ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

KOMPLEKS SAYILARLA İLGİLİ KAVRAMLARIN ANLAŞILMASINDA GÖRSELLEŞTİRME YAKLAŞIMININ ETKİNLİĞİNİN İNCELENMESİ

Ali Sabri İPEK

MATEMATİK EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ERZURUM
2003

Prof. Dr. Rahim OCAK danışmanlığında, Ali Sabri İPEK tarafından hazırlanan bu çalışma 27/12/2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Rahim OCAK *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Feyzi BAŞAR *İmza* : F. Başar

Üye : Doç. Dr. Ahmet IŞIK *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Ramazan DİKİCİ *İmza* : R. Dikici

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdullah KAPLAN *İmza* :

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Prof. Dr. Mehmet ERTUĞRUL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

KOMPLEKS SAYILARLA İLGİLİ KAVRAMLARIN ANLAŞILMASINDA GÖRSELLEŞTİRME YAKLAŞIMININ ETKİNLİĞİNİN İNCELENMESİ

Ali Sabri İPEK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr.Rahim OCAK

Bu çalışmanın amacı, görselleştirme yaklaşımının, öğrencilerin kompleks sayılar ile ilgili kavramlar konusundaki başarılarına, bu kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına ve matematiğe karşı tutumlarına etkisini, geleneksel ders anlatım yöntemi ile karşılaştırmaktır.

Çalışmanın örneklemini, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında, aynı öğretim üyesinin ders verdiği iki farklı şubedeki 73 dördüncü sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Uygulama 2002-2003 öğretim yılının birinci döneminde gerçekleştirilmiştir. Şubelerden biri, görselleştirme yaklaşımının kullanılacağı deney grubu; diğeri ise geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanılacağı kontrol grubu olarak seçilmiş ve bu seçim rastgele yapılmıştır. Deney grubunda kompleks sayılar konusu görselleştirme yaklaşımını esas alan yöntemlerle, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yöntemleri ile işlenmiştir. Veri toplama aracı olarak, Kompleks Sayılar Kavram Testi, Matematik Dersi Tutum Ölçeği ve Bilimsel İşlem Beceri Testi olmak üzere başlıca üç ölçekten yararlanılmıştır.

Araştırma hipotezlerinin test edilmesine yönelik olarak, yüzde-frekans, çift katlı ve bağımsız grup t–testi kullanılmıştır. Elde edilen sonuçlar, deney grubundaki öğrencilerle kontrol grubundaki öğrenciler arasında kompleks sayı kavramları başarısı açısından istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olduğunu göstermiştir. Deney ve kontrol grupları arasında öğrencilerin matematiğe karşı tutumları arasında önemli bir farklılık oluşmamakla birlikte, öğrencilerin kompleks sayılar ile ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmaları üzerinde görselleştirme yaklaşımının önemli bir etkisinin olduğu tespit edilmiştir.

2003, 131 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kompleks Sayılar, Kompleks Sayıların Özellikleri, Görselleştirme, Uzun Süreli Bellek, Tutum

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

INVESTIGATION OF EFFECTIVENESS OF VISUALIZATION APPROACH ON UNDERSTANDING OF COMPLEX NUMBER CONCEPTS

Ali Sabri İPEK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics Education

Supervisor: Prof.Dr.Rahim OCAK

The aim of this study is to compare the effectiveness of visualization approach on students' understanding of complex number concepts, on their long-term retention of the concepts and on their attitude toward mathematics with traditionally designed instruction.

The subject of the study were 73 fourth year undergraduate students, who are in two different classes and are taught by the same lecturer, in primary mathematics education, in Kazım Karabekir Education Faculty, in Atatürk University. Treatment was carried out in first semester of 2002-2003 teaching season. One of the classes was randomly selected as treatment group in which visualization was used, the other as control group in which traditional teaching methods were used. The data was obtained by means of Complex Number Attainment Test, Mathematics Attitude Test and Scientific Process Skills Test.

In order to test researh hypothesis, percentage-frequency, paired and independent group t test used. The results obtained from study showed that there is a statistically important difference between treatment and control groups in terms of students' complex number concepts attainment but no difference in terms of their attitude toward mathematics. However, it was found that visualization approach has an effect on students' long-term retention of complex nmmber concepts.

2003, 131 pages

Keywords: Complex numbers, Complex numbers' properties, Visualization, Long-term Retention, Attitude

TEŞEKKÜR

Bu araştırmaya beni yönlendiren ve çalışmalarım boyunca her türlü desteği sağlayan çok değerli hocam Sayın Prof.Dr. Rahim OCAK'a en içten şükranlarımı sunarım.

Konunun belirlenmesi ve planlanması dahil olmak üzere bu çalışmanın her aşamasında değerli görüş ve yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç.Dr. Ahmet IŞIK'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca; görüş ve katkılarından dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Abdullah KAPLAN'a teşekkür ederim.

Ali Sabri İPEK

Kasım 2003

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGELER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Son otuz yılda matematik eğitimi üzerine yapılan çalışmalarda matematik müfredatlarındaki değişimler üzerine odaklanıldığı görülmektedir. Hatta; alan eğitiminin alanla ilgili çalışmalardan daha önemli olduğunu savunanların sayısı hiç de küçümsenmeyecek bir orana ulaşmıştır. Bu alanda çalışmalar arttıkça öğretim bazında çok ağır işleyen veya öğretim ve öğrenmede eksikliği hissedilen birçok uygulamanın yapılmadığı görülmüştür. Bu bağlamda; matematik eğitimi, bilişim teknolojisi ile kendini ön plana çıkarmıştır. Teknolojinin sağladığı yeni bakışlar, deneme, sınama ve araştırma kolaylıkları matematiğin içeriğini ve uğraş alanlarını genişletmektedir (Baki 2001). Bu değişim, alan eğitiminde çeşitli eksikliklerin olduğunu da gözler önüne sermiştir. Bahsedilen eksikliklerden bazıları;

i) İlgili günlük uygulamaların ihmal edildiği beceri ve algoritmaların üzerinde daha fazla durulması,

ii) Bireylerin bilişsel olarak bilgiyi bütünleştirebileceği bağıntıların gelişimini önemsemeyerek konuların bazı alt bölümlere ayrılması,

iii) Öğretmen ya da ders kitabı gibi dış kaynaklara aşırı güven duyulması

şeklinde sıralanabilir.

Bu sorunların cevabı olarak, matematik derslerinde kuralcı bir yapılaşmanın değişimini öngören yaklaşımlar ortaya çıkmaktadır. Bu yaklaşımlar; matematiksel bilgiyi öğrencilerin kendi başlarına kurgulamalarına imkan sağlanmadığı takdirde, kavramları anlamlı bir şekilde öğrenemeyecekleri ve gerekli alanlara uygulamada başarılı olamayacakları inancından hareketle ifade edilmektedir.

Matematik eğitiminin geliştirilmesine yönelik her öğretim düzeyine ait çalışmalar artarak devam etmektedir. Bu çalışmalar içerisinde üniversite seviyesinde matematik öğretimine yönelik çalışmalar istenilen boyutlara ulaşamamıştır. Halbuki üniversite düzeyinde matematik öğretiminin temelden etkileşime uğradığı günümüzde; yenilikçi yaklaşımlar bir çok değişimi de beraberinde getirmektedir (Artigue 1999). Önemi her geçen gün artmakta olan bu değişimler;

i) Üniversitelerde öğrenim gören öğrenci sayısındaki artma,

ii) Üniversite öncesi eğitim kurumlarındaki müfredat ve yöntem değişiklikleri,

iii) Matematik öğretiminin amaçları, hedefleri, öğretim yaklaşımları ve metotlarının orta ve yüksek öğrenim düzeyinde farklılaşması,

iv) Teknolojinin hızla gelişmesi,

v) Sorumluluğu açıkça belli olan üniversitelerden beklentiler

olarak belirtilebilir.

Elbette bu değişimlerin tamamı geneldir ve diğer dersler üzerinde de etkileri vardır. Bununla beraber eğitim sistemimizde özel yeri ve birçok öğrenci için zorunlu yapısı nedeniyle; matematik derslerinde bu değişimlerin diğer derslerden daha etkin olduğu söylenebilir. Matematiğin doğasından da anlaşılacağı üzere bütün bilimlerin anası durumunda olan matematik olmadan eğitim ve çağdaşlaşmanın olamayacağı açıktır (Işık 1998). Her düzeydeki matematik öğretiminin derin bir etkileşime uğradığı günümüzde, üniversite düzeyindeki matematik öğretiminin de bu değişime paralel olarak geliştirilmesine yönelik çalışmalar artarak devam etmektedir. Bilgi ve teknoloji çağının mecbur kıldığı bu değişimlerin üniversite düzeyinde her ders gibi matematik derslerine de çok derin etkileri bulunmaktadır. Üniversite düzeyinde matematik öğretimi ile ilgili yapılan çalışmaların analiz ve lineer cebir dersi üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir. Özellikle analiz derslerinin üniversitelerin matematik bölümlerindeki önemi açıktır. Aynı zamanda, üniversite düzeyinde analiz dersleri oldukça geniş bir kapsama sahiptir. Üniversite matematik programlarında analiz dersleri, tek değişkenli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların özellikleri ile ilgilenen analize giriş dersinden vektörel analiz gibi çok daha karmaşık yapıdaki kapsama sahip derslere kadar çok geniş bir alanla ilgilidir.

Matematik alanında yapılan araştırmalar; çağımızın gerektirdiği bilgi ve becerilerin izlenebilmesi amacıyla hem ortaöğretimdeki matematik programlarının hem de Eğitim Fakültelerinde okutulmakta olan Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı derslerinin hem içerik hem de öğretilme biçiminin yeniden yapılanması gerektiğini ortaya koymuştur (Işık 2002). 1997 yılından itibaren uygulamaya konularak Eğitim Fakültelerinin yeniden yapılandırıldığı süreç sonucunda Eğitim Fakültelerindeki Matematik Programları, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı ve Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı olmak üzere iki dala ayrılmıştır. Analiz dersleri bu programların en temel derslerinden biri olarak müfredatlardaki yerini almıştır. Analiz başlığı altında yer alan derslerin en önemlilerinden biri hiç şüphesiz Kompleks Analiz dersidir. Kompleks Analiz dersi üniversitelerimizin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında bölüm dersi olarak okutulmaktadır. Kompleks analiz dersi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dallarında zorunlu olmamasına rağmen birçok üniversitedeki bu programlarda öğrenim gören öğrencilere seçmeli ders olarak okutulmaktadır. Kompleks analiz dersinin üniversite matematik müfredatlarında yer almasının bu programlarda okuyan öğrencilere sağlayacağı katkılar büyüktür. Bu katkıların neler olduğu sorusuna cevap, kompleks analiz dersinin formatında aranmalıdır.

Kompleks analiz, matematiksel analizin temel bir parçası olarak, matematiğin tüm alanlarında etkisi gözlemlenebilen bir derstir. Kompleks analiz matematikteki önemi ve zarif yapısına ilaveten teorik ve uygulamalı matematik ile ilgilenen matematikçi, fizikçi ve mühendislerin en çok kullandığı matematiksel araçların başında yer alır. Dolayısıyla kendi içeriğinde belli bir estetiğe ve öneme sahip olmakla beraber diğer derslerle olan bağlantıları nedeniyle de öne çıkan bir derstir. Matematiğin diğer dallarla olan sağlam ilişkileri gözönünde bulundurularak cebirin temel teoreminin ispatı yalnızca kompleks ifadeler yardımıyla elde edilebilmiştir. Kompleks analizin sayılar teorisi ile ilgili bir örnek, bilinen bir teoremin ispatı ile ilgilidir; "İki tamsayı iki kare toplamı olarak ifade edilebiliyorsa, bu tamsayıların çarpımı da iki kare toplamı şeklinde ifade edilebilir" teoremi kompleks sayıların özellikleri yardımıyla oldukça zarif bir şekilde ispatlanabilir. Buna benzer birçok örnek dolayısıyla kompleks analizin cebiri tamamlayan bir misyon üstlendiğini söylemek mümkündür. Analiz ile ilişkisi içinse $f: \Re \rightarrow \Re$, $f(x)=\sin x$ fonksiyonu göz önüne alınabilir. Bu fonksiyon Maclaurin serisine açıldığında yakınsaklık yarıçapının sonsuz olduğu görülecektir. $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun reel sayılarda tanımlı olmasından dolayı bu sonuç anlamlıdır. Ancak;

reel sayılarda tanımlı g: $\Re \to \Re$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ fonksiyonunun Maclaurin açılımı göz önüne alınırsa, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının 1 olduğu görülecektir. Bu sonucun reel analiz dersindeki yakınsaklık yarıçapı ve alanı bilgileriyle görsel ve anlamlı bir şekilde açıklanma imkanı yoktur. Bu dönüşüm, kompleks düzlemde $\frac{1}{1+z^2}$ şeklinde alınırsa sorun kendiliğinden ortadan kalkacaktır. Çünkü paydanın kökleri –i ve +i olup bu dönüşümün sıfır civarındaki seri açılımında sıfır noktasına en yakın singüler noktalar –i ve +i olacaktır. Dolayısıyla yakınsaklık çapının en fazla –i ve +i noktaları arasındaki uzaklık olacağı görülür. Kompleks analizdeki özellikleri kullanmadan bu ilişkiyi açıklama imkanı yoktur.

Kompleks analiz, matematik programlarındaki derslerle olduğu kadar fen ve mühendislik alanlarındaki derslerle de yakın bir ilişkiye sahiptir. Kompleks analizin soyut matematikteki önemine ve zarif mantık yapısına ek olarak, bu ders nazari ve uygulamalı matematikçilerin, mühendislerin ve fizikçilerin de en kuvvetli matematiksel araçlarından birini temsil eder (Churchill 1989). Dolayısıyla matematik öğretimi verilen üniversite düzeyindeki programlarda okutulması gerekli derslerin başında gelmektedir. Analize giriş ve reel analiz derslerini almış öğrencilerin daha anlamlı bir şekilde öğrenebilecekleri kompleks analiz dersinin, matematik öğretimi yapılan programların 3. ve 4. sınıflarında okutulması daha uygundur (Ocak 2001). Kompleks analiz dersini alan öğrenci diğer analiz derslerinde öğrendiği kavramları daha iyi bir şekilde özümseyebilecek ve belki daha da önemlisi kendisi için sağlam bir matematiksel yapı kurabilecektir. Aynı zamanda öğrencilerin soyut matematiksel yapılarla matematiğin uygulamaya dönük kısımları arasındaki köprüyü daha sağlam bir şekilde kurmalarında kompleks analiz dersi önemli bir eşik rolü oynamaktadır. Bu özelliğine rağmen, kompleks analizdeki konular genellikle cebirsel ifadeler ağırlıklı ve kural merkezli bir öğretimle sunulmaktadır. Oysa; kompleks analizdeki konuların farklı yaklaşımlarla öğretilmesine dönük çalışmalar son yıllarda oldukça artmıştır. Kompleks sayıların geometrik yorumlarına bağlı olarak elde edilen uygulamalarla ilgili bir çok çalışma mevcuttur (Barbeu 1988, Cell 1950, Devlin 1988, Gamow 1961, Gardner 1979, Lambert 1979, Musser 1978, Sawyer 1943, Usiskin 1983). Yapılan bu çalışmalar kompleks analizin geleneksel metotlarla sunulmasıyla yenilikçi yaklaşımlarla sunulması arasındaki farkları ortaya koyması açısından ayrıca bir öneme sahiptir. Bilgi ve teknolojinin hemen hemen bütün yaşantımıza girdiği bu çağda, kompleks analiz öğretiminin de bu gelişmelerden etkilenmemesi düşünülemez.

Kompleks analizdeki konuların öğretiminde önemli yaklaşımlardan biri görselleştirmedir. Kompleks sayıların görselleştirilmesi özellikle bu sayıların anlamlı hale gelmesi ve matematikte kullanım alanlarının artmasıyla önem kazanmıştır. Matematiksel düşüncenin yaratıcı bir çok aşamasında, bağıntıların tüm resimlerini oluşturan yapıların kurulmasında yararlanılırken böyle bir resmin oluşturulmasında da görselleştirme yaklaşımından yararlanılır (Tall 1991). Matematiksel bağıntıların uygun görselleştirmeler yardımıyla sunulması halinde öğrenciler bu kavramları daha geniş bir perspektif içerisinde anlamlandırabilecek ve geleneksel yaklaşımda elde edebileceklerinden çok daha güçlü sezgiler kazanabileceklerdir. Kompleks analiz dersinde görselleştirme yaklaşımın kullanımı bu dersi alan öğrencilerin bakış açılarında olumlu değişimlere neden olabilir. Çünkü; matematiksel düşünmenin inceleme aşamasında çoğunlukla bağıntıların kapsamlı şekillerinin kurulmasından yararlanılır. Bu yapıdaki şemaların yapılandırılmasında görselleştirme vazgeçilmez bir araçtır.

1.1 Öğrenme Kuramları

1.1.1 Davranışçı Kuramlar

Davranışçılar, öğrenmeyi; sadece gözlenebilen, başlangıcı ve sonu olan, bunlara bağlı olarak da ölçülebilen davranışlar olarak tanımlamaktadırlar. Davranışçı öğrenme ve öğretim teorisine göre, insanın öğrenmesi tecrübelerine; tecrübe de çevredeki uyarıcılara bağlıdır (Ergün ve Özdaş 1997). Watson, Thorndike, Guthrie ve Skinner'in öncülüğündeki davranışçılar, öğrenmeyi, "uyarıcı ile davranım arasında bağ kurmak ve dışarıdan pekiştirme yoluyla elde edilen sonuç" olarak tanımlamışlardır (Aksu 1991). Davranışçılar, bireyin davranışa dönüştüremediği zihinsel faaliyetleri ile pek fazla ilgilenmezler. Bunlara göre, önceden belirlenen hedeflerin davranışa dönüştürüldüğü okullarda öğretmenler, öğrenmeyi uygun uyarıcılar yardımıyla gerçekleştirebilirler. Bunun için de, derse aktif katılımın sağlanacağı etkinliklere daha fazla önem verilmesinden yanadırlar. Fidan (1985) davranışçıların eğitim sürecindeki etkinliklerini şu şekilde özetlemektedir;

1-Öğrenmede, öğrencinin aktif katılımı sağlanmalıdır. Öğrenci öğretmeninin yaptıklarıyla değil, kendisinin yaptıklarıyla öğrenir. Bundan dolayı yaparak öğrenme, öğrenmenin temel ilkelerinden biridir.

2-Öğrenilenlerin tekrar edilmesi, öğrenmede becerilerin kazanılmasında ve öğrenilenlerin bellekte muhafaza edilmesindeki yeri bakımından oldukça önemlidir. Öğrenilenlerin sık sık tekrar edilmesi, öğrenmeyi güçlendirir, unutulma riskini en aza indirir. Matematik öğretiminde, üniteyle ilgili olan alıştırmaların yapılması da bu tür tekrarlardır. Ancak, öğrenmede tekrara gereğinden fazla yer verilmesi öğrencide heyecansızlık veya bıkkınlık yaratabilir. Bundan dolayı öğrenmede yapılacak olan tekrar, yerinde ve zamanında olmalıdır.

3-Öğrenmede, istenilen davranışların pekiştirilmesi, istenmeyen davranışların da köreltilmesi gereklidir.

4-Öğrenmede güdüleme, diğer bir adıyla motivasyonun önemli bir yeri vardır. Çünkü güdü; bir takım amaçların gerçekleştirilmesi için organizmaya adeta baskılarda bulunur. Bu amaçların biri de öğrenmedir. Ancak, her öğrenci bütün öğrenme ünitelerine karşılık veremez ve aynı istekliliği gösteremez. Bunun içinde bireyin doğuştan sahip olduğu merak duygusundan yararlanmak gerekir.

1.1.2 Bilişsel Kuramlar

Bazı durumların davranışçı öğrenme ilkeleriyle açıklanamaması, eğitimcileri insan öğrenmesini yeniden tanımlamaya yöneltmiş ve bunun sonucu olarak bilişsel öğrenme kuramları ağırlık kazanmaya başlamıştır. Davranışçıların öğrenmeyi; uyaran-tepki bağıyla dışsal süreçler olarak ele alması, doğrudan gözlenemeyen bir çok zihinsel faaliyetin göz ardı edilmesine sebep olmuştur. Bu da öğrenmenin nasıl gerçekleşebileceğine ancak kısmi bir açıklama getirebilmiştir. Halbuki, eğitim etkinlikleri içerisinde yapılan bir çok faaliyetleri davranışçı kuramların yaklaşımları ile açıklamak oldukça güçtür. Mesela, kitap okumak, problem çözmek, kritik düşünceler üretmek gibi eğitim ve öğretimde hayati önem taşıyan etkinlikler bunlardan bazılarıdır. Öğrenmenin önünde duran bu güçlükleri yenmek için aralarında Piaget, Ausubel, Gagne ve Bruner'in bulunduğu bazı psikologlar, zihinde oluşan iç süreçlerin önemini vurgulayan bilişsel kuramı geliştirmişlerdir. Bilişsel öğrenme teorilerinde davranıştan ziyade bilginin öğrenilmesi üzerinde durulur. Zihnin duyu organlarından gelen verileri alma, saklama, eski bilgi ve duyumlarla karşılaştırarak, birleştirip ayırarak yeni bilgileri oluşturma gibi öğrenme işinde bir çok görevleri vardır. Onlar, önce bir algı kuramına, daha sonraki aşamalarda ise öğrenme ve zihnin en ileri aşamalarından biri olan problem çözmeye yönelmişlerdir. Bilişsel kuramcılar öğrenmeyi; "insan zihninde oluşan bir süreç" olarak açıkladıklarından, pratik çözümlerden ziyade; "anlama", "algılama", "kavrama" ve "oluşturma" kavramlarına ağırlık vermişlerdir. Kısaca, bilimsel öğrenme kuramları insanın dünyayı anlamlandırmada kullandığı zihinsel süreçleri inceler. Öğrencinin çevresindeki olaylar, bu öğrenme süreçlerini büyük ölçüde etkiler. Çevredeki uyarıcılar özellikle bilginin seçiminde ve bilginin uzun süreli bellekten kısa süreli belleğe geri dönüştürülmesinde büyük rol oynar. Uzun süreli bellek, iyi öğrendiğimiz bilgiyi sürekli olarak depoladığımız bellek türüdür (Senemoğlu 2001). Nörofizyolojik öğrenme kuramcıları, bilginin kısa süreli bellekten uzun süreli belleğe geçirilmediği takdirde beyinde herhangi bir değişme meydana gelmediğini ileri sürmektedirler. Oysa, uzun süreli bellek nöronlar arasındaki bağlantılarda ortaya çıkmaktadır. Beyindeki bu değişimler sonucu bilgi, uzun süreli bellekte sürekli olarak kalabilmektedir. Ayrıca uzun süreli belleğin kısa süreli bellekten bir diğer farkı da uzun süreli belleğin kapasitesinin sınırsız olmasıdır. Öğrenme bir kez gerçekleştirildiğinde, öğrenilenlerin unutulmadığına ilişkin bir takım deliller bulunmaktadır (Ashcraft 1989, Anderson 1990). Bu nedenlerle, matematiksel bilginin uzun süreli belleğe nasıl depolanabileceği incelenmesi gerekli bir problem olarak karşımıza çıkmaktadır.

Okul programlarında, özellikle de matematik programlarında, bilişsel kuramcıların yaklaşımlarına önemli ölçülerde yer verilmiştir. Wertheimer'in düşünceleri, matematik öğretimi üzerinde çalışmalar yapan Bruner ve Dienes'in fikirlerini ciddi bir şekilde etkilemiştir. Wertheimer, kuralların anlaşılmadan öğretildiği durumlarda, bunların yeni bilgilerin öğrenilmesi sırasında çeşitli yanlışlıkların yapılabilme ihtimallerinin yüksek olabileceğini ifade etmektedir (Varış 1978). Ancak, her ne kadar bilişsel kuramcıları, öğrenmenin zihinsel bir süreç olduğu konusunda ortak kanaate sahip olsalar da, öğrenmenin nasıl gerçekleştiği hususunda bir takım farklı yaklaşımlara sahiptirler. Fidan (1985) bu farklı yaklaşımları üç gruba ayırmaktadır;

1- Öğrenmede bellek sürecine önem veren, "bilgi-işlem kuramcıları",

2-Öğrenilecekleri, öğrenime hazır bir şekilde sunmakla, öğrenmenin anlamlı olarak sağlanabileceğini savunan "anlamlı öğrenme kuramcıları",

3-Öğrenmenin bir keşfetme işi olduğunu savunan "buluş kuramcıları".

Bilişsel öğrenme kuramlarından bazıları şunlardır;

1.1.2.1 Piaget' in Öğrenme Kuramı

Matematik öğretimini en çok etkileyen kuramcıların başında Piaget gelir (Altun 2001). Piaget'in zihin gelişimi üzerine geniş araştırmaları vardır. Piaget'e göre öğrenme, bir dış kaynaktan bilgi edinmedir ve bilginin oluşmasında zihinsel gelişme düzeyi yeni imkanlar ortaya koyma bakımından çok önemlidir . Öğrenme, bireyin içinde bulunduğu zihinsel gelişim basamağı ile ilişkili bir biçimde, fakat çevre ile etkileşim aracılığı ile gerçekleşir. Dolayısıyla; düşünme ve öğrenme, çevreyi zihinsel olarak yeniden oluşturmayı ihtiva eder. Bu etkileşimde rol oynayan faktörleri; olgunlaşma, yaşantı, örgütleme, dengeleme olarak belirtmiştir. Zihinsel gelişme sadece zaman içerisinde olgunlaşmaya bağlı değildir. Olgunlaşma yanında, kullanılan dil ve semboller, toplumsal ve fiziksel çevrenin her birisi de zihinsel gelişme üzerinde önemli birer faktördür. Bu bakımdan her öğrenmenin bir yeri ve zamanı vardır. Acele edilmesi halinde belki bir şeyler kazanılır ama kazanılan bu bilginin kullanıma aktarılması zordur (Altun 2001).

Piaget, çocukların bilişsel gelişim döneminin dört temel aşamadan geçtiğini belirtmiştir. Bu aşamalar sırasıyla;

1- Duyuşsal Motor Dönemi (0-2 yaş)

2- İşlem Öncesi Dönem (2-7 yaş, bazı problemler algılara dayalı olarak çözülür)
3- Somut İşlemler Dönemi(7-11 yaş, somut problemlere mantıksal çözümler uygulanır)
4- Soyut işlemler dönemi(11-15 yaş, soyut problemlere mantıksal çözümler uygulanır).

Her ne kadar Piaget bu basamakları belirlemişse de daha sonra yapılan çalışmalar, bunların değişik ülkelerdeki ekonomik, kültürel ve sosyal yapıya göre farklılıklar gösterdiğini ortaya koymuştur. Bu zihinsel gelişim evrelerini bilen bir matematik öğretmeni öğrencilerin hangi evrelerde olduklarını tespit ederek eğitim-öğretim etkinliklerini ona göre düzenler. Ayrıca, Piaget'in öğrenme kuramını bilen bir öğretmen öğrencilerin evreler arasında, bir üst evreye geçişini hızlandırabilir ve bilişsel gelişimi kolaylaştırabilir.

Piaget yaşa göre aşamaları sıralama yapmasına karşın aslında öğrenilen konunun yeni ve ilk defa karşılaşılıyor olması ile de ilgilidir. Piaget, insanın dünya ile dinamik etkileşimde bulunan aktif bir organizma olduğunu vurgulamaktadır. Birey, çocuk da olsa, yetişkin de olsa, oturup kendini harekete geçirecek uyarıcılar gelsin diye beklemez. Organizma kendi amaçlarına ulaşmak için aktif olarak çevresindeki nesneleri ve olayları araştırır. Organizma amaçlı, araştırıcı ve aktiftir. Piaget ayrıca okulun, yaşama hazırlayıcı değil, yaşamın kendisi olması ve okullardaki eğitim programları ve uygulanan yöntemlerin, çocukların bilişsel yapılarına uygun olması onların bilişsel yapılarını özümleme ve yeniden düzenleme yoluyla zenginleştirmelerine fırsat yaratması. gerektiğini belirtmiştir.

1.1.2.2 Bruner' in Öğrenme Kuramı

Bruner'in kuramına göre öğretmenler, öğrencilere konunun yapısını kendi kendilerine keşfetmeye sevk edecek problem durumları vermelidirler. Bu anlamdaki yapı, esas bilgileri oluşturan temel düşünceleri, ilişkili veya konuda yansıyan örüntüleri anlatmaktır. Bruner, sınıflarda öğrenmenin tümevarım yoluyla gerçekleşmesi gerektiğine inanır. Tümevarım yoluyla düşünme, ayrıntılar ve örneklerden genel ilkelere ulaşması şeklinde gerçekleşir. Buluş yoluyla öğrenmede öğretmen, öğrencilere özel örnekler verir, öğrenciler konunun yapısını keşfedinceye kadar bu örnekler üzerinde çalışırlar. Bu yaklaşıma dayalı olarak öğrenmede öğrencilerin kazandıkları arasında önemli sayılabilecek bir beceri de problem çözmedir. Buluş yoluyla öğrenmede öğrenciler, bilgiyi sadece alıp özümsemezler, aynı zamanda uygulamaya, analiz yapmaya ve sentez yapmaya zorlanırlar.

Matematiksel olarak düşünüldüğünde ise, buluş yönteminin matematik için en uygun yöntemlerden biri olduğu söylenebilir. Çünkü matematikte kurallar ve genellemeler çoktur. Bunları ezberlemekle bir yere varmak mümkün değildir. Kurallar ve genellemelerin nasıl elde edileceği üzerinde düşünmek ve daha kalıcı olarak elde edilen bilgileri diğer alanlara aktarabilme bu yolla daha kolay olmaktadır.

Altun (2001)'a göre buluş yolu, tümevarımla oluştuğundan öğrencide sezgisel düşüncenin gelişmiş olması gerekir. Bunun için de öğrencilerin problem çözme becerilerinin gelişmiş olması gerekir. Bu nedenle, öğrencilere tahmin yapma ve yuvarlak hesap yapma imkanları sağlanmalıdır.

Bruner, bilişsel gelişimi, Piaget'e benzer bir şekilde incelediğini belirtmektedir. Her ikisi de bilginin kodlanması, işlenmesi, depolanması ve sıralanması üzerinde durmuşlardır. Bruner, bilişsel gelişimin üç aşamadan ibaret olduğunu düşünmektedir. Bu aşamalar;

1- Eylemsel dönem
2- İmgesel dönem
3- Sembolik dönem şeklindedir.

Eylemsel dönemde çocuk çevreyi eylemlerle anlar, çevresindeki nesnelerle ilgili yaşantıyı onlara dokunarak, vurarak, ısırarak ve hareket ettirerek kazanır. Çocuklar için nesneler, bazı eylemlerin gerçekleştirildiği unsurlardır. Mesela; kaşık yemek yediği, bisiklet bindiği bir şeydir. Bu dönemde çocuğa bisiklete binmeyi öğretirken, ne sözel sembol, nede imge kullanabilirsiniz. Çocuklar en kolay psiko-motor eylemlerle öğrenebilirler.

Bruner'e göre bilişsel gelişimin ikinci düzeyi, imgesel dönemdir. Bu dönemde bilgi imgelerle taşınmaktadır. Görsel bellek gelişmiştir. Ancak, çocuğun kararları dile değil, duyu organları yoluyla edindiği duyusal etkilere dayalıdır. Bu dönemde çocuk, algılarının tutsağıdır. Herhangi bir nesneyi, olayı yada durumu nasıl algılarsa zihninde o şekilde canlandırır. Bu dönem Piaget'in işlem öncesi dönemine karşılık gelir.Bilişsel gelişimdeki sonuncu düzey ise, Bruner'e göre sembolik dönemdir. Bu dönemde, çocuk artık etkinlik ya da algının anlamını açıklayan sembolleri kullanır. Sembolik dönem, yaşantıların formüle edilmesine imkan sağlar.

1.1.2.3 Gagne' nin Öğrenme Kuramı

Gagne fikirleri ile problem çözme etkinliklerini oluşturmada öğretmene yardım eden bir teorisyendir. Gagne düşüncenin gelişimini ve büyümesini bir öğrenme sonucu olarak açıklar(Savaş 1999). Gagne'nin öğrenme modeli matematikteki davranışların kazanılması için bir çok yönden uygun bir modeldir (Baykul 1997). Gagne'nin matematik öğretimine en önemli katkısı, bir konunun öğrenilmesi için ders amaçlarının öğrencilerde meydana gelecek davranış değişiklikleri cinsinden yazılmasını savunmasıdır. Gagne'ye göre en sonunda ulaşılması istenen ana amacı en başa ve ona ulaşmak için diğer alt amaçları hiyerarşik bir şekilde basitten karmaşığa doğru sıralamak en önemli noktadır. Bunun yapılabilmesi için, yani öğrenme hiyerarşisinin belirlenebilmesi için Gagne, aşağıda ifade edilen iki sorunun öğretmen tarafından dikkate alınması gerektiğini ileri sürmektedir;

1-Eğitim-öğretim süreci sonunda öğrencinin ne bilmesini veya ne yapabilmesini istiyorsunuz?

2-Hedeflenen sonuca ulaşabilmek için öğrenci neleri bilmek ve yapabilmek zorundadır?

Bu soruların cevaplanması, temel amaca ulaşmak için gerekli olan diğer alt amaçların belirlenmesini, yani bir hiyerarşinin yapılmasını gerektirir. Gagne, öğrenmeyi başarılı kılan metotlardan ziyade en son öğrendiklerinin ürünü ile ilgilenir. Gagne insanların öğrenebildikleri becerilere öğrenme ürünleri adını vermektedir. Gagne bu becerileri; tutumlar, tekrarlı(devinimsel) beceriler, sözel bilgiler, zihinsel beceriler, bilişsel beceriler olarak beş gruba ayırmaktadır. Bu şekilde Gagne, Bruner'in teorileri ilişkilendirilebilecek bir öğrenme merdiveni sunmaktadır. Gagne, çocuk dersin amaçlarını kapsamayan yakın fikirleri öğrenmiş olsa dahi tasarlanan öğretme metodunun geçersiz olduğunu söyler (Savaş 1999).

1.1.2.4 Ausubel' in Öğrenme Kuramı

Ausubel, sunuş yolu ile öğretim yaklaşımını savunmaktadır. Ausubel'in öğrenme teorisinin temelini anlamlı öğrenme oluşturmaktadır (Senemoğlu 2001). Ausubel'e göre öğrenmeyi etkileyen en önemli faktör, öğrencinin mevcut bilgi yapısıdır. Bu nedenle, öğretim planlanırken öğrencilerin bilgi yapısı gözönünde bulundurulmalıdır. Genellikle anlamlı öğrenmenin gerçekleşmesi için öğrencinin zihnindeki kavramsal yapı ile öğrenilecek materyal arasında uyum sağlanması gerekir. Ausubel sunuş yoluyla öğretim modelini Bruner' in buluş yoluyla öğrenme yaklaşımına zıt ve alternatif bir yaklaşım olarak ileri sürmüştür. Ausubel öğrenmenin, Bruner'in önerdiği gibi tümevarım yoluyla değil, genelden özele, kural yada ilkeden örneklere doğru olduğunu, yani tümdengelim yoluyla gerçekleştiğini kabul eder. Ausubel'e göre öğrenmenin çoğu sözel olarak gerçekleşmektedir. O'na göre önemli olan, öğrenmenin anlamlı olmasıdır. Buluş yoluyla öğrenme her zaman anlamlı olmayabilir. Bunun aksine sözel öğrenme (sunuş yolu ile öğretim), eğer etkin şekilde kullanılırsa anlamlı olabilir.

Ausubel'e göre öğrenci, her zaman hangi bilginin önemli, hangi ip uçlarının problem çözümü için uygun olduğunu bilmeyebilir. Bu nedenle, öğrenci herhangi bir konu alanıyla ilgili öğrenmesi gereken kavramları, ilkeleri ve fikirleri buluş yoluyla değil, kendine sunulanı alış yoluyla kazanabilir. Ausubel' in öğrenme ilkesi, "mekanik öğrenme unutulur, anlamlı öğrenme ise daha çok hatırda kalıcıdır" şeklinde özetlenmektedir. Mekanik öğrenmede, bilgiler bellekte düzensiz olarak kalırlar. Anlamlı öğrenmede ise, bilgiler diğer eski bilgilerle ilişkiye sokularak yeniden organize edilir, yapısallaştırılır, zihinde yeni bir anlam kazandırılır. Öğrenme bilginin zihinde yapısallaşmasıdır. Burada yeni bilgiler önceki bilgilerin üstüne konulur; ya onları zenginleştirir veya düzeltir, değiştirir (Ergün ve Özdaş 1997). Ausubel, anlamlı sözel öğrenme olarak bilinen şeylerin sözel bilgi, düşünceler ve düşünceler arasındaki ilişkiler bütününden oluştuğunu vurgular. Ona göre anlamadan ezberlenen şeyler bireyin mevcut bilgileriyle ilişkilendirilerek bütünleştirilmemiş olduğu için anlamlı öğrenme sayılmaz. Anlamadan ezberlenen bilgiler genelde etkisiz olmasına rağmen, ne yazık ki çoğu derslerde bunun ötesinde bir şey gerçekleşmemektedir.

