjant uzaylarının bazıları sırasıyla

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t^s}, \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}}, \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} : 0 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq k \right\}$$

ve

$$\{dt^s, dv_{0i}^{s\alpha}, dv_{ri}^{s\alpha} : 0 \leq s \leq m, 1 \leq r \leq k\}$$

olarak verilsin.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  manifoldu üzerinde verilen bir  $\phi_t$  2-formunun m. mertebeden düşey lift'i  $\phi_t^{v^m}$  ile gösterilip,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  üzerinde bir simplektik yapıdır:

$$\begin{aligned} \phi_t^{v^m} &= d\lambda^{v^m} & (3.5.1) \\ &= d \left( \sum_{r=0}^{k-1} (v_{0i}^{0\alpha})^{v^m} (dv_{(r+1)i}^{0\alpha})^{v^m} \right) \\ &= \sum_{r=0}^{k-1} (dv_{0i}^{0\alpha} \wedge dv_{(r+1)i}^{0\alpha}) \end{aligned}$$

olur.

**Tanım 3.5.1:**  $(J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m), \phi_t^{v^m})$  genişletilmiş simplektik jet manifold ve  $H_t^{v^m} : J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  üzerinde zamana bağlı bir Hamilton fonksiyon olsun.

$$J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)_{\phi_t^{v^m}} : \chi(J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)) \rightarrow \Lambda^1(J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)) \quad (3.5.2)$$

dönüşümü bir izomorfizm olmak üzere,

$$i_{X_{H_t^{v^m}}} \phi_t^{v^m} = dH_t^{v^m} \quad (3.5.3)$$

eşitliğini sağlayan  $X_{H_t^{v^m}}$  vektör alanına  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerindeki *Hamilton vektör alanının m. mertebeden düşey lift'i* denir.

**Teorem 3.5.1.**  $(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi), \phi)$  simplektik jet manifoldu üzerindeki  $X_{H_t}$  Hamilton vektör alanının m. mertebeden düşey lift'i,

$$X_{H_t^{v^m}} = \frac{\partial}{\partial t^s} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} - \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) \quad (3.5.4)$$

dır.

**İspat:** Kabul edelimki;  $X_{H_t}$  vektör alanının  $(J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m), \phi_t^{v^m})$  geniş-

letilmiş simplektik jet manifoldu üzerine m. mertebeden düşey lift'i,

$$\begin{aligned} X_{H_t^{v^m}} &= \frac{\partial}{\partial t^s} + (X_{0i}^{0\alpha})^{v^m} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} + \sum_{r=1}^k (X_{ri}^{0\alpha})^{v^m} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \\ &= \frac{\partial}{\partial t^s} + X_{0i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} + \sum_{r=1}^k X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \end{aligned}$$

olsun. (3.5.1) e göre  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerindeki  $\phi_t$  kapalı 2-formunun m. mertebeden düşey lift'i  $\phi_t^{v^m}$  olup,

$$\phi_t^{v^m} = \sum_{r=0}^{k-1} (dv_{0i}^{0\alpha} \wedge dv_{(r+1)i}^{0\alpha}) = \sum_{r=1}^k (dv_{0i}^{0\alpha} \wedge dv_{ri}^{0\alpha})$$

dır. (3.5.2) izomorfizmine göre,

$$\begin{aligned}
 i_{X_{H_t}^{v^m}} \phi_t^{v^m} &= \phi_t^{v^m} (X_{H_t}^{v^m}) \\
 &= \sum_{r=1}^k (dv_{0i}^{0\alpha} \wedge dv_{ri}^{0\alpha}) \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + X_{0i}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} + X_{ri}^{0\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) \\
 &= \sum_{r=1}^k (X_{0i}^{0\alpha} dv_{ri}^{0\alpha} - X_{ri}^{0\alpha} dv_{0i}^{0\alpha})
 \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

olarak ifade edilir. Diğer taraftan zamana bağlı hamilton fonksiyonunun m. mertebeden düşey lift'inin diferensiyeli,

$$dH_t^{v^m} = \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial t^s} dt^s + \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} dv_{0i}^{s\alpha} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \tag{3.5.6}$$

olur. (3.5.2) izomorfizmine göre (3.5.5) ve (3.5.6) eşitlenirse,

$$X_{0i}^{0\alpha} = \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}}, \quad X_{ri}^{0\alpha} = -\frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}}$$

elde edilir. Böylece, zamana bağlı Hamilton vektör alanının m. mertebeden düşey lift'i,

$$X_{H_t}^{v^m} = \frac{\partial}{\partial t^s} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} - \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right)$$

olarak elde edilir.

$$\sigma^{m+1} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k \pi^m)$$

eğrisinin  $X_{H_t}^{v^m}$  Hamilton vektör alanının integral eğrisi olduğunu kabul edelim.

