

136 646

**PROPAGATION OF WAVE IN COMPOSITES TUBES
CONTAINING A FLUID**

by

Hasan Selim ŞENGEL

Ph.D. Thesis

2003

**TC. YÖKTEKİNE AİT
DOKÜMANASYON MERKEZİ**

**İÇİ SIVI DOLU İNCE CİDARLI KOMPOZİT
TÜPLERDE DALGA YAYILMASI**

Hasan Selim ŞENGEL

**Osmangazi Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Yönetmeliği Uyarınca
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında
DOKTORA TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.**

136646

Danışman: Yrd.Doç. Dr. M. Tacettin SARIOĞLU

HAZİRAN-2003

Hasan Selim ŞENGEL'in DOKTORA tezi olarak hazırladığı "**İÇİ SIVI DOLU İNCE CİDARLI KOMPOZİT TÜPLERDE DALGA YAYILMASI**" başlıklı bu çalışma, jürimizce lisansüstü yönetmenliğinin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

Üye: Yrd. Doç. Dr. M. Tacettin SARIOĞLU



Üye: Prof. Dr. Ahmet TOPÇU



Üye: Prof. Dr. Yunus ÖZÇELİKÖRS



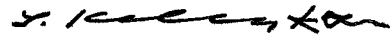
Üye: Prof. Dr. Mehmet BİLGİN



Üye: Yrd. Doç. Dr. Ali ERCENGİZ



Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun3.6.2003.....gün
ve ...2003-9/22.....sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. M. Selami KILIÇKAYA

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında bana yol gösteren ve yardımları ile çalışmalarımı yönlendiren Sayın Yrd. Doç. Dr. M. Tacettin SARIOĞLU'na, çalışmalarım sırasında İ.T.Ü.'ye geliş-gidişlerim için gerekli izni sağlayan Osmangazi Üniversitesi Müh.Mim.Fak. İnşaat Mühendisliği Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Hasan GÖNEN' e, gösterdikleri sıcak ilgiden dolayı İ.T.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Mühendislik Bölümü çalışanlarına, çalışmamda yoğun destek ve yardımlarından dolayı Yrd. Doç. Dr. Ali ERCENGİZ'e, tezim süresince bana destek ve güç veren AİLEME teşekkürlerimi sunarım.

İnş. Yük. Müh. Hasan Selim ŞENGEL

Eskişehir, Haziran 2003

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇİNDEKİLER.....	i
SEMBOLLER DİZİNİ.....	ii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iii
ÖZET.....	vi
SUMMARY.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. ALAN DENKLEMLERİ VE SINIR KOŞULLARI.....	18
2.1. Akışkan Hareket Denklemleri	18
2.2. Lifli Kompozitlerin Kinematığı.....	21
2.3. Küçük Hareketlerin Büyük Statik Şekil Değişiklikleri Üzerine Süperpozisyonu.....	25
2.4. Alan Denklemlerinin Silindirik Koordinatlarda Yazılması.....	39
2.5. Radyal Genleşmeye Ve Eksenel Uzunlamaya Maruz Damardaki Öngerilme	44
3. ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ.....	58
3.1. Akışkan Hareket Denklemlerinin Çözümü.....	58
3.2. Elastik Ortama Ait Alan Denklemlerinin Çözümü.....	62
3.3. Tek Tabakalı Model İçin Elde Edilen Grafiklerin Yorumlanması	82
3.4. Tabakalı Model İçin Elde Edilen Grafiklerin Yorumlanması.....	86
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	109
KAYNAKLAR.....	111
EKLER.....	116
ÖZGEÇMİŞ.....	122

SEMBOLLER LİSTESİ

$c_{1,2}^2$	: Dalga hızları
Ω	: Frekans
λ	: Eksenel germe
α	: Womersley parametresi
P_i	: İç basınç
V_1	: Birincil dalga hızı
V_2	: İkincil dalga hızı
χ_1	: Birincil dalgaya ait taşıma katsayısı
χ_2	: İkincil dalgaya ait taşıma katsayısı
r_i	: İç yarıçap
$\bar{\rho}$	: Akışkanın yoğunluğu
ρ_A	: Adventitianın yoğunluğu
ρ_M	: Medianın yoğunluğu
c_A, k_{1A}, k_{2A}	: Adventitianın malzeme sabitleri
c_M, k_{1M}, k_{2M}	: Medianın malzeme sabitleri
β_A	: Adventitiada kolajen liflerin X eksenine ile yaptığı açı
β_M	: Mediada kolajen liflerin X eksenine ile yaptığı açı
β	: Tek tabakalı modelde her bir lifin X eksenine ile yaptığı açı
A	: Adventitia
M	: Media
$h_{A,M}$	: Advetitia ve Media tabakalarının kalınlıkları
t^0	: Öngerilme
Σ	: Şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Şekil</u>	<u>Sayfa</u>
1.1. Lifli Kompozitlerde Liflerin Konumunu Gösteren Şema.....	3
1.2. Lifli Kompozitler İçin Poli-Dispers Model Geometrisinin (2)-(3) Düzlemindeki Görünümü.....	5
2.1. Kompozit Bir Malzemenin Sonlu Deformasyonu.....	21
2.2. Kompozitin Ardışık Denge Konumları.....	26
2.3. Çalışmada Seçilen Damar Modelin Önden Ve Üstten Görünüşü.....	44
2.4. Aort Damarının İç Yapısı.....	48
3.1. Tabakalı Durumda Cauchy Gerilmelerinin Yarıçap İle Değişimleri.....	51
3.2. İç Basıncın, İç Yarı Çaplar ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	52
3.3. İnce Kabuk, Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda Birincil Dalga Hızının Womersley Parametresi, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	88
3.4. İnce Kabuk, Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda İkincil Dalga Hızının Womersley Parametresi, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	89
3.5. İnce Kabuk, Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Womersley Parametresi, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	90
3.6. İnce Kabuk, Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Womersley Parametresi, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	91
3.7. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda Birincil Dalga Hızının, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	92
3.8. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda İkincil Dalga Hızının, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	93

3.9. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	94
3.10. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	95
3.11. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıların Birincil Dalga Hızının ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	96
3.12. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıların İkincil Dalga Hızının ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	97
3.13. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıların Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayılarının ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	98
3.14. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıların İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayılarının ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	99
3.15. $\alpha=5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıların, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	100
3.16. İnce Kabuk, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda Birincil Dalga Hızının Womersley Parametresi, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	101
3.17. İnce Kabuk, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda İkincil Dalga Hızının Womersley Parametresi, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	102
3.18. İnce Kabuk, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Womersley Parametresi, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	103
3.19. İnce Kabuk, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Womersley Parametresi, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	104
3.20. $\alpha=5$ İçin Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda Birincil Dalga Hızının, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi.....	105

- 3.21. $\alpha=5$ İçin Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda İkincil Dalga Hızının, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi..... 106
- 3.22. $\alpha=5$ İçin Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi..... 107
- 3.23. $\alpha=5$ İçin Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının, İç Basınç ve Uzama Oranları İle Değişimi..... 108



ÖZET

Bu çalışmada Newton akışkanı ile dolu ince cidarlı silindirik kompozit tüplerde dalga yayılması problemi incelenmiştir. İnce cidarlı elastik tüp, içerisinde sürekli lifler bulunan katmanlı kompozit olarak ele alınırken, içindeki akışkan matematik analizde kolaylık olması için vizkoz olmayan sıkışmaz bir akışkan olarak ele alınmıştır. Biz bu modelin arterilerde kan akışı probleminin çözümünde de kullanılabileceğini düşünmekteyiz. Ancak kan gerçekte Newtonian olmayan bir akışkan olduğu halde matematik kolaylık açısından böyle kabul edilmiştir. Kompozit malzeme ve akışkan için alan denklemleri iç basınç sabit kabul edilerek (başlangıç konumunun dengede olduğu varsayılarak) elde edilmiştir. Kompozit elastik ortama ait yönetici diferansiyel denklemleri “Büyük başlangıç şekil değiştirmelerinin üzerine küçük şekil değiştirmelerin süperpozisyonu” teorisi kullanılarak silindirik koordinatlarda elde edilmişlerdir.

İçerisinde akışkan bulunan ince cidarlı silindirik elastik tüplerde dalga yayılması problemi Young Thomas zamanından buyana araştırmacıların ilgisini çekmiştir. Literatürde bu konuda yapılan araştırmaların sayısı burada zikredilemeyecek kadar çoktur. Bu konuda çalışan araştırmacıların pek çoğu hem başlangıç gerilmelerini sıfır hem de arteri duvarlarını ince silindirik kabuk olarak almışlardır. Bu araştırmacıların çoğu ince cidarlı tüpü, kolajen fiberlerin etkilerini yok sayarak elastik bir malzeme olarak modellemişlerdir. (Demiray, H., Ercengiz, A., 1994), (Tözeren, A., 1984). Şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu olarak da ya sadece mühendislik malzemesini ifade eden fonksiyonu kullanmışlar ya da sadece biyolojik malzemeyi ifade eden şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunu kullanmışlardır. Bizim çalışmamızda ise tüp, ince cidarlı, liflerle güçlendirilmiş tabakalı bir kompozit olarak ele alındı. Şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu olarak hem biyolojik dokular hem de mühendislik malzemeleri için kullanılabilen ortak bir fonksiyon kullanıldı. Bu model (Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., 2000) tarafından damar için önerilen modellerden birisidir. Şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu ve malzeme sabitleri de yine bu modelde önerilenlerin aynısıdır. İnce cidarlı elastik tüpte alan denklemleri ve ön gerilmeler (t^0) iç basıncı ve aksel gerilmeler dikkate alınarak elde edilmişlerdir. Bulunan alan denklemleri için harmonik dalga tipindeki çözümler araştırılmıştır. Akışkan hareketini yöneten diferansiyel denklemlere kesin analitik çözümler vermek mümkün olduğu halde, katsayıların değişken olması nedeniyle elastik kompozit malzemeye ait diferansiyel denklemler kuvvet serileri kullanılarak çözülmüştür.

Elde edilen çözümlerin grafiklerinden de görülebileceği gibi tek tabakalı kolajen lifli modelimiz için verilen sonuçlar (Atabek, H.B., and Lew, H.S., 1966), (Demiray, H., Ercengiz, A., 1994) tarafından verilmiş olan sonuçlarla uyumlu görünmektedir. Liflerin çözüm üzerindeki etkisi yatayla yaptıkları açıyla değişmektedir. Bu açı Şekil 2.3’de gösterilmiştir. Arterilerin gerçek yapısının lifli olması nedeniyle bu yapıyı göz ardı eden modellerin arterilerin gerçek davranışını göstermeleri mümkün değildir. Bu çalışmada tabakalı liflerle güçlendirilmiş model kullanılarak elde edilen sonuçların başka sonuçlarla karşılaştırılması imkanı olmamıştır, zira literatürde bu modelle çözülmüş bir örneğe rastlanmamıştır.

Anahtar Kelimeler: Lif, Media, Adventitia, Tabakalı, Harmonik.

SUMMARY

Wave propagation in thin cylindrical composite tubes filled with a Newtonian fluid is studied in this work. The thin elastic tube is considered to be laminated composite with continuous fibers in which the fluid is assumed to be a non-viscous incompressible fluid for simplicity in the mathematical analysis. We think that this model can be employed in the analysis of blood flow in the arteries. The field equations for the composites and fluid continuums are obtained assuming a constant internal pressure, thus the initial position is assumed to be in equilibrium. The governing differential equations of the composite elastic material are obtained in cylindrical polar coordinates utilizing the theory of small deformations superimposed on large initial static deformations.

The propagation of waves in thin cylindrical elastic tubes containing fluid has been a problem of interest since the time of Young Thomas. Today the literature on this subject is very rich that it seems to be impossible to cite all these works here. All these researchers working in this area have either assumed that the initial stress is zero or the arterial wall as thin walled shells. They all assumed the tube as an elastic material neglecting the effects of collagen fibers. (Demiray, H., Ercengiz, A., 1994, Tözeren, A., 1984) They have used strain energy functions which are proposed for engineering or biological materials. In our work the tube is treated as an elastic composite material which is reinforced with fibers and a strain energy function which can be used either for biological or engineering materials. This model is same with the one which is proposed by (Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., 2000) for arteries. The same strain energy function and material constants are used in our work. The field equations and initial stress (t^0) are obtained by taking into account the inner pressure and axial stretch of thin elastic tube. The field equations are solved, by assuming harmonic wave solutions for the variables. Although some exact analytical solutions can be found for the field equations of fluid phase, due to the variability of the coefficients of the resulting differential equations of the composite body, the field equations are solved using power series solutions

As is seen from the graphics of our solutions the results of the layered composite material reinforced with collagen fibers are consistent with the findings of (Atabek, H.B., Lew, H.S., 1966, Demiray, H., Ercengiz, A., 1994). The effects of the collagen fibers on the solution varies with the angle between the fibers and horizontal axis. This angle is shown in Figure 2.3. Because of the fact that the arteries are composed of some fibers, the models which discard the fibers construction are far from representing the actual behavior. The results obtained in the present work using the layered (Media + Adventitia) and fibrous composite material for the arteries could not be compared with any other work because of not having such a result obtained by any other researchers before.

Keywords: Fibers, Media, Adventitia, Layered, Harmonic.

1. GİRİŞ

Günümüzde uçak sanayinde, gemi sanayinde, tıp alanında ve çağdaş tekniğin diğer bir çok alanlarında kompozit malzemeler yaygın şekilde kullanılmaktadır. Kompozit malzemeler kullanım amacına göre geleneksel malzemelerden bir çok yönden üstünlüklere (örneğin, daha düşük ağırlığa, yüksek mukavemete ve rijitliğe vb.) sahiptir. Bu ve buna benzer diğer bir çok nedenden dolayı bir çok bilim dalı, örneğin; mekanik, fizik, kimya vb. bu malzemelerin kendi dallarına uygun problemlerini araştırmaktadır. Araştırılan problemler içerisinde en önemlilerinden biri de, kompozit malzemelerin ve bu malzemelerden hazırlanmış elemanların mekaniğine ait olan problemlerin, sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde teorik ve deneysel incelenmesidir. Gelişmiş ülkelerde bu konuya ilişkin periyodik bilimsel dergilerin yayınlanması, birçok kitabın basılması söylenenleri desteklemektedir.

Mevcut literatürde yapay şekilde oluşturulmuş kompozit malzemelerin aralarında kesin geometrik sınır olan ve kimyasal açıdan en az iki tür malzemeden oluştuğu söylenmektedir. Bu tanımdan görüldüğü gibi, kompozit malzemeler, bileşenlerinin sahip olmadığı özelliklere sahip olurlar. Kompozit malzemenin bileşenleri üslendikleri fonksiyonlara bağlı olarak; takviye (güçlendirici) ve matris diye ikiye ayrılır. Genellikle, takviyeler (güçlendiriciler); kompozit malzeme içerisinde yük taşıma görevini görür. Matris malzemesi ise, takviyelerin birliğini ve karşılıklı etkileşimini sağlar.

Kompozit malzemelerin birçok açıdan sınıflandırılması yapılabilir. Bunlardan en yaygın olanı ve bu malzemelerin mekaniğinde sıkça kullanılanı, kompozit malzemelerin mikro yapısına ilişkin sınıflandırmadır. Adı geçen sınıflandırmaya göre, kompozit malzemeler aşağıdaki gruplara ayrılır:

- 1) Seyrek, küçük tanecik-takviyeli kompozitler,
- 2) Tanecik-takviyeli kompozitler,
- 3) Lifli kompozitler.

Seyrek, küçük tanecik-takviyeli kompozit malzemelerin yapısı; matris ve boyutları 0.01-0.1 mikrometre ve hacim oranı ise, %1-%5 aralığında değişen

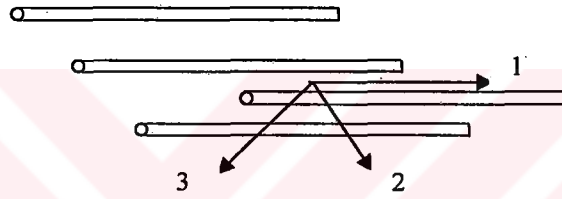
taneciklerden meydana gelir. Tanecik-takviyeli kompozitlerin yapısında ise, taneciklerin boyutu 1 mikrometreden daha büyük olup, hacim oranı %25' den fazladır. Lifli kompozit malzemelerde ise liflerin çapı 0.001 mikrometreden 100 mikrometreye kadar değişebilir, hacim oranları ise %70' e kadar artırılabilir. Tanımlanan bu gruplar içersinde en yaygın olanı, lifli kompozitlerdir. Lifli kompozit malzemeler içersinde ise, en önemli yerlerden birini, matrisi polimer malzemeden oluşan lifli kompozitler tutar. Bu türlü kompozitlerde takviye (lif) olarak bor, cam, vb. ve matris malzemesi olarak epoksi, polyester, vb. reçineler kullanılır. Adı geçen kompozit malzemeler, lif yönlerine bağlı olarak her bir tabakadaki lifler birbirine paralel ve ayrı ayrı tabakalardaki lifler belirli bir açı yapan levhalı kompozit malzeme ve yine lifleri birbirine paralel olan lifli kompozit malzeme diye gruplara ayrılır.

Bunlardan başka, kompozit malzemeler, takviyelerin geometrik şekillerine göre de sınıflandırılırlar. Bu sınıflandırmaya göre (Christensen, R.M.,1979), kompozit malzemeler; küre şekilli güçlendiricili, silindir şekilli güçlendiricili ve plak şekilli güçlendiricili olmak üzere üç sınıfa ayrılır. Bu tür sınıflandırmaya göre, tanecik güçlendiricili kompozitlere küre şeklinde (bazen de elipsoit şeklinde) güçlendiricisi olan, lifli kompozitlere ise silindir şeklinde ve plak şeklinde güçlendiricisi olan kompozitler gibi bakılabilir. Bundan dolayı kompozit malzemeler mekaniği problemlerinin matematiksel açıdan modellenmesi önemli ölçüde kolaylaşır.

Daha önce de söylenildiği gibi mikro-mekanik çerçevesinde kompozit malzemelere parçalı homojen malzeme gibi bakılır. Hem istenilen özellikte bir malzeme elde edilmesini hem de bu malzeme mekaniğinin teorik problemlerinin matematiksel olarak çözümünü kolaylaştırmak amacıyla, bu tür homojen olmayan malzemeler eşdeğer homojen anizotrop malzemelerle modellenir. Belirtmek gerekir ki, kompozit malzemelerin mikro-mekaniğinin en önemli ve gerekli problemlerinden biri, adı geçen eşdeğer homojen anizotrop malzemenin mekanik özelliklerinin bulunmasıdır. Normalize edilmiş mekanik özellikler denilen mekanik özelliklerin bulunmasında çoğu zaman Enerjetik Eşdeğerlilik Prensibi kullanılır. Bu prensibe göre: Kompozit malzemeden oluşan belirleyici elemanın toplam şekil değiştirme enerjisi, aynı hacimde ve formda olan eşdeğer homojen malzemenin şekil değiştirme

enerjisine eşittir. Bu eşitlik, normalize edilmiş mekanik özelliklerin bulunmasında rehber rolündedir. (Yahnioğlu, N.,1999)

Bu çalışmada yapılan araştırma lifli kompozitlere ait olduğundan burada ancak lifli kompozitlerin normalize edilmiş mekanik özelliklerinin bulunması üzerinde durulacaktır. Lifli kompozitlerin normalize edilmiş mekanik özelliklerini bulmak üzere Şekil 1.1.' de görüldüğü gibi, ele alınan kompozitteki liflerin (1) eksen yönünde olduğu kabul edilsin. Lifli kompozitlerin normalize edilmiş mekanik özelliklerinin bulunmasında başka türlü kompozit malzemelere de uygulanabilen yöntemde, bu malzemedeki liflerin uzunluğuna dik olan kesitteki diziliş formu göz önüne alınarak,



Şekil 1.1. Lifli Kompozitlerde Liflerin Konumunu Gösteren Şema.

eşdeğer homojen malzemedeki simetri özellikleri belirlenir ve buna uygun bünye denklemleri yazılır. Şekil 1.1.'de gösterildiği gibi, liflerin uzunluğuna dik kesitindeki diziliş formuna bağlı olarak bir yönlü lifli kompozit malzemeler ya ortotrop veya simetri ekseninin yönü liflerin doğrultusu ile üst üste düşen transversal izotrop gibi belirlenebilir. Bu konular (Sendekyj, G.P,1974, Sun, C.T and Li,S.,1988) gibi kaynaklarda daha açık ve geniş bir biçimde verilmektedir. Tek yönlü lifli kompozitlere, yukarıda söylenen nedenlerden dolayı, ortotrop malzeme gibi bakıldığında (2) ve (3) yönlerine bağlı olarak Şekil 1.1' de de gösterildiği gibi mekanik özellikler arasındaki farklılıklar çok önemli olmadığından, bu malzemelere çoğu zaman, liflerin uzunluğuna dik kesitteki diziliş formuna bağlı olamayan ve simetri eksenini lif yönleri üzerine düşen transversal izotrop malzeme gibi bakılır ve bünye denklemleri aşağıdaki gibi yazılır. (Christensen, R.M.,1979)

$$\underline{\sigma} = \underline{D}\underline{\varepsilon} \quad (1.1)$$

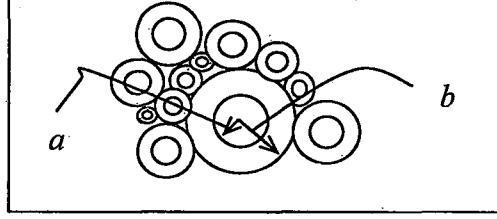
burada,

$$(\underline{\sigma})^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\}; (\underline{\varepsilon})^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{12}\} \quad (1.2)$$

$$D = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 & C_{12}^0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & C_{23}^0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^0 & C_{23}^0 & C_{22}^0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22}^0 - C_{23}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{66}^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2C_{66}^0 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Daha sonra ise, (1.3)' deki C_{ij}^0 sabitleri bulunur. Bu sabitlerin bulunması için bazı modeller kullanılır. Bu modellerden en yaygın olarak kullanılanı Poli-Dispers Model ve Üç Fazlı Model' dir. bu modellerin tanımları aşağıda kısaca açıklanmıştır.

Poli-Dispers Model: Tek yönlü lifli kompozitler için (Hashin, Z., ve Rosen, B.W.,1964) tarafından geliştirilmiştir. Bu modele göre; lifler, sürekli matris içerisinde sonsuz uzunlukta, kesiti dairesel olan silindirler şeklinde kabul edilir. Şekil 1.2' de de görüldüğü gibi yarıçapı a olan her lif, yarıçapı b olan matris malzemesinden oluşmuş kabukla sarılır. a ve b ' nin değerleri her lif için farklı olmasına rağmen, bu değerlerin a/b oranı Şekil 1.2' de görülen bütün silindirler için aynıdır. Açık ki, bu durumda ayrı ayrı silindirlerin kesitlerinin boyutu sonsuz küçük değere kadar değişebilir. Bu modelin uygulanmasında, iç içe girmiş silindirlerden tek bir silindir ve onu kaplayan matris örtü ele alınır ve bütün işlemler bunun üzerinde yapılır. Yani, a yarıçaplı silindir ve onu saran b yarıçaplı matristen oluşan parçalı homojen malzeme, eşdeğer homojen malzeme ile modellenir ve uygun sınırdeğer problemleri çözülerek ve enerjetik eşdeğerlik prensibi de kullanılarak, eşdeğer homojen malzemenin normalize edilmiş mekanik özellikleri elde edilir. Lif yönlerine dik olan düzlemdeki kayma modülünün kesin değerinin bulunması için, Üç Fazlı Model kullanılır.



Şekil 1.2. Lifli kompozitler için Poli-Dispers Model geometrisinin (2)-(3) Düzlemindeki Görünümü

Üç Fazlı Model: Bu modele göre: tek yönlü lifli kompozit malzeme a çaplı, malzemesi lif malzemesi gibi kabul edilen, sonsuz uzunluklu silindir, bu silindiri saran matris malzemedan oluşmuş b çaplı örtü ve matris örtüyü saran mekanik özellikleri aranan eşdeğer homojen malzemedan oluşan çapı sonsuz büyük olan bir örtü gibi modellenir. Bu modellemeye, üç tür malzeme katıldığından (lif, matris ve eşdeğer homojen malzeme), Üç Fazlı Model denir. Eşdeğer homojen malzemenin üç fazlı model çerçevesinde bulunan, normalize edilmiş mekanik özellikleri, lif yönlerine dik olan düzlemdeki kayma modülü hariç, Poli-Dispers Model çerçevesinde bulunan değerleriyle üst üste düşer.

Şimdi, tek yönlü lifli kompozit malzemelerin yukarıda söylenenler çerçevesinde (1.3) denklemindeki C_{ij}^0 normalize edilmiş mekanik özelliklerinin, lif ve matris malzemesi özelliklerine ve hacim oranlarına bağlı ifadeleri, bu ifadelerin çıkarılışı üzerinde durmadan ve (Christensen, R.M.,1979)' i esas alarak aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C_{11}^0 = E_{11} + 4\nu_{12}^2 K_{23}; \quad C_{12}^0 = 2\nu_{12} K_{23}$$

$$C_{22}^0 = \mu_{23} + K_{23}; \quad C_{23}^0 = -\mu_{23} + K_{23}; \quad C_{66}^0 = \mu_{12} \quad (1.4)$$

Burada; E_{11} eşdeğer homojen malzemenin Şekil 1.1' de gösterilen (1) eksen yönündeki elastisite modülü; μ_{12}, μ_{23} , sırasıyla, (1-2) ve (2-3) düzlemlerindeki kayma modülü; K_{23} (2-3) düzleminde düzlem şekil değiştirme durumundaki hacim modülü; ν_{12} eşdeğer homojen malzemenin $\sigma_{11} \neq 0; \sigma_{ij} = 0 (i=j \neq 1)$ durumunda (2) yönündeki şekil değiştirmenin (1) yönündeki şekil değiştirmeye oranının negatif işaretlisi (Poisson oranı) olup, lif ve matris malzemelerinin mekanik özellikleri ve hacim oranları cinsinden,

$$E_{11} = cE_F + (1-c)E_M + \frac{4c(1-c)(\nu_F - \nu_M)^2 \mu_M}{(1-c)\mu_M(K_F + \mu_F/3) + c\mu_M(K_M + \mu_M/3)^{-1} + 1}$$

$$\nu_{12} = (1-c)\nu_M + c\nu_F + \frac{c(1-c)(\nu_F - \nu_M)[\mu_M(K_M + \mu_M/3)^{-1} - \mu_M(K_F - \mu_F/3)^{-1}]}{(1-c)\mu_M(K_F + \mu_F/3)^{-1} + c\mu_M(K_M + \mu_M/3)^{-1} + 1}$$

$$K_{23} = K_M + \frac{\mu_M}{3} + c \left[\frac{1}{K_F - K_M + \frac{\mu_F - \mu_M}{3}} + \frac{(1-c)}{\left(K_M + \frac{4\mu_M}{3}\right)} \right]^{-1}$$

$$\frac{\mu_{12}}{\mu_M} = \frac{\mu_F(1+c) + \mu_M(1-c)}{\mu_F(1-c) + (1+c)\mu_M}; \quad \frac{\mu_{23}}{\mu_M} = 1 + c \left[\frac{\mu_M}{\mu_F - \mu_M} + \frac{\left(K_M + \frac{7\mu_M}{3}\right)}{\left(K_M + \frac{8\mu_M}{3}\right)} \right]^{-1} \quad (1.5)$$

biçiminde ifade edilir. Burada alt M indisi söz konusu sabitin matris malzemesine, alt F indisi ise lif malzemesine ait olduğunu gösterir. (1.5)' de ν_F, ν_M Poisson oranlarını, μ_F, μ_M kayma modüllerini, K_F, K_M hacim modüllerini, c takviyenin hacim oranını göstermektedir. Hacim modülleri ve kayma modüllerinin genel ifadeleri, elastisite modülü ve Poisson oranı cinsinden,

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (1.6)$$

ile verilir.

$\nu_F, \nu_M, \mu_F, \mu_M$ değerlerinin belirlenmesi için kompozit malzemeler mekaniğinin sürekli ortamlar mekaniği çerçevesinde teorik ve deneysel açıdan ciddi şekilde araştırılması gerekliliği ortaya çıkmaktadır.

İçinde viskoz veya viskoz olmayan bir akışkan bulunan, ön gerilmeli veya ön gerilmesiz elastik veya viskoelastik tüplerde harmonik dalga yayılması problemi uygulama açısından çok önemlidir. Bu konudaki çalışmalar basınç aktarma hatları, akustik gecikme hatları, akustik dalga yönlendiricileri ve endüstrinin bir çok dalında kullanılan plastik veya lastik tüpler içerisindeki pulsatif akım probleminin yanında damarlardaki dalga hareketleri üzerine yoğunlaşmıştır. Bu problemin biyomühendislik açısından önemi, dalga hızının ve taşıma katsayılarının damardaki elastik veya viskoelastik özelliklere bağlı olmasıdır. Dalga hızlarını ve taşıma katsayılarını ölçerek malzeme özelliklerinde ne gibi değişimlerin olduğunu gözlemek mümkündür. Bu nedenle daha gerçekçi bir inceleme için problemin matematik modeli kurulurken hem damarın elastik veya viskoelastik, hem de kanın mekanik özellikleri dikkate alınmalıdır. (Ercengiz,A.,1992)

Sağlıklı bir insanda sistolik kan basıncının 120 mm Hg ve diasistolik basıncın da 80 mm Hg civarında olduğu göz önünde bulundurulacak olursa, kalbe yakın yerlerdeki büyük atardamarların ortalama iç basıncının 100 mm Hg civarında olduğu söylenebilir. Ayrıca bu damarlar üzerinde yapılan deneyler, fizyolojik koşullarda damarların $\lambda \approx 1.3 \sim 1.7$ mertebesinde bir eksenel germeye maruz kaldıklarını göstermektedir. Kalbin uyguladığı periyodik basınç hareketiyle oluşan dolaşım sırasında ise basınç değişimi ± 20 mm Hg civarında olmaktadır. Genel olarak denilebilir ki vücuttaki atar damarlar ortalama $P_i = 100$ mm Hg civarında bir iç basınca ve $\lambda \sim 1.6$ mertebesinde eksenel bir germeye maruzdur. Bu basınç ve eksenel kuvvet damarlar içersinde büyükçe sayılabilecek bir ön gerilme oluşturlar. Kanın periyodik hareketi ise bu ön gerilme üzerine süperpoze edilen ± 20 mm Hg' lık basınç

sayesinde sağlanır ve yer değıştirme alanı ön deformasyona göre oldukça küçüktür. (Ercengiz,A.,1992)

Lifli kompozit ortamların gerek küçük, gerekse büyük deformasyonları pek çok kişi tarafından incelenmiştir. Hemen görüleceği gibi, büyük deformasyon teorisi bizi oldukça yüksek mertebeden nonlinear diferansiyel denklemlere götürür ve bunların çözümü ancak bazı özel hallerde yapılabilmektedir. Dış yükler altında dengede bulunan ve büyük deformasyonlara maruz sistemin denge konumun tek olup olmadığı gibi bir stabilite sorunu ortaya çıkmaktadır. Araştırmalarımız sonucunda bu konuda yapılan bir araştırmaya rastlanamamıştır. Ayrıca, sürekli ortam teorisinin uygulanabildiği lifli kompozitlerde dalga yayılımı da detaylı işlenmiş bir konu değildir.

Yakın zamana kadar yapılan çalışmalarda arteri malzemesinin sıkışmaz, homojen, elastik (veya viskoelastik) ve izotrop (bazı hallerde anizotrop) olarak kabul ediliyor, böyle bir modele dayalı bazı problemler çözülüyordu. Aslında, morfolojik yapıları dikkate alındığında, arterilerin homojen bir yapıya sahip olmadıkları, mekanik özelliklerinin hem aksenel hem de radyal doğrultularda değıştiği gözlenir. Genel olarak bir arteri duvarı içten dışa doğru sıralanmak kaydıyla intima, media ve adventisya olmak üzere üç tabakadan meydana gelmiştir. Aslında intima arterinin en iç tabakası olup yük taşıma özelliğinden çok koruma özelliğine sahiptir. Bu nedenle mekanik açıdan arteri duvarını media ve adventisya diye iki kısımdan ibaretmiş gibi düşünmek mümkündür. Media, elastik mambran ve kas liflerinden meydana gelmiştir; kolajen lifleri oldukça azdır. Halbuki en dıştaki adventisya tabakası ise bağ dokularıyla sarılı kolajen liflerinden oluşmuştur. Ayrıca bu lifler rastgele dağılmışlardır, belirli bir doğrultuya yönelmemişlerdir. Tabakaların bu özellikleri dikkate alınarak, bu çalışmada, büyük ön statik deformasyona maruz lifli kompozit ortamlarda küçük genlikli dalga yayılması, dolayısıyla stabilitesi, oldukça genel bir açıdan incelenmeye çalışılacaktır. Burada asıl amaç, pratikte büyük uygulama alanı bulan tek veya çift yönde takviye edilmiş kompozit malzemelerin büyük deformasyonlarının ortaya çıkarabileceği bazı önemli problemlere daha yakından bakabilmektir. Bunu yaparken, önce bağlı sistemlerin kinematiğini kısaca özetleyip, sonrada mevcut büyük ön statik deformasyonlar üzerine küçük deformasyonların süperpoze edilmesi halinde denge ve bünye denklemlerinin linearize edilmiş

formlarını en genel haliyle elde etmeye çalışacağız. Bunun için, bünye denklemleri iki yönde takviye edilmiş elastik ortamın özelliğine uygun olarak basitleştirilecektir. Sonunda, üniversal büyük deformasyonlara maruz tam uzayda küçük genlikli dalgaların yayılımı incelenip, kritik durumlar araştırılmıştır.