Ausubel'in sunuş yoluyla öğretim modelinin dört temel özelliği vardır. Birincisi, bu model öğretmen ile öğrenci arasında büyük ölçüde etkileşim olmasını gerektirir. Öğretmen öğrencilerin aktif katılımını sağlamaya çalışır. Başlangıç sunuşlarını öğretmen yapmakla birlikte hemen arkasından öğrenciler fikirlerini, örneklerini, tepkilerini açıklar, tartışırlar. Bu durum, ders boyunca sürer. İkincisi, sunuş yoluyla öğrenmede örneklerin büyük bir yeri ve önemi vardır. Sözel öğrenme vurgulanmış olmakla birlikte, örnekler arasında çizimlere, şemalara ya da resimlere de yer verilebilir. Sunuş yoluyla öğretme, soyut kavramların anlamlı hale getirilmesi için bol örnek vermeyi, resimlerle, şemalarla somutlaştırmayı; kısacası tüm duyu organlarına hitap eden uyarıcıların kullanılmasını gerektirir. Diğer bir deyişle, kavramların, ilkelerin somut yollarla ve anlamlı bir biçimde öğrenilmesine yardım eder. Üçüncüsü, daha önce de belirtildiği gibi sunuş yoluyla öğretim tümdengelim niteliğindedir. İlk önce en genel ve kapsamlı kavramlar sunulur; daha özel olan kavramlar bunlardan çıkarılır. Son olarak, sunuş yoluyla öğretim belli bir aşamalı sırayı izler. Öğretim adım adım ilerler. Ders önce ön düzenleyicilerle başlar. Her öğrenme basamağında, daha önce ve yeni öğrenilenler arasında yatay ve dikey ilişkiler kurulur. Böylece öğrencinin anlamlı öğrenmesi sağlanır. Öğrenmede belli basamaklardan geçilmesi zorunludur (Senemoğlu 2001).

Sunuş yolu ile öğretim modelinde, konu öğretmen tarafından organize edilerek öğrencilere sunulmalı, öğrencilerde sunulan bilgiyi anlamlı bir şekilde öğrenmelidirler. Sunuş yolu ile öğretimde öğretmenin görevi, konuyu öğrenciler için en uygun biçimde organize ederek yapılandırma, uygun materyalleri seçme ve daha sonra konuyu genelden özele doğru sistemli ve anlamlı bir şekilde öğrencilere sunmaktır. Buluş yoluyla ve alış yoluyla öğrenme yaklaşımlarında, öğretmenin rolü büyük ölçüde farklılık göstermekle birlikte, iki yaklaşımın bir çok ortak yanı da vardır. Her şeyden önce iki yaklaşımda da, öğrencinin aktif olarak öğrenme sürecinde yer alması gerekir. İkinci olarak, her iki yaklaşımda da öğrencilerin mevcut bilgilerinin harekete geçirilmesi ve yeni bilgilerle ilişkilendirilmesi önemlidir. Üçüncü ortak özellikleri de, her yeni öğrenmenin sürekli olarak bireyin zihninde bir takım değişmelere neden olduğu konusundaki görüş birliğidir. Diğer bir deyişle, her iki yaklaşım da bilişsel bir nitelik taşımaktadır ve anlamlı öğrenmenin oluşturulmasını savunmaktadır. Ausubel'in öğrenme-öğretme yaklaşımı öğrenci açısından düşünüldüğünde alış yoluyla öğrenme, öğretmen açısından düşünüldüğünde de sunuş yoluyla öğretme olarak adlandırılabilir.

Ausubel'in savunduğu anlamlı sözel öğrenmenin (anlamlı öğrenmenin psikolojik esasları şunlardır;

1-Yeni öğrenilecek kavram, bilgi ve ilkeler daha önce öğrenilmiş olanlarla ilişkilendirildiğinde anlam kazanır. Öğrenci zihninde bu ilişkileri kuramazsa konuyu kavrayamaz.

2- Her bilgi ünitesi kendi içerisinde bir bütün oluşturur. Bu bütünde, belirli bir düzende sıralanmış kavramlar ve kavramlar arası ilişkiler vardır. Öğrenci bu düzeni anlayamazsa ve yeni konunun ilişkilerini göremezse konuyu kavramakta güçlük çeker.

3- Yeni öğrenilecek konu öğrenci açısından kendi içerisinde tutarlı değilse veya öğrencinin önceki bilgileriyle çelişiyorsa, öğrenci konuyu kavramakta ve benimsemekte güçlük çeker.

4- Bilişsel içerikli bir konuyu öğrenmede etkili olan zihinsel süreç tümdengelimdir. Öğrenci kendine verilen bir kuralı özel durumlara uygulayamıyorsa onu kavrayamamıştır.

1.2 Yapısalcılık

Bilişsel öğrenme kuramı yapısalcı öğrenme yaklaşımını benimsemektedir. Yapısalcı öğrenme yaklaşımı, öğrenciyi varolan bilgisiyle sunulan yeni bilgiyi sürekli olarak karşılaştırıp bilgilerini yenileyen, değiştiren ve bilgilerine yeni bilgiler ekleyen bir konumda görmektedir. Kısaca, öğrenci bilgi verilen değil, bilgiyi alan ve inşa eden durumundadır. Bu bağlamda bilginin, öğrenciler tarafından öğrenme sürecinde yeniden yapılandırılması söz konusudur.

Gerçekçi olan, yeterince karmaşık olan ve problemler içinde veya bu problemler yardımıyla işlenen bilginin, öğrencinin bilgisiyle bütünleştirilebilmesi için öğretmen etkinlik organizasyonu rolünü üstlenmesi gerektiğidir. Anlamlı öğrenmeye de bilgilerin ilişkilendirilmesiyle varıldığına göre, öğrenci için bir anlamı olan, öğrenciye yabancı olmayan bilgilerle işe başlamak gerekmektedir. Burada öğrencinin kendi bilgilerinin farkında olarak ve kendi düşüncesini kontrol ederek hareket etmesi gereklidir. Dolayısıyla, yapısalcı öğrenme yaklaşımında öğrenme malzemesinin öğrenciye sunumu çok önemlidir. Öğrenmenin yapısalcı yaklaşımla gerçekleşmesi için yapılacak şey, öğrenilecek konunun öğrenciye bir problem ortamında sunulması ve öğrenmenin, öğrencinin kendi sahiplik edeceği etkinliklerle gerçekleşmesidir. Öğrenciye mevcut bilgileri inceleme, sınıflandırma, tahminde bulunma, konuyu arkadaşlarıyla ve öğretmenleriyle tartışma imkanı verilmelidir. Böylece öğrenci kendi sorularını oluşturarak, bunlara cevaplar bularak bilgi edinmiş olur (Altun 2001).

Yapısalcı öğrenmede bilişsel değişim ve kavramsal gelişim, bireyin bilgiyi içselleştirmek için yapmak zorunda olduğu zihinsel işlemlere bağlıdır. Öğrenme sırasında, yeri geldiğinde zihin aşağıdaki işlemleri yaparak öğrenir; içerme işlemi (algıları adlandırma ve yorumlama), dönüştürme işlemi (bilgiyi değişik şekillere dönüştürme, 2+3 =5, 5-2 =3), değiştirme işlemi (somut olayların arkasındaki ortaklığı kavrama, mantıklı düşünme, analiz ve sentezleri yapabilme), yapısallaştırma işlemi (yeni öğrenilen bilgiler zihinde yapısallaştırılır; kişi kendine göre bir zihinsel yapı kurar) (Ergün ve Özdaş 1997). Dolayısıyla bütün öğrenmeler bir keşiftir. Zihinsel işlem yapabilmenin öncelikle pekiştirilmesi gerekmektedir. Yani öğrenileceklerin sorgulanması önemlidir.

Yapısalcı öğrenme, aynı zamanda öğrencinin inanç, tutum ve davranışlarından da etkilenmektedir. Öğrencilerin kendi çözümlerini üretebilmeleri aynı zamanda fikirlerini ve varsayımlarını ortaya koyabilme özgüvenini sağlar. Bu süreçteki temel beklenti, öğrencilerin öğretmenin anlattıklarını beyne yerleştirmelerinden daha çok kendi bilgilerini aktif olarak kurmaları gerçeğidir (Ardahan 2001). Yapısalcı öğrenme modeli, öğrencilerin daha önceki tecrübeleri ve ön bilgilerinden yararlanarak yeni karşılaştıkları durumlara anlam verebileceklerini savunmaktadır. Öğrencilerin kendi fikirlerini oluşturma ve geliştirmesi amaçlı etkinliklerin düzenlenmesi gerekliliğini öne çıkaran yapısalcılıkta; bu etkinliklerin, öğrencilerde kavramların ya özümsenmesi ya da ilgili kavramlara uyum göstermesi amaçlanır. Dolayısıyla bu modelde öğretmen bilgi aktarıcısı rolünden daha çok özel stratejiler ve teknikler uygulayarak bilgi elde edilmesini kolaylaştırıcı ortamlar hazırlamaktadır (Baki ve Bell 1997).

Bilginin yapılandırılmasında öğrencinin katılımının yanı sıra öğrenme işlemine katılan duyu organlarının fazlalığı da etkin bir rol oynar. İnsan zihninin çok önemli bir özelliği de soyut konuları kavrayabilmesi ve soyut düşünme yeteneğine sahip olmasıdır. İnsana soyut düşünme yeteneği kazandırmada somut kavramlardan başlanması öngörülmektedir. Ausebel'e göre öğrenciler işitme görme, koklama ve dokunma gibi duyu organları yardımıyla aktif bir şekilde algıladıkları bilgiyi yapılandırırlar ve bütünleştirirler. Bilginin bireyler tarafından eşyalar ve objeler üzerinde yapılan aksiyonlar sonucunda içerden yapılandırıldığını, dışarıdan hazır verilemeyeceğini Piaget de ifade etmektedir. Piaget, bilginin oluşumu sürecinin altında bireyin etkinliğinin yattığını ifade etmektedir. Yine Piaget zihinsel gelişimin somuttan soyuta doğru olduğunu ifade etmektedir. Bir ilişki önce kelimelerle dile getirilip grafikleştirilir; sonra soyut matematik dili kullanılarak ifade edilirse geniş bir öğrenci kitlesine ulaşmak mümkün olur. Bu da öğretim sürecine herkesin katılımını sağlar (Durmuş 2001).

1.3 Görselleştirme

Günlük hayattaki birçok olay genelde geometrik yada fiziksel sezgilerle yorumlanmasına rağmen, matematikteki bir konuyu araştırmak amacıyla incelenen herhangi bir kitapta günlük hayatın duyuşsal tecrübelerinin ihmal edildiği soyut sembolik muhakemelerle karşılaşılması içten bile değildir. Bu durum, büyük oranda görsel muhakemenin özellikle son yüzyılda ihmal edilmesinin bir sonucudur. Halbuki, matematiğin gelişim sürecinde önemli rol oynamış bilim adamlarının çalışmalarında görsel muhakemeye sıklıkla ihtiyaç duydukları artık bilinen bir gerçektir. Hacısalihoğlu (1988), öğrenmenin bir algılama işi olduğunu ve matematikte dokunma, işitme ve görme (yazma, söyleme ve çizme) gibi üç önemli duyu organı kanalıyla daha kuvvetli algılamanın sağlanacağını belirtmektedir. Aynı zamanda; matematikte kavram, çizim ve ispatların düşünce sisteminin gelişmesine yardımcı olduğunu ifade etmektedir. Baki (1996), soyut matematik kavramlarının somutlaştırılmasının öneminden bahsetmiş ve bilgisayar yardımıyla görsel yolların matematiksel çözümleri ve analizleri kolaylaştırdığını ifade etmiştir.

Görsel muhakemenin kullanımının Mezopotamya ve Yunanistan'daki ilk matematiksel etkinliklere kadar dayandığı görülmektedir. Rival (1987), diyagramların matematiğin kendisi kadar geçmişi olduğunu ve geometrinin çoğunlukla şekiller üzerine kurulu olduğunu belirtmektedir. El-Harezmi, 10. yüzyılda ikinci dereceden denklemlerin çözümü için kareye tamamlama yöntemi olarak adlandırılan geometrik yaklaşımı geliştirmiştir. Euclid'in Elements adlı eserinde ileri sürdüğü teorem ve ispatlar soyut olmasına rağmen yoğun bir şekilde şekil kullanımı içermektedir. Herhangi birinin, Euclid'in bu yaklaşımlarını şekillere bakmadan anlayabilmesi ya da en azından zihninde canlandırabilmesi çok zor bir durumdur. Matematikte diyagramların kullanımı özellikle 18.yüzyılda popüler ve mantıklı bir yaklaşım olarak yerleşmiştir. Örneğin, Newton ve Euler'in çalışmalarında grafik ve diyagramları sık sık kullandıkları bilinmektedir.

Görselleştirmenin bir yaklaşım olarak matematik eğitimcilerinin ilgi alanına girmesi matematikteki kavramların tarihsel köklerinin ele alınmasıyla başlamıştır. Daha sonra geniş çizim ve görselleştirme imkanı sunan bilgisayar teknolojisinin yaygınlaşmasıyla görselleştirme matematik eğitimi ile ilgilenen bir çok araştırmacının ilgi alanına girmiştir. Matematikte görselleştirme ile ilgili çalışmaların özellikle son otuz yılda büyük oranda arttığı görülmektedir.

Görselleştirme yaklaşımı ile ilgilenen matematik eğitimcileri kendi çalışma alanları, kullandıkları araç, materyal, teknoloji ve bireyin zihinsel gelişiminden hareketle görselleştirmeyi tanımlamışlardır.

Zimmermann ve Cunningham(1991) görselleştirmeyi; "ister elle çizili ister bilgisayarla çizili olsun matematikteki kavram, kural ve problemlerin geometrik veya grafik görüntülerinin oluşturulma ya da kullanım süreci" olarak tanımlamışlardır.

Schnotz *et al.*(1995) ise görselleştirmeyi; "görsel-uzaysal modelin zihinsel bir yapıya dönüşüm süreci" olarak tanımlamışlardır.

Zazkis *et al.* (1996) görselleştirmenin, "bireyin içsel bir kavram ile duyular yoluyla edinimleri arasında güçlü bir bağ kurma eylemi" olarak tanımlanabileceğini belirtmişlerdir. Burada görselleştirme sürecinin iki şekilde geliştiğine dikkat çekmişlerdir. Görselleştirmenin ya bireyin dış dünyada algıladığı bir obje ya da olayı zihninde canlandırması ya da bir karton, bir karatahta ya da bilgisayar kullanarak zihninde canlandırdığı bir yapıyı fiziksel dünyaya aktarılması şeklinde gerçekleştiğini belirtmişlerdir.

Dolayısıyla görselleştirme eylemi, dıştan içe dönük yada ters yönde bir dönüşüm olarak göz önüne alınabilir. Aynı zamanda görselleştirmeye, şekil ve zihin arasında birey tarafından kurulan bir bağlantı olarak bakılabilir. Bir matematikçi, bir alt grubun normal alt grup olup olmadığını anlamak için diyagramlardan yararlanması durumunda veya iki bilinmeyenli iki lineer denklem sisteminin çözümünü düzlemde kesişen iki doğru olarak grafikle yorumlaması halinde görselleştirme yapmış olmaktadır(Zazkis *et al.* 1996).

Görselleştirme yaklaşımının üç temel yolla gerçekleştirilebilmesinin mümkün olduğu görülmektedir. Bunlar, şekiller yada grafikler, animasyon, bilgisayar yazılım programlarıdır. Burada şekiller ya da grafikler; cebirsel ifadelerin geometrik modeller yardımı ile sunulması durumu ile ilgilidir. Animasyon; cebirsel ifadelerin geometrik modellerinin hareket yada aksiyon olarak dinamik bir şekilde sunumu şeklindedir. Bilgisayar yazılım programları ise, bilgisayar ortamında matematiksel konuların cebirsel ifadelerinin kullanıldığı ve öğrencilere herhangi bir konunun cebirsel örnek ve anlatımlarla ve de gerektiğinde geometrik modeller kullanılarak sunulması için gerekli araç rolündedir. Bu yaklaşım durumlarından şekiller ya da grafikler sabit şekilleri, animasyon hareketli şekilleri ve bilgisayar yazılım programları ise geometrik sabit ve hareketli şekillerle cebirsel çözümleri içine almaktadır. Bu çalışmada grafikler veya şekiller yardımıyla görselleştirme yaklaşımı üzerine odaklanılmıştır. Bu yönden ele alındığında görselleştirme; cebirsel problemleri çözmek için geometri ve analitik geometrinin getirdiği kolaylıkları sezdirme hedefine hizmet eden bir araç olarak nitelenebilir. Yani, bu şekiller veya grafikler bir ispat teşkil etmezler ve bir kavramı tam olarak tanımlamazlar, sadece teoremlerin ispatına yada kavramların anlaşılmasına yardım ederler.

Daha basit bir ifade ile soyut kavramların yarı-somut olarak da adlandırılabilecek geometrik yapılarla ifadesi olan görselleştirmede temel amaç; geometrik kavram ve modellerden hareketle çeşitli aksiyom sistemlerinin (grup, vektör uzayları vs.) ve çeşitli uzayların varlığını sezdirmek, bireye soyutlama alışkanlığı kazandırarak bu yolla zihinsel bağımsızlığını ve yaratıcılığını geliştirmek, anlamlı ve kalıcı öğrenmeyi sağlamaktır. Geometri terimi genel olarak fiziksel bir nesneye karşılık gelen matematiksel modeli ifade etmekte kullanılır. Dolayısıyla; geometri, fiziksel nesneyle bağlantısı nedeniyle somut olarak da değerlendirilebilir.

Matematik bilinen anlamda deneye dayanmayan bir bilimdir. Ne var ki matematik konu ve problemlerini kolay anlayabilmek ve anlatabilmek için genellikle şekil kullanılabilir. Temelde öğrenciden beklenen şey şekil ya da çizimlerden bağımsız bir metin üretmesidir. Ne var ki bu ürünün ortaya çıkmasında sezginin temel dayanağının çizimler olduğu unutulmamalıdır (Ersoy vd 1991).

Grafikler, diyagramlar ve çeşitli geometrik şekil veya modeller matematiksel düşüncelerin ve soyut kavramların görselleştirilmesinde araç olarak kullanılabilir. Bu şekilde birey, fiziksel(dış) dünya ile soyut kavramlar arasında çok daha sağlam ilişkiler kurabilir. Yani; cebirsel ifadelerin geometrik modellerle sunulması öğrencilere fiziksel bir modelden hareketle bir teorinin nasıl kurgulanabileceği olanağını yaratır.

Matematiğin çeşitli alanlarında global ve sezgisel bir bakış açısı kazandırmada görselleştirmenin önemi ile ilgili çok sayıda araştırmalar yapılmıştır. Mesela; Fischbein(1987), görsel bir imgenin verinin yalnızca anlamlı bir şekilde kurgulanması olmadığını aynı zamanda çözümün analitik gelişimini açıklamada da önemli bir faktör olduğunu ifade etmiştir. Goldenberg (1987), uygun görsel temsillerin cebir öğrencilerinin başa çıkmak zorunda oldukları sembol sistemini anlamlandırmaya yardımcı olduğunu ve bu yolla sistemin öğrenimini teşvik ettiğini düşünmektedir. Bu yaklaşımın teorik olarak uygun ve bilgisayar teknolojisinin de bu uygulamaya yardımcı olduğunu düşünmektedir. Benzer şekilde Ben-Chaim *et al.* (1989) bu durumu şu şekilde ifade etmektedir: "Temsillerin görsel içeriği, ortaöğretim düzeyindeki birçok öğrenciye tümdengelimle varılan delilin formal olmayan bir sunumunu anlama imkanı vermektedir, bununla birlikte cebirsel bir yaklaşım, bu öğrencilerin var olan sıkıntılarını gidermede yeterli olamayacaktır. Tecrübelerimizde gördük ki bu öğrenciler ve hatta öğretmen adayları daha soyut cebirsel genelleştirmeleri anlayabilmelerinden önce, problemlere somut ve yarı-somut temsiller yoluyla yaklaşacak tecrübelere ihtiyaç duymaktadırlar".

Şu var ki; görselleştirmenin matematik öğreniminde tamamen pozitif bir faktör olduğunu öngören bu düşüncenin matematik eğitimcileri arasında tam olarak kabul gördüğünü söylemek mümkün değildir. Matematik eğitimcileri arasında görselleştirme yaklaşımının öğretim sürecinde kullanımı konusu ile ilgili farklı görüşlerin dile getirildiği görülmektedir. Görselleştirme yaklaşımının matematikteki rolü sıkça tartışılmıştır. Birçok araştırmacı, matematiksel kavramların resimli ve zihni temsillerinin teşvik edilmesinin lehinde ve aleyhinde görüş bildirmiştir. Bunların bazıları bu tür bir görselleştirmenin matematik öğreniminde kavramayı, kendine güveni ve yaratıcılığı kolaylaştıracağına inanmaktadır (Ben Chaim *et al.* 1989, Bennett 1988, Clements and Campo 1989, Dirks 1980, Hamersma 2002, Huber 1993, Goldenberg 1987, Kaljumagi 1992, Selden *et al.* 1989, Tall and Thomas 1989, Thomas 1992, Thompson and Dreyfus 1988, Willis and Fuson 1988). Bazı eğitimciler ise bir resmin temsil ettiği, bir vak'alı (one-case) bir senaryonun sınırlı etkisi sebebiyle, görselleştirmeye fazla güvenmenin matematiksel düşünceyi engelleyebileceğini savunmaktadırlar (Brown 1969, Dufour-Janvier *et al.* 1987, Fennena 1972, Poage 1977, Presmeg 1986, Touger 1986, Vinner and Hershkowitz 1980). Bazı araştırmacılar ise; matematikte uzun süredir var olan "matematiğin anlık, analitik, sembolik ve algoritmik olması gerektiği yönündeki" bir önyargıyı kabul etmektedirler (Barwise and Etchemendy 1991, Cunningham 1991, Eisenberg and Dreyfus 1986, Goldin 1987, Lean and Clements 1981, Rival 1987, Vinner 1989). Barwise and Etchmendy (1991)'nin ifade ettiği gibi "Görsel imgelerin bireyin bilişsel faaliyetlerindeki açık önemine rağmen, görsel temsil, matematiğin hem teorisinde hem de pratiğinde ikinci planda kalmaktadır. Bizlere diyagramların ve grafiklerin temsil formlarının kullanımını mecburi kılan delillere yan gözle bakmamız öğretilmiştir ve biz de bu yanlış düşünceyi öğrencilerimize aynen aktarırız". Tall (1991) ise görselleştirmeyi kesin bir şekilde kabul yada reddetmenin matematiksel düşüncelerin temellerinin kabul edilmemesi sonucunu doğuracağını, çünkü; matematikte konuların ortaya çıkma süreçlerinde görselleştirmenin çok önemli bir rolü olduğunu belirtmektedir.

Matematikteki konuların soyut anlamları algoritmik işlemler, sembollerin kullanımı, analitik muhakeme ve sonuçları içerir. Halbuki matematikteki birçok kavram algoritmik yaklaşımdan ziyade görsel olarak sunulabilir. Bu yaklaşım akla daha yatkındır. Çünkü; matematiksel kavramların gösteriminde belli bir etkinin varlığı ve iyi planlanmış görsel bir model ya da yorum üzerine kurulu bir öğretim yaklaşımı öğrencilerin bir çok kural ya da işlemleri kendi başlarına kurgulamalarına imkan sağlar. Bu durumda, kendi önsezilerini test etmede sıkıntılara sahip öğrencilerin matematiksel kavramlarla ilgili özel anlamlar kurmalarında önemli aşamalar kat edilebilir.

Hadamard (1945) matematikçilerin araştırma, düşünce ve muhakeme yöntemlerini ele aldığı çalışmasında özellikle geometri ile ilgili yöntemlerin kendisi ve diğer matematikçilerin düşünceleri için yol gösterici olduğunu belirtmektedir. Hadamard matematikçilerin düşünsel olarak ne kelimelerin kullanımından ne de cebirsel ya da diğer notasyonların kullanımından kaçınmadıklarını ancak belirsiz şekiller için bu yola sıklıkla başvurdukları ve düşünmenin elemanları olan psikolojik yapıların belirli işaret ya da şemalardan ibaret olduğunu belirtmiştir. Aynı çalışmasında Einstein'in ona yazmış olduğu şu ifadeyi de belirtmiştir; "Yazılı ya da sözlü kelimelerin ve dilin benim düşünce sistemimde herhangi bir rolü yoktur (Styleianou 2002)".

Aynı zamanda Halmos (1987), matematikte daha ileri bilgi düzeyine sahip olunabilmesi için matematikçinin görselleştirme yeteneği ile doğması gerektiğini belirtmektedir. Sfard (1994), matematikçilerin şemaları düşüncelerini geliştirme ve iletişim kurma aracı olarak kullandıklarını belirtmektedir. Polya (1945), başarılı problem çözümü için kendi matematiksel tecrübelerine dayalı olarak buluşsal öneriler listesi hazırlamıştır. Bu öneriler arasında Polya, öğrencilere özellikle şekil çizmeyi tavsiye etmiştir. Şekillerin yalnızca geometri konularıyla sınırlı olmadığının üzerinde özellikle duran Polya, tam aksine , problem geometri problemi olmasa bile şekil çizmenin mümkün olduğuna ve bu yolun zorlanması gereğine ve ayrıca geometrik olmayan herhangi bir problem için geometrik tasvir oluşturmanın çözüm için önemli bir aşama olduğuna inanmaktadır.

Son yıllarda bilgisayarların ve bilgisayar grafik çizim programlarının kullanımını artması dolayısıyla görsel temsiller problem çözmede kullanışlı bir araç olarak daha önemli role kavuştu. Aynı zamanda matematik eğitimi ile ilgili topluluklar ve son reform çabaları görsel muhakemenin kullanımını desteklemekte ve cesaretlendirmektedirler. Mesela; The National Counsil of Teachers of Mathematics (NCTM 2000), okul matematiğinde esas ve standartlar adlı araştırmasında sınıflarda problem çözme sürecinde çok yönlü tasvirlerin kullanımını önermektedir.

Matematiksel araştırmalarda ispat sürecin yalnızca son aşamasıdır. İspata varılmadan önce, ispatlanmaya değer ve doğru olabilecek teorilerin kurgulanması gerekir.

Matematiksel düşünmenin bu analiz aşamasında çoğunlukla bağıntıların kapsamlı şekillerinin kurgulanmasından yararlanılır. Bu tip diyagramların yapılandırılmasında da görselleştirme vazgeçilmez bir yaklaşımdır. Matematiksel düşüncenin bir çok aşamasında, bağıntıların bütün resimlerini oluşturan yapıların kurgulanmasından yararlanılırken; bu şekildeki algoritmaların oluşturulmasında da görselleştirme yaklaşımı vazgeçilmez bir araç rolündedir.

Müfredatlarda daha çok görselleştirmenin olması yönündeki yorumlardan bazıları öğrencilerin yalnızca matematiği daha iyi anlaması üzerinde durulmamasını aynı zamanda matematik yapmak ve matematiksel düşünmek içinde daha yaratıcı yolların teşvik edilmesi gerektiğini ifade etmektedirler (Cunningham 1991). Okul Matematiği müfredatı için yeni bir felsefe ve çatı başlıklı araştırmada Ulusal Araştırma Kurulu (The National Research Council), daha güçlü olan bilgisayarlar gibi kompleks fiziksel olayları modelleyebilen matematikçilerin gittikçe artarak güç problemleri çözmeye ihtiyaç duyacaklarını belirtmektedir. (National Research Council 1990). Touger (1986), öğrencilere uygun olmayan bir model verildiğinde hüsrana uğradıklarını vurgulamıştır. Bazı öğrenciler için bu modeli kullanmak kendi yaptıklarında daha güç bir iş olmuştur. Öğretmenler bu beklenmeyen durumların farkında olmak zorundadırlar. Sowder (1976)'da hacim, alan, uzunluk hesabı gibi hesapları içeren çoğu modellerin aralarda çok ince nüanslar olduğuna dikkat edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Matematik eğitiminde görselleştirmenin verimli bir metot olduğunu kabul eden bazı araştırmacılar, matematiksel kavramların öğretiminde en uygun ve en etkili modellerin kullanımı ile ilgili düşüncelerini ve araştırmalarını sunmak istemişlerdir. Sowder (1976); bir modelin şu şartları sağlaması gerektiğini iddia etmektedir;

i) Öğrenciler sembollerle anlamlarını bağdaştırmalı
ii) Model yapay değil doğal olmalı
iii) Model sonraki çalışmalarda kullanılabilir olmalı,
iv) Gösterimleri bir sonraki algoritmayı yapmaya yardımcı olmalıdır.

Sowder, bu yüzden görselleştirmenin kullanılması gerektiğini söylemiştir. Örneğin; Sowder tam sayılarda işlemleri göstermek için kullanılan mağnetik çekim (magnetic attraction) metodunun kullanımını onaylamaz. Çünkü; çarpım gösterimi doğal değildir. Sowder, ayrıca herhangi bir gösterimin konuyla ilgili daha ileri çalışmalara uyarlanabileceğine dikkat çekmiştir.

Werner (1973), sayı doğrusundaki bir çıkarma işlemi modelinin, tamsayılarla çıkarma şekline geçiş olabileceğini ele almıştır.Yine; Osborne (1973), bir modelin, gelecekteki ilgili kavramlara daha uygulanabilir olması için halen geçerli olan modellerden daha kompleks olması gerekliliğini vurgulamıştır. Brown (1969), modellerin keyfi olmaması gerektiğini, amacının açık olması gerektiğini söylemiştir. Aynı zamanda; Brown bir modelin varlığının sistemin doğru olduğu anlamına gelmeyeceğine dikkat çekmiştir.

Zihinsel görüntü oluşturma, günümüz matematik öğretiminde ciddi bir aşama kat edilmesinde önemli bir araç rolü görebilir. Böyle bir beceri, öğrenciye keyfi hesaplama kurallarının ötesinde anlamlı bir yol bulma imkanı sağlar. Ayrıca, öğrencinin kendi mantıksal dünyasında başarma hissini ve kendine olan güven duygusunu arttırır. Öğrenci, fiziksel objelerden herkesçe ortak olan bir anlam çıkarabiliyorsa; bu öğrenci, öğretmenin, kitaplarının veya bilgisayarın önerdiği algoritmaları kabul etmiş durumdadır.

1.4 Kompleks Sayılar

Geleneksel olarak analitik ve kuralcı bir yaklaşımla işlenen matematik analizdeki konuların çarpıcı örneklerinden biri de kompleks sayılardır. Günümüzde pek çok cebir ve trigonometri kitapları, bir çok konu için grafik ve görselleştirme desteğinin önemini belirtmektedir. Örneğin; ders kitaplarının çoğu denklem çözümünde hem grafiksel hem de cebirsel çözümleri bir arada vermektedir. Bununla beraber bu kitaplar da kompleks sayılar konusundaki yaklaşımlar oldukça analitik kalmaktadır. Örneğin; College Algebra Through Modelling and Visualization adlı kitapta kompleks sayılar, " Eğer $x^2+1=0$ denklemi çözülmek istenirse sembolik olarak $x^2 = -1$ elde edilir. Bütün x reel sayıları için $x^2 \geq 0$ olduğundan hiçbir reel çözüm yoktur. Bununla beraber; bu çözüm elde edilebilir" şeklinde tanıtılmaktadır. Mathematics in Action: Algebraic Graphical and Trigonometric Problem Solving adlı kitapta ise kompleks sayılar "reel olmayan ancak reel sayıların genişletilmesiyle elde edilen ve reel sayılardan ayırt edici karakteristiği $i=\sqrt{-1}$ sanal birimi olan sayılar" olarak tanımlanmaktadır. Genel olarak analiz ya da cebir kitaplarında kompleks sayıların kurulmasının üç yoldan biri takip edilerek verildiği görülmektedir. Bu yollar;

i) İkinci dereceden denklemleri çözmek için $i=\sqrt{-1}$ sanal biriminin varlığı kabul edilmesiyle,

ii) $\Re^2$ deki cebirsel yapıya

$$(a,b).(c,d)=(ac-bd,\ bc+ad)$$

formülüyle belirtilen kompleks çarpım kuralı ilave edilmesiyle,

iii) (a, 0) sayı çiftleri cümlesinin $\Re$'ye izomorf olması ve (0, b) sayı çiftleri cümlesinin $\Re$'ye izomorf olmamasından hareketle belirtilebilir.

(a, 0) sayı çiftleri cümlesinin $\Re$'ye izomorf olması ve (0, b) sayı çiftleri cümlesinin $\Re$'ye izomorf olmaması sonucu;

$$\begin{aligned}(a,b) &= (a,0)+(0,b)\\ &= (a,0)+(b,0).(0,1)\\ &= a+ib\end{aligned}$$

eşitliğinden kompleks sayılar, a + ib cebirsel formunda ifade edilir.

Bu yolların her üçü de öğrencilere çok anlamlı gelmeyebilir. Fakat bu durum, kompleks sayıların gelişiminde bu üç yolun etkinliğini değiştirmez. Öğrenciler kompleks sayıları yalnızca bu tip tanımlamalar yoluyla öğrendiklerinden reel durumla benzerlikler kurmaya alışmaktadırlar. Mesela;

$$\frac{\sqrt{2}+3i}{3-\sqrt{2}i}$$

gibi işlemleri sadeleştirmek zorunda oldukları problemler üzerinde çalışmakta ve bu kavramlar hakkında bazı belirsizliklerin olduğunu unutabilmektedirler. Aslında; kompleks sayıların anlamı, yukarıda ifade edilen özelliklerin kullanımından doğmaktadır (Couco 1997). Fakat 18.yüzyılda Gauss, sanal sayı tanımlamasının kompleks sayılar ve reel sayılar arasında kurulan bilişsel köprü için engel teşkil edeceğini belirtmiştir. Garip bir ilgisizliğe uğrayan ve yanlış bir bakış açısı sonucunda oluşan bu durum yetersiz terminoloji kullanımından kaynaklanmaktadır. Eğer +1, -1, $\sqrt{-1}$; pozitif, negatif ve sanal birimler olarak adlandırmak yerine direkt, indirekt ve yanal birimler olarak adlandırılsaydı bu ilgisizlik aşılabilirdi.

Aslında; i sanal biriminin anlaşılabilmesi için bu yaklaşım, Dugopolski (2002)'nin Precalculus Function and Graphs ve Larson *et al.* (2001)'nın College Algebra a Graphing Approach adlı cebir ve analiz kitaplarındaki yaklaşımlarla benzerlikler göstermektedir. Birçok cebir kitabı, i sayısını, negatif bir sayının karekökünü temsil eden bir sembol olarak tanıtmaktadır. Bu yaklaşımla tanıtılan sayı, daha önceden öğrenilen sayı kavramlarının bir açılımı olarak elde edilemez. Bu, "biz daha önce imkansız olarak düşündüğümüz bir şeyi tanımlayalım ve tümdengelimsel olarak çıkarılabilecek sonuçları elde edelim" şeklinde bir yaklaşıma yol açacaktır. i, $\sqrt{-1}$ değerini temsil eden bir sembol olarak kullanıldığında, $a \geq 0$ için $\sqrt{-a}$, $i\sqrt{a}$ olarak ifade edilir.

1.5 Kompleks Sayıların Tarihi Gelişimi

Girolamo Cardano 1545 yılında yayınladığı Ars Manga adlı eserinde $x = 5 + \sqrt{-15}$, $y = 5 - \sqrt{-15}$ şeklinde bir çözüme sahip olan;

$$x+y=10$$
$$x.y=40$$

lineer olmayan denklem sistemini gözönüne aldı.Bu çalışmasında Cardano, negatif bir sayının karekökü için bir yorumda bulunmadan cebirsel kurallara uygun niceliklerin kabulü üzerinden bir düşünce şekli geliştirmiştir. Cardano aynı çalışmasında, x = 4 kökünün aksine $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ ifadesine sahip $x^3 = 15x+4$ üçüncü dereceden denkleminin çözümü için Tartaglia formulünün uygulamasını incelemiştir. Raphael Bombeli (1526-1573);

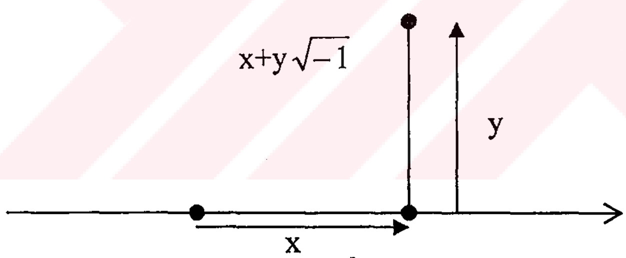
$$(2 \mp \sqrt{-1})^3 = 2 \mp \sqrt{-121}$$

eşitliğini ve bu sayıları doğal sayılar gibi gözönüne alarak bu sanal kökleri hesaplayacak bir yol önerdi. Cardano'nun ifadesi;

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

şeklindeydi. Bombelli'nin çalışması kompleks sayıları gerçek matematik problemlerini çözmek için kullanmada ilk düşünce olarak kabul edilebilir.

La Geometrie (1637)'de, Rene Descartes reel ve sanal sayılar arasında bir ayrım yaptı. John Wallis 1637 yılında Algebra adlı eserinde kompleks sayıları geometrik olarak sundu. Sayının reel kısmın yatay bir doğru üzerinde, sanal kısmını da bu doğruya dik açıdaki başka bir doğru üzerinde gösterdi (şekil 1.1).