Diğer bir ifadeyle,

$$X_{H_t}^{v^m} (\sigma^{m+1}(t)) = \dot{\sigma}^{m+1}(t), \quad t \in I \tag{3.5.7}$$

eşitliğinin doğru olduğunu düşünelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 \dot{\sigma}^{m+1}(t) &= X_{H_t}^{v^m} (t^s(t), v_{0i}^{s\alpha}(t), v_{ri}^{s\alpha}(t)) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t^s} + \sum_{r=1}^k \left( \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} - \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right)
 \end{aligned}$$

ve

$$\sigma^{m+1}(t) = \frac{dt^s}{dt} \frac{\partial}{\partial t^s} + \frac{dv_{0i}^{s\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} + \sum_{r=1}^k \frac{dv_{ri}^{s\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}}$$

olduğundan (3.5.7) eşitliğine göre,

$$\frac{dv_{0i}^{s\alpha}}{dt} = \frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}}, \quad \frac{dv_{ri}^{s\alpha}}{dt} = -\frac{\partial H_t^{v^m}}{\partial v_{0i}^{0\alpha}} \quad (3.5.8)$$

denklemleri elde edilir. (3.5.8) denklemlerine,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerindeki zamana bağlı Hamilton denklemlerinin  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerine  $m$ . mertebeden düşey lift'i denir.

### 3.6 Zamana Bağlı Hamilton Denklemlerinin Yüksek Mertebeden Tam Lift'leri

Bu kısımda,  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerinde hesaplanan Hamilton denklemlerinin  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  genişletilmiş jet demeti üzerine  $m$ . mertebeden tam lift'leri elde edilecektir.

Bu bölümde kullanılacak olan  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  genişletilmiş jet demeti üzerindeki notasyonlar Bölüm 3.5 de tanımlandığı şekliyle alınacaktır.

$J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  manifoldu üzerinde  $\phi_t$  kapalı 2-formunun  $m$ . mertebeden tam lift'i  $\phi_t^{c^m}$  ile gösterilip,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  üzerinde bir simplektik yapıdır, ayrıca

$$\begin{aligned} \phi_t^{c^m} &= d\lambda^{c^m} \\ &= d\left(\sum_{r=1}^k v_{0i}^{0\alpha} dv_{ri}^{0\alpha} + v_{0i}^{1\alpha} dv_{ri}^{1\alpha} + \dots + v_{0i}^{m\alpha} dv_{ri}^{m\alpha}\right) \\ &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m (dv_{0i}^{s\alpha} \wedge dv_{ri}^{s\alpha}) \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

olarak elde edilir.

**Tanım 3.6.1.**  $(J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m), \phi_t^{c^m})$  genişletilmiş simplektik jet manifold ve  $H_t^{c^m} : J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  üzerinde zamana bağlı Hamilton fonksiyon olsun.

$$J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)_{\phi_t^{c^m}} : \chi(J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)) \rightarrow \wedge^1(J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)) \quad (3.6.2)$$

dönüşümü bir izomorfizm olmak üzere,

$$i_{X_{H_t}^{c^m}} \phi_t^{c^m} = dH_t^{c^m} \quad (3.6.3)$$

eşitliğini sağlayan  $X_{H_t}^{c^m}$  vektör alanına  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerindeki zamana bağlı hamilton vektör alanının  $m$ . mertebeden tam lift'i denir.

**Teorem 3.6.1.**  $(J^k(\mathbb{R}, J^k\pi), \phi_t)$  simplektik jet manifoldu üzerindeki zamana bağlı Hamilton vektör alanının  $m$ . mertebeden tam lift'i,

$$X_{H_t}^{c^m} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} - \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) \quad (3.6.4)$$

dır.

**İspat:** Kabul edelimki  $X_{H_t}$  vektör alanının  $(J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m), \phi_t^{c^m})$  genişletilmiş simplektik jet manifold üzerine  $m$ . mertebeden tam lift'i,

$$\begin{aligned} X_{H_t}^{c^m} &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + \binom{m}{s} (X_{0i}^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} + \binom{m}{s} (X_{ri}^{0\alpha})^{v^{m-s}c^s} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) \\ &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + \binom{m}{s} X_{0i}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} + \binom{m}{s} X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) \end{aligned}$$

olsun. (3.6.1) e göre  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  üzerindeki  $\phi_t$  kapalı 2-formunun  $m$ . mertebeden tam lift'i,

$$\phi_t^{c^m} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m (dv_{0i}^{s\alpha} \wedge dv_{ri}^{s\alpha})$$