İçerisinde viskoz veya viskoz olmayan akışkan bulunan ön gerilmeli veya ön gerilmesiz elastik veya viskoelastik silindirik tüpler içerisindeki harmonik dalga yayılımı problemi mühendisliğin bir çok dalında önemli uygulama alanları bulmuştur. Bu çalışmada ele alınacak olan konu, büyük kan damarlarındaki (arteriler) pulsatif kan akımı problemidir. Bu problemin incelenmesinin biyomühendislik açısından önemi, dalga hızının ve taşıma (transmission) katsayılarının damarın elastik veya viskoelastik özelliklerine bağlı olmaları nedeniyle, bu büyüklükleri deneysel olarak ölçmek suretiyle damar malzemesinin mekanik özelliklerini tayin etme ve bunların değişimini gözleme imkanı vermesindendir. İçi sıvı dolu elastik tüplerde harmonik dalga yayılımı problemi ilk defa Young, T. tarafından incelenmiş ve bilindiği kadarıyla (Young, T.,1808)' de insan atardamarlarında (arterilerde) pals dalgalarının hızını hesaplayan ilk bilim adamı olup bugün kendi adıyla anılan dalga modu olarak bilinmektedir. Daha sonra ise Moens' in deneysel çalışmaları ile Korteweg ve Relal' in teorik çalışmaları gelmektedir. Moens ve Korteweg, viskoz olmayan sıkışmaz bir akışkan ile dolu elastik tüp içerisindeki dalga yayılımı ve dalga hızı problemlerini incelemişlerdir. Günümüzde, büyük dalga sayısına karşı gelen faz hızı literatürde Moens-Korteweg hızı (modu) olarak bilinir.

Witzig, K.,(1914), kanın viskozitenin dalga hızına etkisini ilk defa modelleyen ve dalga hızını yaklaşık hesaplayan bilim adamıdır. Tüpü ince elastik, akışkanı lineer Navier-Stokes akışkanı olarak kabul etmiş ve k dalga sayısı yaklaşık olarak,

$$k^2 = \frac{\omega^2 (1 - \sigma^2)}{c_0^2 (1 - F_{10})} \quad (1.7)$$

şeklinde verilmiştir. Burada ω açısal hızı, c_0 Moens-Korteweg hızını, σ Poisson oranını, F_{10} ise,

$$F_{10} = \frac{2J_1(\xi)}{\xi J_0(\xi)}, \quad \xi = ai^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\omega}{\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.8)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $J_n(\xi)$ n. mertebeden ve birinci tipten Bessel fonksiyonu, a iç yarıçapı, $i^2 = -1$, ν ise kinematik viskoziteyi göstermektedir. Görülüyor ki Witzig' in yaptığı aşırı basitleştirici kabul nedeniyle viskozite yalnız F_{10} ifadesi içerisinde kendisini göstermektedir. Viskozitenin sıfıra yaklaşması halinde $\zeta \rightarrow \infty$ ve $F_{10} \rightarrow 0$ olacağından (1.7) ifadesi,

$$\left(\frac{\omega}{k} \right)^2 = \frac{c_0^2}{(1 - \sigma^2)} \quad (1.9)$$

şeklini alır. Ayrıca $\sigma = 0$ alınacak olursa buradan elde edilecek faz hızı ile Moens-Korteweg hızı aynı olacaktır. Görülüyor ki Moens-Korteweg hızı, viskozitenin ve Poisson oranının sıfır olmasına karşı gelen dalga hızıdır.

Crandall, I.,(1927), sonsuz uzunluklu rijit bir tüp içerisindeki pulsatif akımın hız profilini, ortalama hızını ve akışkan empedansını elde etmiştir. Buradaki ifadeler Witzig' in elde ettiği sonuca benzemektedir.

Iberall, A.S.,(1950), elastik tüplerde dalga yayılımı problemi üzerinde etraflı bir çalışma yapmış ve sonucu,

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2 (1 - F_{10})} \quad (1.10)$$

şeklinde ifade etmiştir. Bu ifade $(1 - \sigma^2)$ faktörü hariç Witzig' in sonucu ile aynıdır.

($\sigma \cong 0$ kabul edilmiştir.) Iberall bu sonuca ulaşırken sadece radyal doğrultudaki hareketi ihmal edilmiştir.

Morgan, G.W., ve Kiely, J.P.,(1954), lineerleştirilmiş tüp denklemlerini ve akışkan için de Navier-Stokes denklemlerini kullanarak aşağıdaki kuvadratik denklemi elde etmiştir.

$$4(1-F_{10})\left(\frac{k_{c0}}{\omega}\right)^4 + [F_{10}(4\sigma-1)-4]\left(\frac{k_{c0}}{\omega}\right)^2 + (2m+F_{10})(1-\sigma^2)=0 \quad (1.11)$$

Bu denklemim iki kökü olup daha düşük değerli olanı akışkan içindeki basınç dalgasını karakterize eder ve Young modu olarak bilinir. Daha yüksek olanı ise Lamb modu adıyla anılır ve tüp içerisindeki dalgayı karakterize eder.

Womersley, J.R.,(1955), hemen hemen aynı tip modelden hareketle aşağıdaki dispersiyon bağıntısını elde etmiştir.

$$4(1-F_{10})\left(\frac{k_{c0}}{\omega}\right)^4 + [-2m(1-F_{10})+F_{10}(4\sigma-1)-4]\left(\frac{k_{c0}}{\omega}\right)^2 + (2m+F_{10})(1-\sigma^2)=0 \quad (1.12)$$

Burada $m = \frac{\rho h}{\rho_0 a}$, ρ tüpün yoğunluğu şeklinde tanımlanmış olup, tüpün kütlelesel ataletinin etkisini göstermektedir. (1.12) denkleminde $m=0$ yazıldığında sonuç (1.11) denklemi ile aynı olmaktadır.

Womersley, J.R.(1957), daha sonra (1.11) formülasyonunu biraz daha geliştirerek damar ortamının içinde bulunduğu yatağın etkisini hesaba katmak üzere eksenel yönde bir dış bağ koymuştur. Bu halde elde ettiği dispersiyon bağıntısı (1.12) ile aynı olup tek fark tüpün ataletini karakterize eden $\bar{m}$ parametresidir.

$$\bar{m} = \frac{\rho h}{\rho_0 a} \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = m \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \quad (1.13)$$

Burada ω_0 dış ortamın frekansı olup $\omega_0 \rightarrow 0$ giderken sonuç öncekinin tamamen aynı olmaktadır. $\omega_0 \gg \omega$ halinde, yani dış ortamın çok rijit olması halinde $\bar{m} \rightarrow -\infty$ olacağından (1.12) ifadesi Witzig' in sonucuna dönüşür.

Klip, W.,(1962), kalın duvarlı viskoelastik tüp içerisinde bulunan sıkışabilir Newton akışkanının simetrik olmayan dalga hareketini, daha sonra aynı yazar Klip, W.,(1964), böyle bir ortamda yayılan burulma dalgalarını incelemiştir. Her iki çalışmada da, ince tüp hali dışında frekans için açık bir ifade elde edilmemiştir.

Atabek, H.B., ve Lew, H.S.,(1966), elastik ve ince tüpün bir ön gerilmeye (radyal ve eksenel) maruz kaldığını kabul edip bunun üzerine küçük yer değiştirmeler süperpoze ederek hareket denklemlerini elde etmişler ve bu denklemlerin dalga çözümünü aramışlardır. Ön deformasyon hariç bu model Womersley modeli ile aynıdır. Daha sonra (Atabek, H.B.,1968), aynı yaklaşımı kullanarak ortotropik viskoelastik bir tüp içerisinde hareket eden viskoz akışkandaki dalga hareketini ve ön gerilmenin dalga karakteristiklerine olan etkisini incelemiştir. Her ne kadar (Atabek, H.B., ve Lew, H.S.,1966), ve (Atabek, H.B.,1968), ön gerilmeyi hesaba katmışlar ise de, çalıştıkları malzemeye ait bünye bağıntısı bulunmadığından ön gerilme ile ön deformasyon arasındaki fonksiyonel bağıntı olmadığı gibi, başlangıç gerilmesi ile artımsal gerilme arasında da fonksiyonel bir ilişki de bulunmamaktadır. Bunun bir sonucu olarak da artımsal gerilme ifadelerindeki elastik katsayılar (Young modülü ve Poisson oranı) sabit olarak alınmıştır. Aslında bunlar sabit olmayıp ön deformasyona bağlıdır, yani değerleri ön şekil değiştirme ile birlikte değişmektedir.

Mirsky, I.,(1967), bu modelleri daha da geliştirerek arteri duvarının ortotrop yapısını işin içine sokmuştur. Akışkan için Navier-Stokes denklemlerini, tüp içinde kabuk denklemlerini esas alarak yanal normal gerilmenin etkisini hesaba katmıştır. Denklemlerin karmaşık olması nedeniyle sonucu ancak sayısal olarak inceleyebilmiştir. Bu çalışmada başlangıç deformasyonu hesaba katılmamıştır. Mirsky, I.,(1968), bu çalışmasında ise büyük başlangıç deformasyonunu hesaba katmış ve dalga hızını ön deformasyona bağlı olarak hesaplayıp sonucu sayısal olarak yorumlamıştır.

Cox,R.H.,(1967) ve (1968), akışkan için lineerleştirilmiş Navier-Stokes denklemlerini, tüp için de sıkışmaz viskoelastik standart malzeme kabul ederek kalın tüp hali için dalga yayılımı problemini ele almış ve dispersiyon bağıntısını sayısal olarak incelemiştir. Daha sonra Cox, R.H.,(1967),’ de ise bu modeli geliştirerek duvar malzemesinin sıkışabilme özelliği de işin içine sokulmuştur.

Klip, W., Van Loon ve Klip, D.A.,(1967), daha önce kurdukları modeli kullanarak dalga sayısı için yaklaşık bir ifade elde etmişlerdir. Bu bilim adamları viskoelastik bir tüp içerisindeki boyuna dalgaları incelemişler ve yaklaşık analitik denklemi aşağıdaki şekilde elde etmişlerdir.

$$(1 - F_{10})k^4 - \left(\frac{\bar{\rho}\omega^2}{E}\right)k^2 + \left(\frac{\bar{\rho}\omega^2}{E}\right)^2 q = 0 \quad (1.14)$$

Burada,

$$p = (1 - F_{10})\frac{\rho}{\bar{\rho}} + 2(1 + \sigma + 2\Gamma) + F_{10}(1 - 4\sigma)\frac{\Gamma}{2}$$

$$q = (1 + \sigma)[1 + \Gamma(1 - \sigma)] \left[\Gamma F_{10} + 2\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right] \quad (1.15)$$

ve $\Gamma = 2a^2 / (b^2 - a^2)$ şeklinde tanımlanmıştır. Bu denklemin çözümünden hemen Lamb ve Young modlarını elde etmek mümkündür.

Rubinov, S.I., ve Keller, J.B.,(1971), içi sıkışabilir bir Newton akışkanı ile dolu viskoelastik malzemeden yapılmış ve dış yüzeyi tutulmuş kalın bir tüp içerisindeki eksenel simetrik dalga hareketini incelemişler ve dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Bu dispersiyon bağıntısının incelenmesi oldukça karmaşık olduğundan viskoz etkilerin ihmal edildiği ince tüp hali detaylı bir şekilde incelenmiş ve çok sayıda dalga modu elde edilmiştir. Bunlardan ikisi tüp modu, diğerleri ise akustik mod olarak kendini göstermektedir. Aynı problem daha sonra yeniden incelenmiş Rubinov, S.I., ve Keller, J.B.,(1978), viskoz etkilerin dikkate alındığı durumlarda

dalga sayısının frekans cinsinden asimptotik değerleri elde edilmiş, yine sonsuz sayıda dalga modu bulunmuştur.

Rachev, A.I.,(1980), içi sıkışmaz ve viskoz akışkan ile dolu ve ön gerilmeye maruz elastik tüp içerisindeki eksenel simetrik ve harmonik dalga yayılımı problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Damarı saran kas aktivitesinin dalga hareketine etkisini uygun bir şekilde hesaba katmış ve dalga hızının iç basınç, eksenel germe ve yaşlılık ile değişimini incelemiştir.

Moodie, T.B, Barclay,D.W., ve Tait, R.J.,(1983), içerisinde viskoz olmayan bir akışkan bulunan yarı sonsuz viskoelastik tüp için sınır değer problemini incelemişler ve basınç dalgalarının nasıl oluştuğunu ve yayıldığını tartışmışlar ve elastik analiz ile karşılaştırmalarını yapmışlardır.

Sawaizky, R.P., MoodieT.B.,(1988), ise aynı problemi viskoz akışkan hali için ele almışlar, dispersiyon bağıntısını uzun dalga boyu ve yüksek frekans halleri için elde edip viskoz olmayan hal ile karşılaştırmışlardır.

Kuiken, G.D.C.,(1984), ön gerilmeli, ortotrop ve viskoelastik ince bir tüp içerisinde bulunan Newtonian akışkanda dalga yayılımı problemini incelemiş ve dispersiyon bağıntısını elde etmiştir. Eksenel başlangıç germesinin dalga hızını artırdığını göstermiştir. Ayrıca yarı-sonsuz tüp halini inceleyerek sınırdan itibaren uzaklık ile dalganın zayıfladığını göstermiştir.

Liepsch, D.,Seeman, A., ve Siekmaan, J.,(1985), ve çalışma arkadaşları, hem deneysel hem de teorik olarak yaptıkları çalışmada, içinde Newton akışkanı bulunan ince elastik bir tüpte dalga yayılması problemini incelemişler ve dispersiyon bağıntısını elde etmişlerdir. Silikonlu lastikten yapılmış boru üzerinde yapılan deneyler ile teorik sonucun iyi bir uyum sağladığını gözlemlemişlerdir.

Demiray, H., Erbay, H., Erbay, S.,(1987), arterilerde pulsatif kan akımına ön gerilmenin etkisini daha iyi anlayabilmek için, eksenel uzama ve radyal şişmeye maruz kalın ve silindirik bir kabukta harmonik dalga yayılımı problemini incelemişler ve büyük deformasyonlar üzerine küçük deformasyonların

süperpozisyonu teorisi kullanılarak, dalga hareketini yöneten diferansiyel denklem takımı silindirik polar koordinatlarda elde etmişler ve alan denklemlerine kapalı bir çözüm vermek mümkün olmadığından söz konusu denklemleri kuvvet serisi yöntemiyle yaklaşık olarak çözmüşlerdir.

Erbay, H., Erbay, S.,(1989), çalışmalarında indirgeyici Pertürbasyon Yöntemi kullanarak, akışkan dolu nonlinear viskoelastik ince tüplerdeki dalga yayılması problemini uzun dalga yaklaşımı için incelemişler ve gevşeme parametresinin farklı ölçekleri için, modelin uzak alan davranışını karakterize eden denklemler olarak Burgers, Korteweg-de Vries, Korteweg-de Vries-Burgers denklemlerini elde etmişlerdir.

Demiray, H., Vito, R.,(1989), ise sonlu elastisite teorisini kullanarak arteri için iki tabakalı silindirik bir kabuk modeli sunmuşlardır. Morfolojik yapılarını dikkate alarak media için ortotropik, adventisya için ise izotropik elastik bir model sunmuşlar ve teorik model ile deneysel sonuçlar karşılaştırılarak modele ait maddesel sabitler tayin etmişler. Ayrıca bu modeli kullanarak iki tabakadan oluşan silindirik bir kabuğun fizyolojik kuvvetlerin etkisi altında eksenel uzama ve radyal şişme problemini incelemişlerdir.

Demiray, H., Dost, S.,(1987), çalışmalarında aort duvarını homojen, sıkışmaz ve izotrop-elastik bir malzeme gibi işleme sokarak, böyle bir malzeme için gerilme-şekil değiştirme bağıntısı sunmuşlar ve radyal şişme ve eksenel uzamaya maruz aort ile ilgili analitik sonucu mevcut deneyler ile karşılaştırarak maddesel sabitlerin sayısal değerlerini elde etmişlerdir. Elde ettikleri teorik basınç ile deneysel basınç arasındaki maksimum sapma %3.76 olup, teori ile deneyin gayet iyi uyduğunu göstermişler ayrıca teğetsel gerilmenin kalınlıkla, artımsal basınç modülünün ise iç basınç ile değişimine ayrıca yer vermişlerdir.

Erdem, A., Öntürk, N.,(1989), ise sürekli dağılım gösteren genleşebilir iki aileli fiber dağılımı ile takviye edilen bir malzemenin mekanik davranışı ile takviye edilen bir malzemenin mekanik davranışı için fonksiyonel bir viskoelastik model vermişlerdir.

Demiray, H., Akgün, G.,(1997), içerisinde viskoz akışkan bulunan ince, viskoelastik bir tüpteki dalga yayılması problemini teorik olarak ele almışlardır. Akışkanı sıkışmaz ve Newtonian olarak kabul etmişler, tüp malzemesini ise sıkışmaz, izotrop ve viskoelastik olarak ele almışlardır. Ayrıca arterilerin λ_z eksenel germeye ve P_i iç basınca maruz olduklarını kabul etmişler, akışkan ve katı malzemelerinin alan denklemlerinde harmonik dalga çözümünü aramışlardır.

Demiray, H., Ercengiz, A.,(1994), içinde akışkan olan elastik tüplerdeki iç gerilmelerin analizini en iyi şekilde, silindirik kabuk gibi düşünülen ve eksenel germe ile iç basınca sahip olan bu tüplerin harmonik dalga yayılımı ile açıklanabileceğini ifade etmişlerdir. Bunun için akışkanı sıkışmaz Newtonian akışkanı olarak kabul etmişler, tüp malzemesini ise sıkışmaz, izotropik ve elastik malzeme kabul etmişlerdir. Burada büyük şekil değiştirmeler üzerine eklenen küçük şekil değiştirmeler teorisini kullanmışlardır. Daha sonra da katı cismin diferansiyel denklemlerinin katsayıları için alan denklemlerini çözmüşler ve sınır şartlarını uygulamışlardır. İç basınç, eksenel germe ve kalınlık oranına bağlı olarak dispersiyon ilişkilerini araştırmışlardır.

Demiray, H.,(1994), Fizyolojik şartlar altında büyük iç statik deformasyonlar ve küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpoze olduğu iç deformasyonlara maruz arteri göz önüne alınmış ve viskoelastik Kelvin-Voight modeli kullanılmıştır. Buradaki analiz için bazı basitleştirici kabuller yapmış, malzemeyi izotrop ve sıkışmaz kabul etmiş ve deformasyon tansörünün lineer fakat Finger deformasyon tansörünün nonlineer olduğunu kabul etmiştir. Bünye denklemlerinde gözlenen malzeme sabitlerinin sayısal değerlerini açıklamak için iki problem çözülmüş bunlardan birincisi radyal genişmesi ve eksenel girmesi olan bir silindirik tüp problemi diğeri de silindirik bir çubukta burulma dalgaları yayılımı problemidir. Simon' un yaptığı deneysel sonuçlar ile ilk problemin sonuçlarını karşılaştırmıştır. Daha sonra da elastik katsayıların sayısal değerlerini hesaplamış ikinci problem için ise viskoelastik katsayıların hesabı için bir metod ileri sürmüştür.

Demiray, H., Ercengiz, A.,(1991), çalışmalarında içinde viskoz olmayan akışkan bulunan elastik tüpte harmonik dalga yayılımı problemini incelemişler. Kan gerçekte Non-Newtonian bir akışkan olarak bilinmesine karşılık, matematik analiz

için basitleştirme yapılarak Non-viskoz kabul etmişler ve tüp malzemesi için ise sıkışmaz, izotrop ve elastik kabulü yapmışlardır. Ayrıca büyük şekil değiştirmeler üzerine eklenen küçük şekil değiştirmeler teorisini kullanmışlardır. Daha sonra da alan denklemlerini çözmüşler ve sınır şartlarını uygulamışlardır. Bu çalışmalarında simetrik olmayan dalga'nın dalga hızının simetrik durum ile karşılaştırıldığında daha büyük olduğunu gözlemlemişlerdir.

Demiray, H., Ercengiz, A.,(1991), ise büyük statik ön deformasyon üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpozisyonu teorisini kullanarak, ön gerilmeli ve içi viskoz bir akışkan ile dolu viskoelastik tüp içersindeki harmonik dalga yayılımı problemini incelemişlerdir. Akışkana ait hareket denklemlerine kapalı çözüm vermek mümkün olduğu halde, katsayıların değişken olması nedeniyle katıya ait hareket denklemlerine kesintili kuvvet serisi çözümü verilebilmiştir. Uygun sınır koşulları kullanılarak dispersiyon bağıntısı elde edilmiş ve çeşitli özel durumları araştırılmıştır.

Demiray, H., Ercengiz, A.,(1995), bu çalışmalarında ele aldıkları ise büyük kan damarlarındaki (arteriler) pulsatif kan akımı problemidir. Bu problemin incelenmesinin biyomühendislik açısından önemi, dalga hızının ve taşıma (transmission) katsayılarının damarın elastik veya viskoelastik özelliklerine bağlı olmaları nedeniyle, bu büyüklükleri deneysel olarak ölçmek suretiyle damar malzemesinin mekanik özelliklerini tayin etme ve bunların değişimini gözleme imkanı vermesindendir.

2. ALAN DENKLEMLERİ VE SINIR KOŞULLARI

Bu çalışmaya esas teşkil edecek olan konu, damar içerisinde dalga yayılımı olduğundan damarın ve kanın davranışını ayrı ayrı incelemek gerekecektir. Gerçekte pulsatif hareket kalp tarafından kana uygulanmakta ise de kanın damara uyguladığı iç basınç ve viskozitenin çeperde oluşturduğu sürtünme nedeniyle kandakine benzer bir hareket de damar içersinde oluşur. Bu hareketlerin incelenmesi için kanın ve damarın hareketini yöneten diferansiyel denklemlerin elde edilmesi gerekmektedir. Bu denklemler aşağıda incelenmiştir.

2.1. AKIŞKANIN HAREKET DENKLEMLERİ

Kan gerçekte Non-Newtonian bir akışkandır. Bilindiği gibi kan yapı olarak plazma ve hücrelerden oluşmaktadır. Plazmanın %90'ını su, %7'sini protein ve geri kalanını da organik ve inorganik maddeler teşkil etmektedir. Hücresel kısmı ise alyuvarlar, akyuvarlar ve trombositlerden oluşmaktadır. Kanda alyuvarlar 5.10^6 adet/mm³, akyuvarlar 5000-8000 adet/mm³, trombositler ise 250000 adet/mm³ oranında bulunmaktadır. Hücresel kısmın hareketi küçük yarıçaplı damarlarda önem kazandığından, daha büyük yarıçaplı damarların göz önüne alındığı bu çalışmada hücresel hareket dikkate alınmayıp plazma ile birlikte düşünülecektir. Ayrıca damara üniform bir ön basıncın etki ettiği, dolayısıyla bir ön hızın bulunmadığı varsayılacaktır. Kalbin periyodik hareketi sırasında kanda oluşacak pulsatif basınç nedeniyle kanda küçük hız değişimleri olacaktır.

Genelde Non-Newtonian akışkan olan kan, bu yaklaşım altında Newtonian viskoz bir akışkan gibi davranacak ve bu tip akışkanlara ait hareket ve bünye denklemleri incelenmekte olan kan için de geçerli olacaktır. Bu çalışmada ayrıca kan sıkışmaz bir akışkan olarak kabul edileceğinden böyle bir akışkana ait hareket denklemleri özet olarak aşağıda sunulmuştur.

(i) Kütlelenin Korunumu:

Belirli bir hacim içersindeki toplam kütlelenin zamanla değişmediğini ifade eden bu ilke, sıkışmaz bir akışkan için aşağıdaki şekli alır

$$Div \underline{\hat{v}} = 0, \text{ veya } \hat{v}_{,k}^k = 0, \quad \rho_F = \rho_0 = \text{sabit} . \quad (2.1.1)$$

Burada $\underline{\hat{v}}$ akışkanın hızını, $\rho_F = \rho_0$ ise akışkanın sabit olan kütle yoğunluğunu göstermektedir.

(ii) Lineer ve Açısal Momentumların Denkliği:

Sürekli ortama ait lineer momentumun denkliği ifadesi aşağıdaki gibi verilir.

$$\hat{t}_{,k}^{kl} + \rho_0 (\hat{f}^l - \hat{a}^l) = 0, \quad \hat{t}^{kl} = \hat{t}^{lk} \quad (2.1.2)$$

Burada $\hat{t}^{kl}$ akışkanın gerilme tansörünü, $\hat{f}$ birim kütleye gelen hacim kuvvetini, $\hat{a}$ ise akışkana ait ivmeyi göstermektedir. Gerilme tansörünün simetrik olması açısal momentumun denkliğinin doğal sonucudur. Virgülden sonra gelen harf ise o koordinata göre kısmi türevi göstermektedir.

(iii) Bünye denklemleri:

Termal etkilerin dikkate alınmadığı sıkışmaz bir akışkana ait en genel bünye denklemi

$$\hat{t}_l^k = -\hat{p} \delta_l^k + \alpha_1 d_l^k + \alpha_2 d_m^k d^m_l \quad (2.1.3)$$

şeklinde verilebilir. Burada $\hat{p}$ tayin edilmesi gerekli hidrostatik basınç terimini göstermekte olup şekil değiştirme d_{kl} tansörü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$d_{kl} = \frac{1}{2} (\hat{v}_{k,l} + \hat{v}_{l,k}) \quad (2.1.4)$$

(2.1.3) ifadesinde görülen α_1 ve α_2 fonksiyonları

$$\alpha_i = \alpha_i(II_d, III_d), \quad (I_d = \hat{v}^k_{,k} = 0), \quad (i=1,2) \quad (2.1.5)$$

şeklindedir. Burada II_d ve III_d büyüklükleri $\underline{d}$ şekil değiştirme hızı tansörünün ikinci ve üçüncü invaryantlarını göstermektedir.

P_i üniform ön basıncına karşı gelen hız büyüklüğü sıfır olduğundan, kanın hareketi sırasında oluşan $\hat{v}$ hızı ve hız gradyanının küçük olduğu düşünülürse (2.1.3) ifadesi lineerleşir ve aşağıdaki şekli alır.

$$\hat{t}_i^k = -\hat{p}\delta^k_i + 2\mu d^k_i \quad (2.1.6)$$

Burada $\alpha_1 = 2\mu$ ve $\alpha_2 = 0$ yazılmıştır.

(2.1.6) ifadesi (2.1.2) de yerine konacak olursa küçük hız değişimleri için akışkanın hareket denklemleri,

$$\rho_0 \frac{\partial \hat{v}_k}{\partial t} = \rho_0 \hat{f}_k - \hat{p}_{,k} + \mu \hat{v}_{k,||} \quad (2.1.7)$$

şeklini alır. Burada tekrarlanan indisler üzerinde toplama işleminin uygulanacağını hatırlamakta yarar vardır.

Şimdi de aort malzemesinin elastik bir katı olduğunu varsayarak buna ait hareket denklemini elde etmeye çalışalım.

2.2. LİFLİ KOMPOZİTLERİN KİNEMATİĞİ

Her hangi bir t_0 başlangıç anında E_3 uzayının R_0 bölgesini kaplayan B_0 cismini gözönüne alalım. Diğer bir t anında, uzayın $R(t)$ bölgesini kaplayan cismi $B(t)$ kısaca B_t ile gösterelim. R_0 ile $R(t)$ (veya B_0 ile B_t) arasındaki bire bir bir transformasyon bulunabilir ve cismin hareketi olarak adlandırılır. $\underline{x} \in B_t$ olduğuna göre, bu transformasyon matematik olarak,

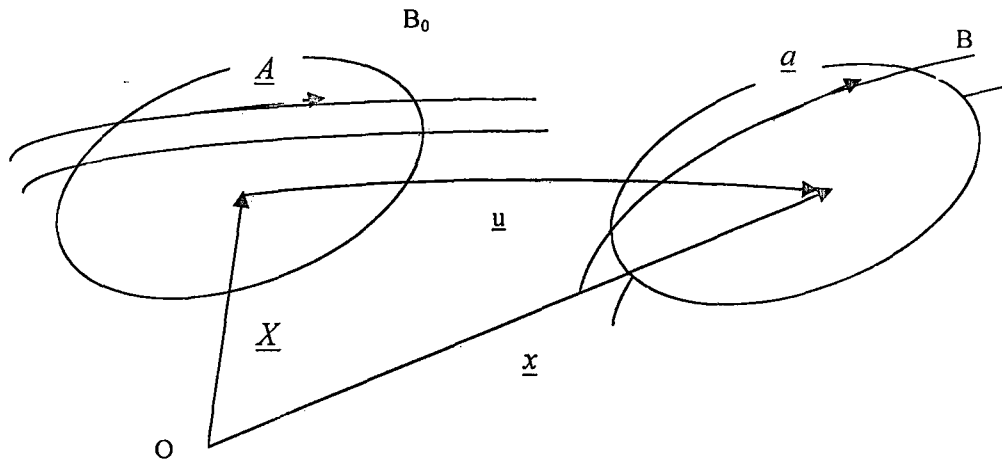
$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}, t) \quad (2.2.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\underline{X}(\underline{X}_K, K=1,2,3)$ ve $\underline{x}(\underline{x}_k, k=1,2,3)$, sıra ile cismin maddesel ve uzaysal koordinatları olarak adlandırılır.

Maddesel noktanın hız ve ivmesi bilinen tarzda tarif edilir.

$$\underline{v} \equiv \left. \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \right|_{\underline{x}} \quad \underline{a} \equiv \left. \frac{\partial^2 \underline{x}}{\partial t^2} \right|_{\underline{x}} \quad (2.2.2)$$

Cismin, Şekil 2.1' deki gibi, $\underline{A}(\underline{X})$ vektörüne teğet lifler ile takviye edildiğini varsayalım. Bu liflerin dağılımı, sürekli ortam mekaniğine uygulayacak derecede sık olmalıdır. Daha açık bir şekilde belirtmek gerekirse lifler arasında kalan en büyük mesafe, ortamda yayılan dalganın dalga boyundan oldukça küçük olmalıdır.



Şekil 2.1 Kompozit Bir Malzemenin Sonlu Deformasyonu

Aksi halde liflerin davranışını tek tek ele almak veya lattis dinamiğine benzer bir yaklaşıma başvurmak gerekebilir. Biz liflerin meydana getirdiği sistemin bir bütün olarak davrandığını kabul edeceğiz. Buna göre, deformasyondan sonra liflerin doğrultusu $\underline{a}(x)$ vektörüne teğet olacaktır. Bu vektörlerin birim uzunlukta olduklarını kabul eder ve deformasyondan önce ve sonraki elementer yay uzunlukları, sıra ile, dS ve ds ile gösterilirse, aşağıdaki bağıntılar geçerlidir.

$$dX_K = A_K dS \quad , \quad dx_k = a_k ds \quad (2.2.3)$$

Deformasyon gradyanı $x_{k,k} \equiv \frac{\partial x_k}{\partial X_K}$ olarak tariflenirse, (2.2.3)₂ denklemi,

$$dx_k = x_{k,K} dX_K = x_{k,K} A_K dS = a_k ds \quad (2.2.4)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer lifin birim uzama oranı Λ ile gösterilirse ($\Lambda = ds/dS$), teğet vektörler arasında aşağıdaki ilişki elde edilir.

$$a_k = (1/\Lambda) x_{k,K} A_K \quad (2.2.5)$$

Tarif gereğince $a_k a_k = 1$ olduğundan, sonuç aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$a_k a_k = \frac{1}{\Lambda^2} x_{k,K} x_{k,L} A_K A_L = \frac{1}{\Lambda^2} C_{KL} A_K A_L = 1$$

veya

$$C_{KL} A_K A_L = \Lambda^2 \quad (2.2.6)$$

Burada $C_{KL} = x_{k,K} x_{k,L}$ şeklinde tariflenen tansör Green deformasyon tansörü olarak bilinir. Ayrıca, tekrarlanan indisler üzerinde Einstein toplama kuralının uygulandığı da unutulmamalıdır.

Eğer incelenen cisim bu doğrultuda ($\underline{A}$ doğrultusunda) uzamaz veya kısalmaz tipten ise (genellikle literatürde incelenen takviye edilmiş kompozit tipi budur), (2.2.6) denklemi aşağıdaki şekli alır.

$$C_{KL} A_K A_L = 1 \quad (2.2.7)$$

Diğer taraftan, (2.2.3)₁ denkleminde A_K vektörü,

$$dX_K = X_{K,k} dx_k = X_{K,k} a_k ds = A_K dS$$

veya

$$A_K = \Lambda X_{K,k} a_k \quad (2.2.8)$$

olarak bulunur. $\underline{A}$ 'nın kendisiyle skaler çarpımı gözönüne alınır ve $c_{kl} = X_{K,k} X_{K,l}$ tarifi yapılırsa,

$$A_K A_K = \Lambda^2 c_{kl} a_k a_l = 1 \quad (2.2.9)$$

elde edilir. Burada c_{kl} 'ye Cauchy deformasyon tansörü adı verilir. Eğer cisme bu doğrultuda uzamazlık şartı koşulacak olursa ($\Lambda = 1$), yukarıdaki uzamazlık denklemi,

$$c_{kl} a_k a_l = 1 \quad (2.2.10)$$

şeklini alır. Görüldüğü gibi, (2.2.7) ve (2.2.10) denklemleri uzamazlık şartlarının değişik iki formunu vermektedir.

Ayrıca bu çalışmada söz konusu edilecek olan malzeme sıkışmaz tipten olabileceğinden, burada biraz da sıkışmazlık şartından bahsedelim. Malzeme sıkışmaz ise, deformasyon sırasında hacimde hiçbir değişiklik olmayacak demektir. Halbuki elementer hacim elemanları arasındaki oran Jacobian ile ilgili olduğundan,

sıkışmaz malzeme için $J=\det|x_{k,K}|=1$ şartı sağlanmalıdır. Ayrıca, $\det|C_{KL}|=J^2$ bağıntısını dikkate alarak, sıkışmazlık şartı $\det|C_{KL}|=1$ şeklinde de ifade edilebilir.