Şekil 1.1

Bu öneri bazı nedenler dolayısıyla o dönemde fazla önemsenmedi. 1702 de John Bernoulli $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ formundaki integralleri basit kesirlere ayırma yöntemiyle hesapladı. Kompleks sayıların reel sayılarla benzerlikler taşıdığı düşüncesiyle, integre edilecek ifadeyi , α ve β paydadaki ikinci dereceden denklemin kökleri olmak üzere;

$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta}$$

formunda yazdı. İkinci dereceden bir denklemin reel köke sahip olmadığı durumlarda bu metodun kullanımı kompleks sayıların logaritmalarının düşünülmesine yol açtı. Hem

Bernoulli hem de Leibniz bu metodu kullandı ancak belirsizlik 1712 yılına kadar devam etti. Leibniz negatif sayıların logaritmasının kompleks olduğunu iddia ederken Bernoulli reel olduğunda ısrar ediyordu. Bernoulli;

$$\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$$

olduğundan integrasyonla log (-x) = log (x) sonucuna ulaşıyordu. Diğer taraftan Leibniz, bu integralin yalnızca pozitif x değerleri için doğru olduğunda ısrar ediyordu. 1749'da Leonhard Euler, Bernoulli' nin ihmal ettiği keyfi sabiti dikkate alarak ve integrasyonla

$$\log(-x) = \log(x) + c$$

sonucuna ulaştı. Ve; bu karışıklığı, Leibniz'in görüşünün doğru olduğunu ortaya koyacak şekilde çözdü. Aynı zamanda 1748'de kompleks sayıları içeren ifadelerin formal olarak çözümlenmesiyle

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

bağıntısını elde etti.

logz = w olması için gerek ve yeter şart $e^{w} = z$ olduğunun tanımlanmasıyla ve logaritma teorisinin kompleks düzleme genişletilmesiyle bazı ilginç sonuçlara ulaşılabilir. Yani;

$$e^{\log z + m\pi i} = e^{\log z}(e^{\pi i})^{m} = z(-1)^{m}$$

olup m=2n çift tamsayısı için

$$e^{\log z + 2n\pi i} = z$$

ve böylece logz + 2nπi, z'nin logaritmasıdır. Dolayısıyla kompleks logaritma çok değerlidir. m = 2n+1 tek tamsayısı için;

$$e^{\log z + (2n+1)\pi i} = -z$$

ve böylece

$$\log(-z) = \log z + (2n+1)\pi i$$

olur. Bu da Leibniz- Bernoulli tartışmasının sonucunu verir. Yani; x reel pozitif sayısı için log (-x) kompleks olmalıdır.

Danimarka'da 1797 yılında Caspar Wessel'in kompleks sayıları düzlemdeki noktalar olarak yorumladığı bir makalesi yayınlandı. Bu çalışma, makalenin Fransızca bir çevirisinin 100 yıl sonra yayınlanmasına kadar fark edilmedi. Bu süreçte Jean- Robert Argand 1806'da bu çalışmalardan habersiz olmasına rağmen bir fikir ortaya attı. Bu dönemden beri kompleks sayıların geometrik yorumu Argand diyagramı olarakta adlandırılır.

On sekizinci yüzyılın sonlarına kadar kompleks sayıların esrarı ve bu sayıların güvenilirliği ile ilgili bütün çalışmaların ortaya konamadığı anlaşılmaktadır (Kleiner 1998). Bu dönemdeki matematikçilerin yapmış oldukları çalışmalarda sanal sayıları doğrudan doğruya olmasa da sıkça kullandıkları artık bilinen bir gerçektir..

Kompleks sayılar teorisinde diğer bir öncü isim Carl Friedrich Gauss'tur. 1799 yılında tamamladığı doktora tezinde, 18.yüzyılın başından beri matematikçilerin ilgilendiği problemler üzerinde çalıştı. Başlangıçta reel katsayılı ikinci dereceden denklemlerin çözümlerinin kompleks sayıların ortaya çıkmasına sebep olduğu gibi bir düşünce gelişmişti. Böylece kompleks katsayılı denklemlerin çözümlerinden de yeni bir sayılar cümlesi oluşturulabileceği varsayılıyordu. Jean D'Alembert (1717-1783) kompleks sayıların tek başlarına yeterli olduğunu fark etti. Gauss cebirin temel teoreminde -her polinom en az bir kompleks köke sahiptir- bu düşünceyi doğruladı. Gauss başlangıçta bu teoremi herhangi bir polinomu lineer ve ikinci dereceden çarpanlar halinde düşünerek yani tamamen reel formda ispatladı. Daha sonra bu teoremi genel duruma uygun olarak ispatladı. 1811'de kompleks sayıların geometrik yorumu ile ilgili tüm ayrıntıları kapsayan bir çalışma yayınladı. 1837'de yani Cardano'nun sanal sayıları kullanmasından yaklaşık üç yüzyıl sonra William Rowan Hamilton, kompleks sayıların tanımını reel sayıların sıralı çifti olarak verdi. Bu düşünce kompleks sayıların cebirsel bir temele oturmasında dönüm noktası oldu.

Günümüzde kompleks sayılar;

i) Düzlemdeki nokta yada vektörlerle,

ii) Sıralı reel sayı çiftleriyle,

iii) Düzlemde vektörlerin öteleme yada dönmesi gibi hareketlerle,

iv) a ve b reel sayı olmak üzere a+ib formundaki sayılarla,

v) Reel katsayılı polinomlarla,

vi) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ formundaki matrislerle,

vii) Cebirsel olarak kapalı tam bir cisimle

olmak üzere çok farklı formlarda kullanılmaktadır.

1.6 Kompleks Sayıların Geometrisi

1.6.1 Kompleks Sayıların Geometrisinin Tarihi Gelişimi

Cardano (1510-1576), negatif sayıların karekökleriyle ilgili ilk çalışmaları yapmıştır. Bununla beraber Cardano, bu sayılar için hiçbir yorumda bulunmadan bu sayıları hayali (imkansız) sayılar olarak ifade etme yoluna gitmiştir. 17. yüzyılda, İngiliz matematikçi John Wallis (1616-1713) ve daha sonra yani 18.yüzyılın sonu ve 19.yüzyılın başlarında Caspar Wessel (1745-1818) ve Jean Robert Argand, kompleks sayıların temsili için uygun geometrik diyagramlar geliştirdiler. 1637 de, Rene Descartes (1596-1650) reel ve sanal terimlerini kullandı. 1748'de Leonhard Euler (1707-1783), $\sqrt{-1}$ sayısını temsil eden i sembolünü ilk kez kullandı. Wallis, Wessel ve Argand tarafından gerçekleştirilen geometrik yorumlar, o dönemde bile, heyecanla karşılanmamıştı.

Argand (1806), kompleks sayıların yorumunu reel nicelikler cinsinden yapmıştı. Argand'a göre reel kısımlarla tam olarak eşit değerde görülebilen kompleks sayıların sanal kısımlarının geometrik modeli, bu sayıların özelliklerinin en son açıklamasıydı. Buna karşı bu iddia, cebirsel ifadelerin geometrik modellerinin gerçek bir temel olarak alınamayacağına karşı olanlar tarafından kabul görmedi. Örneğin 1831'de, artık herkes tarafından bilinen geometrik model üzerindeki araştırmasında Gauss, bu yaklaşımın yararlı bir uygulama ya da gösteriminden daha önemli olmadığını belirtti (Glas 1998).

1833 yılında William Rowan Hamilton, kompleks sayıların geometrisi ile ilgili bazı çalışmalar yaptı. Hamilton' a göre; x+iy gibi bir kompleks sayıda "i" niceliği ve " +" işareti bu sayıları anlamlandırabilmede sıkıntı yaratmaktaydı. Birinin nitelendirilmesiyle birbirinden ayrılabilen x ve y'nin reel sayı olması çok önemli bir noktaydı. " +" işareti ile x ve iy ifadelerini bir tarafta birleştirmek için yönlendirici değildi, bu işaret, sadece x ve y nin farklı yerlerde olmalarını engelleyen birleştirici bir araçtı. Hamilton bu düşüncesinden hareketle herhangi bir x + iy formundaki herhangi bir kompleks sayının (x,y) sıralı ikilisi biçiminde yazılmasında hiçbir sakınca olmadığını belirtmiştir.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ilk çalışmalarında kompleks sayıların grafikle gösterilme yaklaşımını kullansa da daha sonraları bu çalışmaların formal bir temele oturtulması gerektiğine karar verdi. Dolayısıyla 1831'de, geometrik yorumlamaların tamamen ihmal edildiği kompleks sayıların gerçek bir metafiziğini ortaya koydu (Burton 1988, Kleiner 1998, Walton 1992). Ne yazık ki; Gauss'un bu formal sembolik yaklaşımı bugünkü kompleks analiz kitaplarında yoğun bir şekilde yer almaktadır.

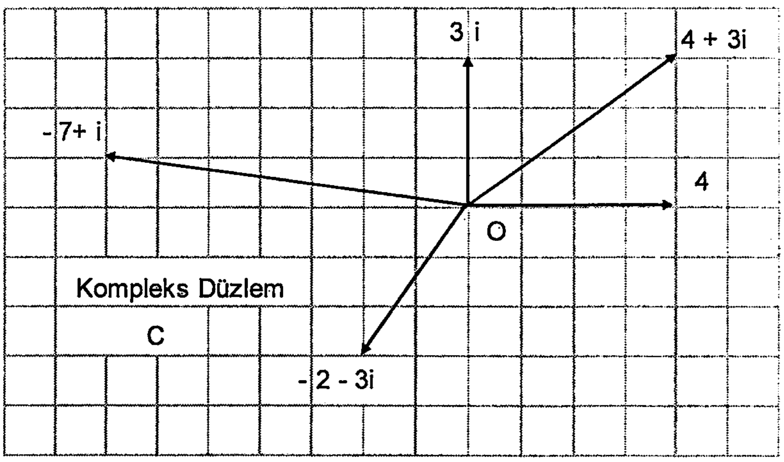
1.6.2 Kompleks Sayıların Geometrik Yorumu

Kompleks sayıların geometrisi, temel olarak trigonometriye dayanır. z=x+iy kompleks sayısı, düzlemde (x, y) noktasına karşılık gelir. Tersine olarak, düzlemdeki her ikiliye bir kompleks sayı karşılık gelir. (x,0) sayısı x-ekseni, (0,y) sayısı da y-ekseni üzerinde alınırsa; x-ekseni reel eksen, y-ekseni sanal (imajiner) eksen olarak adlandırılabilir. Kompleks sayıların bu özelliğinden dolayı her z kompleks sayısı;

$$z = x+iy = (x,y)$$

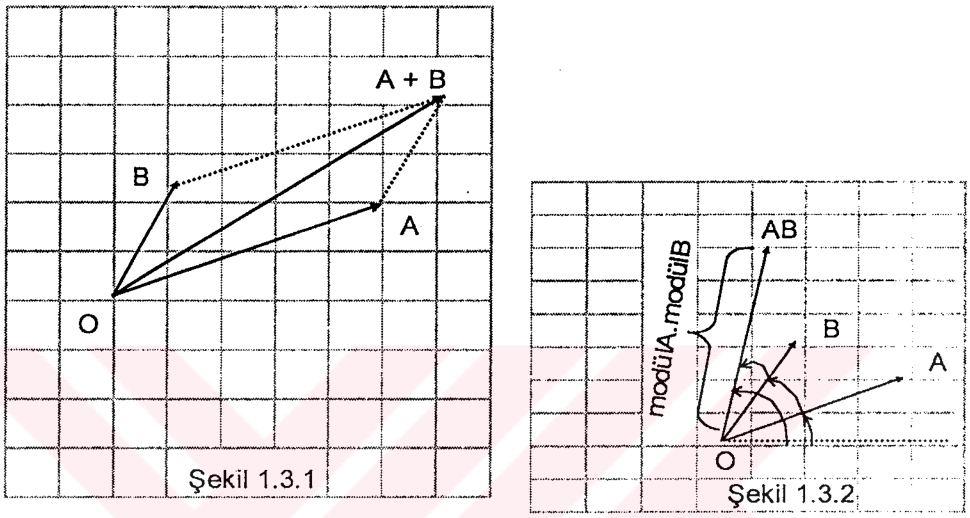
şeklinde ifade edilebilir. Her kompleks sayı düzlemde bir ikiliyle temsil edildiğine göre, z=x+iy kompleks sayısını gösteren (x,y) ikilisi (0,0) orijin noktasıyla birleştirildiğinde bir vektör elde edilir. x+iy kompleks sayısı, Euclid düzleminde dik koordinatları x ve y olan bir nokta olarak gösterilebileceğinden z kompleks sayısına vektör de denir Çünkü iki noktanın toplamı "Paralelkenar" kuralına göre elde edilir (Uluçay 1978). Dolayısıyla bir kompleks sayıyı vektör gibi düşünmekle bu sayının modülü ve argümanından bahsedilebilir. Kompleks sayıların x-ekseninin pozitif yönüyle yaptıkları açıları da hesaba katılarak bu sayıların çarpımı ve bölümü ile ilgili geometrik yorumlamalar da yapılabilir. Bu nicelikler, özellikle kompleks sayıların gizeminin ortaya konduğu bu sayılar üzerinde tanımlanan işlemler konusunda çok önemli bir işleve sahiptirler.

Geometrik olarak iki kompleks sayının toplama ve çarpma işlemi, bu sayıların düzlemdeki karşılıkları olan iki nokta (vektör) üzerindeki geometrik işlemlerin anlamları yardımıyla tanımlanabilir. Dolayısıyla toplama işlemi; "A+B kompleks sayıların toplamı, bir paralel kenarda bilinen vektör toplamı olarak elde edilir" şeklinde gözönüne alınabilir. Aslında; 4+3i sayısı, 4 ve 3i sayılarının toplamından başka bir şey değildir. İki kompleks sayının çarpımı için biraz daha karmaşık olan kural:"AB kompleks sayısı, uzunluğu A ve B kompleks sayılarının uzunlukları çarpımı ve argümanı A ve B kompleks sayılarının argümanları toplamı" şeklinde görselleştirilebilir. Bu kural, şekil 1.2'de çok açık görünmeyebilir. Ancak; 3i kompleks sayısını 3 ve i kompleks sayıların çarpımı olarak düşünmekle şekil 1.3.2'de bu işlem için uygundur. Daha ilginç bir örnek i sayısının kendisiyle çarpımıdır. i sanal biriminin uzunluğu 1 ve argümanı $\frac{\pi}{2}$ olduğundan i^2 birim uzunluklu ve argümanı π olan yeni bir kompleks sayıdır. Dolayısıyla $i^2 = -1$ dir.



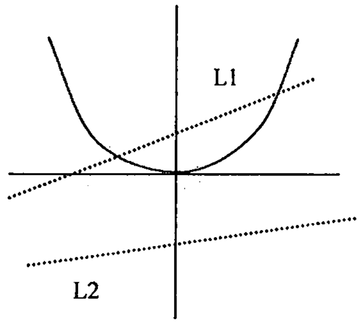
Şekil 1.2

Wessel ve Argand tarafından yapılan geometrik yorumlama çalışmaları herkes tarafından duyulmuş fakat fazla itibar görmemiştir. Ancak; Gauss'un ünü kompleks sayıların düzlemdeki noktalar olarak kabul görmesini ve yaygın olarak kullanılmasını sağlamıştır. Kompleks sayıların gücü ve estetiği, toplama ve çarpma kuralından ortaya çıkmıştır. Ve; bu kurallar ilk olarak Bombeli tarafından cebirsel formda kullanılmıştır.

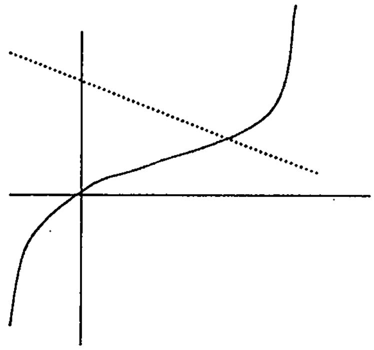


Şekil 1.3

Birçok kompleks analiz kitabında kompleks sayıların tanımlanması için ikinci dereceden denklemlerin çözümü üzerine kurulu uygun tarihsel bir yaklaşım aranır. Milattan 2000 yıl önce; x^2=mx+c şeklindeki bir denklemin, x = $\frac{1}{2}[m + -\sqrt{m^2 + 4c}\ ]$ şeklinde bir formül kullanımı ile çözülebileceği biliniyordu. Fakat m^2 + 4c negatif olursa? Bu problem Cardano'yu negatif sayıların karekökleri olduğunu düşünmeye sevketmiştir. x^2 = mx+c denklemi y = x^2 parabolü ve y = mx+n doğru ailesinin arakesit noktalarını bulma problemini temsil eden bir örnek olarak düşünülebilir (şekil 1.4).



Şekil 1.4.1

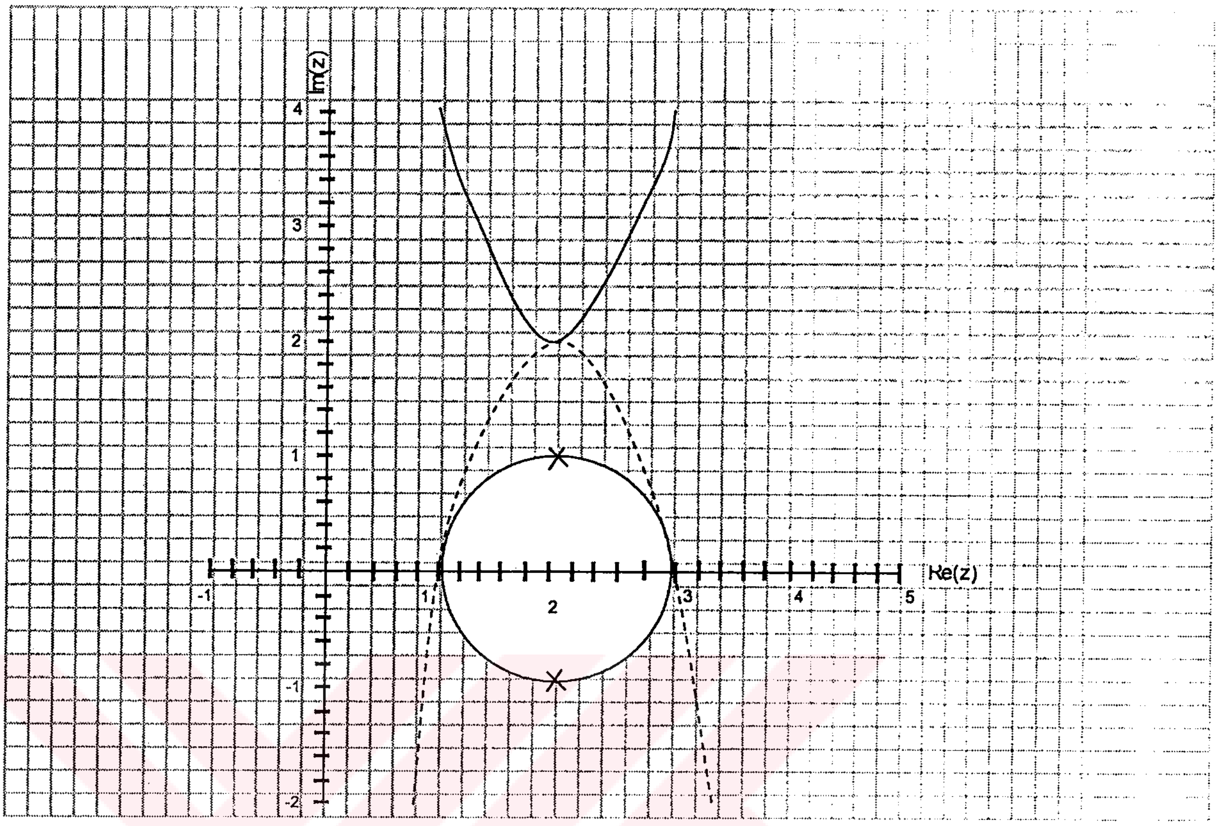


Şekil 1.4.2

Şekil 1.4

L_1 durumunda problemin çözümü vardır. Cebirsel olarak $m^2 + 4c > 0$ olup yukarıdaki formülden iki nokta bulunabilir. L_2 durumunda açık olarak çözüm yoktur. Cebirsel olarak $m^2 + 4c < 0$ olup çözümün olmayışı ikinci dereceden bir denklemin köklerini veren formüldeki imkansız(sanal) sayılar olgusuyla izah edilebilir.

İkinci dereceden bir denklemin sanal kökleri için grafiksel bir yorum yapılabilir mi? Bunun için $2x^2-8x+10=0$ denklemi ve grafiği gözönüne alınsın. $2x^2-8x+10=0$ denkleminin grafiği şekil 1.5'te gösterilmiştir. Grafik, x-ekseni üzerinde yer alır ve hiçbir reel köke sahip değildir. Bu grafiğin tepe noktası dikkate alınarak elde edilen simetrik eğri kesik çizgilerle gösterilmiştir. Elde edilen yeni grafiğin x eksenini kestiği noktalar araştırılırsa bu noktalar 1 ve 3 olarak bulunur. Bu kesim noktaları çemberin karşılıklı noktaları olma özelliğine sahiptir. İki nokta çember üzerinde 90 derece döndürülürse elde edilen noktalar "x" işareti ile gösterilen noktalardır. Bu noktalar, kompleks düzlemdeki noktalar olarak yorumlanırsa başlangıçtaki denklemin kökleridirler (2+i ve 2-i).



Şekil 1.5

Kompleks sayıların toplam ve çarpımı ile ilgili cebirsel kurallar (1) ve (2) denklemi ile verilir.

$$A+B= (a_1+ia_2)+(b_1+ib_2)= (a_1+b_1)+ i\,(a_2+b_2) \qquad (1)$$
$$A.B = (a_1+ia_2).(b_1+ib_2)= (a_1b_1-a_2b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1) \qquad (2)$$

Cebirsel olarak iki kompleks sayının toplam ve çarpım kuralları ile geometrik kuralları birbirlerinin yerlerine kullanılabilir. Bu kısımda, bu kuralların birbirlerine denk olduklarını gösterilecektir. Toplama kuralının denkliği vektörler üzerindeki işlemlerle çok açık olarak görülebilir. Dolayısıyla yalnızca çarpım kuralının denkliği araştırılacaktır. İlk olarak cebirsel bir kuralın, geometrik bir kuraldan nasıl türetilebileceği gösterilecektir. Bunun yapılabilmesi için kutupsal koordinatlarda çarpmanın geometrik kuralı kullanışlı ve önemli olacak şekilde yeniden düzenlenmiştir. **C** deki noktalar z ile gösterilsin ve $A=[R,\phi]$ kompleks sayısı ile çarpılma durumu gözönüne alınsın. Kutupsal koordinatlarda çarpma kuralına göre z'nin uzunluğu R kadar büyür, açısı da ϕ kadar değişir. Bu durum düzlemdeki tüm noktalar için düşünülürse görselleştirme için uygun bir bakış açısı elde edilebilir.

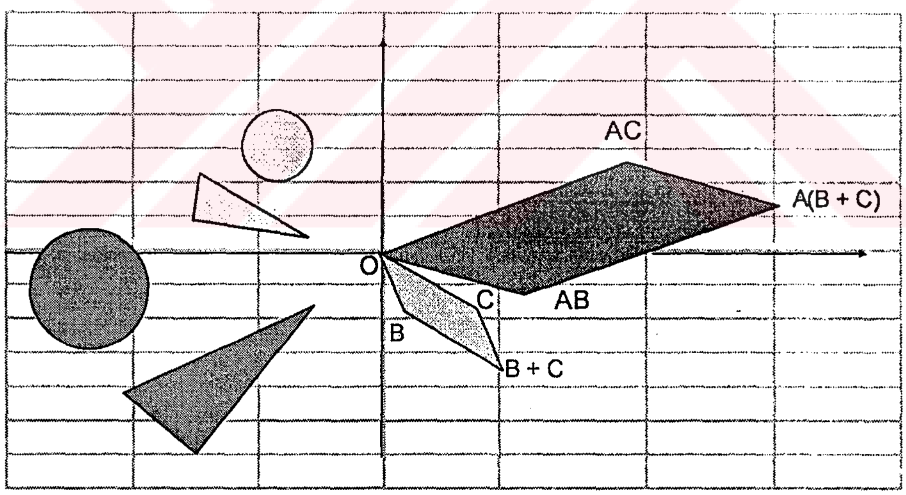
Geometrik olarak A=[R,ϕ] kompleks sayısı ile çarpma, düzlemin ϕ açısı kadar dönmesi ve R çarpanı kadar genişlemesidir. Bu harekete ait birkaç özellik şöyle sıralanabilir:

i) Hem dönme hem de öteleme orijin merkezlidir.

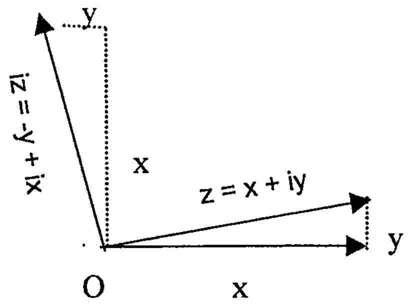
ii) Hangi hareketin önce olduğunun bir önemi yoktur. Yani; hareketlerin öncelik sırasının sonuca etkisi yoktur.

iii) Eğer R< 1 ise öteleme açıkça büzülmedir.

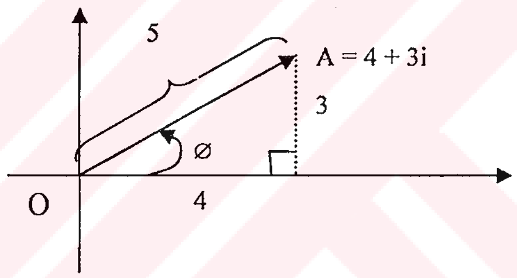
Şekil 1.6'da böyle bir dönüşümün etkilerini gözlemlemek mümkündür.



Şekil 1.6



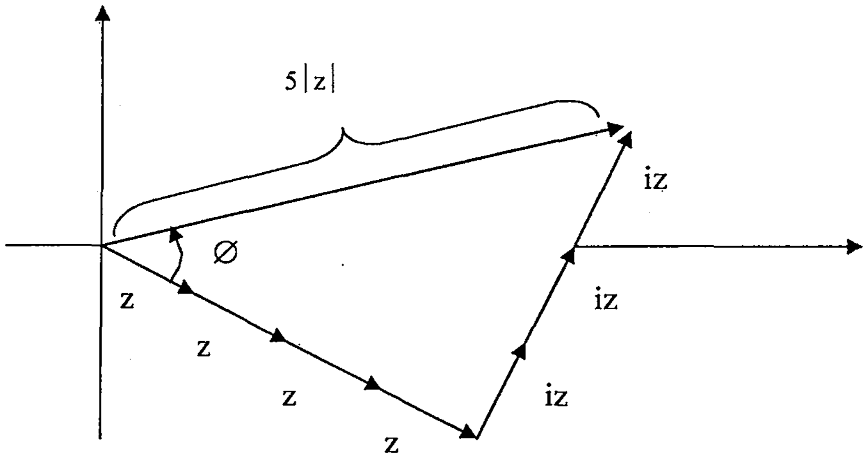
Şekil 1.7.1



Şekil 1.7.2

Şimdi geometrik kuraldan cebirsel kuralı türetmek daha kolaydır. A, B , C kompleks sayıları için A(B+C)=AB+AC dir. Burada; i^2= -1 olduğu ayrıca dönme ve genişlemenin paralel kenarları koruduğu görülebilir. Toplamanın geometrik tanımından B+C; O, B ve C köşeli paralel kenarın dördüncü köşesidir. A(B+C)= AB+AC olduğunu göstermek için bu çarpımın A kadar döndüğünü ve bu paralel kenarın O, AB, AC ve A(B+C) köşeli paralel kenara dönüştüğünü görmek gerekir.

Tersine olarak geometrik bir kuralın cebirsel bir kuraldan nasıl türetilebileceğinin gösterilmesi amacıyla z→ iz dönüşümü göz önüne alınsın. Cebirsel kurala göre; (x+iy)→ (-y+ix) olup şekil 1.7.1'den iz, z'nin $\frac{\pi}{2}$ kadar dönmesi ile elde edilebilir.



Şekil 1.7.3

Şimdi bu durum; z→ Az dönüşümünü yorumlamak için kullanılacaktır. $\phi = \tan^{-1}(\frac{3}{4})$ olmak üzere ; A= 4+3i = [5, ϕ] örneğini kullanarak bunun nasıl yapılabileceği daha etkin bir şekilde gösterilebilir. Cebirsel kural dağılma özelliğinin varlığına olanak sağladığından dönüşüm;

$$z \to Az = (4+3i)z$$
$$= 4z+3iz$$
$$= 4z+3\,(\text{ z nin } \frac{\pi}{2} \text{ kadar dönmesi})$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu Şekil 1.7.3' de görselleştirilmiştir. Şekil 1.7.3' deki üçgen Şekil 1.7.2' deki üçgenle benzerdir. Dolayısıyla [5, ϕ] ile çarpmak aslında düzlemi ϕ açısı kadar döndürmek ve 5 birim kadar genişletmektir.

1.7 Kompleks Fonksiyonların Geometrisi

Bir f kompleks fonksiyonu, z kompleks sayısını w = f(z) kompleks sayısına eşleyen bir kuraldır. Dolayısıyla w = f(z) fonksiyonu tanımlı olduğu S⊂ **C** cümlesini **C**-düzleminin bir B cümlesine resmeder (Başkan 1996). Bu tür fonksiyonlar üzerinde araştırma yapmak için onları görselleştirmek temel bir yaklaşımdır. Kompleks bir fonksiyonu görselleştirmek için çeşitli metodlar olmasına rağmen temel yaklaşım, kompleks fonksiyonu, düzlemin bir dönüşümü olarak ele almak üzerine kuruludur. Yani; z noktalarının ve bu z noktalarının w görüntülerinin kompleks düzlemdeki noktalar olarak ele alınmasıdır. Şekil 1.6'da böyle bir dönüşümün özelliklerini görmek mümkündür.

Genellikle z'nin reel ve sanal kısımları x ve y, w görüntü noktalarının reel ve sanal kısımları da u ve v ile gösterilir. Dolayısıyla u(z) ve v(z), z'nin reel değerli fonksiyonları olmak üzere kompleks değişkenli bir fonksiyon;

$$w = f(z) = u(z) + iv(z)$$

şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyonların tam ifadeleri z nin kartezyen yada kutupsal koordinatlardaki ifadelerine bağlıdır. Kompleks değişkenle ilgili teorinin önemli sonuçlarından birisi; üstel, logaritmik ve trigonometrik fonksiyonların incelenmesini kuvvet serilerinin incelemesine indirgemesidir (Ocak 2001).

Herhangi bir f fonksiyonunun noktalar ve eğriler üzerindeki etkilerini gösteren şekiller çizerek kompleks bir fonksiyonun görselleştirilmesi için uygun bir bakış açısı kazandırılabilir. Bununla beraber, eğer z'nin bütün değerleri için f kompleks fonksiyonunun özellikleri incelenebilirse görselleştirme daha anlamlı olur. Böyle bir metot; f(z), z noktalarından yayılan bir vektör olmak üzere, f(z)'nin bir vektör alanı olarak temsil edilmesi üzerine kuruludur (Needham 1997).

Diğer bir yaklaşım ise grafik temeli üzerine kuruludur. x reel değişkeninin f(x) reel fonksiyonu için f'nin tüm özelliklerinin grafiği yardımıyla görselleştirilebileceği bilinen bir durumdur. Yani; 2-boyutlu xy-düzlemindeki eğri (x, f(x)) noktalarından ibarettir. Bu yaklaşımla kompleks bir fonksiyon (z, f(z)) kompleks sayı çifti ile resmedileceğinden böyle bir fonksiyonun görselleştirilmesinin uygulanabilirliği yoktur. Çünkü; z = x+iy ve f(z)= u+iv olmak üzere dört boyutta çalışılması gerekmektedir .

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımı etkinliğinin belirlenmesine yönelik olarak yapılmış olan bazı çalışmalar ve bu çalışmalardan elde edilen sonuçlar aşağıda kısaca özetlenmektedir:

Jenchs ve Peck (1972), öğrenciler anlama ile ilgili problemlere giriştiklerinde görsel modellerin kolaylaştırıcı ve çözüm için fırsat yaratıcı bir rol oynadığını belirtmektedirler. Araştırmacılar görselleştirme yaklaşımının, öğrencilere özellikle kavramların öğretildiği başlangıç dönemlerinde yardımcı olduğunu ifade etmektedirler. Ayrıca; uzun süreli hatırlamayı sağlamada etkin bir role sahip olan bu yaklaşımın problem çözme becerilerinin arttırılmasında da önemli bir işlevi olduğunu tespit etmişlerdir. Jencks ve Peck (1972), somut modellerle çalıştıktan sonra öğrencilerin problemlerle problemin çözümünün mantığı arasında bağ kurduklarını, kendilerine özgü formal kurallar geliştirdiklerini ve öğretmenin işlevinin yalnızca problem için iyi bir model bulmak olduğunu belirtmişlerdir.

Kerslake (1997), matematik öğretiminde görselleştirme yaklaşımının cinsiyetlere göre etkililiğinin araştırıldığı çalışmada, erkek öğrencilerin grafiklerin yorumunda kızlardan daha başarılı olduğunu belirtmektedir.

Vinner ve Herkowitz (1980), matematikteki konuların yalnızca analitik bir tanım ya da sınırlı görsel örneklerle işlendiğinde öğrencilerin öğrenme eksiklikleri yaşadıklarını tespit etmişlerdir. 550 öğrenciyi kapsayan bu araştırmaları sonucunda görsel temsillerin çokça kullanımının doğru kavram görüntüsü oluşturmak için gerekli olduğuna dikkat çekmişlerdir. Mesela; dik üçgenler gibi geometrik şekillerin yatay ve dikey çizimlerden farklı formlarda da çizilmesi gerektiğini belirtmişlerdir.

Sherman (1980), görselleştirme yaklaşımının cinsiyetler üzerine etkisini araştırdığı çalışmasında, görselleştirmenin kullanımının cinsiyete göre değişiklik göstermediğini bildirmektedir.

Lean ve Clement (1981), 116 mühendislik fakültesi birinci sınıf öğrencisi üzerinde yaptıkları çalışmada klâsik sınıf problemleri için analitik beceriye sahip öğrencilerin görsel beceriye sahip öğrencilerden daha iyi sonuçlara ulaştıklarını tespit etmişlerdir ve çalışmanın bulgularından yola çıkarak çoğu ders kitaplarında ve dolayısıyla bir çok yüksek okul sınıflarında sunulan problemlerin çeşitlerinin çok az bir yaratıcılık gerektirmekte olduğunu, görsel olarak düşünen öğrencilerin cesaretlendirilmemekte ve ödüllendirilmemekte olduğunu belirtmişlerdir.

Tall ve Vinner (1981), yaptıkları teorik çalışmada kavram görüntüsünün bireyin zihninde verilen bir kavramla bağdaştırdığı tüm bilişsel yapılardan ibaret olduğunu belirtmişlerdir. Ayrıca bunun genel olarak kolayca anlaşılamayabileceğini ve formal kavram tanımından oldukça farklı yönleri olabileceğini ifade etmişlerdir. Bu bağlamda, ortaöğretim ve yükseköğretimde öğretilen limit ve süreklilik konusunu ele almışlardır. Ve formal teoriden farklı olan ve bilişsel uyuşmazlıklara neden olan faktörleri kapsayan bireysel kavram görüntülerinin kullanışlılığını göstermişlerdir.

Eisenberg ve Dreyfus (1986), görselleştirme yaklaşımını araştırmak amacıyla on sekiz katılımcı üzerinde yapmış oldukları bir çalışmada, matematikte ileri düzeyde araştırmaya yönelmiş matematikçilerin matematik öğrencileriyle karşılaştırıldığında matematik üzerinde araştırma yapanların rutin olmayan problemlerin çözümlerinde görselleştirmeyi öğrencilerden daha önemli bir yaklaşım olarak kullandıklarını tespit etmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin okullarında problem çözümü için onların analitik yaklaşımları için ödüllendirildiklerini dile getirmişlerdir. Öğrenciler kelime kalıplarına ait bir matematiksel yaklaşım beklentisine alıştırılmaktadırlar. Burada matematiğin görselleştirilemeyeceği gibi bir inanç olduğu görünmektedir. Bununla beraber bu tümdengelim yoluyla yaklaşım matematikçilerin yaptıkları çalışma tipi gözönüne alındığında geçerli olamamaktadır.

Presmeg (1986), matematikte yetenekli yüksek okul öğrencileri arasında seçtiği öğrenciler üzerinde yaptığı bir çalışmada bu öğrencilerin tamamına yakınının görselleştirme yeteneğinden yoksun olduklarını tespit etmiştir. Bununla beraber, bu beklenmedik bulgu, klâsik yüksek okul matematik müfredatlarında öne çıkarılan matematiksel performans tipinin bir yansıması olabilir. Bu çalışmadaki matematik öğretmenlerinin çoğu görselleştirmeyi kullanmamışlar ve böylece klâsik öğretim özellikle yüksek okul düzeyinde görselleştirme düzeyine ulaşamamıştır. Bu sebeple görselleştirmeye çok fazla güvenilmemesinin gereğini de belirtmiştir.

Tall ve West (1986) görselleştirme yaklaşımı ile ilgili olarak, matematiğin çeşitli alanları için interaktif (etkileşimli) yüksek çözüm grafik yaklaşımının gelişimini irdelemişlerdir. Tall, İngiltere'deki Analiz dersleri üzerine odaklanırken West, Amerika'daki okullarda okutulan diferansiyel denklemler dersi üzerinde çalışmıştır. Etkileşimli (interactive) görsel software yaklaşımının varlığı kullanıcının kavramları sezgisel anlamalarını sağlanacağı matematik dersi için buluşsal bir yaklaşım geliştirme imkanı sağlamıştır. Dolayısıyla kavramlar için anlamlı matematiksel teorilerin kurulabileceği bilişsel bir temel oluşturma olanağı doğmuştur. Tall ve West, bu çalışmalarında bilgisayar programlarının analiz ve diferansiyel denklemleri derslerinin öğretiminde yeni yaklaşımlar oluşturmadaki önemini ortaya koymuşlardır.