dır. (3.6.2) izomorfizmine göre,

$$\begin{aligned}
 i_{X_{H_t}} \phi_t^{c^m} &= \phi_t^{c^m} (X_{H_t}^{c^m}) \\
 &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m (dv_{0i}^{s\alpha} \wedge dv_{ri}^{s\alpha}) \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + \binom{m}{s} X_{0i}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} + \binom{m}{s} X_{ri}^{s\alpha} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right) \\
 &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} (X_{0i}^{s\alpha} dv_{ri}^{s\alpha} - X_{ri}^{s\alpha} dv_{0i}^{s\alpha})
 \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

olarak ifade edilir. Diğer taraftan Hamilton fonksiyonunun m. mertebeden tam lift'inin diferensiyeli,

$$dH_t^{c^m} = \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial t^s} dt^s + \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} dv_{0i}^{s\alpha} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} dv_{ri}^{s\alpha} \tag{3.6.6}$$

olur. (3.6.3) izomorfizmine göre (3.6.5) ve (3.6.6) eşitlenirse

$$\binom{m}{s} X_{0i}^{s\alpha} = \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}}, \quad \binom{m}{s} X_{ri}^{s\alpha} = -\frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{0i}^{s\alpha}}$$

denklemleri elde edilir. Böylece, zamana bağlı hamilton vektör alanının m. mertebeden tam lift'i,

$$X_{H_t}^{c^m} = \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} - \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right)$$

olarak elde edilir.

Kabul edelim ki,

$$\sigma^{m+1} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k \pi^m)$$

eğrisi  $X_{H_t}^{c^m}$  Hamilton vektör alanının bir integral eğrisi olsun. Diğer bir ifadeyle

$$X_{H_t}^{c^m} (\sigma^{m+1}(t)) = \dot{\sigma}^{m+1}(t), \quad t \in I \tag{3.6.7}$$

eşitliği doğru olsun. Bu durumda,

$$\dot{\sigma}^{m+1}(t) = X_{H_t}^{c^m}(t^s(t), v_{0i}^{s\alpha}(t), v_{ri}^{s\alpha}(t))$$

$$= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \left( \frac{\partial}{\partial t^s} + \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} - \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right)$$

ve

$$\sigma^{m+1}(t) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^m \left( \frac{dt^s}{dt} \frac{\partial}{\partial t^s} + \frac{dv_{0i}^{s\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{0i}^{s\alpha}} + \frac{dv_{ri}^{s\alpha}}{dt} \frac{\partial}{\partial v_{ri}^{s\alpha}} \right)$$

olduğundan (3.6.7) eşitliğine göre,

$$\frac{dv_{0i}^{s\alpha}}{dt} = \frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{ri}^{s\alpha}}, \quad \frac{dv_{ri}^{s\alpha}}{dt} = -\frac{\partial H_t^{c^m}}{\partial v_{ri}^{0\alpha}} \quad (3.6.8)$$

denklemleri elde edilir.

(3.6.8) denklemlerine  $J^k(\mathbb{R}, J^k\pi)$  demeti üzerindeki zamana bağlı Hamilton denklemlerinin  $J^k(\mathbb{R}^{m+1}, J^k\pi^m)$  demeti üzerine  $m$ . mertebeden tam lift'i denir.

## Bölüm 4

# SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu bölümde; öncelikle bir dik dairesel silindir üzerine çizilen helis eğrisi için birinci jetler elde edilecektir. Daha sonra, sürtünmesiz durumda, bu helis eğrisi üzerinde yerçekimi altında hareket eden  $m$  kütleli bir parçacığı içeren mekanik sistem için Lagrange ve Hamilton denklemleri incelenecektir.

Dik dairesel silindirin denklemleri,

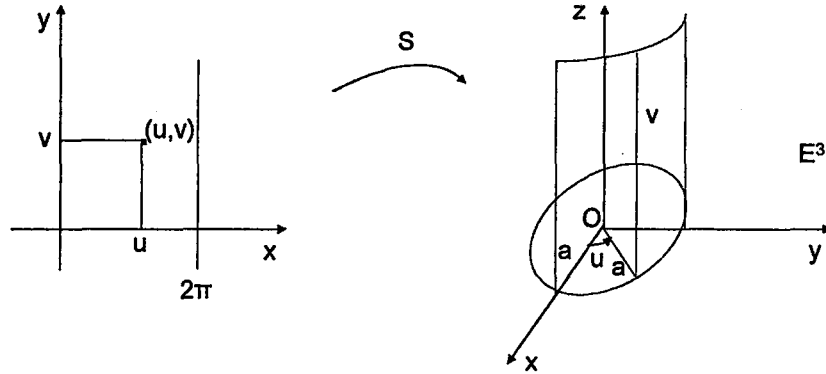
$$\begin{aligned} S : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{E}^3 \\ (u, v) &\rightarrow S(u, v) = (a \cos u, a \sin u, v) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup  $S([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$  yada kısaca  $S$  cümlesi olarak ifade edilir.  $S$  üstündeki her eğriye bir

$$\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(u) = v$$

fonksiyonu karşılık gelir. Böylece  $S$  de her eğri  $\alpha(u) = (a \cos u, a \sin u, \varphi(u))$

eşitliği ile belirtilir.