2.3. KÜÇÜK HAREKETLERİN BÜYÜK STATİK ŞEKİL DEĞİŞTİRMELER ÜZERİNE SÜPERPOZİSYONU

B konumunda R uzay bölgesini işgal eden bir elastik cisim göz önüne alalım. B konumu, başlangıçta R_0 bölgesini işgal eden B_0 konumundaki cismin statik sonlu şekil değiştirmesi sonucu geldiği konum olarak göz önüne alınacaktır. Eğer doğal konumdaki bir maddesel noktanın koordinatlarını (X_1, X_2, X_3) ve B konumunda aynı noktanın koordinatlarını (x_1, x_2, x_3) ile gösterirsek statik sonlu şekil değiştirme

$$\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}) \quad (2.3.1)$$

ile verilir. Bu şekil değiştirme sonucu cismin bünye denklemlerine de bağlı olacak gerilme alanı,

$$t_{kl,k}^0 + \rho f_l^0 = 0 \quad R \text{ içinde} \quad (2.3.2)$$

denge denklemlerini ve

$$t_{kl}^0 n_k = t_l^0 \quad S \text{ üzerinde}$$

sınır koşullarını sağlamalıdır. Bu denklemlerde t_{kl}^0 Cauchy gerilme tansörü, ρ cismin kütle yoğunluğu, f_l^0 B' de kütle kuvveti ve t_l^0 R' nin S yüzeyi üzerinde sınır gerilmesini ve n S yüzeyinin birim dış normalini göstermektedir.

B denge konumunun zaman ve konumun fonksiyonu olan bir $eu(x, t)$ dinamik yer değiştirmesi ile yeni bir $B'(t)$ konumuna geçecek ve $R'(t)$ uzay bölgesini işgal edecektir. Şekil 2.2'den görülebileceği gibi B'deki bir maddesel noktanın koordinatları

$$x'_k = x_k + \varepsilon u_k(\underline{x}, t) \quad (2.3.3)$$

olarak yazılabilir. Burada $\varepsilon u_k(\underline{x}, t)$ Δt zaman aralığındaki yerdeğiştirmeyi göstermektedir.

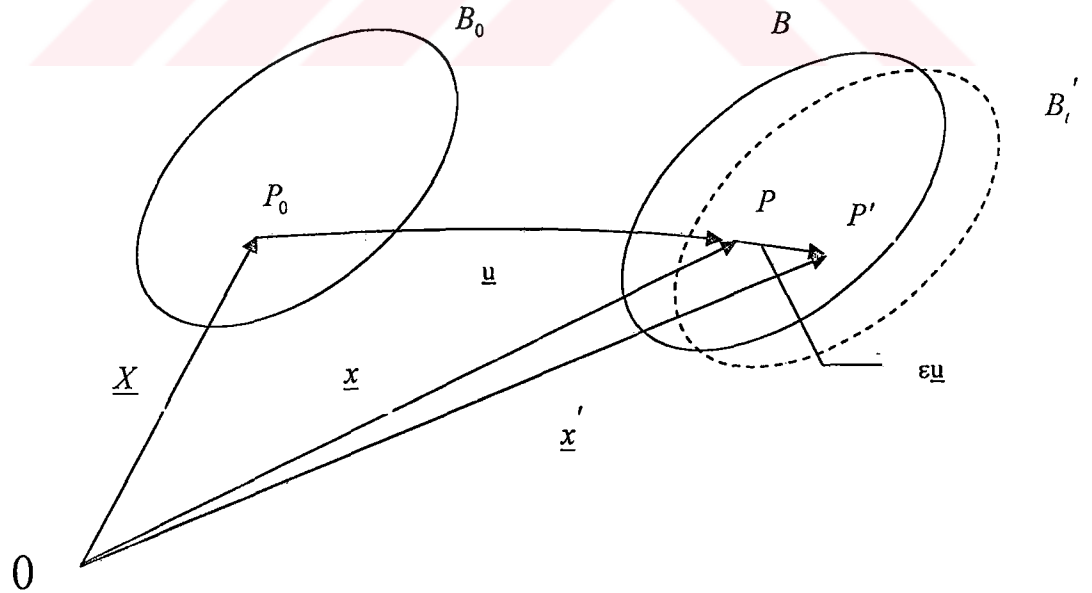
B' konumunda ölçülen t_{kl} Cauchy gerilme tansörü, B konumunda ölçülen T_{kl} Piola-Kirchhoff gerilme tansörüne

$$t_{kl} = (J)^{-1} \frac{\partial x'_k}{\partial x_m} T_{ml} \quad J = \det \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_l} \right) \quad (2.3.4)$$

ile bağlıdır. Ayrıca T_{kl} gerilmesi B konumunda

$$T_{kl}(\underline{x}, t) = t_{kl}^0 + \varepsilon T_{kl}(\underline{x}, t) \quad (2.3.5)$$

yazılabilir. Burada T_{kl} , B konumunda ölçülen artımsal Piola-Kirchhoff tansörüdür.



Şekil 2.2 Kompozitin Ardışık Denge Konumları

(2.3.3) ifadesinden sonsuz küçük şekil değiştirmenin J Jacobianı için

$$J = 1 + \varepsilon u_{k,k} \quad (J)^{-1} = 1 - \varepsilon u_{k,k} \quad (2.3.6)$$

elde edilir. (2.3.6) ve (2.3.5) ifadeleri (2.3.4) denkleminde kullanılır ve sadece ε 'lu terimler tutulursa (ε^2 ve daha küçük terimler ihmal edilirse)

$$t_{kl} = t_{kl}^0 + \varepsilon (T_{kl} + t_{ml}^0 u_{k,m} - t_{kl}^0 u_{m,m}) \quad (2.3.7)$$

elde edilir. O halde Cauchy gerilme tansöründeki artım

$$t_{kl} = T_{kl} + t_{ml}^0 u_{k,m} - t_{kl}^0 u_{m,m} \quad (2.3.8)$$

olacaktır. (2.3.7) ifadesi yeniden,

$$t_{kl} = t_{kl}^0 + \varepsilon t_{kl} \quad (2.3.9)$$

olarak yazılabilir. $H_{kl} = U_{k,l}$ ile bir yerdeğiştirme gradyanı tansörü tanımlarsak (2.3.7) ifadesi,

$$t = T + H t^0 - t^0 H \quad (2.3.10)$$

formunda yazılabilir.

Şimdi küçük yer değiştirme sonucu sınır koşullarındaki değişimi göz önüne alacağız. $\underline{n}'$, B' konumunda S' yüzeyinin birim dış normali ile $\underline{n}$ normali arasındaki ilişki,

$$\underline{n}' = \underline{n} + \varepsilon \underline{n}$$

olarak yazılabilir. S' deki bir yüzey elamanı ile S deki bir yüzey elamanı (Eringen, A.C ve Şuhubi, E.S.,1974)' de aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$da'_k = J \frac{\partial x'_l}{\partial x_k} da_l \quad \frac{da'}{da} = J \left(c_{kl}^{-1} n_k n_l \right)^{1/2} \quad (2.3.11)$$

Burada c_{kl}^{-1} Finger şekil değiştirme tansörüdür ve

$$c_{kl}^{-1} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_m} \frac{\partial x_l}{\partial x'_m} \quad (2.3.12)$$

olarak tanımlanmıştır.

$$da'_k = da' n'_k \quad da_k = da n_k$$

bağıntısı göz önünde tutulduğunda (2.3.11)'den

$$n'_k = n_l \left(\frac{\partial x'_l}{\partial x_k} \right) \left(c_{mn}^{-1} n_m n_l \right)^{-1/2} \quad (2.3.13)$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\frac{\partial x'_l}{\partial x_k} = \delta_{kl} - \varepsilon u_{l,k}$$

olduğu hatırlanırsa (2.3.12)'den

$$c_{kl}^{-1} = \delta_{kl} - \varepsilon (u_{k,l} + u_{l,k}) = \delta_{kl} - 2\varepsilon \tilde{e}_{kl} \quad (2.3.14)$$

elde edilir. Burada $\tilde{e}_{kl}$ sonsuz küçük şekil değiştirme tansörü olup

$$\tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k})$$

olarak tanımlanmıştır. (2.3.14) ifadesi (2.3.13)'de kullanılırsa

$$n'_k \cong n_l (\delta_{lk} - \varepsilon u_{l,k}) (1 + \varepsilon \tilde{e}_{(n)}) = n_k + \varepsilon (\tilde{e}_{(n)} \delta_{lk} - u_{l,k}) n_l \quad (2.3.15)$$

bulunur. Burada

$$e_{(n)} = \tilde{e}_{kl} n_k n_l$$

tanımlanmış olup n doğrultusunda sonsuz küçük genişlemedir.

O halde

$$n'_k = \tilde{e}_{(n)} n_k - u_{l,k} n_l \quad n = \tilde{e}_{(n)} n - H^T n \quad (2.3.16)$$

sonucu elde edilir.

Yüzey gerilmeleri üzerindeki sınır koşulları

$$(t_{kl}^0 + \varepsilon t_{kl})(n_k + \varepsilon n_k) \cong t_{kl}^0 n_k + \varepsilon (t_{kl}^0 n_k + t_{kl} n_k) \quad S \text{ üzerinde} \quad (2.3.17)$$

yazılabilir. t_l ile yüzey gerilmesindeki artım tanımlanırsa yukarıdaki ifadede

$$t_{kl}^0 n_k + t_{kl} n_k = t_l \quad S \text{ üzerinde} \quad (2.3.18)$$

yazılabilir. Bu ifadede (2.3.16) ifadesi kullanılırsa

$$t_{kl} n_k = t_l - t_l^0 e_{(n)} + t_{kl}^0 u_{m,k} n_m \quad (2.3.19)$$

elde edilir. (2.3.8) ifadesi göz önünde tutulduğunda (2.3.19) için

$$T_{kl} n_k = t_l + (u_{k,k} - \tilde{e}_{(n)}) t_l^0 \quad (2.3.20)$$

yazılabilir.

Artımsal gerilme tansörlerini elde ettikten sonra artımsal hareket denklemlerini oluşturmak gerekecektir.

B konumunda hareket denklemi,

$$T_{kl,k} + \rho f_l = \rho \varepsilon \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} \quad (2.3.21)$$

şeklindedir. Burada ivme ifadesindeki yüksek mertebe terimler ihmal edilmiştir. f kütle kuvveti için,

$$\underline{f} = \underline{f}^0 + \varepsilon \underline{f}$$

yazar ve (2.3.5) ifadesini kullanırsak artımsal gerilmeler cinsinden hareket denklemi (2.3.21)'den

$$T_{kl,k} + \rho f_l = \rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} \quad (2.3.22)$$

bulunur. Son denklemi (2.3.8) ve (2.3.2) denklemlerinde kullanırsak artımsal Cauchy gerilme tansörü cinsinden hareket denklemleri (2.3.22)'den

$$t_{kl,k} - t_{ml,k}^0 u_{k,m} + \rho f_l u_{k,k} = \rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} \quad (2.3.23)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca bir $\tilde{t}_{kl}$ tansörü

$$t_{kl} = \tilde{t}_{kl} + t_{km}^0 u_{l,m} + t_{lm}^0 u_{k,m} \quad (2.3.24)$$

olarak tanımlanırsa (2.3.23) hareket denklemi ve (2.3.19) sınır koşulları

$$\tilde{t}_{kl,k} + t_{km}^0 u_{l,km} + t_{lm}^0 u_{k,km} + \rho f_l - \rho (f_l^0 u_{k,k} + f_k^0 u_{l,k}) = \rho \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} \quad (2.3.25)$$

$$\tilde{t}_{kl}n_k = t_l - (\tilde{e}_{(n)}\delta_{lk} + u_{l,k})t_k^0 \quad S \text{ üzerinde} \quad (2.3.26)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca (2.3.8)'den artımsal Piola-Kirchhoff gerilme tansörü

$$T_{kl} = \tilde{t}_{kl} + t_{kl}^0 u_{m,m} + t_{km}^0 u_{l,m} \quad (2.3.27)$$

olarak yazılabilir.

Şimdiye kadar denklemleri türetirken malzemenin bünyesi göz önüne alınmamıştı. $\underline{T}, \underline{t}$ veya $\underline{\tilde{t}}$ gerilmeleri malzemenin bünye denklemleri ile belirlenecektir.

Biyolojik yumuşak dokuların davranışı genelde viskoelastik özellik göstermektedir. Ancak küçük şekil değiştirme anları durumunda viskoelastik etkiler ihmal edilebilir. Bu nedenle ve matematiksel kolaylık sağlamak amacı ile damar malzemesi hiper-elastik malzeme olarak kabul edilecektir. Diğer yandan bu çalışmada göz önüne alınan damar modeli iki farklı katmandan yani Media ve Adventitia'dan oluşmaktadır. Bu durumda tüm damar için tek bir bünye denklemi vermek mümkün olmayacaktır. Ayrıca bu katmanların belli doğrultularda lifli bir yapıya sahip olduğu kabul edileceğinden izotrop malzemeler için elde edilen sonuçlar geçerli olmayacaktır. Göz önüne alınan modelde malzeme anizotrop yapıya sahip olacaktır.

Hiperelastik bir malzeme için şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu,

$$\Sigma = \Sigma(F_{kK}) \quad (2.3.28)$$

olarak verilir. Burada

$$F_{kK} = \frac{\partial x_k'}{\partial x_K} = F_{kK}^0 + \varepsilon u_{k,K} \quad F_{kK}^0 = \frac{\partial x_k}{\partial x_K}$$

olarak tanımlanmıştır. Buna göre B_0 konumu ile B' konumu arasında tanımlanmış olan Piola-Kirchhoff gerilme tansörü bünyesel olarak aşağıdaki gibi verilir.

$$T_{Kk} = \frac{\partial \Sigma}{\partial F_{kK}} \quad (2.3.29)$$

B' de ifade edilmiş olan Cauchy gerilme tansörü ile T_{Kk} arasında aşağıdaki ilişki mevcuttur.

$$T_{Kk} = \det \left(\frac{\partial x'_m}{\partial X_M} \right) \left(\frac{\partial X_K}{\partial x'_l} \right) t_{lk} \quad (2.3.30)$$

Bu ifade aşağıdaki gibi düzenlenebilir.

$$T_{Kk} = \det \left(\frac{\partial x'_m}{\partial x_N} \frac{\partial x_n}{\partial X_M} \right) \frac{\partial X_K}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial x'_l} t_{lk} = J^0 J \frac{\partial X_K}{\partial x_p} \frac{\partial x_p}{\partial x'_l} t_{lk} \quad (2.3.31)$$

burada

$$J = \det \left(\frac{\partial x'_k}{\partial x_l} \right) \quad J^0 = \det \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_K} \right)$$

olarak tanımlanmıştır. B ve B' konumları arasında tanımlanmış Piola-Kirchhoff tansörü,

$$T_{pk} = J \left(\frac{\partial x_p}{\partial x'_l} \right) t_{lk} \quad (2.3.32)$$

olarak tanımlanırsa (2.3.31) ifadesinden

$$T_{Kk} = J^0 X_{K,l} T_{lk}$$

veya

$$T_{kl} = (J^0)^{-1} x_{k,K} T_{Kl} = (J^0)^{-1} F_{kK}^0 T_{Kl} \quad (2.3.33)$$

elde edilir. Bünye denklemlerinde lineer bir yaklaşım oluşturabilmek için

$$F_{kK} = F_{kK}^0 + \varepsilon u_{k,K}$$

ifadesini göz önünde tutarak (2.3.29)'da $\varepsilon=0$ civarında seri açılımı yapılır ve ilk iki terim tutulacak olursa,

$$T_{Kk} = T_{Kk}^0 + \varepsilon A_{KkLl} u_{l,L} = T_{Kk}^0 + \varepsilon A_{KkLl}^0 x_{m,L} u_{l,m} \quad (2.3.34)$$

elde edilir. Burada

$$T_{Kk}^0 = \left. \frac{\partial \Sigma}{\partial F_{kK}} \right|_{F_{kK}=F_{kK}^0} \quad A_{KkLl}^0 = \left. \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial F_{kK} \partial F_{lL}} \right|_{F_{mM}=F_{mM}^0} \quad (2.3.35)$$

olarak tanımlanmıştır. (2.3.33), (2.3.34) ve (2.3.5) ifadeleri yardımı ile

$$t_{kl}^0 + \varepsilon T_{kl} = (J)^{-1} F_{kK}^0 T_{Kl}^0 + \varepsilon (J^0)^{-1} A_{KkLl}^0 F_{kK}^0 F_{mL}^0 u_{n,m} \quad (2.3.36)$$

bulunur. B konumunda Cauchy gerilme tansörünün

$$t_{kl}^0 = (J^0)^{-1} F_{kK} T_{Kl}$$

olduğu hatırlanır ve

$$B_{klmn}^0 = (J^0)^{-1} A_{KlLn}^0 F_{kK}^0 F_{mL}^0 \quad (2.3.37)$$

tanımı yapılırsa (2.3.36)'dan

$$T_{kl} = B_{klmn}^0 u_{n,m} \quad (2.3.38)$$

elde edilir. B_{klmn}^0 tansörünün tüm bileşenleri bünye denklemi verilen bir malzeme ve $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X})$ şekil değiştirme alanı için tamamen belirlenebilir.

Hiper-elastik malzemeler için

$$A_{KKLL}^0(C, X) = 4 \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial C_{KM} \partial C_{LN}} F_{kK}^0 F_{lN}^0 + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} \delta_{kl} \quad (2.3.39)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade yardımı ile (2.3.37) ifadesi

$$B_{klmn}^0 = \delta_{ln} t_{km}^0 + C_{klmn}^0 \quad (2.3.40)$$

olarak yazılabilir. Burada Hiper-elastik malzemeler için B_0 konumundaki Cauchy gerilme tansörü

$$t_{kl}^0 = 2(J^0)^{-1} \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} F_{kK}^0 F_{lL}^0 \quad (2.3.41)$$

şeklinde ifade edilebileceği kullanılmış ve

$$C_{klmn}^0 = 4(J^0)^{-1} \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial C_{KL} \partial C_{MN}} x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M} x_{n,N} \quad (2.3.42)$$

tanımı yapılmıştır. Burada

$$C_{klmn}^0 = C_{lkmn}^0 = C_{mnlk}^0 = C_{nmlk}^0$$

simetri özelliklerinden dolayı sadece 21 bağımsız bileşen vardır. Ayrıca (2.3.40) yardımı ile (2.3.38)'den

$$T_{kl} = t_{km}^0 u_{l,m} + C_{klmn}^0 u_{n,m} = t_{km}^0 u_{l,m} + C_{klmn}^0 \tilde{e}_{mn} \quad (2.3.43)$$

elde edilir. Yine (2.3.8)'den artımsal Cauchy gerilme tansörü

$$t_{kl} = t_{km}^0 u_{l,m} + t_{lm}^0 u_{k,m} - t_{kl}^0 u_{m,m} + C_{klmn}^0 \tilde{e}_{mn} \quad (2.3.44)$$

yazılabilir. (2.3.27) ve (2.3.43) ifadeleri karşılaştırılırsa

$$\tilde{t}_{kl} = -t_{kl}^0 u_{m,m} + C_{klmn}^0 \tilde{e}_{mn} \quad (2.3.45)$$

elde edilir.

Göz önüne alınan malzeme sıkışmaz olduğunda

$$u_{k,k} = 0 \quad \text{veya} \quad J^0 = 1$$

olacaktır. Bu durumda böyle bir malzeme için gerilme tansörleri genel olarak

$$t_{kl} = -p\delta_{kl} + {}_E t_{kl} \quad T_{Kk} = -pX_{K,k} + {}_E T_{Kl}$$

şeklinde iki kısma ayrılır. Burada p hidrostatik basınç olup hareket denklemleri ve sınır koşulları yardımı ile belirlenir. ${}_E t$ ve ${}_E T$ ise bünye denklemleri ile belirlenecek kısmı göstermektedir. Bu durumda (2.3.44) ifadesinden

$$t_{kl} = p\delta_{kl} + {}_E t_{km}^0 u_{l,m} + {}_E t_{lm}^0 u_{k,m} + C_{klmn}^0 \tilde{e}_{mn} \quad (2.3.46)$$

yazılabilir. Ayrıca

$$t_{kl}^0 = P^0 \delta_{kl} + {}_E t_{kl}^0$$

yazılabileceğinden (2.3.46) ifadesi göz önünde tutularak (2.3.24) ifadesi yardımı ile

$$\tilde{t}_{kl} = p\delta_{kl} - 2P^0\tilde{e}_{kl} + C_{klmn}^0\tilde{e}_{mn} \quad (2.3.47)$$

elde edilir. Son olarak artımsal Piola-Kirchhoff gerilme tansörü

$$T_{kl} = t_{km}^0 u_{l,m} + \tilde{t}_{kl} \quad (2.3.48)$$

olarak yazılabilir.

Elde edilen gerilme ifadelerinde bulunan C_{klmn}^0 ve t_{kl}^0 tansörleri doğrudan Σ 'nin yapısından belirlenmektedir. Burada damar malzemesi için Σ fonksiyonu, $\underline{C}$ 'nin yanısıra malzemenin lifli yapısını gösteren lifler doğrultusunda birim vektörler $\underline{a}_{01}$ ve $\underline{a}_{02}$ vektörlerinin de fonksiyonu olacaktır. İnvaryantlar teorisine göre Σ 'nin $\underline{C}$, $\underline{a}_{01}$ ve $\underline{a}_{02}$ büyüklüklerinin invaryantlarının bir fonksiyonu olması gerekmektedir. Ancak burada sadece aşağıda tanımlanan I_1, I_4 ve I_6 invaryantlarının fonksiyonu göz önüne alınacaktır.

$$\Sigma = \Sigma(I_1, I_4, I_6) \quad (2.3.49)$$

olarak alınacaktır. Burada,

$$I_1 = \text{trace } \underline{C}$$

$$I_4 = f(\underline{C}, \underline{a}_{01}) \quad (2.3.50)$$

$$I_6 = f(\underline{C}, \underline{a}_{02})$$

$$\underline{A}_1 = \underline{a}_{01} \otimes \underline{a}_{01}$$

$$\underline{A}_2 = \underline{a}_{02} \otimes \underline{a}_{02}$$

olacaktır. Daha sonraki bölümlerde görülebileceği gibi Σ 'nin yapısında yer alacak olan malzeme sabitleri adventitia ve media katmanları için farklı olacağından her iki

ortam için farklı Σ_M, Σ_A enerji fonksiyonları tanımlanacak ve bunun sonucunda farklı gerilme bileşenleri ve hareket denklemleri elde edilecektir.

(2.3.42) yerine (2.3.49) göz önüne alındığında

$$C_{klmn}^0 = 4 \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1^2} \delta_{KL} \delta_{MN} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} A_{1MN} A_{1KL} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} A_{2MN} A_{2KL} \\ & + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1 \partial I_4} (A_{1MN} \delta_{KL} + \delta_{MN} A_{1KL}) + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1 \partial I_6} (A_{2MN} \delta_{KL} + \delta_{MN} A_{2KL}) \\ & + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4 \partial I_6} (A_{2MN} A_{1KL} + A_{1MN} A_{2KL}) \end{aligned} \right] x_{k,K} x_{l,L} x_{m,M} x_{n,N}$$

veya

$$C_{klmn}^0 = 4 \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1^2} c_{kl}^{-1} c_{mn}^{-1} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} d_{1kl} d_{1mn} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} d_{2kl} d_{2mn} \\ & + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1 \partial I_4} (d_{1mn} c_{kl}^{-1} + c_{mn}^{-1} d_{1kl}) + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1 \partial I_6} (d_{2mn} c_{kl}^{-1} + c_{mn}^{-1} d_{2kl}) \\ & + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4 \partial I_6} (d_{2mn} d_{1kl} + d_{1mn} d_{2kl}) \end{aligned} \right] \quad (2.3.51)$$

elde edilir. Burada

$$d_{1kl} = A_{1KL} x_{k,K} x_{l,L} \quad d_{2kl} = A_{2KL} x_{k,K} x_{l,L} \quad (2.3.52)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Σ şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu cinsinden t_{kl}^0 Cauchy gerilme tansörü,

$$t_{kl}^0 = T_{Kl}^0 x_{k,K}$$

$$T_{Kl}^0 = P^0 X_{K,k} + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial C_{KL}} x_{k,k} \quad (2.3.53)$$

olarak ifade edilebilir. (2.3.49) ifadesi göz önüne alındığında açık olarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$t_{kl}^0 = P^0 \delta_{kl} + 2 \left[\frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} c_{kl}^{-1} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} d_{1kl} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} d_{2kl} \right] \quad (2.3.54)$$



2.4. ALAN DENKLEMLERİNİN SİLİNDİRİK KOORDİNATLARDA YAZILMASI

Bu bölümde daha önce elde edilen akışkan (kan) ve hiper-elastik malzeme (damar) için hareket denklemleri silindirik koordinatlarda ifade edilecektir.

Akışkan İçin Alan Denklemleri:

Daha önce ifade edildiği gibi sıfır ön hızı etrafında lineerleştirilmiş hareket denklemleri genel koordinatlarda aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\bar{\rho} \frac{\partial v_k}{\partial t} = \bar{\rho} \hat{f}_k - \hat{p}_{;k} + \mu \hat{v}_{k;l} \quad (2.4.1)$$

ve

$$\hat{v}_{;k}^k = 0 \quad (2.4.2)$$

Genel olarak bir vektörün ve ikinci mertebeye bir tansörün kovariant türevleri

$$u_{;k}^m = \frac{\partial u^m}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^m u^l$$

$$A_{;m}^{kl} = \frac{\partial A^{kl}}{\partial x^m} + \Gamma_{mn}^k A^{nl} + \Gamma_{mn}^l A^{kn} \quad (2.4.3)$$

şeklinde ifade edilir. Burada Γ_{lm}^k ikinci tipten Christoffel sembollerini göstermektedir. (r,θ,z) silindirik koordinatlarda sıfırdan farklı Christoffel sembolleri aşağıdaki biçimde verilebilir.

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad (2.4.4)$$

Bu tanımlar kullanılarak (2.4.1) ve (2.4.2) hareket denklemleri aşağıdaki şekilde ifade edilirler:

$$\begin{aligned}\bar{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} &= \bar{\rho} \hat{f}_r - \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} - \frac{\hat{u}}{r^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} \right) \\ \bar{\rho} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} &= \bar{\rho} \hat{f}_z - \frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right)\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

Burada $\hat{u}$ ve $\hat{w}$ sırasıyla hızın radyal ve eksenel doğrultudaki bileşenlerini göstermektedir. Buna ek olarak

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0\tag{2.4.6}$$

sıkışmazlık koşulu da bulunmaktadır.

Elastik Malzeme İçin Alan Denklemleri:

Daha önce damar malzemesini hiper-elastik kabul ederek artımsal yerdeğiştirme ile ilgili elde edilen hareket denklemleri genel koordinatlarda

$$T_{;k}^{kl} + \rho f^l = \rho \frac{\partial^2 u^l}{\partial t^2}\tag{2.4.7}$$

$$T^{kl} = t^{0km} u_{;m}^l + \tilde{t}^{kl}\tag{2.4.8}$$

ve

$$\tilde{t}^{kl} = pg^{kl} - 2P^0 \tilde{e}^{kl} + 4 \left[\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1^2} c^{-1kl} c^{-1mn} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} d_1^{kl} d_1^{mn} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} d_2^{kl} d_2^{mn} \\ & + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1 \partial I_4} (d_1^{mn} c^{-1kl} + c^{-1mn} d_1^{kl}) \\ & + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_1 \partial I_6} (d_2^{mn} c^{-1kl} + c^{-1mn} d_2^{kl}) \\ & + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4 \partial I_6} (d_2^{mn} d_1^{kl} + d_1^{mn} d_2^{kl}) \end{aligned} \right] \tilde{e}_{mn} \quad (2.4.9)$$

şeklindedir. Burada

$$c^{-1kl} = G^{KL} F_K^k F_L^l, \quad \tilde{e}_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k;l} + u_{l;k})$$

biçiminde tanımlanmıştır. g^{kl} ve G^{KL} ilgili koordinatlardaki karşıt metrik tansörleri, noktalı virgül ise ilgili koordinata göre kovaryant türevi göstermektedir.

(2.4.7) denklem takımı fiziksel bileşenler cinsinden yazılacak olursa

$$\frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \frac{\partial T_{rz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.4.10)$$

$$\frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} T_{rz} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

Birim şekil değiştirme tansörü bileşenleri ise,

$$\tilde{e}_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \tilde{e}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \tilde{e}_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.4.11)$$

$$\tilde{e}_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad \tilde{e}_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tilde{e}_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Sınır koşullarını yazarken damarın iki katmandan (Media ve Adventitia) oluştuğu göz önünde tutulmalıdır. Media için gerilme $\underline{T}^M$ ile Adventitia için $\underline{T}^A$ ile gösterilir ve birinci ortam (Media) için $r_i \leq r \leq \bar{r}$, ikinci ortam (Adventitia) için $\bar{r} \leq r \leq r_0$ olduğu kabul edilirse (2.3.18) sınır koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 T_{rr}^M \Big|_{r=r_i} &= \left(\hat{t}_{rr} - t_{rr}^0 \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_i} \\
 T_{r\theta}^M \Big|_{r=r_i} &= \hat{t}_{r\theta} \Big|_{r=r_i} \\
 T_{rz}^M \Big|_{r=r_i} &= \hat{t}_{rz} \Big|_{r=r_i} \\
 T_{rr}^M \Big|_{r=\bar{r}} &= T_{rr}^A \Big|_{r=\bar{r}}, \quad T_{r\theta}^M \Big|_{r=\bar{r}} = T_{r\theta}^A \Big|_{r=\bar{r}}, \quad T_{rz}^M \Big|_{r=\bar{r}} = T_{rz}^A \Big|_{r=\bar{r}} \\
 T_{rr}^A \Big|_{r=r_0} &= T_{r\theta}^A \Big|_{r=r_0} = T_{rz}^A \Big|_{r=r_0} = 0
 \end{aligned} \tag{2.4.12}$$

Sınır koşulları yazılırken damarın dış yüzeyinde gerilme olmadığı kabul edilmiştir.

Bu koşullara ek olarak damarın iç yüzeyindeki parçacık hızının, kan hızının aynı yüzeydeki değerine eşit olduğu kabul edilecektir.

Buna göre,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{u} \Big|_{r=r_i}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{v} \Big|_{r=r_i}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{r=r_i} = \hat{w} \Big|_{r=r_i} \tag{2.4.13}$$

Ayrıca katmanların değme yüzeylerinde ,

$$u_A(\bar{r}) = u_M(\bar{r}), \quad w_A(\bar{r}) = w_M(\bar{r}) \quad (2.4.14)$$

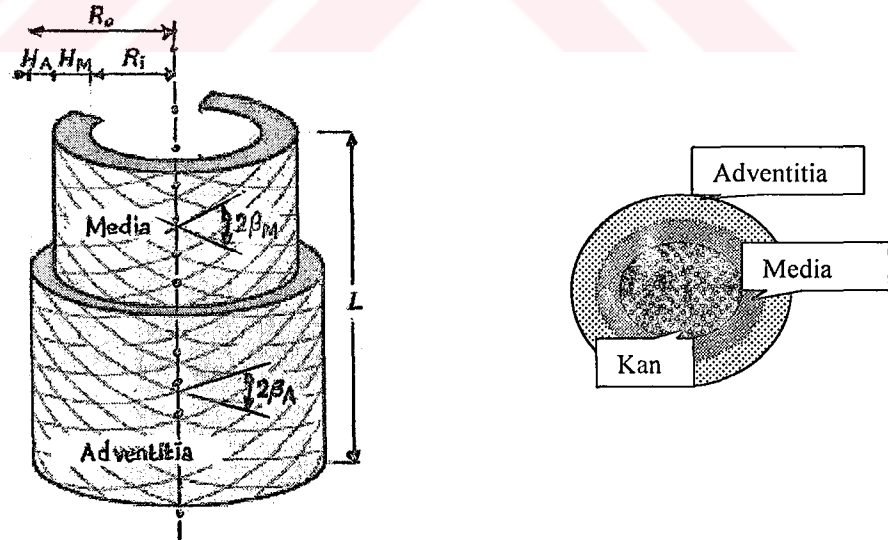
koşulları sağlanmalıdır.

Böylece akışkan ve katı ortama ait alan denklemleri ve sınır koşulları silindirik koordinatlarda ifade edilmiş oldu. Bu alan denklemlerinin çözülüp aranan sonuçların elde edilmesi için elastik katı ortama ait ön şekil değiştirmenin belirlenmiş olması gerekmektedir. Bundan sonraki kısımda bu konu işlenecek ve daha sonra da alan denklemlerinin çözümüne geçilecektir.



2.5. RADYAL GENLEŞMEYE VE EKSENEL UZAMAYA MARUZ DAMARDAKİ ÖNGERİLME

Dolaşım bakımından bir sorunu olmayan sağlıklı bir insanda ortalama statik kan basıncı 100 mm.Hg civarında, kalbin pompalama hareketi sırasındaki basınç sapmasının da ± 20 mm.Hg civarında olduğu hatırlanacak olursa, damarın fizyolojik işlevini yerine getirirken büyükçe bir statik ön basınca maruz kalacağı hemen görülebilir. Keza, yapılan deneyler, fizyolojik koşullarda damarın ayrıca ekstenel bir λ germesine maruz kaldığını göstermektedir. Bu germe miktarı damardan damara değişiklik göstermekle birlikte fizyolojik koşullarda $\lambda = 1.3 \sim 1.7$ mertebesinde dir. Bu oranın ise mühendislik malzemelerinin maruz kaldığı germeye göre oldukça büyük olduğu söylenebilir. Sonuç olarak damar hem radyal hem de ekstenel doğrultuda büyük ön şekil değiştirmeye maruz kalmakta, kanın hareketi sırasında ise bu değerlere küçük dinamik yer değiştirmeler eklenmektedir. Burada önce bu ön deformasyonun oluşturduğu gerilme alanını bulacağız.



Şekil 2.3. Çalışmada Seçilen Damar Modelin Önden Ve Üstten Görünüşü

Bu çalışmada damar için iki katmanlı bir model oluşturulmuş ve şekil değiştirmeden önce damarın geometrisi Şekil 2.3’de gösterilmiştir.

