

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HAREKETLER VE DOKUZ FARKLI GEOMETRİ

131442

HASAN ES

MATEMATİK ANABİLİM DALI

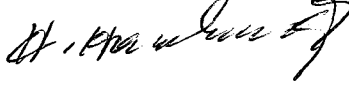
ANKARA
2003

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU danışmanlığında Hasan ES tarafından hazırlanan bu çalışma 20 / 02 / 2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilimi Dalı'nda doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU



Üye : Prof. Dr. Sabahattin BALCI



Üye : Doç. Dr. Baki KARLIĞA



Yukarıdaki sonucu onaylarım



Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

HAREKETLER VE DOKUZ FARKLI GEOMETRİ

HASAN ES

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

Bu çalışma 9 bölüm halinde düzenlenmiştir. İlk bölüm çalışmanın giriş bölümü olup, çalışmanın analizine ve önemine ayrılmıştır.

İkinci bölüm temel kavramlar bölümüdür.

Üçüncü bölümden itibaren geometriler ele alınmışlardır. İlk olarak Öklid geometrisi ve kinematiki üçüncü bölümü oluşturmuştur.

Dördüncü bölümde Minkowski geometrisi ve kinematiki işlenmiştir.

Beşinci bölüm Galile geometrisi ve kinematiki için ayrılmıştır.

Altıncı bölümde Üniter geometri ve kinematiki Öklid geometrisi ve kinematikiğine benzer şekilde işlenmiştir.

Yedinci bölüm benzerlik geometrisi ve kinematiki içindir.

Afin geometride eşafın ve eşalan grupların ele alındığı bölüm sekizinci bölümdür.

Son bölümde Cayley – Klein geometrileri, kısmen ayrı ayrı ve kısmen hep birlikte ve kısmen de karşılaştırmalı olarak ele alınmışlardır. Bu incelemelerin esası dualite prensibidir.

2003, 130 sayfa

ANAHTAR KELİMELE : Öklid düzlemi, Minkowski düzlemi, Galile düzlemi, Üniter geometri ve Dualite prensibi

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

MOTIONS AND NINE DIFFERENT GEOMETRY

HASAN ES

Ankara University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU

This thesis consists of nine chapters. First chapter is the introduction and it is devoted to analysis of the thesis.

In the second chapter; we give the fundamental definitions and concepts.

Starting from the the third chapter; we deal with geometries . Third chapter consists of Euclidean geometry and kinematic.

In the fourth chapter, we examine Minkowskian geometry and kinematic.

fifth chapter is devoted to Galilean geometry and kinematic.

In the sixth chapter, Uniter geometry and kinematic is examined in the same way as Euclidean geometry and kinematic

Seventh chapter is for similarity geometry and kinematic

In the eight chapter is for study equiafin and equiarea in affine geometry.

In the last chapter, we examined Cayley-Klein geometries partly sepately, partly all together and partly comparitively. The basis of these examinations is duality principle.

2003, 130 pages

Key Words: Euclidean plane, Minkowskian plane, Galilean plane, Uniter geometry and Duality principle.

TEŞEKKÜR

Bana araştırma olanağı sağlayan ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışman hocam, prof. Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU' na teşekkürlerimi sunarım.

Hasan ES
Ankara, Şubat 2003



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR.....	3
3. ÖKLİD GEOMETRİSİ.....	10
3.1. Öklid Düzleminde Hareketler.....	19
3.2. Öklid Düzleminde Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri.....	26
3.3. Öklid Düzleminde İvmeler ve İvmelerin Birleşimi.....	32
3.4. Öklid Düzleminde Birinci ve İkinci İvme Polleri.....	35
4. MİNKOWSKI GEOMETRİSİ.....	37
4.1. Minkowski Düzleminde Hareketler.....	47
4.2. Minkowski Düzleminde Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri.....	56
4.3. Minkowski Düzleminde İvmeler ve İvmelerin Birleşimi.....	62
4.4. Minkowski Düzleminde Birinci ve İkinci İvme Polleri.....	64
5. GALİLE GEOMETRİSİ.....	66
5.1. Galile Düzleminde Hareketler.....	74
5.2. Galile Düzleminde İvmeler ve İvmelerin Birleşimi.....	80
6. ÜNİTER GEOMETRİ VE KİNEMATİĞİ.....	84
6.1. Üniter Geometride Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri.....	86
6.2. Üniter Geometride İvmeler ve İvmelerin Birleşimi.....	92
6.3. Üniter Geometride Birinci ve İkinci İvme Polleri.....	90
7. BENZERLİK GEOMETRİSİ.....	97
7.1. Pole Eğrilerinin Birbirlerine Göre Kayma – Yuvarlanması.....	101
8. EŞ AFİN – EŞALAN GEOMETRİSİ.....	104
8.1. İvmeler ve İvmelerin Birleşimi.....	111
9. CAYLEY-KLEİN GEOMETRİLER.....	113
KAYNAKLAR.....	129
ÖZGEÇMİŞ.....	130

SİMGELER DİZİNİ

E^2	Öklid düzlemi
L^2	Minkowski düzlemi
G^2	Galile düzlemi
S_1^1	L^2 düzleminde Lorentz birim çember
H_1^1	L^2 düzleminde hiperbolik birim çember
V_r	Rölatif hız vektörü
V_f	Sürüklenme hızı vektörü
V_a	Mutlak hız vektörü
b_a	Mutlak ivme vektörü
b_f	Sürüklenme ivme vektörü
b_r	Rölatif ivme vektörü
b_c	Coriolis ivme vektörü
$P=(p_1,p_2)$	Pol noktası
$B_1=L/L'$	Hareketli L Lorentz düzleminin, sabit bir L' Lorentz düzlemine göre Hareketi
$\varphi = \varphi(t)$	Hareketli sistemin sabit sisteme göre dönme açısı
$GL(n, \mathbb{R})$	Genel lineer grup
$O(n)$	Ortogonal grup
$SU(2)$	Özel üniter grup

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. L^2 de vektörler	6
Şekil 2.2. Lorentz ve hiperbolik ve birim çemberler.....	7
Şekil 2.3. L^2 de dik üçgen.....	9
Şekil 3.1. E^2 de z nin argümenti.....	14
Şekil 3.2. E^2 de iki nokta arasındaki uzaklık.....	14
Şekil 3.3. E^2 de çember	15
Şekil 3.4. E^2 de AB yay uzunluğu	16
Şekil 3.1.1. E^2 de katı hareket	19
Şekil 3.2.1. E^2 de normaleri P polünden geçen yörüngeler.....	30
Şekil 3.2.2. E^2 de hareketli ve sabit pol eğrileri.....	30
Şekil 4.1. L^2 de ölçüsü ϕ olan açı.....	41
Şekil 4.2. L^2 de iki nokta arasındaki uzaklık.....	43
Şekil 4.3. Merkezci Minkowski çemberleri	43
Şekil 4.4. Merkezi z_0 olan Minkowski çemberleri.....	44
Şekil 4.5. Minkowski çemberinde yay.....	46
Şekil 4.2.1. L^2 de Normaleri p polünden geçen yörüngeler.....	59
Şekil 4.2.2. L^2 de Hareketler ve sabit pol eğrileri.....	60
Şekil 5.1. G^2 de norm.....	69
Şekil 5.2. G^2 de merkezci çemberler ve ϕ açısı.....	70
Şekil 5.3. G^2 de iki nokta arasındaki uzaklık	71
Şekil 5.4. G^2 de iki doğru arasındaki açı.....	72
Şekil 5.5. G^2 de Galile çemberleri.....	73
Şekil 5.6. G^2 de yay uzunluğu.....	73
Şekil 6.1.1. Üniter matrislerde normaleri P polünden geçen yörüngeler.....	90
Şekil 6.1.2. Üniter matrislerde hareketli ve sabit pol eğrileri.....	90
Şekil 7.1.1. Pol eğrilerinin çıkışması.....	102
Şekil 9.1. İki nokta arasındaki parabolik uzaklık.....	115
Şekil 9.2. İki nokta arasındaki eliptik uzaklık.....	116
Şekil 9.3. Eliptik hareketlerde yansıma.....	116
Şekil 9.4. İki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık.....	117
Şekil 9.5. Hiperbolik geometride merkezli izdüşüm.....	118
Şekil 9.6. Hiperbolik geometride merkezli izdüşüm.....	119
Şekil 9.7. Hiperbolik geometride merkezli izdüşüm.....	119
Şekil 9.8. Minkowski uzayında hiperbolik küre.....	121
Şekil 9.9. Minkowski uzayında küre.....	121
Şekil 9.10. Yarı hiperbolik küre.....	121
Şekil 9.11. Yarı hiperbolik küre.....	121
Şekil 9.12. Minkowski uzayında yarı küre.....	122
Şekil 9.13. Minkowski uzayında yarı küre.....	122
Şekil 9.14. Eliptik açı.....	122
Şekil 9.15. Parabolik açı.....	123
Şekil 9.16. E^2 de yay uzunluğu.....	123
Şekil 9.17. G^2 de yay uzunluğu.....	123
Şekil 9.18. L^2 de yay uzunluğu.....	124
Şekil 9.19. Hiperbolik açı.....	124

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 9.1. Cayley-Klein anlamındaki düzlemsel geometrilerin çizelgesi



1. GİRİŞ

Cayley – Klein geometrileri denen geometriler ile bu geometrilerde kinematik bu çalışmanın amacıdır.

İlk olarak Öklid, Minkowski, Galile geometrileri ayrı ayrı ele alındıktan sonra dualite prensibiyle diğer geometrilere uygulama yapılmıştır. Ancak bazı geometrilerden dualite ile farklı bir geometriler elde edilememiştir. Buna rağmen bazılarının da dualite ile yeni eş geometriler verdikleri de görülmüştür..

Dualite prensibi, nokta $\leftrightarrow$ doğru, uzaklık $\leftrightarrow$ açı, yer değiştirmesiyle bir geometriden diğerinin elde edilmesini sağlar. Dolayısı ile Öklid geometrisinden noktalar yerine doğruları esas alınmak suretiyle Öklid geometrisinin duali olan geometri (buna Co-Öklid geometrisi de denir) elde edilir. O zaman Öklid geometrisinde noktaları noktalara resmeden dönüşümlerin kinematiği yerine Öklid geometrisinin dualinde doğruları doğrulara resmeden dönüşümlerin kinematiği yapılır. Bunların da ötelemeler ve dönmeler olduğu görülmektedir.

Benzer şekilde Galile geometrisinden duali olan başka bir geometriye ulaşmak beklenirken bunun böyle olmadığı yani dualinin de kendisi olduğu görülmüştür.. Benzer şekilde eliptik geometrinin de dualinin kendisiyle çıktığı görülmüştür. İkili hiperbolik geometri (doubly hyperbolic geometry) nin de hiperbolik geometriye çok benzeyen fakat ayrı bir dualinin olmaması ile hiperbolik geometriden ayrılan bir özeliğe sahip olduğu görülmüştür..

Bunların yanında uzunluklar yerine açıların alınmasıyla hiperbolik geometriden duali olan Co-hiperbolik geometri elde edilmiştir. Hiperbolik geometrideki kinematik , “ bir doğru üzerindeki dört noktanın çift oranını esas alırken Co-hiperbolik geometri” bir noktadan geçen dört doğrunun çift oranını esas almaktadır. Bu kinematikte, bir doğru demetinde tepe noktasını sabit bırakan dönmelerin esas hareketler oldukları görüldü.

Bir diğ er ifade ile doğru demetinde  ifte oranı koruyan (bu oran a ılar yardımı ile tanımlanmıştır) dönüşümlerin kinematikiine rastlanmıştır.

Benzer şekli e Minkowski anlamındaki uzaklık yerine a ılar alınarak Minkowski geometrisinden de Co- Minkowski geometriye varıldığı tesbit edildi. Bu geometride de doğru demetlerinde  ifte oran değişmeyen özelik olmuştur. Hareketler, demetin tepe noktasını sabit bırakan dönmeler olarak tesbit edildi. Bu demektir ki Minkowski ve Co-Minkowski geometrilerinin kinematiki  ifte oran üzerinedir.

Co- geometrilerde hareketler, hızlar kanunu ve ivmeler kanunu Co-geometrilerin her birine ait paragraflarda ilgili hareketler de verildi. Bu geometrilerin her birinde yer alan hareketler;

- a) Dönmeler
- b)  telemeler

biçimindedir. Bu cins hareketlerde hızlar kanunu ve ivmeler kanunu, sırası ile ,

$$V_a = V_f + V_r$$

$$b_a = b_f + b_r + b_c$$

den ibarettir, burada V_a ile b_a , mutlak hız ile mutlak ivmeyi; V_f ile b_f , sürüklenme hızı ile sürüklenme ivmesini, V_r ile b_r de rölatif hız ile rölatif ivmeyi ve b_c de Coriolis ivmesini göstermektedir.

Bu nedenle Co- geometrilerin her biri için ayrı ayrı bu konuları ele almadık. Sadece Pseudo Galile Geometrisindeki hareketler için bir örnek vermekle yetindik.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

Tanım 2.1 Boş olmayan bir cümle A ve bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun.

Aşağıdaki üç önermeye uyan bir

$$f: A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu varsa A ya V ile birleştirilmiş bir **Afin uzay** denir (Hacısalihoglu, 1983).

A1.) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ ve için $f(P, Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır.

A2.) A da belli bir nokta seçildiğinde geri kalan her nokta V deki bir vektöre karşılık gelir.

A3.) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$

dir.

$F = \mathbb{R}$, reel sayılar cismi olarak alınması halinde Afin uzaya reeldir denir.

Tanım 2.2 $V = \mathbb{R}^n$ standart n - boyutlu reel vektör uzayıyla birleştirilen Afin uzay E^n ile gösterilir. $\mathbb{R}^n$ de bir iç çarpım işlemi olarak **Öklid iç çarpımı**

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad X = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

olarak alınırsa bu iç çarpım yardımıyla E^n de uzaklık ve açı gibi metrik kavramlar tanımlanabilir. Böylece E^n Afin uzayı n -boyutlu **Öklid uzayı** adını alır.

$$\mathbb{R}^n = \{ \vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \}$$

Tanım 2.3 $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$X \rightarrow \|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$$

ile tanımlanan dönüşüme X vektörünün **normu** denir.

Tanım 2.4 Sıfırdan farklı $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ için X ile Y arasındaki açının ölçüsü

$$\cos \theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|} \text{ den hesaplanan } \theta \text{ reel sayısıdır.}$$

Tanım 2.5 V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

i.) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

ii.) $\langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$

$$\langle u, av + bw \rangle = a \langle u, v \rangle + b \langle u, w \rangle$$

özelliklerine sahip olan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilinear form denir.

Tanım 2.6 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, vektör uzayı üzerinde bir simetrik bi-lineer form olsun.

i.) Eğer $\forall u \in V, u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle > 0$ oluyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne pozitif-definitdir.

ii.) Eğer $\forall u \in V, u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle < 0$ oluyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne negatif-definitdir.

iii.) Eğer $\forall u \in V$, için $\langle u, u \rangle > 0$ ve bu $u \neq 0$ için $\langle u, u \rangle = 0$ oluyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne pozitif semi definitdir.

iv.) $\forall v \in V$, $\langle u, v \rangle = 0$ için $u = 0$ oluyorsa $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dönüşümüne non-degeneredir denir.

Bu tanımdaki i.) ve ii.) özelliklerine sahip $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bi-lineer form definittir, iii.) ve iv.)

özelliklerine sahip $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bi-lineer forma pozitif semi-definit denir.

Eğer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definit ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hem semi-definit, hem de non- degeneredir, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definit değilse $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ya

V üzerinde indefinit denir.

V vektör uzayı üzerinde simetrik bi-lineer formu indefinit ise, $u \in V$ vektörü için

$$\langle u, u \rangle > 0 \text{ veya } \langle u, u \rangle < 0 \text{ veya } \langle u, u \rangle = 0$$

olur.

Tanım 2.7 V bir vektör uzayı ve $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ simetrik bi-lineer form olsun. $W \subset V, V$ nin bir alt uzayı olmak üzere $\langle \cdot, \cdot \rangle_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ negatif definit olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simetrik bi-lineer formun indeksi denir.

Tanım 2.8 Bir V vektör uzayı üzerindeki bir non-degenere simetrik bi-lineer forma V vektör uzayı üzerinde bir **skalar çarpma** adı verilir.

V bir n -boyutlu vektör uzayı ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ da V üzerinde bir simetrik bi-lineer form olsun eğer $\langle \cdot, \cdot \rangle$ non-degenere ise $\{V, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ikilisine **skalar çarpmalı vektör uzayı** (skalar çarpım uzayı) denir.

Tanım 2.9 V vektör uzayı ve V üzerindeki

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n, \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n), v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

skalar çarpmasına **Lorentz anlamında skalar çarpma** (Lorentz çarpması) denir. $\{V, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ikilisine de **Lorentz vektör uzayı** (Lorentz uzayı) denir. Özel olarak $V = \mathbb{R}^n$ alınması halinde, $\{\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$ ikilisine **n -boyutlu Lorentz vektör uzayı** (Lorentz uzayı) denir ve L^n ile gösterilir.

Tanım 2.10 L^2 iki boyutlu Lorentz uzayı ve $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$ olmak üzere L^2 de Lorentz çarpması

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 - u_2 v_2$$

biçiminde tanımlanır (Birman ve Nomizu 1984-A).

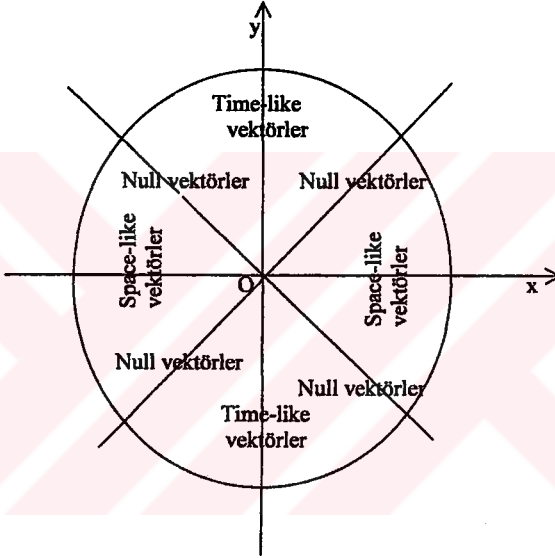
Tanım 2.11 $u = (u_1, u_2) \in L^2$ olsun. Eğer

$\langle u, u \rangle > 0$ veya $u=0$ ise u ya **space-like vektör**,

$\langle u, u \rangle < 0$ ise ve $u \neq 0$ u ya time-like vektör ve

$\langle u, u \rangle = 0$ ve $u \neq 0$ ise u ya null vektör veya light-like (isotropic) vektör adı verilir

(Şekil 2.1).



Şekil 2.1. L^2 de vektörler

Tanım 2.12 Lorentz uzayında bir u vektörünün normu

$$\|u\| = \sqrt{|\langle u, u \rangle|}$$

olarak tanımlanır (Birman ve Nomizu 1984-A).

Tanım 2.13 $u \in L^2$ olmak üzere

i.) $\|u\| > 0$

ii.) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u$ bir null vektördür.

iii.) u bir time-like vektör ise $\|u\|^2 = -\langle u, u \rangle$ dir.

iv.) u bir space-like vektör ise $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$ dir (Birman ve Nomizu 1984-A).

Tanım 2.14 L^2 , 2- boyutlu Lorentz uzayı ve $u, v \in L^2$ olsun. $\langle u, v \rangle = 0$ ise u ve v vektörlerine Lorentz anlamında diktirler denir (Birman ve Nomizu 1984-A).

Teorem 2.1 Her ikisi de space-like (time-like) olan iki vektör birbirine dik olamaz.

Sonuç 2.1 iki vektörün dik olması için birinin time-like diğerinin space-like olması gerekir.

L^2 uzayında Lorentziyen birim çember

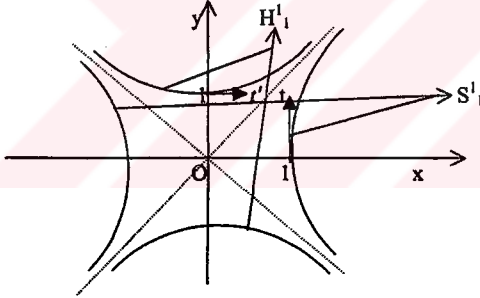
$$S_1^1 = \{u \in L^2 \mid \langle u, u \rangle = 1\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu çemberin teğetleri daima time-like vektörlerdir.

Benzer olarak, hiperbolik birim çember de

$$H_1^1 = \{u \in L^2 \mid \langle u, u \rangle = -1\}$$

biçiminde tanımlı olup, bu eğrinin teğetleri de space-like vektörlerdir (Şekil 2.2.).



Şekil 2.2. Lorentz ve hiperbolik birim çemberler

L^3 uzayında Lorentz ve hiperbolik birim küreler, sırasıyla,

$$S_1^2 = \{u \in L^3 | \langle u, u \rangle = 1\}$$

ve

$$H_0^2 = \{u \in L^3 | \langle u, u \rangle = -1\}$$

Tanım 2.15 $u \in L^2$ time-like bir vektör olsun. $e = (0,1)$ olmak üzere

- i.) $\langle u, e \rangle > 0$ ise u vektörüne bir past-pointing (geçmişe yönelik) time-like vektördür,
- ii.) $\langle u, e \rangle < 0$ ise u vektörüne future-pointing (geleceğe yönelik) time-like vektördür denir (O'Neill, 1983).

Sonuç 2.2 $u = (u_1, u_2) \in L^2$ vektörünün future-pointing time-like olması için gerek ve yeter şart $|u_1| < u_2$ olmasıdır.

Tanım 2.16 $u, v \in L^2$ future-pointing time-like vektörler olsun. Bu durumda

- i.) $\langle u, v \rangle \leq 0$,
 - ii.) $u + v$ future-pointing time-like vektördür,
 - iii.) $\|u + v\| \geq \|u\| + \|v\|$ (Lorentz uzayında üçgen eşitsizliği)
 - iv.) $-\langle u, v \rangle \geq \|u\| \|v\|$ (Lorentz uzayında Schwarts eşitsizliği)
- dir (Birman ve Nomizu, 1984-A).

Tanım 2.17 V Lorentz uzayında bütün time-like vektörlerin cümlesi v olsun. $u \in V$ için

$$\{v \in V : \langle u, v \rangle < 0\}$$

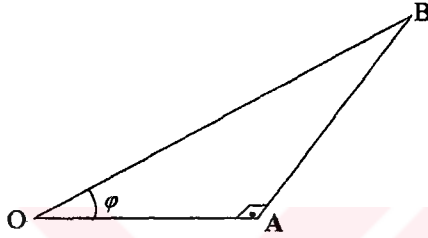
cümlesine v nin u yu ihtiva eden **time konisi (zaman konisi)** denir.

Teorem 2.3 Lorentz vektör uzayında time-like vektörler

u ve v olsun. Bu iki vektörün aynı time konide (zaman konisinde) olması için gerek ve yeter şart $\langle u, v \rangle < 0$ olmasıdır.

Tanım 2.18 Aynı time konide (zaman konisinde) bulunan üçgene bir **pure üçgen** denir (Birman ve Nomizu 1984-A).

Lemma 2.1 OA, OB future-pointing time-like vektörler, AB space-like vektör ve $\langle OA, OB \rangle = 0$ olmak üzere $ch\varphi = \frac{\|OA\|}{\|OB\|}$, $sh\varphi = \frac{\|AB\|}{\|OB\|}$ dir (Şekil 2.3.)(Birman ve Nomizu 1984-A).



Şekil 2.3. L^2 de dik üçgen

Lemma 2.2 Lorentz vektör uzayında OA, OB future-pointing time-like vektör olsun. OA, OB vektörleri aynı time- konide ise $\langle OA, AB \rangle = -\|OA\| \|OB\| ch\varphi$ olacak şekilde OA, OB arasında hiperbolik açı diye adlandırılan ve ölçüsü $\varphi \geq 0$ olan bir tek açı vardır (Birman ve Nomizu 1984-A).

Lemma 2.3 Lorentz vektör uzayında AB space-like vektör ve OA, OB future-pointing time-like vektörler için OAB ikizkenar üçgeninde yükseklik, aynı zamanda kenarortay ve açıortaydır (Yaglom 1979).

3. ÖKLİD GEOMETRİSİ

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$$

bir nokta cümlesidir.

$$\mathbb{C} = \{z | z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

cümlesinin $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\phi : \{O\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(O, P) \rightarrow \phi(O, P) = z$$

eşlemesi ile $\mathbb{R}^2$ nokta cümlesi bir afin uzayıdır (Hacısalıhoğlu 1983).