Şekil 1

Dik dairesel silindir üzerine çizilen helis eğrisi, silindirin ana doğruları ile sabit açılar yapan bir eğridir. Bu dik dairesel helisin denklemi

$$H = \left\{ \begin{array}{l} \alpha(u) \mid \alpha : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u \rightarrow \alpha(u) = v(u) = (a \cos u, a \sin u, bu) \end{array} \right\}, b > 0$$

olarak tanımlı  $H$  cümlesi ile ifade edilir.

Ayrıca,

$$\begin{array}{l} x : H \rightarrow \mathbb{R} \quad 0 \leq u \leq 2\pi \\ (a \cos u, a \sin u, bu) \rightarrow u \end{array}$$

dönüşümü süreklidir ve  $(x, H)$  ikilisi  $H$  için haritadır, dolayısıyla  $\{(x, H)\}$  tek haritalı atlas olur.  $H$  helis eğrileri cümlesi 1-boyutlu bir manifolddur. Böylece  $H$  için birinci jetlerin cümlesi  $J^1H$  ile gösterilip, üzerindeki indirgenmiş koordinat sistemi  $(J^1H, x^1)$ ,

$$J^1H = \{J^1\alpha(u) : \alpha(u) \in H, 0 \leq u \leq 2\pi\}$$

$$x^1 = (t, u^1, u_1^1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$t(J^1\alpha(u)) = t$$

$$u^1(J^1(\alpha(u))) = \alpha(u)$$

ve  $u_1^1$  türevsel koordinatları,

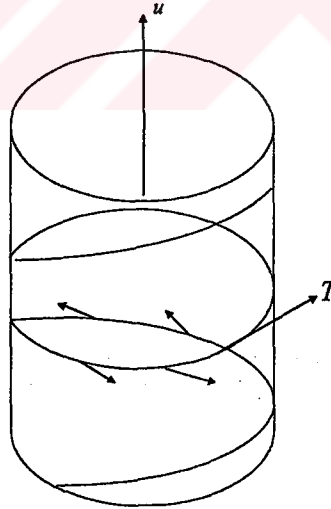
$$\begin{aligned} u_1^1(J^1\alpha(u)) &= \frac{d\alpha(u)}{dt} \\ &= \left( -a \sin u \frac{du}{dt}, a \cos u \frac{du}{dt}, b \frac{du}{dt} \right) \\ &= (-a \sin u, a \cos u, b) \frac{du}{dt} \\ &= \dot{\alpha}(u) \cdot \dot{u}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır. O halde kısalık için  $\alpha(u)$  helis eğrilerin birinci jetleri

$$J^1\alpha(u) = (t, u^1, u_1^1)$$

şeklinde ifade edilecektir.

Silindirin ekseninden geçen  $u$  doğrusunun  $\vec{u}$  doğrultusu ile helisin teğet vektör alanları daima sabit açı yapar. (Şekil 2)

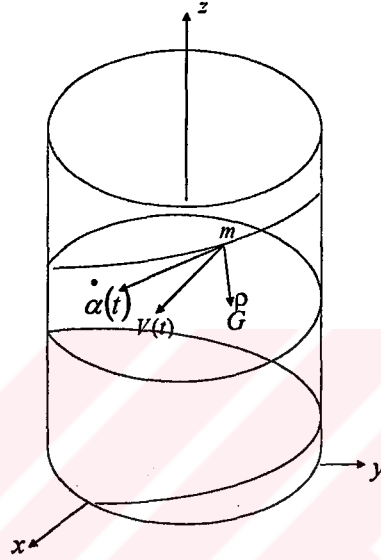


Şekil 2

$$\langle u, T \rangle = \cos \theta = \text{sabit}$$

Şimdi helis eğrisi üzerinde hareket eden  $m$  kütleli bir parçacığı içeren mekanik sistem için gerekli tanım ve özellikler verilerek, Lagrange ve Hamilton denklemleri elde edilecektir.