Burada H_M ve H_A sırasıyla Media ve Adventitia’nın kalınlıklarını göstermektedir. Bu yapıdaki damar P_i iç basıncına ve N eksenel kuvvete maruz kalsın. Bu kuvvetler altında damar eksenel doğrultuda λ sabit germesine maruz kalırken radyal doğrultuda genişleyecektir. Bu şekil değiştirme alanı (R, Θ, Z) silindirik maddesel koordinatları, (r, θ, z) silindirik uzaysal koordinatları göstermek üzere,

$$r = r(R), \quad \theta = \Theta, \quad z = \lambda Z \quad (2.5.1)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Buna göre $\underline{c}^{-1}$ Finger şekil değiştirme tansörü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\underline{c}^{-1} = \begin{bmatrix} (r')^2 & 0 & 0 \\ 0 & r^2/R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad r' \equiv \frac{dr}{dR} \quad (2.5.2)$$

Damar malzemesi sıkışmaz kabul edildiğinden

$$I_3 = \det(\underline{c}^{-1}) = \left(r' \frac{r}{R} \lambda \right)^2 = 1 \quad (2.5.3)$$

koşulu sağlanmalıdır. Buradan

$$r = \left(\frac{R^2}{\lambda} + B \right)^{1/2}, \quad B = sbt. \quad (2.5.4)$$

elde edilir. (2.5.4) ifadesi kullanılarak $\underline{c}^{-1}$ aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\underline{c}^{-1} = \begin{bmatrix} x^2/\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/x^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad x \equiv \frac{R}{r} \quad (2.5.5)$$

Bu şekil değiştirme altında oluşacak gerilme alanını belirlemek için gerekli olan $\underline{d}_1, \underline{d}_2, \underline{A}_1, \underline{A}_2$ büyüklükleri (2.3.50) ve (2.3.52)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$\underline{A}_1$ ve $\underline{A}_2$ elde edilirken (Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., 2000)' de verildiği gibi $\underline{a}_{01}$ ve $\underline{a}_{02}$ vektörleri,

$$\underline{a}_{01} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \beta \\ -\sin \beta \end{bmatrix}$$

olarak alınmıştır.

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \beta & \cos \beta \sin \beta \\ 0 & \cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}, \quad \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \beta & -\cos \beta \sin \beta \\ 0 & -\cos \beta \sin \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

$$\underline{d}_1 = \underline{F} \underline{A}_1 \underline{F}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta & \frac{\lambda}{x} \cos \beta \sin \beta \\ 0 & \frac{\lambda}{x} \cos \beta \sin \beta & \lambda^2 \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

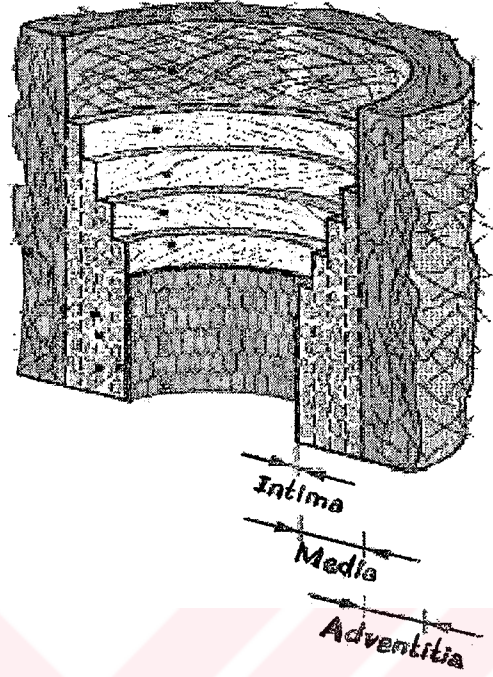
$$\underline{d}_2 = \underline{F} \underline{A}_2 \underline{F}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta & -\frac{\lambda}{x} \cos \beta \sin \beta \\ 0 & -\frac{\lambda}{x} \cos \beta \sin \beta & \lambda^2 \sin^2 \beta \end{bmatrix} \quad (2.5.6)$$

olarak elde edilmiştir. Ön şekil değiştirme sonucu oluşacak t_{kl}^0 gerilme bileşenleri (2.5.5) ve (2.5.6) yardımıyla aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}
 t_{rr}^0 &= P^0 + 2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} \frac{x^2}{\lambda^2} \\
 t_{\theta\theta}^0 &= P^0 + 2 \left[\frac{1}{x^2} \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \right) \right] \\
 t_{zz}^0 &= P^0 + 2 \left[\lambda^2 \frac{\partial \Sigma}{\partial I_1} + \lambda^2 \sin^2 \beta \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} + \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \right) \right] \\
 t_{\theta z}^0 &= 2 \frac{\lambda}{x} \cos \beta \sin \beta \left(\frac{\partial \Sigma}{\partial I_4} - \frac{\partial \Sigma}{\partial I_6} \right) \\
 t_{rz}^0 &= t_{r\theta}^0 = 0
 \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Biyolojik malzemelere ait şekil değiştirme enerjisi fonksiyonunun belirlenmesi bu tip problemlerin esasını teşkil etmektedir ve bu konuda yapılan çalışmalarda fonksiyonun çalışma amacına yönelik olması için gayret sarf edilmektedir. Gerçekte aort damarı üç kısımdan oluşmaktadır. İçten dışa doğru İntima, Media ve Adventitia'dır. İntima kalınlığı çok az olduğu için sadece koruma tabakası niteliğindedir ve yük taşıma özelliği yoktur. Media ise bünyesinde çok sayıda elastik lif bulundurmaktadır. Adventitia ise bünyesinde bağ dokularıyla sarılı kolajen lifleri bulundurmaktadır. Media ve Adventitia tabakaları bünyelerinde bulundurdıkları lifler vasıtası ile yük taşıma özelliği göstermektedirler.

(Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., 2000)'da arteriler için çeşitli şekil değiştirme enerjisi fonksiyonları önerilmiştir. Biz önerilen çeşitli şekil değiştirme enerji fonksiyonlarından gerçeğe en yakını olan iki katmanlı ve bünyesinde kolajen liflerin bulunduğu fonksiyonu kullandık. Ayrıca modelimizde hem izotrop kısmın bulunduğunu, ayrıca liflerden dolayı da anizotrop kısmın bulunduğunu hesaba katarak aşağıdaki fonksiyonu çalışmamızda tercih ettik.



Şekil 2.4. Aort Damarının İç Yapısı

İzotrop kısım için şekil değiştirme enerji fonksiyonu,

$$\Sigma(I_1) = \frac{c}{2}(I_1 - 3)$$

Anizotrop, yani lifli kısım için şekil değiştirme enerji fonksiyonu,

$$\Sigma(I_4, I_6) = \frac{k_1}{2k_2} \sum_{i=4,6} \left\{ \exp \left[k_2 (I_i - 1)^2 \right] - 1 \right\}$$

olarak alınmıştır.

Bu çalışmada tüm damar malzemesi için Σ , şekil değiştirme enerjisi fonksiyonu (Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., 2000)' de önerildiği gibi

$$\Sigma = \frac{c}{2}(I_1 - 3) + \frac{k_1}{2k_2} \left[e^{k_2(I_4-1)^2} + e^{k_2(I_6-1)^2} - 2 \right] \quad (2.5.8)$$

alınacaktır. Ancak daha öncede belirtildiği gibi c, k_1, k_2 malzeme sabitleri Media ve Adventitia için farklı olacağı için daha sonra her iki ortam için ayrı ayrı Σ_A ve Σ_M tanımlanacaktır. Ayrıca I_4 ve I_6 invaryantları,

$$I_4 = f(\underline{C}, \underline{a}_{01}) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta$$

$$I_6 = f(\underline{C}, \underline{a}_{02}) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \beta + \lambda^2 \sin^2 \beta \quad (2.5.9)$$

şeklinde verilir. Yukarıdaki ifadelerden $I_4 = I_6$ olduğu görülmektedir. Bundan böyle $I_4 = I_6 = \tilde{I}$ alınacaktır. Buna göre (2.5.7)'de

$$t_{rr}^0 = P^0 + c \frac{x^2}{\lambda^2}$$

$$t_{\theta\theta}^0 = P^0 + \frac{1}{x^2} \left[c + 4k_1 \cos^2 \beta (\tilde{I} - 1) e^{k_2(\tilde{I}-1)^2} \right]$$

(2.5.10)

$$t_{zz}^0 = P^0 + \lambda^2 \left[c + 4k_1 \sin^2 \beta (\tilde{I} - 1) e^{k_2(\tilde{I}-1)^2} \right]$$

$$t_{\theta z}^0 = t_{rz}^0 = 0$$

elde edilir. Bu gerilme bileşenleri Media ve Adventitia için ayrı ayrı yazılmalıdır. $c_M, k_{1M}, k_{2M}, \beta_M, \tilde{I}_M$ Media ortamına karşı gelen, $c_A, k_{1A}, k_{2A}, \beta_A, \tilde{I}_A$ Adventitia ortamına karşı gelen büyüklükleri göstermek üzere,

$$\begin{aligned}
{}_M t_{rr}^0 &= P_M^0 + c_M \frac{x^2}{\lambda^2} \\
{}_M t_{\theta\theta}^0 &= P_M^0 + \frac{1}{x^2} \left[c_M + 4k_{1M} \cos^2 \beta_M (\tilde{I}_M - 1) e^{k_{2M} (\tilde{I}_M - 1)^2} \right] \\
{}_M t_{zz}^0 &= P_M^0 + \lambda^2 \left[c_M + 4k_{1M} \sin^2 \beta_M (\tilde{I}_M - 1) e^{k_{2M} (\tilde{I}_M - 1)^2} \right] \\
{}_M t_{\theta z}^0 &= {}_A t_{\theta z}^0 = 0 \\
{}_A t_{rr}^0 &= P_A^0 + c_A \frac{x^2}{\lambda^2} \\
{}_A t_{\theta\theta}^0 &= P_A^0 + \frac{1}{x^2} \left[c_A + 4k_{1A} \cos^2 \beta_A (\tilde{I}_A - 1) e^{k_{2A} (\tilde{I}_A - 1)^2} \right] \\
{}_A t_{zz}^0 &= P_A^0 + \lambda^2 \left[c_A + 4k_{1A} \sin^2 \beta_A (\tilde{I}_A - 1) e^{k_{2A} (\tilde{I}_A - 1)^2} \right]
\end{aligned} \tag{2.5.11}$$

Bu ifadelerde P_M^0 ve P_A^0 belirlenmesi gereken büyüklüklerdir.

$$\frac{\partial {}_M t_{rr}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} ({}_M t_{rr}^0 - {}_M t_{\theta\theta}^0) = 0 \quad r_i \leq r \leq \bar{r} \tag{2.5.12}$$

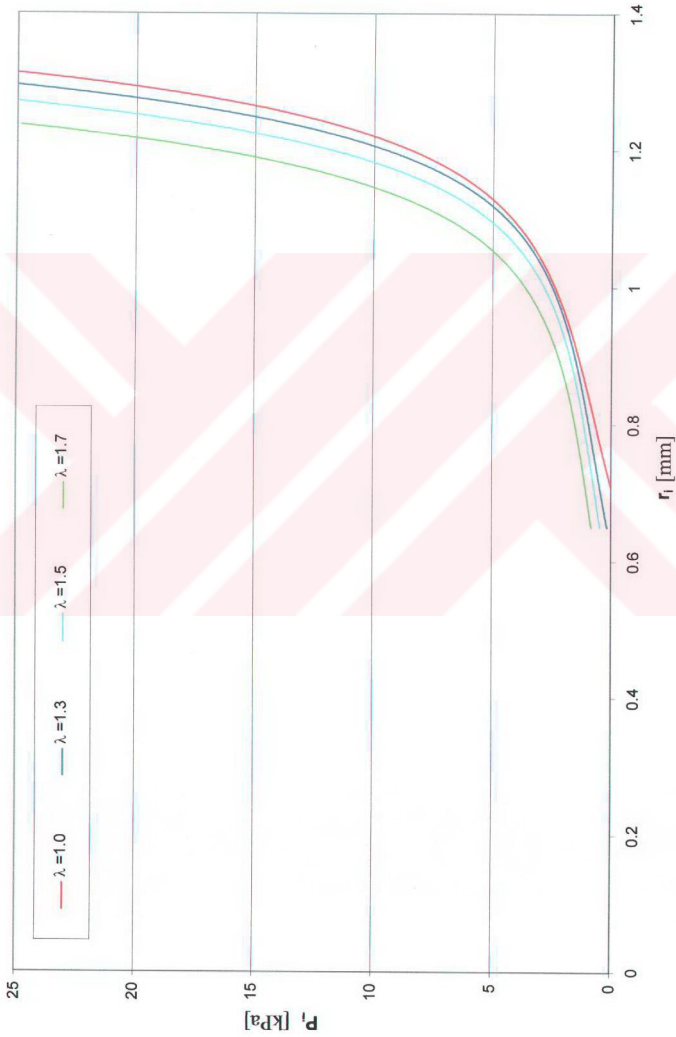
$$\frac{\partial {}_A t_{rr}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} ({}_A t_{rr}^0 - {}_A t_{\theta\theta}^0) = 0 \quad \bar{r} \leq r \leq r_0$$

denge denklemlerini ve

$$\begin{aligned}
{}_M t_{rr}^0 \Big|_{r=r_i} &= -P_i \\
{}_A t_{rr}^0 \Big|_{r=r_0} &= 0 \\
{}_M t_{rr}^0 \Big|_{r=\bar{r}} &= {}_A t_{rr}^0 \Big|_{r=\bar{r}}
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$



Şekil 3.1. Tabakalı Durumda Cauchy Gerilmelerinin Yanıçap ile Değişimi



Şekil 3.2. İç Basıncın İç Yarı Çaplar ve Uzama Oranları ile Değişimi

sınır koşullarını sağlamalıdır. O halde (2.5.12) denklemlerinin (2.5.13) sınır koşulları altında çözümünden ${}_M t_{rr}^0$ ve ${}_A t_{rr}^0$ gerilme bileşenleri elde edilir ve

$$\begin{aligned} {}_M P^0 &= {}_M t_{rr}^0 - \frac{x^2}{\lambda^2} \\ {}_A P^0 &= {}_A t_{rr}^0 - \frac{x^2}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

şeklinde ${}_M P^0$ ve ${}_A P^0$ belirlenir. Diğer yandan verilen bir r_i ve λ değerlerine karşılık gelen P_i iç basıncı (2.5.12)' den elde edilir. Bu çalışmada (Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., 2000) 'de verilen,

$$\begin{aligned} c_M &= 3.0 \text{ kPa} & k_{1M} &= 2.3632 \text{ kPa} & k_{2M} &= 0.8393 \\ \beta_M &= 29.0^\circ & H_M &= 0.26 \text{ mm} & R_i &= 0.71 \text{ mm} \\ c_A &= 0.3 \text{ kPa} & k_{1A} &= 0.5620 \text{ kPa} & k_{2A} &= 0.7112 \\ \beta_A &= 62.0^\circ & H_A &= 0.13 \text{ mm} \end{aligned}$$

değerleri kullanılarak r_i ve P_i değişimi çeşitli λ değerleri için elde edilmiştir. Şekil 3.2'den de görülebileceği gibi iç basınç, iç yarıçap ve eksenel uzama' nın artmasıyla artmaktadır ve belli bir r_i 'den sonra iç yarıçaptaki küçük bir artım çok büyük basınç değeri gerektirmektedir. Bu sonuç yumuşak biyolojik dokuların mühendislik malzemelerinden bilinen farkını göstermektedir.

Şekil 3.1'de tabakalı durum için oluşturulan Cauchy (radyal, çevresel ve eksenel) gerilmelerinin yarıçaplarla değişimleri elde edilmiştir. Burada elde edilen grafiklerin (Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., 2000)'ın elde ettiği grafiklerle uyum içerisinde olduğu görülmektedir.

$\underline{t}^0$ gerilmeleri bilindiğine göre $\underline{\tilde{t}}$, $\underline{T}$ gerilme tansörü bileşenleri elde edilebilir. Biz genel (2.5.8) fonksiyonu için sonuçları elde edip her iki katman için ayrı ayrı ifade edeceğiz. Damar için yer değiştirme bileşenleri

$$u_1 = u(r, z), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(r, z)$$

olarak alınacaktır.

(2.5.8) ifadesi göz önüne alındığında (2.3.51) yardımı ile (2.3.47)' den $\tilde{t}_{kl}$ gerilme bileşenleri için

$$\tilde{t}_{kl} = p\delta_{kl} - 2P^0 e_{kl} + 4 \left[\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} d_{1kl} d_{1mn} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} d_{2kl} d_{2mn} \right] \tilde{e}_{mn} \quad (2.5.15)$$

elde edilir. Buradan (2.5.6) ve (2.4.11) yardımı ile

$$\tilde{t}_{rr} = p - 2P^0 \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\tilde{t}_{\theta\theta} = p + \left[-2P^0 + 4 \frac{\cos^4 \beta}{x^2} \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} \right) \right] \frac{u}{r} + 4 \frac{\lambda^2}{x^2} \sin^2 \beta \cos^2 \beta \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} \right) \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tilde{t}_{zz} = p + 4 \frac{\lambda^2}{x^2} \sin^2 \beta \cos^2 \beta \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} \right) \frac{u}{r} + \left[-2P^0 + 4\lambda^4 \sin^4 \beta \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} + \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} \right) \right] \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tilde{t}_{\theta z} = 4 \frac{\lambda}{x} \cos \beta \sin \beta \left(\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_4^2} - \frac{\partial^2 \Sigma}{\partial I_6^2} \right) \left[\frac{1}{x^2} \cos^2 \beta \frac{u}{r} + \lambda^2 \sin^2 \beta \frac{\partial w}{\partial z} \right]$$

$$\tilde{t}_{rz} = \tilde{t}_{zr} = -P^0 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \tilde{t}_{r\theta} = \tilde{t}_{\theta r} = 0$$

bulunur. (2.3.48) ifadesini,

$$T_{kl} = s_{kl} + \tilde{t}_{kl}, \quad s_{kl} = t_{km}^0 u_{l,m} \quad (2.5.17)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Burada (2.5.7) ifadeleri kullanılarak s_{kl} 'nin bileşenleri

$$\begin{aligned} s_{rr} &= t_{rr}^0 \frac{\partial u}{\partial r}, & s_{\theta\theta} &= t_{\theta\theta}^0 \frac{u}{r}, & s_{zz} &= t_{zz}^0 \frac{\partial w}{\partial z} \\ s_{r\theta} &= 0, & s_{\theta r} &= t_{\theta z}^0 \frac{\partial u}{\partial z} \\ s_{rz} &= t_{rr}^0 \frac{\partial w}{\partial r}, & s_{zr} &= t_{zz}^0 \frac{\partial u}{\partial z} \\ s_{\theta z} &= t_{\theta z}^0 \frac{\partial w}{\partial z}, & s_{z\theta} &= t_{z\theta}^0 \frac{u}{r} \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

şeklinde olacaktır.

(2.5.16) ve (2.5.18) ifadelerinde $I_4 = I_6 = \tilde{I}$ olacağını ve

$$\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial \tilde{I}^2} = 2k_1 k_2 (\tilde{I} - 1)^2 e^{k_2(\tilde{I}-1)^2}$$

ifadesi kullanılırsa (2.5.17)'den

$$T_{rr} = p + (t_{rr}^0 - 2P_0) \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$T_{\theta\theta} = p + 2 \left(\alpha_1 \frac{u}{r} + \alpha_2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + t_{\theta\theta}^0 \frac{u}{r}$$

$$T_{zz} = p + 2 \left(\alpha_3 \frac{u}{r} + \alpha_4 \frac{\partial w}{\partial z} \right) + t_{zz}^0 \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$T_{r\theta} = T_{\theta r} = 0$$

$$T_{rz} = -P_0 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + t_{rr}^0 \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$T_{zr} = -P_0 \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + t_{zz}^0 \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$T_{\theta z} = 0, \quad T_{z\theta} = 0$$

(2.5.19)

elde edilir. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ katsayıları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$\alpha_1 = -P_0 + 8 \frac{\cos^4 \beta}{x^4} k_1 k_2 (\tilde{I} - 1)^2 F(x)$$

$$\alpha_2 = 8 \frac{\lambda^2}{x^2} \sin^2 \beta \cos^2 \beta k_1 k_2 (\tilde{I} - 1)^2 F(x)$$

$$\alpha_3 = 8 \frac{\lambda^2}{x^2} \sin^2 \beta \cos^2 \beta k_1 k_2 (\tilde{I} - 1)^2 F(x)$$

$$\alpha_4 = -P_0 + 8 \lambda^4 \sin^4 \beta k_1 k_2 (\tilde{I} - 1)^2 F(x)$$

(2.5.20)

$$F(x) = e^{k_2 (\tilde{I}-1)^2} \quad \text{veya} \quad F(x) = \exp[k_2 (\tilde{I} - 1)^2]$$

(2.5.19) gerilme bileşenleri (2.4.10) denklemlerinde kullanılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} + \beta_1(r) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_2(r) \frac{\partial u}{\partial r} + \beta_3(r) \frac{u}{r^2} + \beta_4(r) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \beta_1(r) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_5(r) \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_6(r) \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_7(r) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

Burada β_i katsayıları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= t_{rr}^0 - P_0 \\ \beta_2 &= r \frac{d}{dr} (t_{rr}^0 - 2P_0) + t_{rr}^0 - P_0 + 2\alpha_2 = \frac{d}{dr} [r(t_{rr}^0 - 2P_0)] + P_0 + 2\alpha_2 \\ \beta_3 &= 2(\alpha_2 - \alpha_1) - P_0 - t_{\theta\theta}^0 \\ \beta_4 &= t_{zz}^0 - P_0 \\ \beta_5 &= -r \frac{dP_0}{dr} + r \frac{dt_{rr}^0}{dr} - P_0 + t_{rr}^0 = \frac{d}{dr} [r(t_{rr}^0 - P_0)] = \frac{d}{dr} (r\beta_1) \\ \beta_6 &= -r \frac{dP_0}{dr} + 2\alpha_3 \\ \beta_7 &= 2\alpha_4 + t_{zz}^0 + P_0 \end{aligned} \quad (2.5.22)$$

Yukarıdaki denklemler elde edilirken sıkışmazlık koşulu kullanılarak bazı bilinmeyenler elimine edilmiştir.

3. ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

3.1 Akışkanın Hareket Denklemlerinin Çözümü

Akışkanın sadece $\hat{u} = \hat{u}(r, z)$ ve $\hat{w} = \hat{w}(r, z)$ hız bileşenlerinin bulunduğunu teğetsel hız bileşeni $\hat{v} = 0$ olduğunu kabul ediyoruz. Buna göre (2.4.5)' de verilen denklemler,

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial z^2} - \frac{\hat{u}}{r^2} \right) = \bar{\rho} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \quad (3.1.1)$$

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial z^2} \right) = \bar{\rho} \frac{\partial \hat{w}}{\partial t}$$

ve sıkışmazlık koşulu

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial r} + \frac{\hat{u}}{r} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \quad (3.1.2)$$

şeklini alır. Bu hız alanı sonucu oluşacak gerilme alanı ise (2.1.6)' dan

$$\hat{t}_{rr} = -\hat{p} + 2\mu \frac{\partial \hat{u}}{\partial r}, \quad \hat{t}_{rz} = \mu \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial z} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial r} \right) \quad (3.1.3)$$

elde edilir.

Şimdi $\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}$ için zaman ve eksenel koordinat cinsinden harmonik dalga çözümünü arayalım. Bunun için bu büyüklükler,

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \hat{U}(r) \exp[i(\omega t - kz)] \\ \hat{w} &= \hat{W}(r) \exp[i(\omega t - kz)] \\ \hat{p} &= \hat{P}(r) \exp[i(\omega t - kz)] \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

şeklinde ifade edilecektir. Burada ω açısal frekansı, $\hat{U}(r)$, $\hat{W}(r)$ ve $\hat{P}(r)$ ise dalganın genliklerini göstermektedir. (3.1.4) ifadeleri (3.1.1) ve (3.1.2) denklemlerinde yerine konacak olursa aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir.

$$-\frac{d\hat{P}}{dr} + \mu \left(\frac{d^2\hat{U}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{U}}{dr} - \hat{U}k^2 - \frac{\hat{U}}{r^2} \right) - \bar{\rho}i\omega \hat{U} = 0 \quad (3.1.5)$$

$$ik\hat{P} + \mu \left(\frac{d^2\hat{W}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{W}}{dr} - k^2\hat{W} \right) - \bar{\rho}i\omega \hat{W} = 0 \quad (3.1.6)$$

$$\frac{d\hat{U}}{dr} + \frac{\hat{U}}{r} - ik\hat{W} = 0 \quad (3.1.7)$$

Yukarıdaki denklemler

$$D = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \quad (3.1.8)$$

$$s^2 = - \left(\frac{i\bar{\rho}\omega}{\mu} + k^2 \right) \quad (3.1.9)$$

tanımları yapıldığında aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$(D + s^2)\hat{U} - \frac{1}{\mu} \frac{d\hat{P}}{dr} = 0 \quad (3.1.10)$$

$$\left(D + s^2 + \frac{1}{r^2} \right) \hat{W} + \frac{ik}{\mu} \hat{P} = 0 \quad (3.1.11)$$

$$\frac{d\hat{U}}{dr} + \frac{\hat{U}}{r} - ik\hat{W} = 0 \quad (3.1.12)$$

Bu denklemler arasında $\hat{U}$ ve $\hat{W}$ yok edilirse $\hat{P}$ için aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir.

$$\frac{d^2 \hat{P}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{P}}{dr} - k^2 \hat{P}(r) = 0 \quad (3.1.13)$$

Bu denklemin çözümü $r = 0$ ' da sonlu kalacak şekilde

$$\hat{P} = i\bar{\rho} \omega I_0(kr)A \quad (3.1.14)$$

ile verilir. Burada $I_0(kr)$ sıfırdan itibaren Bessel fonksiyonu, A ve B integrasyon sabitidir. $\hat{P}(r)$ fonksiyonu (3.1.10) ve (3.1.11)' de kullanılırsa

$$\hat{U}(r) = -k[I_1(kr)A + J_1(sr)B] \quad (3.1.15)$$

$$\hat{W}(r) = i[kI_0(kr)A + sJ_0(sr)B] \quad (3.1.16)$$

elde edilir. Bu çözümlere bir de sıkışmazlık koşulunun eklenmesi ile $\hat{U}(r)$ için,

$$\hat{U}(r) = -\frac{ik}{s} B_0 J_1(sr) - \frac{ik}{\bar{\rho} \omega} A_0 I_1(kr)$$

yazılabilir.

Bulunan $\hat{U}(r)$, $\hat{W}(r)$ ve $\hat{P}(r)$ ifadeleri kullanılarak (3.1.13)' de verilen gerilme bileşenleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\hat{t}_{rr} = \left\{ \begin{array}{l} - \left[i\bar{p} \omega I_0(kr) + 2\mu \left(k^2 I_0(kr) - \frac{k}{r} I_1(kr) \right) \right] A \\ - 2\mu k \left[sJ_0(sr) - \frac{1}{r} J_1(sr) \right] B \end{array} \right\} \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$\hat{t}_{rz} = \mu \left\{ \begin{array}{l} 2ik^2 I_1(kr) A \\ + i(k^2 s^2) J_1(sr) B \end{array} \right\} \exp[i(\omega t - kz)] \quad (3.1.17)$$

İlerde damar malzemesi ile ilgili hareket denklemlerinin çözümü elde edildikten sonra bu ifadeler sınır koşullarında kullanılacaktır.



3.2. Elastik Ortama Ait Alan Denklemlerinin Çözümü

Bu bölümde (2.5.21)' de verilen damar için denklemler sıkışmazlık koşulu göz önüne alınarak çözülecektir. Damar daha önce belirtildiği gibi iki katmandan oluştuğu için bu denklemler her iki katman için ayrı ayrı aşağıdaki gibi yazılacaktır. Burada ifade edilen diferansiyel denklemlerdeki A terimi (Adventitia) için, M terimi (Media) için kullanılmaktadır.

$$\frac{\partial p^A}{\partial r} + \beta_1^A(r) \frac{\partial^2 u^A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_2^A(r) \frac{\partial u^A}{\partial r} + \beta_3^A(r) \frac{u^A}{r^2} + \beta_4^A(r) \frac{\partial^2 u^A}{\partial z^2} = \rho^A \frac{\partial^2 u^A}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial p^A}{\partial z} + \beta_1^A(r) \frac{\partial^2 w^A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_5^A(r) \frac{\partial w^A}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_6^A(r) \frac{\partial u^A}{\partial z} + \beta_7^A(r) \frac{\partial^2 w^A}{\partial z^2} = \rho^A \frac{\partial^2 w^A}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u^A}{\partial r} + \frac{u^A}{r} + \frac{\partial w^A}{\partial z} = 0 \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial p^M}{\partial r} + \beta_1^M(r) \frac{\partial^2 u^M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_2^M(r) \frac{\partial u^M}{\partial r} + \beta_3^M(r) \frac{u^M}{r^2} + \beta_4^M(r) \frac{\partial^2 u^M}{\partial z^2} = \rho^M \frac{\partial^2 u^M}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial p^M}{\partial z} + \beta_1^M(r) \frac{\partial^2 w^M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \beta_5^M(r) \frac{\partial w^M}{\partial r} + \frac{1}{r} \beta_6^M(r) \frac{\partial u^M}{\partial z} + \beta_7^M(r) \frac{\partial^2 w^M}{\partial z^2} = \rho^M \frac{\partial^2 w^M}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial u^M}{\partial r} + \frac{u^M}{r} + \frac{\partial w^M}{\partial z} = 0 \quad (3.2.2)$$

Bu denklemlerin çözümü de yine harmonik dalga tipinde aranacaktır. Bu nedenle,

$$u^A = U^A(r) \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$w^A = W^A(r) \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$p^A = \bar{P}^A(r) \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$u^M = U^M(r) \exp[i(\omega t - kz)]$$

$$w^M = W^M(r) \exp[i(\omega t - kz)] \quad (3.2.3)$$

$$p^M = \bar{P}^M(r) \exp[i(\omega t - kz)]$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler (3.2.1) ve (3.2.2)' de kullanıldığında aşağıdaki adi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}^A}{dr} + \beta_1^A \frac{d^2 U^A}{dr^2} + \frac{1}{r} \beta_2^A \frac{dU^A}{dr} + \left[\beta_3^A \frac{1}{r^2} - \beta_4^A k^2 + \rho^A \omega^2 \right] U^A &= 0 \\ -ik\bar{P}^A + \beta_1^A \frac{d^2 W^A}{dr^2} + \frac{1}{r} \beta_5^A \frac{dW^A}{dr} - \frac{ik}{r} \beta_6^A U^A + (\rho^A \omega^2 - \beta_7^A k^2) W^A &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dU^A}{dr} + \frac{U^A}{r} - ikW^A = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}^M}{dr} + \beta_1^M \frac{d^2 U^M}{dr^2} + \frac{1}{r} \beta_2^M \frac{dU^M}{dr} + (\beta_3^M \frac{1}{r^2} - \beta_4^M k^2 + \rho^M \omega^2) U^M &= 0 \\ -ik\bar{P}^M + \beta_1^M \frac{d^2 W^M}{dr^2} + \frac{1}{r} \beta_5^M \frac{dW^M}{dr} - \frac{ik}{r} \beta_6^M U^M + (\rho^M \omega^2 - \beta_7^M k^2) W^M &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{dU^M}{dr} + \frac{U^M}{r} - ikW^M = 0 \quad (3.2.5)$$

(3.2.4) ve (3.2.5) denklem sistemleri değişken katsayılı olup analitik çözüm oluşturmak mümkün gözükmemektedir. Bu nedenle kuvvet serisi çözümü aranacaktır. Her iki ortam için şekil değişiminden sonraki yarıçapların kalınlıklara oranı küçük kabul edilecektir.

Media için,

$$r = \bar{r}(1 + \xi_M) \quad , \quad \frac{-h_M}{\bar{r}} \leq \xi_M \leq 0 \quad (3.2.6)$$

Adventitia için,

$$r = \bar{r}(1 + \xi_A) \quad , \quad 0 \leq \xi_A \leq \frac{h_A}{\bar{r}} \quad (3.2.7)$$

olacaktır. Burada h_M ve h_A şekil değişiminden sonraki kalınlıklardır. Bu durumda (3.2.4) ve (3.2.5) denklemleri aşağıdaki şekli alır.

$$\begin{aligned} & \bar{r} \frac{d\bar{P}^A}{d\xi_A} + \bar{\beta}_1^A \frac{d^2 U^A}{d\xi_A^2} + \frac{1}{(1 + \xi_A)} \bar{\beta}_2^A \frac{dU^A}{d\xi_A} \\ & + (\bar{\beta}_3^A \frac{1}{(1 + \xi_A)^2} - \bar{\beta}_4^A \bar{r}^2 k^2 + \bar{r}^2 \rho^A \omega^2) U^A = 0 \\ & - i k \bar{r}^2 \bar{P}^A + \bar{\beta}_1^A \frac{d^2 W^A}{d\xi_A^2} + \frac{1}{(1 + \xi_A)} \bar{\beta}_5^A \frac{dW^A}{d\xi_A} \\ & - \left(\frac{i k \bar{r}}{(1 + \xi_A)} \right) \bar{\beta}_6^A U^A + (\rho^A \bar{r}^2 \omega^2 - \bar{\beta}_7^A k^2 \bar{r}^2) W^A = 0 \\ & \frac{dU^A}{d\xi_A} + \frac{U^A}{(1 + \xi_A)} - i k \bar{r} W^A = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{r} \frac{d\bar{P}^M}{d\xi_M} + \bar{\beta}_1^M \frac{d^2 U^M}{d\xi_M^2} + \frac{1}{(1+\xi_M)} \bar{\beta}_2^M \frac{dU^M}{d\xi_M} \\
& + (\bar{\beta}_3^M \frac{1}{(1+\xi_M)^2} - \bar{\beta}_4^M \bar{r}^2 k^2 + \bar{r}^2 \rho^M \omega^2) U^M = 0 \\
& - i k \bar{r}^2 \bar{P}^M + \bar{\beta}_1^M \frac{d^2 W^M}{d\xi_M^2} + \frac{1}{(1+\xi_M)} \bar{\beta}_5^M \frac{dW^M}{d\xi_M} \\
& - \left(\frac{i k \bar{r}}{(1+\xi_M)} \right) \bar{\beta}_6^M U^M + (\rho^M \bar{r}^2 \omega^2 - \bar{\beta}_7^M k^2 \bar{r}^2) W^M = 0 \\
& \frac{dU^M}{d\xi_M} + \frac{U^M}{(1+\xi_M)} - i k \bar{r} W^M = 0
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Büyük damarlar göz önüne alındığında $|\xi_A| \ll 1$, $|\xi_M| \ll 1$ olacaktır. Bu nedenle katsayılar ξ_A ve ξ_M cinsinden kuvvet serisine açılarak çözüm aranacaktır.