Teorem 3.1 $\mathbb{C}$ üzerinde

$$\langle, \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \bar{z}_2$$

$$z_1 = x_1 + iy_1, \bar{z}_1 = x_1 - iy_1$$

olmak üzere

$$\overline{z_1 z_2} = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

olarak tanımlanan $\langle, \rangle$ işlem $\mathbb{C}$ ' de bir iç çarpma işlemidir

(Hacısalıhoğlu ve Özdamar 1984).

İspat : $\langle, \rangle$ işlemi Konjuge simetriktir.

$$i) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \text{ için } \langle z_1, z_2 \rangle = \overline{\langle z_2, z_1 \rangle}$$

dir.

$$\langle z_1, z_2 \rangle = (x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

$$\langle z_2, z_1 \rangle = z_2 \bar{z}_1$$

$$\begin{aligned}
&= (x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1) \\
&= x_2x_1 + y_1y_2 - i(x_2y_1 - x_1y_2)
\end{aligned}$$

den

$$\begin{aligned}
\overline{\langle z_2, z_1 \rangle} &= (x_2x_1 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2) \\
\overline{\langle z_2, z_1 \rangle} &= \langle z_1, z_2 \rangle
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ işlemi bilinerdir.

$$a) \langle cz_1, z_2 \rangle = c \langle z_1, z_2 \rangle, (\forall c \in \mathbb{C})$$

dır.

$$\begin{aligned}
\langle cz_1, z_2 \rangle &= c z_1 \bar{z}_2 \\
&= (cx_1 + ciy_1)(x_2 - iy_2) \\
&= (cx_2x_1 + cy_1y_2) + i(cx_2x_1 + cy_1y_2) \\
&= c[(x_2x_1 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)] \\
&= c(z_1 \bar{z}_2) \\
&= c \langle z_1, z_2 \rangle
\end{aligned}$$

dir.

$$\langle z_1, cz_2 \rangle = \bar{c} \langle z_1, z_2 \rangle$$

olduğu da benzer biçimde gösterilebilir.

$$b) \langle z_1 + z_2, z_3 \rangle = \langle z_1, z_3 \rangle + \langle z_2, z_3 \rangle$$

dır.

$$\begin{aligned}
\langle z_1 + z_2, z_3 \rangle &= (z_1 + z_2) \bar{z}_3 \\
&= [(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)](x_3 - iy_3) \\
&= [(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)](x_3 - iy_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3 + i[y_1x_3 + x_2x_3 - (x_1 + x_2)y_3] \\
&= [(x_1x_3 + y_1y_3) + i(x_3y_1 - x_1y_3)] + [(x_2x_3 + y_2y_3) + i(x_3y_2 - x_2y_3)] \\
&= \overline{z_1z_3} + \overline{z_2z_3} \\
&= \langle z_1, z_3 \rangle + \langle z_2, z_3 \rangle
\end{aligned}$$

dir.

iii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ işlemi pozitif definit'dir.

$\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$\langle z, z \rangle = z \bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0$$

$$a) \langle z, z \rangle > 0 \Leftrightarrow z \neq 0 + i0$$

dir.

$$b) \langle z, z \rangle = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

dir.

$$\langle z, z \rangle = z \bar{z} = x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0 \Leftrightarrow z = 0 + i0$$

Tanım 3.1 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(z_1, z_2) \rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)$$

işlemine göre, $\phi(O, P) = z = x + iy$ ile tanımlanan P noktasının O başlangıç noktasına olan uzaklığı (norm)

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{\langle z, z \rangle} \\
&= \sqrt{z \bar{z}} \\
&= \sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

olur. Bu norm değerine z kompleks sayısının modülü denir (Özkın 1989).

Tanım 3.2 $\{ \mathbb{R}^2, \mathbb{C}, \langle \cdot, \cdot \rangle \}$ üçlüsüne Öklid düzlemi denir ve E^2 ile gösterilir (Özkın 1989).

Tanım 3.3 ($\mathbb{C}$ nin standart bazı): $\forall z \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= x \cdot 1 + i \cdot y \\ &= x(1 + 0i) + (0 + i \cdot 1)y \\ &= x(1, 0) + (0, 1)y \end{aligned}$$

olduğu düşünülürse $\mathbb{C}$ 'deki bir bazı $\{(1, 0), (0, 1)\}$ olduğu görülür. Bu baza $\mathbb{C}$ 'nin standart bazı denir.

$$|1 + i \cdot 0| = |0 + i| = 1$$

$$\text{Arg} \frac{0 + i}{1 + i \cdot 0} = 90^\circ$$

olduğundan $\mathbb{C}$ 'deki baz ortonormaldir. Bunu şu şekilde de gösterebiliriz.

$$e_1 = 1 + i \cdot 0 \text{ ve } e_2 = 0 + i \cdot 1$$

$$\langle e_1, e_2 \rangle = e_1 \overline{e_2} = 0$$

ve

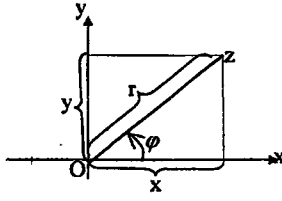
$$|e_1| = |e_2| = 1$$

olduğundan $\mathbb{C}$ 'nin standart bazı ortonormaldir.

Tanım 3.4 (Argüment): $z = x + iy$ ve $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{r} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{r} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

olarak ortaya çıkan φ açısına z 'nin argümenti denir ve $\varphi = \text{Arg} z$ şeklinde gösterilir (Şekil 3.1).

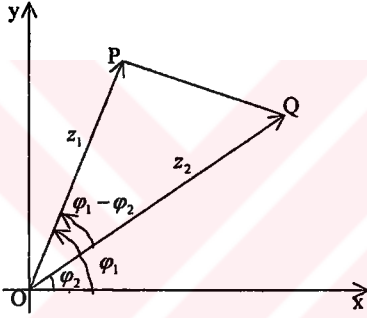


Şekil 3.1. z'nin argümenti

Tanım 3.5 E^2 de iki nokta arasındaki uzaklık, P ve Q noktalarına karşılık gelen kompleks sayılar z_1 ve z_2 olmak üzere,

$$d(P, Q) = |z_2 - z_1| = (z_2 - z_1)(\overline{z_2 - z_1})$$

olarak tanımlanır (Şekil 3.2).



Şekil. 3.2. İki nokta arasındaki uzaklık

O yerine keyfi bir z_0 noktası da alınabilir. Bu durumda QOP açısının

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{Arg} \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}$$

olduğu aşıkardır. Fakat bu tanım E^2 de bir koordinat seçilişinden bağımsızdır. Bu nedenle ya z_0 noktası O ya gelecek şekilde z_1-z_0 ve z_2-z_0 kompleks sayılarının belirlediği parçaları paralel kaydırınız veya O başlangıç noktası olarak z_0 'ı seçebiliriz.

Tanım 3.6 (E^2 de çember): $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere E^2 de çember

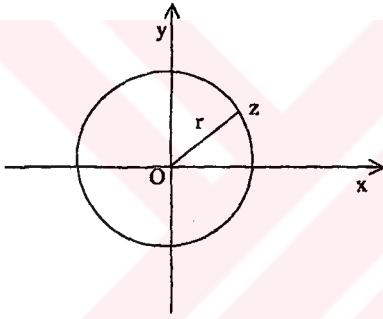
$$|z| = r$$

$$|z|^2 = r^2$$

veya

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \text{ den } x^2 + y^2 = r^2$$

olur (Şekil 3.3.).



Şekil 3.3. E^2 de çember

Tanım 3.7 (Yay uzunluğu): $y = f(x)$ eğrisi için yay uzunluğunun diferensiyeli

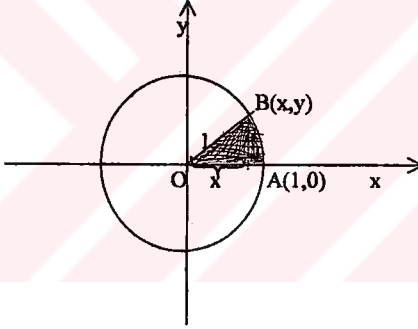
$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \\ &= \left| 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right| \Delta x^2\end{aligned}$$

veya

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta s = ds$ olmak üzere

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dir (Şekil 3.4).



Şekil 3.4. E^2 de $\widehat{AB}$ yay uzunluğu

Bu formüle göre $x^2 + y^2 = 1$ çemberi için

$$y^2 = x^2 - 1$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{1-x^2}$$

olur ve buradan

$$s = \int_1^x \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx$$

veya integral alınırsa

$$\begin{aligned} \widehat{AB} = s &= \arcsin x \Big|_1^x \\ &= \arcsin x - \arcsin 1 \\ &= \left| \arcsin x - \frac{\pi}{2} \right| \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \end{aligned}$$

bulunur (Özkın 1989).

OAB daire kesmesinin alanı için

$$\begin{aligned} S &= \frac{xy}{2} + \int_x^1 y dx \\ S &= \int_x^1 \sqrt{1-x^2} dx + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} \\ 2S &= 2 \int_x^1 \sqrt{1-x^2} dx + x\sqrt{1-x^2} \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int_x^1 \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

dir.

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$$

$$x^2 = \sin^2 t$$

$$1-x^2 = \cos^2 t$$

olduğundan $\int_x^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_x^1 \cos^2 t dt$

$$= \int_x^1 \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{\arcsin x}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin x - \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin x - x\sqrt{1-x^2} \right]$$

$$2S = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \Rightarrow \widehat{AB} = 2S$$

dir.

3.1 E^2 de Hareketler

E^2 de dönme

$$E^2 \rightarrow E^2$$

$$P \rightarrow P'$$

$$z = (x, y) \quad z' = (x', y')$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$z' = e^{i\varphi} z$$

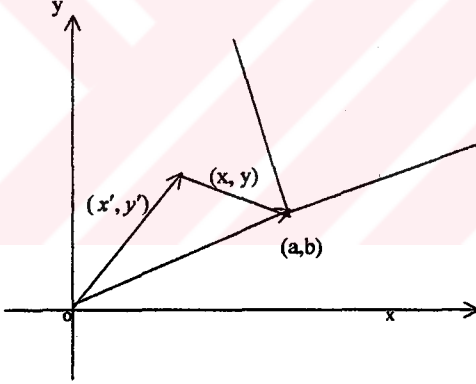
dir. Öteleme $z_0 = a + ib$ ile belli ise ötelemeli dönme (katı hareket)

$$z' = e^{i\varphi} z + z_0$$

veya matris formunda dir.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & a \\ \sin \varphi & \cos \varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

den ibaret olur (Şekil 3.1.1.).



Şekil 3.1.1. E^2 de katı hareket

E^2 deki katı hareketlerin cümlesi bileşim işlemine göre bir gruptur (Hacısalıhoğlu 1983).

$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ olduğunu gösterelim.

e^x in $x = 0$ daki Taylor-Maclaurin açılımı ile

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

dir. Buradan $x = i\theta$ alınırsa

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \dots$$

$$= (1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots) + i(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots)$$

$$1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots = \cos\theta \quad \text{ve} \quad \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots = \sin\theta \quad \text{olduğundan}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$i \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$A^5 = A$, $A^6 = A^2$ olduğundan A nın kuvvetleri mod 4 kongruence sınıfındadır.

e^x de x yerine $A\theta$ alınırsa

$$e^{A\theta} = I + \frac{\theta}{1!} A + \frac{\theta^2}{2!} A^2 + \frac{\theta^3}{3!} A^3 + \frac{\theta^4}{4!} A^4 + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\theta^2}{2!} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \frac{\theta^3}{3!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots & -(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots) \\ \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \end{bmatrix}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

ve

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

oluğundan

$$e^{A\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, (i \rightarrow A \Rightarrow e^{i\theta} \rightarrow e^{A\theta})$$

olur.

Teorem 3.1.1 E^2 deki katı hareketlerin cümlesi bileşke işlemine göre bir gruptur (Hacısalihoglu 1980).

İspat:

$$R(2) = \{ R | R : E^2 \rightarrow E^2 \}$$

$$R(2) : P \rightarrow P'$$

$$z \quad z' = e^{i\varphi} z + z_0$$

katı hareketlerin cümlesi olmak üzere

1) $\forall R_1, R_2 \in R(2)$ için $R_1 \circ R_2 \in R(2)$

dir.

$$R_1 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1, A_2 \in O(2)$$

burada

$$O(2) = \{ A \mid A \in \mathbb{R}^2, AA^T = A^T A = I_2 \}$$

dir.

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(2)$$

$$A_1 A_2 = A \in O(2), \quad A_1 C_2 + C_1 = C$$

olmak üzere

$$R_1 R_2 = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}(2)$$

dir.

$$2) \forall R_1, R_2, R_3 \in \mathbb{R}(2) \text{ için } R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

tür.

$$R_1 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

için

$$\begin{aligned} R_1 \circ (R_2 \circ R_3) &= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 A_3 & A_2 C_3 + C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 A_2 A_3 & A_1 A_2 C_3 + A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 A_2 & A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=(R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

bulunur.

iii.) $R(2)$ de bileşke işleminin birim eleman özeliği:

$$I: E^2 \rightarrow E^2$$

özdeşlik dönüşümdür.

$$\forall R \in R(2) \text{ için } RoI = IoR$$

dir.

$$\left. \begin{array}{l} R = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ I = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \end{array} \right\} \text{ olmak üzere } RoI = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Ax + Cz & Ay + Ct \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Ax + Cz = A \\ Ay + Ct = C \\ z = 0 \\ t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Ax = A \Rightarrow x = AA^{-1} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ Ay + C = C \Rightarrow Ay = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}$$

elde edilir. Buradan

$$I = \begin{bmatrix} I_2 & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

4) Belli bir $R \in R(2)$ için $RoR^{-1} = R^{-1}oR = I$ olacak şekilde bir R^{-1} vardır.

$$R = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R^{-1} = \begin{bmatrix} u & v \\ y & z \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$RoR^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Au + Cy & Av + Cz \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Au + Cy = I_2 \\ Av + Cz = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Au + Cy = I_2 \Rightarrow Au \Rightarrow I_2 \Rightarrow u = I_2 A^{-1} \Rightarrow u = A^{-1} \\ Av + Cz = 0 \Rightarrow Av = -CI_2 \Rightarrow v = -A^{-1}C \end{array}$$

elde edilir. Buradan

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ olsun. O zaman } A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$-A^{-1} = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$-A^{-1}C = \begin{bmatrix} -\cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \cos \varphi + b \sin \varphi \\ -a \sin \varphi - b \cos \varphi \end{bmatrix}_{2 \times 1}$$

dır. Buradan

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & -a \cos \varphi + b \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & -a \sin \varphi - b \cos \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece “o” bileşke işlemini göstermek üzere $(R(2), o)$ ikilisi bir gruptur.

Tanım 3.1.1 (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

E^2 de genel hareketin denklemi $A = A(t) \in O(2)$ ve $C = C(t) \in \mathbb{R}^2_1$ olmak üzere

$$Y = AX + C \dots\dots\dots (I)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983). Bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dA}{dt}X + A\frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt} \dots\dots\dots (II)$$

olur. Burada

$$V_a = \frac{dY}{dt} \text{ ye hareketin mutlak hızı,}$$

$$V_r = A\frac{dX}{dt} \text{ ye hareketin rölatif hızı,}$$

$$V_f = \frac{dA}{dt}X + \frac{dC}{dt} \text{ ye de hareketin sürüklenme hızı denir.}$$

Biri E' sabit düzlem ve diğeri de E' ye göre hareket eden E hareketli düzlem olmak üzere E^2 düzlemindeki hareketleri E/E' biçiminde gösteririz. A ve C matrisleri bir

$t \in \mathbb{R}$ parametresinin fonksiyonları iseler bu harekete **bir parametrelili hareket** denir ve

$B_1 = \frac{E}{E'}$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2 (Rölatif hız) X noktasının E (hareketli) Öklid düzlemine göre hız vektörüne, yani X noktası E deki yörüngesini çizirken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının **izafi (rölatif) hızı** denir ve V_r ile gösterilir.

Tanım 3.1.3 (Mutlak Hız) X noktasının E' sabit düzlemine göre hızına X noktasının **mutlak hızı** denir ve V_a ile gösterilir.

Böylece, V_a, V_f, V_r hız vektörleri arasında

$$V_a = V_f + V_r$$

bağıntısı elde edilir.

Eğer X noktası E hareketli düzleminde sabit bir nokta ise $V_r = 0$ olacağından $V_a = V_f$ olur.

Hızlar kanunu : Yukarıdaki bağıntıyı bir teoremlle ifade edebiliriz. Bu bağıntı $B_1 = \frac{E}{E'}$ hareketinde **hızlar kanunu** adını alır.

Teorem 3.1.2 Bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile izafi hız vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$V_a = V_f + V_r$$

dir.

3.2 Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri

Öklid anlamında bir parametrelili $B_1 = \frac{E}{E'}$ hareketinde E de sabit bir X noktasının her t anında V_r sürüklenme hızının sıfır olduğu noktalar hareketli ve sabit düzlemde sabit noktalardır. Bu noktalara **hareketin pol noktaları** denir.

Teorem 3.2.1 Açısal hızı sıfır olmayan bir $B_1 = E/E'$ hareketinde, her t anında her iki düzlemde sabit kalan bir tek nokta vardır.

İspat: $X \in E$ noktası E de sabit olacağından $V_f = 0$ ve aynı nokta E' düzleminde de sabit olacağı için $V_f = 0$ olacaktır. O halde bu cins noktalar için $V_f = 0$

ise

$$V_f = 0 \Rightarrow \dot{A}X + \dot{C} = 0$$

$$\Rightarrow X = -\dot{A}^{-1}\dot{C} \dots\dots\dots(III)$$

olur. Gerçekten,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}, \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \sin \varphi & -\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{\varphi} \cos \varphi & -\dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\dot{A} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix}$$

det $\dot{A} = \dot{\varphi}^2$, $\varphi \neq \text{sabit}$ alınırsa det $\dot{A} \neq 0$ ve dolayısıyla $\dot{A}$ regüler yani $\dot{A}^{-1}$ mevcut olur ve

$$\dot{A}^{-1} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix}$$

dır. Dolayısıyla $V_f = 0$ denkleminin bir tek X çözümü vardır. Bu X noktasına hareketli düzlemdeki pol noktası denir. Bu nedenle (III) ' den

$$X = P = \frac{1}{\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} \dot{a} \sin \varphi - \dot{b} \cos \varphi \\ \dot{a} \cos \varphi + \dot{b} \sin \varphi \end{bmatrix}$$

veya vektör olarak

$$X = P = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{a} \sin \varphi - \dot{b} \cos \varphi, \dot{a} \cos \varphi + \dot{b} \sin \varphi)$$

ve sabit düzlemdeki pol noktası (I) den

$$P' = AP + C$$

dir. Bu değerler yerlerine yazılır ve hesaplanırsa

$$Y = P' = \frac{1}{\dot{\phi}} \begin{bmatrix} -\dot{b} \\ \dot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

veya vektör olarak

$$Y = P' = \left(-\frac{1}{\dot{\phi}} \dot{b} + a, \frac{1}{\dot{\phi}} \dot{a} + b \right)$$

bulunur. Burada $\forall t$ için $\dot{\phi}(t) \neq 0$ kabul ediyoruz. Yani, açısal hız sıfır olmasın. Bu durumda her t anında hareketli ve sabit düzlemlerin her birinde bir tek pol noktasının olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 3.2.1 $P = (p_1, p_2)$ noktasına $B_1 = E/E'$ bir parametrelili Öklid hareketinin t anındaki polü veya ani dönme merkezi denir.

Teorem 3.2.2 P polünden X noktasına giden pol ışını, $\forall t$ anında

V_f sürüklenme hız vektörüne Öklid anlamında diktir.

İspat: $Y = AX + C \Rightarrow X = A^{-1}(Y - C)$

$$\dot{A}X + \dot{C} = V_f$$

$$\dot{A}X + \dot{C} = 0 \text{ den } P = -\dot{A}^{-1}\dot{C} \text{ hareketli düzlemdeki pol noktası}$$

$$Y = AX + C$$

$$Y = P' = A(-\dot{A}^{-1}\dot{C}) + C \text{ sabit düzlemdeki pol noktası}$$

$$P' - C = -\dot{A}\dot{A}^{-1}\dot{C}$$

$$\dot{C} = -\dot{A}^{-1}\dot{A}(P' - C)$$

bu değerleri $V_f = \dot{A}X + \dot{C}$ de yerlerine yazılırsa

$$V_f = \dot{A}A^{-1}(Y - P')$$

$$V_f = \dot{A}A^{-1}P'Y$$

$\dot{A}A^{-1} P'Y$ değeri hesaplanırsa vektör olarak

$$V_f = \dot{A}A^{-1} P'Y = \dot{\phi}(-(y_2 - p_2), (y_1 - p_1))$$

bulunur.

$$P'Y = ((y_1 - p_1), (y_2 - p_2))$$

dır. Buna göre,

$$\langle V_f, P'Y \rangle = 0$$

bulunur.

Teorem 3.2.3 V_f sürüklenme hız vektörünün boyu

$$\|V_f\| = |\dot{\phi}| \|PX\|$$

dir.

İspat: $V_f = \dot{\phi}(-(y_2 - p_2), -(y_1 - p_1))$

$$\begin{aligned} \|V_f\| &= |\dot{\phi}| \sqrt{(y_2 - p_2)^2 + (y_1 - p_1)^2} \\ &= |\dot{\phi}| \|P'Y\| \end{aligned}$$

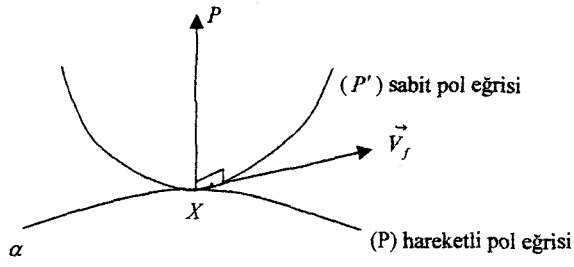
dir.

Teorem 3.2.4 Hareketli E düzleminin her X noktası, t anında P merkezli ve $\dot{\phi}$ açısal hızlı bir Öklid dönme hareketi yapar.

X, E nin tamamen keyfî bir noktası olduğundan aşağıdaki teoremi de verebiliriz (Ergin 1988)

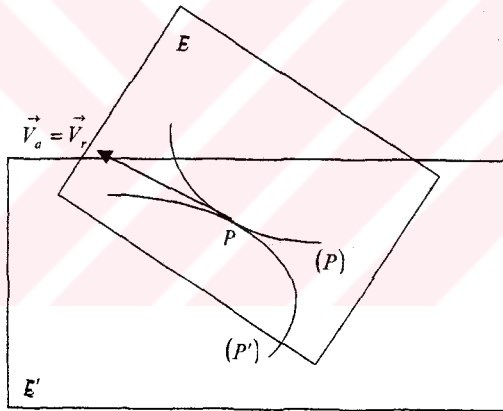
Teorem 3.2.5 Bir parametrelî bir Öklid hareketi, t anında hareketli E düzleminin E' ye göre hareketi P ani dönme polü etrafında $\dot{\phi}$ açısal hızı ile belli olan bir dönmeden ibarettir.

Teorem 3.2.6 $B_1 = E/E'$ hareketinde E düzleminin X noktaları, E' sabit düzleminde normaleri P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler (Ergin 1988) (Şekil 3.2.1.).



Şekil 3.2.1. Normalleri P polünden geçen yörüngeler

Tanım 3.2.2 $B_1 = E/E'$ Öklid hareketinde P pol noktalarının E hareketli düzlemindeki geometrik yerine $B_1 = E/E'$ hareketinin hareketli pol eğrisi denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının E' sabit düzlemindeki geometrik yerine ise sabit pol eğrisi ve (P') ile gösterilir (şekil 3.2.2.).



Şekil 3.2.2. Hareketli ve sabit pol eğrileri

P pol noktası E hareketli düzlemi üzerinde hareketli bir noktadır. Dolayısıyla P noktası (P) ve (P') pol eğrilerini çizerken bu eğrilerin herbiri üzerinde birer hıza sahiptir.

Teorem 3.2.7 Sabit ve hareketli düzlemlerdeki pol eğrilerini çizen P dönme polünün, (P) ve (P') eğrileri üzerinde, her t anındaki hızları birbirinin aynıdır. Başka bir deyişle iki eğri daima birbirine teğettir.

İspat: $X \in E$ noktasının (P) eğrisini çizme hızı V_r ve ayrıca bu noktanın (P') eğrisini çizme hızı da V_a dır. $V_f = 0$ olduğundan $V_a = V_r$ dir.