$m$  kütleli parçacığın silindir üzerindeki dairesel helis eğrisi üzerinde  $G = mg$  yer çekimi kuvveti ve eğrinin teğet hız vektör alanının bileşkesi yönünde hareket ettiği kabul edilsin. Burada  $G = (0, 0, mg)$  dir. (Şekil 3)



Şekil 3

$J^1\alpha(u)$  üzerinde yaklaşık tanjant yapı  $J$  ile gösterilecek ve

$$J = (du^1 - u_1^1 dt) \otimes \frac{\partial}{\partial u_1^1} \quad (4.1)$$

olarak tanımlanacaktır.  $J$  lokal olarak,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -u_1^1 \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right) = \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial u_1^1}\right) = 0$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca  $J^1\alpha(u)$  birinci jet manifoldu üzerinde  $J\xi = 0$  ile verilen  $\xi$  vektör alanı bir semispraydır. Koordinatlarda lokal ifadesi ise,

$$\xi = \frac{\partial}{\partial t} + u_1^1 \frac{\partial}{\partial u_1^1} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial u_1^1} \quad (4.2)$$

$\xi^1 = \xi^1(t, u^1, u_1^1)$  olarak verilir.

$L : J^1\alpha(u) \rightarrow \mathbb{R}$  diferensiyellenebilir fonksiyonu  $J^1\alpha(u)$  üzerinde *Lagrange fonksiyonudur*.

$$J\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -u_1^1 \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

eşitliği  $J\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = -V$  ile gösterilirse, burada  $V = u_1^1 \frac{\partial}{\partial u_1^1}$  olarak ifade edilen  $V$  vektör alanına *Liouville vektör alanı* denir.  $L$ , Lagrange fonksiyonuna bağlı enerji fonksiyonu  $E_L = VL - L$  olup,

$$E_L = u_1^1 \frac{\partial L}{\partial u_1^1} - L$$

olarak ifade edilir.

Diğer yandan,  $J^1\alpha(u)$  birinci jet manifoldu üzerinde Poincare-Cartan 1-formu

$$\alpha_L = d_J L + L dt$$

olup, lokal koordinatlarda,

$$\alpha_L = -u_1^1 \frac{\partial L}{\partial u_1^1} dt + \frac{\partial L}{\partial u_1^1} du^1 + L dt \quad (4.3)$$

dır.

Böylece Poincare-Cartan 2-formu,

$$\Omega_L = dd_J L + dL \wedge dt$$

ile tanımlı olup,

$$\begin{aligned}
\Omega_L &= d\left(-u_1^1 \frac{\partial L}{\partial u_1^1} dt + \frac{\partial L}{\partial u_1^1} du^1 + L dt\right) \\
&= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} - \frac{\partial L}{\partial u^1}\right) dt \wedge du^1 + \left(u_1^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2}\right) dt \wedge du_1^1 \\
&\quad + \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} du_1^1 \wedge du^1
\end{aligned} \tag{4.4}$$

olarak elde edilir.

$\Omega_L$  Poincare-Cartan 2-form olduğunda  $J^1\alpha(u)$  üzerinde

$$i_{\xi_L} \Omega_L = 0, \quad i_{\xi_L} dt = 1 \tag{4.5}$$

denklemlerini sağlayan  $\xi_L$  vektör alanı bir semispray olup, *Euler-Lagrange vektör alanı* olarak adlandırılır.

Şimdi,  $i_{\xi_L} dt = 1$  olduğundan  $\xi_L$  lokal olarak

$$\xi_L = \frac{\partial}{\partial t} + X^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \xi^1 \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

şeklinde ifade edilsin.  $\xi_L$  aynı zamanda  $i_{\xi_L} \Omega_L = 0$  denklemini sağladığı için (4.4) den,

$$\begin{aligned}
i_{\xi_L} \Omega_L &= \Omega_L(\xi_L) \\
&= \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} - \frac{\partial L}{\partial u^1}\right) du^1 + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} du_1^1 \\
&\quad - X^1 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} - \frac{\partial L}{\partial u^1}\right) dt \\
&\quad - X^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} du_1^1 - \xi^1 \left(u_1^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2}\right) dt + \xi^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} du^1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( -X^1 \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} - \frac{\partial L}{\partial u^1} \right) - \xi^1 \left( u_1^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} \right) \right) dt \\
&\quad + \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} + \xi^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} - \frac{\partial L}{\partial u^1} \right) du^1 \\
&\quad + \left( X^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} \right) du_1^1
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$i_{\xi_L} \Omega_L = 0$  olduğundan,

$$1) \quad X^1 \left( \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} - \frac{\partial L}{\partial u^1} \right) + \xi^1 \left( u_1^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} \right) = 0$$

$$2) \quad \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} + \xi^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} - \frac{\partial L}{\partial u^1} = 0$$

$$3) \quad (X^1 - u_1^1) \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} = 0$$

denklemleri elde edilir.  $\frac{\partial^2 L}{\partial u_1^1 \partial u_1^1} \neq 0$  olduğundan  $X^1 = u_1^1$  dir. 2) ve 3) denklemlerinden 1) denklemindeki ifade  $X^1 \cdot (0) = 0$  olur. O halde,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + u_1^1 \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} + \xi^1 \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} - \frac{\partial L}{\partial u^1} = 0 \quad (4.6)$$

denklemini elde edilir.