1987 yılında Pressley *et al.*, görselleştirme yaklaşımı ile ilgili yaptıkları çalışmada, herhangi bir matematiksel etkinlikte görsel stratejiyle başarıya ulaşmanın kısa vadeli belleğin kapasitesine bağlı olduğunu ifade etmektedirler. Araştırmacılar, 134 öğrenci üzerinde yaptıkları bu araştırmanın bulgularından yola çıkarak öğrencilerin problem çözmede görsel strateji kullanmayı daha çok istediklerini ve bu şekilde daha başarılı olduklarını belirtmektedirler. Bu çalışmalarında araştırmacılar daha kısa süreli bellek terimini, görüntünün korunması için gerekli olan daha az bir yeri ve herhangi bir duruma bunu uygulamayı ifade etmekte kullanmışlardır.

Willis ve Fuson (1988), 43 öğrenci üzerinde yapılan çalışmada toplama ve çıkarma kelime problemlerine model olması için şematik çizimlerin kullanımının kavramların kavranmasında ve çözüm stratejilerinin seçiminde öğrencilere yardım olduğu belirtilmektedir.

Thompson ve Dreyfus (1988) tarafından tüm işlemlerin görselleştirilmesini kapsayan 2 ortaöğretim öğrencisi üzerinde yapılan nitel bir araştırmada; öğrencilerin, keşfetmek, denemek ve matematiksel bağıntıları ortaya çıkarmaya çabalamakta istekli olduklarını tespit etmişlerdir.

Tall ve Thomas (1989), görselleştirme yaklaşımının analiz dersi üzerindeki etkilerini inceledikleri araştırmalarında; özellikle türev kavramının görsel temsilinin ortalama bir başarıyı doğurduğunu bildirmişlerdir.

Thomas (1992), NCSA (National Center for Supercomputing Applications)'deki görselleştirme araçlarında biri olan NCSA Scientific Visualization Software Suite'yi denemiştir. "Okul matematiği kalem-kağıt hesabı ve cebirsel beceriler üzerine kuruludur. Öğrenciler yüksek oranda görsellik içeren matematiksel sunumları da çizebilmektedir" görüşünde olan Thomas, bilgisayar görselleştirme teknikleri ders kitaplarının doğrudan doğruya bu alanda yayın yapan yayıncılardan temin edilmesi gerektiğini belirtmiştir.

Harel (1989), lineer cebir öğretimi üzerinde yaptığı çalışmada bu dersteki temel notasyonlarda sıkıntılar yaşayan öğrencilerin öğrenme zorlukları üzerinde odaklanmıştır. Lineer Cebirdeki konularda yaşanan bu sıkıntıların giderilmesinde üç aşamalı bir kurgu öneren araştırmacının önerilerinden biri kavramların görselleştirilmesi gereğidir. Harel, bu yaklaşımın lineer cebir öğretimindeki engelleri aşmada başarılı olduğunu tespit etmiştir. Ayrıca bu yaklaşımın kavramların soyutlanabilmesindeki ve öğrencilerin konuyu kendi başlarına kurgulayabilmelerindeki önemi belirtilmiştir.

Vinner (1989), matematikte görselleştirme yöntemlerine karşı matematiksel önyargının var olduğunu ortaya koymaktadır. Analiz dersini alan 141 öğrenci üzerinde yapılan bu çalışmada, kavram ve ispatlar mümkün olduğu sıklıkla görsel olarak sunulmuştur. Tutum analizi öğrencilerin görsel yaklaşımı sevdiklerini ve kavramları daha iyi anladıklarını göstermiştir. Bununla beraber çözümlerin kendi seçimlerine bırakıldığı final sınavında tek bir öğrencinin bile analitik yaklaşımla tam başarıya ulaşamamasına rağmen öğrencilerin analitik yaklaşımı kullanmaya teşebbüs ettikleri görülmüştür. Vinner'in bu çalışması öğrencilerin formal değerlendirme durumlarında görselleştirme tekniklerinden kaçındıklarını göstermektedir. Ve; görselleştirme yaklaşımına cesaretlendirildiklerinde bile öğrenciler görsel olarak açıklamayı yeterli bulmamaktadırlar. Vinner, matematikçiler üzerindeki önceki deneyimlerinden, bu algının derin bir şekilde yerleştiğine dikkat çekmektedir.

Selden *et al.* (1989), görselleştirme yaklaşımı üzerine yapmış oldukları çalışmada, görsel yorum içeren alışılmışın dışındaki analiz problemleri çözmeye çalışan öğrenciler arasında benzer zorluklar olduğunu belirtmişlerdir. Bu çalışmalarında araştırmacılar öğrencilerden özellikle şekil çizmeleri ve soruları cevaplandırmalarını istemişlerdir. Ve öğrencilerin doğru grafiği çizmelerine rağmen, sorunun cevabı için bu grafiği kullanamadıklarını tespit etmişlerdir. Araştırmacılar ayrıca; öğrencilerin eğer görsel anlamaya ulaşmadan yalnızca mekânik teknikleri öğrenirlerse problem çözme kabiliyetlerinde çeşitli zorluklar yaşayacaklarını ifade etmektedirler.

Kaput (1989), öğrencilerin anlamalarını sağlamada cebirsel kavramların çoklu temsillerinin olup olmadığı sorusunun eğitim araştırmaları için önemini araştırmıştır. Kaput matematiksel anlamanın dört aşamadan ibaret olduğunu ileri sürmektedir. Bunları;

i) Matematiksel temsiller arasındaki dönüşümler,

ii) Matematiksel temsiller ve matematiksel olmayan sistemler arasındaki dönüşümler,

iii) Özel bir temsil sisteminin notasyonları üzerinde tanımlanan işlemlerle dönüşümler yardımıyla model ve sözel öğrenimi,

iv) Yeni etkinlikler için temel teşkil edebilecek etkinlikler, yöntemler ve kavramlar yardımıyla zihinsel bir nicelik oluşturma şeklinde ifade etmiştir. Araştırmacı, okul matematiğinde özellikle üçüncü aşamanın anlamayı inşa etmede baskın olduğunu ileri sürmektedir.

Clements ve Compo (1989), görselleştirme yaklaşımının etkinliği üzerine 21 ilköğretim okulu öğrencisi üzerinde yaptıkları çalışmalarında görsel kesir aktivitelerinin, kavramların etkili bir şekilde zihinde tutulmasına imkan sağladığını belirtmişlerdir.

Eisenberg ve Dreyfus (1991), görsel düşünmenin algoritmik düşünmeden daha ileri düzeyde bilişsel performans gerektirdiğini düşünmektedirler. Bu araştırmacılar, öğrencilerin görsel düşünmeden çok algoritmik düşünmeyi tercih ettiklerini iddia etmişlerdir. Bazı araştırmacılar da onların bu görüşlerini desteklemektedirler. Bu çalışmalarında araştırmacılar, Analiz-I dersi sonunda sorulan sorulara öğrencilerin doğru cevap veremediği 10 adet Analiz-I sorusunun cevaplarını irdelemişlerdir. Bu soruların her biri görsel yaklaşımla oldukça kolayca cevaplandırılabilecek bir kavramı ihtiva etmektedir. Buna rağmen, öğrencilerin cebirsel (klâsik) yaklaşımla çözme yoluna giriştiklerinden problemlerin çözümlerinde büyük sıkıntılar yaşadıklarını tespit etmişlerdir.

Ayrıca araştırmacılar, matematik öğretiminde görselleştirme yaklaşımının cinsiyetlere göre etkililiğinin araştırıldığı çalışmada, görselleştirmede kadınların erkeklerden daha isteksiz olduklarını ifade etmektedirler.

Kaljumagi (1992), matematiksel kavramları sunmada görselleştirme yaklaşımlarından biri olan animasyonların kullanımının etkilerini araştırmıştır. Kaljumagi, değişen grafiklerin gösterimi için Mathematica ve AniST paket software programlarını kullanmıştır. Çalışmanın sonucunda ileride bu alanda araştırma yapacaklara; "Bu tip animasyonların öğrenmeyi teşvik etmedeki etkileri ve zaman kaybı olup olmadığı ile ilgili sorular olmaktadır. Bu sorulara cevap olarak, yalnızca bir tahmin söyleyebilirim ki; bu konunun dikkat ve önem gösterilmeyi hak ettiği açıktır" şeklinde bir uyarıda bulunmaktadır.

Lipp (1994), görselleştirmenin ezberlemeden anlam kurabilmede ve matematiksel yapılarla ilgili daha anlamlı öğrenmeler oluşturabilmede önemi ile ilgili araştırmasında görselleştirmenin problem çözümünde çok önemli bir araç olduğunu belirtmektedir. Geometri ve Cebir derslerindeki görselleştirme etkinliklerinin üzerinde durulduğu bu araştırmada, zihinsel şemalar da bu bağlamda incelenmiştir. Geometride görselleştirme ile ilgili altı aşamadan ibaret bir geometri laboratuar ödev etkinliğinin yer aldığı bu çalışmada, öğrencilerin görselleştirmeyi bir dönüşüm ve etkileşim aracı olarak kullanabilecekleri belirtilmekte ve görselleştirmenin anlamlı matematiksel öğrenmelerin kurgulanmasındaki rolü üzerinde durulmaktadır.

Newburgh (1996), fizik bölümünü yeni kazanmış öğrencilerin genel olarak kendi fiziksel dünyalarını anlamlandırmada matematiğin rolünü anlamakta zorluklar yaşadıklarını belirtmiştir. Araştırmacı bunu, öğrencilerde tecrübe kaynaklı fiziksel sezginin tam olarak geliştirilememesine bağlamaktadır. Fiziksel sezginin özel bir problemin çözümünde kullanılan matematiğin geçerliliğini değerlendirmeyi içerdiğini belirten Newburgh (1996), bu bağlamda; fizikte bilinen bir hız problemi ile kompleks sayılar arasında ilişki kurarak, bu sayıların varlığı ile ilgili farklı bir bakış açısı geliştirmiştir.

Oxley and Raj (1996), Papua Yeni Gine Teknoloji Üniversitesinde kompleks sayılar konusunu öğretmek için Matchcad'ı kullanmışlardır. Onların yaklaşımı dik ya da kutupsal formda ifade edilen kompleks sayılarla ilgili bütün hesaplamaları elde edebilecek bir bilgisayar cebir sistemi üzerine kurulu idi. 153 öğrenci üzerinde yapılan bu çalışma da kompleks sayıların görselleştirilmesi ve bu sayılarla işlemlerin yapılmasında bilgisayarların kullanımı için pozitif sonuçlar sağlanmıştır. Araştırmacılar geleneksel materyallerle bilgisayar grafiklerinin uygun bir dengede sunulması gerektiğine de dikkat çekmişlerdir.

Couco (1997), kompleks sayıları daha etkili bir şekilde öğretimi için bir çalışma geliştirdi. Kompleks sayıların öğretiminde farklı bir yaklaşım arayan Couco, bu araştırmasında; öğrencilerin, bu sayılarla ilgili öğrendikleri bilgileri daha önceki öğrenmeleriyle bağlantı kurabilecekleri ve daha geniş bir matematiksel birikim edinebilecekleri bir yaklaşım geliştirmeye çalışmıştır. Onun geliştirdiği yaklaşım geometriden çok cebirsel bir yapıdaydı. Öğrencileriyle beraber sadeleştirilemeyen çarpım polinomları üzerinde çalıştı ve polinom çiftleri için en büyük ortak bölenleri buldu. Dolayısıyla bölüm ve kalanı elde etmek için polinomları birbirine böldü. Couco; iki polinom farkı g ile bölünebiliyorsa, bu iki polinomun F cismi üzerinde g modülüne denk olmasından yararlanmış ve F cisminin reel olarak ve g'nin de x^2+1 olarak seçilmesiyle kompleks sayıları elde etmiştir.

Asiala *et al.* (1997) tarafından yapılan araştırma, analiz dersini alan öğrencilerin fonksiyon ve fonksiyonun türevini grafiksel anlamaları ile ilgilidir. Öncelikle; bu anlama için bilişsel yapıların teorik analizinin yapıldığı çalışmada bu zihin yapısını belirlemede yardımcı olacak bir öğretim davranışı tanımlanmış ve görüşmecilerden elde edilen sonuçlar bu öğretim davranışının yorumlanması sonucu tartışılmıştır. Bu öğrencilerin anlamaları Eylem-Süreç-Konu-Şema teorik yapısına uygun olarak analiz edilmiştir. Geleneksel analiz dersini alan öğrencilerle bu öğretim davranışı kullanan öğrenciler karşılaştırmalı bir analize tabi tutulmuştur. Araştırmacılar öğrenmenin teorik analizi üzerine kurulu yaklaşımına sahip olan öğrencilerin geleneksel kurgularla ders alan öğrencilerden fonksiyon ve fonksiyonun türevinin grafiksel anlamalarını geliştirmede daha başarılı olduklarını belirtmişlerdir.

Neminovsky ve Noble (1997) tarafından yapılan araştırma, bir üniversite öğrencisinin yükseklik ya da uzaklığın grafiğini oluşturmada ve farklı eğim ve yönlendirmelerle yerini belirleyebildiği düz bir tahta için eğim ya da uzaklıkları bulmada The Contour Analyzer adlı bir bilgisayar destekli aracı nasıl kullandığı ile ilgili bir durum çalışmasıdır. The Contour Analyzer ile bir nesnenin yüzeyinden hareketle tanımlanan bir doğruya karşılık gelen yükseklik, eğim ya da uzaklığın fonksiyonlarını temsil eden grafikler bilgisayar ekranında oluşturulabilir. Araştırmacılar bireysel öğretim deneyinde Karen adlı üniversite öğrencisiyle görüşmüşlerdir. Bu çalışmada, düz bir tahta üzerindeki yola karşılıklı gelen eğim ya da uzaklık fonksiyonunu Karen'in görsel denetimle nasıl tanımlayabileceği üzerine odaklanmışlardır.

Pitcher (1998), matematik eğitimsel software programların geliştirilmesi, uygulanması ve değerlendirilmesi konusundaki çalışmasında özellikle kompleks sayılar konusunu içeren Mathwise modeli ile ilgilenmiştir. Bu bilgisayar temelli modül Paisley Üniversitesindeki öğrencilere uygulanmıştır. Dersin içeriği genel olarak diğer derslere denkti ancak modüller, kullanıcıya daha ileri çalışmalardaki materyalleri elde etmede önemli olanaklar sağlamaktaydı. Öğrencilerden ve görüşmecilerden bir anketle dönütler alındı. Modüller, kompleks sayılar ve bu sayılarla ilgili işlemleri geometrik olarak göstermekteydi. Pitcher, bu programın kompleks sayılar konusuna uygulanabileceğini ve bağımsız öğrenme için etkili bir kaynak olduğunu ifade etmektedir. Araştırma bulguları sonucunda; Mathwise modülünün yalnızca özetleyici bir rolü olmadığını aynı zamanda öğretmenlerin öğrencilerinin öğrenme tecrübelerini yorumlamalarına ve bütünleştirmelerinde belirleyici bir role sahip olduğunu belirtmiştir.

Isaacson (1999), eğim kavramının öğretiminde üç grup analiz öğrencisi üzerinde yaptığı araştırmasında statik grafik, canlı grafik ve etkileşimli canlı grafik kullanılmasının bu öğrencilerin öğrenmeleri üzerindeki etkilerini karşılaştırmıştır. 82 öğrenci geliştirilen Toolbook Multmedia Software bilgisayar sunumunu kullanmıştır. Bu amaçla; uzaysal görselleştirme testi, öğrencilere ön test olarak uygulanmıştır. Bu çalışma aynı zamanda cinsiyet ve sunum şekli arasındaki etkileşimleri belirlemeyi amaçlamıştır. Erkekler bir şekil oluşturmada bayanlardan daha başarılı ve interaktif canlı grup statik gruptan daha başarılı olmasına rağmen araştırmacı kavramın öğrenilmesinde cinsiyet ve davranış şekli arasında önemli farklılık bulmadığını belirtmektedir. Araştırmacı bu çalışmasında kendisi tarafından elde edilen daha önce yapılan görselleştirme ile ilgili araştırmaların sonuçlarını da yansıtmaktadır. Öğrencilerin mevcut görselleştirmeleri kullanmada yardıma ihtiyaç duyduklarını belirten Isaacson, öğrenciler için basit güçlü görsel imgeler oluşturmanın onlara kompleks matematiksel ifadeleri açıklamada yeterli olamayabileceğini ifade etmektedir. Yani; öğrencilerin diyagramların anlamlandırılmasında yardıma ihtiyaç duyduğuna dikkat çekmektedir.

Palais (1999), matematikte görselleştirme ile ilgili yaptığı teorik çalışmada, matematikte görselleştirmenin önemini vurgulamış, bilgisayar grafikleri ile görselleştirmeden bahsetmiş ve matematikteki soyut kavram ve konuları görselleştirmek için bilgisayar yazılım programları ve bunların önemine dikkati çekmiştir.

Booth ve Thomas (2000), matematikte sıkıntılar yaşayan bir grup öğrenciyi görsel-uzaysal yetenekleri esas alarak iki gruba ayırdılar. Standart matematik testlerle karşılaştırdıklarında iki gruptaki öğrencilerin matematiksel performansları arasında bir farkı olmadığını belirleyen araştırmacılar, bir grubun görsel-uzaysal beceride diğer gruptan daha ileri düzeyde olduğunu tespit etmişlerdir. Öğrencilerden sözel olarak, şekille ve diyagramla olmak üzere üç farklı yolda çözebilecekleri aritmetik problemlerini çözmeleri istenmiştir. Bu cevaplar öğrencilerle görüşmeler sonucunda elde edilmiştir. Araştırmacılar görsel-uzaysal yetenekleri daha üst düzeyde olan öğrencilerin bu problemlerin çözümünde daha başarılı olduklarını belirlemişler ve çalışmanın bulgularını yorumlayarak bu durumun olası nedenleri üzerinde durmuşlardır.

Stylianou (2002), matematikte problem çözümü için en çok önerilen stratejilerden biri olan diyagram çizmenin üzerinde durmuştur. Bunun için profesyonel matematikçilerden çeşitli problemleri çözmelerini istemiştir. Ayrıca bu matematikçiler problemlerin çözümü ile uğraştıklarında onların diyagramların çizimindeki strateji kullanımlarını incelemiştir. Bu çalışmanın bulguları ışığında Stylianou, ispat gelişiminde özel aşamaları oluşturmada diyagramların kullanma yollarını ve bu aktiviteleri tamamlamada diyagramların onlara nasıl yardımcı olduğunu belirtmektedir. Özellikle bu çalışmada matematikçiler problem durumu ile ilgili görsel temsilleri analiz etmeye çalıştıklarında görsel temsilleri açıkça birkaç aşamaya ayrıştırabilecek adımlarda kurdukları tespit edilmiştir. Bu aşamalar içerisinde yer alan analiz süreci, ilave sonuçları anlamlandırma, yeni matematiksel bilgiyi detaylandırma, yeni amaçları ifade etme ve problem çözme sürecini denetleme şeklinde dört adım içeren iyi kurgulanmış aşamalardan ibarettir.

Konyalıoğlu *et al.* (2003), üniversite düzeyi lineer cebir dersi vektör uzayları konusunun öğretiminde görselleştirme yaklaşımını esas alan öğretim yöntemi ile geleneksel öğretim yöntemini karşılaştırmışlardır. Atatürk üniversitesi ilköğretim matematik ana bilim dalı ikinci sınıfı farklı şubelerinde öğrenim gören toplam 60 öğrenci üzerinde grafikler ve şekiller yardımıyla görselleştirme yaklaşımını kullanarak yaptıkları deneysel çalışmalarında görselleştirme yaklaşımının geleneksel öğretim yöntemine göre daha etkili olduğunu tespit etmişlerdir.

Bazı çalışmalar öğrencilerin görsel yaklaşımdan daha çok analitik yaklaşımda daha iyi performans gösterdiklerini ortaya koymuştur. Ancak bu çalışmalar çok az yaratıcılık ya da orijinal yaklaşımlar gerektiren sıradan problemleri ihtiva eden klâsik okul tipi çalışmalarla ilgili performansları karşılaştırmışlardır.

Çeşitli araştırmalar ise doğrudan doğruya özel bir kavramın görsel bir modelini kapsayan öğretim etkinlikleriyle ilgilenmişlerdir. Bu çalışmalar, öğretim stratejisi ve öğrenci başarısı arasında olumlu bir bağlantı kurmada çok başarılı olma eğilimindedirler.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Problemler ve Hipotezler

3.1.1. Çalışmanın Amacı

Bu çalışmanın temel amacı, öğrencilerin kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri ile ilgili kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımı ile geleneksel ders anlatım yönteminin karşılaştırılmasıdır. Öğretim metodu olarak görselleştirme yaklaşımının kullanılması, standart yada kutupsal formdaki kompleks sayıların soyut bir şekilde tanımlandığı ve aritmetik işlemlerin cebirsel kurallar yardımıyla türetildiği geleneksel yaklaşımla görselleştirme yaklaşımının karşılaştırılması imkanını yaratır. Bu bağlamda; aşağıdaki alt problemler oluşturulmuştur.

3.1.2. Alt Problemler

1- Öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları anlamalarında görselleştirme yaklaşımı ile geleneksel öğretim yöntemleri arasında önemli bir farklılık var mıdır?

2- Kompleks sayıların öğretiminde görselleştirme yaklaşımının kullanımının öğrencilerin bu kavramları uzun süre hafızalarında tutmalarına yani kalıcı öğrenmeyi sağlayabilmelerine bir etkisi var mıdır?

3- Öğrencilerin matematiğe karşı tutumları açısından görselleştirme yaklaşımı ile geleneksel yöntem arasında önemli bir farklılık var mıdır?

3.1.3. Hipotezler

$H_0$1- Bilişsel işlem beceri düzeyleri birbirine yakın olan görselleştirme yaklaşımının uygulandığı deney grubu öğrencileri ile geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı kontrol grubu öğrencilerine uygulanan kompleks sayılar kavram testi başarı ortalamaları arasında istatistiksel olarak önemli bir farklılık yoktur.

$H_0$2 - Görselleştirme yaklaşımının uygulandığı deney grubu öğrencileri ile geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı kontrol grubu öğrencileri arasında kompleks sayıları uzun süre bellekte tutmaları açısından istatistiksel olarak önemli bir farklılık yoktur.

$H_0$3- Görselleştirme yaklaşımının uygulandığı deney grubu öğrencileri ile geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı kontrol grubu öğrencilerinin matematiğe karşı tutumlarında istatistiksel olarak önemli bir farklılık yoktur.

3.2. Deneysel Yöntem

Sunulan çalışmada, farklı iki öğretim yönteminin (görselleştirme yaklaşımı ve geleneksel yöntem) etkinliğinin belirlenmesi amacıyla deneysel araştırma modellerinden "eşit olmayan kontrol grubu deseni (noequational control group design)" esas alınmıştır (Karasar 1998). Çalışmada uygulanan deneysel yöntem aşağıdaki çizelgede özet olarak belirtilmiştir;

Çizelge 3.1. Deneysel Yöntem

Gruplar	Ön Testler	Uygulama	Son Testler
Deney Grubu	T_1, T_2, T_3	Görselleştirme Yaklaşımı	T_1, T_2
Kontrol Grubu	T_1, T_2, T_3	Geleneksel Öğretim Yöntemi	T_1, T_2

Burada; T_1, kompleks sayılar kavram testini,

T_2, matematik dersi tutum ölçeğini,

T_3, bilimsel işlem beceri testini

temsil etmektedir.

Öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili bilgi düzeylerini ortaya çıkarabilmek ve matematiğe karşı olan tutumları ile bilimsel işlem becerilerini belirleyebilmek için uygulamadan önce kompleks sayılar kavram testi, matematik dersi tutum ölçeği ve bilimsel işlem beceri testi ön test olarak; uygulama yapıldıktan sonra ise kompleks sayılar kavram testi ve matematik dersi tutum ölçeği son test olarak çalışma kapsamındaki öğrencilerin tamamına uygulanmıştır. Ayrıca; görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramların belleklerinde daha uzun süre tutmalarına etkisinin belirlenmesi amacıyla dokuz haftalık süreç sonunda yani dönem sonunda kompleks sayılar kavram testi her iki gruba tekrar uygulanmıştır.

3.3. Çalışmanın Örneklemi

Çalışmanın örneklemini, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programında, aynı öğretim üyesinin ders verdiği iki farklı şubedeki toplam 73 dördüncü sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Uygulama 2002-2003 öğretim yılının güz döneminde gerçekleştirilmiştir.

Şubelerden biri, görselleştirme yaklaşımının kullanılacağı deney grubu; diğeri ise, geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanılacağı kontrol grubu olarak seçilmiş ve bu seçim rasgele yapılmıştır.

3.4. Değişkenler

3.4.1. Bağımsız Değişkenler

Uygulamada kullanılan öğretim yöntemleri (görselleştirme yaklaşımı ve geleneksel yöntem) çalışmanın bağımsız değişkenlerini oluşturmaktadır. Ayrıca, uygulamanın başlangıcında yapılan bilimsel işlem beceri testi ile ölçülen öğrencilerin bilimsel işlem becerileri de bağımsız değişkenler arasındadır.

3.4.2. Bağımlı Değişkenler

Öğrencilerin kompleks sayılar konusu ile ilgili başarıları, matematik dersine karşı tutumları ve bu konu ile ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmaları çalışmanın bağımlı değişkenleridir.

3.5. Veri Toplama Araçları

3.5.1. Kompleks Sayı Kavram Testi

Kompleks sayılar kavram testi, 1, 2 ve 9. sorular iki şıktan ibaret olmak üzere, toplam 12 açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Testin değerlendirilmesinde kullanılan kategorilendirme ölçütü çizelge 3.3'te verilmiştir. Dolayısıyla herhangi bir öğrencinin bu testten alacağı en yüksek puan 24'tür. Testteki soruların bir kısmı araştırmacı tarafından geliştirilirken bir kısmı da konu ile ilgili literatürden alınmıştır (Ocak 2001, Dönmez 1985, Marsden 1973).

Testteki soruların tamamı kompleks sayı kavramları ile ilgilidir ve bu soruların her biri, konu ile ilgili tek bir kavramı ölçmeye yönelik olarak hazırlanmış olmakla birlikte aynı kavramı yoklayan farklı formlardaki soru tiplerine de yer verilmiştir. Kompleks sayıların öğretimi için geometrik ve analitik yaklaşımların zıtlığı bu konunun öğretiminde öğrenci başarısını arttırmada görselleştirme yaklaşımının etkinliğini ortaya çıkarma imkanı sağlayacaktır. Testteki sorular özellikle öğrencilerin çözüm için görsel bir yaklaşım geliştirmeyi amaçlamaları halinde çözüme daha kolay bir şekilde ulaşabilecekleri şekilde hazırlanmıştır.

Kompleks sayılar kavram testi oluşturulmadan önce kompleks sayılar konusunun öğretimi ile ilgili detaylı bir literatür taraması yapılmıştır. Bu süreçte; bu alanda uzman olanların görüşleri de alınmıştır. Çalışmaya esas teşkil eden gruplar dışında kompleks sayılar konusunu öğrenmiş bir öğrenci örneklemi pilot çalışma olarak seçilmiş ve bu öğrenci grubuyla yapılan görüşmeler sonucunda kompleks sayılar konusunda öğrencilerin sıkıntı yaşadıkları noktalar tespit edilmiştir. Ayrıca; daha önceki yıllarda kompleks analiz derslerinde kompleks sayılar konusu ile ilgili sorular ve bu sorulara öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar incelenmiştir.

Bu bilgiler ışığında oluşturulan kompleks sayılar kavram testi, kompleks sayılar konusu okutulmuş bir öğrenci grubuna (Atatürk Üniversitesi K.K.Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Matematik Öğretmenliği Programı dördüncü sınıf öğrencileri) uygulanarak “Bir Testi İki Eşdeğer Yarıya Bölme” yöntemi ile değerlendirilmiş ve testin güvenirlik katsayısı 0,73 olarak bulunmuştur.

Kompleks sayı kavram testinin geçerliliği için ders öğretim üyesinin ve bu alandaki uzmanların görüşleri alınmıştır. Uzmanlar, testin kompleks sayılar konusundaki kavramları ölçebilecek içeriğe sahip olduğunu belirtmişlerdir (EK 1).

3.5.2. Matematik Tutum Ölçeği

Eğitim tutumları değiştirme ve geliştirmede en önemli araçlardan biri olduğundan, matematik öğretmen adayların gerek derslerine gerekse sosyal hayatlarındaki diğer olgulara yönelik tutumlarının bilinmesi eğitimin niteliğini arttırmada önemli bir etken olabilir. Bu nedenle; günümüzde matematik öğretmen adaylarının belli ders konularına yönelik tutumlarını ölçmeyi amaçlayan bir çok araştırma yapılmaktadır. Tutum, kişilerin kendisi, başkaları veya başka nesneler ve sonuçlar hakkındaki genel değerlendirmeleridir. Bu genel değerlendirmeler duygusal ve bilişsel temellere dayanır ve buralardaki gelişim, değişim ve oluşumları etkiler. Oldukça organize olmuş uzun süreli duygu, inanç ve davranış eğilimi olan tutum; mesleğine karşı öğretmen adayının bakış açısını da şekillendirmektedir. Bu bakış açısı öğretmen adaylarının gerek hizmet öncesi eğitimlerindeki başarılarını gerekse öğretmenlik mesleğindeki verimliliklerini etkileyecektir (Kaplan ve İpek 2002). Bu amaçla öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarının da incelenmesi için matematik tutum ölçeğinden yararlanılmıştır. Bu ölçek, öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarını tespit etmek amacıyla Duatepe ve Çilesiz (1999) tarafından gerçekleştirilmiştir. Likert tipi bu ölçek beş dereceli (hiç katılmıyorum, katılmıyorum, kararsızım, kısmen katılıyorum, tamamen katılıyorum) olup, otuz sekiz maddeden oluşturulmuştur. Bu ölçeğe göre öğrencilerin alacağı puanlar, alınabilecek en düşük puan olan 38 ile en yüksek puan olan 190 arasında değişebilecektir. Duatepe ve Çilesiz tarafından geliştirilen bu ölçeğin güvenirlik katsayısı 0,96 olarak bulunmuştur (EK 2). Matematik tutum ölçeği, çalışma kapsamındaki öğrencilerin tamamına ön test ve son test olarak uygulanmıştır.

3.5.3. Bilimsel İşlem Beceri Testi

Okey, Wise ve Burns tarafından geliştirilen bu test, bilimsel işlem becerilerine yönelik bazı önemli yeteneklerin uygulanmasını gerektiren aşamalardan oluşmaktadır. Test, beş farklı bilimsel işlem becerisini ölçebilecek şekilde hazırlanmış olup otuz altı maddeden oluşmaktadır. Bunlar; değişkenleri tanımlama, hipotez kurma ve ifade etme, işlemsel tanımlama, araştırmalar düzenleme ile verileri grafik etme ve yorumlama şeklindedir.

Doğru cevabı 1, yanlış cevabı 0 puan yaklaşımı ile değerlendirilen bu testten herhangi bir öğrencinin alabileceği en yüksek puan 36'dır.

Test, değişkenleri tanımlama ile ilgili on iki, hipotez kurma ve ifade etme ile ilgili sekiz, işlemsel tanımlama ile ilgili altı, araştırmalar dizayn etme ile ilgili üç ve verileri grafik etme ve yorumlama ile ilgili altı madde içermektedir. Bu testin Türkçe'ye çevirisi ve uyarlanması Özkan, Aşkar ve Geban tarafından yapılmış ve güvenirliği 0,81 olarak bulunmuştur (Doğruöz 1998) (EK 3).

3.6. Uygulama

Bu çalışma, 2002-2003 öğretim yılı güz yarıyılında dört hafta süreyle Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı dördüncü sınıfında okuyan toplam 73 öğrenciye uygulanmıştır. Çalışmada iki farklı öğretim yönteminin, kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri ile ilgili kavramların öğrenilmesindeki etkinliği araştırılmıştır. Bu amaçla, kontrol ve deney grupları oluşturularak, deney grubunda görselleştirme yaklaşımı, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim yöntemi kullanılarak işlenmiştir.

Öğretim metodu olarak görselleştirmenin kullanımı, standart veya trigonometrik formdaki kompleks sayıların soyut bir şekilde tanımlandığı ve cebirsel işlemlerin çeşitli kuralların uygulanmasıyla türetildiği geleneksel yaklaşımla görselleştirme yaklaşımının karşılaştırılması olanağını yaratmaktadır. Gruplar arasında kompleks sayı kavramlarının anlaşılması, matematik dersine karşı tutum, kompleks sayı kavramının uzun süreli bellekte yer alması ve bilimsel işlem becerisi açısından istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olup olmadığını belirlemek amacıyla, uygulamanın başlangıcında, kompleks sayı kavram testi, matematiğe karşı tutum ölçeği ve bilimsel işlem beceri testi hem deney grubuna hem de kontrol grubuna ön test olarak uygulanmıştır. Ön testlerden sonra her iki gruba da uygulama çalışmalarına başlanmıştır. Her iki gruptaki uygulama dört hafta boyunca ve haftada üç ders saatini kapsayacak şekilde araştırmacı tarafından kompleks analiz ders içeriğine uygun olarak yürütülmüştür. Uygulama sona erdikten sonra , hem kontrol hem de deney grubuna, kompleks sayı kavram testi ve matematiğe karşı tutum ölçeği son test olarak uygulanmıştır. Ayrıca öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları belleklerinde daha uzun süre tutmalarına görselleştirme yaklaşımının etkisini belirleyebilmek amacıyla kompleks sayı kavram testi dönemin sonunda her iki gruba tekrar uygulanmıştır.

Deney grubundaki öğrencilere dört haftalık süre boyunca, kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri konusu, görselleştirme yaklaşımı esas alınarak işlenmiştir. Böylece; bu yaklaşımın öğrencilerin konu ile ilgili kavramları anlamaları üzerine olan etkisi tespit edilmeye çalışılmıştır. Başka bir ifadeyle; öğrencilerin bu konuda sahip oldukları anlama güçlüklerinin giderilebilmesi ve konunun kalıcı bir şekilde öğrenilebilmesinde bu yaklaşımın etkinliği araştırılmıştır. Görselleştirme yaklaşımının öğretim sürecinde etkin olabilmesi için öğrenci yeni öğrendiği bilgiyi kolay ve anlaşılır bulmalıdır. Bundan dolayı; öğrencilerin kompleks sayılar konusu ile ilgili kavramları görsel olarak daha iyi kavrayabileceği hipotezinin uygulanabilmesi için; öğrencilerde, $\Re^2$ de nokta tespiti, vektör çizimi, $\Re^2$ de nokta-vektör ilişkisi, vektörler üzerinde tanımlanan işlemler gibi ön-koşul öğrenmelerin gerçekleşmiş olması gerekir. Bu amaçla uygulama sürecinin ilk dersinde öğrencilerin yukarıda bahsedilen ön-koşul öğrenmelere sahip olup olmadıklarının tespiti yapılmış ve bu öğrenmelerle ilgili eksikliklerin giderilmesi yönünde çalışmalar yapılmıştır.

Kavramların zihinde canlandırılabilmesini ve böylece daha kolay ve kalıcı bir şekilde anlaşılabilmesini amaçlayan görselleştirme yaklaşımı yardımıyla kompleks sayılar konusunun öğretimine başlamadan önce öğrencilerin bu süreçte sıkça yararlanacakları geometri bilgileri öncelikle ölçülmeli ve bu yönde bazı eksiklikler yaşanıyorsa bunlar giderilmeden bu konunun öğretimine başlanılmamalıdır. Öğrencilerin temel geometri bilgi ve becerilerinde eksikler olması halinde görselleştirme yaklaşımının bu konunun öğretimine çok sınırlı bir katkısının olacağı açıktır.

Öğrencilerin temel geometri bilgi ve beceri düzeyleri arzu edilen boyuta taşındığında konunun cebirsel ve aksiyomatik yapısı geometrik olarak analiz edilebilir. Böylece; öğrenciler tarafından çok zor yada karmaşık olarak görülen cebirsel aksiyomatik tanımlamalar yerine zihinde canlandırılabilmesi daha kolay olan geometrik modeller kullanmak çok daha olumlu sonuçlar doğurabilecektir.

Görselleştirme yaklaşımı ile ilgili uygulama sürecine başlanılmadan önce her iki gruptaki öğrencilerin daha önceki yıllarda almış oldukları derslerde öğrendikleri sayılar sistemi ve özellikle reel sayılar cümlesi ile ilgili bilgileri kontrol edilmiştir.Tamsayılar cümlesinin doğal sayılar cümlesinin yetersiz kaldığı noktadan, rasyonel sayılar cümlesinin tamsayılar cümlesinin yetersiz kaldığı noktadan ve son olarak da reel sayılar cümlesinin rasyonel ve irrasyonel sayılar cümlelerinden türetilmesine paralellik kurularak reel sayılar sisteminin genişletilmeye ihtiyaç duymasının nedeni tartışılmıştır. Bu noktadan hareketle kompleks sayıları öğrencileri sorgulamalarının önü açılmıştır. Dolayısıyla; kompleks sayılar cümlesinin reel sayılar sisteminin genişletilmesiyle elde edildiği ve matematiksel olarak kapalı bir cümle olduğu vurgulanmaya çalışılmıştır.