Tanım 3.2.3 Her t anında α ve α' gibi iki eğri birbirine teğet ve bu iki eğriyi çizen noktanın bu eğriler üzerinde dt kadar zamanda aldıkları ds ve ds' yollarının uzunlukları aynı ise α ve α' eğrilerine birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanıyorlar denir.

Teorem 3.2.8 Bir parametrelili düzlemsel bir $B_1 = E/E'$, Öklid hareketinde, E düzleminin (P) hareketli pol eğrisi E' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat : Bir eğrinin yay elementinin tanımına göre (P) nin yay elementi $ds = \|V_r\|$ ve (P') nün ki de $ds' = \|V_a\|$ dir. (P) ve (P') için $V_a = V_r$ olduğundan $ds = ds'$ dır.

Bu teoreme göre, zamandan bahsetmeden bir Öklid hareketini tanımlayabiliriz. Bir $B_1 = E/E'$, Öklid hareketi, E nin (P) hareketli pol eğrisi, E' nün (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması ile elde edilebilir.

Tanım 3.2.4 X noktasının E' sabit Öklid düzlemine göre mutlak ivme vektörü $\dot{V}_a$ dır. Bu vektör b_a ile gösterilecektir.

$$V_o = \dot{Y} \text{ olduğundan}$$

$$b_o = \dot{V}_o = \ddot{Y}$$

dir.

Tanım 3.2.5 E hareketli Öklid düzleminin sabit bir noktası X olsun. X noktasının E' sabit Öklid düzlemine göre, ivme vektörüne sürüklenme ivme vektörü diyeceğiz ve b_f ile göstereceğiz

Sürüklenme ivmesinin hesabında X noktası E nin sabit bir noktası olacağından

$$b_f = \dot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C}$$

olur.

3.3 İvmeler ve İvmelerin Birleşimi

E Öklid düzleminin E' düzlemine göre $B_1 = E/E'$ Öklid hareketi mevcut olsun. Bu hareket esnasında E düzlemine göre, dolayısıyla da E' düzlemine göre hareket eden bir X noktası göz önüne alınsın. X in hareketine ait hız formülleri elde edilmişti, şimdi ise X noktasının ivmesine ait ivme formülleri elde edilecektir.

Tanım 3.3.1 X noktasının E hareketli düzlemine göre V_r rölatif hız vektörünün türevi alınarak elde edilen

$$V_r = A\dot{X}$$

$$b_r = \dot{V}_r = A\ddot{X}$$

vektörüne X in E deki **rölatif ivme vektörü** diyecek ve onu b_r ile göstereceğiz.

Bu türev alınırken X noktası E de hareket eden bir nokta olarak düşünüldüğünden A matrisi sabit olarak alınmıştır.

Teorem 3.3.1 E hareketli Öklid düzleminde bir t parametresine göre hareket eden bir nokta X olsun

$$b_a = b_f + b_c + b_r$$

dir(Burada $b_c = 2\dot{A}\dot{X}$ olup buna Öklid anlamında Coriolis ivmesi adını vereceğiz) (Hacısalihoglu, 1983) .

Sonuç 3.3.1 Bir $X \in E$ noktası E de sabit ise, X noktasının sürüklenme ivmesi bu noktanın mutlak ivmesine eşittir.

İspat :

$$V_a = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C}$$

den her iki tarafın türevi alınırsa

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \dot{A}\dot{X} + \dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} + \ddot{C}$$

X noktası sabit olduğundan türevleri sıfırdır.

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \ddot{C} = b_f$$

dir.

Teorem 3.3.2 b_c Coriolis ivme vektörü, V_r rölatif hız vektörüne Öklid anlamında diktir.

İspat:

$$b_c = 2\dot{A}\dot{X}$$

$$= 2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\dot{X}_1 \sin \varphi - \dot{X}_2 \cos \varphi \\ \dot{X}_1 \cos \varphi - \dot{X}_2 \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$= 2\dot{\varphi} (-\dot{X}_1 \sin \varphi - \dot{X}_2 \cos \varphi, \dot{X}_1 \cos \varphi - \dot{X}_2 \sin \varphi)$$

ve

$$\begin{aligned}
V_r &= A\dot{X} \\
&= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \\
&= (\dot{X}_1 \cos \varphi - \dot{X}_2 \sin \varphi, \dot{X}_1 \sin \varphi + \dot{X}_2 \cos \varphi)
\end{aligned}$$

bu değerler Öklid anlamında iç çarpımı yapılırsa

$$\langle V_r, b_c \rangle = 0$$

olduğu görülür.

Sonuç 3.3.2 E hareketli Öklid düzleminde, X hareketli noktasının Coriolis ivmesi sıfır ise, B_1 hareketi bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat: X noktasının b_c Coriolis ivme vektörü

$$\begin{aligned}
b_c &= 2\dot{A}\dot{X} \\
&= 2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi \\ \cos \varphi & -\sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \\
&= 2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\dot{X}_1 \sin \varphi - \dot{X}_2 \cos \varphi \\ \dot{X}_1 \cos \varphi - \dot{X}_2 \sin \varphi \end{bmatrix} \\
&= 2\dot{\varphi} (-\dot{X}_1 \sin \varphi - \dot{X}_2 \cos \varphi, \dot{X}_1 \cos \varphi - \dot{X}_2 \sin \varphi) = 0
\end{aligned}$$

dır.

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi \text{ sabittir, yani } B_1 = E/E', \text{ hareketi sadece kaymadan ibarettir.}$$

Tersine $B_1 = E/E'$ hareketi sadece bir kaymadan ibaret ise $\varphi = \text{sabit olur. } \dot{\varphi} = 0 \text{ sabittir.}$

$\dot{\varphi} = 0$ olması $b_c = 0$ olması demektir.

3.4 Birinci ve ikinci İvme Polleri

$\dot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü bize birinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\dot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$$

$$\dot{A} = \dot{\phi} \begin{bmatrix} -\sin \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & -\sin \phi \end{bmatrix}$$

$$\ddot{A} = \begin{bmatrix} -\dot{\phi}^2 \cos \phi - \ddot{\phi} \sin \phi & \dot{\phi}^2 \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi}^2 \sin \phi + \ddot{\phi} \cos \phi & -\dot{\phi}^2 \cos \phi - \ddot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix}, \quad |\ddot{A}| = \dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2$$

$$\ddot{A}^{-1} = \frac{1}{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} \begin{bmatrix} -\dot{\phi}^2 \cos \phi - \ddot{\phi} \sin \phi & -\dot{\phi}^2 \sin \phi + \ddot{\phi} \cos \phi \\ +\dot{\phi}^2 \sin \phi - \ddot{\phi} \cos \phi & -\dot{\phi}^2 \cos \phi - \ddot{\phi} \sin \phi \end{bmatrix}$$

bu değerler $X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$ de yerlerine yazılırsa

$$X = P_1 = \frac{1}{\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4} \cdot$$

$$\left(\ddot{a}(\dot{\phi}^2 \cos \phi + \ddot{\phi} \sin \phi) - \ddot{b}(-\dot{\phi}^2 \sin \phi + \ddot{\phi} \cos \phi), \ddot{a}(-\dot{\phi}^2 \sin \phi + \ddot{\phi} \cos \phi) + \ddot{b}(\dot{\phi}^2 \cos \phi + \ddot{\phi} \sin \phi) \right)$$

şeklinde olur. Burada P_1 e hareketli düzlemdeki birinci mertebeden pol eğrisi denir.

Sabit düzlemdeki pol eğrisi P_1' ile gösterilirse

$$P_1' = AP_1 + C$$

den

$$P_1' = \left(\frac{1}{\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4} (\ddot{a}\dot{\phi}^2 - \ddot{b}\ddot{\phi}) + a, \frac{1}{\ddot{\phi}^2 + \dot{\phi}^4} (\ddot{a}\ddot{\phi} + \ddot{b}\dot{\phi}^2) + b \right)$$

olarak bulunur.

$\ddot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü ise bize ikinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\ddot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$$

dir. Bu değerler hesaplanır yerlerine konulursa X hareketli düzlemdeki ikinci mertebeden ivme polünü verir ve P_2 ile gösterilir.

$$P_2 = \frac{-1}{(-\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi})^2 + (3\dot{\phi}\ddot{\phi})^2} \left(\ddot{a}(-3\dot{\phi}\ddot{\phi} \cos \varphi + (\dot{\phi}^3 - \ddot{\phi}) \sin \varphi) + \ddot{b}(-3\dot{\phi}\ddot{\phi} \sin \varphi + (-\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi}) \cos \varphi) \right)$$

$$\left(\ddot{a}(3\dot{\phi}\ddot{\phi} \sin \varphi - (-\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi}) \cos \varphi) + \ddot{b}(-3\dot{\phi}\ddot{\phi} \cos \varphi + (\dot{\phi}^3 - \ddot{\phi}) \sin \varphi) \right)$$

sabit düzlemdeki pol eğrisi P'_2 ile gösterilirse, bu değerler

$$P'_2 = AP_2 + C$$

de yerlerine yazılırsa

$$P'_2 = \left(\frac{1}{(3\dot{\phi}\ddot{\phi})^2 + (\ddot{\phi} - \dot{\phi}^3)^2} [(3\ddot{a}\dot{\phi}\ddot{\phi} + \ddot{b}(\dot{\phi}^3 - \ddot{\phi})) + a, \frac{1}{(3\dot{\phi}\ddot{\phi})^2 + (\ddot{\phi} - \dot{\phi}^3)^2} [\right.$$

$$\left. [(3\ddot{b}\dot{\phi}\ddot{\phi} + \ddot{a}(\ddot{\phi} - \dot{\phi}^3))] + b \right)$$

elde edilir.

4. MINKOWSKI GEOMETRİSİ

W. K. Clifford (1845-1879)'n keşfettiği $K = \{z \mid z = x + \varepsilon y, x, y \in \mathbb{R}, \varepsilon^2 = 1, \varepsilon \neq 1, \varepsilon \notin \mathbb{R}\}$

Clifford sayılarının cümlesi $\mathbb{R}^2$ nin noktaları ile birebir tekabül eder (Yaglom 1979).

Clifford sayılarının cümlesi üzerinde tanımlanan

$$+ : K \times K \rightarrow K$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + \varepsilon(y_1 + y_2)$$

işlemi K da bir iç işlemdir.

$$\cdot : K \times K \rightarrow K$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2) + \varepsilon(x_1 y_1 + x_2 y_2)$$

işlemi K da bir iç işlemdir. $(K, +, \cdot)$ üçlüsü birimli ve değişimli bir halkadır (Hacısalihoglu, 1980).

K cümlesinin, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ Reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$$O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$$

olmak üzere

$$\phi : \{O\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow K$$

eşlemesiyle bu nokta cümlesi bir afin uzay olur (Yaglom 1979).

Teorem 4.1 K üzerinde

$$\langle, \rangle : K \times K \rightarrow K$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = \overline{z_1 z_2}$$

$$z_1 = x_1 + \varepsilon y_1, \bar{z}_1 = x_1 - \varepsilon y_1$$

olmak üzere

$$z_1 \bar{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 \cdot y_2) + \varepsilon(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

olarak tanımlanan işlem indefinit iç çarpım işlemidir (Hacısalihoglu 1984).

İspat : i) Konjuge simetri özeliği :

$\forall z_1, z_2 \in K$ için

$$\begin{aligned}\langle z_1, z_2 \rangle &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \varepsilon (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ \langle z_2, z_1 \rangle &= z_2 \bar{z}_1 \\ &= (x_2 + \varepsilon y_2) (x_1 - \varepsilon y_1) \\ &= x_2 x_1 - \varepsilon y_1 x_2 + \varepsilon x_1 y_2 - y_1 y_2 \\ &= x_2 x_1 - y_1 y_2 - \varepsilon (x_2 y_1 - x_1 y_2)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\overline{\langle z_2, z_1 \rangle} &= (x_2 x_1 - y_1 y_2) + \varepsilon (x_2 y_1 - x_1 y_2) \\ \overline{\langle z_2, z_1 \rangle} &= \langle z_1, z_2 \rangle\end{aligned}$$

elde edilir.

ii) Bilineerlik özeliği:

$$a) \langle cz_1, z_2 \rangle = c \langle z_1, z_2 \rangle, c \in K$$

dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned}\langle cz_1, z_2 \rangle &= c z_1 \bar{z}_2 \\ &= (cx_1 + c\varepsilon y_1)(x_2 - \varepsilon y_2) \\ &= c[(x_2 x_1 - y_1 y_2) + \varepsilon (x_2 y_1 - x_1 y_2)] \\ &= c \langle z_1, z_2 \rangle \\ \langle z_1, cz_2 \rangle &= \bar{c} \langle z_1, z_2 \rangle\end{aligned}$$

olduğu da benzer biçimde gösterilebilir.

$$b) \langle z_1 + z_2, z_3 \rangle = \langle z_1, z_3 \rangle + \langle z_2, z_3 \rangle$$

dır. Gerçekten,

$$\langle z_1 + z_2, z_3 \rangle = (z_1 + z_2) \bar{z}_3$$

$$\begin{aligned}
&= [(x_1 + \varepsilon y_1) + (x_2 + \varepsilon y_2)] (x_3 - \varepsilon y_3) \\
&= (x_1 + x_2) + \varepsilon(y_1 + y_2) (x_3 - \varepsilon y_3) \\
&= (x_1 + x_2)x_3 - (y_1 + y_2)y_3 + \varepsilon[(y_1 + y_2)x_3 - (x_1 + x_2)y_3] \\
&= [(x_1x_3 - y_1y_3) + \varepsilon(x_3y_1 - x_1y_3)] + [(x_2x_3 - y_2y_3) + \varepsilon(x_3y_2 - x_2y_3)] \\
&= \langle z_1, z_3 \rangle + \langle z_2, z_3 \rangle
\end{aligned}$$

bulunur.

iii) İndefinit özeliği :

$\forall z \in K$ için

$$\begin{aligned}
\langle z, z \rangle &= z \bar{z} \\
&= x^2 - y^2 \\
\langle z, z \rangle &> 0
\end{aligned}$$

veya

$$\langle z, z \rangle < 0$$

veya

$$\langle z, z \rangle = 0$$

olabilir.

$$\langle z, z \rangle = 0 \Rightarrow z = 0$$

olmayabilir. Şu halde bu $\langle, \rangle$ işlemi K da pozitif tanımlı değildir, yani $\langle z, z \rangle$ bazan pozitif, bazan negatif ve bazan da 0 olur. Bu nedenle $\langle, \rangle$ operatörü indefinitir denir.

Tanım 4.1 $\langle, \rangle : K \times K \rightarrow K$

$$\begin{aligned}
(z_1, z_2) &\rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \bar{z}_2 \\
&= (x_2x_1 - y_1y_2) + \varepsilon(x_2y_1 - x_1y_2)
\end{aligned}$$

işlemine göre,

$$\phi(O, P) = z = x + \varepsilon y$$

ile tanımlanan P noktasının O başlangıç noktasına olan uzaklığı (norm)

$$\begin{aligned}
|z| &= \sqrt{\langle z, z \rangle}, \quad r = |z| \\
&= \sqrt{|zz|} \\
&= \sqrt{|x^2 - y^2|}
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır (Yaglom, 1979).

$$x^2 - y^2 > 0 \Rightarrow z = x + \varepsilon y \text{ ye space - like}$$

$$x^2 - y^2 < 0 \Rightarrow z = x + \varepsilon y \text{ ye time - like}$$

$$x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow z = x + \varepsilon y \text{ ye light - like}$$

denir.

Tanım 4.2 $\{\mathbb{R}^2, K, \langle, \rangle\}$ üçlüsüne **Minkowski düzlemi** denir ve L^2 ile gösterilir (Yaglom, 1979).

Tanım 4.3 $z \in K$ olmak üzere K daki bir bazın

$$z = x + \varepsilon y$$

$$= x 1 + \varepsilon y$$

olarak düşünülmesiyle $\{1, \varepsilon\}$ olduğu görülür. Dolayısıyla K cümlesi $\mathbb{R}$ üzerinde iki boyutlu vektör uzayıdır.

$$|z| = r \neq 0 \text{ olsun. O zaman}$$

$$z = x + \varepsilon y$$

$$= r \left(\frac{x}{r} + \varepsilon \frac{y}{r} \right)$$

olur. Burada

$$r = |z| = \pm \sqrt{|x^2 - y^2|}$$

olduğundan iki hal vardır.

I. Hal : $|x| > |y|$ olması halinde z ye space - like denir. Bu halde

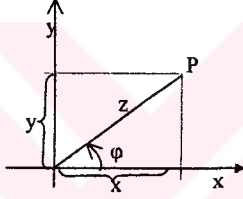
$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{r}\right)^2 - \left(\frac{y}{r}\right)^2 &= \frac{x^2 - y^2}{r^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 - y^2} \\ &= 1 > 0.\end{aligned}$$

$$\frac{x}{r} = \cosh \varphi$$

$$\frac{y}{r} = \sinh \varphi$$

$$\tanh \varphi = \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{y}{x}$$

olacak şekilde bir φ reel sayısı vardır. Bu φ reel sayısına Minkowski geometrisindeki açının ölçüsü olarak bakacağız (şekil 4.1).



Şekil 4.1. L^2 de ölçüsü φ olan açı

II. Hal $|x| < |y|$ olması halinde z ye time - like denir.

$$x^2 < y^2$$

$$x^2 - y^2 < 0$$

olur.

Bu halde

$$x^2 - y^2 < 0 \Rightarrow y^2 - x^2 > 0$$

olacağından

$$r^2 = |z|^2 = y^2 - x^2$$

olur . Bu halde de

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{r}\right)^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2 &= \frac{y^2 - x^2}{r^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{y^2 - x^2} \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

olur. Buna göre de

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= \cosh \varphi \\ \frac{x}{r} &= \sinh \varphi \\ \tanh \varphi &= \frac{\sinh \varphi}{\cosh \varphi} = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

olacak şekilde φ reel sayısına z nin argümenti denir ve $\arg z$ ile gösterilir.

Şu halde $|z| \neq 0$ için

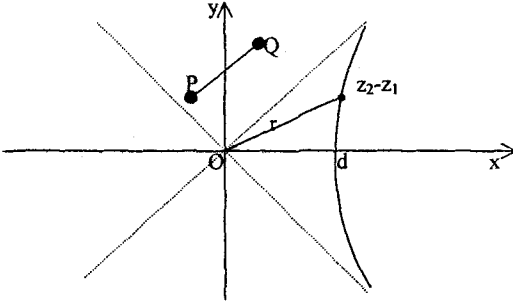
$$\begin{aligned} z &= r (\cosh \varphi + \varepsilon \sinh \varphi) & (z \text{ space-like dır}) \text{ veya} \\ z &= r (\sinh \varphi + \varepsilon \cosh \varphi) & (z \text{ time-like dır}) \end{aligned}$$

yazılabilir.

Tanım 4.4 $z_1, z_2 \in K$ olmak üzere P ve Q noktaları arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= |z_2 - z_1| \\ d(P, Q) &= \sqrt{|(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2|} \end{aligned}$$

dir (Şekil 4.2.).

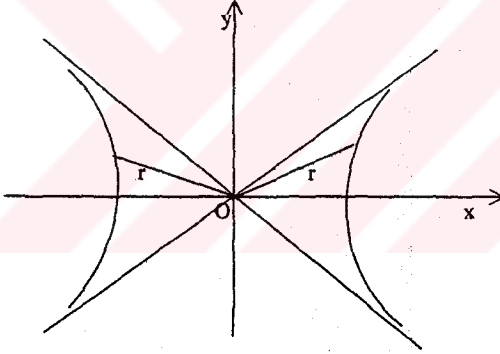


Şekil 4.2. L^2 de iki nokta arasındaki uzaklık.

Tanım 4.5 $z = x + \varepsilon y$ ve $r = |z| = \pm \sqrt{|x^2 - y^2|}$ olduğuna göre merkezi O ve yarıçapı r olan çember denklemini

$$x^2 - y^2 = r^2$$

dir (Yaglom, 1979). Bu ise Öklid düzlemindeki bir ikizkenar hiperbolün kollarıdır (Minkowski çemberleri) (Şekil 4.3).

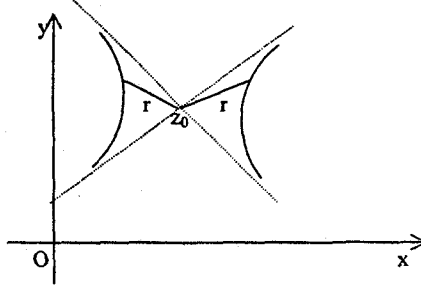


Şekil 4.3. Merkezli Minkowski Çemberleri

Benzer şekilde merkezi z_0 ve yarıçapı r olan Minkowski çemberleri için de

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$$

yazılabilir (Şekil 4.4.)



Şekil 4.4. Merkezi z_0 olan Minkowski çemberleri

Tanım 4.6 (Yay uzunluğu ve daire kesmesi alanı)

$$x^2 - y^2 = 1$$

Minkowski çemberini ele alalım. Öklid düzlemindeki yay uzunluğunun diferensiyeli yerine Minkowski düzleminde

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= |\Delta x^2 - \Delta y^2| \\ &= \left| 1 - \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} \right)^2 \right| \Delta x^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta s = ds$$

olmak üzere
$$ds = \sqrt{|1 - (y')^2|} dx$$

dir. Bu form, formüle göre, $x^2 - y^2 = 1$

çemberi için

$$y^2 = x^2 - 1$$

$$y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$2yy' = 2x$$

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$(y')^2 = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

olur ve buradan

$$s = \int_1^x \sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 - 1}} dx$$

$$s = \int_1^x \sqrt{\frac{x^2 - 1 - x^2}{x^2 - 1}} dx$$

$$s = \int_1^x \sqrt{\frac{-1}{x^2 - 1}} dx$$

$$s = \int_1^x \sqrt{\frac{1}{x^2 - 1}} dx \text{ veya integral alınır}$$

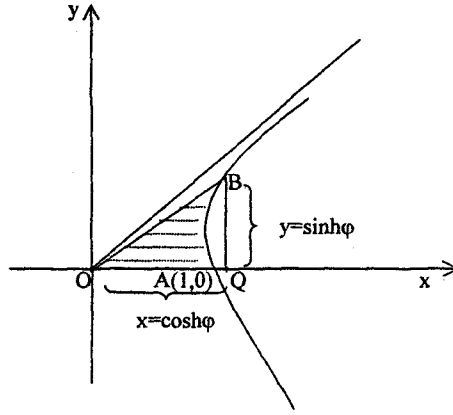
$$\widehat{AB} = s = \arcsin x \Big|_1^x$$

$$= \arcsin x - 1$$

$$= \left| \arcsin x - \frac{\pi}{2} \right|$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

bulunur (Şekil 4.5).



Şekil 4.5.Minkowski çemberinde yay

Minkowski ve Öklid düzlemlerinde alan aynı anlamdadır (Yaglom 1979).

$$S = \text{Alan}(\text{OBA}) = \frac{xy}{2} - \int_1^x y dx$$

$$2S = xy - 2 \int_1^x y dx$$

$$= x \sqrt{x^2 - 1} - 2 \int_1^x \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$2S = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

bulunur. Şu halde
dir.

$$\widehat{AB} = 2S$$

4.1 Minkowski Düzleminde Hareketler

$$L^2 \rightarrow L^2$$

$$P \rightarrow P'$$

$$z = x + \varepsilon y \quad z' = x' + \varepsilon y'$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

ifadesinde x yerine $\varepsilon \varphi$, $\varepsilon^2 = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon \varphi} &= 1 + \varepsilon \varphi + \frac{(\varepsilon \varphi)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon \varphi)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 + \varepsilon \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varepsilon \varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varepsilon \varphi^5}{5!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

$$= \left(1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots \right) + \varepsilon \left(\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots \right)$$

$$e^{\varepsilon \varphi} = \cosh \varphi + \varepsilon \sinh \varphi$$

elde edilir.

$$f_X: K \rightarrow K$$

$$Y \rightarrow f_X(Y) = XY = YX, X = x + \varepsilon y$$

şeklinde tanımlanan f_X dönüşümü lineerdir. f_X lineer dönüşümü kullanılarak K daki $\{1, \varepsilon\}$ bazına göre f_X in matrisi

$$A = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix}$$

dir.