$\xi$ ,  $J^1 \alpha(u)$  da bir semispray olsun.  $\alpha(u)$  helis eğrisinin kanonik prolansasyonu  $\xi$  nin bir integral eğrisidir, yani  $\xi$  nin bir çözümü olur. O halde  $\alpha(u)$  nun  $\xi$  nin bir çözümü olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^2 \alpha(u)}{dt^2} = \frac{du_1^1}{dt} = \xi^1(t, u^1, u_1^1)$$

ikinci mertebeden diferensiyel denklemleri sağlamasıdır.

O halde (4.6) denklemi ,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial u_1^1} + \frac{d\alpha(u)}{dt} \frac{\partial^2 L}{\partial u^1 \partial u_1^1} + \frac{d^2 \alpha(u)}{dt^2} \frac{\partial^2 L}{(\partial u_1^1)^2} - \frac{\partial L}{\partial u^1} = 0 \quad (4.7)$$

olarak düzenlenebilir.  $\mathbb{R}$  de  $\frac{\partial}{\partial t}$  vektör alanının kanonik prolansasyonu  $J^1 \alpha(u)$  da

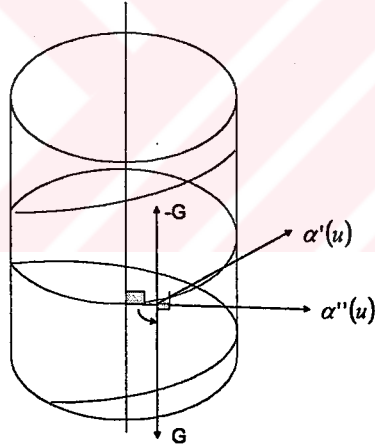
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{du^1}{dt} \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{d^2 u^1}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

olduğundan (4.7) denklemi

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial u_1^1} \right) - \frac{\partial L}{\partial u^1} = 0 \quad (4.8)$$

şeklinde ifade edilir ve bu denklem  $J^1 \alpha(u)$  üzerinde *Euler-Lagrange denklemi* olur.

Geometrik yorum yapılırsa,  $\xi^1 = \xi^1(t, u^1, u_1^1)$  ile ifade edilen dönüşüm  $\varphi''(u)$  ivme vektör alanını tanımlar. (Şekil 4)



Şekil 4

$$\alpha'(u) = (-a \sin u, a \cos u, b)$$

$$\alpha''(u) = (-a \cos u, -a \sin u, 0)$$

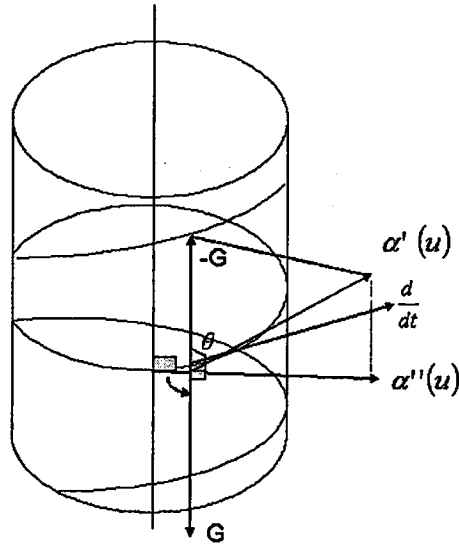
ve  $\alpha''(u)$  vektör alanı için

$$\alpha''(u) \perp \alpha'(u)$$

$$\alpha''(u) \perp -G$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{du^1}{dt} \frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{d^2 u^1}{dt^2} \frac{\partial}{\partial u_1^1} = (1, \|\alpha'\|, \|\alpha''\|)$$

$\|\alpha'\| > 0, \|\alpha''\| > 0$ ; vektör alanını inceleyelim.(Şekil 5)



Şekil 5

$\theta = \text{sabit}$ ,  $\frac{d}{dt}$  vektör alanı  $G - \alpha''$  düzleminde yer almaktadır.