Bu durumda aşağıdaki seri açılımları yapılabilir.

$$\begin{aligned}
\bar{P}^A &= \bar{C}_A (\bar{P}_0^A + \bar{P}_1^A \xi_A + \bar{P}_2^A \xi_A^2 + \dots) \\
U^A &= \bar{r} (U_0^A + U_1^A \xi_A + U_2^A \xi_A^2 + \dots) \\
W^A &= \bar{r} (W_0^A + W_1^A \xi_A + W_2^A \xi_A^2 + \dots) \\
\bar{\beta}_i^A &= \bar{C}_A (\bar{\beta}_{i0}^A + \bar{\beta}_{i1}^A \xi_A + \bar{\beta}_{i2}^A \xi_A^2 + \dots) \quad (i=1,2,\dots,7) \\
\bar{P}^M &= \bar{C}_M (\bar{P}_0^M + \bar{P}_1^M \xi_M + \bar{P}_2^M \xi_M^2 + \dots) \\
U^M &= \bar{r} (U_0^M + U_1^M \xi_M + U_2^M \xi_M^2 + \dots) \\
W^M &= \bar{r} (W_0^M + W_1^M \xi_M + W_2^M \xi_M^2 + \dots) \\
\bar{\beta}_i^M &= \bar{C}_M (\bar{\beta}_{i0}^M + \bar{\beta}_{i1}^M \xi_M + \bar{\beta}_{i2}^M \xi_M^2 + \dots) \quad (i=1,2,\dots,7)
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

burada

$$\bar{C} = c_M + c_A \tag{3.2.10}$$

şeklinde tanımlanmıştır. (3.2.9) ifadeleri (3.2.8)' de kullanılırsa ve (3.2.8)₁, (3.2.8)₂, (3.2.8)₄, (3.2.8)₅ denklemlerinde sabit terimlerin (3.2.8)₃, (3.2.8)₆ denklemlerinde sabit terimlerin ve ξ ' nin katsayılarının sıfıra eşitlenmesi ile aşağıdaki,

$\bar{P}_0^A, \bar{P}_1^A, U_0^A, U_1^A, U_2^A, W_0^A, W_1^A, W_2^A, \bar{P}_0^M, \bar{P}_1^M, U_0^M, U_1^M, U_2^M, W_0^M, W_1^M, W_2^M$ cinsinden lineer denklem takımı elde edilir.

$$\begin{aligned}
 & \bar{P}_1^A + 2\bar{\beta}_{10}^A U_2^A + \bar{\beta}_{20}^A U_1^A + \left(\bar{\beta}_{30}^A - \bar{\beta}_{40}^A \eta^2 + \Omega^2 \right) U_0^A = 0 \\
 & -i\eta \bar{P}_0^A + 2\bar{\beta}_{10}^A W_2^A + \bar{\beta}_{50}^A W_1^A - i\eta \bar{\beta}_{60}^A U_0^A + \left(\Omega^2 - \bar{\beta}_{70}^A \eta^2 \right) W_0^A = 0 \\
 & U_1^A + U_0^A - i\eta W_0^A = 0 \\
 & 2U_2^A + U_1^A - U_0^A - i\eta W_1^A = 0 \\
 & \bar{P}_1^M + 2\bar{\beta}_{10}^M U_2^M + \bar{\beta}_{20}^M U_1^M + \left(\bar{\beta}_{30}^M - \bar{\beta}_{40}^M \eta^2 + \gamma^2 \Omega^2 \right) U_0^M = 0 \\
 & -i\eta \bar{P}_0^M + 2\bar{\beta}_{10}^M W_2^M + \bar{\beta}_{50}^M W_1^M - i\eta \bar{\beta}_{60}^M U_0^M + \left(\Omega^2 - \eta^2 \bar{\beta}_{70}^M \right) W_0^M = 0 \\
 & U_1^M + U_0^M - i\eta W_0^M = 0 \\
 & 2U_2^M + U_1^M - U_0^M - i\eta W_1^M = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Burada

$$\eta = k\bar{r}, \quad \Omega^2 = \frac{\bar{r}^2 \omega^2 \rho_A}{C}, \quad \gamma = \frac{\rho_M}{\rho_A} \tag{3.2.12}$$

olarak tanımlanmıştır. $\bar{\beta}_{i0}^A, \bar{\beta}_{i1}^A, \dots, \bar{\beta}_{i0}^M, \bar{\beta}_{i1}^M$ ($i = 1, 2, \dots, 7$) katsayıları,

Adventitia için aşağıdaki gibi,

$$\bar{\beta}_{10}^A = \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2} = {}_A t_{rr0}^0 - {}_A P_0^0$$

$$\bar{\beta}_{20}^A = (-{}_A P_0^0 - 2{}_A P_1^0 + 2{}_A \alpha_{20} + {}_A t_{rr1}^0 - {}_A t_{rr0}^0)$$

$$\bar{\beta}_{30}^A = [2({}_A \alpha_{20} - {}_A \alpha_{10}) - {}_A P_0^0 - {}_A t_{\theta\theta 0}^0]$$

$$\bar{\beta}_{40}^A = ({}_A t_{zz0}^0 - {}_A P_0^0)$$

$$\bar{\beta}_{50}^A = ({}_A t_{rr0}^0 + {}_A t_{rr1}^0 - {}_A P_0^0 - {}_A P_1^0)$$

$$\bar{\beta}_{60}^A = (-{}_A P_0^0 + 2{}_A \alpha_{30})$$

$$\bar{\beta}_{70}^A = (2{}_A \alpha_{40} + {}_A t_{zz0}^0 + {}_A P_0^0)$$

Media için ise,

$$\bar{\beta}_{10}^M = \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2} = {}_M t_{rr0}^0 - {}_M P_0^0$$

$$\bar{\beta}_{20}^M = (-{}_M P_0^0 - 2{}_M P_1^0 + 2{}_M \alpha_{20} + {}_M t_{rr1}^0 - {}_M t_{rr0}^0)$$

$$\bar{\beta}_{30}^M = [2({}_M \alpha_{20} - {}_M \alpha_{10}) - {}_M P_0^0 - {}_M t_{\theta\theta 0}^0]$$

$$\bar{\beta}_{40}^M = ({}_M t_{zz0}^0 - {}_M P_0^0)$$

$$\bar{\beta}_{50}^M = ({}_M t_{rr0}^0 + {}_M t_{rr1}^0 - {}_M P_0^0 - {}_M P_1^0)$$

$$\bar{\beta}_{60}^M = (-{}_M P_0^0 + 2{}_M \alpha_{30})$$

$$\bar{\beta}_{70}^M = (2{}_M \alpha_{40} + {}_M t_{zz0}^0 + {}_M P_0^0)$$

(3.2.13)

şeklinde verilir, burada

$$\bar{x} = \left(\lambda \left(1 - \frac{r_i^2}{\bar{r}^2} \right) + \frac{R_i^2}{\bar{r}^2} \right)^{1/2},$$

$${}_AP_0^0 = {}_At_{rr0}^0 - \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2}$$

$${}_At_{\theta\theta 0}^0 = {}_AP_0^0 + \frac{1}{\bar{x}^2} \left[c_A + \frac{1}{c_A} 4k_{1A} \cos^2 \beta_A (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1) F_A(\bar{x}) \right]$$

$${}_At_{zz0}^0 = {}_AP_0^0 + \lambda^2 \left[c_A + \frac{1}{c_A} 4k_{1A} \sin^2 \beta_A (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1) F_A(\bar{x}) \right]$$

$${}_AP_1^0 = {}_At_{rr1}^0 - \frac{2}{\lambda^2} (\lambda - \bar{x}^2)$$

$${}_MP_0^0 = {}_Mt_{rr0}^0 - \frac{\bar{x}^2}{\lambda^2}$$

$${}_Mt_{\theta\theta 0}^0 = {}_MP_0^0 + \frac{1}{\bar{x}^2} \left[c_M + \frac{1}{c_M} 4k_{1M} \cos^2 \beta_M (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1) F_M(\bar{x}) \right]$$

$${}_Mt_{zz0}^0 = {}_MP_0^0 + \lambda^2 \left[c_M + \frac{1}{c_M} 4k_{1M} \sin^2 \beta_M (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1) F_M(\bar{x}) \right]$$

$${}_MP_1^0 = {}_Mt_{rr1}^0 - \frac{2}{\lambda^2} (\lambda - \bar{x}^2)$$

$$\tilde{I}_A(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}^2} \cos^2 \beta_A + \lambda^2 \sin^2 \beta_A, \quad \tilde{I}_M(\bar{x}) = \frac{1}{\bar{x}^2} \cos^2 \beta_M + \lambda^2 \sin^2 \beta_M$$

$$F_A(\bar{x}) = \exp \left[k_{2A} (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 \right], \quad F_M(\bar{x}) = \exp \left[k_{2M} (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 \right]$$

olarak tanımlanmıştır. Sırayla Adventitia ve Media için ${}_A\alpha_{10}$ ve ${}_M\alpha_{10}$ değerleri ise,

$${}_A\alpha_{10} = -{}_AP_0^0 + \frac{8\cos^4\beta_A}{\bar{x}^4 c_A} k_{1A} k_{2A} (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 F_A(\bar{x})$$

$${}_A\alpha_{20} = \frac{8\lambda^2}{\bar{x}^2 c_A} \sin^2\beta_A \cos^2\beta_A k_{1A} k_{2A} (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 F_A(\bar{x})$$

$${}_A\alpha_{30} = \frac{8\lambda^2}{\bar{x}^2 c_A} \sin^2\beta_A \cos^2\beta_A (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 F_A(\bar{x})$$

$${}_A\alpha_{40} = -{}_AP_0^0 + \frac{1}{c_A} 8\lambda^4 \sin^4\beta_A k_{1A} k_{2A} (\tilde{I}_A(\bar{x}) - 1)^2 F_A(\bar{x})$$

$${}_M\alpha_{10} = -{}_MP_0^0 + \frac{8\cos^4\beta_M}{\bar{x}^4 c_M} k_{1M} k_{2M} (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 F_M(\bar{x})$$

$${}_M\alpha_{20} = \frac{8\lambda^2}{\bar{x}^2 c_M} \sin^2\beta_M \cos^2\beta_M k_{1M} k_{2M} (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 F_M(\bar{x})$$

$${}_M\alpha_{30} = \frac{8\lambda^2}{\bar{x}^2 c_M} \sin^2\beta_M \cos^2\beta_M (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 F_M(\bar{x})$$

$${}_M\alpha_{40} = -{}_MP_0^0 + \frac{1}{c_M} 8\lambda^4 \sin^4\beta_M k_{1M} k_{2M} (\tilde{I}_M(\bar{x}) - 1)^2 F_M(\bar{x})$$

(3.2.14)

olarak tanımlanmıştır. Ancak ${}_A t_{rr0}^0$, ${}_M t_{rr0}^0$ ifadeleri (2.5.12) denklemlerinin (2.5.13) sınır koşulları altında çözümünden elde edilecektir. Bu ifadeler aşağıda verilmektedir.

$${}_A t_{rr0}^0 = {}_M t_{rr0}^0 = \frac{1}{c_A} {}_A t_{rr} \Big|_{r=\bar{r}} = \frac{1}{c_M} {}_M t_{rr} \Big|_{r=\bar{r}} \quad (3.2.15)$$

Diğer yandan (2.5.12) denklemlerinden

$${}_A t_{rr1}^0 = {}_A t_{\theta\theta 0}^0 - {}_A t_{rr0}^0 \quad (3.2.16)$$

$${}_M t_{rr1}^0 = {}_M t_{\theta\theta 0}^0 - {}_M t_{rr0}^0$$

olduğu açık olarak görülmektedir.

Problemın çözümünü tamamlayabilmek için (3.2.11) denklemlerine ek olarak (2.4.12), (2.4.13) ve (2.4.14) sınır koşullarının da seri açılımı ifadelerini elde etmek gerekmektedir. Bunun için $\underline{T}$ Piola-Kirchhoff tansörünün bileşenleri aşağıdaki gibi kuvvet serisine açılabilir.

$$\begin{aligned} T_{rr}^A &= \bar{C} (T_{rr0}^A + T_{rr1}^A \xi_A + \dots) \\ T_{rz}^A &= \bar{C} (T_{rz0}^A + T_{rz1}^A \xi_A + \dots) \\ T_{rr}^M &= \bar{C} (T_{rr0}^M + T_{rr1}^M \xi_M + \dots) \\ T_{rz}^M &= \bar{C} (T_{rz0}^M + T_{rz1}^M \xi_M + \dots) \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Burada $T_{rr0}^A, T_{rr1}^A, T_{rz0}^A, T_{rz1}^A, T_{rr0}^M, T_{rr1}^M, T_{rz0}^M, T_{rz1}^M$ büyüklükleri aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$T_{rr0}^A = {}_A \bar{P}_0 + \frac{1}{C} ({}_A t_{rr0}^0 - 2 {}_A P_0^0) U_1^A$$

$$T_{rr1}^A = {}_A \bar{P}_1 + \frac{2}{C} ({}_A t_{rr0}^0 - 2 {}_A P_0^0) U_2^A + \frac{1}{C} ({}_A t_{rr1}^0 - 2 {}_A P_1^0) U_1^A$$

$$T_{rz0}^A = \frac{1}{C} {}_A P_0^0 i\eta U_0^A + \frac{1}{C} ({}_A t_{rr0}^0 - {}_A P_0^0) W_1^A$$

$$T_{rz1}^A = -\frac{1}{C} {}_A P_1^0 i\eta U_0^A + \frac{1}{C} {}_A P_0^0 i\eta U_1^A + \frac{1}{C} ({}_A t_{rr1}^0 + {}_A P_1^0) W_1^A + \frac{2}{C} ({}_A t_{rr0}^0 - {}_A P_0^0) W_2^A$$

$$\begin{aligned}
T_{rr0}^M &= {}_M\bar{P}_0 + \frac{1}{C}({}_M t_{rr0}^0 - 2 {}_M P_0^0) U_1^M \\
T_{rr1}^M &= {}_M\bar{P}_1 + \frac{2}{C}({}_M t_{rr0}^0 - 2 {}_M P_0^0) U_2^M + \frac{1}{C}({}_M t_{rr1}^0 - 2 {}_M P_1^0) U_1^M \\
T_{rz0}^M &= \frac{1}{C} {}_M P_0^0 i\eta U_0^M + \frac{1}{C}({}_M t_{rr0}^0 - {}_M P_0^0) W_1^M \\
T_{rz1}^M &= +\frac{1}{C} {}_M P_1^0 i\eta U_0^M + \frac{1}{C} {}_M P_0^0 i\eta U_1^M + \frac{1}{C}({}_M t_{rr1}^0 + {}_M P_1^0) W_1^M + \frac{2}{C}({}_M t_{rr0}^0 - {}_M P_0^0) W_2^M
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

Bu durumda gerilme sınır koşulları

$$\begin{aligned}
T_{rr0}^M + T_{rr1}^M \xi_i &= -[\alpha(1 + \xi_i)^2 - 2i(\bar{\eta}^2 - f(\bar{\eta}))]\bar{A} + 2i\bar{\eta}(g(\bar{\gamma}) - 1)\bar{B} \\
&\quad - \frac{1}{C} {}_M t_{rr0}^0 U_1^M - \frac{1}{C}(2 {}_M t_{rr0}^0 U_2^M + U_1^M {}_M t_{rr1}^0) \xi_i \\
T_{rz0}^M + T_{rz1}^M \xi_i &= 2\bar{\eta}f(\bar{\eta})\bar{A} + (\bar{\eta}^2 - \bar{\gamma}^2)\bar{B} \\
T_{rr0}^A + T_{rr1}^A \xi_0 &= 0 \\
T_{rz0}^A + T_{rz1}^A \xi_0 &= 0 \\
T_{rr0}^A &= T_{rr0}^M \xi_0 \\
T_{rz0}^A &= T_{rz0}^M \xi_0
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

şeklini alacaktır.

Ortak yüzeyde yer değıştirme bileşenlerinin eşit olmasından

$$U_0^A = U_0^M \quad (3.2.20)$$

$$W_0^A = W_0^M$$

elde edilir. Media tabakasının iç yüzeyinde akışkan ile katının hız bileşenlerinin eşitlenmesi ile de,

$$\frac{\Omega^2}{\alpha} q_1 \frac{1}{(1+\xi_i)} (U_0^M + U_1^M \xi_i + U_2^M \xi_i^2) = f \bar{A} + \bar{\eta} \bar{B} \quad (3.2.21)$$

$$i \frac{\Omega^2}{\alpha} q_1 \frac{1}{(1+\xi_i)} (W_0^M + W_1^M \xi_i + W_2^M \xi_i^2) = \bar{\eta} \bar{A} + g \bar{B}$$

bulunur. Burada,

$$\xi_i = -\frac{h_M}{\bar{r}}, \quad \xi_0 = \frac{h_A}{\bar{r}}, \quad q_1 = \frac{\bar{\rho}}{\rho_A}, \quad \alpha = \left[\frac{\bar{\rho} \bar{r}^2 \omega}{\mu} \right]^{1/2},$$

$$\bar{\eta} = \eta(1+\xi_i), \quad \hat{\gamma} = s\bar{r}, \quad \bar{\gamma} = \hat{\gamma}(1+\xi_i), \quad f = \frac{\bar{\eta} I_1(\bar{\eta})}{I_0(\bar{\eta})}, \quad (3.2.22)$$

$$g = \frac{\bar{\gamma} J_0(\bar{\gamma})}{J_1(\bar{\gamma})}, \quad \bar{A} = \frac{i\mu I_0(\bar{\eta})}{\bar{r}^2(1+\xi_i^2)\bar{C}} A, \quad \bar{B} = \frac{i\mu J_1(\bar{\gamma})}{\bar{r}^2(1+\xi_i^2)\bar{C}} B$$

şeklinde tanımlanmıştır.

(3.2.13) ifadeleri (3.2.14)'de yerlerine konulursa aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$${}_M \bar{P}_0 + \xi_i {}_M \bar{P}_1 + \Gamma_1 U_1^M + \Gamma_2 U_2^M + [\alpha(1+\xi_i)^2 - 2i(\bar{\eta}^2 - f(\bar{\eta}))] \bar{A} - 2\eta i(g(\bar{\gamma}) - 1) \bar{B} = 0$$

$$i\eta\Gamma_3 U_0^M + i\eta\Gamma_4 U_1^M + \Gamma_5 W_1^M + \Gamma_6 W_2^M - 2\bar{\eta} f(\bar{\eta}) \bar{A} + (\bar{\gamma}^2 - \bar{\eta}^2) \bar{B} = 0$$

$$\bar{P}_0^A + \xi_0 \bar{P}_1^A + \Gamma_7 U_1^A + \Gamma_8 U_2^A = 0$$

$$i\eta\Gamma_9U_0^A+i\eta\Gamma_{10}U_1^A+\Gamma_{11}W_1^A+\Gamma_{12}W_2^A=0$$

$$\bar{P}_0^M+\Gamma_{13}U_1^M-\bar{P}_0^A+\Gamma_{14}U_1^A=0 \quad (3.2.23)$$

$$i\eta\Gamma_4U_0^M-i\eta\Gamma_{16}U_0^A+\Gamma_{15}W_1^M-\Gamma_{17}W_1^A=0$$

Burada,

$$\Gamma_1=\frac{2}{C}\left[{}_Mt_{rr0}^0-{}_MP_0^0+\xi_i\left({}_Mt_{rr1}^0-{}_MP_1^0\right)\right]$$

$$\Gamma_2=\frac{4}{C}\xi_i\left(t_{rr0}^0-2{}_MP_0^0\right)$$

$$\Gamma_3=\frac{1}{C}\left({}_MP_0^0-\xi_{iM}P_1^0\right)$$

$$\Gamma_4=\frac{1}{C}{}_MP_0^0$$

$$\Gamma_5=\frac{1}{C}\left[{}_Mt_{rr0}^0-{}_MP_0^0+\xi_i\left({}_Mt_{rr1}^0+{}_MP_1^0\right)\right]$$

$$\Gamma_6=\frac{2\xi_i}{C}\left({}_Mt_{rr0}^0-{}_MP_0^0\right)$$

$$\Gamma_7=\frac{1}{C}\left[{}_At_{rr0}^0-2{}_AP_0^0+\xi_0\left({}_At_{rr1}^0-2{}_AP_1^0\right)\right]$$

$$\Gamma_8 = \frac{2\xi_0}{C}({}_A t_{rr0}^0 - 2{}_A P_0^0)$$

$$\Gamma_9 = \frac{1}{C}({}_A P_0^0 - \xi_0{}_A P_1^0)$$

$$\Gamma_{10} = \frac{\xi_0}{C}{}_A P_0^0$$

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{C}[{}_A t_{rr0}^0 - {}_A P_0^0 + \xi_0({}_A t_{rr1}^0 + {}_A P_1^0)]$$

$$\Gamma_{12} = \frac{2\xi_0}{C}({}_A t_{rr0}^0 - {}_A P_0^0)$$

$$\Gamma_{13} = \frac{1}{C}({}_M t_{rr0}^0 - 2{}_M P_0^0)$$

$$\Gamma_{14} = \frac{1}{C}({}_A t_{rr0}^0 - 2{}_A P_0^0)$$

$$\Gamma_{15} = \frac{1}{C}({}_M t_{rr0}^0 - {}_M P_0^0) \quad (3.2.24)$$

$$\Gamma_{16} = \frac{1}{C}{}_A P_0^0$$

$$\Gamma_{17} = \frac{1}{C}({}_A t_{rr0}^0 - {}_A P_0^0)$$

olarak tanımlanmıştır. Bu hale ait dispersiyon bağıntısı (3.2.19), (3.2.20), (3.2.21) ve (3.2.21) denklemlerinden elde edilir. Burada dispersiyonu bağıntısını elde etmek için 18 bilinmeyenin bulunduğu denklem takımının katsayılarından (18x18) şeklinde bir kare matris oluşturulmuştur. Problemimizin gerçekte bir stabilite problemi olması sebebiyle, bu katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile dispersiyon

bağıntısı elde edilir. Elde edilen bağıntı çok büyük olması sebebiyle burada verilememiştir.

Bu bağıntıyı oldukça karmaşık olması sebebiyle analitik olarak incelemek mümkün değildir. Genel halin incelenmesine geçmezden önce bazı özel halleri incelemekte yarar vardır.

Uzun Dalga Yaklaşımı :

Büyük damarlarda bile $\bar{r}$ ortalama yarıçap çok küçük olduğundan dalga boyunun uzun olması halinde $\eta = k\bar{r} \ll 1$ kabul edilebilir. Bu özel halde $f = \eta^2 / 2$ şeklinde verilebilir. Bu durumda (3.2.25) dispersiyon bağıntısının katsayıları Ekler bölümünde Sayfa 118-120’de verilmiştir. Burada incelenecek dispersiyon bağıntısı,

$$A1 \left(\frac{c}{c_0} \right)^4 + A2 \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 + A3 = 0 \quad (3.2.25)$$

şeklindedir.

Bu limit durumda dahi dalga dispersif olup analitik incelenmesi hala karmaşıktır. Bu formülasyonun bilinen teoriler ile karşılaştırmasını yapabilmek için uzun dalga yaklaşımına ek olarak viskozitenin düşük olduğu kabul edilecektir. Bu limit durumda $g \rightarrow \infty$ olacağından dispersiyon bağıntısı Ekler bölümünün Sayfa 121-122’deki şeklini almaktadır.

$$\left(\frac{c}{c_0} \right) = \frac{\Omega^2}{\eta^2} \quad , \quad c_0^2 = \frac{\bar{C}}{\rho}$$

tanımları yapılmıştır. Mevcut teoriler ile bir karşılaştırmasını yapabilmek için başlangıç şekil değiştirmesi (0) olarak alındığında bazı katsayılar,

$$P_0^M = -1, \quad P_0^A = -1$$

$$\beta_{10}^M = \beta_{20}^M = \beta_{40}^M = \beta_{50}^M = \beta_{70}^M = 1, \quad \beta_{30}^M = -1, \quad \beta_{60}^M = 0$$

$$\beta_{10}^A = \beta_{20}^A = \beta_{40}^A = \beta_{50}^A = \beta_{70}^A = 1, \quad \beta_{30}^A = -1, \quad \beta_{60}^A = 0$$

$$\Gamma_1 = 2, \Gamma_2 = 4\xi_i, \Gamma_3 = -1, \Gamma_4 = -1, \Gamma_5 = 1, \quad (3.2.26)$$

$$\Gamma_6 = 2\xi_i, \Gamma_7 = 2, \Gamma_8 = 4\xi_o, \Gamma_9 = -1, \Gamma_{10} = -\xi_o,$$

$$\Gamma_{11} = 1, \Gamma_{12} = 2\xi_o, \Gamma_{13} = 2, \Gamma_{14} = 2, \Gamma_{15} = 1,$$

$$\Gamma_{16} = -1, \Gamma_{17} = 1$$

olarak bulunur. Bu değerler (3.2.25) denkleminde yerine konursa dispersiyon bağıntısı aşağıdaki şekli almaktadır.

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^4 q_1 (\xi_o - Z \xi_i q_2) + \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 q_1 (6\xi_o - 5\xi_i + 1) + (\xi_i - \xi_o) = 0 \quad (3.2.27)$$

ξ_i ve ξ_o 'yu küçük kabul edersek ince tüpler için (3.2.27)' nin kökleri

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = -\frac{1}{\xi_o} - \frac{1}{\xi_o^2} (q_2 Z \xi_i) - \frac{1}{\xi_o^3} (q_2 Z \xi_i)^2 \dots, \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = \frac{\xi_o}{q_1} - \frac{\xi_i}{q_1} \quad (3.2.28)$$

bulunmaktadır. Literatürde katmanlı hal için Lamb ve Young (Moens-Korteweg) modları bulunmamaktadır, bu modlar ancak tek katmanlı yapı için bulunmaktadır. Bundan dolayı oluşturduğumuz bu modeli yani iki katmanlı modeli daha basit hale getirerek Media ve Adventitia' dan oluşturduğumuz modelin dıştaki kısmı olan Adventitia,'yı kaldırarak sadece Media'nın bulunduğu tek tabakalı model için katsayılar matrisini tekrar oluşturduk ve bu durumda Lamb ve Young (Moens-Korteweg) modlarını elde etmeye çalıştık. Bu yüzden katmanlı modelin özelliklerinin aynı kalması şartıyla (sınır şartları, bünye ve hareket denklemleri) problemimizin çözümü tek katmanlı hal için de elde edilmiştir. Literatürde daha önce

bulunmuş olan tek katmanlı bir yapı için Lamb ve Young (Moens-Korteweg) modları elde edilmiştir. İki katmanlı modelin özel hali olan tek katmanlı halde bulunan modların literatürdeki modlarla uyum içinde olması iki katmanlı model için şu ana kadar yaptıklarımızın doğru olduğunu göstermektedir.

Tek tabakalı modele ait gerilme ve sınır şartlarımıza bağlı ifadeler aşağıda verilmiştir.

$$\bar{P}_1 + 2\beta_{10}U_2 + 2\beta_{20}U_1 + (\beta_{30} - \beta_{40}\eta^2 + \Omega^2)U_0 = 0$$

$$-i\eta\bar{P}_0 + 2\beta_{10}W_2 + \beta_{50}W_1 - i\eta\beta_{60}U_0 + (\Omega^2 - \beta_{70}\eta^2)W_0 = 0$$

$$U_1 + U_0 - i\eta W_0 = 0$$

$$2U_2 + U_1 - U_0 - i\eta W_1 = 0$$

$$\bar{P}_0 + \bar{\Gamma}_1 U_1 = 0 \quad (\bar{T}_{r0} = 0)$$

$$i\eta\bar{\Gamma}_4 U_0 + (\bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_4)W_1 = 0 \quad (\bar{T}_{r0} = 0)$$

$$\xi_i \bar{P}_1 + 2\xi_i \bar{\Gamma}_1 U_2 + \xi_i \bar{\Gamma}_2 U_1 + [\alpha(1 + \xi_i)^2 - 2i(\eta^2 - f)]\bar{A} + 2i\eta(g - 1)\bar{B} = 0$$

$$\xi_i \bar{\Gamma}_3 i\eta U_0 + \xi_i \bar{\Gamma}_4 i\eta U_1 + \xi_i (\bar{\Gamma}_2 + \bar{\Gamma}_3)W_1 + 2\xi_i (\bar{\Gamma}_1 + \bar{\Gamma}_4)W_2$$

$$2\eta f \bar{A} + (\bar{\gamma}^2 g - \eta^2)\bar{B} = 0 \quad (3.2.29)$$

$$\frac{\Omega^2}{\alpha} q_1 \frac{1}{(1 + \xi_i)} (U_0^M + U_1^M \xi_i + U_2^M \xi_i^2) = f \bar{A} + \bar{\eta} \bar{B}$$

$$i \frac{\Omega^2}{\alpha} q_1 \frac{1}{(1 + \xi_i)} (W_0^M + W_1^M \xi_i + W_2^M \xi_i^2) = \bar{\eta} \bar{A} + g \bar{B}$$

Daha önce katmanlı model için yaptığımız yaklaşımlar bu model için de yapılmıştır. Burada,

$$\xi_i = -\frac{h_M}{\bar{r}}, \quad q_1 = \frac{\bar{\rho}}{\rho_A}, \quad \alpha = \left[\frac{\bar{\rho} \bar{r}^2 \omega}{\mu} \right]^{1/2},$$

$$\bar{\eta} = \eta(1 + \xi_i), \quad \hat{\gamma} = s\bar{r}, \quad \bar{\gamma} = \hat{\gamma}(1 + \xi_i), \quad f = \frac{\bar{\eta} I_1(\bar{\eta})}{I_0(\bar{\eta})}, \quad (3.2.30)$$

$$g = \frac{\bar{\gamma} J_0(\bar{\gamma})}{J_1(\bar{\gamma})}, \quad \bar{A} = \frac{i\mu I_0(\bar{\eta})}{\bar{r}^2 (1 + \xi_i^2) \bar{C}} A, \quad \bar{B} = \frac{i\mu J_1(\bar{\gamma})}{\bar{r}^2 (1 + \xi_i^2) \bar{C}} B$$

ve katsayılar matrisi oluşturulursa,

$$B1 \left(\frac{c}{c_0} \right)^4 + B2 \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 + B3 = 0 \quad (3.2.31)$$

ifadesindeki E1, B2, B3 katsayıları Sayfa 79'da verilmiştir.

$$\bar{\Gamma}_1 = t_{rr0}^0 - 2P_0^0, \quad \bar{\Gamma}_2 = t_{rr1}^0 - 2P_1^0, \quad \bar{\Gamma}_3 = P_1^0, \quad \bar{\Gamma}_4 = P_0^0 \quad (3.2.32)$$

olarak alınır ve başlangıç gerilmeleri (0) alınırsa,

$$P_0^M = -1, \quad \bar{\Gamma}_1 = 2, \quad \bar{\Gamma}_2 = 0, \quad \bar{\Gamma}_3 = 0, \quad \bar{\Gamma}_4 = -1$$

$$\beta_{10}^M = \beta_{20}^M = \beta_{40}^M = \beta_{50}^M = \beta_{70}^M = 1, \quad (3.2.33)$$

$$\beta_{30}^M = -1, \quad \beta_{60}^M = 0$$

ve daha sonra burada da uzun dalga yaklaşımı yapılırsa, aşağıdaki dispersiyon bağıntısının katsayıları elde edilir.