Burada $\varepsilon = 0 + 1\varepsilon$ a karşılık gelen matris $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ olur. Dolayısıyla ε yerine A alınırsa

$$\begin{aligned} \varepsilon \rightarrow A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ e^{A\varphi} &= I + A\varphi + \frac{(A\varphi)^2}{2!} + \frac{(A\varphi)^3}{3!} + \frac{(A\varphi)^4}{4!} + \frac{(A\varphi)^5}{5!} + \frac{(A\varphi)^6}{6!} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \frac{\varphi^6}{6!} + \dots\right) I + \left(\varphi + \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots\right) A \\ &= \cosh \varphi I + \sinh \varphi A \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \varphi & 0 \\ 0 & \cosh \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = e^{A\varphi} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. E^2 düzleminde hareketler için yapılan incelemeyi L^2 için de tekrarlayabiliriz.

$$e^{A\varepsilon} = \cosh \varphi + \varepsilon \sinh \varphi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} z' &= e^{A\varphi} z \\ x' + \varepsilon y' &= (\cosh \varphi + \varepsilon \sinh \varphi)(x + \varepsilon y) \\ x' + \varepsilon y' &= (x \cosh \varphi + y \sinh \varphi) + \varepsilon (x \sinh \varphi + y \cosh \varphi) \\ x' &= x \cosh \varphi + y \sinh \varphi \\ y' &= x \sinh \varphi + y \cosh \varphi \end{aligned}$$

veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dönüşümü L^2 de bir dönme hareketi tanımlar. Bu dönüşümdeki matris, bir Lorentzian dönme hareketi tanımlar (Yaglom, 1979). $z_0 = a + \varepsilon b$ ile tanımlı bir öteleme ile L^2 deki hareketin genel denklemi

$$z' = e^{\varepsilon\varphi} z + z_0 \text{ veya matris formunda}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ch\varphi & sh\varphi & a \\ sh\varphi & ch\varphi & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

veya $Y(\varphi = \varphi(t)) = A(\varphi = \varphi(t)) X(\varphi = \varphi(t)) + C(\varphi = \varphi(t))$,

$$\text{Burada } A(t) = \begin{bmatrix} ch\varphi(t) & sh\varphi(t) \\ sh\varphi(t) & ch\varphi(t) \end{bmatrix}, X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, Y(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix}, C(t) = \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \end{bmatrix}$$

dir. Bu cins dönüşümlerin cümlesi bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba Lorentz transformasyonları grubu denir.

$$L(2) = \left\{ \begin{array}{l} R: L^2 \rightarrow L^2, \quad z = x + \varepsilon y, z' = x' + \varepsilon y' = e^{\varepsilon\varphi} z + z_0 \\ P \rightarrow P', \quad z_0 = a + \varepsilon b, \quad \varepsilon \neq 1, \quad \varepsilon^2 = 1, \varepsilon \notin IR \end{array} \right\}$$

L^2 de katı hareketlerin bir cümlesi olmak üzere $(L(2), o)$ ikilisi bir gruptur (Lorentzian transformasyonlar grubu) (Yaglom, 1979). Böylece şu teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 4.1.1 L^2 deki katı hareketlerin cümlesi bileşke işlemine göre bir gruptur (Cığırım, 1993).

$$\text{İspat: } L(2) = \left\{ \begin{array}{l} R: L^2 \rightarrow L^2, \quad z = x + \varepsilon y, z' = x' + \varepsilon y' = e^{\varepsilon\varphi} z + z_0 \\ P \rightarrow P', \quad z_0 = a + \varepsilon b, \quad \varepsilon \neq 1, \quad \varepsilon^2 = 1, \varepsilon \notin IR \end{array} \right\}$$

L^2 de katı hareketlerin bir cümlesi olmak üzere $(L(2), o)$ ikilisi bir gruptur (Lorentzian transformasyonlar grubu) (Yaglom, 1979).

i) (o) işleminin $L(2)$ de kapalılık özeliği:

$$\forall R_1, R_2 \in L(2) \text{ için } R_1 \circ R_2 \in L(2)$$

dir.

$$R_1 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dir.

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in L(2)$$

dir. Gerçekten

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cosh \varphi_1 & \sinh \varphi_1 \\ \sinh \varphi_1 & \cosh \varphi_1 \end{bmatrix} \in O(2), A_2 = \begin{bmatrix} \cosh \varphi_2 & \sinh \varphi_2 \\ \sinh \varphi_2 & \cosh \varphi_2 \end{bmatrix} \in O(2)$$

için

$$A = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} \cosh \varphi_1 & \sinh \varphi_1 \\ \sinh \varphi_1 & \cosh \varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh \varphi_2 & \sinh \varphi_2 \\ \sinh \varphi_2 & \cosh \varphi_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) & \sinh(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sinh(\varphi_1 + \varphi_2) & \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) \end{bmatrix}$$

bulunur.

ii) (0) işleminin $L(2)$ de birleşme özeliği:

$$\forall R_1, R_2, R_3 \in L(2) \text{ için } (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

dir.

$$R_1 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

için

$$R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \left(\begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 A_3 & A_2 C_3 + C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 A_2 A_3 & A_1 A_2 C_3 + A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 A_3 & A_2 C_3 + C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_1 A_2 & A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (R_1 \circ R_2) \circ R_3$$

olur.

iii.) (0) işleminin $L(2)$ de etkisiz eleman özeliği:

$\forall R \in L(2)$ için $RoI_2 = I_2 \circ R$ olan bir $I_2 \in L(2)$ vardır ve bu

$$I_2 : L^2 \rightarrow L^2$$

özdeşlik dönüşümüdür.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
51 DEKÜMANTASYON MERKEZİ

$$\left. \begin{array}{l} R = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ I_2 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \end{array} \right\} \text{ olmak üzere } RoI = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Ax+Cz & Ay+Ct \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Ax+z=A \\ Ay+Ct=C \\ z=0 \\ t=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Ax=A \Rightarrow x=AA^{-1}=I_2 \\ Ay+C=C \Rightarrow Ay=0 \Rightarrow y=0 \\ z=0 \\ t=1 \end{array}$$

bulunur. Buradan

$$I = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(2)$$

elde edilir.

iv) (o) işleminin $L(2)$ de ters eleman özeliği:

$\forall R \in G(2)$ için $RoR^{-1} = R^{-1}oR = I$ olacak şekilde bir $R^{-1} \in L(2)$ vardır.

$$R = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R^{-1} = \begin{bmatrix} u & v \\ y & z \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$RoR^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Au + Cy & Av + Cz \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Au + Cy = I_2 \\ Av + Cz = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} Au + Cy = I_2 \Rightarrow Au \Rightarrow I_2 \Rightarrow u = I_2 A^{-1} \Rightarrow u = A^{-1} \\ Av + Cz = 0 \Rightarrow Av = -CI_2 \Rightarrow v = -CA^{-1} \end{array}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -CA^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } R^{-1} \in L(2)$$

elde edilir.

$$A = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} \text{ olmak üzere}$$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dır. Buradan

$$x \cosh \varphi + z \sinh \varphi = 1$$

$$y \cosh \varphi + t \sinh \varphi = 0$$

$$y \sinh \varphi + z \cosh \varphi = 0$$

$$y \sinh \varphi + t \cosh \varphi = 0$$

elde edilir. Böylece,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sinh \varphi \\ 0 & \cosh \varphi \end{vmatrix}}{1} = \cosh \varphi$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sinh \varphi \\ 1 & \cosh \varphi \end{vmatrix}}{1} = -\sinh \varphi$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} \cosh \varphi & 1 \\ \sinh \varphi & 0 \end{vmatrix}}{1} = -\sinh \varphi$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} \cosh \varphi & 0 \\ \sinh \varphi & 1 \end{vmatrix}}{1} = \cosh \varphi$$

bulunur ve

$$A = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix}$$

matrisinin tersi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix}$$

dir.

$$-A^{-1}C = -\begin{bmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\cosh \varphi & \sinh \varphi \\ \sinh \varphi & -\cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a \cosh \varphi + b \sinh \varphi \\ a \sinh \varphi - b \cosh \varphi \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & -a \cosh \varphi + b \sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & a \sinh \varphi + b \cosh \varphi \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $(L(2), o)$ ikilisi bir grup oluşturur. Bu gruba Lorentz transformasyonları grubu denir. Buradan şu tanımlı verebiliriz.

Tanım 4.1.1(Minkowski Geometrisi): Lorentzian grup altında L^2 deki değişmezlerin teorisine Minkowski geometrisi denir.

Tanım 4.1.2. (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

Genel hareketin denklemi, $A = A(t) \in L(2)$ ve $C = C(t) \in \mathbb{R}^2_1$ olmak üzere

$$Y = A X + C \quad \dots\dots\dots (I)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983). Bu denklemin t ye göre türevi alınır

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dA}{dt} X + A \frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt} \quad \dots\dots\dots (II)$$

olur. Burada

$$V_a = \frac{dY}{dt} \text{ ye hareketin mutlak hızı,}$$

$$V_r = A \frac{dX}{dt} \text{ ye hareketin rölatif hızı,}$$

$$V_f = \frac{dA}{dt} X + \frac{dC}{dt} \text{ ye de hareketin sürüklenme hızı denir.}$$

Tanım 4.1.3 (Rölatif hız) X noktasının Lorentz düzlemine göre hız vektörüne, yani X noktası L deki yörüngesini çizirken sahip olduğu vektörel hız X noktasının izafi (rölatif) hızı denir ve V_r ile gösterilir.

Tanım 4.1.4 (Mutlak Hız) X noktasının L' sabit düzlemine göre hızına X noktasının mutlak hızı denir ve V_a ile gösterilir.

Böylece, V_a, V_f, V_r hız vektörleri arasında

$$V_a = V_f + V_r$$

bağıntısı elde edilir.

Eğer X noktası L hareketli düzleminde sabit bir nokta ise $V_r = 0$ olacağından $V_a = V_f$ olur.

Hızlar kanunu : Yukarıdaki bağıntıyı bir teoremle ifade edebiliriz. Bu bağıntı, $B_1 = L/L'$, hareketinde hızlar kanunu adını alır.

Teorem 4.1.2 Bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile izafi hız vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$V_a = V_f + V_r$$

dir.

4.2 Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri

Lorentz anlamında bir parametrelili $B_1 = L/L'$, hareketinde L de sabit bir X noktasının her t anında V_f sürüklenme hızının sıfır olduğu noktalar hareketli ve sabit düzlemde sabit noktalardır.

Teorem 4.2.1 Açısal hızı sıfır olmayan bir $B_1 = L/L'$, hareketinde, her t anında her iki düzlemde sabit kalan bir tek nokta vardır.

İspat: $X \in L$ noktası L de sabit olacağından $V_r = 0$ ve aynı nokta L' düzleminde de sabit olacağı için $V_f = 0$ olacaktır. O halde bu cins noktalar için $V_f = 0$ ise

$$V_f = 0 \Rightarrow \dot{A}X + \dot{C} = 0$$

$$\Rightarrow X = -\dot{A}^{-1}\dot{C} \dots\dots\dots(III)$$

olur. Gerçekten,

$$A = \begin{bmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{bmatrix}, \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} sh\varphi & \dot{\varphi} ch\varphi \\ \dot{\varphi} ch\varphi & \dot{\varphi} sh\varphi \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$\dot{A} = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} sh\varphi & ch\varphi \\ ch\varphi & sh\varphi \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix}$$

$\det \dot{A} = \dot{\varphi}$, $\varphi \neq \text{sabit}$ alınırsa $\det \dot{A} \neq 0$ ve dolayısı ile $\dot{A}$ regüler yani $\dot{A}^{-1}$ mevcut olur

ve

$$\dot{A}^{-1} = \frac{1}{\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} -sh\varphi & ch\varphi \\ ch\varphi & -sh\varphi \end{bmatrix}$$

dır. Dolayısıyla $V_f = 0$ denkleminin bir tek X çözümü vardır. Bu X noktasına hareketli

düzlemdeki pol noktası denir. Bu nedenle (III) den

$$X = P = \frac{1}{\dot{\varphi}} \begin{bmatrix} \dot{a} sh\varphi - \dot{b} ch\varphi \\ -\dot{a} ch\varphi + \dot{b} sh\varphi \end{bmatrix}$$

veya vektörel olarak

$$X = P = \frac{1}{\dot{\varphi}} (\dot{a} sh\varphi - \dot{b} ch\varphi, -\dot{a} ch\varphi + \dot{b} sh\varphi)$$

ve sabit düzlemdeki pol noktası (I) den

$$P' = AP + C$$

dir. Bu değerler yerlerine yazılır ve hesaplanırsa

$$Y = P' = \frac{1}{\varphi} \begin{bmatrix} -\dot{b} \\ -\dot{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

veya vektörel olarak

$$Y = P' = \left(\frac{-\dot{b}}{\dot{\phi}} + a, \frac{-\dot{a}}{\dot{\phi}} + b \right)$$

bulunur. Burada $\forall t$ için $\dot{\phi}(t) \neq 0$ kabul ediyoruz. Yani, açısal hız sıfır olmasın. Bu durumda her t anında hareketli ve sabit düzlemlerin her birinde bir tek pol noktasının olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 4.2.1 $P = (p_1, p_2)$ noktasına, $B_1 = L/L'$, bir parametrelili Lorentz hareketinin t anındaki poli veya ani dönme merkezi denir.

Teorem 4.2.2 P polünden X noktasına giden pol ışını, $\forall t$ anında

V_f sürüklenme hız vektörüne Lorentz anlamında diktir.

İspat: $V_f = \dot{A}A^{-1} P'Y = \dot{\phi}((y_2 - p_2), -(y_1 - p_1))$

bulunur.

$$P'Y = ((y_1 - p_1), (y_2 - p_2))$$

dır. Buna göre,

$$\langle V_f, P'Y \rangle = 0$$

bulunur.

Teorem 4.2.3 V_f sürüklenme hız vektörünün boyu

$$\|V_f\| = |\dot{\phi}| \|P'Y\|$$

dir.

İspat: $V_f = \dot{\phi}((y_2 - p_2), -(y_1 - p_1))$

$$\begin{aligned} \|V_f\| &= |\dot{\phi}| \sqrt{(y_2 - p_2)^2 - (y_1 - p_1)^2} \\ &= |\dot{\phi}| \|P'Y\| \end{aligned}$$

dır.

Teorem 4.2.4 Hareketli L düzleminin her X noktası, t anında P merkezli ve $\dot{\phi}$ açısal hızlı bir Lorentz dönme hareketi yapar.

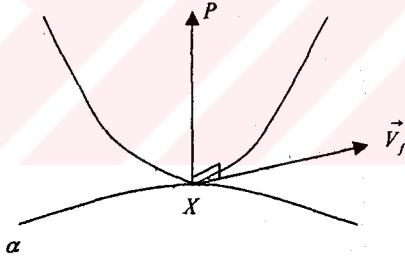
X , L nin tamamen keyfi bir noktası olduğundan aşağıdaki teoremi de verebiliriz.

Teorem 4.2.5 Bir parametrelili bir Lorentz hareketi, t anında hareketli L düzleminin L' ye göre hareketi P ani dönme polü etrafında $\dot{\phi}$ açısal hızı ile belli olan bir dönmeden ibarettir.

İspat: Teorem 4.2.3 ten dolayı ispat aşıkardır.

Teorem 4.2.6 $B_1 = \frac{L}{L'}$, hareketinde L düzlemin X noktaları, L' sabit düzleminde normaleri P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler (Şekil 4.2.1).

İspat: Teorem 4.2.2 den dolayı ispat aşıkardır.



Şekil 4.2.1. Normaleri P polünden geçen yörüngeler

Tanım 4.2.3 Her t anında α ve α' gibi iki eğri birbirine teğet ve bu iki eğriyi çizen noktanın bu eğriler üzerinde dt kadar zamanda aldıkları ds ve ds' yolları aynı ise α ve α' eğrilerine birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanıyorlar denir.

Teorem 4.2.8 Bir parametrelili düzlemsel bir $B_1 = L/L'$ Lorentz hareketinde L düzleminin (P) hareketli pol eğrisi L' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat : Bir eğrinin yay elementinin tanımına göre (P) nin yay elementi $ds = \|V_r\|$ ve (P') nün ki de $ds' = \|V_a\|$ dir. (P) ve (P') için $V_a = V_r$ olduğundan $ds = ds'$ dır.

Bu teoreme göre, zamandan bahsetmeden bir Lorentz hareketini tanımlayabiliriz. Bir $B_1 = L/L'$ Lorentz hareketi, L nin (P) hareketli pol eğrisi, L' nün (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması ile elde edilebilir.

Tanım 4.2.4 X noktasının L' sabit Minkowski düzlemine göre mutlak ivme vektörü $\dot{V}_a$ dir. Bu vektör b_a ile gösterilecektir.

$$V_a = \dot{Y} \text{ idi}$$

$$b_a = \dot{V}_a = \ddot{Y}$$

dir.

Tanım 4.2.5 X , L hareketli Minkowski düzleminin sabit bir noktası olsun. X noktasının L' sabit Minkowski düzlemine göre, ivme vektörüne sürüklenme ivme vektörü diyeceğiz ve b_f ile göstereceğiz

Sürüklenme ivmesinin hesabında X , L nin sabit bir noktası olduğundan

$$b_f = \dot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C}$$

olur.

4.3 İvmeler ve İvmelerin Birleşimi

L Minkowski düzleminin L' düzlemine göre $B_1 = L/L$, Minkowski hareketi mevcut olsun. Bu hareket esnasında L düzlemine göre, dolayısıyla da L' düzlemine göre hareket eden bir X noktası göz önüne alınsın. X in hareketiyle elde edilen hız formülleri elde edilmişti şimdi ise X noktasının ivmesi incelenecektir.

Tanım 4.3.1 X noktasının L hareketli düzlemine göre V_r rölatif hız vektörünün türevi alınarak elde edilen

$$V_r = A\dot{X}$$

$$b_r = \dot{V}_r = A\ddot{X}$$

vektörüne X in L deki rölatif ivme vektörü diyecek ve onu b_r ile göstereceğiz.

Bu türev alınırken X noktası L de hareket eden bir nokta olarak düşünüldüğünden A matrisi sabit olarak alınmıştır.

Teorem 4.3.1 L hareketli Minkowski düzleminde bir t parametresine göre hareket eden bir nokta X olsun

$$b_a = b_f + b_c + b_r$$

dir (Burada $b_c = 2\dot{A}\dot{X}$ olup buna Minkowski anlamında Coriolis ivmesi adını vereceğiz).

Sonuç 4.3.1 Bir $X \in L$ noktası L de sabit ise, X noktasının sürüklenme ivmesi bu noktanın mutlak ivmesine eşittir.

İspat :

$$V_a = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C} \quad \text{idi}$$

her iki tarafın türevi alınırsa

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \dot{A}\dot{X} + \dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} + \ddot{C}$$

X noktası sabit olduğundan türevleri sıfırdır.

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \ddot{C} = b_f$$

dir.

Teorem 4.3.2 b_c Coriolis ivme vektörü, V_r rölatif hız vektörüne Minkowski anlamında diktir.

İspat:

$$\begin{aligned} b_c &= 2\dot{A}\dot{X} \\ &= 2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} sh\varphi & ch\varphi \\ ch\varphi & sh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \\ &= 2\dot{\varphi} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 sh\varphi + \dot{X}_2 ch\varphi \\ \dot{X}_1 ch\varphi + \dot{X}_2 sh\varphi \end{bmatrix} \\ &= 2\dot{\varphi} (\dot{X}_1 sh\varphi + \dot{X}_2 ch\varphi, \dot{X}_1 ch\varphi + \dot{X}_2 sh\varphi) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} V_r &= A\dot{X} \\ &= \begin{bmatrix} ch\varphi & sh\varphi \\ sh\varphi & ch\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \\ &= (\dot{X}_1 ch\varphi + \dot{X}_2 sh\varphi, \dot{X}_1 sh\varphi + \dot{X}_2 ch\varphi) \end{aligned}$$

bu değerlerle Minkowski anlamında iç çarpımı yapılırsa

$$\langle V_r, b_c \rangle = 0$$

olduğu görülür.

Sonuç 4.3.2 L hareketli Minkowski düzleminde, X hareketli noktasının Coriolis ivmesi sıfır ise, B_1 hareketi bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat: X noktasının b_c Coriolis ivme vektörü

$$\begin{aligned}
 b_c &= 2\dot{A}\dot{X} \\
 &= 2\dot{\phi} \begin{bmatrix} sh\phi & ch\phi \\ ch\phi & sh\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \\
 &= 2\dot{\phi} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 sh\phi + \dot{X}_2 ch\phi \\ \dot{X}_1 ch\phi + \dot{X}_2 sh\phi \end{bmatrix} \\
 &= 2\dot{\phi} (\dot{X}_1 sh\phi + \dot{X}_2 ch\phi, \dot{X}_1 ch\phi + \dot{X}_2 sh\phi) = 0 \\
 &\Rightarrow \dot{\phi} = 0 \\
 &\Rightarrow \phi \text{ sabittir, yani } B_1 = L/L, \text{ hareketi sadece kaymadan ibarettir.}
 \end{aligned}$$

Tersine $B_1 = L/L$, hareketi sadece bir kaymadan ibaret ise $\phi = \text{sabit}$ olur. Bu da $\dot{\phi} = 0$ demektir. $\dot{\phi} = 0$ olması $b_c = 0$ olması demektir.

4.4 Birinci ve ikinci İvme Polleri

$\dot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü bize birinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_f &= \ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C} \\
 \dot{A} &= \dot{\phi} \begin{bmatrix} sh\phi & ch\phi \\ ch\phi & sh\phi \end{bmatrix}, \\
 \ddot{A} &= \begin{bmatrix} \dot{\phi}^2 ch\phi + \ddot{\phi} sh\phi & \dot{\phi}^2 sh\phi + \ddot{\phi} ch\phi \\ \dot{\phi}^2 sh\phi + \ddot{\phi} ch\phi & \dot{\phi}^2 ch\phi + \ddot{\phi} sh\phi \end{bmatrix}, |\ddot{A}| = \dot{\phi}^4 - \ddot{\phi}^2 \\
 \ddot{A}^{-1} &= \frac{1}{\dot{\phi}^4 - \ddot{\phi}^2} \begin{bmatrix} \dot{\phi}^2 ch\phi + \ddot{\phi} sh\phi & -\dot{\phi}^2 sh\phi - \ddot{\phi} ch\phi \\ -\dot{\phi}^2 sh\phi - \ddot{\phi} ch\phi & \dot{\phi}^2 ch\phi + \ddot{\phi} sh\phi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

bu değerler $X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$ de yerlerine yazılırsa

$$X = P_1 = \frac{1}{\ddot{\phi}^2 - \dot{\phi}^4}.$$

$$(\ddot{a}(\dot{\phi}^2 ch\phi + \ddot{\phi} sh\phi) - \ddot{b}(\dot{\phi}^2 sh\phi + \ddot{\phi} ch\phi), -\ddot{a}(\dot{\phi}^2 sh\phi + \ddot{\phi} ch\phi) + \ddot{b}(\dot{\phi}^2 ch\phi + \ddot{\phi} sh\phi))$$

şeklinde olur. Burada P_1 e hareketli düzlemdeki birinci mertebeden pol eğrisi denir.

Sabit düzlemdeki pol eğrisi (P'_1) ile gösterilirse

$$P'_1 = AP_1 + C$$

den

$$P'_1 = \left(\frac{1}{\ddot{\phi}^2 - \dot{\phi}^4} (\ddot{a}\dot{\phi}^2 - \ddot{b}\ddot{\phi}) + a, \frac{1}{\ddot{\phi}^2 - \dot{\phi}^4} (\ddot{b}\dot{\phi}^2 - \ddot{a}\ddot{\phi}) + b \right)$$

bulunur.

$\ddot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü ise bize ikinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\ddot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$$

dir. Bu değerler hesaplanır yerlerine konulursa X in değeri L hareketli düzlemdeki ikinci mertebeden ivme polünü verir ve P_2 ile gösterilir.

$$P_2 = \frac{1}{(\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi})^2 - (3\dot{\phi}\ddot{\phi})^2} (\ddot{a}(3\dot{\phi}\ddot{\phi}ch\phi + (\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi})sh\phi) - \ddot{b}(3\dot{\phi}\ddot{\phi}sh\phi - (\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi})ch\phi),$$

$$(\ddot{a}(-3\dot{\phi}\ddot{\phi}sh\phi - (\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi})ch\phi) + \ddot{b}(3\dot{\phi}\ddot{\phi}ch\phi + (\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi})sh\phi))$$

sabit düzlemdeki pol eğrisi P'_2 ile gösterilirse

$$P'_2 = AP_2 + C$$

den

$$P'_2 = \frac{1}{(\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi})^2 - (3\dot{\phi}\ddot{\phi})^2} (3\ddot{a}\dot{\phi}\ddot{\phi} - \ddot{b}(\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi}) + a, 3\ddot{b}\dot{\phi}\ddot{\phi} - \ddot{a}(\dot{\phi}^3 + \ddot{\phi}) + b)$$

elde edilir.

5. GALİLE GEOMETRİSİ

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

bir nokta cümlesidir. E. Study (1862-1930)'nin keşfettiği

$$D = \{z \mid z = x + ey, x, y \in \mathbb{R}, e^2 = 0, e \neq 0, e \notin \mathbb{R}\}$$

cümlesi $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olduğunu biliyoruz.