Şimdi de  $J^1 \alpha(u)$  birinci jet manifoldu üzerinde Hamilton denklemleri elde edilecektir.  $J^1 \alpha(u)$  üzerinde Liouville form,  $\lambda = u_1^1 du^1$  olup  $\phi$  kapalı 2-formu,

$$\phi = -d\lambda = du^1 \wedge du_1^1 \quad (4.9)$$

şeklinde ifade edilir. Hamilton enerji fonksiyonu,  $H : J^1 \alpha(u) \rightarrow \mathbb{R}$  diferensiyellenebilir fonksiyonudur. Böylece ,

$$J^1 \alpha(u)_\phi : \chi(J^1 \alpha(u)) \rightarrow \Lambda^1(J^1 \alpha(u)) \quad (4.10)$$

bir lineer izomorfizmdir ve bu izomorfizme göre  $\dot{I}_{X_H} \phi = dH$  eşitliğini sağlayan  $X_H$  vektör alanına Hamilton vektör alanı denir. Lokal olarak,

$$X_H = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial u_1^1} \frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{\partial H}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u_1^1} \quad (4.11)$$

şeklinde ifade edilir.

$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow J^1 \alpha(u)$  eğrisi  $X_H$  hamilton vektör alanı üzerinde bir integral eğrisi, yani  $X_H(\beta(t)) = \dot{\beta}(t)$  olsun. O halde,

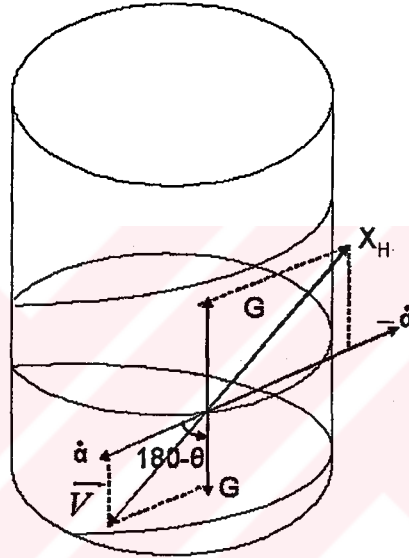
$$\dot{\beta}(t) = X_H(t, u^1, u_1^1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial u_1^1} \frac{\partial}{\partial u^1} - \frac{\partial H}{\partial u^1} \frac{\partial}{\partial u_1^1}$$

olduğundan

$$\frac{du^1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_1^1}, \quad \frac{du_1^1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u^1} \quad (4.12)$$

denklemleri elde edilir. (4.12) denklemleri  $J^1\alpha(u)$  üzerinde *Hamilton denklemleri* olur.



Şekil 6

$G = (0, 0, mg)$  olmak üzere  $X_H$  vektör alanı (Şekil 6) daki gibi gösterilebilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} X_H &= -\dot{\alpha} - G \\ &= -\dot{\alpha}(u) - G \\ &= (a \sin u, -a \cos u, -b) - (0, 0, mg) \\ &= (a \sin u, -a \cos u, -b - mg) \\ &= a \sin u \frac{\partial}{\partial t} - a \cos u \frac{\partial}{\partial u^1} - (b + mg) \frac{\partial}{\partial u_1^1} \end{aligned}$$

vektör alanı elde edilir. Böylece bu  $X_H$  bir Hamilton vektör alanı olup,  $H$  Hamilton enerji fonksiyonu olmak üzere bu işlemler ile dairesel helisin birinci jeti  $J^1\alpha(u)$  üzerindeki Hamilton denklemleri,

$$\left. \begin{aligned} a \sin u &= 1 \\ -a \cos u &= \frac{\partial H}{\partial u_1^1} \\ b + mg &= \frac{\partial H}{\partial u^1} \end{aligned} \right\}$$

eşitliklerinden,

$$\sin u = \frac{1}{a}, \quad \cos u = \frac{-1}{a} \frac{\partial H}{\partial u_1^1}$$

bulunacağı için,

$$\cot u = -\frac{\partial H}{\partial u_1^1}, \quad b + mg = \frac{\partial H}{\partial u^1}$$

olur.  $H$  Hamilton enerji fonksiyonu ise,

$$H = (b + mg) u^1 - \cot u u_1^1$$

olarak elde edilir.

Bu jet manifold üzerinde kurulan denklemlerin düşey ve tam lift'leri kolayca elde edilebilir. Elemanter geometride verilen bu örnek ile önceki bölümlerde yapılan teorik çalışmalara bir yorum getirilmiştir.

Genişletilmiş jet demetlerde elde edilen bu yüksek mertebeden lift'ler, aynı zamanda manifoldlar üzerinde tanımlı diferensiyellenebilir elemanların lift'lerine indirgenebilir. Ayrıca klasik mekanik de önemli bir yeri olan Lagrange ve Hamilton denklemlerinin lift teori kullanılarak genişletilmiş jet dizisi üzerinde oluşturulması; genişletilmiş bir dizi üzerinde oluşturulabilecek bütün jetler için bu denklemlerin kurulabilmesini kolaylaştırmıştır. Çalışmanın zamana bağlı olan ve olmayan şeklinde iki bölüme ayrılması ile evrende farklı boyutların farklı zaman parametreleri ile algılanarak, üzerlerinde mekanik sistemlerin kurulabileceği gösterilmiştir.