Deney grubundaki öğrencilere; kompleks sayılar konusu ile ilgili kavramların herhangi bir tanımı veya özelliği verildiği anda bu tanım ve özellik, geometrik olarak da sorgulanmış ve öğrencilerin düşünceleri ve çizimlerinden de yararlanılarak ilgili tanım ve özelliklerin görsel açıklaması yapılmıştır. Bu kavramlarla ilgili örnekler, cebirsel özellikleri ihmal edilmeksizin geometrik olarak çözülmüştür. Burada; Euclid geometrisi ve kompleks sayılar arasındaki ilişkileri öğrencilerin sorgulanması amaçlanmıştır. Böylece kompleks sayılar konusu ile ilgili cebirsel ifadelerin arka planındaki geometrik yapıların keşfedilmesi ve kurgulanması olanağı yaratılmıştır. Bu çalışmalarda; öğrencilerin kavramlara ilgili görüşleri alınmış, tanım ve teoremlerin bir bakıma çıkış noktasını teşkil eden geometrik çizimler üzerinde tartışılarak cebirsel ifadelerin anlamı ortaya konmaya çalışılmıştır.

Bu süreç boyunca öğrencilere, kompleks sayılarla ilgili temel cebirsel özellikler kazandırılmaya çalışılırken bu sayılarla ilgili özelliklerin geometrik temsilleri üzerinde ayrıntılı bir şekilde durulmuştur. Kompleks sayıların bir vektör olarak temsil edilebileceğinden hareketle vektörlerle ilgili ve kompleks sayılara özgü geometrik özellikler kazandırılmaya çalışılmıştır. Yani; deney grubunda yapılan çalışmalarda kompleks sayılar konusu ile Euclid geometrisi arasındaki ilişkiler üzerine odaklanılmıştır.

Görselleştirme yaklaşımı ile konuyu işleme de, daha önce de belirtildiği gibi, kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri ile ilgili bazı soyut içerikli kavramların somutlaştırılarak sunulması ve bu şekilde konuların öğrenciler tarafından daha kolay anlaşılması amaçlanmıştır. Bu amaca yönelik olarak deney grubunda, kompleks sayıların özellikleri ile ilgili yapılan bazı uygulamalar EK 4'te ifade edilmeye çalışılmıştır;

Kompleks sayıların ve bu sayılara ait özelliklerin görselleştirme yaklaşımı ile deney grubuna sunulması sürecinde yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir çok somutlaştırma etkinlikleri düzenlenmiştir. Bu süreçte sık sık kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri ile Euclid geometrisi arasındaki bağıntılar üzerinde durulmuştur. Dolayısıyla bu süreçte; kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri konusundaki analitik ifadeler ile bu ifadelerin arka planındaki geometrik yapılar arasındaki ilişkiler üzerinde durulmuştur.

Kompleks sayılar konusunun işlenmesinde görselleştirme yaklaşımının esas alındığı ve bu amaca yönelik olarak da geometrik modellerin kullanıldığı deney grubunda uygulanan program çizelge 3.2'de özetlenmiştir. Çizelge 3.2'de görüldüğü gibi deney grubunda kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri konusu görselleştirme yaklaşımının gereklerine uygun olarak işlenmiştir. Bu süreçte konu ile ilgili geometrik yorumlara ağırlık verilerek somutlaştırma etkinliklerinin nitelik ve niceliği arttırılmıştır. Bu şekilde öğrencilerin bilgi kazanımlarında farklı yaklaşımları kullanmalarına olanak sağlanmıştır.

Çizelge 3.2 Deney grubuna uygulanan program

1. Hafta	**1. Ders**	Sayı cümleleri, vektör, düzlemde nokta tespiti, $\boldsymbol{R}^2$ de vektör çizimi ve vektörler üzerinde tanımlanan işlemler gibi ön koşul öğrenmelerin hatırlatılması ve bu öğrenmelerle ilgili öğrencilerde var olan eksikliklerin giderilmesine yönelik çalışmaların yapılması.
	2. Ders	Reel sayılar cümlesinin özellikleri ve reel sayıların cümlesinin yetersiz kaldığı noktadan hareketle yeni bir sayı sisteminin kurulmasının gerekliliği, kompleks sayılar cümlesi olarak adlandırılan bu sistem ile reel sayılar sistemi arasındaki ilişkiler.
	3. Ders	Kompleks sayılar ile fiziksel dünya arasındaki ilişkiler. Bu ilişkiyi ortaya koyma açısında yapılan bir etkinlik EK4'te sunulmuştur. Kompleks sayıları tarihsel gelişimi ve kompleks sayıların geometrik temsillerinin bu sürece etkileri, kompleks sayı kavramının tanıtılması, düzlemde sayı-nokta eşleşmesinin belirlenmesi.

Çizelge 3.2. (devam)

2. Hafta	**1. Ders**	Kompleks sayıların dik koordinat sistemindeki temsili, x+iy notasyonunun cebirsel ve geometrik yorumlaması.
	2. Ders	Bir kompleks sayının eşleniği, modulü ve argümanı gibi kompleks sayılara ait özelliklerin verilmesi.Bu aşamada kompleks sayılar ile Euclid geometrisi arasındaki ilişkilere sıkça vurgu yapılarak bu sayıların özelliklerinin araka planında yatan geometrik modellerin ortaya konması.
	3. Ders	Kompleks sayı ve bu sayıların özellikleri ile ilgili örneklerin görselleştirme yaklaşımı ile çözümü. Kompleks sayıları özellikleri ve bu özelliklerin tanımlanan geometrik analizine yönelik geliştirilen bir etkinlik EK4'te sunulmuştur.

3. Hafta	1. Ders	Kompleks sayılar cümlesi üzerinde tanımlanan işlemler ve bu işlemlerin cebirsel geometrik analizi.
	2. Ders	Kompleks sayıların kutupsal gösterimi, bu gösterim şeklinin kompleks sayılara ve bu sayılar ile ilgili özelliklere uygulanması ve bu gösterim şeklinin önemi. Kutupsal gösterimin kompleks sayılardaki önemi bunla ilgili örneklendirme çalışmaları.
	3. Ders	Kutupsal formda ifade edilen kompleks sayılarla işlemler.Kutupsal formda ifade edilen kompleks sayılarla özellikle çarpma ve bölme işlemine ait cebirsel ve geometrik kuralların elde edilmesi. Bir kompleks sayının kutupsal formu ve dik koordinatlardaki gösterimi arasındaki bağıntılar.

Çizelge 3.2. (devam)

4. Hafta	**1. Ders**	Kompleks sayıların üs ve köklerinin cebirsel ve geometrik analizi. Kompleks sayıların üs ve köklerin geometrisinin kompleks analiz müfredatındaki önemi.
	2. Ders	Reel sayılarda tanımlı e^x üstel fonksiyona ait kuvvet serisinin kompleks düzleme genişletilerek Euler formülünün elde edilmesi. Euler formülünün cebirsel ve geometrik özellikleri ve bu formülün geometrisinin analizi.
	3. Ders	Kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri ile ilgili genel alıştırmaların özellikle geometrik yaklaşımlarla çözümü. Bu çalışmalardaki iki örneğe ait görselleştirme yaklaşımı ile düzenlenen bir etkinlik EK4'te sunulmuştur.

Kontrol grubunda ise, kompleks sayılar konusu deney grubunda olduğu gibi geleneksel öğretim yöntemleri kullanılarak işlenmiştir. Bu grupta da konular işlenirken çizelge 3.2' deki konu sırası dikkate alınmıştır. Ancak, kontrol grubunda dersi anlatan araştırmacı aktif, öğrenciler ise pasif durumda kalmışlardır. Kontrol grubunda sadece kompleks sayıların kutupsal gösterimi konusunda kompleks sayıların geometrik yorumlamaları ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Oysa, deney grubunda kompleks sayılar ve bu sayılara ait özelliklerle ilgili tüm çalışmalarda geometrik yorumlamaların üzerine odaklanılmıştır. Ayrıca; kontrol grubunda konular işlenirken çok sayıda problemler çözülmüştür. Ancak problemlerin çözümünde geometrik yaklaşımlar yerine cebirsel yaklaşımlara ağırlık verilmiştir. Diğer taraftan deney grubunda ise problemlerin çözümlerinde cebirsel yaklaşımlarla birlikte geometrik yaklaşımlarda sürekli olarak aranmıştır.

3.7. Veri Analizi

Öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları anlamaları üzerine geleneksel öğretim yöntemi ile görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin karşılaştırılmasının amaçlandığı bu çalışmada; uygulamaya başlamadan önce deney ve kontrol grubu arasında, kompleks sayı kavramları başarısı, matematiğe karşı tutum ve bilimsel işlem becerisi bakımından, istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olup olmadığını belirlemek amacıyla kompleks sayılar kavram testi, matematik tutum ölçeği ve bilimsel işlem beceri testi çalışma kapsamındaki öğrencilerin tamamına ön test olarak uygulanmış ve bu testlerden elde edilen veriler bağımsız grup t-testi kullanılarak analiz edilmiştir.

Uygulama sonrasında ise, kompleks sayılar konusu ile ilgili kavramların anlaşılması ve matematiğe karşı olan tutumları ile ilgili iki farklı öğretim yönteminin (görselleştirme yaklaşımı ve geleneksel yöntem) etkilerini karşılaştırmak amacıyla gruplar arasında bağımsız grup t-testi yapılmıştır. Ayrıca dönemin sonunda kompleks sayılar kavram testi her iki gruba uygulanarak görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin bu konuyu daha uzun süreli olarak belleklerinde tutmalarına olan etkisi çift katlı (paired-simple) grup t-test tekniği yardımıyla incelenmiştir. Analizler 0,05'lik önem seviyesinde yapılmıştır. Öğrencilerin kompleks sayılar kavram testine verdiği cevapların ayrıntılı bir şekilde irdelenebilmesi için cevaplar 4 kategoriye (Doğru, Kısmen Doğru, Yanlış, Cevapsız) ayrılmıştır. Bu kategorilendirme sonucunda yüzde/frekans yöntemi ile elde edilen veriler ışığında öğrencilerin kompleks sayılar konusuyla ilgili başarı durumları irdelenmiştir. Burada;

Doğru cevap: Öğrencilerin geometrik veya cebirsel bir yaklaşımla sorulan sorunun cevabını tam olarak elde etmesi bu kategoriye dahil edilmiştir.

Kısmen Doğru: Öğrencilerin sorulan soru ile ilgili eksik bilgi, işlem hatası veya sonuca tam olarak ulaşamaması gibi soru ile ilgili bilimsel düşüncelerin bir kısmını ifade eden cevaplar bu kategoriye dahil edilmiştir.

Yanlış: Öğrencinin sorulan soruya tamamen yanlış bir yaklaşımla elde ettiği cevaplar bu kategoriye dahil edilmiştir.

Cevapsız: Öğrencinin sorulan soruya hiçbir yorumda bulunmaması yani soruyu cevapsız bırakması bu kategoriye dahil edilmiştir.

Bu kategoriler ve bunlara karşılık gelen puanlamalarla ilgili bilgi aşağıdaki çizelgede çıkarılmıştır;

Çizelge 3.3 Öğrencilerin Cevap Kategorileri ve Bu Kategoriler Karşılık Gelen Puan Değerleri

Cevap Kategorisi	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Cevapsız
Puan Değeri	2	1	0	0

3.8. Araştırmanın Kabulleri ve Sınırlılıkları

Bu çalışmadaki kabuller ve sınırlılıklar aşağıdaki gibidir;

3.8.1. Araştırmanın Kabulleri

1- Araştırmacı, uygulama aşamasında kontrol ve deney gruplarına yansız davranmıştır.

2- Uygulama aşamasında, kontrol ve deney gruplarındaki öğrenciler arasında herhangi bir etkileşim olmamıştır.

3.8.2. Araştırmanın Sınırlılıkları

1- Çalışmanın örneklemi, Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı dördüncü sınıftaki 73 öğrenci ile sınırlandırılmıştır.

2- Araştırma, kompleks sayılar konusu ile sınırlıdır.

3- Uygulama süresi dört hafta ile sınırlıdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu kısımda, araştırmada deney ve kontrol grupları açısından ifade edilen hipotezlerin test edilmesinden elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Araştırmanın hipotezleri 0,05'lik önem seviyesinde tespit edilmiştir. Hipotezlerin test edilmesinde bağımsız grup t-testi kullanılmıştır. Bu çalışmada istatistiksel analizler SPSS/ PC (Statistical Package for Social Sciences for Personal Computers) paket programı kullanılarak yapılmıştır.

Çizelgelerde yer alan **"t"**; t testi değerini, **"p"**; farkın anlamlılık düzeyini (Significance), **"Sd"**; Serbestlik derecesini (Degree of Free), $\overline{X}$; Aritmetik Ortalamayı, **"%"**; Yüzdelik değerini, **"f"**; frekansı ifade etmektedir.

Kompleks sayılar konusunun öğretimine yönelik olarak, görselleştirme yaklaşımı esas alınarak geliştirilen öğretim yöntemi ile geleneksel öğretim yönteminin etkinliğini karşılaştırmak amacıyla yapılan bu çalışmada, uygulamaya başlanmadan önce deney ve kontrol gruplarındaki öğrencilerin kompleks sayılar konusu, matematiğe karşı tutumları ve bilimsel işlem becerileri açısından mevcut durumlarını ortaya çıkarabilmek için kompleks sayılar bilgi testi, matematik tutum ölçeği ve bilimsel işlem beceri testi çalışma kapsamındaki öğrencilerin tamamına ön test olarak uygulanmıştır.

Bu testlerin analiz edilmesi sonucunda elde edilen bulgular, deney ve kontrol grubundaki öğrenciler arasında kompleks sayılar konusu ($\overline{X}_D$=4,56; $\overline{X}_K$= 4,50; t =0, 176; p= 0,861), matematiğe karşı tutum ($\overline{X}_D$=133,67; $\overline{X}_K$= 130,58; t= 0, 917; p = 0,362) ve bilimsel işlem becerileri ($\overline{X}_D$= 24,86; $\overline{X}_K$= 24,16; t = 0, 704; p= 0,483) açısından önemli bir farklılığın olmadığını göstermiştir. Bu sonuçlara göre deney ve kontrol grubu olarak seçilen sınıflardaki öğrencilerin homojen bir örneklem oluşturduğu söylenebilir. Araştırmanın hipotezlerine ait sonuçlar sırasıyla aşağıda sunulmaktadır.

4.1. Öğrencilerin Kompleks Sayılar İle İlgili Başarılarına Ait Bulgular

Görselleştirme yaklaşımını esas alan öğretim yöntemlerinin kullanıldığı deney grubu öğrencileri ile geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanıldığı kontrol grubu öğrencilerinin kompleks sayılar konusu ile ilgili başarıları açısından, son test ortalamaları arasında önemli bir farklılığın olup olmadığını belirleyebilmek için, "bağımsız grup t-testi (independent samples t-test)" kullanılmıştır. Analiz sonuçları çizelge 4.1'de verilmiştir.

Çizelge 4.1. Kompleks sayılar konusu başarısı

	Ortalama	Sd	t	p
Kontrol Grubu	11,69	0,26	2,207	0,03
Deney Grubu	14,02	0,28		

Çizelge 4.1'de görüldüğü gibi kompleks sayı bilgi testi açısından, deney grubundaki öğrencilerle kontrol grubundaki öğrencilerin son test ortalamaları arasında istatistiksel olarak önemli bir fark bulunmaktadır ($t=2,207$; $p=0,03$). Görselleştirme yaklaşımına yönelik öğretim yönteminin kullanıldığı deney grubundaki öğrencilerin kompleks sayılar konusu başarı ortalaması, geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanıldığı kontrol grubundaki öğrencilerin başarı ortalamasından daha yüksektir($\overline{X}_D= 14,02$; $\overline{X}_K=11,69$).

Çizelge 4.2'de görselleştirme yaklaşımının kullanıldığı deney grubu ile geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanıldığı kontrol grubunun, yapılan uygulamadan sonra son test olarak verilen başarı testindeki doğru cevap oranları verilmiştir. Bu sonuçlardan kompleks sayı bilgi testindeki sorulara verilen doğru cevap oranları bakımından, genel olarak iki grup arasında farklılık olduğu ve deney grubunun doğru cevap oranlarının daha yüksek olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.2. Kontrol ve Deney Gruplarının Kompleks sayı kavram testi son test cevap Oranları

Soru No	Kontrol Grubu				Deney Grubu			
	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Cevapsız	Doğru	Kısmen Doğru	Yanlış	Cevapsız
1a	0,83	0,16	,00	,00	0,91	0,08	,00	,00
1b	0,86	0,13	,00	,00	0,86	0,10	,00	0,02
2a	0,55	0,13	0,16	0,13	0,86	0,08	0,02	0,02
2b	0,11	0,05	0,41	0,41	0,05	0,16	0,24	0,54
3	0,05	0,19	0,44	0,30	0,05	0,37	0,29	0,27
4	0,63	,00	0,27	0,08	0,91	,00	0,02	0,05
5	0,58	0,22	0,11	0,08	0,70	0,10	0,18	,00
6	0,08	0,08	0,50	0,33	0,35	0,05	0,48	0,10
7	0,16	0,02	0,50	0,30	0,10	0,10	0,40	0,37
8	0,16	0,16	0,22	0,44	0,27	0,05	,00	0,67
9a	0,75	0,05	0,08	0,11	0,81	0,05	,00	0,13
9b	0,38	0,05	0,25	0,30	0,45	0,08	0,18	0,27

Genel olarak, yapılan uygulama sonrasında kompleks sayılar konusu ile ilgili başarı testinin ortalama doğru cevaplanma yüzdesi, görselleştirme yaklaşımının esas alındığı deney grubunda %53, geleneksel öğretim metodunun uygulandığı kontrol grubunda % 43 olmuştur. Bu sonuca göre, kompleks sayılar konusu ile ilgili kavramların deney grubundaki öğrenciler tarafından kontrol grubundaki öğrencilere oranla daha iyi anlaşıldığı söylenebilir.

Çizelge 4.3'te kontrol ve deney grubuna ön test ve son test olarak uygulanan kompleks sayı kavram testinin, öğrenciler tarafından doğru cevaplanma oranları verilmiştir. Çizelgedeki değerlerden görüleceği gibi kontrol ve deney grubundaki öğrencilerin son teste verdikleri doğru cevap yüzdeleri ön teste verdikleri doğru cevap oranlarından daha yüksektir. Doğru cevaplar göz önüne alındığında; kontrol grubundaki öğrencilerin ön test ortalamaları %15 son test ortalamaları %43 iken deney grubundaki öğrencilerin ön test ortalamaları %15 son test ortalamaları %53 tür.

Çizelge 4.3. Kontrol ve Deney Grubunun Kompleks Sayılar Kavram Testi Ön Test- Son Test Doğru Cevap Oranları

Soru No	Kontrol Grubu		Deney Grubu	
	Ön Test	Son Test	Ön Test	Son Test
1a	0,75	0,83	0,75	0,91
1b	0,77	0,86	0,70	0,86
2a	0,02	0,55	,00	0,86
2b	,00	0,11	,00	0,05
3	,00	0,05	,00	0,05
4	,00	0,63	,00	0,91
5	,00	0,58	,00	0,70
6	,00	0,08	,00	0,35
7	,00	0,16	,00	0,10
8	,00	0,16	,00	0,27
9a	0,19	0,75	0,27	0,81
9b	0,16	0,38	0,16	0,45

Çizelge 4.3'teki sonuçlar göz önüne alındığında, deney grubundaki öğrencilerin ön teste oranla son testteki başarı oranlarını yaklaşık olarak %38 düzeyinde arttırdığı, kontrol grubundaki öğrenciler için bu artışın %28 düzeyinde olduğu anlaşılmaktadır.

Kompleks sayılar kavram testine verilen cevaplar incelendiğinde genel olarak öğrencilerin kompleks sayı ile ilgili kavramların tanımlarını ve genel özelliklerini bildikleri belirlenmiş olmakla birlikte; bilinen özellikle sorularda istenilenlerle bağdaştırabilme ve bunlara uyarlayabilme, işlemleri doğru bir şekilde yürütebilme ve elde edilen sonuçları yorumlayabilme gibi durumlarda hatalar yaptıkları tespit edilmiştir. Sorulara kısmen doğru yada yanlış cevap veren öğrencilerin soruların cevaplarında yapmış oldukları gene hatalar soru sırasına göre aşağıda özetlenmiştir;

Kompleks sayı kavramını, kompleks sayı ve eşleniği ile reel ve sanal kısmı arasındaki ilişkileri ortaya koymayı gerektiren Soru 1'de; öğrencilerin genel olarak soruları cevaplandırmada ciddi sıkıntılar yaşamadıkları tespit edilmiştir. Buna karşın, bu soruda yapılan en genel yanlış gösterilmesi istene eşitliklerin elde edilmesi aşamasında eşitliğinin varlığının kabul edilerek işlem yapılması olmuştur.

Kompleks sayılarla ilgili temel özelliklerden biri olan üçgen eşitsizliğinin, bu eşitsizliğin en genel halinin ve eşitlik durumun hangi durumda gerçeklenebileceğinin sorgulandığı Soru 2'de; deney grubundaki öğrencilerin geometrik olarak yani üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişki üzerine kurulu yorumlama ile sonuca ulaşmada başarılı olmalarına rağmen eşitlik durumunun hangi halde gerçeklenebileceği sorusunda sıkıntılar yaşadıkları tespit edilmiştir. Cebirsel olarak çözüme ulaşmaya çalışa bazı öğrencilerin ise kompleks sayılarla ilgili bazı temel özellikleri bu sorunun çözümüne uyarlamada zorluklar yaşadıkları görülmüştür.

Çember ve elips denklemlerinin kompleks düzlemdeki ifadelerinin sorgulandığı Soru 3'te; öğrencilerin çember denklemini kompleks formda ifade etmede sıkıntı yaşamamalarına rağmen genel olarak elips denklemini oluşturmadıkları tespit edilmiştir. Çember denklemini kompleks formda ifade etmeye çalışan bazı öğrencilerin çember ve daire denklemleri arasındaki farkı tam olarak kavrayamadıkları görülmüştür.

Kompleks sayılarla ilgili temel bir özelliğin uygulanmasının amaçlandığı Soru 4'ün çözümünde deney grubundaki öğrencilerin görsel olarak kontrol grubundaki öğrencilerin cebirsel olarak yaklaşım geliştirdikleri tespit edilmiştir.

Kompleks sayıların kutupsal formda ifade edilmesinin ve bu şekilde belirtilen kompleks sayının üslerinin bulunmasının amaçlandığı Soru 5'te; öğrencilerin genel olarak soruda belirtilen kompleks sayıyı kutupsal koordinatlarda ifade etmeyi başarabildikleri ancak bazı temel trigonometri bilgi eksiklikleri nedeniyle bu kompleks sayının üstel formlarını doğru bir şekilde elde edemedikleri görülmüştür.

Bir kompleks sayının çarpma işlemine göre tersinin geometrik yerinin sorgulandığı Soru 6'da; öğrencilerin genel olarak sıkıntılar yaşadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin temel geometri bilgi eksikliklerinden kaynaklanan sorunlarla birlikte bazı öğrencilerin bu sorunun çözümünde kullanılması istenen $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ eşitliğini sadece göstermekle yetindikleri ve bunu cevap olarak belirttikleri görülmüştür.

Doğrusal olmayan üç kompleks sayılarla ilgili cebirsel bir özellik ile bu noktaların geometrik yeri arasındaki ilişkinin sorgulandığı Soru 7'de; genel olarak öğrencilerin sorunun çözümünde kullanılması istenen eşitliği kendilerini çözüme ulaştıracak şekilde kullanamadıkları tespit edilmiştir. Burada; özellikle kontrol grubundaki öğrencilerin cebirsel ifadeler ile bu ifadelerin geometrik modelleri arasındaki ilişkiyi kurgulamada ciddi sıkıntılar yaşadıkları görülmüştür. Öğrencilerin yaşadıkları en önemli sıkıntılardan biri herhangi bir kompleks sayının ifadesini oluşturmaktı. Sorunun çözümünde köprü işlevi olan bu basamağı doğru bir şekilde oluşturamayan öğrenciler doğru sonuca ulaşamamışlardır.

Herhangi bir kompleks sayının n.ci dereceden köklerinin cebirsel ve geometrik analizinin sorgulandığı Soru 8'de; öğrencilerin $1 + w^2 + ... + w^{n-1} = 0$ ifadesini geometrik yorumlamada sıkıntılar yaşadıkları tespit edilmiştir. Kompleks sayıların köklerinin yorumu üzerine kurulu bu soruda, cebirsel olarak çözüme ulaşmak isteyen öğrencilerin seriyi uygun bir şekilde açamamaları yaptıkları en ciddi hata olmuştur.

Üstel ve trigonometrik fonksiyonlar arasındaki ilişkilerin sorgulandığı Soru 9'da; bazı öğrencilerin eşitliğin varlığını kabul ederek çözüme ulaşma veya işlemleri sonuçlandıramama gibi yetersizlikler göstermelerine genel olarak bir çok öğrencinin soruların doğru çözümüne ulaşabildikleri tespit edilmiştir.

4.2 Öğrencilerin Kompleks Sayılar İle İlgili Kavramları Uzun Süreli Belleklerinde Tutmaları İle İlgili Bulgular

Öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına görselleştirme yaklaşımının etkisinin belirlenmesi amacıyla paired- simple t-test tekniği kullanılmıştır. Bu amaçla, uygulama ve dönem sonlarında geleneksel öğretim metodunun esas alındığı kontrol grubuna ve görselleştirme yaklaşımının esas alındığı deney grubuna kompleks sayılar bilgi testi uygulanmıştır.

Çizelge 4.4'te geleneksel öğretim metodunun uygulandığı kontrol grubuna uygulama ve dönem sonunda uygulanan kompleks sayılar bilgi testi sonuçları verilmiştir.

Çizelge 4.4 Kontrol Grubu Uygulama ve Dönem Sonu İstatistiksel Verileri

Kontrol Grubu	Ortalama	Sd	t	p
Uygulama Sonu	11,69	4,75	7,301	0,00
Dönem Sonu	9,38	3,90		

Çizelge 4.4'teki sonuçlar gözönüne alındığında, kontrol grubundaki öğrencilerin uygulama ve dönem sonundaki kompleks sayılarla ilgili başarılarında anlamlı bir farklılık olduğu görülmektedir (p = 0,00). Kontrol grubundaki öğrencilerin uygulama sonundaki başarı ortalaması 11,69 iken; bu başarı ortalaması dönem sonunda 9,38' e düşmüştür. Dolayısıyla kontrol grubundaki öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına geleneksel öğretim metodunun olumlu yönde bir etkisinin olmadığı söylenebilir.

Çizelge 4.5'te uygulama ve dönem sonunda görselleştirme yaklaşımının uygulandığı deney grubuna uygulanan kompleks sayılar bilgi testi sonuçları verilmiştir.

Çizelge 4.5 Deney Grubu Uygulama ve Dönem Sonu İstatistiksel Verileri

Deney Grubu	Ortalama	Sd	t	p
Uygulama Sonu	14,02	4,25	1,871	0,07
Dönem Sonu	13,48	3,76		

Çizelge 4.5'teki sonuçlar gözönüne alındığında, deney grubundaki öğrencilerin uygulama ve dönem sonundaki kompleks sayılarla ilgili başarılarında anlamlı bir

farklılık olmadığı görülmektedir. Deney grubundaki öğrencilerin uygulama sonundaki başarı ortalaması 14,02 ve dönem sonundaki başarı ortalaması 13,48 dir. Dolayısıyla kontrol grubundaki öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına görselleştirme yaklaşımının olumsuz bir etkisinin olmadığı görülmektedir

4.3 Öğrencilerin Matematiğe Karşı Tutumları İle İlgili Bulgular

Öğrencilerin matematiğe karşı tutumları açısından görselleştirme yaklaşımı ile geleneksel yöntem arasında önemli bir farklılığın olup olmadığını test etmek amacıyla bağımsız grup t-testi kullanılmış ve bu test sonuçlarına göre iki grup arasında istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olmadığı tespit edilmiştir (t= 1,279; p= 0,20).

5.TARTIŞMA ve SONUÇ

Bundan önceki bölümlerde de ifade edildiği gibi, bu çalışmanın temel amacını, kompleks sayılar konusu ile ilgili kavramların öğrenciler tarafından anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımı ve geleneksel öğretim yöntemi olmak üzere, farklı iki öğretim yöntemin etkinliğinin karşılaştırılması oluşturmaktadır. Aynı zamanda; bu farklı iki yöntemin, öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmaları yani kalıcı öğrenmeyi sağlayabilme ve matematiğe karşı tutumları üzerine olan etkileri de incelenmiştir. Bu çalışmada oraya konan görselleştirme etkinlikleri, **C** kompleks sayılar cümlesi ile $\mathfrak{R}^2$ arasındaki ilişki dolayısıyla $\mathfrak{R}^2$ ile sınırlandırılmıştır. Bununla birlikte; kompleks analiz dersi müfredatında yer alan ve kompleks sayılar ve bu sayıların özellikleri konularından farklı bazı konuların görselleştirme yaklaşımı ile öğretimi ile $\mathfrak{R}^3$ ve $\mathfrak{R}^4$ uzaylarında kompleks sayıların özellikleri ve geometrisi ile ilgili bazı bilgiler bu çalışmanın önerileri boyutunda EK5 ve EK6' da belirtilmiştir.

Çalışmanın temel amacına yönelik olarak, öğrencilerin kompleks sayılar konusu ile ilgili kavramları anlamalarını test edebilmek amacıyla geliştirilen kompleks sayı kavram testi, uygulama öncesinde hem kontrol hem de deney grubundaki öğrencilerin tamamına ön test olarak uygulanmıştır. Testten elde edilen analiz sonuçları, her iki grubun başarı ortalamaları arasında istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olmadığını göstermiştir. Öğrenciler; analiz dersleri başta olmak üzere daha önceki sınıflarda aldıkları derslerde gördükleri trigonometri başta olmak üzere kompleks sayılara temel teşkil edebilecek bazı konularla ilgili önceki bilgileri ile ön test sorularına verdikleri cevaplarda oldukça başarısız olmuşlardır. Böylece, uygulama öncesinde her iki grubun kompleks sayılar cümlesinde tanımlanan kavramları kavrayabilmeleri açısından birbirine eşit düzeyde oldukları anlaşılmaktadır. Diğer bir ifade ile, deney ve kontrol gruplarının homojen oldukları tespit edilmiştir.

Kompleks sayı kavram testi, kompleks sayılar konusu ile ilgili kavramların öğrenciler tarafından anlaşılması üzerine farklı iki öğretim yönteminin etkilerinin karşılaştırılması amacıyla konunun işlendiği dört haftalık süreç sonunda her iki gruba da son test olarak uygulanmıştır. Son teste ait analiz sonuçları, kompleks sayılar cümlesinde tanımlanan kavramları anlayabilmeleri açısından görselleştirme yaklaşımının kullanıldığı deney grubundaki öğrenciler ile geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı kontrol grubundaki öğrenciler arasında istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olduğunu göstermiştir. Deney grubunun kompleks sayı kavramları başarı ortalamasının kontrol grubunun başarı ortalamasından daha yüksek olduğu tespit edilmiştir ($\overline{X}_D$=14,02; $\overline{X}_K$= 11,69).

Dört haftalık uygulama sonunda yapılan son test verilerine göre, her iki grubun kompleks sayılar konusundaki başarısının arttığı görülmektedir. Ancak, kompleks sayılar konusu ile ilgili kavramların öğrenciler tarafından anlaşılmasında, görselleştirme yaklaşımının geleneksel öğretim yöntemlerine oranla daha etkili olduğu anlaşılmaktadır. Bu sonuç, öğrenmede görselleştirme yaklaşımının etkinliğinin belirlenmesine yönelik yapılan diğer araştırma sonuçları ile uyum içerisindedir (Vinner 1989, Eisenberg ve Dreyfus1986, Lean ve Clements 1981).

Yukarıda ifade edilenler ışığında; öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları öğrenimi sürecinde görselleştirme yaklaşımının geleneksel yaklaşıma göre daha etkili olduğu söylenebilir. Kompleks sayılar ve bu sayılarla işlemlerin öğretiminde kullanılabilecek geometrik bir model için uygun bir plan aşağıdaki özellikleri içermelidir;

1- Kompleks sayılarla ilgili herhangi bir konunun öğretiminde kullanılacak animasyon ya da grafiğin amacı açık olmalıdır: Genel olarak; matematik derslerindeki şekil veya diyagramlara yönelik çalışmalarda, deneysel öğretim materyalleri beş alt kategoriye ayrılabilir:

i) Tanımlayıcı (Betimsel) : Materyaller öğrencinin kompleks sayının görsel olarak nasıl bir yapısı olduğunu tasarlayabilmesine olanak sağlayabilmelidir.

ii) Anlamlı: Materyaller basit bir şekilde tanımlanamayan bilgiyi oluşturan yapıda olmalıdır.

iii) Yapısal: Materyaller reel sayı ve kompleks sayı kavramları arasındaki güçlü bağlantıların belirlenmesine yönelik düzenlenmelidir.

iv) İşlevsel : Materyaller kompleks sayılarla ilgili öğretim sürecinde öğrencilerin görsel olarak takip ettikleri etkinlikleri adım adım gösterebilmelerine olanak sağlayabilmelidir. Örneğin; (x,y) notasyonu kompleks sayıların biçimsel olarak geliştirilmesi için elverişli olmasına rağmen, x+iy notasyonu daha işlevseldir.

v) Mantıksal: Materyaller vektörler üzerinde tanımlanan geometrik işlemler yardımıyla gösterilebilecek yapıda olmalıdır.

2- Yazılı materyallerde sunulan şekiller, öğrenecek kişi için yararlıdır.

3- Etkili bir model ileriki çalışmalarda kullanılmalı ve daha sonraki algoritmalar için açıklayıcı bir yapıda olmalıdır.

Bu çalışmada kullanılan geometrik materyallerin yukarıda belirtilen şartlara uygun olarak düzenlenmesi amaçlanmıştır. Çoğu araştırmalarda geometrik modellerin sınıf ortamındaki öğrenciler için etkili olduğu bildirilmektedir. Bununla birlikte, özellikle geometri becerileri yeterli olmayan öğrencilerde geometrik modellerle öğretimin gerçekleştirilebilmesinde görselleştirme yaklaşımının tek başına yetersiz kaldığı, bu nedenle görselleştirme yaklaşımı ile birlikte başka yöntemlerin de kullanılmasıyla, bu sürecin daha etkili bir hale getirilebileceği belirtilmektedir. Vinner ve Hershkowitz (1980) matematikteki konuların öğretiminde yalnızca analitik bir tanım ve sınırlı görsel örneklerle yetinildiğinde öğrencilerin eksik anlamalarla yüz yüze kalacaklarını bildirmişlerdir. Yapmış oldukları çalışmada; doğru kavram görüntüsü oluşturamamada temel etkenin görsel temsillerin sınırlı kullanılması olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin; dik üçgen gibi çeşitli geometrik şekillerin yatay ve dikey çizimlerden çok daha farklı ve geniş yönlendirmeler şeklinde çizilmesi gerektiği üzerinde durmuşlardır.

Görselleştirme yaklaşımına uygun olarak kompleks sayılar konusuyla ilgili kavramların açıklanması sürecinde analitik ifadeler ile bu ifadeleri temsil eden geometrik modellerler arasındaki güçlü bağların ortaya konarak konuların işlenmesi, görselleştirme yaklaşımının kullanıldığı deney grubundaki öğrencilerin geleneksel yöntemlerin kullanıldığı kontrol grubundaki öğrencilere oranla kompleks sayı kavram testinde daha başarılı olmalarının temel nedeni olarak gösterilebilir. Konuların bu şekilde işlenmesi sonucu öğrencilerin mevcut geometri becerilerini kompleks sayılarla ilgili kavramların geometrik temsillerine uyarlama çabalarına giriştikleri ve böylece analitik geometri derslerinde görmüş oldukları kavramları pekiştirme imkanı doğduğunu da söylemek mümkündür.

Öğrencilerin kompleks sayılar ile ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına görselleştirme yaklaşımının etkisinin incelenmesi amacıyla kompleks sayı kavram testinin hem deney grubuna hem de kontrol grubuna dört haftalık uygulamanın ardından ve dokuz haftanın ardından dönem sonunda tekrar uygulandığı daha önce de ifade edilmişti. Bu testlerden elde edilen verilerden görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin kompleks sayılarla ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına olumlu yönde bir etkisinin olduğu görülmektedir. Bir başka ifadeyle, görselleştirme yaklaşımının kompleks sayılarla ilgili konuların öğrenilmesinde ve öğrenilen kavramların uzun süreli bellekte tutulmasında geleneksel öğretim yöntemlerine oranla daha başarılı olduğu söylenebilir. Bu sonuca, analitik ifadelerin geometrik temsillerinin öğrencilerin zihinlerinde daha kolay ve daha uzun süre kalmasıyla izah edilebilir. Kompleks sayılar ve kompleks sayıların özellikleri konusunda görselleştirme yaklaşımının öğrencilerde kalıcı öğrenmeyi sağlamada önemli bir araç olduğu sonucuna ulaşmak mümkündür. Dolayısıyla; bu çalışmada kullanılan görselleştirme yaklaşımı, öğrencilerin yeni bilgilerini önceki bilgileriyle birleştirerek organize etmelerinde, kendi bilgilerini oluşturabilmelerinde ve kompleks sayılarla ilgili problemlerin çözüm stratejileri birikimlerini arttırmada etkin bir rol oynamaktadır.