$O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere

$$\Psi : \{O\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow D$$

eşlemesi ile $\mathbb{R}^2$ nokta cümlesi bir afin uzaydır (Yaglom, 1979).

Teorem 5.1 D üzerinde

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : D \times D \rightarrow D$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \bar{z}_2$$

$$z_1 = x_1 + ey_1, \bar{z}_1 = x_1 - ey_1$$

olmak üzere

$$z_1 \bar{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + e(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

olarak tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ işlemi D üzerinde indefinit iç çarpım işlemidir

(Hacısalıhoğlu, 1984).

İspat : i) Konjuge simetri özeliği :

$\forall z_1, z_2 \in D$ için

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \overline{\langle z_2, z_1 \rangle}$$

$$\langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \bar{z}_2 = x_1 x_2 + e(x_2 y_1 - x_1 y_2)$$

$$\langle z_2, z_1 \rangle = z_2 \bar{z}_1$$

$$= (x_2 + ey_2)(x_1 - ey_1)$$

$$= x_2 x_1 - e(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$

$$\langle z_2, z_1 \rangle = x_2 x_1 - e(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$

$$\overline{\langle z_2, z_1 \rangle} = x_2 x_1 + e(y_1 x_2 - x_1 y_2)$$

olduğundan

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \overline{\langle z_2, z_1 \rangle}$$

dir.

ii) Bilineerlik özeliği:

$$a) \langle cz_1, z_2 \rangle = c \langle z_1, z_2 \rangle, c \in D$$

dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \langle cz_1, z_2 \rangle &= c z_1 \bar{z}_2 \\ &= (cx_1 + cey_1)(x_2 - ey_2) \\ &= c[(x_2x_1 + e(x_2y_1 - x_1y_2))] \\ &= c \langle z_1, z_2 \rangle \\ \langle z_1, cz_2 \rangle &= \bar{c} \langle z_1, z_2 \rangle \end{aligned}$$

olduğu da benzer biçimde gösterilebilir.

$$b) \langle z_1 + z_2, z_3 \rangle = \langle z_1, z_3 \rangle + \langle z_2, z_3 \rangle$$

dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \langle z_1 + z_2, z_3 \rangle &= (z_1 + z_2) \bar{z}_3 \\ &= [(x_1 + ey_1) + (x_2 + ey_2)] (x_3 - ey_3) \\ &= [(x_1 + x_2) + e(y_1 + y_2)] (x_3 - ey_3) \\ &= (x_1 + x_2)x_3 + e[(y_1 + y_2)x_3 - (x_1 + x_2)y_3] \\ &= x_1x_3 + x_2x_3 + ex_3y_1 + ex_3y_2 - ex_1y_3 - ex_2y_3 \\ &= x_1x_3 + e(x_3y_1 - x_1y_3) + x_2x_3 + e(x_3y_2 - x_2y_3) \\ &= \langle z_1, z_3 \rangle + \langle z_2, z_3 \rangle \end{aligned}$$

bulunur.

iii) İndefinit özeliği :

$\forall z \in D$ için

$$\langle z, z \rangle \geq 0$$

dır.

$$\begin{aligned}\langle z, z \rangle &= z \bar{z} \\ &= x^2 \geq 0\end{aligned}$$

dır.

$$z \neq 0 \begin{cases} \rightarrow z = x + ey \Leftrightarrow \langle z, z \rangle > 0 \\ \rightarrow z = 0 + ey \Leftrightarrow \langle z, z \rangle = 0 \end{cases}$$

dır.

$$\langle z, z \rangle = 0 = z \bar{z} = x^2 \Leftrightarrow x = 0, y = 0, z = 0 + ey$$

dır. $y \neq 0$ olabilir. O halde

$$\langle z, z \rangle = 0 \Rightarrow z = 0$$

dır. Şu halde bu $\langle, \rangle$ işlemi D' de pozitif definit değildir.

Tanım 5.1 $\langle, \rangle : D \times D \rightarrow D$

$$\begin{aligned}(z_1, z_2) &\rightarrow \langle z_1, z_2 \rangle = z_1 \bar{z}_2 \\ &= x_1 x_2 + e(x_2 y_1 - x_1 y_2)\end{aligned}$$

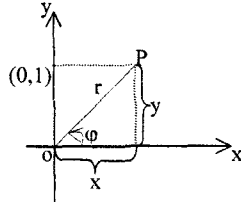
işlemine göre,

$$\phi(O, P) = z = x + ey$$

ile tanımlanan P noktasının O başlangıç noktasına olan uzaklığı (norm)

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt{\langle z, z \rangle}, \quad r = |z| \\ &= \sqrt{\langle z \bar{z} \rangle} \\ &= \sqrt{x^2} \\ |z| &= |x|\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır (Şekil 5.1.).



Şekil 5.1. G^2 de norm

Tanım 5.2. $\{ \mathbb{R}^2, D, \langle \cdot \rangle \}$ üçlüsüne Galile düzlemi denir ve G^2 ile gösterilir (Yaglom 1979).

Tanım 5.3. $z \in D$ olmak üzere $\forall z \in D$ nin

$$\begin{aligned} z &= x + ey \\ &= x(1 + e0) + (0 + e)y \\ &= x(1, 0) + (0, e)y \end{aligned}$$

olarak düşünülmesiyle D deki bir bazın $\{(1, 0), (0, e)\}$ olduğu görülür. Dolayısıyla D cümlesi $\mathbb{R}$ üzerinde iki boyutlu vektör uzayıdır.

$$z = x + ey, r = |z| = |x|$$

$$= r \left(\frac{x}{r} + e \frac{y}{r} \right)$$

ve $r = x$ olduğunda

$$z = r \left(1 + \frac{ey}{r} \right), x \neq 0$$

yazılabilir. Burada

$$x = r \cos \phi \text{ (Galile anlamında cosinüs)}$$

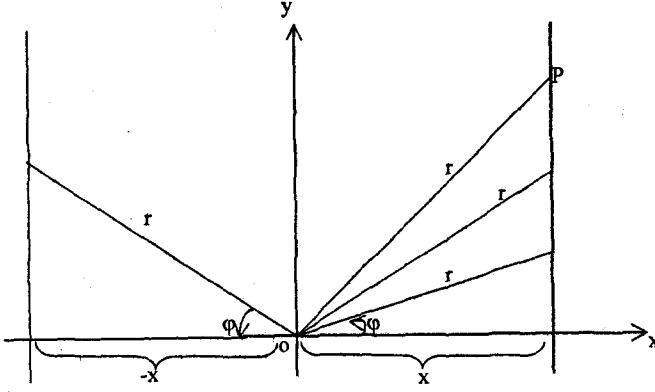
$$y = r \sin \phi \text{ (Galile anlamında sinüs)}$$

dir. Bütün ϕ 'ler için $\cos \phi = 1$ ve $\sin \phi = \phi$ olduğu görülebilir.

Zira Öklid anlamındaki $\cos \phi$ ve $\sin \phi$ için ϕ açısı sıfıra yaklaştığı zaman yani $\phi \rightarrow 0$ için

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \cos \phi = 1 \text{ ve } \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{\phi} = 1$$

olduğunu biliyoruz (Şekil 5.2.).



Şekil 5.2. G^2 de merkezli çemberler ve φ açısı

diğer taraftan $d(o, p) = |x|$ olduğundan

$$\cos g\varphi = \frac{x}{d(o, p)} = \frac{x}{x} = 1, \quad \cos g\varphi = \frac{-x}{-x} = 1$$

olur. Bu şekilde devam ederek Galile trigonometrisi işlenebilir ve bu trigonometride

$\forall \varphi \in \mathbb{R}$ için $\cos g\varphi = 1$ ve $\sin g\varphi = \frac{y}{x} = \varphi$ alınabileceği gösterilir. Gerçekten

$$z = x + ey$$

$$z = x(1 + \frac{e\varphi}{x})$$

$$z = x(1 + e\varphi)$$

$$e^z = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

ifadesinde x yerine $e\varphi$ alınırsa $e^2 = 0$ olduğundan

$$e^{e\varphi} = 1 + e\varphi + \underbrace{\frac{(e\varphi)^2}{2!} + \frac{(e\varphi)^3}{3!} + \dots}_{=0}$$

$$e^{e\varphi} = 1 + e\varphi$$

olur. Buda $z = re^{i\varphi}$, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + e \sin\varphi$

$$z = r(\cos\varphi + e \sin\varphi)$$

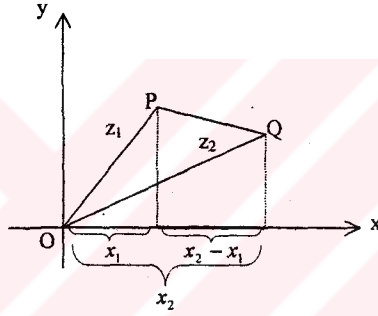
yazılır. Bu da φ açısı için $\cos\varphi = 1$ ve $\sin\varphi = \varphi$ olduğunun ispatıdır. φ açısına $z = x + ey$ dual sayısının argümanı denir ve $\text{Argz} = \varphi$ yazılır (Yaglom, 1979).

Tanım 5.4 (G^2 de iki nokta arasındaki uzaklık):

G^2 de iki nokta P ve Q olmak üzere P ve Q noktaları arasındaki uzaklık

$$\begin{aligned} d(P, Q) &= |z_2 - z_1| \\ &= |(x_1 + ey_1) - (x_1 + ey_1)| \\ &= |x_2 - x_1 + e(y_2 - y_1)| \\ &= |x_2 - x_1| \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle $\{(1,0) = 1 + e0, (0,1) = 0 + e\}$ sistemi normal değildir (Şekil 5.3)

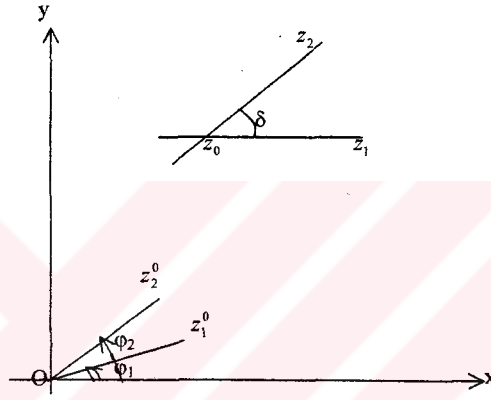


Şekil 5.3. G^2 de iki nokta arasındaki uzaklık

Tanım 5.5 (G^2 de iki doğru arasındaki açı) : O yerine keyfi bir $z_0 = x_0 + ey_0$ noktası alınabilir. Bu durumda QOP açısını hesaplayalım. Bunu için ya z_0 noktasını başlangıç noktası olarak seçeriz ya da z_0 noktası O ya gelecek şekilde $z_2 - z_0$ ve $z_1 - z_0$ parçalarını paralel kaydırırsak

$$\begin{aligned}\delta &= \varphi_2 - \varphi_1 \\ &= \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1} \\ &= \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 x_2}\end{aligned}$$

olur (Şekil 5.4.).



Şekil 5.4. İki doğru arasındaki açı

Tanım 5.6 (Galile çemberleri): G^2 de merkezi O ve yarıçapı r olan çemberlerin denklemi

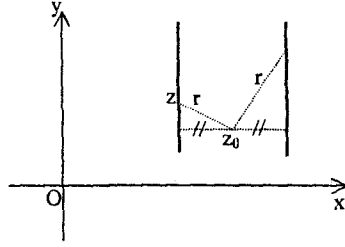
$$\begin{aligned}|z| &= r \\ |x| &= r\end{aligned}$$

$$x = \pm r$$

dir veya merkezi z_0 ve yarıçapı r olan bir çemberlerin denklemleri

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2$$

dir. Şu halde Öklid anlamındaki paralel iki doğru (z_0 noktasından eşit uzaklıktaki) Galile çemberleridir (Şekil 5.5).

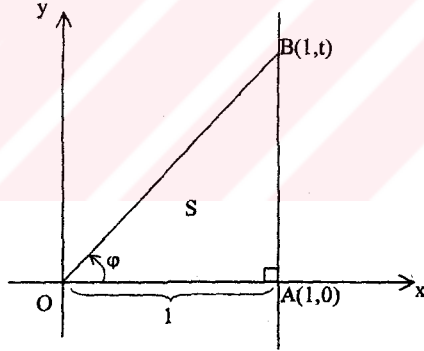


Şekil 5.5. Galile çemberleri

Tanım 5.7 G^2 de yay uzunluğu ve daire kesmesinin alanı): φ açısının gördüğü yay OAB dik üçgeninde

$$\frac{AB \cdot 1}{2} = S \Rightarrow AB = 2S$$

dir (Şekil 5.6).



Şekil 5.6. Yay uzunluğu

5.1 Galile Düzleminde Hareketler

$$G^2 \longrightarrow G^2$$

$$P \longrightarrow P'$$

$$z = x + ey \longrightarrow z' = x' + ey'$$

$e^{e\varphi} = 1 + e\varphi$ olmak üzere E^2 deki düşünce ile

$$z' = e^{e\varphi} z$$

$$x' + ey' = (1 + e\varphi)(x + ey)$$

$$= x + e(\varphi x + y)$$

dır. İki dual sayının eşitliği tanımından

$$x' = x$$

$$y' = \varphi x + y$$

veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dönüşümüne G^2 de SHEAR (Kırpma) adı verilir (Yaglom 1979). Burada

$$e \rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ olur. Buradan, } A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = \dots A^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$e^{A\varphi} = I + A\varphi + \underbrace{\frac{(A\varphi)^2}{2!} + \frac{(A\varphi)^3}{3!} + \frac{(A\varphi)^4}{4!} + \dots}_{=0}$$

$$= I + A\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \varphi$$

$$e^{A\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Harekette öteleme de yer alabilir.

$$z' = e^{A\varphi} z + z_0, \quad z_0 = a + eb$$

konumu ile G^2 de bir genel hareket (ötelemeli dönme)

$$x' = x + 0y + a$$

$$x' = \varphi x + y + b$$

veya matris formunda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ \varphi & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan bir dönüşümdür.

Teorem 5.1.1 G^2 de

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ \varphi & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanan dönüşümlerin cümlesi bileşim işlemine göre bir grup oluşturur
(Galile grubu).

İspat: $G(2) = \{R | R : G^2 \rightarrow G^2, z = x + ey, z' = x' + ey' = e^{e\varphi} z + z_0, z_0 = a + eb\}$

$$P \rightarrow P'$$

i) (o) işleminin $G(2)$ de kapalılık özeliği:

$$\forall R_1, R_2 \in G(2) \text{ için } R_1 \circ R_2 \in G(2)$$

dir.

$$R_1 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ve } A_1 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_1 + \varphi_2 & 1 \end{bmatrix} \in G(2)$$

dir.

$$R_1 \circ R_2 = \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 & A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(2)$$

dir. Burada $A_1 C_2 + C_1 = C$ ötelemedir.

ii) (0) işleminin $G(2)$ de birleşme özeliği:

$$\forall R_1, R_2, R_3 \in G(2) \text{ için } (R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$$

dir.

$$\begin{aligned} (R_1 \circ R_2) \circ R_3 &= \left(\begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 A_2 & A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 A_2 A_3 & A_1 A_2 C_3 + A_1 C_2 + C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 A_3 & A_2 C_3 + C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_1 & C_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} A_2 & C_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_3 & C_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= R_1 \circ (R_2 \circ R_3) \end{aligned}$$

olur.

iii.) (0) işleminin $G(2)$ de etkisiz eleman özeliği:

$\forall R \in G(2)$ için $R \circ I_2 = I_2 \circ R$ olan bir $I_2 \in G(2)$ vardır. Ve bu

$$I_2 : G^2 \rightarrow G^2$$

özdeşlik dönüşümüdür.

$$RoI = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Ax + Cz = A \\ Ay + Ct = C \\ z = 0 \\ t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Ax = A \Rightarrow x = AA^{-1} = I_2 \\ Ay + C = C \Rightarrow Ay = 0 \Rightarrow y = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{array} \right\}$$

bulunur. Buradan

$$I = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in G(2)$$

elde edilir.

iv) (o) işleminin $G(2)$ de ters eleman özeliği:

$\forall R \in G(2)$ için $RoR^{-1} = R^{-1}oR = I$ olacak şekilde bir $R^{-1} \in G(2)$ vardır.

$$R = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R^{-1} = \begin{bmatrix} u & v \\ y & z \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$RoR^{-1} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Au + Cy & Av + Cz \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Au + Cy = I_2 \\ Av + Cz = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} Au + Cy = I_2 \Rightarrow Au \Rightarrow I_2 \Rightarrow u = I_2 A^{-1} \Rightarrow u = A^{-1} \\ Av + Cz = 0 \Rightarrow Av = -CI_2 \Rightarrow v = -CA^{-1} \\ z = 0 \\ t = 1 \end{array} \right\}$$

bulunur. Buradan

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -CA^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } R^{-1} \in G(2)$$

elde edilir. A ve A^{-1} matrislerini hesaplayalım.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } \det A = 1, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan.

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}}{\det A} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Ayrıca

$$-A^{-1}C = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \varphi & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ a\varphi - b \end{bmatrix}$$

dir. Buradan $R = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ise

$$R^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -CA^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ -\varphi & 1 & a\varphi - b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $(G(2), o)$ ikilisi bir gruptur ve bu gruba Galile grubu adı verilir.

Tanım 5.1.1 Galile grubu altında G^2 de değişmezlerin teorisine Galile geometrisi denir.

Bu değişmezlerden bir kaçışunlardır.

- i) Doğru olma özeliği korunur.
- ii) Doğruların paralelliği korunur.
- iii) Doğru parçalarını bölme oranı korunur.
- iv) Alanların büyüklükleri korunur.

Tanım 5.1.2. (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

Genel hareketin denklemi , $A = A(t) \in G(2)$, $C = C(t) \in R_1^2$ olmak üzere

$$Y = A X + C \quad \dots\dots\dots (1)$$

dir (Hacısalihoğlu 1983). Bu denklemin t ye göre türevi alınır

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dA}{dt} X + A \frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt} \quad \dots\dots\dots (II)$$

olur. Burada

$$V_a = \frac{dY}{dt} \text{ ye } \underline{\text{hareketin mutlak hızı}},$$

$$V_r = A \frac{dX}{dt} \text{ ye } \underline{\text{hareketin rölatif hızı}},$$

$$V_f = \frac{dA}{dt} X + \frac{dC}{dt} \text{ ye de hareketin } \underline{\text{sürüklenme hızı}} \text{ denir.}$$

Tanım 5.1.3 (Rölatif hız) X noktasının Galile düzlemine göre hız vektörüne, yani X noktası G deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hız X noktasının izafi (rölatif) hızı denir ve V_r ile gösterilir.

Tanım 5.1.4 (Mutlak Hız) X noktasının G' sabit düzlemine göre hızına X noktasının mutlak hızı denir ve V_a ile gösterilir.

Böylece, V_a, V_f, V_r hız vektörleri arasında

$$V_a = V_f + V_r$$

bağıntısı elde edilir.

Eğer X noktası G hareketli düzleminde sabit bir nokta ise $V_r = 0$ olacağından $V_a = V_f$ olur.

Hızlar kanunu : Yukarıdaki bağıntıyı bir teoremle ifade edebiliriz. Bu bağıntı $B_1 = G/G'$ hareketinde hızlar kanunu adını alır.

Teorem 5.1.2 Bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile izafi hız vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$V_a = V_f + V_r$$

dir.

Tanım 5.1.5 X noktasının G' sabit Galile düzlemine göre mutlak ivme vektörü V_a dır. Bu vektör b_a ile gösterilecektir.

$$V_a = \dot{Y}$$

den

$$b_a = \dot{V}_a = \dot{Y}$$

dir.

Tanım 5.1.6 G hareketli Galile düzleminin sabit bir noktası X olsun. X noktasının G' sabit Galile düzlemine göre, ivme vektörüne sürüklenme ivme vektörü diyeceğiz ve onu b_f ile göstereceğiz.

Sürüklenme ivmesinin hesabında X noktası G nin sabit bir noktası olacağından

$$b_f = \dot{V}_f = \ddot{AX} + \ddot{C}$$

olur.

5.2 İvmeler ve İvmelerin Birleşimi

G Galile düzleminin G' düzlemine göre $B_1 = G/G'$, Galile hareketi mevcut olsun. Bu hareket esnasında G düzlemine göre, dolayısıyla da G' düzlemine göre hareket eden bir X noktası göz önüne alınsın . X in hareketiyle elde edilen hız formülleri elde edilmişti şimdi ise X noktasının ivmesi incelenecektir.

Tanım 5.2.1 X noktasının G hareketli düzleme göre V_r rölatif hız vektörünün türevi alınarak elde edilen

$$V_r = A\dot{X}$$

$$b_r = \dot{V}_r = A\ddot{X}$$

vektörüne X in G deki rölatif ivme vektörü diyecek ve onu b_r ile göstereceğiz.

Bu türev alınırken X, G de hareket eden bir nokta olarak düşünülür ve A matrisi sabit olarak alınır.

Teorem 5.2.1 G hareketli Galile düzleminde bir t parametresine göre hareket eden bir nokta X olsun

$$b_a = b_f + b_c + b_r$$

dir (Burada $b_c = 2A\dot{X}$ dir ve Galile anlamında Coriolis ivmesi adını vereceğiz).

Sonuç 5.2.1 Bir $X \in G$ noktası G de sabit ise, X noktasının sürüklenme ivmesi bu noktanın mutlak ivmesine eşittir.

İspat :

$$V_a = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C} \quad \text{idi}$$

her iki tarafın türevi alınır

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \dot{A}\dot{X} + \dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} + \ddot{C}$$

X noktası sabit olduğundan türevleri sıfırdır.

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \ddot{C} = b_f$$

dir.

Teorem 5.2.2 b_c Coriolis ivme vektörü, V_r rölatif hız vektörüne Galile anlamında diktir.

İspat:

$$b_c = 2A\dot{X}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix}$$

$$=2\dot{\phi}(0, \dot{X}_1)$$

ve

$$\begin{aligned} V_r &= A\dot{X} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \phi\dot{X}_1 + \dot{X}_2 \end{bmatrix} \\ &= (\dot{X}_1, \phi\dot{X}_1 + \dot{X}_2) \end{aligned}$$

bu değerlerle Galile anlamında iç çarpım yapılırsa

$$\langle V_r, b_c \rangle = 0$$

bulunur.

Sonuç 5.2.2 G hareketli Galile düzleminde, X hareketli noktasının Coriolis ivmesi sıfır ise, hareket bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

İspat: X noktasının b_c Coriolis ivme vektörü

$$\begin{aligned} b_c &= 2A\dot{X} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} \\ &= 2\dot{\phi}(0, \dot{X}_1) = 0 \\ \Rightarrow \dot{\phi} &= 0 \\ \Rightarrow \phi &\text{ sabittir, yani } B_1 = G/G, \text{ hareketi sadece kaymadan ibarettir.} \end{aligned}$$

Tersine B_1 hareketi sadece kaymadan ibaret ise $\phi = \text{sabit} \Rightarrow \dot{\phi} = 0$ olur $\Rightarrow b_c = 0$ olur.

Bu hareketin matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \phi & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\dot{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \dot{\phi} & 0 \end{bmatrix}$$

$\dot{A}$ matrisi regüler olmadığından

$$v_f = 0$$

denkleminin çözümünü araştıramıyoruz, yani hareketin pol noktası yoktur.



6. ÜNİTER GEOMETRİ VE KİNEMATİĞİ

$$q = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 + a_4 e_4$$

gibi bir kuaterniyonun kompleks matris gösterimi

$$\begin{bmatrix} x & -y \\ y & \bar{x} \end{bmatrix}$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983).

Bu matriste $y = 0$ alınırsa

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & \bar{x} \end{bmatrix}$$

olur. Biz de bu matrisin yerine $w \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} e^{iw} & 0 \\ 0 & e^{-iw} \end{bmatrix} \in SU(2)$$

alabiliriz.

$$z = e^{iw} = \cos w + i \sin w$$

kompleks sayı operatörüne benzeterek q birim kuaterniyonundaki $S = (1, 0, 0)$ birim vektörünün $\mathbb{C}$ deki i nin yerini aldığı görülür (Hacısalıhoğlu 1983). Gerçekten q birim kuaterniyonuna bir kuaterniyon operatörü olarak bakılacak ve bu operatör tıpkı S ekseninde w açısı kadar döndürecektir.