$$B1 = 12\xi_i^2 g q_1 (\Gamma_1^2 + 2\Gamma_1 \Gamma_4 + \Gamma_4^2) - (24\xi_i^2 \beta_{10}^A q_1^2) (\Gamma_1 + \Gamma_4) + 4\xi_i g q_1 (\Gamma_1^2 + 2\Gamma_1 \Gamma_4 + \Gamma_4^2) - (16\xi_i \beta_{10}^A q_1^2) (\Gamma_1 + \Gamma_4) - (4\beta_{10}^A q_1^2) (\Gamma_1 + \Gamma_4)$$

$$\begin{aligned} B2 = & 2\xi_i^2 g (-2\beta_{10}^A \Gamma_1^2 + 6\beta_{10}^A \Gamma_1 q_1 \Gamma_4 - 4\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 + 6\beta_{10}^A q_1 \Gamma_4^2 - 2\beta_{10}^A \Gamma_4^2 - 6\Gamma_1^3 \\ & q_1 + 2\Gamma_1^3 - 12\Gamma_1^2 q_1 \Gamma_4 - 6\Gamma_1^2 q_1 \beta_{70}^A + 4\Gamma_1^2 \Gamma_4 + \Gamma_1^2 \beta_{20}^A - \Gamma_1^2 \Gamma_2 - \Gamma_1^2 \beta_{30}^A - 6\Gamma_1 q_1 \Gamma_4^2 - 12 \\ & \Gamma_1 q_1 \Gamma_4 \beta_{70}^A + 2\Gamma_1 \Gamma_4^2 + 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A - 2\Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{30}^A - 6q_1 \Gamma_4^2 \beta_{70}^A + \Gamma_4^2 \beta_{20}^A - \Gamma_4^2 \\ & \Gamma_2 - \Gamma_4^2 \beta_{30}^A) + 2\xi_i^2 (-2\beta_{10}^A \Gamma_1 q_1 - 2\beta_{10}^A q_1 \Gamma_4 + 2\beta_{10}^A \Gamma_1^2 q_1 + 4\beta_{10}^A \Gamma_1^2 - 6\beta_{10}^A \Gamma_1 q_1 \\ & \Gamma_4 + 5\beta_{10}^A \Gamma_1 q_1 \beta_{20}^A - 5\beta_{10}^A \Gamma_1 q_1 \Gamma_2 + 8\beta_{10}^A \Gamma_1 q_1 \Gamma_3 + 3\beta_{10}^A \Gamma_1 q_1 \beta_{30}^A + 8\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 - 8\beta_{10}^A \\ & q_1 \Gamma_4^2 + 5\beta_{10}^A q_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A - 13\beta_{10}^A q_1 \Gamma_4 \Gamma_2 + 3\beta_{10}^A q_1 \Gamma_4 \beta_{30}^A + 4\beta_{10}^A \Gamma_4^2 + 8\Gamma_1^3 q_1 - 4\Gamma_1^3 + 16 \\ & \Gamma_1^2 q_1 \Gamma_4 + 8\Gamma_1^2 q_1 \beta_{60}^A - 8\Gamma_1^2 \Gamma_4 - 2\Gamma_1^2 \beta_{20}^A + 2\Gamma_1^2 \Gamma_2 + 2\Gamma_1^2 \beta_{30}^A + 8\Gamma_1 q_1 \Gamma_4^2 + 16\Gamma_1 q_1 \Gamma_4 \\ & \beta_{60}^A + 8\Gamma_1 q_1 \Gamma_4 \beta_{50}^A - 4\Gamma_1 \Gamma_4^2 - 4\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A + 4\Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 + 4\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{30}^A + 8q_1 \Gamma_4^2 \beta_{60}^A + 8q_1 \\ & \Gamma_4^2 \beta_{50}^A - 2\Gamma_4^2 \beta_{20}^A + 2\Gamma_4^2 \Gamma_2 + 2\Gamma_4^2 \beta_{30}^A) + 4\xi_i g q_1 (\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 + \beta_{10}^A \Gamma_4^2 - \Gamma_1^3 - 2\Gamma_1^2 \Gamma_4 - \Gamma_1^2 \\ & \beta_{70}^A - \Gamma_1 \Gamma_4^2 - 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{70}^A - \Gamma_4^2 \beta_{70}^A) + 2\xi_i q_1 (-2\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 + \beta_{10}^A \Gamma_1 \beta_{20}^A - \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_2 + 2 \\ & \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_3 + \beta_{10}^A \Gamma_1 \beta_{30}^A - 2\beta_{10}^A \Gamma_4^2 + \beta_{10}^A \Gamma_4 \beta_{20}^A - 3\beta_{10}^A \Gamma_4 \Gamma_2 + \beta_{10}^A \Gamma_4 \beta_{30}^A + 2\Gamma_1^3 + 4\Gamma_1^2 \\ & \Gamma_4 + 2\Gamma_1^2 \beta_{60}^A + 2\Gamma_1 \Gamma_4^2 + 4\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{60}^A + 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{50}^A + 2\Gamma_4^2 \beta_{60}^A + 2\Gamma_4^2 \beta_{50}^A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B3 = & 2\xi_i^2 g (-\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 - \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_3 - \beta_{10}^A \Gamma_4^2 + \beta_{10}^A \Gamma_4 \Gamma_2 + \beta_{10}^A \Gamma_1^3 + 3\beta_{10}^A \Gamma_1^2 \\ & \Gamma_4 + \beta_{10}^A \Gamma_1^2 \Gamma_3 - \beta_{10}^A \Gamma_1^2 \beta_{60}^A + 2\beta_{10}^A \Gamma_1^2 \beta_{70}^A + 2\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4^2 - \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 - 2\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \\ & \beta_{60}^A + 4\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{70}^A - \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{50}^A - \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{30}^A + \beta_{10}^A \Gamma_1 \beta_{20}^A \Gamma_3 - \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 - \beta_{10}^A \\ & \Gamma_4^2 \beta_{60}^A + 2\beta_{10}^A \Gamma_4^2 \beta_{70}^A - \beta_{10}^A \Gamma_4^2 \beta_{50}^A - \beta_{10}^A \Gamma_4^2 \beta_{30}^A - \beta_{10}^A \Gamma_4 \beta_{20}^A \Gamma_2 + \beta_{10}^A \Gamma_4 \Gamma_2^2 - \Gamma_1^4 - 2\Gamma_1^3 \\ & \Gamma_4 + \Gamma_1^3 \beta_{60}^A - 2\Gamma_1^3 \beta_{70}^A + \Gamma_1^3 \beta_{30}^A - \Gamma_1^2 \Gamma_4^2 + 2\Gamma_1^2 \Gamma_4 \beta_{60}^A - 4\Gamma_1^2 \Gamma_4 \beta_{70}^A + \Gamma_1^2 \Gamma_4 \beta_{50}^A + 2\Gamma_1^2 \Gamma_4 \\ & \beta_{30}^A + \Gamma_1^2 \beta_{20}^A \beta_{60}^A - \Gamma_1^2 \beta_{20}^A \beta_{70}^A - \Gamma_1^2 \Gamma_2 \beta_{60}^A + \Gamma_1^2 \Gamma_2 \beta_{70}^A + \Gamma_1^2 \beta_{70}^A \beta_{30}^A + \Gamma_1 \Gamma_4^2 \beta_{60}^A - 2\Gamma_1 \Gamma_4^2 \\ & \beta_{70}^A + \Gamma_1 \Gamma_4^2 \beta_{50}^A + \Gamma_1 \Gamma_4^2 \beta_{30}^A + 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A \beta_{60}^A - 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A \beta_{70}^A + \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A \beta_{50}^A - 2\Gamma_1 \Gamma_4 \\ & \Gamma_2 \beta_{60}^A + 2\Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 \beta_{70}^A - \Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 \beta_{50}^A + 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{70}^A \beta_{30}^A + \Gamma_4^2 \beta_{20}^A \beta_{60}^A - \Gamma_4^2 \beta_{20}^A \beta_{70}^A + \Gamma_4^2 \\ & \beta_{20}^A \beta_{50}^A - \Gamma_4^2 \Gamma_2 \beta_{60}^A + \Gamma_4^2 \Gamma_2 \beta_{70}^A - \Gamma_4^2 \Gamma_2 \beta_{50}^A + \Gamma_4^2 \beta_{70}^A \beta_{30}^A) + 4\xi_i^2 (\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 + \beta_{10}^A \Gamma_1^2 \Gamma_1 \\ & \Gamma_3 + \beta_{10}^A \Gamma_4^2 - \beta_{10}^A \Gamma_4 \Gamma_2 - \beta_{10}^A \Gamma_1^3 - 3\beta_{10}^A \Gamma_1^2 \Gamma_4 - \beta_{10}^A \Gamma_1^2 \Gamma_3 + \beta_{10}^A \Gamma_1^2 \beta_{60}^A - 2\beta_{10}^A \Gamma_1^2 \\ & \beta_{70}^A - 2\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4^2 + \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 + 2\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{60}^A - 4\beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{70}^A + \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{50}^A + \beta_{10}^A \\ & \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{30}^A - \beta_{10}^A \Gamma_1 \beta_{20}^A \Gamma_3 + \beta_{10}^A \Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3 + \beta_{10}^A \Gamma_4^2 \beta_{60}^A - 2\beta_{10}^A \Gamma_4^2 \beta_{70}^A + \beta_{10}^A \Gamma_4^2 \beta_{50}^A + \beta_{10}^A \Gamma_4^2 \\ & \beta_{30}^A + \beta_{10}^A \Gamma_4 \beta_{20}^A \Gamma_2 - \beta_{10}^A \Gamma_4 \Gamma_2^2 + \Gamma_1^4 + 2\Gamma_1^3 \Gamma_4 - \Gamma_1^3 \beta_{60}^A + 2\Gamma_1^3 \beta_{70}^A - \Gamma_1^3 \beta_{30}^A + \Gamma_1^2 \Gamma_4^2 - 2\Gamma_1^2 \\ & \Gamma_4 \beta_{60}^A + 4\Gamma_1^2 \Gamma_4 \beta_{70}^A - \Gamma_1^2 \Gamma_4 \beta_{50}^A - 2\Gamma_1^2 \Gamma_4 \beta_{30}^A - \Gamma_1^2 \beta_{20}^A \beta_{60}^A + \Gamma_1^2 \beta_{20}^A \beta_{70}^A + \Gamma_1^2 \Gamma_2 \beta_{60}^A - \Gamma_1^2 \\ & \Gamma_2 \beta_{70}^A - \Gamma_1^2 \beta_{70}^A \beta_{30}^A - \Gamma_1 \Gamma_4^2 \beta_{60}^A + 2\Gamma_1 \Gamma_4^2 \beta_{70}^A - \Gamma_1 \Gamma_4^2 \beta_{50}^A - \Gamma_1 \Gamma_4^2 \beta_{30}^A - 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A \beta_{60}^A + 2 \\ & \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A \beta_{70}^A - \Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{20}^A \beta_{50}^A + 2\Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 \beta_{60}^A - 2\Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 \beta_{70}^A + \Gamma_1 \Gamma_4 \Gamma_2 \beta_{50}^A - 2\Gamma_1 \Gamma_4 \beta_{70}^A \\ & \beta_{30}^A - \Gamma_4^2 \beta_{20}^A \beta_{60}^A + \Gamma_4^2 \beta_{20}^A \beta_{70}^A - \Gamma_4^2 \beta_{20}^A \beta_{50}^A + \Gamma_4^2 \Gamma_2 \beta_{60}^A - \Gamma_4^2 \Gamma_2 \beta_{70}^A + \Gamma_4^2 \Gamma_2 \beta_{50}^A - \Gamma_4^2 \beta_{70}^A \beta_{30}^A) \end{aligned}$$

Bu modelimiz $-\frac{h}{\bar{r}} \leq \xi_i \leq 0$ bölgesinde geçerli olacaktır. Burada,

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)^2 = \frac{\Omega^2}{\eta^2}, \quad c_0 = \frac{c_M}{\rho_M} \quad (3.2.34)$$

(3.2.32), (3.2.33) ve (3.2.34) değerleri (3.2.31)' ifadesinde yerlerine yazılacak olursa dispersiyon bağıntısı aşağıdaki şekli alır.

$$q_1 \left(\frac{c}{c_0}\right)^4 - 4q_1 \left(\frac{c}{c_0}\right)^2 - 6\xi_i = 0 \quad (3.2.35)$$

ξ_i 'yi küçük kabul edersek ince kabuklar için kökler,

$$\left(\frac{c}{c_0}\right)_1^2 = 4 + O(\rho/q_1), \quad \left(\frac{c}{c_0}\right)_2^2 = -\frac{3}{2} \frac{\xi_i}{q_1} \quad (3.2.36)$$

bulunur. Bu ifadelerde $c_0 = \frac{c_M}{\rho_M}$, $\xi_i = -\frac{h}{\bar{r}}$ olduğuna göre ve E malzemeye ait elastisite

modülünü göstermek üzere, $q_1 = \frac{\bar{\rho}}{\rho_M}$, $c_M = \frac{E}{3}$ olduğu hatırlanırsa gerçek fiziksel büyüklükler cinsinden dalga hızları,

$$c_1^2 = \frac{4E}{3\rho} + O(\rho/q_1), \quad c_2^2 = \frac{Eh}{2r\rho} \quad (3.2.37)$$

şeklini alır. Bunlar daha öncede söylendiği gibi Lamb ve Young (Moens-Korteweg) modlarına karşı gelmektedir.

Görülüyor ki bu özel durumda (sadece tek katmanın bulunduğu durumda) elde edilen sonuçlar, diğer araştırmacılar tarafından yapılan çalışmaların sonuçları ile uyumludur. Bu nedenle iki katmanlı olarak kurduğumuz modelin de doğru olduğunu

anlamaktayız. Keza yaptığımız çalışmanın özel hallerde daha önce de yapılan çalışmaların sonuçlarını vermesi çözölen problemin doğruluk mertebesi hakkında fikir elde etmek bakımından da önemlidir.

Sayısal inceleme için (Atabek,H.B. ve Lew, H.S., 1966) tarafından önerilen boyutsuz kompleks faz hızı ,

$$\frac{c}{c_0} = X + iY$$

olarak tanımlanırsa, dalga hızları (V) ve taşıma katsayıları (χ)

$$V = \frac{X^2 + Y^2}{X}, \quad \chi = \exp(-2\pi Y / X)$$

şeklinde yazılabilir.

Genel hale (iki katmanlı model) ve tek katmanlı yani sadece Media'nın bulunduğu modele ait dispersiyon bağıntılarını analitik olarak incelemek mümkün olmadığından uzun dalga yaklaşımında denklemler bilgisayarda sayısal olarak incelenmiş ve sonuçlar Şekil 3.3.- Şekil 3.23. arasında verilmiştir.

3.3. TEK TABAKALI MODEL İÇİN ELDE EDİLEN GRAFİKLERİN YORUMLANMASI

Damarın sadece tek tabakadan (Media) oluştuğu kabul edilerek (3.2.31) denklemi elde edilmiştir. Bu denklemden (3.2.35) ifadesi yardımı ile dalga hızları ve taşıma katsayıları elde edilerek α Womersley parametresi değişimleri farklı germe değerleri için Şekil 3.3.-Şekil 3.6. arasında verilmiştir. Şekil 3.3.'ün incelenmesinden birincil dalga hızının α 'nın küçük değerlerinde değişmediği ancak α 'nın büyük değerlerinde α ile beraber arttığı görülmektedir.

Şekil 3.4.'de ise V_2 ikincil dalga hızlarının Womersley parametresi ile değişimi farklı germe değerleri için verilmiştir. Şekilden görülebileceği gibi dalga hızı Womersley parametresinin küçük değerlerinde değişime uğramakta ancak büyük değerlerinde değişim görülmemektedir. Burada birincil dalga hızının tersine, dalga hızı germe ile azalmaktadır. Bu sonuç (Atabek,H.B. ve Lew, H.S., 1966), ile uyusmaktadır.

Birincil dalgaya ait taşıma katsayısının farklı germe değerleri için Womersley parametresi ile değişimleri Şekil 3.5.'de verilmiştir. α 'nın küçük değerlerinde hızlı bir azalma gözlenmektedir ve α 'nın 3 civarında minimum değere ulaşp bu noktadan sonra α 'nın artan değerleri ile artmaktadır. Bu sonuçta (Atabek,H.B. ve Lew, H.S., 1966)'in bulduğu sonuçlarla uyusmaktadır.

İkincil dalgaya ait taşıma katsayısının Womersley parametresi ve germe ile değişimleri Şekil 3.6.'da verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi bu katsayı Womersley parametresi ile birlikte sıfıra gitmekte, parametrenin artan değerleri ile büyümektedir. Bu katsayı küçük germe değerlerinde büyük değerler almaktadır.

Şekil 3.7., Şekil 3.8., Şekil 3.9., Şekil 3.10.' da $\alpha=5$ değeri için dalga hızlarının ve taşıma katsayılarının, çeşitli germe değerlerinde P_i iç basınç ile değişimleri gösterilmiştir.

Şekil 3.7.'de P_i 'nin küçük değerlerinde birincil dalga hızında tüm germe değerleri için azalma olduğu görülmekte, ayrıca P_i değeri arttıkça hızlardaki artış

germenin büyük değerleri için daha büyük olmaktadır. Bu değişim malzemenin bünye denkleminin sadece üssel fonksiyon ile ifade edildiği modellerin sonuçları ile uyushmaktadır. Ancak bu modellerde küçük P_i değerlerinde azalma olmamakta ve P_i 'nin artması ile hızdaki artım daha hızlı olmaktadır.

Şekil 3.8.'de ikincil dalga hızının farklı germe değerlerinde iç basınç ile değişimi verilmiştir. Burada birincil dalga hızına benzer olarak P_i 'nin küçük değerlerinde ve tüm germe değerlerindeki hızlar azalmakta, iç basınç artarken artmaktadır. Ayrıca P_i 'nin çok küçük değerlerinde aynı P_i değerine karşı gelen V_2 hızları germelerin büyük değerlerinde büyük olmaktadır. Büyük P_i değerlerinde ise küçük germe değerlerindeki hız değerleri daha büyük olmaktadır ve bu ekponensiyel bünye denklemine dayanan model sonuçları ile uyushmaktadır. V_2 hızının değişimi küçük P_i değerlerinde ise damar malzemesinin Neo-Hookean kabul edildiği modelin sonuçları Demiray, H., Ercengiz, A (1994), ile çakışmaktadır.

Şekil 3.9.'da ise verilen grafik birincil dalgaya ait taşıma katsayısının farklı germe değerlerinde iç basınç ile değişimini göstermektedir. Her germe değeri için küçük basınç değerlerinde artım gözlenirken, basınç büyüdükçe katsayının değerleri oldukça yavaş bir biçimde azalmaktadır. Basınç değerlerinin büyük olduğu durumda büyük germelerdeki katsayı değerleri daha büyük olmaktadır.

Şekil 3.10.'da ikincil dalgaya ait taşıma katsayısının P_i ile değişimi farklı germe değerlerinde verilmiştir. Şekilden görülebileceği gibi katsayının değerleri küçük P_i değerlerinde azalmakta ancak artan P_i değerleri ile küçük germe değerlerinde artış daha büyük olmaktadır.

Şekil 3.9. ve Şekil 3.10.'un sonuçları ancak P_i 'nin büyük değerlerinde üssel bünye teorisi kabulüne dayanan modeller ile uyushmaktadır. Ancak damarda kolajen liflerin varlığının kabul edilmesi P_i 'nin küçük değerlerinde farklı sonuçlar vermesine neden olmaktadır. Hatta bizim göz önüne aldığımız bünye denklemi hem Neo-Hookean hem de üssel terimleri içerdiğinden, literatürde ise sadece Neo-Hookean veya sadece üssel bünye denklemlerine dayanan modeller olduğu için elde edilen bu

sonuçları karşılaştırma olanağı bulunamamıştır. Ancak bizim modelimizin sonuçları bazı durumlarda birinci modelin sonuçları ile bazı durumlarda ise diğer modelin sonuçları ile uyushmaktadır.

Bizim modelimizde damar malzemesinin lifli bir yapıya sahip olması nedeniyle, liflerin (β her bir lifin yatayla yaptığı açı) oryantasyonunun, dalga hızları, taşıma katsayıları ve basınç üzerine etkisini gösteren grafikler Şekil 3.11., Şekil 3.12., Şekil 3.13., Şekil 3.14., Şekil 3.15.'de verilmiştir.

β açısının dalga hızları, taşıma katsayıları ve iç basınca etkisinin görülebilmesi için β ile bu büyüklüklerin farklı germe değerleri için değişimleri Şekil 3.11., Şekil 3.12., Şekil 3.13., Şekil 3.14., Şekil 3.15.'de verilmiştir.

Şekil 3.11.'de $\alpha=5$ için birincil dalga hızının β ile değişimi gösterilmiştir. β 'nın yaklaşık 20° 'den küçük değerleri için dalga hızı germe büyüdükçe azalmaktadır. Ancak 20° 'den büyük değerlerde dalga hızı yaklaşık 62° civarına kadar eksenel germenin artmasıyla artmaktadır. 62° ile 90° arasındaki bölgede azalmakta ve 90° 'de bir minimuma sahip olmaktadır. Bu minimum değer tüm germe değerleri için eşittir.

Şekil 3.12.'de $\alpha=5$ için ikincil dalga hızının β ile değişimi farklı germe değerleri için gösterilmiştir. Şekilden görülebileceği gibi dalga hızı β 'nın yaklaşık 30° 'den küçük değerlerinde küçük germelerde büyük değerler olarak artmaktadır. Her germe için farklı olan bir β değerinde maksimuma ulaşmakta ve $\beta=90^\circ$ 'de tüm germe değerleri için minimuma sahip olmaktadır.

Şekil 3.13.'de ise birincil dalgaya ait taşıma katsayısının farklı germe değerleri için β ile değişimi verilmiştir. β 'nın 30° civarındaki değerlerinde tüm germe değerleri için katsayı değerleri maksimuma sahip olmaktadır. Bu değerlerden sonra hızlı bir azalma ile $\beta=90^\circ$ 'de minimum değere ulaşmaktadır. Tüm β değerleri için küçük germe değerlerinde katsayı değerleri büyük olmaktadır.

Şekil 3.14.'de ikincil dalgaya ait taşıma katsayılarının farklı germe değerleri için β ile değişimi gösterilmiştir. β 'nın küçük değerleri için katsayı değerleri küçük germeler için küçük değerler olarak azalmaktadır ve β 'nın 30° civarındaki değerlerinde minimum değerlere ulaşmaktadırlar. Katsayı değerleri minimum değerlerden itibaren hızlı bir artış göstererek $\beta=90^\circ$ 'de maksimum değerlere ulaşmaktadır. β 'nın büyük değerlerinde katsayıların değeri küçük germe değerlerinde daha büyük olmaktadır.

Şekil 3.15. β ile P_t basıncın değişimlerini farklı germe değerlerinde göstermektedir. Şekilden de görülebileceği gibi β 'nın 29° 'den küçük değerlerinde basınç değişimi tüm germe değerlerinde oldukça küçük kalmaktadır. Ancak β 'nın 29° 'den büyük değerlerinde iç basınç hızla büyümekte ve $\beta=90^\circ$ 'de maksimum değere ulaşmaktadır. Ayrıca β 'nın 29° 'den büyük değerlerinde büyük germe değerleri için büyük P_t değerleri elde edilmektedir. Bu sonuç kolajen liflerin aksel doğrultuda olması ($\beta=90^\circ$) durumunda damarın en büyük basınç değerini taşıyabildiğini göstermektedir. Tersine liflerin teğetsel doğrultuda ($\beta=0^\circ$) olması durumunda ise en düşük basınç değerlerinin oluşacağı anlaşılmaktadır.

Yukarıda sözü edilen β ile değişimler, damarda dalga yayılımının incelenmesinde kolajen liflerin, doğrultularının oldukça etkili olduğu görülmektedir. Ancak literatürde lifli yapıyı göz önüne alan çalışmalar bulunmadığından başka sonuçlar ile karşılaştırma yapılamamıştır.

3.3. TABAKALI MODEL İÇİN ELDE EDİLEN GRAFİKLERİN YORUMLANMASI

Damarın iki tabakalı olması durumunda (3.2.27)'de verilen dispersiyon bağıntısını analitik olarak incelemek mümkün olmadığından, bu denklemin sayısal olarak incelenmesinden elde edilen sonuçlar aşağıda tartışılmıştır.

Şekil 3.16.'da birincil dalga hızının Womersley parametresi ile değişimi farklı germe değerlerinde gösterilmiştir. Tabakasız ortamdakine benzer küçük basınç değerlerinde dalga hızının değişimi sabit kalırken, basınç arttıkça artmaktadır. Tabakalı durumda da büyük germe değerlerinde büyük hızlar elde edilmektedir. Dalga hızı değerleri tabakasız ortama göre daha büyük olmaktadır.

Şekil 3.17.'de ikincil dalga hızının Womersley parametresi ile değişimi farklı germe değerlerinde verilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi tabakasız durumda olduğu gibi küçük α değerlerinde hızlı bir artım olurken büyüyen α değerlerinde bu artım hemen hemen sabit kalmaktadır. Dalga hızının küçük germe değerlerindeki değeri daha büyük olmaktadır.

Şekil 3.18.'de birincil dalgaya ait taşıma katsayısı ile Womersley parametresinin değişimi farklı germe değerlerinde gösterilmiştir. Tabakasız duruma benzer şekilde α 'nın yaklaşık 3 değerine kadar katsayı değerlerinde hızlı bir azalma ve sonrasında küçük bir artım gözlenmektedir. Tabakasız ortamın tersine küçük germe değerlerinde büyük katsayı değerlerinin oluştuğu net olarak gözükmemektedir.

Şekil 3.19.'da ikincil dalgaya ait taşıma katsayısının değişik germe değerlerinde α ile değişimi verilmiştir. Tabakalı duruma benzer olarak α sıfıra giderken katsayı da sıfıra gitmektedir. α 'nın artan değerlerinde artım daha hızlı olmaktadır. Ayrıca büyük germe değerlerinde büyük değerler almaktadır.

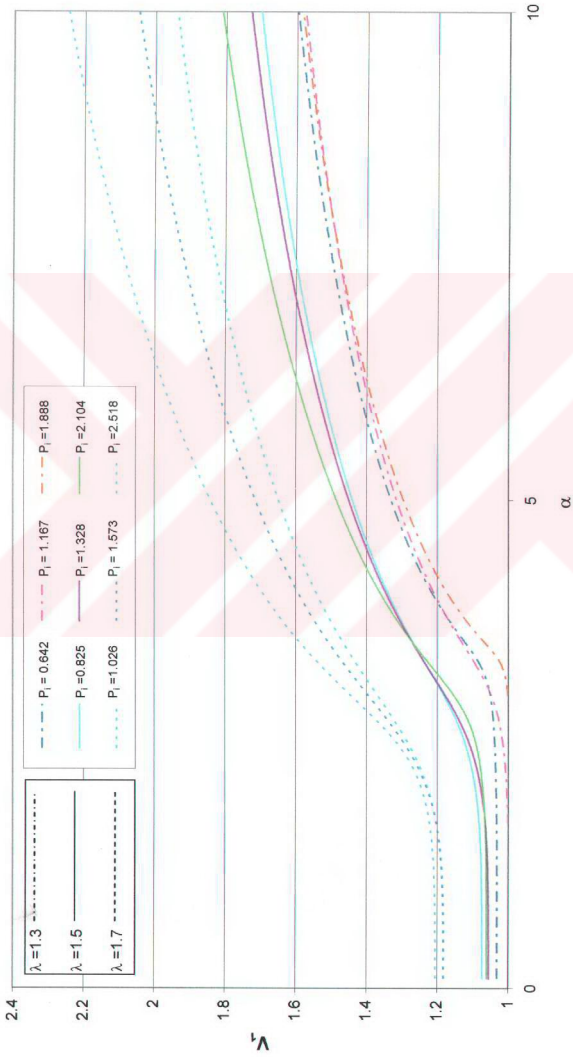
Şekil 3.16., Şekil 3.17., Şekil 3.18., Şekil 3.19.'dan görüldüğü gibi tabakalı durumda hızların ve taşıma katsayılarının germe, basınç ve Womersley parametresine bağlılığı, tabakasız ortama göre daha düzgün davranış göstermektedir.

Şekil 3.20.'de $\alpha=5$ sabit değeri için iç basınç ile birincil dalga hızının değişimi gösterilmiştir. Büyük germe değerlerinde değişim Neo-Hookean model ile uyurken küçük germe değerlerinde ise üssel model ile uyum görülmektedir. Bu durum Şekil 3.16.'da da görülmektedir.

Şekil 3.21.'de iç basınç ile ikinci dalga hızının değişimi farklı germe değerlerinde verilmiştir. P_i 'nin küçük değerlerinde hızda azalma gözlenirken büyük değerlerinde artmaktadır. Bu artış küçük germelerde daha büyük olmaktadır.

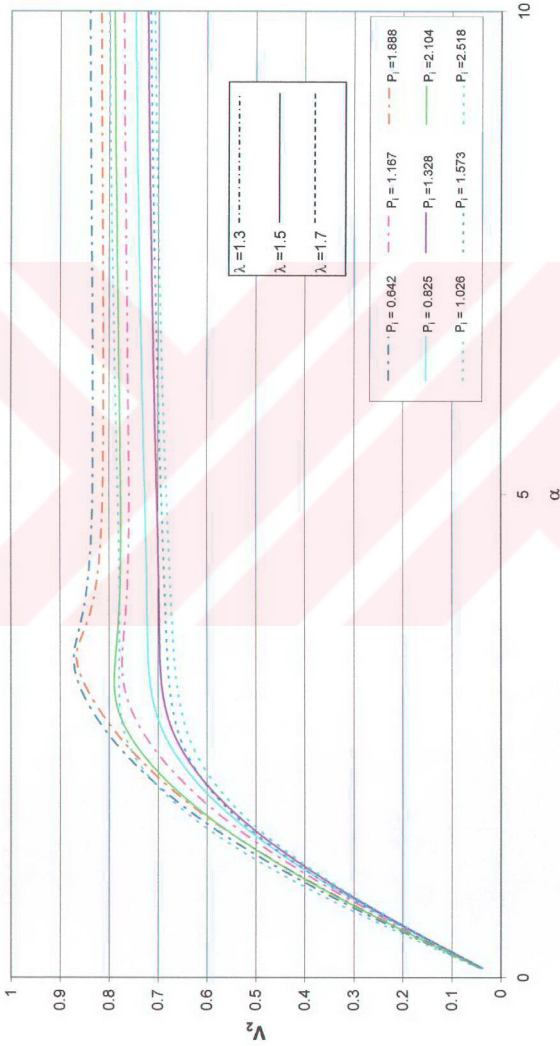
Şekil 3.22.'de ise birincil dalgaya ait taşıma katsayısının farklı germe değerleri için iç basınç ile değişimleri gösterilmiştir. Katsayı değerleri küçük basınç değerleri ile azalmakta ancak küçük germe değerlerinde bu azalma daha hızlı olmaktadır.

Şekil 3.23.'de ikinci dalgaya ait taşıma katsayısının farklı germe değerleri için iç basınç ile değişimleri gösterilmiştir. Katsayı değerleri P_i iç basınç ile artmaktadır. Küçük germe değerlerinde ve küçük basınç değerlerinde bu artım daha hızlı olmaktadır.

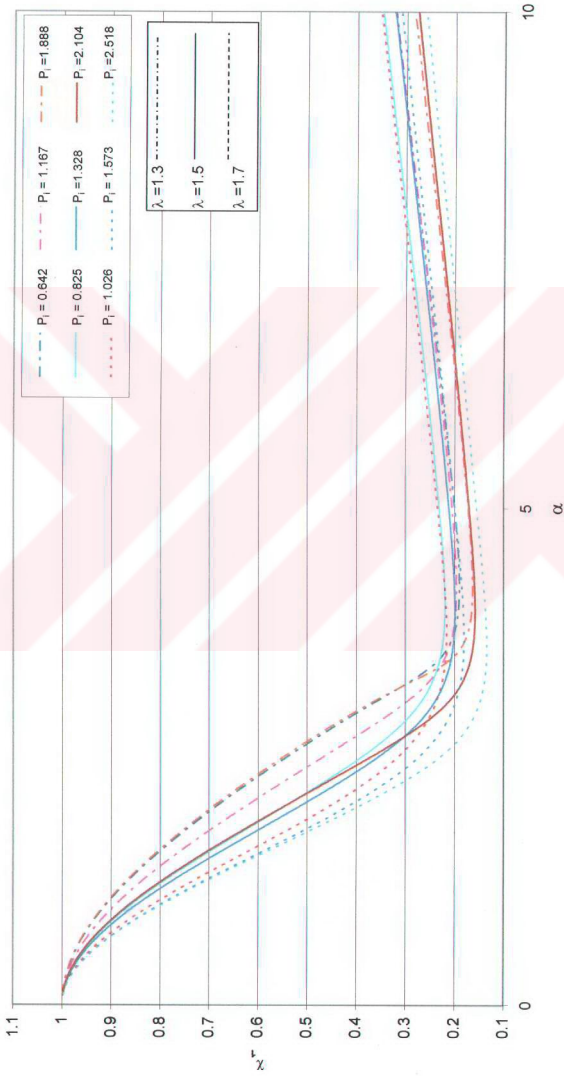


Şekil 3.3. İnce Kabuk Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda Birincil Dalga

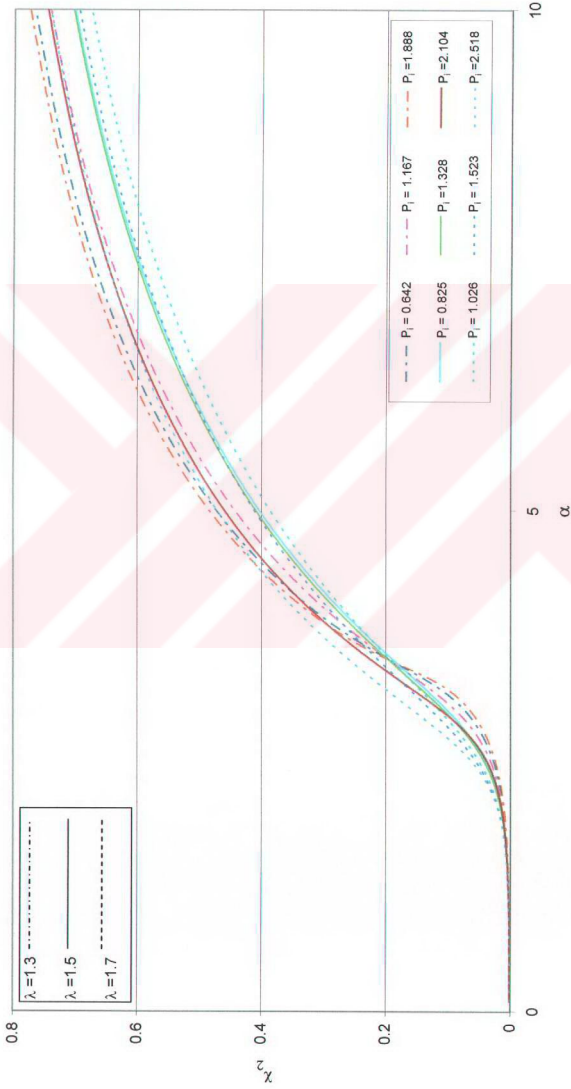
Hızının Woomersley Parametresi, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