Daha genel anlamda ifade edilecek olursa, kompleks sayı kavramları açısından gruplar arasında meydana gelen başarı farklılığına, deney grubundaki öğrencilerin önceki geometri bilgilerinden de yararlanılarak kompleks sayılarla ilgili kavramların cebirsel ve geometrik ilişkileri üzerinde durulması, örnek geometrik modellerin öğrencilerle birlikte oluşturularak analitik ifade ile geometrik temsiller arasında sıklıkla geçişler sağlanması, buna karşın kontrol grubunda bütün bunlara yer verilmeksizin düz anlatım, çeşitli cebirsel problemlerin çözümü gibi geleneksel öğretim tekniklerinin kullanılmasının neden olduğu söylenebilir.

Öğrencinin sahip olduğu bilgi yapısı bu bilgilerin ne kadar iyi kavranıldığının bir ölçüsüdür. Bu bilgi yapısı bilgilerin yeniden hatırlanması ve başka alanlara uygulanması sürecini de etkilemektedir. Bundan dolayı, bilgi yapısının oluşumunu etkileyen faktörler kadar, öğrencinin mevcut bilgi yapısının boyutunun ve öğrencinin bunu hangi yollarla oluşturduğunun tespit edilmesi de önemlidir. Özellikle yapısalcı öğrenme savunucularının bu konular üzerinde yoğunlaştıkları görülmektedir. Çünkü; öğrenciler daha önceki deneyimlerinden ve ön bilgilerinden yararlanarak yeni karşılaştıkları durumlar tartışabilmektedirler. Bu nedenle öğrencilerde öğretim süreci boyunca oluşabilecek yanlış anlamaların önüne geçilmesi amaçlanmaktadır. Bu çalışmadan elde edilen bulgular ışığında, görselleştirme yaklaşımının bu amaca yönelik olarak kullanılmasının uygun olabileceği söylenebilir. Çünkü herhangi bir kavramın geometrik temsili yardımıyla öğretimi, ilgili kavramın cebirsel özelliklerinin anlamlandırılmasında önemli bir yere sahiptir.

Öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarını belirlemek amacı ile uygulanan matematik tutum ölçeğinin kompleks sayılar konusuna başlamadan önce deney ve kontrol grubundaki öğrencilerin tamamına ön test olarak uygulanmış ve bu testten elde edilen analiz sonuçları, deney ve kontrol gruplarının matematik tutum ölçeği ön test ortalamaları arasında istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olmadığını göstermiştir ($t= 0,917$; $p= 0,362$). Buna göre; uygulama öncesinde her iki grubun matematiğe karşı tutumlar açısından birbirine eşit olduğu söylenebilir.

Bu çalışmada, kompleks sayılar konusunun anlaşılması üzerine etkileri incelenen farklı iki öğretim yönteminin, aynı zamanda, öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarına da etkisinin olup olmadığını belirleyebilmek amacı ile matematik tutum ölçeği, çalışma kapsamındaki öğrencilerin tamamına son test olarak da uygulanmıştır. Bu teste ait analiz sonuçları, matematiğe karşı tutumları açısından deney ve kontrol grupları arasında istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olmadığını göstermiştir ($t= 1,279$; $p= 0,20$). Yani, görselleştirme yaklaşımı ile geleneksel öğretim yöntemlerinin öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarına olan etkisi aynı düzeyde gerçekleşmiştir. Başka bir ifadeyle, görselleştirme yaklaşımını kullanıldığı deney grubundaki öğrencilerin matematiğe karşı tutumları ile geleneksel öğretim yöntemlerinin kullanıldığı kontrol grubundaki öğrencilerin matematiğe yönelik tutumları arasında bir farklılık mevcut değildir.

Bu durum, uygulama süresinin kısa olması ve bu kısa süreç içerisinde öğrencilerin tutumlarında bir değişikliğin meydana gelmesinin olanaklılığının zorluğuyla açıklanabilir. Matematiğe yönelik tutumda son test puanlarının ön test puanlarına oranla daha yüksek olmasına rağmen istatistiksel olarak anlamlı bir farkın olmaması, görselleştirme yaklaşımının dört hafta gibi kısa sayılabilecek bir süreç içerisinde uygulanmasının öğrencilerin tutumlarında anlamlı bir değişikliğe neden olmadığı, ancak uygulama süresinin yeterince uzun tutulması halinde bir değişikliğin meydana gelmesinin ihtimaliyle izah edilebilir.

Deney ve kontrol gruplarının bilimsel işlem becerisi yönünden homojen olup olmadığını belirleyebilmek için, uygulamanın başlangıcında, bilimsel işlem beceri testi her iki gruptaki öğrencilerin tamamına uygulanmıştır. Yapılan t-testi sonuçlarından ($t=0,704$; $p=0,483$), gruplar arasında, bilimsel işlem becerileri açısından, istatistiksel olarak önemli bir farklılığın olmadığı anlaşılmaktadır. Deney ve kontrol grubu öğrencilerinin bilimsel işlem beceri testi ortalamaları birbirine yakındır ($\overline{X}_D= 24,86$; $\overline{X}_K= 24,16$). Bu sonuçlara göre hem deney hem de kontrol grubunun bilimsel işlem becerileri bakımından birbirine eşit olduğu söylenebilir. Ayrıca bu sonuç, uygulama öncesi her iki grubun homojen bir yapı sergilediğinin göstergesidir.

Öğretim süreci içerisinde, öğretmenin sadece bilgilerin sunucusu ve fikirlerin açıklayıcısı konumda olması, görselleştirme yaklaşımının öğrenciler tarafından kabul görmesinde yeterli olmayabilir. Öğrencilerde görselleştirme yaklaşımına yatkınlığın oluşumunu kolaylaştırmak için öğretmen öğrencilere mevcut analitik bilgilerinin yetersiz olduğunu hissettirecek etkinlikler sağlamalı ve bilimsel düşünceye sahip olmaları hususunda yardımcı olmalıdır. Öğretmenler, öğrencilerin mevcut bilgilerinin yetersizliğini ortaya koyabilecek öğretim etkinliklerini kullanarak öğrencilerde görselleştirme yaklaşımı ile öğrenmenin daha kolay gerçekleşebildiğini gösterecek yaklaşımlar geliştirebilirler.

Öğrencilerde, kompleks sayılar konusu ile ilgili olarak, görselleştirme yaklaşımının, geleneksel yönteme oranla, etkinliğinin incelenmesi amacı ile gerçekleştirilen bu çalışmadan elde edilen sonuçların, kavramsal düzeyde öğrenmenin gerçekleştirilebilmesi amacına yönelik olarak yapılan çalışmalarda faydalı olabileceği söylemek mümkündür. Ayrıca, bu çalışmadan elde edilen bulguların, öğretmenlerin kendi bilgi ve anlayışlarını gözden geçirmelerinde ve geliştirmelerinde onlara gerekli bilgi ve fikirleri sağlayacağı düşünülebilir.

Buna göre aşağıdaki önerilerde bulunulabilir:

Görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin bu çalışmadaki konu veya farklı konuları anlamalarına olan etkilerini tespit etmeye yönelik benzer çalışmalar farklı seviyelerdeki öğrenciler içinde yapılmalı ve bu yöntemin etkinliği diğer öğretim yöntemleriyle karşılaştırılabilir.

Kompleks sayılar konusu veya başka konuların öğretiminde animasyon yada Mathematica veya MathWise Modül gibi bilgisayar yazılım programları kullanılarak görselleştirme yaklaşımının etkinliği araştırılabilir.

Kompleks sayılar konusunun öğretimi sürecinde öğrencilerin duyuşsal düzeylerinin daha detaylı irdelenebilmesi amacıyla özel bir kompleks sayılara yönelik tutum ölçeği geliştirilerek bu alanla ilgili tutumlar incelenebilir.

Görselleştirme yaklaşımının kompleks analiz dersi içeriğinde yer alan analitik fonksiyonlar, elementer fonksiyonlar, dönüşümler, kompleks integral ve analitik devam gibi konuların öğretimindeki etkinliği araştırılabilir.

Bu bağlamda; bu çalışmaya esas teşkil eden kompleks sayılar konusuna uygulanan görselleştirme yaklaşımının, kompleks analiz ders müfredatında yer alan en önemli konulardan biri olan kompleks fonksiyonlara uygulanabilirliği ile ilgili bir etkinlik EK 5'te sunulmuştur. Bu etkinlikte; özellikle e^z üstel fonksiyonu üzerine odaklanılmıştır. Ayrıca; kompleks türevlenebilme ile kompleks analiz dersinde çok özel bir yere sahip olan konform dönüşüm arasındaki ilişki üzeride durulmuştur.

Görselleştirme yaklaşımının etkisinin yetersiz kaldığı $\Re^4$ uzayında, kompleks sayılarla ilgili temel özellikleri incelemede fraktal geometriden yaralanılarak yeni çalışmalar ortaya konabilir. Bu bağlamda; $\Re^3$ ve özellikle $\Re^4$ uzaylarında kompleks sayılar ve kuaterniyon olarak adlandırılan genelleştirilmiş kompleks sayılarla ilgili bazı temel özellikler EK 6'da sunulmuştur.

KAYNAKLAR

Aksu, M., 1991. Matematik Öğretiminin Amaç ve İlkeleri, Matematik Öğretimi, Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayınları, 2-40, Eskişehir.

Altun, M., 2001. Matematik Öğretimi, 9.Baskı, Erkam Matbaası, 1-94, Ankara.

Anderson, L.M., 1990. Cognitive psychology and its implications, (Üçüncü Baskı), New York: Freeman

Ardahan, H., 2001. Sıfır faktöriyel, üçgensel sayılar ve kambinasyon arasındaki bağıntılar, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 9, 37-42.

Artigue, M., 1999. The teaching and learning of mathematics at the university level: Crucial questions for contemporary research in education, Notices of the American Matematical Society, 46 (11), 1377-1385.

Ashcraft, M., 1989. Human memory and cognition, Glenview, IL: Scott, Foresman

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. and Schwingendorf, K.E., 1997. The development of students'graphical understanding of the derivative, The Journal of Mathematical Behaviour, 16 (4), 399-431.

Baki, A., 1996. Matematik Öğretiminde bilgisayar her şey midir?, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 12, 135-143.

Baki,A.ve Bell,A.,1997. Ortaöğretim Matematik Öğretimi, YÖK/Dünya Bankası MEGP, Bilkent

Baki, A., 2001. Bilişim teknolojisi ışığı altında matematik eğitiminin değerlendirilmesi, http://yayim.meb.gov.tr/yayimlar/149/baki.htm

Başkan, T., 1996. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, 2.Baskı, Uludağ Üniversitesi, Bursa

Barbeu, E., 1988. Which method is best?, Mathematics Teacher, 81, 87-90.

Barwise, J. and Etchemendy, J., 1991. Visual information and valid reasoning. In W. Zimmermann and S.Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, 9-24, Mathematical Association of America, Washington DC.

Baykul, Y., 1997. İlköğretimde Matematik Öğretimi, Elit Yayıncılık, 5-30, Ankara.

Ben Chaim, D.,Lapan, G. and Houang, R., 1989. The role of visualization in the middle school mathematics cirriculum, Focus on Learning Problems in Mathematics, 11 (1), 49-59.

Bennett, A., 1988. Visual thinking and number relationships. Mathematics Teacher, 81, 167-172.

Booth, R.D.L. and Thomas, M.O.J., 2000. Visualization in mathematics learning: Arithmetic problem-solving and student difficulties, Journal of Mathematical Behaviour, 18 (2), 169-190.

Brown,S., 1969. Signed numbers: A"product" of misconceptions, Mathematics Teacher, 62, 183-195.

Burton, D., 1988. The History of Mathematics, Dubuque , Iowa: W.C. Brown

Cell, J., 1950. Imaginary numbers, Mathematics Teacher, 43, 394-396.

Churchill, R.V., 1989. Karmaşık Değişkenler ve Uygulamalar, Çev. Kaya, A., Milli Eğitim Bakanlığı Yayınları Öğretmen Kitapları Dizisi:14, İstanbul.

Clements,M. and Campo, G.,1989. Linking verbal Knowledge, Visual images and episodes for mathematical learning, Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 25-33.

Consortium for Foundation Mathematics, 2001, Mathematics in Action:Algebraic Graphical and Trigonometric Problems, Addison Wesley, Boston, MA.
Cunningham, S.,1991. The visualization environment for mathematics education, In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, 67-76, Mathematical Association of America, Washington DC.
Cuoco, A., 1997. Constructing the complex numbers, International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2 (2), 155-186.
Devlin, K., 1988. Mathematics: The New Golden Age, London: Penguin Books
Dirks, M., 1980. Say it with pictures, Arithmetic Teacher, 28 (3), 10-12.
Doğruöz, P., 1998. Effect of Science Process Skill Oriented Lesson on Understanding of Fluid Force Concepts, Master Thesis, METU, Ankara.
Dönmez, A., 1985. Karmaşık fonksiyonlar kuramı, Dicle Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, Yayın No:10, Diyarbakır
Duatepe, A. ve Çilesiz, Ş., 1999. Matematik tutum ölçeği geliştirilmesi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 16-17, 45-52.
Dugopolski, M., 2002. Precalculus Functions and Graphs, Addison Wesley. Boston, MA.
Dufour-Janvier, B., Bednarz, N. and Belanger, M., 1987. Pedagogical considerations concerning the problem of representation, In Claude Janvier (Ed.), Problems in representation in the teaching and learning of mathematics, 109-122, Hillsdale, N.J.: Erlbaum.
Durmuş, S., 2001. Matematik eğitiminde oluşturmacı yaklaşımlar, Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri, 1, 93-107.
Eisenberg, T. and Dreyfus, T., 1986. On visual versus analytical thinking in mathematics. In C. Hoyles, R.noss and R. Sutherland (Eds.), Proceedings of the Tenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 153-158, Instute of Education, London, U.K.
Eisenberg, T. and Dreyfus, T., 1991. On the reluctance to visualize in mathematics, In W. Zimmermann and S. Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, 25-38, Mathematical Association of America, Washington DC., America.
Ergün, M. ve Özdaş, A., 1997. Öğretim İlke ve Yöntemleri, 19-24, İstanbul
Ersoy, Y., Kaya, R., Aksu, M., Tezer, C., Demirbaş, M. ve Özdeş, A., 1991. Matematik Öğretimi, Anadolu Ünv., Açık Öğretim Fak. Yay. No. 113, 332-333, Eskişehir.
Fennena, E., 1972. Models and mathematics, Arithmetic Teacher, 19, 635-640.
Fidan, N., 1985. Okulda Öğrenme ve Öğretme: Kavramlar, İlkeler, yöntemler, Alkım Yayıncılık, 30-93, Ankara
Fischbein, E., 1987. Intuition in Sciences and Mathematics: An educational approach, D.Riedel Publ. Comp., Dordrecht.
Gamov, G., 1961. One, two, three ... infinity, New York: Viking Press
Gardner, M., 1979. Mathematical games: The imaginableness of imaginary numbers, Scientific American, 18-24.
Glas, E., 1998. Fallibilism and the use history in mathematics education, Science and Education, 7 (4), 361-379.
Goldenberg, E., 1987. Believing is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs, In J.Bergeron, N. Herscovics and C. Kieran (Eds.), Proceedings of the

Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 197-203, University of Montreal, Montreal, Canada.

Goldin, G., 1987. Cognitive representational systems for mathematical problem solving. In Claude Janvier (Ed.), Problems in representation in the teaching and learning of mathematics, 125-145, Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Hacısalihoğlu, H. H., 1988. Açılış Konuşması, Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu, 20-22 Mayıs, Erzurum

Hadamard, J., 1945. The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Halmos, P., 1987. I want to be a mathematician, Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Hamersma, P.S., 2002. Effects of using a computer-based visualization tool to learn complex numbers in trigonometry, The dissertation, Office of Graduate Studies University of South Florida Tampa, Florida.

Harel,G., 1989. Learning and Teaching Linear Algebra : Diffuculties and an Alternative Approach to Visualizing Concepts and Processes , Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(2) , 139-148.

Huber, B., 1993. The math that counts, Forbes, 151 (12), 116.

Isaacson, J., 1999. The effect of static graphic, animated graphic and interactive animated graphic presentations onacquisition of the tangent concept, Unpublished Doctoral Dissertion, University of Florida, Gainesville, Florida.

Işık, A. ve Bekdemir, M., 1998. Matematiğin doğası ve eğitimdeki yeri, Çağdaş Eğitim Dergisi, 245, 19-22.

Işık, A., 2002. Matematik dünyasında değişimler, Kastamonu Eğitim Dergisi, 10 (2), 365-368.

Jencks, S. and Peck, D., 1972. Mental imaginery in mathematics, Arithmetic Teacher, 19, 642-644.

Kaljumagi, E., 1992. A teacher's exploration of personal computer animation for the mathematics classroom, Journal of Computers in Mathemathics and Science Teaching, 11, 359-376.

Kaplan,A. and İpek, A.S., 2002. Matematik öğretmenliği adaylarının öğretmenlik mesleğine yönelik tutumlarının incelenmesi, Eğitim ve Bilim, Cilt 27, Sayı 125, 69-73

Kaput, J., 1989. Linking represantions in the symbol systems of algebra, In S.Wagner and C. Kieran (Eds.), Resarch Issues in the Learning and Teaching of Algebra, 167-194, NCTM: Reston, Virginia.

Karasar, N., 1998. Bilimsel Araştırma Yöntemi, 8. Baskı, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.

Kerslake, D., 1977. The understanding of graphs, Mathematics in School, 6, 22-25.

Kleiner, I., 1998. Thinking the Unthinkable : The Story of Complex Numbers (with a Moral, Mathematics Teacher, 81, 583- 592

Konyalıoğlu,A.C., İpek, A.S. and Işık, A., 2003. On the teaching linear algebra at the University Level: The role of visualization in the teaching vector spaces, Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D:Research in Mathematical Education, 7 (1), 59-67.

Lambert, G., 1979. A "complex" proof for a geometric construction of a regular pantagon, Mathematics Teacher, 81, 65-66.

Larson, R., Hostetler, R., and Edwards, B., 2001. College algebra a graphing approach, Houghton Mifflin. Boston, MA.

Lean,G. and Clements, M., 1981. Spatial ability, visual imagery and mathematical performance, Educational Studies in Mathematics, 12, 267-299.

Lipp, A., 1994. In the classroom: Visualizing mathematics, Multimedia Schools, 10750479, Sept./Oct., 1 (2).

Marsden, J. E., Buchner, M.,Hoffman,M. and Risk, C., 1973. Basic Complex Analysis, W. H. Fremann, San Francisco.

Musser, G., 1978. Line reflections in the complex plane - - A billiards player's delight, Mathematics Teacher, 71, 60-64.

National Research of Teachers Mathematics, 2000. Principles and standards for school mathematics, Reston, Author.

National Research Council, 1990. Reshaping school mathematics: A philosophy and framework for curriculum, National Academy Pres, Washington DC, America.

Needham, T.,1997. Visual Complex Analysis, Clarendon Press: Oxford

Nemirovsky, R. And Noble, T., 1997. On mathematical visualization and the place where we live, Educational Studies in Mathematics, 33, 99-131.

Newburgh, R., 1996. Real, imaginary, and complex numbers: Where does the physics hide?, The Physics Teacher, Vol. 34, 23-25.

Ocak, R., 2001. Kompleks Analiz, 3.Baskı, Atatürk Ünv., K.K.Eğitim Fakültesi Yayınları, No.31, 3-4, Erzurum.

Osborne, A., 1973. Perceptual burdens in learning mathematics, Arithmetic Teacher, 20, 626-629.

Oxley, A. and Raj, L., 1996. On the teaching of complex numbers, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27, 123-129.

Palais, R.S., 1999. The visualization of mathematics: Towards a mathematical exploratorium, Notices of the AMS, 46, 6, 647-658.

Pitcher, N., 1998. Educational software in mathematics: developing and using a mathwise module, International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 29, 5 (Sept-Oct 1998), 109-120.

Poage, M. and Poage, E., 1977. Is one picture worth one thousand words? Arithmetic Teacher, 24, 408-414.

Polya, G., 1945. How to Solve It, Princeton, NJ: Princeton University Press.

Pressley, M., Cariglia-Bull, T., Deane, S. and Schneider, W., 1987. Short- term memory, verbal competence and age as predictors of imagery instructional effectiveness, Journal of Experimental Child Psychology, 43, 194-211.

Presmeg, N., 1986. Visualisation in high school mathemathics, For the Learning of Mathematics, 6, 42-46.

Rival, I., 1987. Picture Puzzling: Mathematicians are rediscovering the power of pictorial reasoning, The Sciences, 27, 40-46.

Rockwold, G., 2002. College algebra through modelling and visualization, 2nd Eddition, Addison Wesley, Boston, MA.

Savaş, E., 1999. Matematik Öğretimi, Kozan Ofset Matbaacılık San. ve Tic. Ltd. Şti., 2-44, Ankara.

Sawyer, W., 1943. Mathematician's Delight, London: Penguin Books

Schnotz, W., Zink, T. and Pfeiffer, M., 1995. Visualization in learning and instruction: Effect of graphic representation formats on the structure and application of knowledge, Research Report-5, Freidrich-Schiller Univesity of Jena.

Selden, J., Mason, A. and Selden, A., 1989. Can average calculus students solve nonroutine problems? The Journal of Mathematical Behaviour, 8, 45-50.

Senemoğlu, N., 2001. Gelişim, Öğrenme ve Öğretim, Kuramdan Uygulamaya (3.Baskı), Başak Matbaası, 39-568, Ankara.

Sherman, J., 1980. Mathematics, spatial visualization and related factors: Changes in girls and boys, grades 8-11, Journal of Educationa Psychology, 72, 476-482.

Sfard, A., 1994. Reification as the birth of metaphor, For the Learning of Mathematics, 14, 44-55.

Sowder, L., 1976. Criteria for concrete models, Arithmetic Teacher, 23, 468-470.

Stylianou, D. A., 2002. On the interaction of visualization and analysis: The negotiation of visual representation in expert problem solving, The Journal of Mathematical Behaviour, 21(3), 303-317.

Tall, D. and Vinner, S., 1981. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and contiunity, Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.

Tall, D. and Thomas, M., 1989. Versatile learning and the computer, Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 117-125.

Tall, D. and West, B., 1986. Graphic insight into calculus and differential equations, The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Teaching, C.U.P., 107-119.

Tall, D., 1991. Intituon and rigour: The role of visualization in the calculus, In W.Zimmermann and S.Cunningham (Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, 19, 105-119, Mathematical Association of America, Washington DC.

Thomas, D., 1992. Using computer visualization to motivate and support mathematical dialogues, Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching, 11, 265-274.

Thompson, P. and Dreyfus, T., 1988. Integers as transformation, Journal of Research in Mathematical Education, 19, 115-133.

Touger, H.,1986. Models: Help or hindrance, Arithmetic Teacher, 33, 36-37.

Uluçay, C., 1978. Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yüzeyleri, Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara

Usiskin, Z., 1983. Enrichment activities for geometry, Mathematics Teacher, v76,n4, 264-266

Van de Wella, J.E., 1989. Elemantary School Mathemathics, Virginia Commonwealth Unv., 7-9.

Varış, F., 1978. Eğitimde Program Geliştirme, Ankara Üniversitesi Basımevi (3. Baskı), 200-208, Ankara.

Vinner, S., 1989. The avoidance of visual considerations in calculus students, Focus on Learning Problems in Mathematics, 11, 149-156.

Vinner, S. and Hershkowitz, R., 1980. Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concept, In R. Karplus (Ed.), Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 177-184, University of California, Berkeley.

Walton, K. D.,1992. Imagine that! A history of imaginary numbers. Historical Notes: Through the Ages. (A collection of all the Historical Notes articles that have appeared in Consortium through issue number 42, Summer) , 78-81.

Werner, M., 1973. The case of a more universal number-line model of subtraction, Arithmetic Teacher, 20(1), 61-64.

Willis, G. and Fuson, K., 1988. Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems, Journal of Educational Psychology, 80, 192-201.

Zazkis, R., Dubinsky, E. and Dautermann, J., 1996. Coordinating visual and analytic strategies: A study of students' understanding of the group D4, Journal for Research in Mathematics Education, 27, 435-457.

Zimmermann, W. and Cunningham, S., 1991. Editor's introduction: What is mathematical visualization? In W. Zimmermann and S.Cunningham(Eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, 1-8, Mathematical Association of America, Washington DC., America.

EKLER

EK 1

KOMPLEKS SAYILAR KAVRAM TESTİ

1-) Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\frac{1}{i} = -i$, $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ b) $z + \bar{z} = 2.\mathrm{Re}(z)$, $z - \bar{z} = 2i.\mathrm{Im}(z)$

2-) a) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösteriniz.

b) $|z_1 + z_2 + ... + z_n| \le |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$ üçgen eşitsizliğinde eşitlik durumu hangi durumda gerçeklenir.

3-) Çember ve Elips denklemlerini C de kurunuz (C Kompleks sayılar cümlesidir).

4-) z_1 ve z_2 kompleks sayıları için;

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

eşitliğini gösteriniz.

5-) z modulü 1, argümenti $\frac{2\pi}{5}$ olan bir kompleks sayı ise z, z^2 ve z^5 değerlerini yazınız.

6-) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ formulünü kullanarak z^{-1} i geometrik olarak bulunuz.

7-) z_1 , z_2 , z_3 ;

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$$

eşitliğini sağlayan üç kompleks sayı ise;

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$$

olduğunu gösteriniz.

8-) w, birimin 1'den farklı bir n.kökü ise;

$$1 + w + w^2 + \ldots + w^{n-1} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

9-) a) $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2.\cos\theta$, $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i.\sin\theta$ olduğunu gösteriniz.

b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

EK 2

MATEMATİK TUTUM ÖLÇEĞİ

Bu ölçek sizin matematik dersiyle ilgili düşüncelerinizi öğrenmek için hazırlanmıştır. Cümlelerden hiçbirinin kesin bir cevabı yoktur. Her cümleyle ilgili görüş, kişiden kişiye değişebilir. Bunun için vereceğiniz cevaplar kendi görüşünü yansıtmalıdır.

Her cümleyle ilgili görüş belirtirken önce cümleyi dikkatle okuyunuz, sonra cümlede belirtilen düşüncenin, sizin düşünce ve duygunuza ne derece uygun olduğuna karar veriniz. Cümlede belirtilen düşünceye; Hiç katılmıyorsanız **A** seçeneğini, Katılmıyorsanız **B** seçeneğini, Kararsız iseniz **C** seçeneğini, Kısmen katılıyorsanız **D** seçeneğini, Tamamen katılıyorsanız **E** seçeneğini işaretleyiniz.

	A	B	C	D	E
1. Matematik beni korkutmuyor					
2. Matematik sevdiğim dersler arasındadır					
3. Matematik çalışmayı isterim					
4. Matematiği hayatım boyunca bir çok yerde kullanacağım					
5. Matematik çalışırken gergin olurum					
6. Yeni bir matematik problemiyle uğraşırken kendimi rahat hissederim					
7. Matematiği anlamaya çalışmak zaman kaybıdır					
8. Matematik çalışmanın teşvik edici hiçbir yanı yok					
9. Matematik öğrenmek zahmete değer					
10. Matematik problemlerini çözmeye çalışmak bana çekici gelmiyor					
11. Matematik çalışırken sıra dışı bir soruyla karşılaşınca yanıt bulana kadar uğraşırım					
12.Bu derste öğrendiklerimi günlük hayatta kullanacağımı					

sanmıyorum					
13.Bazı insanların matematikten nasıl bu kadar hoşlandıklarını anlamıyorum					
14.Meslek hayatımda matematiği kullanacağımı düşünmüyorum.					
15. Zorunlu olmasam matematik dersine girmezdim					
16. Matematik çalışmaya başlayınca bırakmak zor gelir					
17. Matematiği iyi bilmek çalışma olanaklarını arttıracaktır					
18. Matematik derslerinde iyi notlar alabilirim					
19. Matematik çalışırken kaygılı olmam					
20. Matematiksel düşünme yeteneğine sahip değilim					
21. Karşılaştığım problemleri matematik kullanarak çözmek hoşuma gider					
22. Matematiği anlayamayacağımı düşünüyorum					
23. Matematik bir bilim değil yalnızca bir araçtır					
24.Derste çözümü yarım kalan matematik sorularıyla uğraşmak bana zevk verir					
25.Matematik derslerinde başarılı olmak benim için önemlidir					
26. Matematik çalışmak gerektiğinde kendime güvenmem					
27. Matematik alanında iddialıyım					
28.Başkalarıyla matematik hakkında konuşmaktan hoşlanmam					
29. Matematik dersinden zevk alıyorum					
30. Matematiğin adını bile duymak beni huzursuz eder					
31. Bundan başka matematik dersi almak istemiyorum					
32. Diğer dersler bana matematikten daha önemli gelir					
33. Matematik en çok korktuğum derslerden biridir					
34. Matematik kafamı karıştırır					
35. Matematik sıkıcıdır					

36. Bu dersin mesleğime hiçbir katkısı yoktur					
37. Matematik çalışırken kendimi çok çaresiz hissediyorum					
38.Keşke diğer derlerde matematik kullanmam gerekmeseydi					

EK 3

BİLİMSEL İŞLEM BECERİ TESTİ

Bu test özellikle, karşınıza çıkabilecek karmaşık gibi görünen problemleri analiz edebilme kabiliyetinizi ortaya çıkarabilmesi açısından çok faydalıdır. Bu test içinde problemdeki değişkenleri tanımlayabilme, hipotez kurma ve tanımlama, işlemsel açıklamalar getirebilme, problemin çözümü için gerekli incelemelerin tasarlanması, grafik çizme ve verileri yorumlayabilme yeteneklerini ölçebilen sorular bulunmaktadır. Her soruyu okuduktan sonra kendinizce uygun seçeneği işaretleyiniz.

Bu testin orijinali James R. Okey, Kevin C. Wise ve Joseph C. Burns tarafından geliştirilmiştir. Türkçeye çevirisi ve uyarlaması ise Prof. Dr. İlker Özkan, Prof. Dr. Petek Aşkar ve Prof. Dr. Ömer Geban tarafından yapılmıştır.

1. Bir basketbol antrenörü, oyuncularının güçsüz olmasından dolayı maçları kaybettiklerini düşünmektedirler. Güçlerini etkileyen faktörleri araştırmaya karar verir. Antrenör, oyuncuların gücünü etkileyip etkilemediğini ölçmek için aşağıdaki değişkenlerden hangisini incelemelidir?

a. Her oyuncunun almış olduğu günlük vitamin miktarını.
b. Günlük ağırlık kaldırma çalışmalarının miktarını.
c. Günlük antreman süresini.
d. Yukarıdakilerin hepsini.

2. Arabaların verimliliğini inceleyen bir araştırma yapılmaktadır. Sınanan hipotez, benzine katılan bir katkı maddesinin arabaların verimliliğini artırdığı yolundadır. Aynı tip beş arabaya aynı miktarda benzin fakat farklı miktarlarda katkı maddesi konur. Arabalar benzinleri bitinceye kadar aynı yol üzerinde giderler. Daha sonra her arabanın aldığı mesafe kaydedilir. Bu çalışmada arabaların verimliliği nasıl ölçülür?

a. Arabaların benzinleri bitinceye kadar geçen süre ile.

b. Her arabanın gittiği mesafe ile.

c. Kullanılan benzin miktarı ile.

d. Kullanılan katkı maddesinin miktarı ile.

3. Bir araba üreticisi daha ekonomik arabalar yapmak istemektedir. Araştırmacılar arabanın litre başına alabileceği mesafeyi etkileyebilecek değişkenleri araştırmaktadırlar. Aşağıdaki değişkenlerden hangisi arabanın litre başına alabileceği mesafeyi etkileyebilir?

a. Arabanın ağırlığı.

b. Motorun hacmi.

c. Arabanın rengi.

d. a ve b.

4. Ali bey evini ısıtmak için komşularından daha çok para ödemesinin sebeplerini merak etmektedir. Isınma giderlerini etkileyen faktörleri araştırmak için bir hipotez kurar. Aşağıdakilerden hangisi bu araştırmada sınanmaya uygun bir hipotez değildir?

a. Evin çevresindeki ağaç sayısı ne kadar az ise ısınma gideri o kadar fazladır.

b. Evde ne kadar çok pencere ve kapı varsa ısınma gideri de o kadar fazla olur.

c. Büyük evlerin ısınma giderleri fazladır.

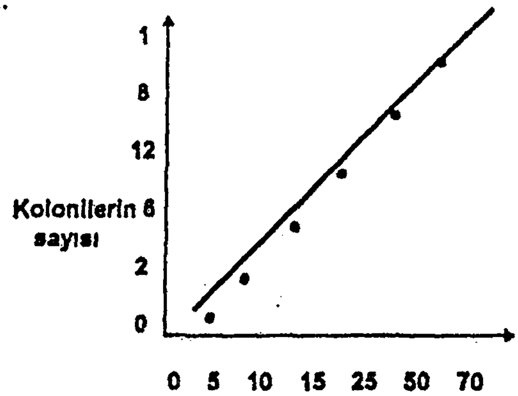
d. Isınma giderleri arttıkça ailenin daha ucuza ısınma yolları araması gerekir.

5. Fen sınıfından bir öğrenci sıcaklığın bakterilerin gelişimi üzerindeki etkilerini araştırmaktadır. Yaptığı deney sonucunda, öğrenci aşağıdaki verileri elde etmiştir:

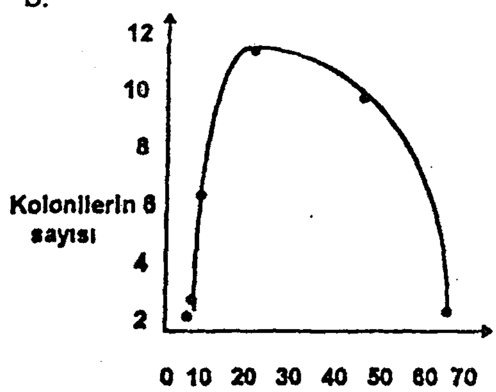
Deney odasının sıcaklığı (^{o}C)	Bakteri kolonilerinin sayısı
5	0
10	2
15	6
25	12
50	8
70	1

Aşağıdaki grafiklerden hangisi bu verileri doğru olarak göstermektedir?

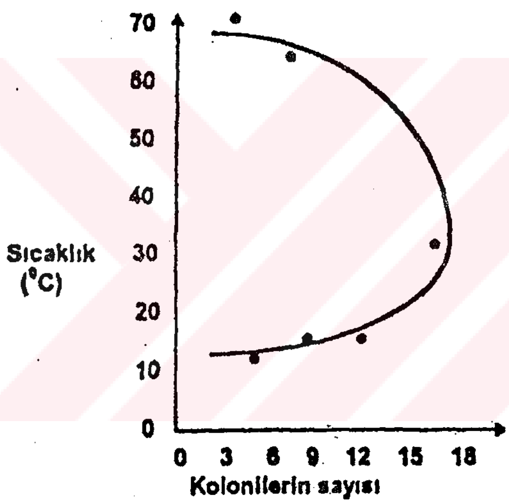
a.



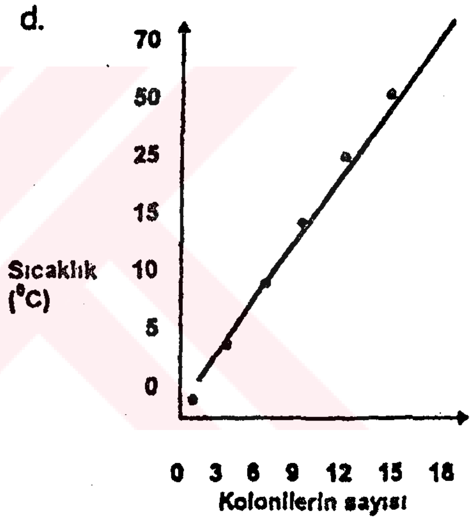
b.



c.



d.



6. Bir polis şefi arabaların hızının azaltılması ile uğraşmaktadır. Arabaların hızını etkileyebilecek bazı faktörler olduğunu düşünmektedir. Sürücülerin ne kadar hızlı araba kullandıklarını aşağıdaki hipotezlerin hangisi ile sınayabilir?

a. Daha genç sürücülerin daha hızlı araba kullanma olasılığı yüksektir.
b. Kaza yapan arabalar ne kadar büyükse, kaza sayısı o kadar az olur.
c. Yollarda ne kadar çok polis ekibi olursa, kaza sayısı o kadar az olur.
d. Arabalar eskidikçe kaza yapma olasılıkları artar.