$q = \cos w + S \sin w$, $Q = (\cos w, \sin w, 0, 0)$ eğrisine karşılık gelen matris

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos w & -\sin w & 0 & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos w & -\sin w \\ 0 & 0 & \sin w & \cos w \end{bmatrix}$$

E^4 de hareketin genel denklemi, $A = A(t) \in SO(4)$, $C = C(t) \in \mathbb{R}_1^4$ olmak üzere

$$F_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$X \rightarrow F_A(X) = AX + C$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 6.1 (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

E^4 de genel hareketin denklemi $A = A(t) \in O(4)$ ve $C = C(t) \in R_1^4$ olmak üzere

$$Y = A X + C \quad \dots\dots\dots (I)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983). Bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dA}{dt} X + A \frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt} \quad \dots\dots\dots (II)$$

olur. Burada

$$V_a = \frac{dY}{dt} \text{ ye hareketin mutlak hızı,}$$

$$V_r = A \frac{dX}{dt} \text{ ye hareketin rölatif hızı,}$$

$$V_f = \frac{dA}{dt} X + \frac{dC}{dt} \text{ ye de hareketin sürüklenme hızı denir.}$$

Biri E' sabit uzay ve diğeri de E' ye göre hareket eden E hareketli uzay olmak üzere E^4 uzayındaki hareketleri $\frac{E}{E'}$ biçiminde gösteririz. A ve C matrisleri bir $t \in R$ parametresinin fonksiyonları iseler bu harekete bir parametrelili hareket denir ve $B_1 = \frac{E}{E'}$ ile gösterilir.

Tanım 6.2 (Rölatif hız) X noktasının E (hareketli) Öklid uzayına göre hız vektörüne, yani X noktası E deki yörüngesini çizirken sahip olduğu vektörel hızı X noktasının izafi (rölatif) hızı denir ve V_r ile gösterilir.

Tanım 6.3 (Mutlak Hız) X noktasının E' sabit uzayına göre hızına X noktasının mutlak hızı denir ve V_a ile gösterilir.

Böylece, V_a, V_f, V_r hız vektörleri arasında

$$V_a = V_f + V_r$$

bağıntısı elde edilir.

Eğer X noktası E hareketli uzayında sabit bir nokta ise $V_r = 0$ olacağından $V_o = V_f$ olur.

Hızlar kanunu : Yukarıdaki bağıntıyı bir teoremle ifade edebiliriz. Bu bağıntı $B_i = E/E'$ hareketinde hızlar kanunu adını alır.

Teorem 6.4 Bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile izafi hız vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$V_o = V_f + V_r$$

dir.

6.1 Dönme Polü ve Pol Yörüngeleri

Öklid anlamında bir parametrelili $B_i = E/E'$ hareketinde E de sabit bir X noktasının her t anında V_f sürüklenme hızının sıfır olduğu noktalar hareketli ve sabit uzayda sabit noktalardır. Bu noktalara hareketin pol noktaları denir.

Teorem 6.1.1 Açısal hızı sıfır olmayan bir $B_i = E/E'$ hareketinde, her t anında her iki uzayda da sabit kalan bir tek nokta vardır.

İspat: $X \in E$ noktası E de sabit olacağından $V_r = 0$ ve aynı nokta E' uzayında da sabit olacağı için $V_f = 0$ olacaktır. O halde bu cins noktalar için $V_f = 0$ ise

$$\begin{aligned} V_f = 0 &\Rightarrow \dot{A}X + \dot{C} = 0 \\ &\Rightarrow X = -\dot{A}^{-1}\dot{C} \dots\dots\dots(III) \end{aligned}$$

olur. Gerçekten,

$$A = \begin{bmatrix} \cos w & -\sin w & 0 & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos w & -\sin w \\ 0 & 0 & \sin w & \cos w \end{bmatrix}, \quad \dot{A} = \begin{bmatrix} -\dot{w} \sin w & -\dot{w} \cos w & 0 & 0 \\ \dot{w} \cos w & -\dot{w} \sin w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{w} \sin w & -\dot{w} \cos w \\ 0 & 0 & \dot{w} \cos w & -\dot{w} \sin w \end{bmatrix}$$

olduğundan

$$C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{C} = \begin{bmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \\ \dot{c} \\ \dot{d} \end{bmatrix}$$

$\det \dot{A} = \dot{w}^4$, $w \neq \text{sabit}$ alınır $\det \dot{A} \neq 0$ ve dolayısı ile $\dot{A}$ regüler yani $\dot{A}^{-1}$ mevcut olur

ve

$$\dot{A}^{-1} = \frac{1}{\dot{w}} \begin{bmatrix} -\sin w & \cos w & 0 & 0 \\ -\cos w & -\sin w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin w & \cos w \\ 0 & 0 & \cos w & \sin w \end{bmatrix}$$

dır. Dolayısı ile $V_f = 0$ denkleminin bir tek X çözümü vardır. Bu X noktasına hareketli uzaydaki pol noktası denir. Bu nedenle (III) den

$$X = P = \frac{1}{\dot{w}} \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \sin w - \dot{c}_2 \cos w \\ \dot{c}_1 \cos w + \dot{c}_2 \sin w \\ \dot{c}_3 \sin w - \dot{c}_4 \cos w \\ \dot{c}_3 \cos w + \dot{c}_4 \sin w \end{bmatrix}$$

veya vektörel olarak

$$X = P = \frac{1}{\dot{w}} (\dot{c}_1 \sin w - \dot{c}_2 \cos w, \dot{c}_1 \cos w + \dot{c}_2 \sin w, \dot{c}_3 \sin w - \dot{c}_4 \cos w, \dot{c}_3 \cos w + \dot{c}_4 \sin w)$$

ve sabit uzaydaki pol noktası (I) den

$$P' = AP + C$$

dir. Bu değerler yerlerine yazılır ve hesaplanırsa

$$Y = P' = \frac{1}{\dot{w}} \begin{bmatrix} -\dot{c}_2 \\ \dot{c}_1 \\ -\dot{c}_4 \\ \dot{c}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

veya vektörel olarak

$$Y = P' = \left(-\frac{1}{\dot{w}}\dot{c}_2 + c_1, \frac{1}{\dot{w}}\dot{c}_1 + c_2, -\frac{1}{\dot{w}}\dot{c}_4 + c_3, \frac{1}{\dot{w}}\dot{c}_3 + c_4 \right)$$

bulunur. Burada $\forall t$ için $\dot{w}(t) \neq 0$ kabul ediyoruz. Yani, açısal hız sıfır olmasın. Bu durumda her t anında hareketli ve sabit uzayların her birinde bir tek pol noktasının olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 6.1.2 P polünden X noktasına giden pol ışını, $\forall t$ anında

V_f sürüklenme hız vektörüne Öklid anlamında diktir.

İspat: $P'Y = ((y_1 - p_1), (y_2 - p_2), (y_3 - p_3), (y_4 - p_4))$

$$V_f = \dot{A}A^{-1}P'Y$$

$$\dot{A}A^{-1} = \begin{bmatrix} -\dot{w} \sin w & -\dot{w} \cos w & 0 & 0 \\ \dot{w} \cos w & -\dot{w} \sin w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{w} \sin w & -\dot{w} \cos w \\ 0 & 0 & \dot{w} \cos w & -\dot{w} \sin w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos w & \sin w & 0 & 0 \\ -\sin w & \cos w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos w & \sin w \\ 0 & 0 & -\sin w & \cos w \end{bmatrix}$$

$$\dot{A}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{w} & 0 & 0 \\ \dot{w} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dot{w} \\ 0 & 0 & \dot{w} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_f = \dot{A}A^{-1}P'Y = (\dot{w}(-(y_2 - p_2), (y_1 - p_1), -(y_4 - p_4), (y_3 - p_3)))$$

$$\langle V_f, P'Y \rangle = 0$$

dir.

Teorem 6.1.3 V_f sürüklenme hız vektörünün boyu

$$\|V_f\| = |\dot{w}| \|PX\|$$

dir.

İspat: $V_f = \dot{w}(-(y_2 - p_2), (y_1 - p_1), -(y_4 - p_4), (y_3 - p_3))$

$$\|V_f\| = |\dot{w}| \sqrt{(y_2 - p_2)^2 + (y_1 - p_1)^2 + (y_4 - p_4)^2 + (y_3 - p_3)^2}$$

$$\|V_f\| = |\dot{w}| \|P'Y\|$$

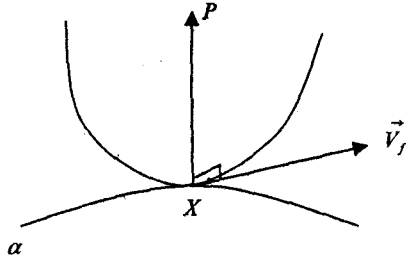
Teorem 6.1.4 Hareketli E uzayının her X noktası, t anında P merkezli ve $\dot{w}$ açısal hızlı bir Öklid dönme hareketi yapar.

X, E nin tamamen keyfi bir noktası olduğundan aşağıdaki teoremi de verebiliriz.

Teorem 6.1.5 Bu harekette, t anında hareketli E uzayının E' ye göre hareketi P ani dönme polü etrafında $\dot{w}$ açısal hızı ile belli olan bir dönmeden ibarettir.

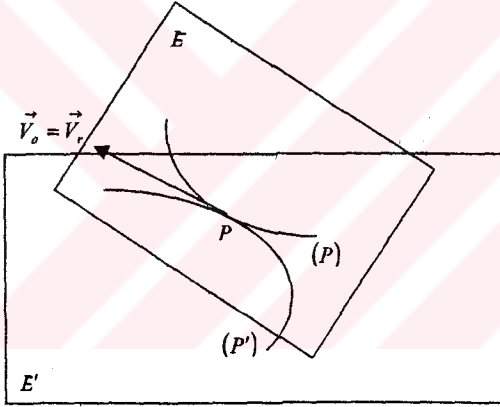
Teorem 6.1.6 $B_1 = E/E'$ hareketinde E uzayının X noktaları, E' sabit uzayında normalleri

P dönme polünden geçen yörüngeler çizerler (Şekil 6.1.1)(Ergin 1988).



Şekil 6.1.1. Normalleri P polünden geçen yörüngeler

Tanım 6.1.2 $B_1 = E/E'$ Öklid hareketinde P pol noktalarının E hareketli uzayındaki geometrik yerine $B_1 = E/E'$ hareketinin hareketli pol eğrisi denir ve (P) ile gösterilir. P noktasının E' sabit uzayındaki geometrik yerine ise sabit pol eğrisi ve (P') ile gösterilir (şekil 6.1.2.).



Şekil 6.1.2. Hareketli ve sabit pol eğrileri

P pol noktası E hareketli uzayı üzerinde hareketli bir noktadır. Dolayısıyla P noktası (P) ve (P') pol eğrilerini çizerken bu eğrilerin her biri üzerinde birer hıza sahiptir.

Teorem 6.1.7 Sabit ve hareketli uzaylardaki pol eğrilerini çizen P dönme polünün, (P) ve (P') eğrileri üzerinde, her t anındaki hızları birbirinin aynıdır. Başka bir deyişle iki eğri daima birbirine teğettir.

İspat: $X \in E$ noktasının (P) eğrisini çizme hızı V_p ve ayrıca bu noktanın (P') eğrisini çizme hızı da V_a dır. $V_p=0$ olduğundan $V_a=V_p$ dir.

Tanım 6.1.3 Her t anında α ve α' gibi iki eğri birbirine teğet ve bu iki eğriyi çizen noktanın bu eğriler üzerinde dt kadar zamanda aldıkları ds ve ds' yollarının uzunlukları aynı ise α ve α' eğrilerine birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanıyorlar denir.

Teorem 6.1.8 Bir parametrelili uzaysal bir $B_1 = E/E'$ Öklid hareketinde E uzayının(P) hareketli pol eğrisi E' uzayının (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanır.

İspat : Bir eğrinin yay elementinin tanımına göre (P) nin yay elementi $ds = \|V_p\|$ ve (P') nün ki de $ds' = \|V_a\|$ dır. (P) ve (P') için $V_a=V_p$ olduğundan $ds = ds'$ dır.

Bu teoreme göre, zamandan bahsetmeden bir Öklid hareketini tanımlayabiliriz. Bir $B_1 = E/E'$ Öklid hareketi, E nin (P) hareketli pol eğrisi, E' nün (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması ile elde edilebilir.

Tanım 6.1.4 X noktasının E' sabit Öklid uzayına göre mutlak ivme vektörü $\dot{V}_a$ dır. Bu vektör b_a ile gösterilecektir.

$$V_a = \dot{V}$$

$$b_o = \dot{V}_o = \ddot{Y}$$

dir.

Tanım 6.1.5 X , E hareketli Öklid uzayının sabit bir noktası olsun. X noktasının E' sabit Öklid uzayına göre, ivme vektörüne sürüklenme ivme vektörü diyeceğiz ve b_f ile göstereceğiz

Sürüklenme ivmesinin hesabında X , E nin sabit bir noktası olacağından

$$b_f = \dot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C}$$

olur.

6.2 İvmeler ve İvmelerin Birleşimi

E hareketli Öklid uzayının E' sabit uzayına göre $B_1 = E/E'$, Öklid hareketi mevcut olsun.

Bu hareket esnasında E uzayına göre, dolayısıyla da E' uzayına göre hareket eden bir X noktası göz önüne alınsın. X in hareketine ait hız formülleri elde edilmişti, şimdi ise X noktasının ivmesine ait ivme formülleri elde edilecektir.

Tanım 6.2.1 X noktasının E hareketli uzayına göre V_r , rölatif hız vektörünün türevi alınarak elde edilen

$$V_r = A\dot{X}$$

$$b_r = \dot{V}_r = A\ddot{X}$$

vektörüne X in E deki rölatif ivme vektörü diyecek ve onu b_r ile göstereceğiz.

Bu türev alınırken X , E de hareket eden bir nokta olarak düşünüldüğünden A matrisi sabit olarak alınmıştır.

Teorem 6.2.1 E hareketli Öklid uzayında bir t parametresine göre hareket eden bir nokta X olsun

$$b_a = b_f + b_c + b_r$$

dir (Burada $b_c = 2\dot{A}\dot{X}$ olup buna Öklid anlamında Coriolis ivmesi adını vereceğiz).

Sonuç 6.2.1 Bir $X \in E$ noktası E de sabit ise, X noktasının sürüklenme ivmesi bu noktanın mutlak ivmesine eşittir.

İspat :

$$V_a = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C}$$

den her iki tarafın türevi alınırsa

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \dot{A}\dot{X} + \dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} + \ddot{C}$$

X noktası sabit olduğundan türevleri sıfırdır.

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \ddot{C} = b_f$$

dir.

Sonuç 6.2.2 E hareketli Öklid uzayında, X hareketli noktasının Coriolis ivmesi sıfır ise, B_1 hareketi bir kayma (öteleme) hareketidir ve bu ifadenin tersi de doğrudur.

Teorem 6.2.2 b_c Coriolis ivme vektörü, V_r rölatif hız vektörüne Öklid anlamında diktir.

İspat: $b_c = 2\dot{A}\dot{X}$

$$= 2\dot{w} \begin{bmatrix} -\sin w & -\cos w & 0 & 0 \\ \cos w & -\sin w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin w & -\cos w \\ 0 & 0 & \cos w & -\sin w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix}$$

$$= 2\dot{w} \begin{bmatrix} -\dot{x}_1 \sin w - \dot{x}_2 \cos w \\ \dot{x}_1 \cos w - \dot{x}_2 \sin w \\ -\dot{x}_3 \sin w - \dot{x}_4 \cos w \\ \dot{x}_3 \cos w - \dot{x}_4 \sin w \end{bmatrix}$$

$$= 2\dot{w} (-\dot{x}_1 \sin w - \dot{x}_2 \cos w, \dot{x}_1 \cos w - \dot{x}_2 \sin w, -\dot{x}_3 \sin w - \dot{x}_4 \cos w, \dot{x}_3 \cos w - \dot{x}_4 \sin w)$$

$$= 0$$

dir.

$$\Rightarrow \dot{w} = 0$$

$$\Rightarrow w = \text{sabittir yani } B_1 = E^4/E^{*4} \text{ hareketi sadece kaymadan ibarettir.}$$

Tersine B_1 hareketi sadece kaymadan ibaret ise $w = \text{sabit} \Rightarrow \dot{w} = 0 \text{ olur} \Rightarrow b_c = 0 \text{ olur.}$

6.3 Birinci ve ikinci İvme Polleri

$\dot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü bize birinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\dot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$$

$$\ddot{A} = \begin{bmatrix} -\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w & \dot{w}^2 \sin w - \ddot{w} \cos w & 0 & 0 \\ -\dot{w}^2 \sin w + \ddot{w} \cos w & -\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w & \dot{w}^2 \sin w - \ddot{w} \cos w \\ 0 & 0 & -\dot{w}^2 \sin w + \ddot{w} \cos w & -\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w \end{bmatrix}$$

$$, |\ddot{A}| = \dot{w}^4 + \ddot{w}^2$$

$$\ddot{A}^{-1} = \frac{1}{\dot{w}^4 + \ddot{w}^2} \begin{bmatrix} -\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w & \dot{w}^2 \sin w - \ddot{w} \cos w & 0 & 0 \\ -\dot{w}^2 \sin w + \ddot{w} \cos w & -\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w & \dot{w}^2 \sin w - \ddot{w} \cos w \\ 0 & 0 & -\dot{w}^2 \sin w + \ddot{w} \cos w & -\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w \end{bmatrix}$$

bu değerler $X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$ de yerinde yazılırsa

$$X = P_1 = \frac{1}{\dot{w}^4 + \ddot{w}^2} \begin{bmatrix} \ddot{c}_1(-\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w) + \ddot{c}_2(-\dot{w}^2 \sin w + \ddot{w} \cos w) \\ \ddot{c}_1(\dot{w}^2 \sin w - \ddot{w} \cos w) + \ddot{c}_2(-\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w) \\ \ddot{c}_3(-\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w) + \ddot{c}_4(-\dot{w}^2 \sin w + \ddot{w} \cos w) \\ \ddot{c}_3(\dot{w}^2 \sin w - \ddot{w} \cos w) + \ddot{c}_4(-\dot{w}^2 \cos w - \ddot{w} \sin w) \end{bmatrix}$$

şeklinde olur. Burada P_1 e hareketli uzayındaki birinci mertebeden pol eğrisi denir.

Sabit uzaydaki pol eğrisini P'_1 ile gösterilirse

$$P'_1 = AP_1 + C$$

den

$$P'_1 = -\frac{1}{\dot{w}^4 + \ddot{w}^2} \begin{bmatrix} \ddot{c}_2\ddot{w} - \ddot{c}_1\dot{w}^2 \\ -\ddot{c}_1\ddot{w} - \ddot{c}_2\dot{w}^2 \\ \ddot{c}_4\ddot{w} - \ddot{c}_3\dot{w}^2 \\ -\ddot{c}_3\ddot{w} - \ddot{c}_4\dot{w}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$\ddot{V}_f = 0$ denkleminin çözümü ise bize ikinci mertebeden ivme polünü verir.

$$\ddot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C} = 0 \Rightarrow X = -\ddot{A}^{-1}\ddot{C}$$

dir. Bu değerler hesaplanır yerlerine konulursa X değeri hareketli uzaydaki ikinci mertebeden ivme polünü verir ve P_2 ile gösterilir.

$$X = P_2 = \frac{-1}{(\dot{w}^3 - \ddot{w})^2 + (3\dot{w}\ddot{w})^2} \begin{bmatrix} \ddot{c}_1((\dot{w}^3 - \ddot{w}) \sin w - 3\dot{w}\ddot{w} \cos w) + \ddot{c}_2((-\dot{w}^3 + \ddot{w}) \cos w - 3\dot{w}\ddot{w} \sin w) \\ -\ddot{c}_1((-\dot{w}^3 + \ddot{w}) \cos w - 3\dot{w}\ddot{w} \sin w) + \ddot{c}_2((\dot{w}^3 - \ddot{w}) \sin w - 3\dot{w}\ddot{w} \cos w) \\ \ddot{c}_3((\dot{w}^3 - \ddot{w}) \sin w - 3\dot{w}\ddot{w} \cos w) + \ddot{c}_4((-\dot{w}^3 + \ddot{w}) \cos w - 3\dot{w}\ddot{w} \sin w) \\ -\ddot{c}_3((-\dot{w}^3 + \ddot{w}) \cos w - 3\dot{w}\ddot{w} \sin w) + \ddot{c}_4((\dot{w}^3 - \ddot{w}) \sin w - 3\dot{w}\ddot{w} \cos w) \end{bmatrix}$$

sabit uzaydaki pol eğrisini P'_2 ile gösterilirse

$$P'_2 = AP_2 + C$$

de bu değerler yerlerine yazılırsa

$$P'_2 = \frac{-1}{(3\dot{w}\ddot{w})^2 + (\dot{w}^3 - \ddot{w})^2} \begin{bmatrix} -3\ddot{c}_1\dot{w}\ddot{w} + \ddot{c}_2(-\dot{w}^3 + \ddot{w}) \\ -3\ddot{c}_2\dot{w}\ddot{w} - \ddot{c}_1(-\dot{w}^3 + \ddot{w}) \\ -3\ddot{c}_3\dot{w}\ddot{w} + \ddot{c}_4(-\dot{w}^3 + \ddot{w}) \\ -3\ddot{c}_4\dot{w}\ddot{w} - \ddot{c}_3(-\dot{w}^3 + \ddot{w}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

7. BENZERLİK GEOMETRİSİ

Radyal Dönüşüm

F cismi üzerinde n – boyutlu bir afin uzay A olsun. A ile birleşen n - boyutlu vektör uzayı V olmak üzere

$$I : V \rightarrow V$$

özdeşlik dönüşümü ile bir $h \in F$, $h \neq 0$, skalarının çarpımı olan $hI : V \rightarrow V$ dönüşümüne A da karşılık gelen merkezli afin dönüşüm bir merkezli otomorfizmdir. O halde bu dönüşümün ifadesi

$$X' = hX$$

olur. Bu dönüşüm de A da merkezli bir dönüşüm olup **radyal dönüşüm** adını alır (Hacısalıhoğlu 1980).

Radyal dönüşüme karşılık gelen matris

$$\begin{bmatrix} hI_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Bir homoteti, bir radyal dönüşüm ile bir hareketin çarpımıdır.

$$\begin{bmatrix} hI_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & C' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} hI_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Radyal dönüşüm}} \underbrace{\begin{bmatrix} A & C' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Hareket}} = \begin{bmatrix} hA & hC' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} hA & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Homoteti (Benzerlik)}}$$

dir. O zaman

n – boyutlu Öklid uzayında bir cismin homotetik hareketi

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hA & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

dönüşümü ile verilir (Hacısalıhoğlu, 1980). Burada A $n \times n$ tipinde ortogonal matris , A nın transpozu A^t ve birim matris E olmak üzere $AA^T = E$, x_0 , x ve C birer $n \times 1$ matrisi ve h homotetik sabiti göstermektedir. h , A ve C nin elemanları t reel parametresine göre sürekli olarak türevlenebilir fonksiyonlardır.

x_0 ve x , sırasıyla, dik koordinat sistemine göre hareketli uzay R_0 ve sabit uzay R deki aynı noktaya ait yer vektörleridir. $t = t_0$ anında R_0 ve R deki koordinat sistemlerinin çakışık olduğunu varsayalım. Afin dönüşüm halinden sakınmak için de

$$h = h(t) \neq \text{sabit} \neq 1 \quad (2)$$

olduğunu varsayalım. Aynı şekilde pure öteleme ve pure dönme hallerinden sakınmak için de

$$\dot{h}A + h\dot{A} \neq 0, \dot{C} \neq 0$$

olduğunu varsayalım. Burada $(.)$ ile t parametresine göre adi türev gösterilmektedir.

Diğer taraftan h bir skalar matris olduğundan h nın h^{-1} inversi h^T transpozu, sırası ile,

$$h^{-1} = \frac{1}{h}, h^T = h$$

dir.

$$B = hA \quad (3)$$

diyelim. (3) ü (1) de yerine koyup, (1) i yeniden yazarsak

$$\dot{x} = Bx_0 + \dot{C} \quad (3)'$$

olur ve bu ifadenin t ye göre türevi alınır

$$\ddot{x} = \dot{B}x_0 + \dot{C} + B\dot{x}_0$$

elde edilir. Burada yer vektörü x olan X noktası için $\dot{x}$ **mutlak hız**, $\dot{B}x_0 + \dot{C}$ **sürüklenme hızı** ve $B\dot{x}_0$ da **rölatif hızdır**.

Şimdi R_0 ve R nin her ikisinde aynı anda sabit noktalarının olup olmadığına bakalım. Bu noktaların t_0 anındaki pozisyonlarını bulmak için

$$\dot{B}x_0 + \dot{C} = 0 \quad (4)$$

denkleminin çözümlerine bakmak gerekir.