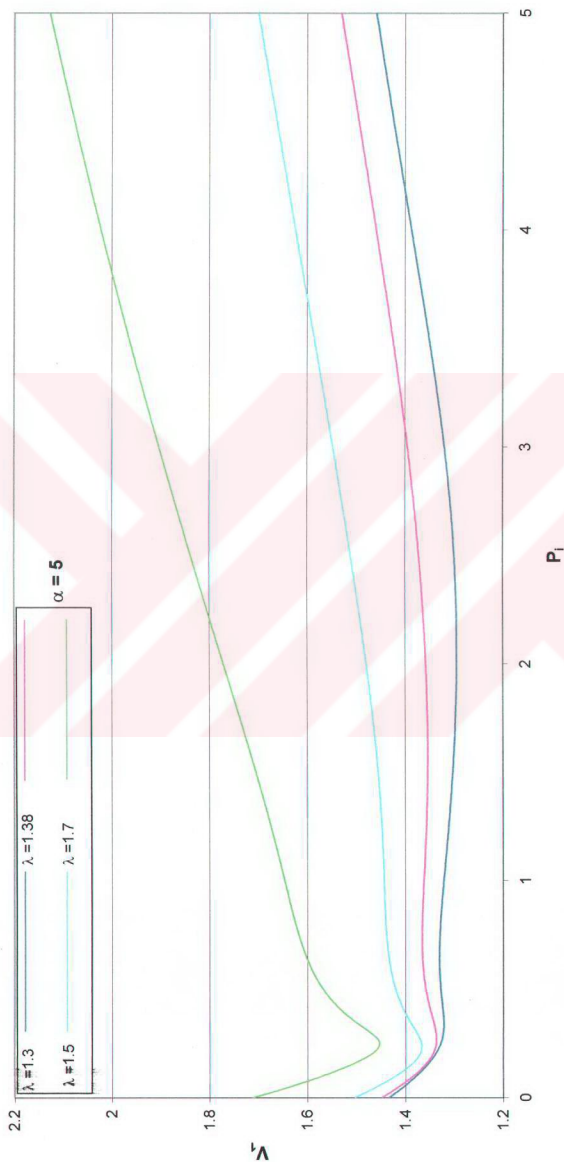
Şekil 3.4. İnce Kabuk Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda İkincil Dalga Hızının Woormersley Parametresi, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



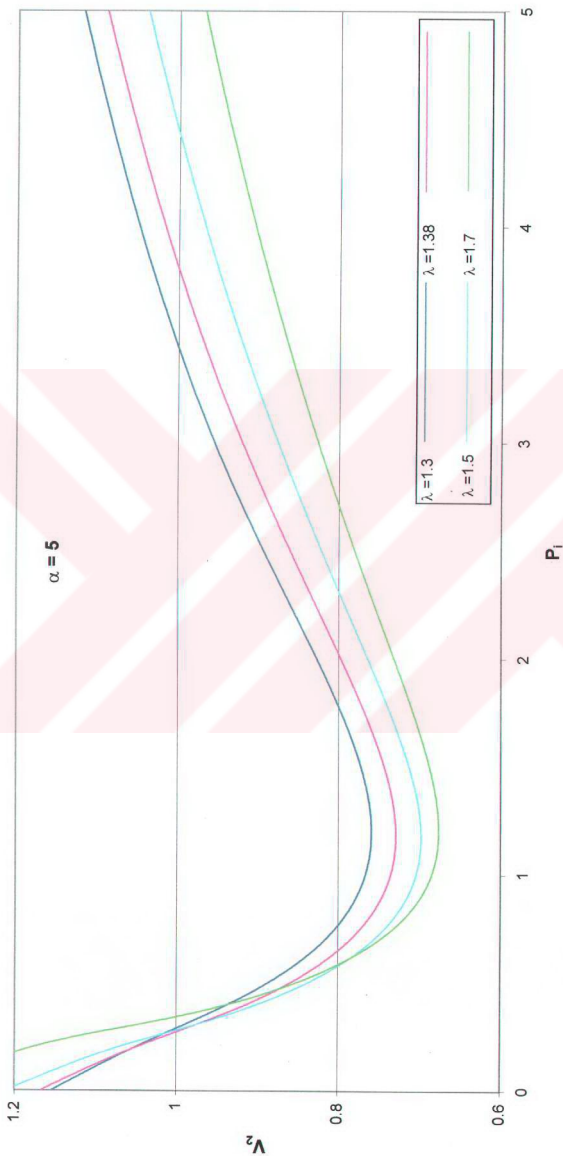
Şekil 3.5. İnce Kabuk Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Woomersley Parametresi, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



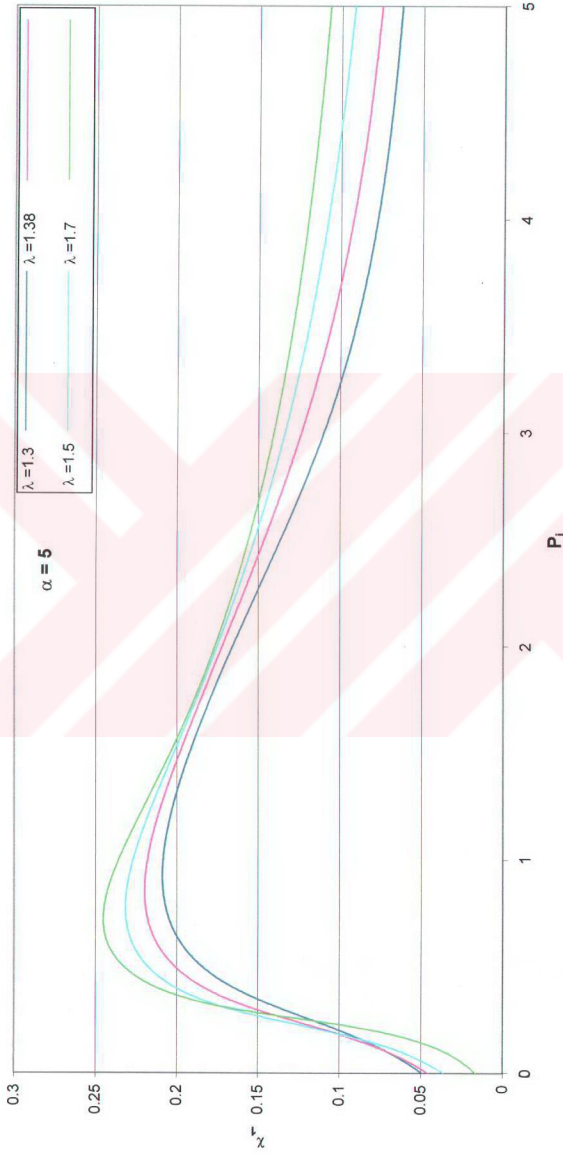
Şekil 3.6. İnce Kabuk Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Woomersley Parametresi, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



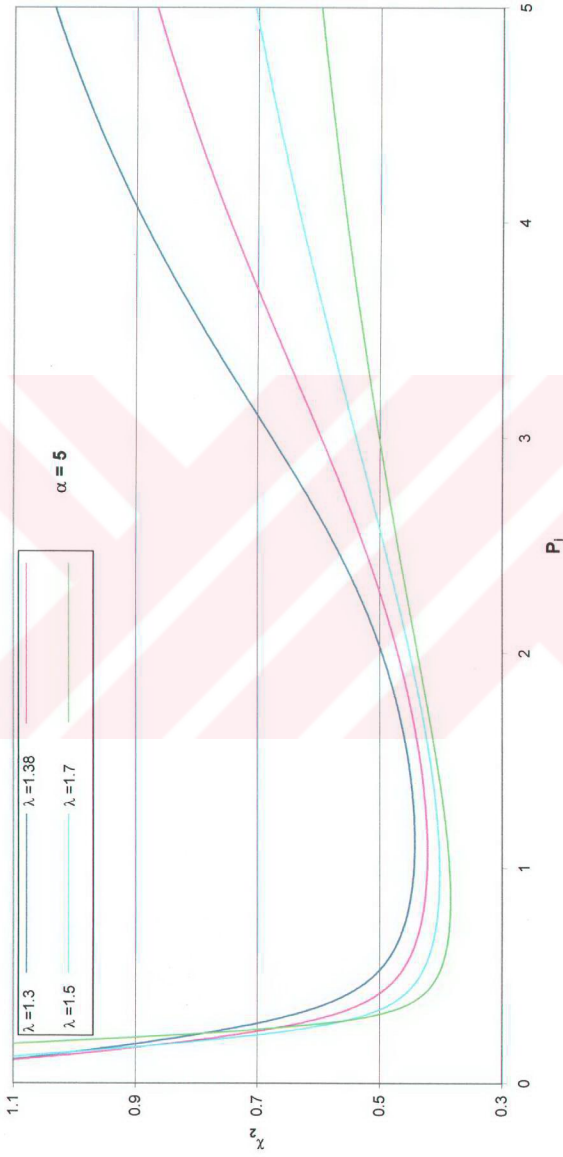
Şekil 3.7. $\alpha = 5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Lifterden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda Birincil Dalga Hızının, İç Basıncı Ve Uzama Oranları İle Değişimi



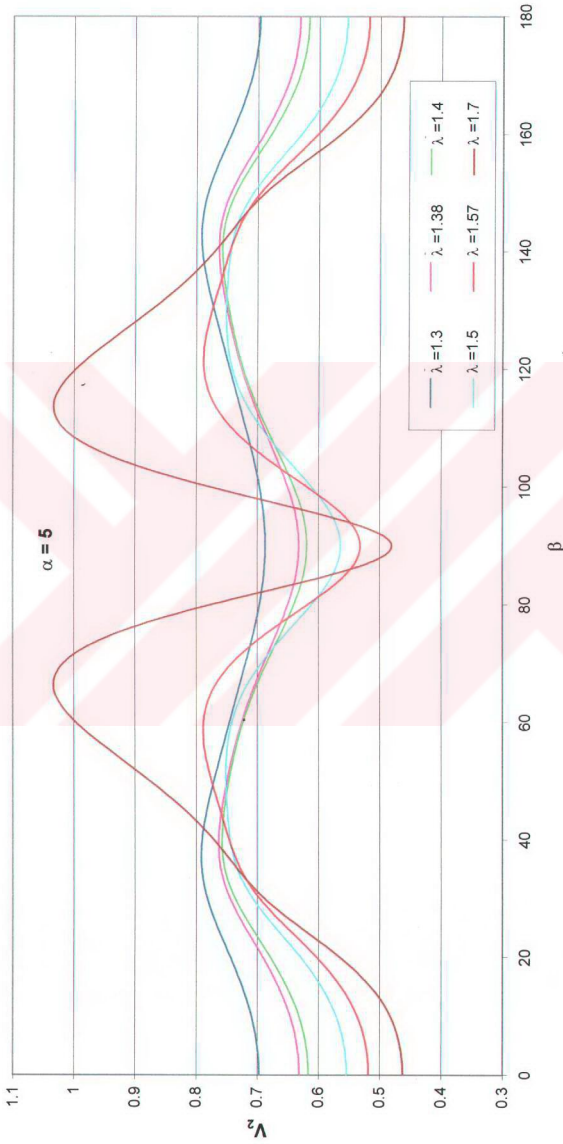
Şekil 3.8. $\alpha = 5$ için Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda İkincil Dalga Hızının, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



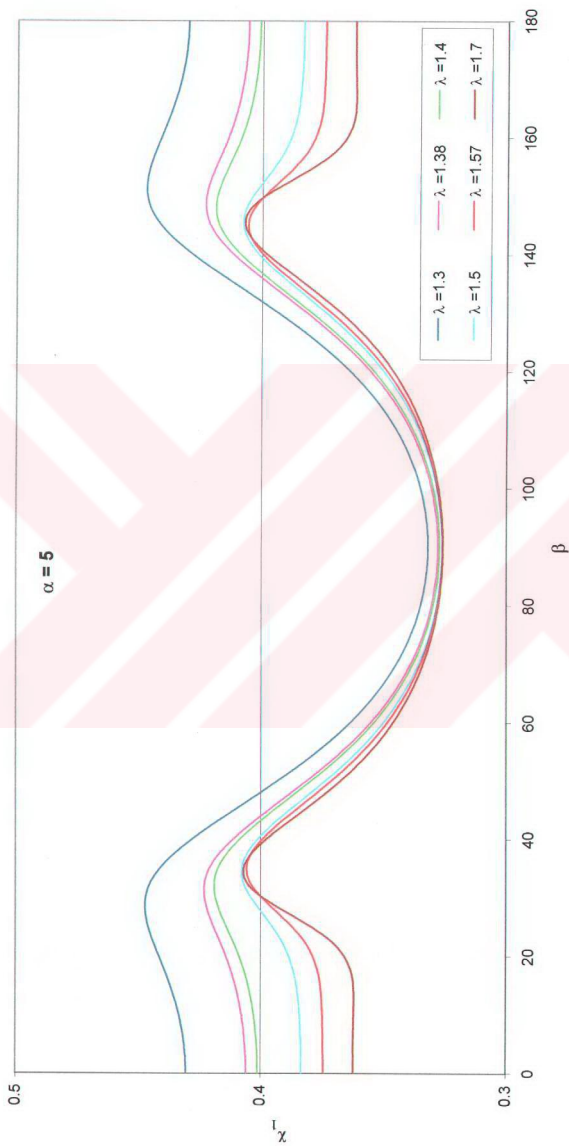
Şekil 3.9. $\alpha = 5$ için Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



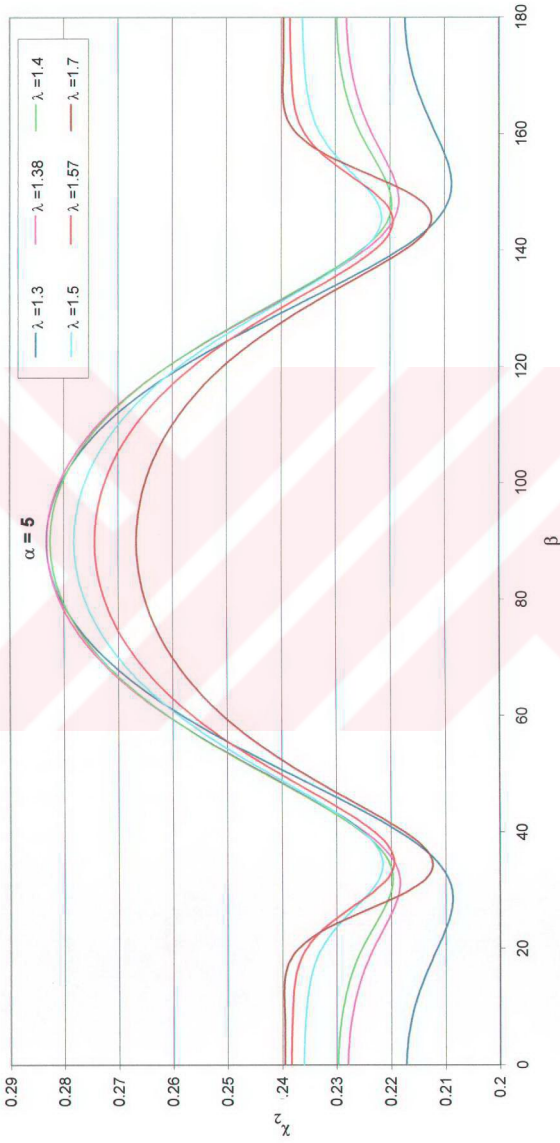
Şekil 3.10. $\alpha = 5$ için Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Lifterden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



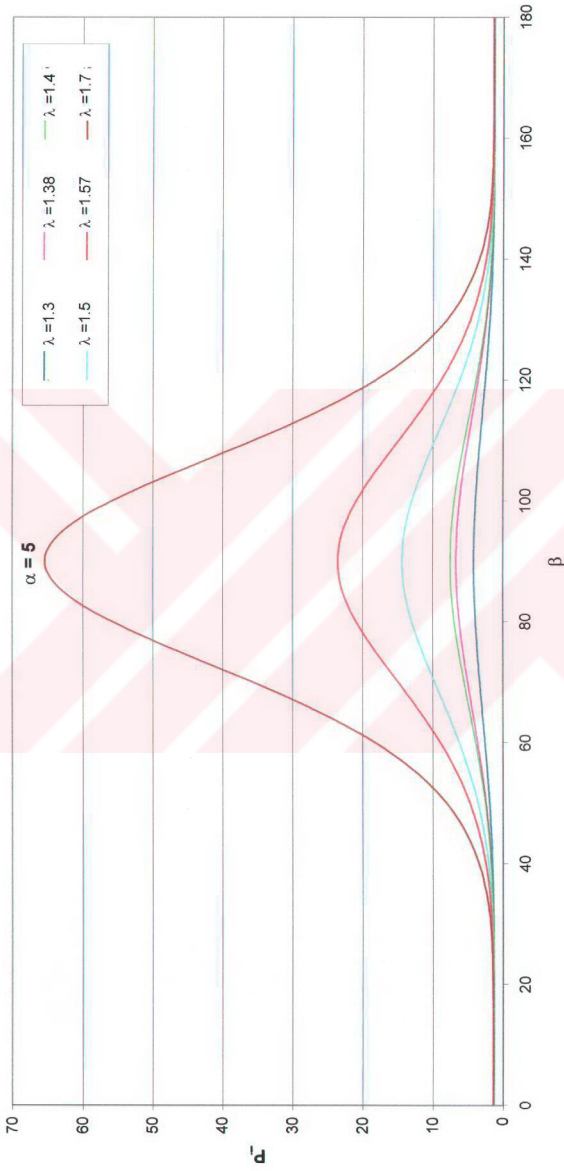
Şekil 3.12. $\alpha = 5$ için Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıkların İkincil Dalga Hızının Ve Uzama Oranları ile Değişimi



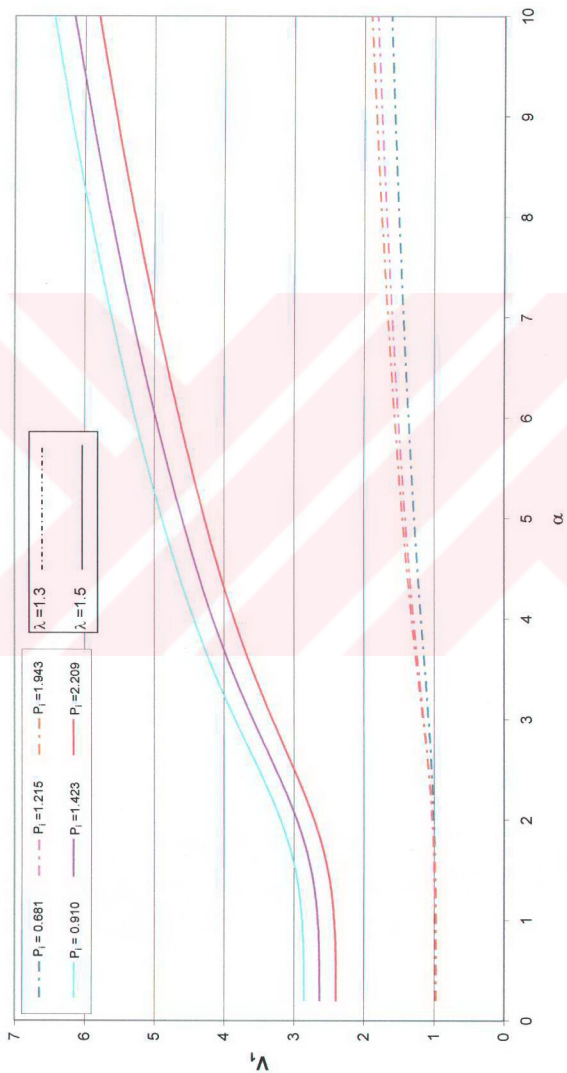
Şekil 3.13. $\alpha = 5$ için Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıkların Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayılarının Ve Uzama Oranları İle Değişimi



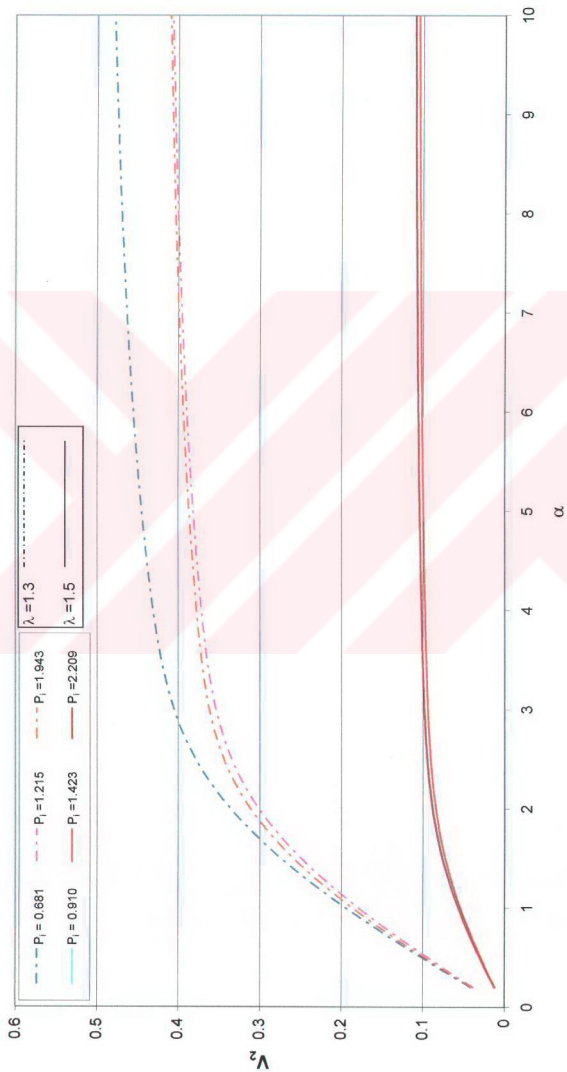
Şekil 3.14. $\alpha = 5$ için Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıkların İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayılarının Ve Uzama Oranları İle Değişimi



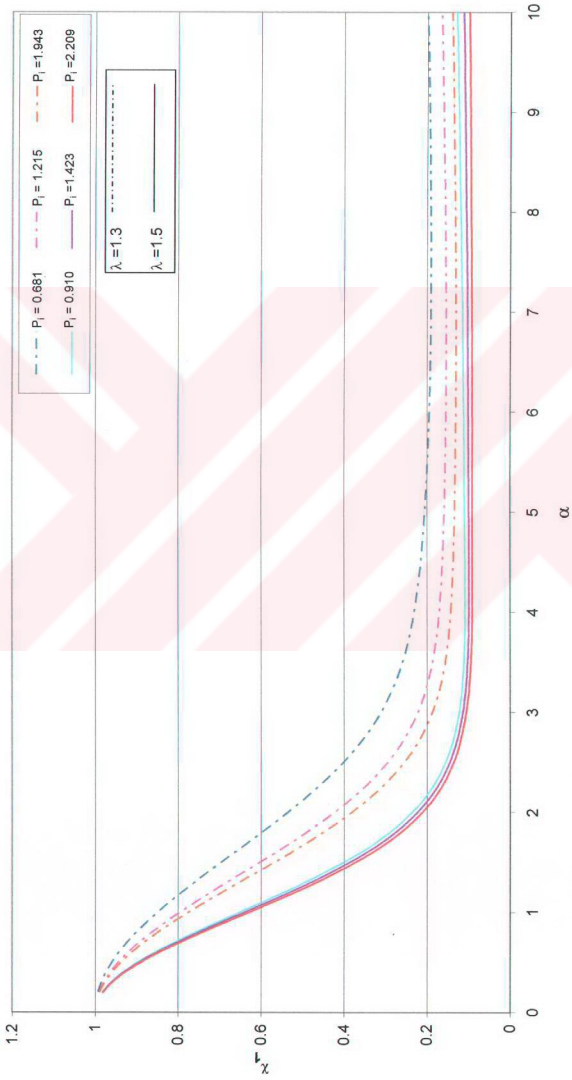
Şekil 3.15. $\alpha = 5$ İçin Tabakasız Sadece İçerisinde Kolajen Liflerden Oluşan Media'nın Bulunduğu Durumda, Lifler Arasındaki Açıkların İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



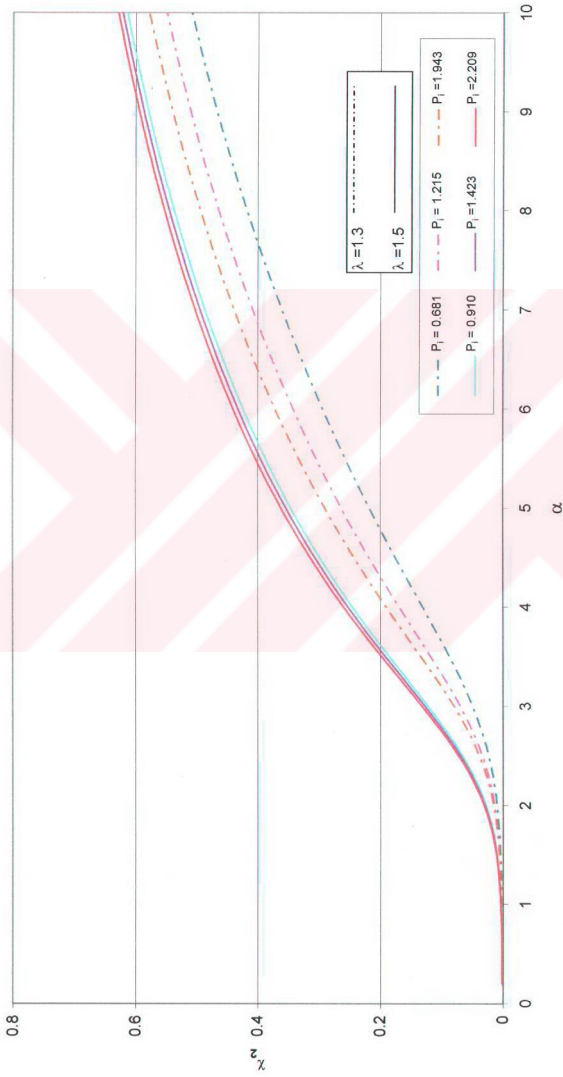
Şekil 3.16. İnce Kabuk, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda Birincil Dalga Hızının Womersley Parametresi, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



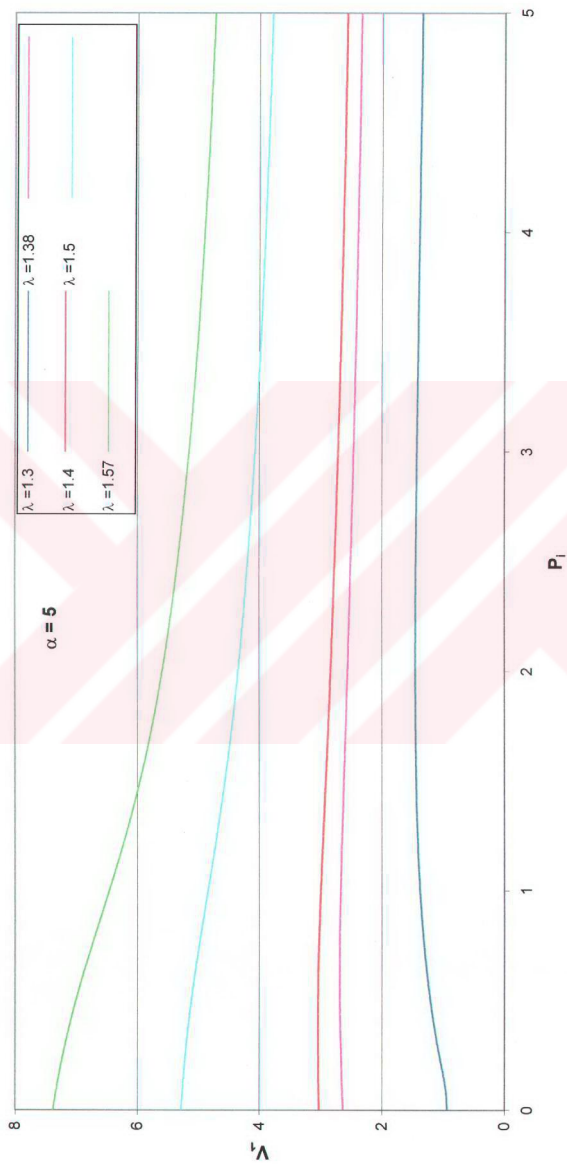
Şekil 3.17. İnce Kabuk, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda İkincil Dalga Hızının Womersley Parametresi, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



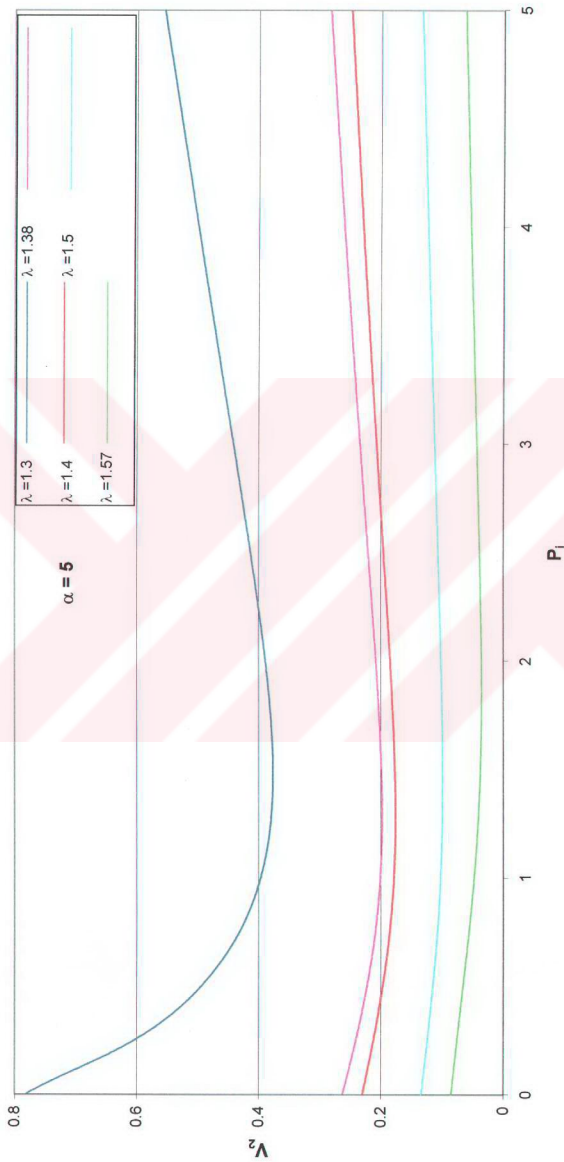
Şekil 3.18. İnce Kabuk, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Woormersley Parametresi, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



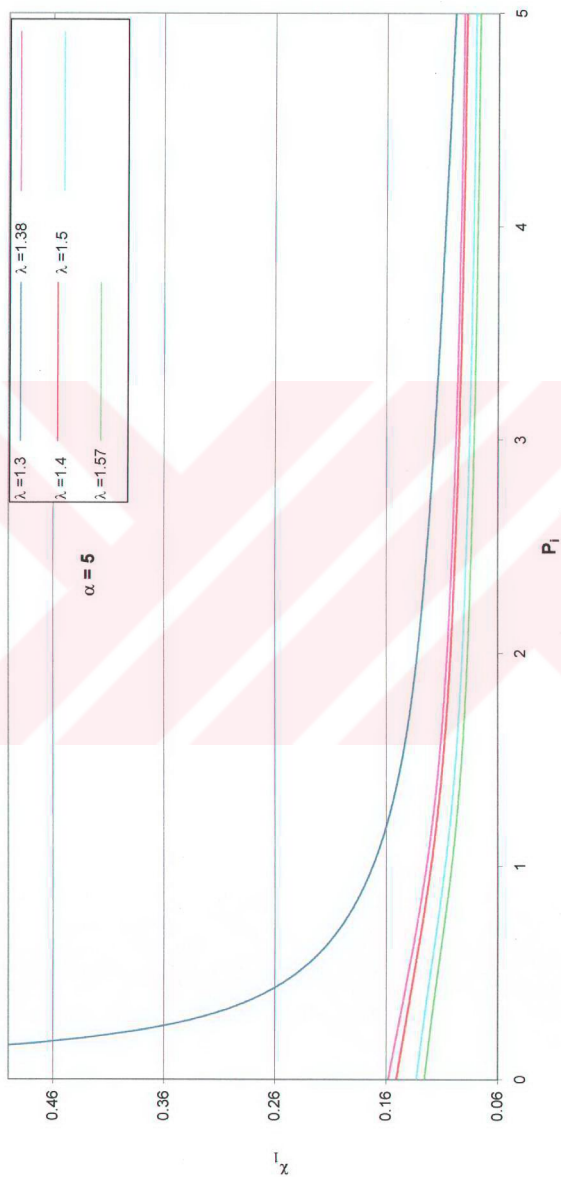
Şekil 3.19. İnce Kabuk, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda İkincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayısının Woomersley Parametresi, İç Basınç Ve Uzama Oranları ile Değişimi



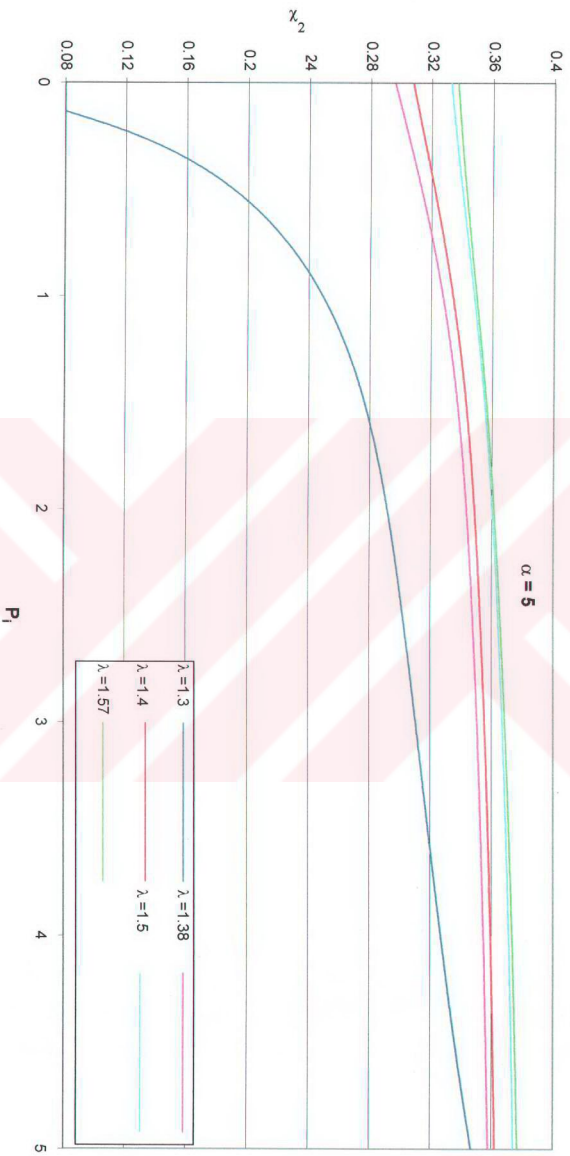
Şekil 3.20. $\alpha = 5$ için, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda Birincil Dalga Hızının, İç Basıncı Ve Uzunluk Oranları İle Değişimi



Şekil 3.21. $\alpha = 5$ için, Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda İkincil Dalga Hızının, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişim



Şekil 3.22. $\alpha = 5$ için , Tabakalı (Media + Adventitia) Durumda Birincil Dalgaya Ait Taşıma Katsayılarının, İç Basınç Ve Uzama Oranları İle Değişimi



Şekil 3.2.3. $\alpha = 5$ için , **Tabakalı (Media + Adventitia) Durumunda** İkincil Dalgebra Ait Tasıma Katsayılarının, İç Basıncı Ve Uzama Oranları İle Değişimi

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

İçi sıvı dolu ince cidarlı tüplerde dalga yayılması problemi ile ilgili olarak geçmişte yapılmış çalışmalara bir katkı ve farklı bir model önerme düşüncesiyle hareket ederek başlanan bu çalışmada özellikle biyomühendislikte önemli uygulama alanı bulan ve damardaki kan hareketinin modellenmesinde kullanılan bir problem ele alınmış ve içi sıvı dolu ince cidarlı, içerisinde kolajen liflerin bulunduğu tek ve iki tabakalı kompozit ortamda harmonik dalga yayılması problemi incelenmiştir. Damar ince cidarlı elastik, tabakalı ve lifli bir kompozit ortam, kan ise sıkışmaz Newtonian akışkan olarak düşünülmüş, “Büyük şekil değiştirmeler üzerine küçük dinamik yer değiştirmelerin süperpozisyonu” teorisi kullanılarak elde edilen denklemler katı ve sıvı ortamın bünye denklemlerini de devreye sokarak yönetici diferansiyel denklemler silindirik koordinatlarda yazılmıştır. Akışkan ortam için kapalı formda bir çözüm vermek mümkün olduğu halde, katı faz için bu mümkün olmamış, bu nedenle bir kuvvet serisi çözümü verilmeye çalışılmıştır. Problemimizde kullanılan model için gerçekte kalın kabuk yaklaşımı kullanılması gerektiği halde literatürde rastladığımız çözümlerde karşılaştırma yapabilmek maksadıyla bu çalışmada da ince kabuk yaklaşımı kullanılmıştır. Elastik lifli kompozit tüpün iç ve dış yüzeylerinde, katmanlı modelin sınır yüzeylerinde sağlanması gereken sınır koşulları kullanılarak dalgaya ait dispersiyon bağıntısı en genel haliyle elde edilmiştir. Bu bağıntı özelleştirilerek tek tabakalı kompozit model için de elde edilmiştir.