## KAYNAKLAR

**Aycan C.**, 1998, Jet Demetler Üzerinde Yükseltmeler ve Prolongasyon Bağıntıları, Yüksek Lisans Tezi, Pamukkale Üniversitesi F.B.E., Denizli.

**Civelek Ş.**, 1988, İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Lift'ler, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi F.B.E., Ankara.

**Civelek Ş.**, 1993, Genişletilmiş Vektör Demetlerine Yüksek Mertebeden Lift'ler, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi F.B.E., Ankara.

**Civelek Ş.**, 1996, Yaklaşık Tanjant ve Kotanjant Demette Tanımlı Lagranjiyen ve Hamiltonyenin k. Mertebeden Yükseltmişleri, Altınoluk Math. Symp., Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

**Civelek Ş.**, 1996, The Lifts of Lagrange and Hamilton Equations To The Extended Vector Bundles, Mathematical & Computational Applications, Vol.1, Number 1, pp.21-28, Manisa.

**Crampin M.**, 1981, On The Differential Geometry Of The Euler- Lagrange Equations and The Inverse Problem of Lagrangian Dynamics, J. Phys. A: Math. Gen. 14, 2567-2575.

**De Leon M., Rodrigues P.R.**; 1985, Generalized Classical Mechanics and Field Theory, North-Holland Math. Stud., 112, Elsevier Sci. Pub.Comp., Inc. ,New York.

**De Leon M., Rodrigues P.R.**; 1986, Almost Tangent Geometry and Higher Order Mechanical Systems, Dif. Geo. and Its App.Proc. of Conference, Czechoslovakia.

**De Leon M., Rodrigues P.R.**; 1987, Second-Order Differential Equations and Non-Conservative Lagrangian Mechanics, J. Phys. A.:Math. Gen. 20 5393-5396.

**De Leon M., Rodrigues P.R.**; 1988, Degenerate Lagrangian Systems and Their Associated Dynamics, Rendiconti Di Matematica, Serie VII, Vol-

ume 8, 105-130, Roma.

**De Leon M., Lacomba E.A.;** 1989, Lagrangian Submanifolds and Higher-Order Mechanical Systems, *J. Phys. A.:Math. Gen.* 22, 3809-3820.

**De Leon M., Rodrigues P.R.;** 1989, Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics, North-Holland Math. Ser. 152, Elsevier Sc. Pub. Com. Inc., Amsterdam.

**De Leon M., Marrera J.C.;** 1991, Time-Dependent Linear Lagrangians: The Inverse Problem, Symmetries and Constants of Motion, International Symp. on Hamilton Systems and Celestial Mechanics, Guanajuato(Mexico), September 30-October 4; Advanced Series in Nonlinear Dynamics. Vol.4, World Sci. Pub. Co., Singapore, 1993, 55-83.

**De Leon M., Mello M.H., Rodrigues P.R.;** 1991, Reduction of Degenerate Non-Autonomous Lagrangians, Ams-Ims-Siam Research Conf., Uni. of Washington, Seattle. Contemporary Math. Providence-Rhode Island: American Math. Soc. 1991, v.132, p.275-305

**De Leon M., Merino E., Dubina J.A., Salgado M.;** 1994, A Characterization of Tangent and Stable Tangent Bundles, *Annales de l'institut Henri Poincaré: Physique Theorique*, 61, 1-15.

**Domingo C., De Leon M., Marrera J.C.;** 1994, The Constraint Algorithm for Time-Dependent Lagrangians, *J.Math. Phys.*, 35(7), 3410-3447.

**Esin E., Civelek Ş.;** 1989, İkinci Mertebeden Tanjant Demetler Üzerinde Lift'ler, *Jou. Math. Stat. Fac. Art. Sc., Gazi Uni.*, Vol.2, 117-135.

**Esin E., Civelek Ş.;** 1989, İkinci Mertebeden Genişletilmiş Manifoldlar Üzerinde Lift'ler, *Jou. Math. Stat. Fac. Art. Sc., Gazi Uni.*, Vol.2, 137-152.

**Hacısalıhoğlu H.H.;**1984, Diferensiyel Geometri, Ankara Uni., Ankara.

**Jones A., Gray A., Hutton R.;** 1987, Manifolds and Mechanics, Cambridge Uni. Press., Cambridge.

**Kobayashi S., Nomizu K.;** 1963, Foundations of Differential Geometry, Vol. 1, Int. Pub., New York.

**Saunders D.J.;** 1989, The Geometry of Jet Bundles, Cambridge Uni. Press., Cambridge.

**Yano K., Ishihara S.;** 1973, Tangent and Cotangent Bundles, Marcel Dekker Inc., New York.