(3) deki denklemin t ye göre türevini alırsak

$$\dot{B} = \dot{h}A + h\dot{A}$$

$$\dot{B} = h\left(\frac{\dot{h}}{h}A + \dot{A}\right)$$

veya E birim matris olmak üzere

$$\dot{B} = hA\left(A^{-1}\dot{A} + \frac{\dot{h}}{h}E\right)$$

$$\dot{B} = B\left(A^{-1}\dot{A} + \frac{\dot{h}}{h}E\right) \quad (5)$$

olur.

Sonuç olarak (5) denklemi, $E=I_n=[\delta_{ij}] \in \mathbb{R}^n_n$ olmak üzere,

$$\dot{B} = B(\varphi - \lambda E) \quad (6)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Burada

$$A^{-1} \dot{A} = \varphi$$

$$-\frac{\dot{h}}{h} = \lambda$$

dir. φ ise antisimetrik bir matristir. (6) dan

$$\det \dot{B} = \det B \det(\varphi - \lambda E)$$

$$= h^n \det A \det(\varphi - \lambda E)$$

olur. φ antisimetrik matrisin karakteristik denklemi

$$\det(\varphi - \lambda E) = 0$$

dır. φ reel antisimetrik matrisinin sadece $\lambda = 0$ ve $\lambda = \text{pure imajiner}$ karakteristik değerleri vardır. Buradan (2) ye göre

$$\det \dot{B} \neq 0, \forall t \quad (7)$$

dir. Bir diğer deyişle $\dot{B}$, t nin tüm değerleri için regülerdir. (4) denklemin çözümleri

$$x_0 = q_0 = -(\dot{B})^{-1} \dot{C} \quad (8)$$

dir. Böylece aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 7.1: n-boyutlu Öklid uzayındaki homotetik hareketler her n için regülerdir.

Teorem 7.2: n-boyutlu Öklid uzayındaki homotetik hareketler her t anında bir tek ani pole noktasına sahiptir.

(8) denklemindeki q_0 , Q pol noktasının hareketli uzay R_0 a göre yer vektörünü göstermektedir. Q nun sabit uzay R ye göre yer vektörü de q ise (3)' ve (7) in kullanılmasıyla

$$q = -B \cdot (\dot{B})^{-1} \cdot \dot{C} + C \quad \text{veya} \quad \dot{q} = B\dot{q}_0 + \dot{C} \quad (9)$$

olur. (8) ve (9) nolu denklemler hareketli ve sabit pole eğrilerinin denklemlerini vermektedir.

7.1 Pole Eğrilerinin Birbirlerine Göre Kayma-Yuvarlanması

(9) un t ye göre türevi alınırsa

$$\dot{q} = \dot{B}q_0 + \dot{C} + B\dot{q}_0$$

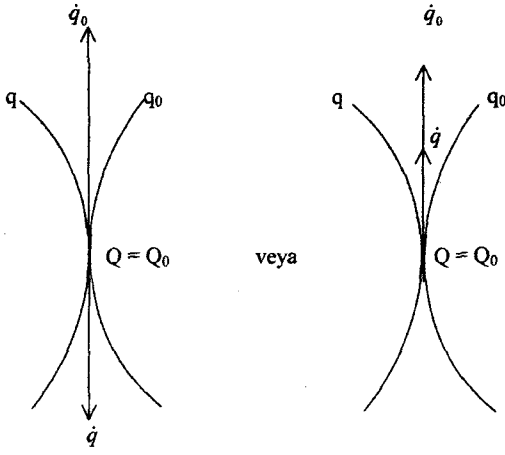
veya (4) ten dolayı

$$\dot{B}q_0 + \dot{C} = 0$$

olduğundan

$$\dot{q} = B\dot{q}_0 \quad (10)$$

olur. Bu denklem Q noktasının t anındaki kayma hızını verir. Bunun anlamı, pole eğrilerinin değme noktalarındaki teğet vektörleri, A dönmesi ve h ötelemesi sonra çakışır (şekil 7.1.1.).



Şekil 7.1.1. Pol eğrilerinin çakışması

(10) dan norm alırsak

$$\|\dot{q}\| = \|B\dot{q}_0\|$$

$$\|\dot{q}\| dt = \|B\dot{q}_0\| dt$$

$$= \|hA\dot{q}_0\| dt$$

$$= h \|A\dot{q}_0\| dt$$

$$= h \|\dot{q}_0\| dt$$

ds ve ds_0 yay elementini göstermek üzere $ds = \|\dot{q}\| dt$ ve $ds_0 = \|\dot{q}_0\| dt$ olduğundan

$$ds = h . ds_0$$

olur. Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 7.1.1: n -boyutlu Öklid uzayında homotetik hareket boyunca pol eğrileri birbirleri üzerinde kayarak yuvarlanırlar. Bu kayma yuvarlanma hareketinin katsayısı h dır. Özel olarak $h = 1$ ve n çift olması durumunda homotetik olmayan adi hareket’de $ds = ds_0$ olduğundan pol eğrileri birbiri üzerinde kaymaksızın yuvarlanırlar.

8. EŞ AFİN EŞALAN GEOMETRİ

Lie Grubu

Lie grupları öyle gruplardır ki aynı zamanda birer diferensiyellenebilen manifoldlardır.

Bu Lie grubunun işleminin diferensiyellenebilir olduğunu ifade eder.

Tanım 8.1 Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa (M, G) ikilisine bir Lie grubu denir.

(L.1) M nin noktaları ile G nin elemanları çakışır.

(L.2) $M \times M \rightarrow M$

$$(a, b) \rightarrow ab^{-1}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir.

M ye Lie grubunu temel manifoldu ve G ye de temel grubu denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Buna göre bir Lie grubunu kısaca şu şekilde ifade edebiliriz.

G bir grup ve $(a, b) \rightarrow ab^{-1}$ şeklinde tanımlanan

$$G \times G \rightarrow G$$

Grup işlemi C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir olsun. Eğer G bir diferensiyellenebilir manifold ile eşlenebiliyorsa G ye bir Lie grubu denir. G Lie grubu aynı zamanda bir grup olduğundan özdeşlik elemanı vardır ve bu özdeşlik elemanını e ile göstereceğiz.

$(GL(n, \mathbb{R}))$ Lie grubu)

Bütün $n \times n$ tipindeki reel matrislerin cümlesi olan $gl(n, \mathbb{R})$, reel sayılar cismi üzerinde

n^2 - boyutlu bir vektör uzayıdır ve dolayısıyla bir manifolddur. Her bir

$a = [a_{ij}] \in gl(n, \mathbb{R})$ için

$$[a_{ij}] = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, a_{12}, \dots, a_{n2}, \dots, a_{1n}, \dots, a_{nn})$$

alıp

$$a_{ij} = b_{i+(j-1)n}$$

dersek $g^\ell(n, IR)$ nin $a = [a_{ij}]$ matrisine E^{n^2} nin $(b_1, b_2, \dots, b_{n^2})$ noktasını karşılık tutabiliriz. Böylece $g^\ell(n, IR)$ ile E^{n^2} arasında birebir tekabül kurmuş oluruz. Bu $g^\ell(n, IR)$ den E^{n^2} ye bir lineer izomorfizm (dolayısıyla koordinat sistemi) verir.

$$GL(n, IR) = \{g \in g^\ell(n, IR) \mid \det g \neq 0\}$$

Cümlesi matris çarpımı altında bir gruptur.

$$\det: GL(n, IR) \rightarrow IR$$

$$A \quad \det A = \det [a_{ij}] = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Determinant fonksiyonu diferensiyellenebilir fonksiyonların çarpımlarının toplamına eşit olduğundan diferensiyellenebilir ve dolayısıyla sürekli. Sürekli bir fonksiyonda, değer cümlesinde bir kapalı (veya açık) cümlemin ters görüntüsü yine kapalı (veya açık) dır.

$$\det: GL(n, IR) \rightarrow IR$$

fonksiyonu sürekli ve $\{0\}$ cümlesi IR de kapalı olduğundan

$$\det^{-1}\{0\} = \{g \in GL(n, IR) \mid \det g = 0\}$$

cümlesi $g^\ell(n, IR)$ de kapalıdır. Bu cümle ise $g^\ell(n, IR)$ ye göre $GL(n, IR)$ nin tümleyenidir. O halde $GL(n, IR)$ cümlesi $g^\ell(n, IR)$ nin bir açık altcümlesidir. Böylece $GL(n, IR)$ bir manifolddur.

Şimdi $a, b \in GL(n, IR)$ için

$$GL(n, IR) \times GL(n, IR) \rightarrow GL(n, IR)$$

$$(a, b) \rightarrow ab^{-1}$$

grup işlemi (matris çarpımı) nin diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim.

$$a = [a_{ij}], \quad b = [b_{ij}] \quad \text{ve} \quad b^{-1} = \left[\frac{B_{ij}}{|b|} \right] \quad \text{için}$$

$$ab^{-1} = \left[\sum_{k=1}^n a_k \frac{B_{ij}}{|b|} \right]$$

olarak yazılır. Burada $\sum_{k=1}^n a_k \frac{B_{ij}}{|b|}$ fonksiyonları diferensiyellenebilir olduğundan ab^{-1} de diferensiyellenebilir.

Böylece $GL(n, \mathbb{R})$ bir Lie grubudur.

E^n bir Lie grubu olduğunu gösterelim.

$$I : E^n \rightarrow E^n$$

$$x \quad I(x) = x$$

Özdeşlik dönüşümünü göz önüne alalım.

i) E^n diferensiyellenebilir manifolddur. Gerçekten,

- 1) E^n bir Hausdorff uzaydır.
- 2) E^n nin kendisi bir açıktır.
- 3) O halde E^n i bir tek açıkla örebiliriz.

ii) $(E^n, +)$ iklisi bir gruptur.

iii) $+: E^n \times E^n \rightarrow E^n$

$$(x, y) \rightarrow x+y^{-1} = x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$$

işleminin diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim.

$(x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$ fonksiyonları diferensiyellenebilir olduğundan $x + y^{-1}$ diferensiyellenebilirdir.

İki Lie grubunun çarpımı da bir Lie grubu olacağından

$$K = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{E}^n$$

Bir Lie grubu olur.

$$f: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$$

$$X \rightarrow f(X) = AX + B \approx Y$$

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid A \in GL(n, \mathbb{R}) \right\}$$

$K = GL(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ çarpım manifoldunu ele alalım. K da grup yapısını şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$\therefore K \times K \rightarrow K$$

$$((A_1, B_1), (A, B)) \rightarrow (A_1, B_1)(A, B) = (A_1A, A_1B + B_1)$$

işlemi K da bir grup yapısıdır, yani $(K, \cdot)$ ikilisi bir gruptur. Bu grup yapısı ile K bir Lie grubu olur. Bu Lie grubu $\mathbb{E}^{n+1}$ in eş afin grubudur. Gerçekten, her $A, B \in K$ elemanını $\mathbb{E}^{n+1}$ deki bir

$$f_1: (A, B) \rightarrow \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}, \det A \neq 0$$

afin dönüşümüne eşlersek

$$f_2: (A_1, B_1) \rightarrow \begin{bmatrix} Y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix}, \det A_1 \neq 0$$

ve dolayısıyla K daki çarpma işlemi de

$$f_2 \cdot f_1: ((A_1, B_1), (A, B)) \rightarrow (A_1, B_1)(A, B) = (A_1A, A_1B + B_1) \rightarrow \begin{bmatrix} Y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1A & A_1B + B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix},$$

$\det(A_1 A) \neq 0$, şeklinde E^{n+1} in bir afin dönüşümüne karşılık gelir. Zira

$$(A_1, B_1)(A, B) = (A_1 A, A_1 B + B_1) \rightarrow \begin{bmatrix} A_1 A & A_1 B + B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

Şimdi de $(K, .)$ ikilisinin grup olduğunu gösterelim.

$$\therefore K \times K \rightarrow K$$

$$((A_1, B_1), (A, B)) \rightarrow (A_1, B_1)(A, B) = (A_1 A, A_1 B + B_1)$$

işlemi K da kapalıdır.

Birleşme özeliği: $\forall (A_1, B_1)(A, B), (A_2, B_2) \in K$ için

$$[(A_1, B_1)(A, B)](A_2, B_2) = (A_1, B_1)[(A, B)(A_2, B_2)]$$

$$\begin{aligned} [(A_1, B_1)(A, B)](A_2, B_2) &= (A_1 A, A_1 B + B_1)(A_2, B_2) \\ &= (A_1 A A_2, A_1 A B_2 + A_1 B + B_1) \dots \dots \dots I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A_1, B_1)[(A, B)(A_2, B_2)] &= (A_1, B_1)(A A_2, A B_2 + B) \\ &= (A_1 A A_2, A_1 A B_2 + A_1 B + B_1) \dots \dots \dots II \end{aligned}$$

I ve II den dolayı işlem birleşme özeliğine sahiptir.

Birim eleman özeliği: $(A_1, B_1)(e_1, e_2) = (A_1, B_1)$

$$(A_1 e_1, A_1 e_2 + B_1) = (A_1, B_1)$$

$$A_1 e_1 = A_1, A_1 e_2 + B_1 = B_1$$

$$e_1 = I_n \text{ birim matris, } e_2 = 0 \text{ sıfır matrisi}$$

$$(e_1, e_2) = (I_n, 0)$$

Ters eleman özeliği: $(A_1, B_1)(x, y) = (I_n, 0)$

$$(A_1x, A_1y + B_1) = (I_n, 0)$$

$$A_1y + B_1 = 0 \rightarrow y = -A_1^{-1}B_1$$

$$A_1x = I_n \rightarrow x = A_1^{-1}$$

$$(A_1, B_1)^{-1} = (A_1^{-1}, -A_1^{-1}B_1)$$

$(K, .)$ ikilisi bir gruptur.

Tanım 8.2 (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

Genel hareketin denklemi, $\det A \neq 0$, $A = A(t) \in GL(n, \mathbb{R})$, $C = C(t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$Y = AX + C \quad \dots\dots\dots (1)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983). Bu denklemin t ye göre türevi alınır

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dA}{dt}X + A \frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt} \quad \dots\dots\dots (2)$$

olur. Burada

$$V_a = \frac{dY}{dt} \text{ ye hareketin mutlak hızı,}$$

$$V_r = A \frac{dX}{dt} \text{ ye hareketin rölatif hızı,}$$

$$V_f = \frac{dA}{dt}X + \frac{dC}{dt} \text{ ye de hareketin sürüklenme hızı denir.}$$

Burada $\det \dot{A} \neq 0$ olduğu kabul edilmiştir.

Tanım 8.3 (Rölatif hız) X noktasının afin hareketine göre hız vektörüne, yani X noktasının, $H = \mathbb{E}^{n+1}$ deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının izafi (rölatif) hızı denir ve V_r ile gösterilir.

Tanım 8.4 (Mutlak Hız) X noktasının $H' = E^{n+1}$ sabit uzayına göre hızına X noktasının mutlak hızı denir ve V_a ile gösterilir.

Böylece, V_a, V_f, V_r hız vektörleri arasında

$$V_a = V_f + V_r$$

bağıntısı elde edilir.

Eğer X noktası $H = E^{n+1}$ hareketli uzayında sabit bir nokta ise $V_r = 0$ olacağından $V_a = V_f$ olur.

Hızlar kanunu : Yukarıdaki bağıntıyı bir teoremlle ifade edebiliriz. Bu bağıntı $B_1 = H/H'$ hareketinde hızlar kanunu adını alır.

Teorem 8.1 Bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile izafi hız vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$V_a = V_f + V_r$$

dir.

Tanım 8.5 X noktasının H' sabit uzayına göre mutlak ivme vektörü V_a dir. Bu vektör b_a ile gösterilecektir.

$$V_a = \dot{Y}$$

den

$$b_a = \dot{V}_a = \ddot{Y}$$

dir.

Şimdi H ve H' nin her ikisinde aynı anda sabit noktaların olup olmadığına bakalım. Bu noktaların t_0 anındaki pozisyonlarını bulmak için

$$\dot{A}X + \dot{C} = 0 \quad (3)$$

denkleminin çözümlerine bakmak gerekir. (3) denkleminin çözümleri

$$X = P = -(\dot{A})^{-1} \dot{C} \quad (4)$$

dir. Böylece aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

Teorem 8.2: n-boyutlu Öklid uzayındaki afin hareketler $\det \dot{A}$ regüler bir matris ise her n için regülerdir.

Teorem 8.3: n-boyutlu Öklid uzayındaki afin hareketler $\det \dot{A} \neq 0$ ise her t anında bir tek ani pol noktasına sahiptir.

(4) denklemindeki P, H hareketli uzayındaki koordinat sistemine göre Q pol noktasının yer vektörüdür. P' da H' sabit uzayındaki koordinat sistemine göre yer vektörüdür. Sabit düzlemdeki pol eğrisi (1) den

$$Y = P' = AP + C \quad (5)$$

olur. (4) ve (5) nolu denklemler hareketli ve sabit pol eğrilerinin denklemlerini vermektedir.

Tanım 8.6 X, H hareketli uzayının sabit bir noktası olsun. X noktasının H' sabit uzayına göre, ivme vektörüne sürüklenme ivme vektörü diyeceğiz ve b_f ile göstereceğiz

Sürüklenme ivmesinin hesabında X, H nin sabit bir noktası olacağından

$$b_f = \dot{V}_f = \ddot{A}X + \ddot{C}$$

olur.

8.1 İvmeler ve İvmelerin Birleşimi

H uzayının H' uzayına göre $B_1 = H/H'$ afin hareketi mevcut olsun. Bu hareket esnasında H uzayına göre, dolayısıyla da H' uzayına göre hareket eden bir X noktası göz önüne alınsın. X in hareketiyle elde edilen hız formülleri elde edilmişti şimdi ise X noktasının ivmesi incelenecektir.

Tanım 8.1.1 X noktasının H hareketli uzaya göre V_r rölatif hız vektörünün türevi alınarak elde edilen

$$V_r = A\dot{X}$$

$$b_r = \dot{V}_r = A\ddot{X}$$

vektörüne X in H daki rölatif ivme vektörü diyecek ve onu b_r ile göstereceğiz.

Bu türev alınırken X , H da hareket eden bir nokta olarak düşünüldüğünde A matrisi sabit olarak alınmalıdır.

Teorem 8.1.1 H hareketli afin uzayında bir t parametresine göre hareket eden bir nokta X olsun

$$b_a = b_f + b_c + b_r$$

dir (Burada $b_c = 2A\dot{X}$ olup buna afin anlamında Corilois ivmesi adını vereceğiz).

9. DÜZLEMDE CAYLEY-KLEİN ANLAMINDA GEOMETRİLER

Cayley-Klein anlamındaki düzlemsel geometriler dokuz adettir. Bunların listesi (Çizelge 9.1.1.)de görülmektedir.

Çizelge 9.1. Cayley - Klein anlamındaki düzlemsel geometriler

Açıların ölçüsü	uzunlukların ölçüsü		
	Eliptik	Parabolik	Hiperbolik
Eliptik	Eliptik Geometri	Öklidyen geometri	Hiperbolik geometri
Parabolik (Öklidyen)	Co-Öklidyen Geometri	Galile geometri	Co-Minkowski geometri
Hiperbolik	Co-hiperbolik Geometri	Minkowski geometri	İkili hiperbolik geometri

Bu geometrik sistemlerden ilki ve en alışılmış olanı ve en yaygın olarak kullanılanı Öklid geometrisidir. Bunun arkasından Galile geometrisi ve üçüncü olarak Minkowski geometrisi gelir. Dördüncü geometri olarak Bolyai-Lobacevski geometrisi de diyebileceğimiz hiperbolik geometriyi sıralayabiliriz. Bu geometriler ilk defa 1871 de Felix Klein tarafından tanıtılmıştır. Klein bu tanıtmasını Cayley'in daha önceki çalışmalarına dayandırarak yaptığı için bu geometrilere Cayley- Klein geometrileri de denir. Öklid geometrisini çıkararak geri kalanlara Öklid olmayan geometriler de denir.

Bu geometrilerden çok basit bir yol ile yeni geometriler elde edilmiştir. Bu basit yol, **dualite prensibi** denen bir prensibe dayanır. "nokta" yerine "doğru" ve tersine "doğru" yerine "nokta" almaktan ibaret olan dualite prensibine göre noktalar

için bilinen bir gerçek doğrular için de geçerli olur. Örneğin Öklid geometrisinde “iki nokta bir doğru belirtir”in duali “iki doğru bir nokta belirtir”dir. Demek ki noktanın duali doğru doğrunun duali de bir noktadır. O zaman noktaları esas alan Öklid geometrisi (afin geometri) nin duali Co-Öklid geometridir. Afin geometride nokta koordinatları (Nokta $\leftrightarrow$ sıralı ikili) Co-Öklid geometrisinde doğru koordinatları (doğru $\leftrightarrow$ sıralı ikili) kullanıldığının bir nedeni de budur.

Bu prensipte “uzaklık” ın duali “açı” ve “açı” nın duali de uzaklıktır. Yani “iki nokta arasındaki uzaklık” ifadesinin duali “iki doğru arasındaki açı” ifadesidir. Bu prensibe göre Öklid geometrisinin duali, Co- Öklid geometrisi, Minkowski geometrisinin duali co- Minkowski geometrisi ve hiperbolik geometrisinin duali de co- hiperbolik geometri olarak adlandırılır. Galile geometrisinin duali kendisidir, eliptik geometrinin duali kendisi ve ikili hiperbolik geometrinin duali de kendisidir. Öklid geometrisi, eliptik geometri ve hiperbolik geometri doğruyu esas alan üç farklı geometridir.

Öklidyen Uzaklık – Öklidyen Hareketler – Öklid Geometrisi

Öklid geometrisinde doğru parçasının uzunluğu alışımlı olan uzunluktur. Bir o doğrusu üzerinde A, B gibi iki nokta arasındaki alışımlı olan uzaklık Öklid anlamındaki uzaklık olarak bilinir ve $d(A, B) = |AB|$ ile gösterilir. Öklid anlamındaki uzaklığı koruyan dönüşümlere Öklid hareketleri denir. Bu hareketler, dönemeler, ötelemeler, yansımalar ve bunların bileşkeleridir. Bu cins dönüşümler altındaki değişmezlerin teorisi de Öklid geometrisidir.

Parabolik uzaklık

Bir o doğrusu üzerinde OE birim uzunluğu seçilerek $\forall A, B \in o$ nokta çifti arasındaki parabolik uzaklık diye

$$\frac{|AB|}{|OE|}$$

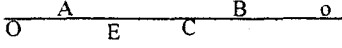
değerine denir ve parabolik olduğunu belirtmek için de

$$d_{AB}^{(P)} = \frac{|AB|}{|OE|}$$

biçiminde gösterilir. Eğer $C \in AB$ doğru parçası ise

$$d_{AC}^{(P)} + d_{CB}^{(P)} = d_{AB}^{(P)}$$

dir (Şekil 9.1.).



Şekil 9.1. İki nokta arasındaki parabolik uzaklık

o doğrusunun Öklid hareketleri Öklid anlamındaki uzaklığı koruduğu gibi $d_{AB}^{(P)}$ uzaklığını da korurlar. Bu hareketler o doğrusunu sabit bırakırlar:

- a) o doğrusu boyunca ötelemeler;
- b) eksenini o doğrusu olan yansımalar dır.

Tablo I de bir parabolik geometri görmüyoruz. Çünkü böyle bir geometri olarak Öklid geometrisi alınabilir.

Eliptik Uzaklık – Eliptik Hareketler ve Eliptik Geometri

Bir o doğrusu ile dışındaki bir Q noktasını alalım. o doğrusu üzerinde A ile B arasındaki **eliptik uzaklık** diye

$$AQB$$

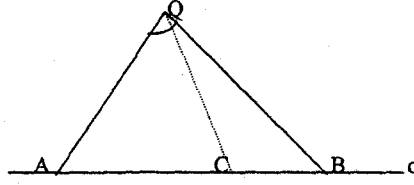
açısının ölçüsünü tanımlıyoruz. Bu açının ölçüsü alışılmış Öklid anlamındaki açı ölçüsü olup bir reel sayıdır. Bu uzaklığın eliptik olduğunu belirtmek için onu $d_{AB}^{(E)}$ ile gösteriyoruz. O halde A,B $\in$ o noktaları arasındaki eliptik uzaklık

$$d_{AB}^{(E)} = \angle AQB$$

dir (şekil 9.2.). Eğer A, B ve C noktaları o doğrusu üzerindeki ardışık noktalar iseler

$$d_{AC}^{(E)} + d_{CB}^{(E)} = d_{AB}^{(E)}$$

dir (Şekil 9.2.).