Bu çalışmada iki ayrı model kullanılmıştır. Bunlardan birincisi tabakalı (Media + Adventitia) ve içerisinde kolajen liflerin bulunduğu model, ikincisi ise tabakasız sadece Media’nın bulunduğu ve içerisinde yine kolajen liflerin bulunduğu modeldir. Bu modellerde kullandığımız şekil değiştirme enerjisi fonksiyonları daha önce bu konuda yapılmış çalışmalarda kullanılan sadece mühendislik malzemeleri için, ya da sadece biyomühendislik malzemeleri için önerilen fonksiyonlar olmayıp bunların her ikisini de temsil edecek bir fonksiyondur. Bu fonksiyonda uygun dönüştürmeler yapılarak yukarıda sözü edilen mühendislik malzemeleri ve biyomühendislik için özel fonksiyonlar elde edilebilmektedir.

Bu çalışmada ele alınan problemin pratikte özellikle tıp alanında bir uygulama alanı bulabileceğini beklemekteyiz. Damar gerçekte kolajen liflerden ve katmanlı yapıdan

oluştduğundan bizim seçtiğimiz modelin bu damar yapısını temsil edeceğini düşünmekteyiz. Yapılan çalışmanın sonunda ortamda bulunan liflerin performansının liflerin birbirleriyle yapmış oldukları açıya bağlı değişmekte olduğu görülmüştür. Böylece, damar lifsiz bir mühendislik malzemesi olarak modellemenin yetersizliği ortaya çıkmıştır.

Yapılmış olan literatür araştırmasında damarın bu biçimde modellendiği bir çalışmaya rastlanmamış o nedenle de böyle bir çalışma yapmaya karar verilmiştir. Ancak bu çalışmanın deneysel çalışmalarla da desteklenmesi halinde biyomalzemelerle çalışan araştırmacılara oldukça önemli ipuçları verebileceği düşünülmektedir. Ülkemizde farklı disiplinlerde yapılan çalışmalardan, araştırmacılar arasındaki kopukluklar ve disiplinler arası çalışma alışkanlıklarının olmaması nedeniyle, ne yazık ki haberdar olunamamakta ve bu tip çalışmalara çok sık rastlanmaktadır. Bu nedenle de deneysel sonuçlarla, bu çalışmada bulduğumuz sonuçları karşılaştırma olanağı bulunamamıştır. Deneysel çalışmalara da hız verilmesi halinde insanlığa yararlı bir çalışma olacağı umudunu taşımaktayız.

KAYNAKLAR

Christensen, R.M. , “Mechanics Of Composites Materials”, A Wiley Interscience Publication, University of California, 1979, Livermore.

Yahnioğlu, N., “Eğrisel Yapıya Sahip Kompozit Malzemeden Hazırlanmış Yapı Elemanlarının Statiğine Uygun Sınırdeğer Problemlerinin FEM İle İncelenmesi”, Doktora Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, F.B.E. Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı, 1999, İstanbul.

Sendeckyj, G.P., “The Elastic Properties Of Composite Materials”, Mechanics of Composite Materials, Academic Press, ss. 47-70, 1974, New York.

Sun, C.T., Li, S., “Three-dimensional Effective Elastic Constant for Thick Laminates”, Journal Composite Materials, Vol. 22, pp. 629-639, 1988.

Hashin, Z., Rosen, B.W., “The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials”, Journal Applied Mechanics, Vol. 31, pp. 223, 1964.

Ercengiz, A., “İçerisinde Akışkan Bulunan Öngerilmeli Elastik Tüplerde Harmonik Dalga Yayılımı”, Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, F.B.E. Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı, 1992, İstanbul

Young, T., “ On the Functions of The Heart And Arteries” The Cronical Lecture, Philadelphia Roy. Soc. Vol. 99, pp. 1-31, 1809.

Witzig, K., “Über Erzwungene Wellenbewegungen Zaber”, Inkompressibler Flüssigkeiten in Elastischen Rohren, Inugural Dissertation, University of Bern, 1914.

Crandall, I., “Theory of Vibrating Systems and Sound”, Van Nostrand, 1927, New York.

Iberall, A.S., "Attenuation of Oscillatory Pressure in Instrument Lines", J. Res. Nat. Bur. Stand., Vol. 45, pp. 85-108, 1950.

Morgan, G.W., Kiely, J.P., "Wave Propagation in a Viscous Liquid Contained in a Flexible Tube", Journal Acoustic Society Vol. 26, pp. 326-338, 1954.

Womersley, J.R., "Oscillatory Motion of a Viscous Liquid in a Thin-Walled Elastic Tube-I: The Linear Approximation for Long Waves", Phil. Mag. Vol. 46, pp. 199-219, 1955.

Womersley, J.R., "Oscillatory Flow in Arteries: The Constrained Elastic Tube as a Model of Arterial Flow and Pulse Transmission", Phys. In Med. Biol. Vol. 2, pp. 178-187, 1957.

Klip, W., "Velocity and Damping of the Pulse Wave", Martinus Nyhoff, The Hague, 1962.

Klip, W., Klip, D.A., "Phase Velocity and Damping of Torsional Waves in Thin-Walled Tubes of Infinite Length. In Pulsatile Blood Flow.", Mc Graw-Hill, 1964, New York.

Atabek, H.B., and Lew, H.S., "Wave Propagation Through a Viscous Incompressible Fluid Contained in an Initially Stressed Elastic Tube", Biophysics. J., Vol. 6, pp. 481-503, 1966.

Atabek, H.B., "Wave Propagation Through a Viscous Fluid Contained in a Tethered, Initially Stressed Orthotropic Elastic Tube", Biophysics. J., Vol. 8, pp. 626-649, 1968.

Mirsky, I., "Wave Propagation in a Viscous Fluid Contained in an Orthotropic Elastic Tube", Biophysics. J., Vol. 7, pp. 165-186, 1967.

Mirsky, I., "Pulse Velocities in Initially Stressed Cylindrical Rubber Tubes", *Bull. Math. Biophysics*, Vol. 30, pp. 299-308, 1968.

Cox, R.H., "Wave Propagation Through a Newtonian Fluid Contained Within an Thick-Walled Viscoelastic Tube: A model for Arterial Blood Flow", *Doctoral Dissertation*, University of Pennsylvania, 1967.

Cox, R.H., "Wave Propagation Through a Newtonian Fluid Contained Within an Thick-Walled Viscoelastic Tube", *Biophysics Journal*, Vol. 8, pp. 691-709, 1968.

Cox, R.H., "Wave Propagation Through a Newtonian Fluid Contained Within an Thick-Walled Viscoelastic Tube: The Influence of Wall Compressibility", *Journal of Biomechanics*, Vol. 2, pp. 270-281, 1969.

Klip, W., Van Loop, and Klip, J.B., "Formulas for Phase Velocity and Damping of Longitudinal Waves in Thick-Walled Viscoelastic Tubes", *Journal Appl. Physics*, Vol. 38, pp. 3745-3755, 1967.

Rubinow, S.I., and Keller, J.B., "Wave Propagation in a Fluid-Filled Tube", *Journal Acoustic Society Ame.*, Vol. 50, pp. 198-223, 1971.

Rubinow, S.I., and Keller, J.B., "Wave Propagation in a Viscoelastic Tube Containing a Viscous Fluid", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 88, pp. 181-203, 1978.

Rachev, A.I., "Effect of Transmural Pressure and Muscular Activity on Pulse Waves in Arteries", *Jornal Biomechanics Engineering, ASME*, Vol. 102, pp. 119-123, 1980.

Moodie, T.B., Barclay, D.W., and Tait, R.J., "A Boundary value Problem for Fluid-Filled Viscoelastic Tubes", *Mathematical Modelling*, Vol. 4, pp. 145-207, 1983.

Sawatzky, R.P., and Moodie, T.B., "On the Propagation of Pressure Pulses Through a Viscous Fluid Contained in a Viscoelastic Tube" *Journal Mechanical Applied Mathematic*, Vol. 41, pp. 33-50, 1988.

Kuiken, G.D.C., "Wave Propagation in a Thin-Walled Liquefied-Filled Initially Stressed Tube", *Journal Fluid Mechanics*, Vol. 141, pp. 289-308, 1984.

Liepsch, D., Seeman, A., and Siekma J., "Note on Wave Propagation in a Thin Elastic Tube Containing a Viscous Fluid", *Journal of Biomechanics*, Vol. 18, pp. 685-694, 1985.

Demiray, H., Erbay, H.A., ve Erbay, S., "Arterilerde Harmonik Dalga Yayılımı", V. Ulusal Mekanik Kongresi, ss. 389-399, Kirazlıyayla, Eylül, 1987.

Erbay, H.A., Erbay, S., "Akışkan Dolu Nonlineer Viskoelastik Tüplerde Uzak Alan Denklemleri", VI. Ulusal Mekanik Kongresi, ss. 351-358, Kirazlıyayla, Eylül, 1989.

Demiray, H., Vito, R.P., "Arterilerin Mekanik Davranışları İçin Tabakalı Bir Model", VI. Ulusal Mekanik Kongresi, ss. 287-298, Kirazlıyayla, Eylül, 1989.

Demiray, H., Dost, S., "Arterilerin Sonlu Elastik Deformasyon Analizi", V. Ulusal Mekanik Kongresi, ss. 400-408, Kirazlıyayla, Eylül, 1987.

Erdem, A.Ü., Öntürk, N., "Kompozit Malzemelerin Bünye Teorisi Üzerine", VI. Ulusal Mekanik Kongresi, ss. 368-377, Kirazlıyayla, Eylül, 1989.

Demiray, H., Akgün, G., "Wave Propagation in a Viscous Fluid Contained in a Prestressed Viscoelastic Thin Tube", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 35, No. 10/11, pp. 1065-1079, 1997.

Demiray, H., Ercengiz, A., "Non-Symmetrical Waves in a Prestressed Elastic Tube Filled With an Inviscid Fluid", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 32, No. 4, pp. 605-616, 1994.

Demiray, H., "A Viscoelastic Model for Arterial Wall Materials", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 32, No. 10, pp. 1567-1578, 1994.

Demiray, H., Ercengiz, A., "Wave Propagation in a Prestressed Elastic Tube Filled With a Viscous Fluid", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 29, No. 5, pp. 575-585, 1991.

Demiray, H., Ercengiz, A., "Viskoz Akışkanlarla dolu Elastik Tüplerde Dalga Yayılımı", VII. Ulusal Mekanik Kongresi, ss. 186-199, Kirazlıyayla, Eylül, 1991.

Demiray, H., Ercengiz, A., "Harmonic Waves in a Prestressed Viscoelastic Tube Filled With a Viscous Fluid", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 33, No. 1, pp. 105-117, 1995.

Demiray, H., Dost, S., "Pulse Waves in a Prestressed Elastic Tube", *International Journal of Engineering Science*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-9, 1990.

Eringen, A.C., Şuhubi, E.S., "Elastodynamics", Vol. I, Pergamon Press, New York, 1974.

Noordergraf, A., "Hemodynamics", Mc-Graw Hill, New York, 1969.

Holzapfel, G.A., Gasser, T.C., "A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models", *Journal of Elasticity*, Vol. 61, pp. 1-48, 2000.

Xie, J., Zhou, J., and Fung, Y.C., "Bending of Blood Vessel Wall: Stress-strain Laws of the Intima-Media and Adventitia Layers", *Journal Biomechanics Engineering*, Vol. 117, pp. 136-145, 1995.

Tözeren, A., "Elastic Properties of Arteries and Their Influence on The Cardiovascular System" *Journal Biomechanics Engineering*, Vol. 106, pp. 182-185, 1984.

EKLER

Bölüm 3’de, (3.2.25) ifadesi ile verilen dispersiyon bağıntısının katsayıları A_1 , A_2 , A_3 Sayfa 117-119’de ve özel halin dispersiyon bağıntısı Sayfa 120-121’de verilmiştir.



$$A1 = 16\xi_0 g q_1 z \beta_{10}^A q_2 (-M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 + M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 + 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 - 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 - A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 + A P_0^0 M P_0^0{}^2) + 48 \xi_0 q_1^2 \beta_{10}^A \beta_{10}^M (M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 - M t_{rr0}^0 A P_0^0 - A t_{rr0}^0 M P_0^0 + A P_0^0 M P_0^0) + 16 \xi_0 g q_1 \beta_{10}^M (M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^2 - 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 A P_0^0 + M t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 - A t_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 + 2 A t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 - A P_0^0{}^2 M P_0^0) + 16 \xi_0 q_1^2 \beta_{10}^M (-M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{50}^A + M t_{rr0}^0 \beta_{10}^A A t_{rr1}^0 + M t_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_1^0 + M t_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{50}^A + A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^A - \beta_{10}^A M P_0^0 A t_{rr1}^0 - \beta_{10}^A M P_0^0 A P_1^0 - A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^A) + 16 q_1^2 \beta_{10}^A \beta_{10}^M (M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 - M t_{rr0}^0 A P_0^0 - A t_{rr0}^0 M P_0^0 + A P_0^0 M P_0^0)$$

$$A2 = 16 \xi_0 g q_1 \beta_{10}^A (M t_{rr0}^0{}^3 A t_{rr0}^0 - M t_{rr0}^0{}^3 A P_0^0 - 4 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 + M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 \beta_{70}^M + 4 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 - M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{70}^M + 5 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 - 3 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{70}^M - 5 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0{}^2 + 3 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^M - 2 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^3 + 3 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10}^M + A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{70}^M + 2 A P_0^0 M P_0^0{}^3 - 3 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10}^M - A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{70}^M) + 8 \xi_0 g z M t_{rr0}^0 \beta_{10}^A q_2 (M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 - M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 - 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 + 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 + A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 - A P_0^0 M P_0^0{}^2) + 8 \xi_0 q_1 \beta_{10}^A (-2 M t_{rr0}^0{}^3 A t_{rr0}^0 + 2 M t_{rr0}^0{}^3 A P_0^0 + 8 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 + 5 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 \beta_{10}^M - 2 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 \beta_{60}^M - 8 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 - 5 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{10}^M + 2 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{60}^M - 10 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 + 3 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + 4 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{60}^M - 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^M + 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10}^M M t_{rr1}^0 - 4 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10}^M M P_1^0 - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10}^M \beta_{20}^M + 10 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0{}^2 - 3 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - 4 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^M + 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^M - 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{10}^M M t_{rr1}^0 + 4 M t_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{10}^M M P_1^0 + M t_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M + M t_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{20}^M + 4 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^3 - 8 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10}^M - 2 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{60}^M + 2 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{50}^M + 6 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M M P_1^0 + A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M + A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{20}^M - 4 A P_0^0 M P_0^0{}^3 + 8 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10}^M + 2 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{60}^M - 2 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{50}^M - 6 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M M P_1^0 - A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M - A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{20}^M) + 16 \xi_0 z M t_{rr0}^0 \beta_{10}^A q_2 (-M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 + M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 + 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 - 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 - A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 + A P_0^0 M P_0^0{}^2) + 16 \xi_0 g q_1 \beta_{10}^M (-M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^3 + 4 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^2 \beta_{70}^A + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 - 5 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 + 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{70}^A + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^A - M t_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0{}^2 - M t_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 A t_{rr1}^0 - M t_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 A P_1^0 + 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0{}^3 - M t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 \beta_{70}^A - M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^A + A t_{rr0}^0{}^3 M P_0^0 - 4 A t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 + A t_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 \beta_{70}^A - A t_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 M P_0^0 + 5 A t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 M P_0^0 - 2 A t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^A - A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{50}^A + \beta_{10}^A A P_0^0{}^2 M P_0^0 + \beta_{10}^A M P_0^0{}^2 A t_{rr1}^0 + \beta_{10}^A M P_0^0{}^2 A P_1^0 - 2 A P_0^0{}^3 M P_0^0 + A P_0^0{}^2 M P_0^0 \beta_{70}^A + A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{50}^A) + 8 \xi_0 g M t_{rr0}^0 \beta_{10}^M (-M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^2 + 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 A P_0^0 - M t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 + A t_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 - 2 A t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 + A P_0^0{}^2 M P_0^0) + 8 \xi_0 q_1 \beta_{10}^M (-M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 \beta_{50}^A + M t_{rr0}^0{}^2 \beta_{10}^A$$

$$\begin{aligned}
& A t_{rr1}^0 + M t_{rr0}^0{}^2 \beta_{10A}^A P_1^0 + M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{50}^A + 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^3 - 8 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 + 2 \\
& M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^2 \beta_{60}^A - 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A P_0^0 - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A t_{rr1}^0 + 4 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A \\
& A P_1^0 + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A \beta_{30}^A + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A \beta_{20}^A + 10 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 + 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \\
& A P_0^0 \beta_{50}^A - 4 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{60}^A - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^A + 2 M t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A P_0^0{}^2 - M t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A \\
& A P_0^0 A t_{rr1}^0 - 6 M t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A P_0^0 A P_1^0 - M t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A P_0^0 \beta_{30}^A - M t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A P_0^0 \beta_{20}^A + M t_{rr0}^0 \\
& \beta_{10M}^A P_0^0 A t_{rr1}^0 + M t_{rr0}^0 \beta_{10M}^A P_0^0 A P_1^0 - 4 M t_{rr0}^0 A P_0^0{}^3 - 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 \beta_{50}^A + 2 M t_{rr0}^0 \\
& A P_0^0{}^2 \beta_{60}^A + M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^A - 2 A t_{rr0}^0{}^3 M P_0^0 + 8 A t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 - 2 A t_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 \\
& \beta_{60}^A + 2 A t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A P_0^0 M P_0^0 + A t_{rr0}^0 \beta_{10M}^A P_0^0 A t_{rr1}^0 - 4 A t_{rr0}^0 \beta_{10M}^A P_0^0 A P_1^0 - A t_{rr0}^0 \beta_{10A}^A \\
& M P_0^0 \beta_{30}^A - A t_{rr0}^0 \beta_{10M}^A P_0^0 \beta_{20}^A - 10 A t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 M P_0^0 - 2 A t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^A + 4 A t_{rr0}^0 \\
& A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^A + 2 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{50}^A - 2 \beta_{10A}^A P_0^0{}^2 M P_0^0 + \beta_{10A}^A P_0^0 M P_0^0 A t_{rr1}^0 + 6 \beta_{10A}^A P_0^0 \\
& M P_0^0 A P_1^0 + \beta_{10A}^A P_0^0 M P_0^0 \beta_{30}^A + \beta_{10A}^A P_0^0 M P_0^0 \beta_{20}^A - 2 \beta_{10M}^A P_0^0{}^2 A t_{rr1}^0 - 2 \beta_{10M}^A P_0^0{}^2 \\
& A P_1^0 + 4 A P_0^0{}^3 M P_0^0 + 2 A P_0^0{}^2 M P_0^0 \beta_{50}^A - 2 A P_0^0{}^2 M P_0^0 \beta_{60}^A - 2 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{50}^A + 16 \xi_0 \\
& M t_{rr0}^0 \beta_{10M}^A (M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0{}^2 - 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 A P_0^0 + M t_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 - A t_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 + 2 A t_{rr0}^0 \\
& A P_0^0 M P_0^0 - A P_0^0{}^2 M P_0^0) + 16 g q_1 \beta_{10M}^A P_0^0 \beta_{10M}^A (-M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 + M t_{rr0}^0 A P_0^0 + A t_{rr0}^0 \\
& M P_0^0 - A P_0^0 M P_0^0) + 8 q_1 \beta_{10M}^A \beta_{10M}^A (M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 - M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 - \\
& M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 - 2 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 + 2 A P_0^0 M P_0^0{}^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & 8 \xi_i g \beta_{10A}^A (-M t_{rr0}^0{}^3 A t_{rr0}^0 \beta_{70}^M + M t_{rr0}^0{}^3 A t_{rr0}^0 \beta_{60}^M + M t_{rr0}^0{}^3 A P_0^0 \beta_{70}^M - M t_{rr0}^0{}^3 \\
& A P_0^0 \beta_{60}^M - 2 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + 2 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{70}^M - 2 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{60}^M + \\
& M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^M + M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 \beta_{10M}^A M P_1^0 + 2 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - 2 M t_{rr0}^0{}^2 \\
& A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^M + 2 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^M - M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^M - M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{10M}^A M P_1^0 + \\
& 6 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10}^M - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{70}^M + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{60}^M - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 \\
& M P_0^0{}^2 \beta_{50}^M + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M{}^2 - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10M}^A M t_{rr1}^0 - 2 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \\
& \beta_{10M}^A M P_1^0 + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10M}^A \beta_{30}^M - 6 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10}^M + M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{70}^M - \\
& M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{60}^M + M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{50}^M - M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10M}^A{}^2 + M t_{rr0}^0 A P_0^0 \\
& M P_0^0 \beta_{10M}^A M t_{rr1}^0 + 2 M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10M}^A M P_1^0 - M t_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10M}^A \beta_{30}^M - 4 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^3 \\
& \beta_{10}^M - A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10M}^A{}^2 - A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10M}^A \beta_{30}^M + 4 A P_0^0 M P_0^0{}^3 \beta_{10M}^A + A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10M}^A{}^2 + \\
& A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10M}^A \beta_{30}^M) + 16 \xi_i \beta_{10A}^A (M t_{rr0}^0{}^3 A t_{rr0}^0 \beta_{70}^M - M t_{rr0}^0{}^3 A t_{rr0}^0 \beta_{60}^M - M t_{rr0}^0{}^3 A P_0^0 \\
& \beta_{70}^M + M t_{rr0}^0{}^3 A P_0^0 \beta_{60}^M + 2 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - 2 M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{70}^M + 2 M t_{rr0}^0{}^2 \\
& A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{60}^M - M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^M - M t_{rr0}^0{}^2 A t_{rr0}^0 \beta_{10M}^A M P_1^0 - 2 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 \\
& \beta_{10}^M + 2 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^M - 2 M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^M + M t_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^M + M t_{rr0}^0{}^2 \\
& A P_0^0 \beta_{10M}^A M P_1^0 - 6 M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{10}^M + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{70}^M - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \\
& \beta_{60}^M + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0{}^2 \beta_{50}^M - M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10M}^A{}^2 + M t_{rr0}^0 A t_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10M}^A M t_{rr1}^0 + 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M M P_1^0 - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M + 6 Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - Mt_{rr0}^0 \\
& A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^M + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^M - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^M + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - \\
& Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M Mt_{rr1}^0 - 2 Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M M P_1^0 + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M + 4 \\
& At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M - 4 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - A P_0^0 \\
& M P_0^0 \beta_{10}^M - A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M + 8 \xi_0 g \beta_{10}^M (Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0{}^2 \beta_{70}^A - Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0{}^2 \beta_{60}^A - \\
& Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_1^0 - Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{50}^A - 2 Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{70}^A + 2 Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0 \\
& A P_0^0 \beta_{60}^A + Mt_{rr0}^0{}^2 \beta_{10}^A P_0^0 At_{rr1}^0 + 2 Mt_{rr0}^0{}^2 \beta_{10}^A P_0^0 A P_1^0 + Mt_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{50}^A + Mt_{rr0}^0{}^2 \\
& A P_0^0 \beta_{70}^A - Mt_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{60}^A + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0{}^2 \beta_{10}^A M P_0^0 - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 \beta_{70}^A + Mt_{rr0}^0 \\
& At_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 \beta_{60}^A - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A{}^2 M P_0^0 - 3 Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0 + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \\
& \beta_{10}^A M P_0^0 A P_1^0 - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 \beta_{30}^A + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^A + 2 Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \\
& A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^A - 2 Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^A + Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A{}^2 A P_0^0 M P_0^0 + 2 Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0{}^2 \\
& M P_0^0 - Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0 At_{rr1}^0 - 2 Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0 A P_1^0 + Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0 \\
& \beta_{30}^A - Mt_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 M P_0^0 \beta_{50}^A - Mt_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 M P_0^0 \beta_{70}^A + Mt_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 M P_0^0 \beta_{60}^A - At_{rr0}^0{}^2 \\
& \beta_{10}^A M P_0^0{}^2 + At_{rr0}^0 \beta_{10}^A{}^2 M P_0^0{}^2 + 3 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0{}^2 + At_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0{}^2 \beta_{30}^A - \beta_{10}^A{}^2 \\
& A P_0^0 M P_0^0{}^2 - 2 \beta_{10}^A P_0^0{}^2 M P_0^0{}^2 - \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{30}^A + 16 \xi_0 \beta_{10}^M (-Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0{}^2 \beta_{70}^A + \\
& Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0{}^2 \beta_{60}^A + Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_1^0 + Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{50}^A + 2 Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0 A P_0^0 \\
& \beta_{70}^A - 2 Mt_{rr0}^0{}^2 At_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{60}^A - Mt_{rr0}^0{}^2 \beta_{10}^A P_0^0 At_{rr1}^0 - 2 Mt_{rr0}^0{}^2 \beta_{10}^A P_0^0 A P_1^0 - Mt_{rr0}^0{}^2 \\
& A P_0^0 \beta_{50}^A - Mt_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{70}^A + Mt_{rr0}^0{}^2 A P_0^0 \beta_{60}^A - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0{}^2 \beta_{10}^A M P_0^0 + Mt_{rr0}^0 \\
& At_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 \beta_{70}^A - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0{}^2 M P_0^0 \beta_{60}^A + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A{}^2 M P_0^0 + 3 Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A \\
& A P_0^0 M P_0^0 - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 A P_1^0 + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 \beta_{30}^A - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 \\
& M P_0^0 \beta_{50}^A - 2 Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^A + 2 Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^A - Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A{}^2 A P_0^0 \\
& M P_0^0 - 2 Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0{}^2 M P_0^0 + Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0 At_{rr1}^0 + 2 Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0 A P_1^0 - \\
& Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0 \beta_{30}^A + Mt_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 M P_0^0 \beta_{50}^A + Mt_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 M P_0^0 \beta_{70}^A - Mt_{rr0}^0 A P_0^0{}^2 \\
& M P_0^0 \beta_{60}^A + At_{rr0}^0{}^2 \beta_{10}^A M P_0^0{}^2 - At_{rr0}^0 \beta_{10}^A{}^2 M P_0^0{}^2 - 3 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0{}^2 - At_{rr0}^0 \beta_{10}^A \\
& M P_0^0{}^2 \beta_{30}^A + \beta_{10}^A{}^2 A P_0^0 M P_0^0{}^2 + 2 \beta_{10}^A P_0^0{}^2 M P_0^0{}^2 + \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0{}^2 \beta_{30}^A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[16\xi_i q_1 z \beta_{10}^A q_2 (-Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 + 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 - 2Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \right. \\
& M P_0^0 - At_{rr0}^0 M P_0^0 + A P_0^0 M P_0^0) + 16\xi_o q_1 \beta_{10}^M (Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 - 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 + \\
& Mt_{rr0}^0 A P_0^0 - At_{rr0}^0 M P_0^0 + 2At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 - A P_0^0 M P_0^0) \left. \left(\frac{c}{c_0} \right)^4 + \left[16\xi_i q_1 \beta_{10}^A \right. \right. \\
& (Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 - 4Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{70}^M + 4Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \\
& M P_0^0 - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{70}^M + 5Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 - 3Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \\
& M P_0^0 \beta_{70}^M - 5Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 + 3Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + 2Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^M - 2At_{rr0}^0 \\
& M P_0^0 + 3At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{70}^M + 2A P_0^0 M P_0^0 - 3A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - A P_0^0 \\
& M P_0^0 \beta_{70}^M) + 8\xi_i z Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A q_2 (Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 - 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 + 2 \\
& Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 + At_{rr0}^0 M P_0^0 - A P_0^0 M P_0^0) + 16\xi_o q_1 \beta_{10}^M (-Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 + 4Mt_{rr0}^0 \\
& At_{rr0}^0 A P_0^0 - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{70}^A + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 - 5Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 + 2Mt_{rr0}^0 \\
& At_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{70}^A + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^A - Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A P_0^0 - Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 At_{rr1}^0 - Mt_{rr0}^0 \\
& \beta_{10}^A M P_0^0 A P_1^0 + 2Mt_{rr0}^0 A P_0^0 - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{70}^A - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^A + At_{rr0}^0 M P_0^0 - 4 \\
& At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 + At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{70}^A - At_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 M P_0^0 + 5At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 - 2At_{rr0}^0 \\
& A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^A - At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^A + \beta_{10}^A P_0^0 M P_0^0 + \beta_{10}^A M P_0^0 At_{rr1}^0 + \beta_{10}^A M P_0^0 A P_1^0 - 2 \\
& A P_0^0 M P_0^0 + A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^A + A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^A) + 8\xi_o Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^M (-Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 + 2 \\
& Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 + At_{rr0}^0 M P_0^0 - 2At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 + A P_0^0 M P_0^0) + 16 \\
& q_1 \beta_{10}^M M P_0^0 \beta_{10}^M (-Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 + At_{rr0}^0 M P_0^0 - A P_0^0 M P_0^0) \left. \left(\frac{c}{c_0} \right)^2 + 8\xi_i \right. \\
& \beta_{10}^A (-Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{70}^M + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{60}^M + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{70}^M - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{60}^M - 2 \\
& Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{70}^M - 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{60}^M + Mt_{rr0}^0 \\
& At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{50}^M + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^M M P_1^0 + 2Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - 2Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \\
& \beta_{70}^M + 2Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^M - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^M - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{10}^M M P_1^0 + 6Mt_{rr0}^0 \\
& At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{70}^M + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{60}^M - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \\
& \beta_{50}^M + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M Mt_{rr1}^0 - 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \\
& M P_1^0 + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M - 6Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^M - \\
& Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^M + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^M - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \\
& M P_0^0 \beta_{10}^M Mt_{rr1}^0 + 2Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M M P_1^0 - Mt_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M - 4At_{rr0}^0 M P_0^0 \\
& \beta_{10}^M - At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M - At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M + 4A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M + \\
& A P_0^0 M P_0^0 \beta_{10}^M \beta_{30}^M) + 8\xi_o \beta_{10}^M (Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{70}^A - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{60}^A - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \\
& \beta_{10}^A P_1^0 - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{50}^A - 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{70}^A + 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{60}^A + \\
& Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 At_{rr1}^0 + 2Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 A P_1^0 + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{50}^A + Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{70}^A - \\
& Mt_{rr0}^0 A P_0^0 \beta_{60}^A + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \beta_{70}^A + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 M P_0^0 \\
& \beta_{60}^A - Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 - 3Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 M P_0^0 + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 A P_1^0 - \\
& Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^0 \beta_{30}^A + Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{50}^A + 2Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{70}^A - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Mt_{rr0}^0 At_{rr0}^0 A P_0^0 M P_0^0 \beta_{60}^A + Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^{A^2} A P_0^0 M P_0^0 + 2Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^{0^2} M P_0^0 - Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A \\
& A P_0^0 M P_0^0 A t_{rr1}^0 - 2Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 M P_0^0 A P_1^0 + Mt_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 M P_0^0 \beta_{30}^A - Mt_{rr0}^0 A P_0^{0^2} \\
& M P_0^0 \beta_{50}^A - Mt_{rr0}^0 A P_0^{0^2} M P_0^0 \beta_{70}^A + Mt_{rr0}^0 A P_0^{0^2} M P_0^0 \beta_{60}^A - A t_{rr0}^{0^2} \beta_{10}^A M P_0^{0^2} + A t_{rr0}^0 \\
& \beta_{10}^{A^2} M P_0^{0^2} + 3A t_{rr0}^0 \beta_{10}^A A P_0^0 M P_0^{0^2} + A t_{rr0}^0 \beta_{10}^A M P_0^{0^2} \beta_{30}^A - \beta_{10}^{A^2} A P_0^0 M P_0^{0^2} - 2\beta_{10}^A \\
& A P_0^{0^2} M P_0^{0^2} - \beta_{10}^A A P_0^0 M P_0^{0^2} \beta_{30}^A)
\end{aligned}$$

ÖZGEÇMİŞ

1970’de Eskişehir’de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Eskişehir’de tamamladı. Anadolu Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünden Temmuz 1992’de mezun oldu. Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalından Ağustos 1995’de mezun oldu. Halen Osmangazi Üniversitesi, Müh.-Mim. Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümünde Araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