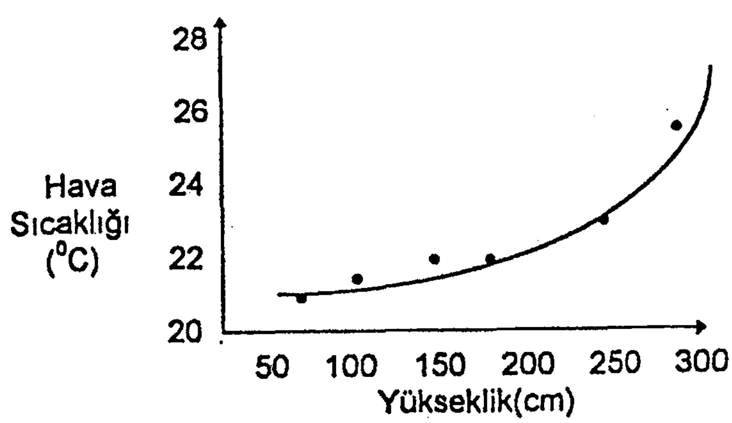
7. Bir fen sınıfında, tekerlek yüzeyi genişliğinin tekerleğin daha kolay yuvarlanması üzerine etkisi araştırılmaktadır. Bir oyuncak arabaya geniş yüzeyli tekerlek takılır, önce bir rampadan (eğik düzlem) aşağı bırakılır ve daha sonra düz bir zemin üzerinde gitmesi sağlanır. Deney, aynı arabaya daha dar yüzeyli tekerlekler takılarak tekrarlanır. Hangi tip tekerleğin daha kolay yuvarlandığı nasıl ölçülür?

a. Her deneyde arabanın gittiği toplam mesafe ölçülür.
b. Rampanın (eğik düzlem) eğim açısı ölçülür.
c. Her iki deneyde kullanılan tekerlek tiplerinin yüzey genişlikleri ölçülür.
d. Her iki deneyin sonunda arabanın ağırlıkları ölçülür.

8. Bir çiftçi daha çok mısır üretebilmenin yollarını aramaktadır. Mısırların miktarını etkileyen faktörleri araştırmayı tasarlar. Bu amaçla aşağıdaki hipotezlerden hangisini sınayabilir?

a. Tarlaya ne kadar çok gübre atılırsa, o kadar çok mısır elde edilir.
b. Ne kadar çok mısır elde edilirse, kar o kadar fazla olur.
c. Yağmur ne kadar çok yağarsa, gübrenin etkisi o kadar çok olur.
d. Mısır üretimi arttıkça, üretim maliyeti de artar.

9. Bir odanın tabandan itibaren değişik yüzeylerdeki sıcaklıklarla ilgili bir çalışma yapılmış ve elde edilen veriler aşağıdaki grafikte gösterilmiştir. Değişkenler arasındaki ilişki nedir?



a. Yükseklik arttıkça sıcaklık azalır. **c.** Sıcaklık arttıkça yükseklik azalır.

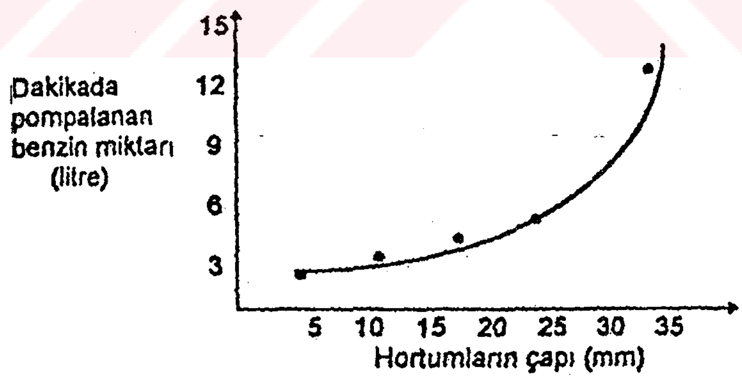
b. Yükseklik arttıkça sıcaklık artar.

d. Yükseklik ile sıcaklık arasında bir ilişki yoktur.

10. Ahmet, basketbol topunun içindeki hava arttıkça, topun daha yükseğe sıçradığını düşünmektedir. Bu hipotezi araştırmak için birkaç basketbol topu alır ve içlerine farklı miktarda hava pompalar. Ahmet hipotezini nasıl sınamalıdır?

a. Topları aynı yükseklikten fakat değişik hızlarla yere vurur.
b. İçlerinde farklı miktarlarda hava olan topları, aynı yükseklikten yere bırakır.
c. İçlerinde aynı miktarlarda hava olan topları, zeminle farklı açılardan yere vurur.
d. İçlerinde aynı miktarlarda hava olan topları, farklı yüksekliklerden yere bırakır.

11. Bir tankerden benzin almak için farklı genişlikte 5 hortum kullanılmaktadır. Her hortum için aynı pompa kullanılır. Yapılan çalışma sonunda elde edilen bulgular aşağıdaki grafikte gösterilmiştir.



Aşağıdakilerden hangisi değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklamaktadır?

a. Hortumun çapı genişledikçe dakikada pompalanan benzin miktarı da artar.
b. Dakikada pompalanan benzin miktarı arttıkça, daha fazla zaman gerekir.
c. Hortumun çapı küçüldükçe dakikada pompalanan benzin miktarı da artar.
d. Pompalanan benzin miktarı azaldıkça, hortumun çapı genişler.

Önce aşağıdaki açıklamayı okuyunuz ve daha sonra **12, 13, 14** ve **15** inci soruları açıklama kısmından sonra verilen paragrafı okuyarak cevaplayınız.

Açıklama: Bir araştırmada, bağımlı değişken bir takım faktörlere bağımlı olarak gelişim gösteren değişkendir. Bağımsız değişkenler ise bağımlı değişkene etki eden faktörlerdir. Örneğin araştırmanın amacına göre kimya başarısı bağımlı bir değişken olarak alınabilir ve ona etki edebilecek faktör veya faktörler de bağımsız değişkenler olurlar.

Ayşe, güneşin karaları ve denizleri aynı derecede ısıtıp ısıtmadığını merak etmektedir. Bir araştırma yapmaya karar verir ve aynı büyüklükte iki kova alır bunlardan birini toprakla, diğerini de su ile doldurur ve aynı miktarda güneş ısısı alacak şekilde bir yere koyar. 08.00-18.00 saatleri arasında her saat başı sıcaklıklarını ölçer.

12. Araştırmada aşağıdaki hipotezlerden hangisi sınanmıştır?

a. Toprak ve su ne kadar çok güneş ışığı alırlarsa, o kadar ısınırlar.
b. Toprak ve su güneş altında ne kadar fazla kalırlarsa, o kadar çok ısınırlar.
c. Güneş farklı maddeleri farklı derecede ısıtır.
d. Günün farklı saatlerinde güneşin ısısı da farklı olur.

13. Araştırmada aşağıdaki değişkenlerden hangisi kontrol edilmiştir?

a. Kovadaki suyun cinsi.
b. Toprak ve suyun sıcaklığı.
c. Kovalara koyulan maddenin türü.
d. Her bir kovanın güneş altında kalma süresi.

14. Araştırmada bağımlı değişken hangisidir?

a. Kovadaki suyun cinsi.
b. Toprak ve suyun sıcaklığı.

c. Kovalara koyulan maddelerin türü.

d. Her bir kovanın güneş altında kalma süresi.

15. Araştırmada bağımsız değişken hangisidir?

a. Kovadaki suyun cinsi.

b. Toprak ve suyun sıcaklığı.

c. Kovalara koyulan maddelerin türü.

d. Her bir kovanın güneş altında kalma süresi.

16. Can, yedi ayrı bahçedeki çimenleri biçmektedir. Çim biçme makinesiyle her hafta bir bahçedeki çimenleri biçer. Çimenlerin boyu bahçelere göre farklı olup bazılarında uzun bazılarında kısadır. Çimenlerin boyları ile ilgili hipotezler kurmaya başlar. Aşağıdakilerden hangisi sınanmaya uygun bir hipotezdir?

a. Hava sıcakken çim biçmek zordur.

b. Bahçeye atılan gübrenin miktarı önemlidir.

c. Daha çok sulanan bahçedeki çimenler daha uzun olur.

d. Bahçe ne kadar engebeliyse çimenleri kesmekte o kadar zor olur.

17, 18, 19 ve **20** nci soruları aşağıda verilen paragrafı okuyarak cevaplayınız.

Murat, suyun sıcaklığının, su içinde çözünebilecek şeker miktarını etkileyip etkilemediğini araştırmak ister. Birbirinin aynı dört bardağın her birine 50 şer mililitre su koyar. Bardaklardan birisine 0oC de, diğerlerine de sırayla 50 ^{o}C, 75 ^{o}C ve 95 ^{o}C sıcaklıkta su koyar. Daha sonra her bir bardağa çözünebileceği kadar şeker koyar ve karıştırır.

17. Bu araştırmada sınanan hipotez hangisidir?

a. Şeker ne kadar çok suda karıştırılırsa o kadar çok çözünür.

b. Ne kadar çok şeker çözünürse, su o kadar tatlı olur.

c. Sıcaklık ne kadar yüksek olursa, çözünen şekerin miktarı o kadar fazla olur.

d. Kullanılan suyun miktarı arttıkça sıcaklığı da artar.

18. Bu araştırmada kontrol edilebilen değişken hangisidir?

a. Her bardakta çözünen şeker miktarı.
c. Bardakların sayısı.
b. Her bardağa konulan su miktarı.
d. Suyun sıcaklığı.

19. Araştırmanın bağımlı değişkeni hangisidir?

a. Her bardakta çözünen şeker miktarı.
c. Bardakların sayısı.
b. Her bardağa konulan su miktarı.
d. Suyun sıcaklığı.

20. Araştırmadaki bağımsız değişken hangisidir?

a. Her bardakta çözünen şeker miktarı.
c. Bardakların sayısı.
b. Her bardağa konulan su miktarı.
d. Suyun sıcaklığı.

21. Bir bahçıvan domates üretimini artırmak istemektedir. Değişik birkaç alana domates tohumu eker. Hipotezi, tohumlar ne kadar çok sulanırsa, o kadar çabuk filizleneceğidir. Bu hipotezi nasıl sınar?

a. Farklı miktarlarda sulanan tohumların kaç günde filizleneceğine bakar.

b. Her sulamadan bir gün sonra domates bitkisinin boyunu ölçer.

c. Farklı alanlardaki bitkilere verilen su miktarını ölçer.

d. Her alana ektiği tohum sayısına bakar.

22. Bir bahçıvan tarlasındaki kabaklarda yaprak bitleri görür. Bu bitleri yok etmek gereklidir. Kardeşi "Kling" adlı tozun en iyi böcek ilacı olduğunu söyler. Tarım uzmanları ise "Acar" adlı spreyin daha etkili olduğunu söylemektedir. Bahçıvan altı tane kabak bitkisi seçer. Üç tanesini tozla, Üç tanesini de spreyle ilaçlar. Bir hafta sonra her bitkinin üzerinde kalan canlı bitleri sayar. Bu çalışmada böcek ilaçlarının etkinliği nasıl ölçülür?

a. Kullanılan toz ya da spreyin miktarı ölçülür.

b. Toz ya da spreyle ilaçlandıktan sonra bitkilerin durumları tespit edilir.

c. Her fidede oluşan kabağın ağırlığı ölçülür.

d. Bitkiler üzerinde kalan bitler sayılır.

23. Ebru, bir alevin belli bir zaman süresi içinde meydana getireceği ısı enerjisi miktarını ölçmek ister. Bir kabın içine bir litre soğuk su koyar ve 10 dakika süreyle ısıtır. Ebru, alevin meydana getirdiği ısı enerjisini nasıl ölçer?

a. 10 dakika sonra suyun sıcaklığında meydana gelen değişmeyi kaydeder.

b. 10 dakika sonra suyun hacminde meydana gelen değişmeyi ölçer.

c. 10 dakika sonra alevin sıcaklığını ölçer.

d. Bir litre suyun kaynaması için geçen zamanı ölçer.

24. Ahmet, buz parçacıklarının erime süresini etkileyen faktörleri merak etmektedir. Buz parçalarının büyüklüğü, odanın sıcaklığı ve buz parçacıklarının şekli gibi faktörlerin erime süresini etkileyebileceğini düşünür. Daha sonra şu hipotezi sınamaya karar verir: Buz parçalarının şekli erime süresini etkiler. Ahmet bu hipotezi sınamak için aşağıdaki deney tasarımlarından hangisini uygulamalıdır?

a. Her biri farklı şekil ve ağırlıkta beş buz parçası alınır. Bunlar aynı sıcaklıkta benzer beş kabın içine ayrı ayrı konur ve erime süreleri izlenir.

b. Her biri aynı şekilde fakat farklı ağırlıkta beş buz parçası alınır. Bunlar aynı sıcaklıkta benzer beş kabın içine ayrı ayrı konur ve erime süreleri izlenir.

c. Her biri aynı ağırlıkta fakat farklı şekillerde beş buz parçası alınır. Bunlar aynı sıcaklıkta benzer beş kabın içine ayrı ayrı konur ve erime süreleri izlenir.

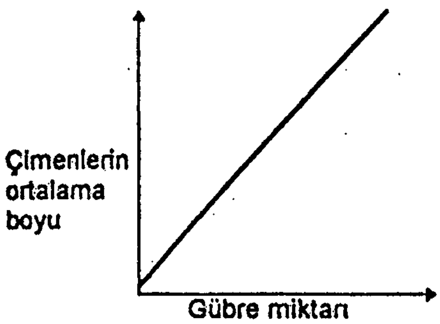
d. Her biri aynı ağırlıkta fakat farklı şekillerde beş buz parçası alınır. Bunlar farklı sıcaklıkta benzer beş kabın içine ayrı ayrı konur ve erime süreleri izlenir.

25. Bir araştırmacı yeni bir gübreyi denemektedir. Çalışmalarını aynı büyüklükte beş tarlada yapar. Her tarlaya yeni gübresinden değişik miktarlarda karıştırır. Bir ay sonra, her tarlada yetişen çimenin ortalama boyunu ölçer. Ölçüm sonuçları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

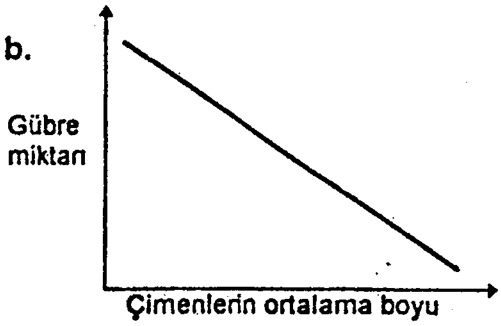
Gübre miktarı (kg)	Çimenlerin ortalama boyu (cm)
10	7
30	10
50	12
80	14
100	12

Tablodaki verilerin grafiği aşağıdakilerden hangisidir?

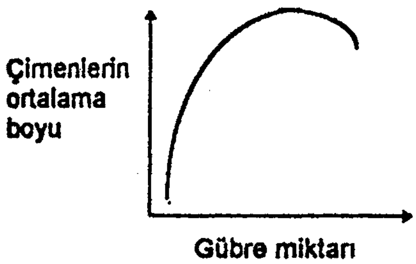
a.



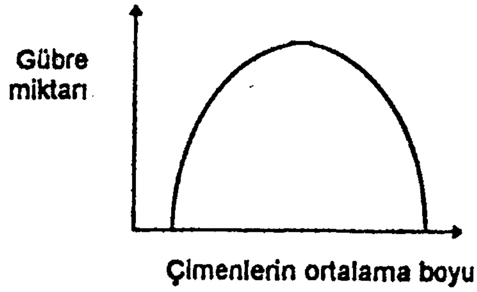
b.



c.



d.



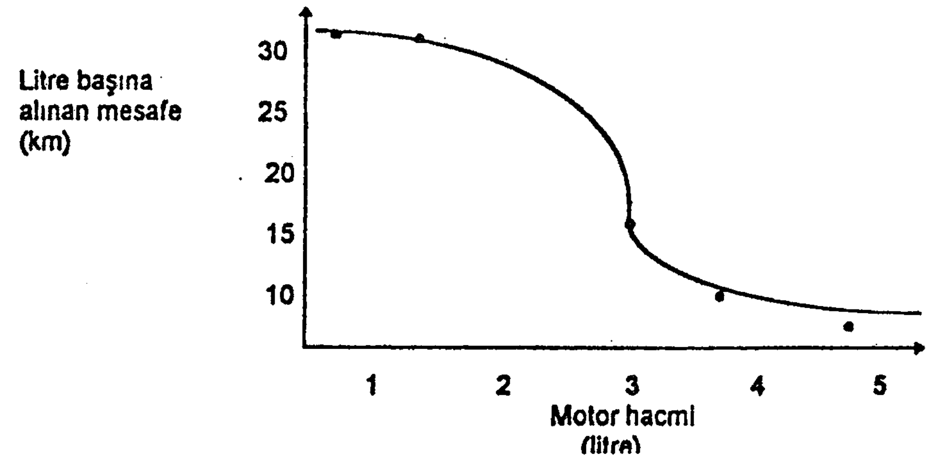
26. Bir biyolog şu hipotezi test etmek ister: Farelere ne kadar çok vitamin verilirse o kadar hızlı büyürler. Biyolog farelerin büyüme hızını nasıl ölçebilir?

a. Farelerin hızını ölçer.
b. Farelerin, günlük uyumadan durabildikleri süreyi ölçer.
c. Her gün fareleri tartar.
d. Her gün farelerin yiyeceği vitaminleri tartar.

27. Öğrenciler, şekerin suda çözünme süresini etkileyebilecek değişkenleri düşünmektedirler. Suyun sıcaklığını, şekerin ve suyun miktarlarını değişken olarak saptarlar. Öğrenciler, şekerin suda çözünme süresini aşağıdaki hipotezlerden hangisiyle sınayabilir?

a. Daha fazla şekeri çözmek için daha fazla su gereklidir.
b. Su soğudukça, şekeri çözebilmek için daha fazla karıştırmak gerekir.
c. Su ne kadar sıcaksa, o kadar çok şeker çözünecektir.
d. Su ısındıkça şeker daha uzun sürede çözünür.

28. Bir araştırma grubu, değişik hacimli motorları olan arabaların randımanlarını ölçer. Elde edilen sonuçların grafiği aşağıdaki gibidir:



Aşağıdakilerden hangisi değişkenler arasındaki ilişkiyi gösterir?

a. Motor ne kadar büyükse, bir litre benzinle gidilen mesafe de o kadar uzun olur.

b. Bir litre benzinle gidilen mesafe ne kadar az olursa, arabanın motoru o kadar küçük demektir.

c. Motor küçüldükçe, arabanın bir litre benzinle gittiği mesafe artar.

d. Bir litre benzinle gidilen mesafe ne kadar uzun olursa, arabanın motoru o kadar büyük demektir.

29, 30, 31 ve **32** nci soruları aşağıda verilen paragrafı okuyarak cevaplayınız.

Toprağa karıştırılan yaprakların domates üretimine etkisi araştırılmaktadır. Araştırmada dört büyük saksıya aynı miktarda ve tipte toprak konulmuştur. Fakat birinci saksıdaki toprağa 15 kg, ikinciye 10 kg, üçüncüye ise 5 kg çürümüş yaprak karıştırılmıştır. Dördüncü saksıdaki toprağa ise hiç çürümüş yaprak karıştırılmamıştır.

Daha sonra bu saksılara domates ekilmiştir. Bütün saksılar güneşe konmuş ve aynı miktarda sulanmıştır. Her saksıdan elde edilen domates tartılmış ve kaydedilmiştir.

29. Bu araştırmada sınanan hipotez hangisidir?

a. Bitkiler güneşten ne kadar çok ışık alırlarsa, o kadar fazla domates verirler.

b. Saksılar ne kadar büyük olursa, karıştırılan yaprak miktarı o kadar fazla olur.

c. Saksılar ne kadar çok sulanırsa, içlerindeki yapraklar o kadar çabuk çürür.

d. Toprağa ne kadar çok çürük yaprak karıştırılırsa, o kadar fazla domates elde edilir.

30. Bu araştırmada kontrol edilen değişken hangisidir?

a. Her saksıdan elde edilen domates miktarı.

b. Saksılara karıştırılan yaprak miktarı.

c. Saksılardaki toprak miktarı.

d. Çürümüş yaprak karıştırılan saksı sayısı.

31. Araştırmadaki bağımlı değişken hangisidir?

a. Her saksıdan elde edilen domates miktarı.

b. Saksılara karıştırılan yaprak miktarı.

c. Saksılardaki toprak miktarı.

d. Çürümüş yaprak karıştırılan saksı sayısı

32. Araştırmadaki bağımsız değişken hangisidir?

a. Her saksıdan elde edilen domates miktarı.

b. Saksılara karıştırılan yaprak miktarı.

c. Saksılardaki toprak miktarı.

d. Çürümüş yaprak karıştırılan saksı sayısı

33. Bir öğrenci mıknatısların kaldırma yeteneklerini araştırmaktadır. Çeşitli boylarda ve şekillerde birkaç mıknatıs alır ve her mıknatısın çektiği demir tozlarını tartar. Bu çalışmada mıknatısın kaldırma yeteneği nasıl tanımlanır?

a. Kullanılan mıknatısın büyüklüğü ile.

b. Demir tozlarını çeken mıknatısın ağırlığı ile.

c. Kullanılan mıknatısın şekli ile.

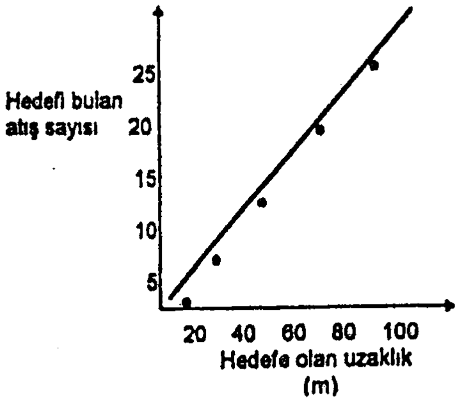
d. Çekilen demir tozlarının ağırlığı ile.

34. Bir hedefe çeşitli mesafelerden 25 er atış yapılır. Her mesafeden yapılan 25 atıştan hedefe isabet edenler aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

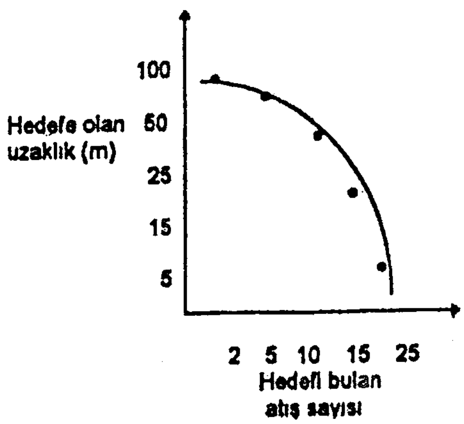
Mesafe (m)	Hedefe vuran atış sayısı
5	25
15	10
25	10
50	5
100	2

Aşağıdaki grafiklerden hangisi verilen bu verileri en iyi şekilde yansıtır?

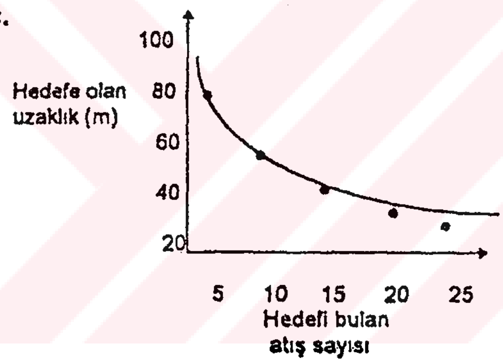
a.



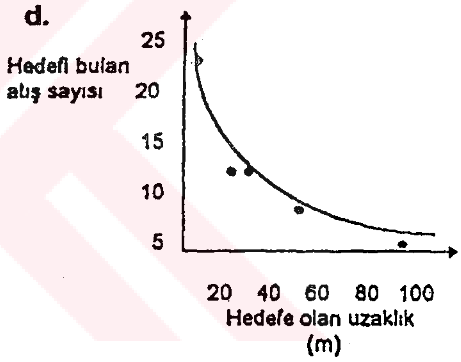
b.



c.



d.



35. Sibel, akvaryumdaki balıkların bazen çok hareketli bazen ise durgun olduklarını gözler. Balıkların hareketliliğini etkileyen faktörleri merak eder. Balıkların hareketliliğini etkileyen faktörleri hangi hipotezle sınayabilir?

a. Balıklara ne kadar çok yem verilirse, o kadar çok yeme ihtiyaçları vardır.
b. Balıklar ne kadar hareketli olursa o kadar çok yeme ihtiyaçları vardır.
c. Suda ne kadar çok oksijen varsa, balıklar o kadar iri olur.
d. Akvaryum ne kadar ışık alırsa, balıklar o kadar hareketli olur.

36. Murat Bey'in evinde birçok elektrikli alet vardır. Fazla gelen elektrik faturaları dikkatini çeker. Kullanılan elektrik miktarını etkileyen faktörleri araştırmaya karar verir. Aşağıdaki değişkenlerden hangisi kullanılan elektrik enerjisi miktarını etkileyebilir?

a. TV nin açık kaldığı süre.

b. Elektrik sayacının yeri.

c. Çamaşır makinesini kullanma sıklığı.

d. a ve c.

EK 4

KOMPLEKS SAYILARLA İLGİLİ GÖRSELLEŞTİRME ETKİNLİKLERİ

Bu kısımda; deney grubunda kompleks sayılar ve kompleks sayıların özelliklerinin görselleştirmeyle öğretimi ile ilgili bazı etkinlikler sunulmuştur. Kompleks sayıların varlığı ile ilgili öğrencilerde temel bazı bilgilerin oluşturulması sürecinde, öğrencilerin fiziksel sezgi becerileri ön plana çıkarılmaya çalışılmıştır. Fiziksel sezgi, özel bir problemin çözümünde matematiksel muhakeme yeteneğini gerektirmesi nedeniyle matematik öğretimi sürecinde çok büyük bir önem taşımaktadır. Dolayısıyla; kompleks sayıları tanımlamada fiziksel sezgiyi ortaya çıkaracak bir problem üzerinde çalışılarak öğrencilerin kompleks sayılar ve dış (fiziksel) dünya arasında köprü kurabilmeleri amaçlanmıştır. Aşağıdaki problem kompleks sayı ile fiziksel dünya arasında bir bağ kurabilmeleri amacıyla deney grubundaki öğrencilere sunulmuştur.

Problem: " Bir yaya trafik ışıklarında duran otobüsü yakalamak için maksimum 6 $\frac{m}{s}$ hızla koşmaktadır. Yaya ile otobüs arasındaki mesafe 25 m kaldığında trafik ışığı değişiyor ve otobüs 1 $\frac{m}{s^2}$ lik düzgün ivmeyle hızlanmaya başlıyor."

a) Yaya otobüsü yakalayabilir mi?
b) Eğer yakalayamazsa en yakın olacağı mesafe nedir?

Tümü daha önceki yıllarda fizik dersi almış öğrencilere kompleks sayıları tanıtmak amacıyla yukarıdaki problem sorulmuş ve öğrencilerin çok büyük bir kısmının bu problemin çözümü için gerekli ön bilgilere sahip oldukları ve problemin çözümüne nasıl ulaşabilecekleri ile doğru öngörülere sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu aşamadan sonra problemin çözümüne elde edilen veriden yola çıkarak kompleks sayı ve fiziksel dünya arasındaki ilişki sorgulanmıştır.

Yayanın ve otobüsün , belli bir t anında, aldığı yollar sırasıyla x_y ve x_o ile gösterilirse;

$$x_y = v_0 t = 6t$$

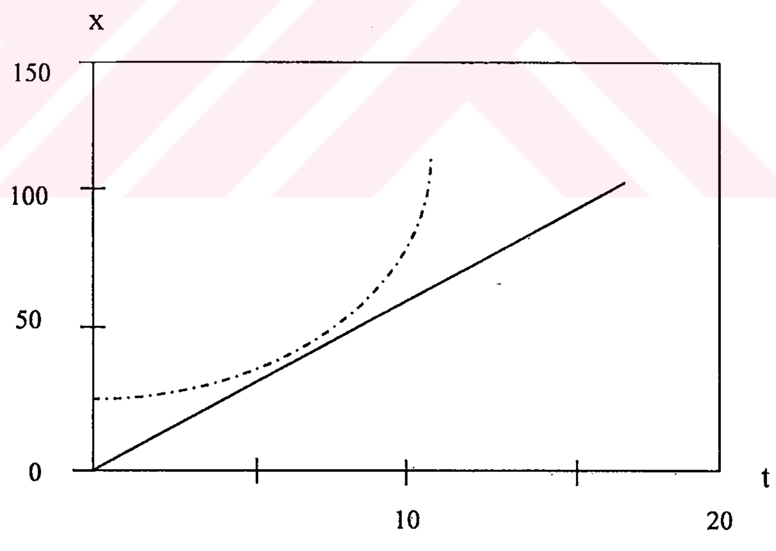
$$x_o = X_0 + \frac{1}{2}at^2 = 25 + \frac{1}{2}at^2$$

denklemlerinin çözümünden;

$$T = (6 \mp i\sqrt{14})$$

(1)

sonucu elde edilir. Bu cevapta elde edilen sayısal ifade; çoğu kompleks sayı kavramı ile ilk kez karşılaşan öğrencilerin sorunun fiziksel yorumunun yapabilmelerinin önündeki en önemli engeli teşkil etmiştir. Aslında; bu değer gerçek anlamda yayanın otobüse yetişemeyeceğini belirtmektedir.



Şekil 1

Şekil 1'de yaya ve otobüsün aldığı yol zamanın bir fonksiyonu olarak görselleştirilmiştir. İlk hızı 6 $\frac{m}{s}$ olan yayanın otobüsü yakalayabileceği en yakın zaman 6 saniyedir.

Şekil 1'de de görülen 6 saniye aslında $6 \mp i\sqrt{14}$ sayısının reel kısmıdır. Deney grubunda yapılan çalışmada bu değerin; Δx, x_o-x_y arasındaki fonksiyon olmak üzere;

$$\Delta x = x_o - x_y = 25 + \frac{1}{2}t^2 - 6t$$

ifadesinin türevinin sıfıra eşitlenmesiyle de elde edilebileceği gösterilmiştir.

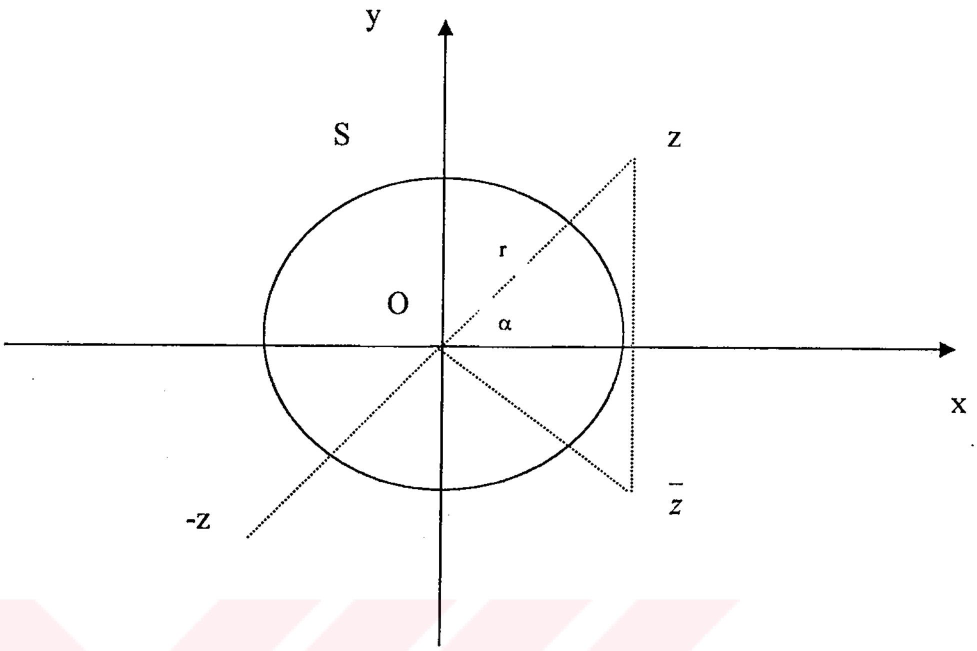
Bu uygulamayla kompleks sayılarla fiziksel (dış) dünya arasındaki ilişki ortaya konmaya çalışılmış ve bu bağlamda öğrencilerle kompleks sayıların sanal sayılar olarak adlandırılmasındaki temel nedenler tartışılmıştır.

Kompleks sayılar ile fiziksel dünya arasındaki ilişkinin oraya konduğu bu etkinlikten sonra; deney grubunda, kompleks sayıların geometrik yorumlanması ile ilgili yapılan bir çalışma aşağıda genel hatlarıyla belirtilmiştir.

Kompleks sayılar teorisinin gelişimi kompleks sayıların düzlemdeki noktalar cinsinden geometrik yorumlanmasıyla yakından ilgilidir. Bu yorum;

$$z = x+iy = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

kompleks sayısının kartezyen koordinatlarda x ve y ve kutupsal koordinatlarda r ve α olarak düzlemin bir noktası olmasından hareketle yapılır (Şekil 2).



Şekil 2

Burada; $z = x + 0i = r\,(\cos 0 + i \sin 0)$ reel sayısı x-eksenindeki noktalara, $r = 1$ modullü sayılar da merkezi O yarıçapı 1 olan S birim çemberindeki noktalara karşılık gelir. $z = x + iy$ kompleks sayısının toplama işlemine göre tersi olan $-z = -x - iy$ sayısı ise z'nin O noktasına göre simetriğidir. Benzer şekilde; $z = x+iy = r(\cos\alpha + i \sin\alpha)$ sayısının eşleniği olan

$$\bar{z} = x - iy = r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha))$$

kompleks sayısı z'nin x eksenine göre simetriğidir.

Dolayısıyla;

$$z' = -z \qquad (1)$$

$$z' = \bar{z}$$

(2)

denklemleri aynı zamanda belirli bir nokta dönüşümü tanımlarlar. (1) ve (2) denklemleri sırasıyla O noktası civarında simetri (yarı-dönme) ve x-ekseni civarında simetri(yansıma) hareketidir.

Deney grubunda yapılan bu etkinlikte; q = a+ib ve p = t (cosα+isinα) şeklinde düzlemde herhangi iki kompleks sayı gözönüne alınmıştır. Ve;

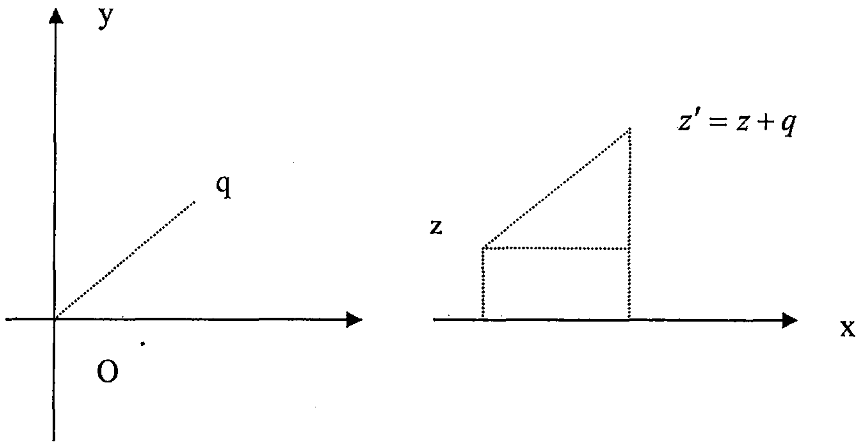
$$z' = z + q \text{ yada } x' + iy' = (x + iy) + (a + ib)$$

(3)

denklemlerinden ;

$$x' = x + a \text{ ve } y' = y + b$$

yazılabildiği sonucuna ulaşılmıştır.Yani; $\vec{zz'}$ vektörünün $O\vec{q}$ vektörüne eşit olduğu ve dolayısıyla (3) denkleminin $O\vec{q}$ vektörü ile düzlemin bir öteleme hareketi tanımladığı belirlenmiştir (Şekil 3).



Şekil 3

Deney grubunda yapılan bu etkinlikte, benzer şekilde; sarmal bir benzerlik olarak da adlandırılabilecek $z' = pz$ denkleminin O noktası civarında α açılı bir dönme hareketini belirttiği öğrencilerle beraber bulunmuştur.

Deney grubundaki uygulama sürecinde; görselleştirme yaklaşımının kompleks sayıların özellikleri konusu ile ilgili yapılan uygulamalarından biri de "z ve w herhangi iki kompleks sayı olmak üzere;

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

eşitliğinin varlığın gösterimi" örneğidir. Bu örnekten önce deney grubunda kompleks sayılarla ilgili bilinen;

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

üçgen eşitsizliği üzerinde durulmuş; ve bu eşitsizliğin cebirsel ve geometrik analiz yapılmıştır. Burada; bu eşitsizliğin yalnızca geometrik yorumu üzerinde durulacaktır.

Düzlemde P(x,y) ve Q(α,β) noktalarına karşılık gelen kompleks sayılar sırasıyla $z = x+iy$ ve $w = \alpha+i\beta$ olmak üzere;

$$z + w = (x+\alpha) + i\,(y+\beta)$$

toplamı R vektörüyle gösterilsin(Şekil 4).

OPR üçgeninde;

$$|OR| \le |OP| + |OQ|$$

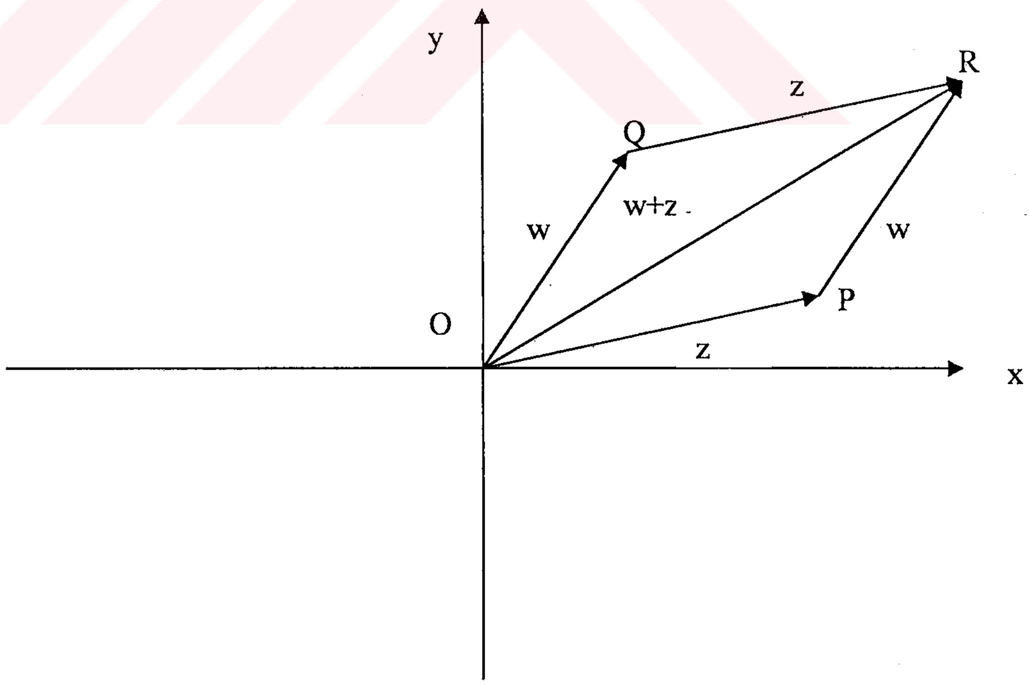
eşitsizliği yazılabilir. Eğer; OP ve OQ vektörleri aynı doğru üzerinde yani bu vektörler lineer bağımlı iseler eşitlik durumu söz konusudur.

$$|OR| = |z+w|, |OP| = |z| \text{ ve } |OQ| = |w|$$

olarak alınarak;

$$|z+w| \le |z| + |w|$$

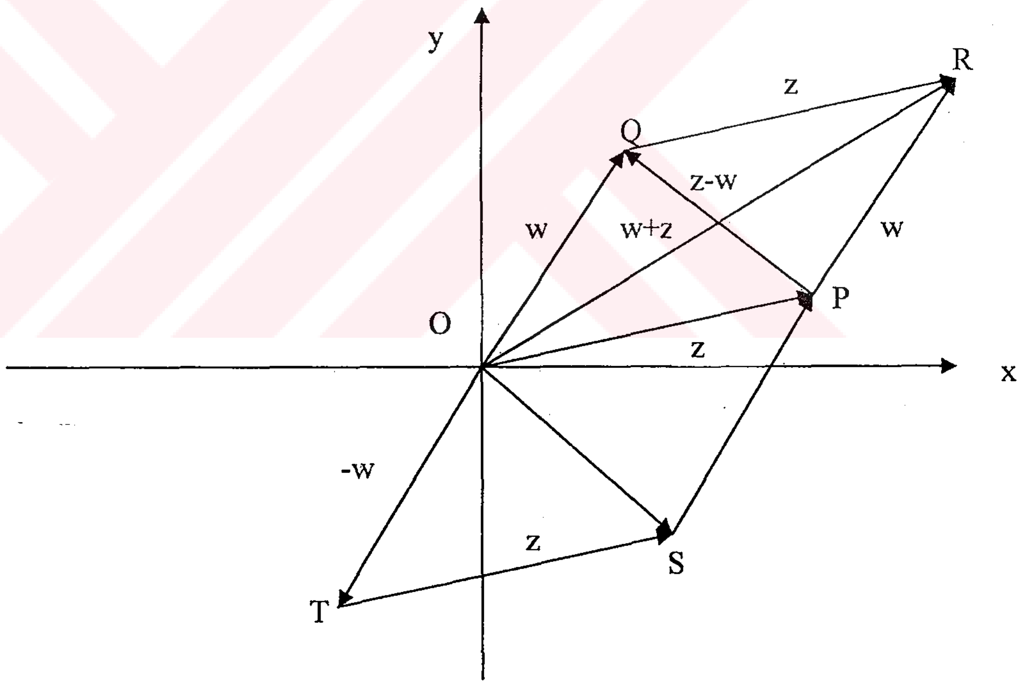
eşitsizliği elde edilmiştir.



Şekil 4

Üçgen eşitsizliğinde eşitlik durumunun hangi halde geçerli olacağı durumun tartışmasının sonuçlandırılmasının ardından $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ eşitliğinin varlığının gösterimi çalışmalarına geçilmiştir.

Bu eşitliğin cebirsel olarak çözümü çok zor olmasa da uzun bir işlem gerektirir. Halbuki, bu eşitliğin varlığı tamamen geometrik bir yorumlamayla çok daha kısa ve zarif bir şekilde gösterilebilir. Kompleks sayılarla Euclid geometrisi arasındaki güçlü bağın en güzel örneklerinden biri olan bu uygulamada, düzlemde doğrusal olmayan dört nokta yardımıyla, paralel kenarın bilinen bir özelliği yardımıyla bu eşitliğin varlığının görselleştirme yaklaşımına uygun bir şekilde ve tamamen geometrik bir yorumlama ile nasıl gerçeklenebileceği gösterilmiştir (şekil 5).



Şekil 5

Geometrik olarak OPRQ paralel kenarının köşegenleri;

$$|OR|=|z+w|,|QP|=|z-w|$$

dir. Dolayısıyla, $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ eşitliği "Bir paralel kenarda köşegenlerin kareleri toplamı, kenarlarının kareleri toplamının iki katına eşittir" teoreminden görsel olarak belirlenebilir.

EK 5

Üstel, logaritmik ve tigonometrik fonksiyonların analiz ders müfredatlarında çok önemli bir yeri vardır. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ eşitliğinin en önemli özelliği, trigonometrik fonksiyonlar ile üstel ve dolayısıyla logaritma fonksiyonu arasında güçlü bir bağlantı kurma olanağı yaratmasıdır. Trigonometrik fonksiyonlar, bir dik üçgenin kenarlarının oranları cinsinden tanımlanabilir. Dolayısıyla; trigonometrik fonksiyonlar üzerindeki temel parametre açı kavramıdır. Açının tanımı herhangi bir reel değere genişletilebilir. Böylece; $\cos\theta$ ve $\sin\theta$, reel θ değişkeninin reel değerli fonksiyonlarıdırlar.

e^x üstel fonksiyonu, $f'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan bir tek çözüm olarak tanımlanabilir. Bu fonksiyon aynı zamanda;

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$$

kuvvet serisiyle de temsil edilebilir. e^x pozitif değerli ve artan olması dolayısıyla y>0 için logy, e^x in ters fonksiyonu olarak tanımlanır. Diğer bir yaklaşım ise y > 0 için;

$$\log y = \int_1^y \frac{1}{t} dt$$

şeklinde alınarak e^x fonksiyonunu, logy' nin ters fonksiyonu olarak tanımlamaktır. Bu kısımda; kompleks düzlemde e^x üstel fonksiyonunun geometrisi üzerinde durulacaktır.

Reel değişkenli ve reel değerli bir f fonksiyonunun özellikleri, fonksiyonun grafiği çizilerek geometrik olarak ifade edilebilir. y = f(x) eşitliği, x-ekseni üzerindeki x noktaları ile y-ekseni üzerindeki y noktaları arasında bir eşleme oluşturur; yani x noktalarını, y noktalarına dönüştürür. Bu şekilde görselleştirme yaklaşımı, her bir x noktasını xy düzleminin, x'e göre yönlenmiş y uzaklığındaki bir (x,y) noktasına dönüştürerek daha da geliştirilebilir. Bu şekilde elde edilen eğri f(x)'in grafiğidir. Benzer şekilde; x ve y reel değişkenlerinin reel değerli f(x,y) fonksiyonunu görsel olarak belirleyebilmek için bir yüzey kullanılır. Ancak; w= f(z) ve z ile w kompleks sayı ise f fonksiyonun görsel olarak bu şekilde uygun bir gösterimi yoktur. Çünkü; her bir değişkenin gösterimi için bir düzleme gerek vardır. Yine de; fonksiyonla ilgili bazı özellikler, karşılıklı z ve w noktalarından oluşan cümleleri göstererek görsel olarak ifade edilebilir.

$z = x+iy$ olsun. Kompleks sayılar cümlesinde;

$$z \to e^x(\cos y + i \sin y) = e^z = f(z)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon adı verilir. Eğer $w = e^z$ ise $y = y_0$ şeklindeki doğruların görüntüleri;

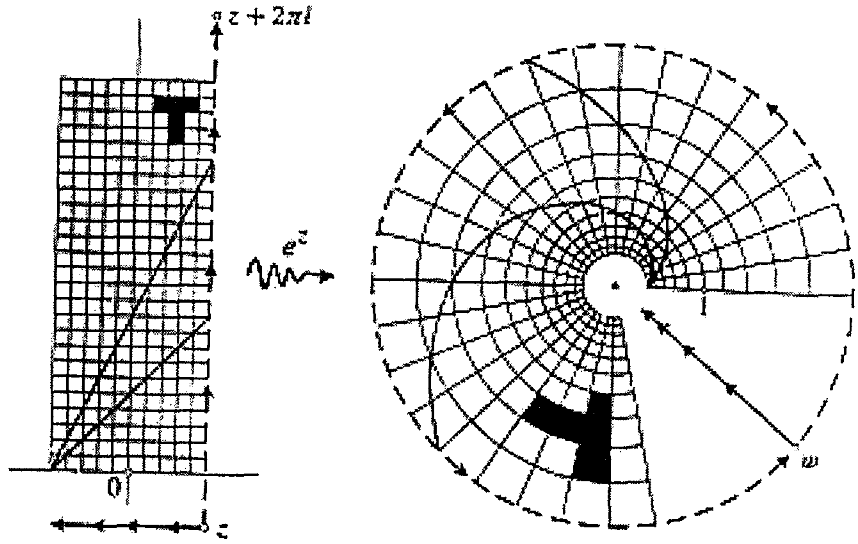
$$w = e^x . e^{iy_0} \quad , \quad (-\infty < x < \infty)$$

parametrik temsilleriyle bulunur. Dolayısıyla bu görüntüler $y_0 = \arg w$ şeklindeki ışınlardır. Aralarındaki uzaklık 2π nin tam katı olan herhangi iki $y = y_0$ doğrusu aynı ışına dönüşür. Bu şekilde tanımlanan üstel fonksiyon bire-bir değildir.

$x = x_0$ şeklindeki doğruların görüntüleri;

$$w = e^{x_0} . e^{iy} \quad , \quad (-\infty < y < \infty)$$

şeklinde e^{x_0} yarıçaplı çember denklemi ile verilir. Ayrıca; $y = y_0$ ve $x = x_0$ eğrileri arasındaki dik açılar bu dönüşüm altında korunurlar. Şekil 1'de $w = e^z$ dönüşümünün temel özellikleri görselleştirilmiştir.



Şekil 1

Aynı zamanda; bu dönüşüm aşağıdaki özellikleri de sağlar.

i) Eğer z, sabit ve artan bir hızla hareket ederse, w , s açısal hızıyla orjin etrafında döner. z , 2π kadar hareket ettiğinde, w, orjin noktasına ulaşacaktır. Böylece dönüşüm 2πi periyotlu periyodik bir fonksiyondur.

ii) Eğer z, sabit hızla negatif x ekseni yönünde hareket ederse, w orjine doğru azalan bir hızla hareket edecektir. Tersine olarak, z sabit hızla pozitif x ekseni yönünde hareket ederse w, artan bir hızla orjinden uzaklaşacaktır.

iii) İlk iki maddedeki hareketlerin bileşkesi sonucu, w = 0 hariç w-düzlemi 2π yükseklikteki z düzlemindeki şerit görüntülerine sahiptir.

iv) Genel durumdaki bir doğru spiral şeklinde bir eğriye dönüşür.

v) Sanal eksenin sol yarı düzlemi birim çemberin içine, sağ yarı düzlemi de birim çemberin dışına dönüşür.

Kompleks fonksiyonların görselleştirmesi ile ilgili en güzel örneklerden biri kompleks türevlenebilme ile konform dönüşüm arasındaki ilişki üzerine kuruludur. f: **C→C** kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon grafiksel olarak bir düzlemden diğerine tanımlanan bir dönüşümle temsil edilebilir. Fakat bu türdeki her fonksiyon türevlenemeyebilir. w = f (z), z'nin türevlenebilir bir fonksiyonu olabilmesi için bazı şartları sağlaması gerekir. Cebirsel olarak bu şartlar Cauch-Riemann denklemleri ile verilir. Buradaki en önemli konulardan biri "Türevlenebilir kompleks bir fonksiyonun türevlenemeyen kompleks bir fonksiyondan bu dönüşümün hangi özelliği yardımıyla farklılaştığı" sorusudur.

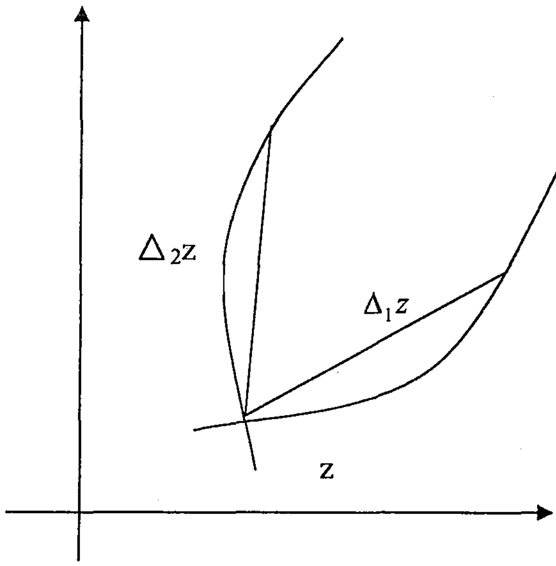
Türev, artma miktarları oranının limiti olarak tanımlanabilir. Eğer z'nin bir fonksiyonu olarak w türevlenebilirse, bu limit, z'nin artma miktarının sıfıra yaklaştığı her durumda mevcut olmalıdır. z'nin iki farklı artma miktarı karşılaştırılsın. Bu artma miktarları $\Delta_1 z$ ve $\Delta_2 z$ ile gösterilsin. Ayrıca; $\Delta_1 w$ ve $\Delta_2 w$, w düzleminde bu artma miktarlarının karşılıklarını göstersin. Bu takdirde z düzlemindeki,

$$z,\ z+\Delta_1 z,\ z+\Delta_2 z$$

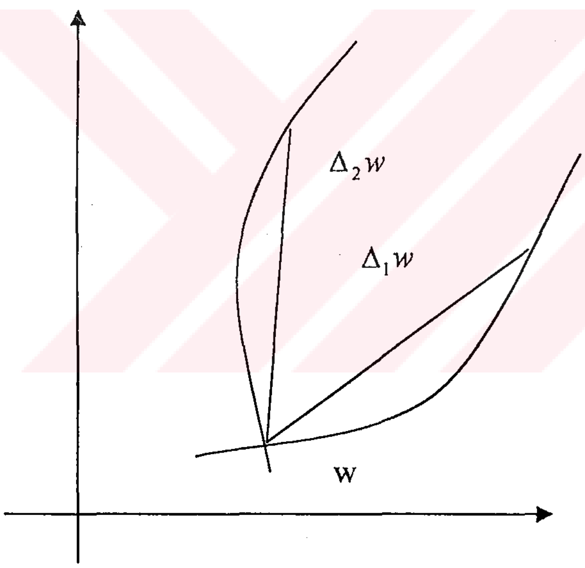
noktaları w düzleminde sırasıyla,

$$w,\ w+\Delta_1 w,\ w+\Delta_2 w$$

noktalarına dönüşecektir. Yani $w = f(z)$, $w+\Delta_1 w = f(z+\Delta_1 z)$, $w+\Delta_2 w = f(z+\Delta_2 z)$ dönüşümleri mevcuttur (Şekil 2)



z– düzlemi



w– düzlemi

Şekil 2

$\Delta_1 z$ ve $\Delta_2 z$ sıfıra yaklaştığı, ayrıca; türevin Δz 'nin sıfıra yaklaşmasının artma miktarındaki durumdan bağımsız olduğu için bu türevin var olduğu kabul edilsin.

$$\lim_{\Delta_1 z \to 0} \frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 z} = \lim_{\Delta_2 z \to 0} \frac{\Delta_2 w}{\Delta_2 z} = f'(z) \tag{1}$$

Aynı zamanda; burada z noktaları $f'(z) \neq 0$ olacak şekilde sınırlandırılsın. Bu takdirde (1) den ;

$$\lim_{\substack{\Delta_1 z \to 0 \\ \Delta_2 z \to 0}} \frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 z} . \frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 w} = \frac{f'(z)}{f'(z)} = 1 \tag{2}$$

elde edilir.

Bu eşitlik yaklaşık olarak;

$$\frac{\Delta_1 w}{\Delta_1 z} . \frac{\Delta_2 z}{\Delta_2 w} \approx 1 \tag{3}$$

dır. Dolayısıyla;

$$\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} \approx \frac{\Delta_2 w}{\Delta_1 z} \tag{4}$$

olur.

(4) yaklaşık eşitliği aynı zamanda aşağıdaki iki yaklaşık eşitliğe denktir:

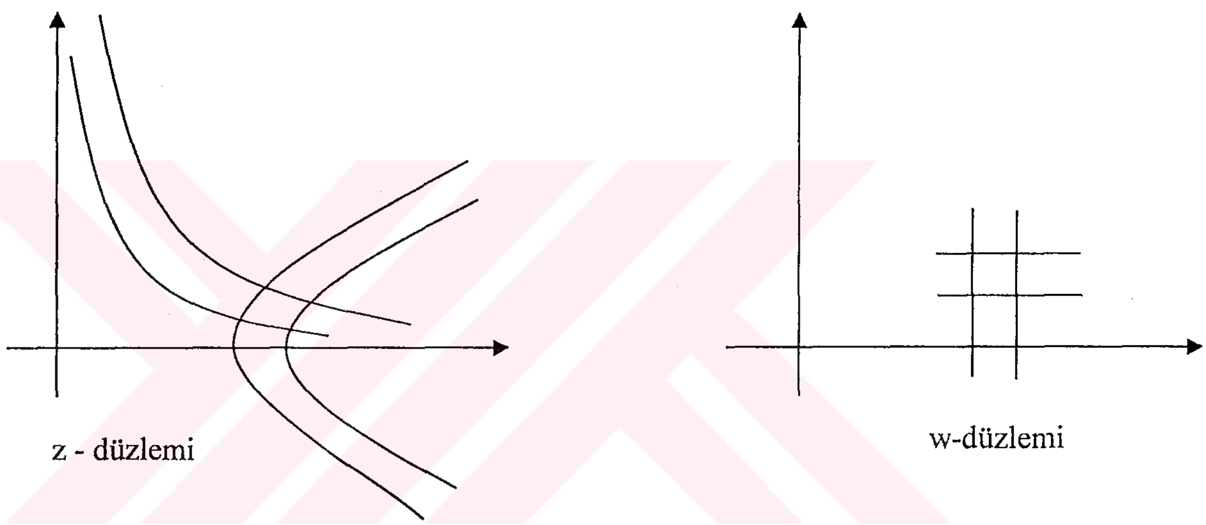
$$\left|\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z}\right| \approx \left|\frac{\Delta_2 w}{\Delta_1 w}\right| \tag{5}$$

$$\arg\frac{\Delta_2 z}{\Delta_1 z} \approx \arg\frac{\Delta_2 w}{\Delta_1 w} \tag{6}$$

Bu yaklaşık eşitliklerin geometrik olarak önemini görmek için z-düzleminde, köşeleri z, z + $\Delta_1 z$, z + $\Delta_2 z$ ve w-düzleminde w, w + $\Delta_1 w$, w + $\Delta_2 w$ köşeli üçgenler gözönüne alınabilir. (6) denkleminden z-düzlemindeki üçgenin z köşesindeki açının w-düzlemindeki üçgenin w köşesindeki açıya denk olduğu görülebilir. Ayrıca; (5) denkleminden z ve w noktalarında eşit açılı iki üçgenin karşılıklı kenarlarının orantılı olduğu sonucuna varılabilir. (5) ve (6) denklemlerinden ya da yalnızca (4) yaklaşık eşitliğinden bu üçgenlerin benzer olduğu açıktır. Aslında, argümanın yalnızca yaklaşık bir hesaplamayla elde edilen (4) yaklaşık eşitliği kesin değildir. Ancak; $\Delta_1 z$ ve $\Delta_2 z$ 'nin sıfıra yaklaşması durumunda kesinlik durumu söz konusu olabilir. Bu nedenle bu sonuç aşağıda daha doğru bir şekilde ifade edilmektedir: "Türev mevcut ve sıfırdan farklı ise karşılıklı üçgenler boyutları sıfıra yaklaştığında benzerdir". Başka bir ifadeyle; bir dönüşümle temsil edilen fonksiyon türevlenebilirse, birbirlerine dönüşen düzlemlerin sonsuz küçük kısımları $\frac{dw}{dz} \neq 0$ eşitsizliğini sağlar, yani benzerdirler.

Sonsuz küçük kısımları benzer formda olan bu tür dönüşümler konform dönüşüm olarak adlandırılır. Bu nedenle çok net bir şekilde ifade edilebilir ki; türevlenebilir bir fonksiyondan konform dönüşüm elde edilebilir.

Dönüşümün konformluğu başka bir şekilde de ifade edilebilir. Eğer daha somut bir şekilde ifade edilebilirse bu durum görselleştirilebilir. Biri z-düzleminde diğeri w-düzlemindeki küre yüzeyinin aynı kısmını temsil eden iki coğrafi dönüşüm gözönüne alınsın (Şekil 3).



Şekil 3

Karşılıklı z ve w noktaları aynı coğrafi noktayı belirtirler. $z + \Delta_1 z$ ilk haritadaki sınır doğrultusu üzerinde bir nokta olsun. Bu takdirde $w + \Delta_1 w$, ikinci haritadaki sınır doğrusuna karşılık gelen noktadır. Benzer şekilde $z + \Delta_2 z$ ve $w + \Delta_2 w$ her biri kendi düzlemindeki nehrin aynı noktalarını temsil ederler. $\Delta_1 z$ sonsuz küçükse, z noktasındaki sınır doğrusuna eğimle aynı doğrultudadır. Aslında; $\Delta_1 z$, $\Delta_2 z$, $\Delta_1 w$, $\Delta_2 w$ artmalarının tümü belirli eğimlerin doğrultusundadır. Öte yandan ikisi sınır doğrusu ikisi nehir doğrultusunda iki eğim mevcuttur. $\Delta_1 z$ ve $\Delta_2 z$ arasındaki açının $\Delta_1 w$ ve $\Delta_2 w$ arasındaki açıya eşit olduğu söylenebilir. Dolayısıyla sınır doğrusu ve nehir arasındaki açı iki haritada da aynı olmalıdır. Türev mevcutsa, karşılıklı doğrular arasındaki açılar eşittir.

EK 6

ÜÇ VE DÖRT BOYUTTA KOMPLEKS SAYILAR

Bu çalışmada; kompleks sayılar iki boyutta ele alınmış ve bu sayılar ile Euclid geometrisi arasıdaki ilişkiler üzerinde durulmuştur. Euclid geometrisi noktalar, doğrular ve nokta ya da doğruların bazı özelliklerini sağlayan aksiyomlar üzerine kuruludur. Bununla birlikte; Euclid geometrisi mükemmel olarak tanımlanabilecek boyutta değildir. Modern araştırmalar fiziksel uzayda yapılandırılan şekillerin geometrik özellikleri ve Euclid geometrisi ile elde edilen sonuçlar arasında küçük de olsa farklılıkların olduğunu ortaya koymaktadır. Euclid geometrisinden bu ayrılma uzayda madde ve enerjinin dağılımı ile ifade edilmektedir. Aslında bu durum, 1915 yılında Einstein tarafından bulunan yerçekimi teorisi ile ortaya konmuştur.

Euclidyen olmayan geometri olarak adlandırılan bu yeni geometrinin Euclid geometrisinden nasıl farklılaştığı ile ilgili bir örnek aşağıda verilmiştir: " T herhangi bir üçgen olmak üzere T'nin açıları toplamı π'dir" Euclid geometrisinin bilinen teoremlerinden biridir. Aslında bu sonuç paralellik aksiyomuna denktir. Dolayısıyla Euclidyen olmayan geometri de bir üçgenin açıları toplamı π'den farklı olmaktadır. Bu farklılığı hesaplayabilmek için, E açısal artma olmak üzere;

$$E(T) = (\text{ T'nin açıları toplamı}) - \pi$$

eşitliği gözönüne alınsın. Euclid geometrisinde $E(T) = 0$ olduğu açıktır. Ancak;

i) Küresel geometride açıların toplamı π'den büyüktür ($E>0$)

ii) Hiperbolik geometride açıların toplamı π'den küçüktür ($E<0$).

Aslında bu ifadelerdeki, E(T) tamamen üçgenin boyutuyla ilgilidir. Yani; E(T), T üçgeninin A(T) alanıyla orantılıdır. Dolayısıyla; k, küresel geometride pozitif, hiperbolik geometride negatif bir sabit olmak üzere;

$$E(T) = k.\ A(T)$$

eşitliği yazılabilir.

Kompleks sayıların üç boyuta nasıl taşınabileceği bu sayılar üzerinde çalışan matematikçiler için irdelenmeye değer bir problem olmuştur. Burada; kompleks sayıların üç ya da daha üst boyutta nasıl gösterilebileceği ve özellikle dört boyuttaki incelemelerin sonucu olarak kuaterniyonlarla ilgili bazı özellikler ele alınmıştır. O merkezli düzlemin merkezi bir genişlemesi tanımlanırsa aynı merkezli bu dönme hareketi böyle bir genişlemenin bir terkibidir. Burada "Uzayın her direkt benzerliğinin genişleyerek dönme, öteleme ya da genişleyerek dönmenin bir terkibi ve dönme eksenleri boyunca bir öteleme olması" önemli bir noktadır. Bu nedenle; toplama ötelemelerin çarpma ise genişleyerek dönmelerin birleşimi olarak alınırsa düzlemsel kompleks sayıların varlığını sorgulamak olanağı mevcuttur. Toplama, düzlemdeki her noktanın vektör karşılığı bir öteleme olarak alınabilir ve bu dönmelerin bileşkesi de düzlemde bilinen vektör toplamıdır. Ayrıca; bu vektör toplamı dört boyutlu ya da daha genel olarak n-boyutlu uzayda çalışma olanağı sağlar.

Genişleyerek dönmelerin O sabit merkezli Q kümesi gözönüne alınsın. Çarpma tanımından, $Q_1 \circ Q_2$ genişleyerek dönmelerin çarpımı benzer yapıdaki başka bir Q_3 genişleyerek dönmesidir. Eğer Q_1 ve Q_2'nin genişlemeleri r_1 ve r_2 ise Q_3'ün genişlemesi $r_3 = r_1.r_2$'dir. Bununla birlikte; düzlemdeki farklı dönmeler üzerinde çalışıldığında farklı sonuçlara varmak mümkündür. Örneğin; bu yapılar üzerinde çarpma işlemi değişme özelliğini sağlamaz. Yani;

$$Q_1 \circ Q_2 \neq Q_2 \circ Q_1 \qquad (1)$$

bulunmaktadır.

Değişme özelliğinin varlığına ters düşmesine rağmen burada (1) eşitliği ile hiçbir tutarsızlık yoktur. Böylece; düzlemsel kompleks sayıların cebri için kesin bir engelin varlığı düşünülemez.

Bununla beraber; temel problem, bu genişleyerek dönmelerin düzlemde nokta ya da vektör olarak gösterilmeye çalışıldığında ortaya çıkmaktadır. Kompleks çarpım kuralı ile benzerlik kurarak $Q_1 \circ Q_2 = Q_3$ eşitliğini yorumlamak imkansızdır. Çünkü; düzlemde ile benzerlik kurarak $Q_1 \circ Q_2 = Q_3$ eşitliğini yorumlamak imkansızdır. Çünkü; düzlemde bir noktanın ayrıntılı bir şekilde açıklanabilmesi için üç sayıya ihtiyaç duyulurken bir genişleyerek dönmenin açıklanabilmesi için dört nokta gerekmektedir. Bu sayılardan biri genişleme, diğeri dönme açısı ve diğer ikisi de dönme eksenlerinin yönleridir.

Kompleks sayıların üç boyutta karşılıklarının elde edilmesinde başarısız olunmasına rağmen, bu durum dört boyutta olanaksız değildir. Burada gözönüne alınan dört boyutlu uzay, üç boyutlu uzayın O merkezli genişleyerek dönmelerinden ibarettir. Bu uzayın bileşenleri kuaterniyon olarak adlandırılır. Dolayısıyla; kuaterniyonlar dört boyutlu uzaydaki nokta ya da vektörler olarak görselleştirilebilirler.

Matematikte daha yüksek boyutlardaki kompleks sayıların varlığı ile ilgili ilk çalışmalar 1843 yılında Sir William R. Hamilton tarafından yapılmıştır. Hamilton kompleks sayıların üç boyutlu uzaya taşınması ile ilgili düşüncelerinde bir sonuca ulaşamamasına rağmen; kompleks sayıların dört boyutlu uzayda tanımlanabileceğini fark etti. İki boyutlu kompleks düzlemde; $z = a.1+b.i$ kompleks sayısı, 1 ve i birim baz vektörleri cinsinden ifade edilebilir. Ayrıca; kompleks sayılar cümlesi çarpmanın toplama işlemi üzerine dağılma özeliği , 1'in birim eleman olma ve $i^2 = -1$ gibi birçok özelliklere sahiptir. Kompleks sayılar üzerinde tanımlanan işlemlerin kuralları, a+bx şeklindeki polinomlar üzerinde tanımlananlara benzerdir. Buradaki tek fark, -1 ile i^2 ifadelerinin yer değiştirmesinden doğmaktadır. Kompleks sayıların bir anlamda açılımı olan kuaterniyon, a, b, c, d reel sayılar ve i, j, k ;

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,\ i.j = k = -j.i,\ j.k = i = -k.j,\ k.i = j = -i.k \qquad (2)$$

eşitliklerini sağlayan sanal birimler olmak üzere; $V = a + bi + cj + dk$ formunda ifade edilen sayıdır. Burada $v_1 = a$ ve $v_2 = bi + cj + dk$ olarak alınırsa ;

$$V = v_1 + v_2$$

olur. a'ya V'nin skaleri, bi+ cj+ dk'ye vektör kısmı denir.

V' nin W = w_1+ w_2 olarak ifade edilen kuaterniyonla çarpımı;

$$VW = (v_1w_2 - v_2w_1) + (\ v_1w_2 + w_1v_2 + v_2 \times w_2)$$

şeklindedir. Eğer V ve W sırf sanal yani v_1= w_1= 0 ise;

$$VW = \ -v_2w_1 + v_2 \times w_2$$

olur.

Kuaterniyonlar ;

i) 1, i, j ve k' nın lineer birleşimi,

ii) Bu lineer birleşimdeki dört katsayının vektörü,

iii) Ya da; 1'in katsayısı skaler ve sanal terimlerin katsayıları vektör olarak gösterilebilirler.

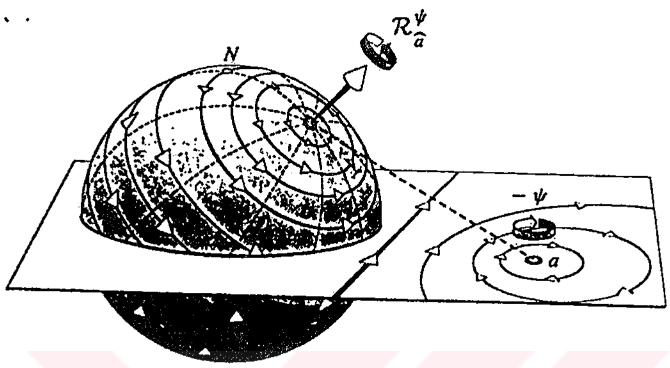
Euclid düzlemindeki hareketler özellikle $M(z) = az + b$ formundaki basit Mobius dönüşümleri ile temsil edilirler. Aslında küresel ve hiperbolik geometrideki hareketlerde Mobius dönüşümleri cinsinden ifade edilebilir. Kürenin en genel hareketi kendi merkezi etrafındaki dönme hareketidir. Kompleks sayılar cümlesi üzerine tanımlanan bu steografik izdüşüm kürenin konform dönüşümünün elde edilmesini sağlar. Kürenin bu dönüşümleri aynı zamanda, bu dönüşüm üzerinde tanımlanan kompleks fonksiyonlardır. Dolayısıyla;

$$M(z) = \frac{az + b}{-\bar{b}z + \bar{a}}$$

formundaki Mobius dönüşümleridir. Kompleks kompleks sayı olarak da adlandırılan kuaterniyonlar, 2x2 tipindeki kompleks matrisleri kullanarak;

$$V = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + ib & c + id \\ -c + id & a - ib \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada; z ve w kompleks sayı, a, b, c, d reel sayılar ve $\bar{z}$, z'nin eşleniğidir.Mobius dönüşümleri ile yukarıda ifade edilen kuaterniyonların matris gösterimleri arasında önemli bağıntılar mevcuttur. Aynı zamanda; kuaterniyonlar ile düzlemsel dönmeler arasında da önemli bir bağıntı mevcuttur. Bu bağıntı düzlemin dönmesi olarak ifade edilebilen ikili dönme kavramı üzerine kuruludur. Aynı ikili dönme iki defa uygulanırsa sonuç birim elemanı verecektir. Şekil 1; $R_{\hat{a}}^{\psi}$ 'nın, a noktası civarında ψ açılı bir dönme hareketini gösterir.



Şekil 1

Burada ;V= l.i+m.j+n.k ve $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ eşitliklerini yazmak mümkündür. Birim vektör civarında bu dönme hareketi;

$$\left[R_V^{\psi}\right] = \begin{bmatrix} \cos(\frac{\psi}{2}) + in\sin(\frac{\psi}{2}) & (-m+il)\sin(\frac{\psi}{2}) \\ (m+il)\sin(\frac{\psi}{2}) & \cos(\frac{\psi}{2}) - in\sin(\frac{\psi}{2}) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

ile verilir.

(3) eşitliğine göre V= l.i+m.j+n.k ekseni civarındaki ikili dönmeye karşılık gelen Mobius dönüşümü;

$$\left[R_V^{\pi}\right] = \begin{bmatrix} in & -m+il \\ m+il & -in \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

1'i birim matris ve I, J, K ayrı ayrı i, j, k civarındaki ikili dönme matrisleri olsun. Böylece;

$$1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, I=\begin{bmatrix}0 & i\\ i & 0\end{bmatrix}, J=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, K=\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla; K Mobius matrisine karşılık gelen Mobius dönüşümü K(z) = -z' dir.

Kuaterniyonlarla ilgili diğer önemli bağıntı; matris çarpımına göre ikili dönme matrislerinin (2) eşitliklerini sağlamasıdır. Yani; quaterniyon çarpımı yukarıda matris formunda ifade edilen 1, I, J, K'nın yeniden düzenlenmesiyle elde edilen 2x2 tipindeki matrislere karşılık gelen çarpıma denktir.

Kuaterniyon sayılar dört boyutlu uzaydaki noktalar tarafından ifade edildiğinden bu sayıların görselleştirilmesi dört boyutlu uzaydaki fraktalar yardımıyla gerçekleştirilmekte ve Kuaterniyonik fraktallar olarak adlandırılmaktadır. Bu nesneleri üç boyutlu uzayda dilimleyerek görselleştirmek mümkündür. Şekil 2, q = -0.1 + 0.6i + 0.1j - 0.6k kuaterniyonunun dilimlenmesi ile oluşturulmuştur.

Şekil 2

Bir kuaterniyon açıkça düzlemde bir yönlendirmeyi belirtmez. Yalnızca; önceki yönlendirmeden sonrakine bir dönüşümdür. Herhangi bir kuaterniyon (qw, qx, qy, qz) şeklinde dört bileşene sahiptir. Bir kuaterniyon dönmesi aşağıdaki yolların takip edilmesiyle görselleştirilebilir:

i) (qx, qy, qz) şeklinde özelleştirmeyle düzlemdeki noktaların görselleştirilmesi

ii) Orjinden, (qx, qy, qz) noktasına bir doğru çizerek oluşturulan eksenin görselleştirilmesi

iii) Sağ el kuralından hareketle eksen civarındaki dönmenin görselleştirilmesi. qw dönme açısının yarısının kosinüsüne eşit olduğundan dönme ekseni civarındaki dönme miktarı 2 arccos(qw)'dir.

Matematikçiler çalışmalarında genelde bilgi teknolojilerinin kullanımından kaçınmalarına rağmen bu teknolojiler, kuaterniyonların görselleştirilmesinde çok önemli bir araç rolündedir. Bilgisayarın gerek sayısal bir hesaplama gücüne sahip olması gerekse sezgisel ve görsel ipuçları sağlaması, matematik eğitimcilerinin bu araçları daha yoğun bir şekilde kullanmalarını gerekli kılmaktadır. Euclid geometrisi veya Euclidyen olmayan geometri ile kompleks sayılar arasındaki ilişkilerin öğretimi üzerindeki araştırmaların bu yeni gelişim çabalarından etkilenmemesi düşünülemez. Dolayısıyla; kompleks sayılar konusu üzerinde ileride yapılacak çalışmaların bilgi teknolojisiyle bütünleştirilmesiyle yeni yaklaşımların yaratılma olanağı doğabilecektir.

ÖZGEÇMİŞ

Rize'de 1975 yılında doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Rize'de tamamladı. 1992 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1996 yılında mezun oldu. Ekim 1996-Temmuz 2000 yılları arasında, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı.

Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünde 1997 yılından beri Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.