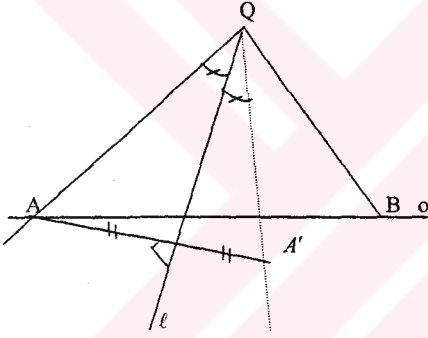


Şekil 9.2. İki nokta arasındaki eliptik uzaklık

Eliptik uzaklığı koruyan dönüşümlere **Eliptik hareketler** denir. Bu dönüşümler şunlardır:

a) Tepe noktası Q olan doğru demetinin, Q noktası etrafındaki α açısı kadar dönme hareketleri, böyle bir dönmede Q noktası sabit kalır, bir A noktasının resmi A' ise $\angle AQA' = \alpha$ olur.

b) Tepesi Q noktası olan doğru demetinin, demete ait bir ℓ doğrusuna göre yansıma hareketleridir. Böyle bir yansıma da bir A noktasının resmi A' ise $\angle AQA'$ açısının açı ortayı demete ait ℓ doğrusudur (Şekil 9.3.).



Şekil 9.3. Eliptik hareketlerde yansıma

Eliptik hareketler altındaki değişmezlerin teorisi de **eliptik geometridir**.

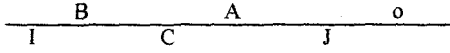
Hiperbolik Uzaklık, Hiperbolik Hareketler ve Hiperbolik Geometri

Bir o doğrusu ile üzerindeki I ve J gibi iki nokta tesbit edildiğinde bu doğruya hiperbolik doğru denir.

o hiperbolik doğru üzerinde A, B gibi iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık $d_{AB}^{(H)}$ ile gösterilir ve

$$d_{AB}^{(H)} = k \log \frac{AI/AJ}{BI/BJ}$$

olarak tanımlanır (Şekil 9.4.).



Şekil 9.4. iki nokta arasındaki hiperbolik uzaklık

Burada k'nın seçilişi keyfidir. Logaritmanın tabanı da keyfidir, örneğin 10 alınabilir. O zaman k sabiti de o üzerindeki bir birim uzunluğa bağlı olarak seçilebilir.

$$\frac{AI/AJ}{BI/BJ} = (A, B; I, J)$$

ifadesi de A ve B noktalarının IJ doğru parçasını bölme oranlarının oranı, yani $(A, B; I, J)$ çifte oranıdır. AI, AJ ve BI, BJ yönlü doğru parçalarıdır. Logaritma fonksiyonu sadece pozitif çifte oran değerleri için tanımlı olduğundan bu dört noktanın 24 farklı çifte oranı arasında sadece pozitif olanları geçerlidir. Bunu için de A ve B noktaları IJ doğru parçası üzerinde seçilmek zorundadır. Bu da IJ doğru parçasının bütün o hiperbolik doğrusunu temsil etmesi demektir. Eğer, A, C, B şekilde görüldüğü gibi, IJ üzerinde ve ardışık noktalar iseler

$$d_{AC}^{(H)} + d_{CB}^{(H)} = d_{AB}^{(H)}$$

dir. Gerçekten,

$$(A, C; I, J).(C, B; I, J) = \frac{AI/AJ}{CI/CJ} \cdot \frac{CI/CJ}{BI/BJ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{AI/AJ}{BI/BJ} \\
 &= (A, B; I, J)
 \end{aligned}$$

olduğundan her iki tarafın logaritması alınarak

$$\log(A, C; I, J) + \log(C, B; I, J) = \log(A, B; I, J)$$

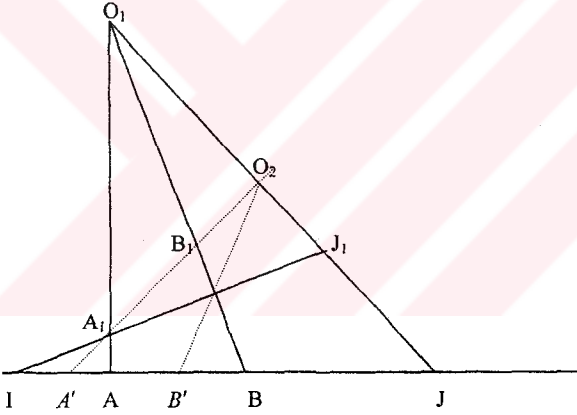
$$d_{AC}^{(H)} + d_{CB}^{(H)} = d_{AB}^{(H)}$$

dir.

Bir diğer önemli gerçek de o doğrusu üzerindeki dört noktanın çifte oranının, o dan o ya olan, merkezli izdüşümler altında değişmezliğidir. o dan o ya olan merkezli izdüşüm yerine, o yu temsil edebilen IJ için, IJ den IJ ya merkezli izdüşümü gösterelim. Önce merkezi O_1 olan bir merkezli izdüşümle $IJ \rightarrow IJ_1$ alınır. Bu dönüşümde $A \rightarrow A_1$ ve $B \rightarrow B_1$ olur. Sonra O_1J_1 üzerindeki bir O_2 noktası merkez olmak üzere $IJ_1 \rightarrow IJ$ alınır. O_2 merkezli izdüşüm altında $A_1 \rightarrow A'$ ve $B_1 \rightarrow B'$ olur.

$$(A, B; I, J) = (A', B'; I, J)$$

olduğu gösterilebilir.



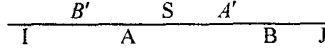
Şekil 9. 5. Merkezli izdüşüm

Bu nedenle o hiperbolik doğrusunu temsil eden IJ doğru parçasına ait çifte oranları (yani hiperbolik uzaklıkları) koruyan dönüşümlere hiperbolik hareketler denir. Bu hareketler şunlardır:

a) IJ doğru parçasının S orta noktasına göre yansımalar. Böyle bir yansımada

$$A \rightarrow A' \text{ ve } B \rightarrow B' \text{ ise}$$

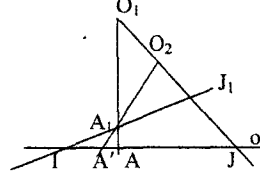
$$(A, B; I, J) = (A', B'; I, J)$$



olduğu aşikardır.

b) Şekil 9.6 da görüldüğü gibi, $IJ \rightarrow IJ$ olan merkezi izdüşümler. Bunlar şu şekilde elde edilirler. Önce IJ doğru parçası

I dan geçen bir IJ_1 doğru parçası üzerine O_1 merkezli bir izdüşümle resmedilir. Sonra IJ_1 doğru parçası da bir diğer O_2 merkezli izdüşümle IJ üzerine resmedilir.



Şekil 9.6. Merkezi izdüşüm

Bu cins merkezi izdüşümlerle, uzunlukları hiperbolik olarak aynı olan, fakat Öklid anlamında aynı olmayan ve AB den elde edilen doğru parçalarının bir dizisini

$$AB \in IJ \rightarrow BB_1 \in IJ \rightarrow B_1B_2 \in IJ \rightarrow B_2B_3 \rightarrow \dots$$

olmak üzere

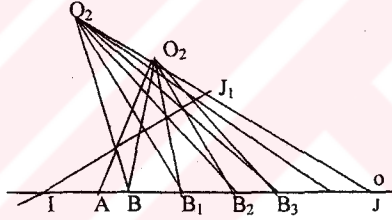
$$AB, BB_1, B_1B_2, B_2B_3, \dots$$

biçiminde elde ederiz (Şekil 9.7.).

Bu şekle göre, IJ hiperbolik doğrusu üzerindeki bir A noktasından başlanırsa

hiperbolik uzunluk anlamında

$$AB = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$$



Şekil 9.7. Merkezi izdüşüm

olur ve B_i noktalarının hepsi IJ doğru parçasının içinde kalırlar. Bir diğer ifade IJ hiperbolik doğrusu sonsuzdur. Çünkü $B \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow B_3 \rightarrow \dots$ I yaklaşımında B noktası I ya giderse $BI \rightarrow 0$ olacağından

$$(A, B; I, J) = \frac{AI/AJ}{BI/BJ} \rightarrow \infty$$

olur. Bu da $d_{AB}^{(H)} \rightarrow \infty$ olması demektir.

Hiperbolik hareketler altında değişmezlerin teorisine de hiperbolik geometri denir.

Böylece Öklidyen uzaklıktan farklı olarak, parabolik, eliptik ve hiperbolik olmak üzere üç farklı uzaklık tanımlamış olduk. Bu üç farklı uzaklık, bir o doğrusu üzerinde tanımlanmış bizi bu o doğrusunun üç farklı geometrisine getirmiş oldu. "bir doğru üzerindeki noktalar arasındaki uzaklıklar" ifadesinin dualine dönelim. Bu da, "bir noktadan geçen doğrular arasındaki açılar" dır. Noktalar arasındaki üç farklı uzaklık yerine, doğru demetindeki doğrular arasındaki üç farklı açı tanımlayacağız. Böylece üç farklı geometriye ulaşmış olacağız.

$A(x, y, z)$ ve $A_1(x_1, y_1, z_1)$ noktaları arasındaki uzaklığı

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2$$

olarak alırsak bu cins uzay 3 boyutlu Minkowski uzayı olur. Bu uzayda iki tip birim küre vardır:

$$\Sigma_1 \dots x^2 + y^2 - z^2 = -1$$

ve

$$\Sigma_2 \dots x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

Σ_1 küresinin merkezi $O(0,0,0)$ ve yarıçapı i (imajiner) dir. Bu Σ_1 in denkleminin iki yanını -1 ile çarparsak $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ elde edilir ki Öklid anlamında iki kanatlı bir hiperbolid olarak ele alınabilir (Şekil 9.8.).

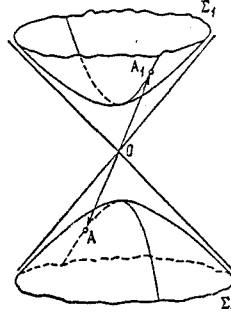
Σ_2 küresi de merkezi $O(0, 0, 0)$ ve yarıçapı 1 olan, Öklid anlamında tek kanatlı bir hiperbolid'dir (Şekil 9.9.).

Bir hiperbolik düzleminin noktaları diye

Σ_1 in çap uçlarına ait nokta çiftlerini kastediyoruz.

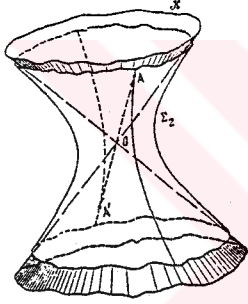
Buna göre bir hiperbolik düzlem Σ_1 in bir yaprağı olan Σ'_1 dır (şekil 9.10.).

Hiperbolik düzlemin çizgileri de Σ_1 küresi ile merkezinden geçen düzlemin arakesitleri olan büyük çemberlerdir. Böyle bir çizgi, Öklid anlamındaki hiperboldur Şekil 9.8 ve Şekil 9.10). Bu çizgiler üzerindeki uzaklıklar hiperbolik cinsten ölçülen uzaklıklardır. Bu cinsten çizgilerin demeti de düzlem demetleriyle

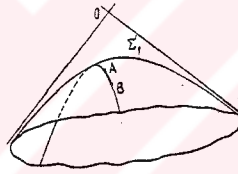


Şekil 9.8. Minkowski uzayında hiperbolik küre

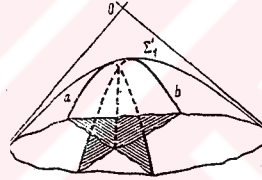
Σ'_1 nün arakesitleridir (Şekil 9.11.). Bu durumda hiperbolik düzlemin hareketleri Σ_1 küresinin (bir diğer ifade ile Σ'_1 yarı küresinin) dönmeleridir. Bu dönmeler (x,y,z) üç boyutlu uzayının orijinini sabit bırakan ve $d^2 = (x_1-x)^2 + (y_1-y)^2 - (z_1-z)^2$ uzaklığını koruyan dönüşümlerdir. Bu dönüşümlerin Σ_1 küresini kendine resmederler.



Şekil 9.9. Minkowski uzayında küre



Şekil 9.10. Yarı hiperbolik küre



Şekil 9.11. Yarı hiperbolik küre

İkili Hiperbolik Geometri ve Hareketler

Bu geometri hiperbolik geometriye benzer şekilde işlenebilir. Sadece hiperbolik geometride esas alınan Σ_1 küresi yerine Σ_2 küresi ele alınır (Şekil 9.9.). Bu kürenin yarı küreleri ile noktaları ve eğrileri de şekilde görülebilmektedir (Şekil 9.12. ve Şekil 9.13.). Öklid anlamında birer hiperbol olan çizgiler üzerindeki açı ölçüleri

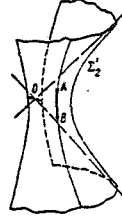
$$\delta_{ab} = k \log \frac{\sin \angle (a, i) / \sin \angle (a, j)}{\sin \angle (b, i) / \sin \angle (b, j)}$$

dir. Bu çizgileri veren arakesitteki düzlemler ikili hiperbolik düzlemlerdir. Bu düzlemin hareketleri de Σ_2 küresinin O merkezi etrafındaki dönmelerdir. İkili hiperbolik geometri de tıpkı hiperbolik geometri gibi

$$d^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 - (z_1 - z)^2$$

metriğiyle tanımlanır. Aslında bu metrik

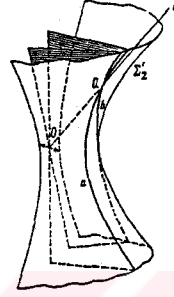
3- boyutlu Minkowski uzayındaki küreye aittir.



Şekil 9.12. Minkowski uzayında yarı küre

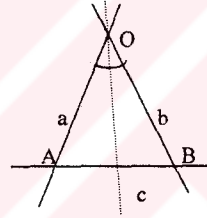
Elipitik açı

Tepe noktası O olan bir doğru demetinin a, b gibi iki ışın arasındaki açı, Öklidyen anlamında olduğu gibi aOb açısıdır. Bu açının ölçüsüne bir demet oluşturan a, b ışınlarının Elipitik açısı denir ve $\delta_{ab}^{(E)} = \angle aOb$ biçiminde gösterilir (Şekil 9.14.).



Şekil 9.13. Minkowski uzayında yarıküre

Burada bu iki ışının o doğrusunu kestiği noktalar A, B ise $\delta_{ab}^{(E)} = d_{AB}^{(E)}$ olacağı açıktır. O halde dualite ile yeni bir kavrama ulaşamadık. Bu demektir ki eliptik geometrinin duali kendisidir.



Şekil 9.14. Elipitik açı

Parabolik açı

Tepe noktası O olan bir doğru demetinin a, b gibi iki ışın arasındaki parabolik açı, Öklid anlamındaki tanımından çok farklı olarak, O dan geçmeyen ve demetin a ve b ışınlarının, sırası ile A ve B noktalarında kesen bir q doğrusu için $\delta_{ab}^{(P)}$ ile gösterilir ve

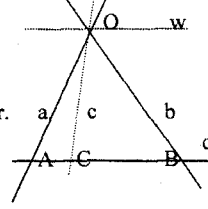
$$\delta_{ab}^{(P)} = |AB|$$

olarak tanımlanır (Şekil 9.15.).

Burada $|AB|$ ile A ve B noktaları arasındaki alışılmış Öklidyen uzaklık gösterilmektedir.

O halde, $|OE| = 1$ seçimi ile, $\delta_{ab}^{(P)} = \delta_{AB}^{(P)}$ olduğu aşıkardır.

Bu demektir ki, dualite ile parabolik halden de bir yeni geometriye ulaşamadık.



Şekil 9.15. Parabolik açı

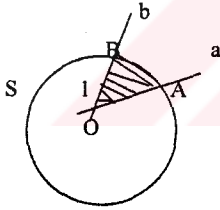
Galile Geometrisi ve Galile hareketleri

Öklid geometrisinden biliyoruz ki, O merkezli bir S birim çemberinin merkezinden geçen iki ışın a, b ve bunların çemberi kestiği noktalar A, B ise AB yayının ölçüsü eliptiktir. Yani $\delta_{ab} = \text{arc}AB$ dir (Şekil 9.16.).

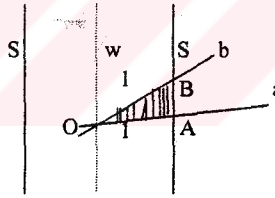
Galile geometrisinden, Galile çemberlerinin paralel iki doğru S doğrusu olduğunu biliyoruz (Şekil 9.17.). Tepesi Galile çemberinin merkezinde olan a, b gibi iki ışınlı bir demetin açısı, ışınların S Galile çemberini kestiği noktalar A, B olmak üzere

$$\delta_{ab} = AB$$

dir (Öklidyen uzaklık). Bu ölçü paraboliktir. Demette q ya paralel doğrular dışlanmaktadır. Zira böyle bir doğru w ise w ile bir diğer ışının arasında kalan açının ölçüsü belirli değildir. Bu açığı koruyan hareketler **Galile hareketleri** bu hareketler altında değişmezlerin teorisine de **Galile geometrisi** denir. Bu geometriyi ve hareketleri daha önce ele aldık.



Şekil 9.16. E^2 de yay uzunluğu



Şekil 9.17. G^2 de yay uzunluğu

Minkowski Geometrisi ve Minkowski Hareketleri

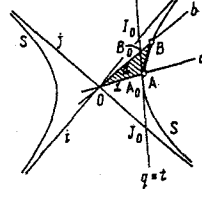
Minkowski çemberinin, Öklid anlamındaki adları birer hiperbollerdir (Şekil 9.18.). Çemberin merkezinden geçen a, b gibi iki ışın arasındaki açının ölçüsünün, ışınların S çemberini kestiği noktalar A, B olmak üzere,

$$\delta_{ab} = 2 S_{AoB}$$

olduğunu biliyoruz, buradan S_{AoB} ile şekil 9.16 da

Şekil 9.18. L^2 de yay uzunluğu

tarafı alanın ölçüsü kastediliyor, Bundan başka aynı açının ölçüsünü



$$\delta_{ab} = k \log \frac{\sin \angle (a, i) / \sin \angle (a, j)}{\sin \angle (b, i) / \sin \angle (b, j)}$$

olarak ta tanımlayabiliriz. Hatta, i ve j ışınlarını S hiperbolunun asimptotları olarak alır ve bu a, b, i, j ışınlarının belli bir q (örneğin S'nin tepe noktasındaki t teğeti) doğrusunu kestikleri noktalar A_o, B_o, I_o, J_o olmak üzere

$$\delta_{ab} = k \log \frac{A_o I_o / A_o J_o}{B_o I_o / B_o J_o}$$

olarak da alabiliriz, burada k sabiti logaritmanın tabanına bağlı olarak belirtilebilir. Buradan Minkowski geometrisinde, bir O merkezli bir doğru demetine göre açılarn ölçüleri, hiperboliktir.

Co-Hiperpolik Geometri

Tepe noktası O olan bir ışın demetinde

a, b den farklı iki ışın i ve j olarak tesbit edelim.

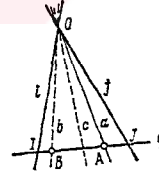
O zaman $a \neq i$, $a \neq j$ ve $b \neq i$, $b \neq j$ olmak üzere a ile b

doğruları arasındaki hiperbolik açı $\delta_{ab}^{(H)}$

ile gösterilir ve

$$\delta_{ab}^{(H)} = k \log \frac{\sin \angle (a, i) / \sin \angle (a, j)}{\sin \angle (b, i) / \sin \angle (b, j)}$$

olarak tanımlanır (Şekil 9.19.).



Şekil 9.19. Hiperbolik açı

Burada k bir keyfi sabit olup birimin seçilişine bağlıdır. Logaritmanın tabanının seçilişi de keyfidir, logaritması alınan sinüslerin kesrine gelince bu kesir bu dört doğrunun çifte oranıdır, yani

$$(a, b; i, j) = \frac{\sin \angle (a, i) / \sin \angle (a, j)}{\sin \angle (b, i) / \sin \angle (b, j)}$$

dir. Logaritma fonksiyonunun tanım bölgesi $\mathbb{R}^+$ olduğundan $(a, b; i, j) > 0$ olduğundan emin olmamız gerekir. Bunu sağlamak için i, j ışınları Öklid anlamında dik olarak seçilir ve $a, b, \dots$ ışınları da $\angle iOj$ açısı içinde kalacak şekilde seçilir.

Hiperbolik açıları koruyan hareketlere **Co-hiperbolik hareketler** denir, yani hiperbolik uzaklıklar yerine hiperbolik açılar (hiperbolik uzaklıkların dualleri) alındığı anlamında hiperbolik hareket yerine **Co-hiperbolik hareket** ve **hiperbolik geometri** yerine de **co-hiperbolik geometri** ifadesi kullanılır.

Her geometriye bir hareket grubu eşlik etmektedir. Örneğin üç boyutlu Galile geometrisinde $(O; x, y, z)$ sabit ve $(O'; x', y', z')$ hareketli sistem olmak üzere hareketin denklemleri

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & v_1 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

dir. Pseudo Galile geometrisindeki hareketin denklemleri

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & v_1 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

dir. Pseudo Galile geometrisindeki hareketleri $P(3)$ ile gösterelim.

$$P(3) = \left\{ A | A = \begin{bmatrix} \cosh \alpha & \sinh \alpha & v_1 \\ \sinh \alpha & \cosh \alpha & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \det A = 1 \right\}$$

$P(3)$ te katı hareketlerin bir cümlesi $(P(3), o)$ ikilisi bir gruptur (pseudo Galile grubu). Böylece şu teoremi verebiliriz.

Teorem 9.1: $P(3)$ teki katı hareketlerin cümlesi bileşke işlemine göre bir gruptur.

Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız

$P(3)$ de genel hareketin denklemi $A = A(t) \in P(3)$ ve $C = C(t) \in \mathbb{R}^3_1$ olmak üzere

$$Y = A X + C \quad \dots\dots\dots (I)$$

dir (Hacısalıhoğlu 1983). Bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dA}{dt} X + A \frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt} \quad \dots\dots\dots (II)$$

olur. Burada

$$V_o = \frac{dY}{dt} \text{ ye hareketin mutlak hızı,}$$

$$V_r = A \frac{dX}{dt} \text{ ye hareketin rölatif hızı,}$$

$$V_f = \frac{dA}{dt} X + \frac{dC}{dt} \text{ ye de hareketin sürüklenme hızı denir.}$$

Biri E' sabit uzay ve diğeri de E' ye göre hareket eden E hareketli uzay olmak üzere

$P(3)$ uzayındaki hareketleri $\frac{E}{E'}$ biçiminde gösteririz. A ve C matrisleri bir $t \in \mathbb{R}$ parametresine göre sürekli ve türevli fonksiyonlardır.

Tanım 9.1 (Rölatif hız) X noktasının E (hareketli) pseudo Galile uzayına göre hız vektörüne, yani X noktası E deki yörüngesini çizirken sahip olduğu vektörel hız X noktasının **izafi (rölatif) hızı** denir ve V_r ile gösterilir.

Tanım 9.2 (Mutlak Hız) X noktasının E' sabit uzayına göre hızına X noktasının **mutlak hızı** denir ve V_o ile gösterilir.

Böylece, V_o, V_f, V_r hız vektörleri arasında

$$V_o = V_f + V_r$$

bağıntısı elde edilir.

Eğer X noktası E hareketli uzayda sabit bir nokta ise $V_r = 0$ olacağından $V_o = V_f$ olur.

Hızlar kanunu : Yukarıdaki bağıntıyı bir teoremle ifade edebiliriz. Bu bağıntı E/E' hareketinde **hızlar kanunu** adını alır.

Teorem 9.2 Bir noktanın mutlak hız vektörü, sürüklenme hız vektörü ile izafi hız vektörünün toplamına eşittir. Yani

$$V_a = V_f + V_r$$

dir.

9.1 İvmeler ve İvmelerin Birleşimi

E Pseudo Galile uzayı E' Pseudo Galile uzayına göre E/E' Pseudo galile hareketi mevcut olsun. Bu hareket esnasında E uzayına göre, dolayısıyla da E' uzayına göre hareket eden bir X noktası göz önüne alınsın . X in hareketine ait hız formülleri elde edilmişti, şimdi ise X noktasının ivmesine ait ivme formülleri elde edilecektir.

Tanım 9.1.1 X noktasının E hareketli uzayına göre V_r rölatif hız vektörünün türevi alınarak elde edilen

$$V_r = A\dot{X}$$

$$b_r = \dot{V}_r = A\ddot{X}$$

vektörüne X in E deki **rölatif ivme vektörü** diyecek ve onu b_r ile göstereceğiz.

Bu türev alınırken X noktası E de hareket eden bir nokta olarak düşünüldüğünden A matrisi sabit olarak alınmıştır.

Teorem 9.1.1 E hareketli Pseudo Galile uzayında, bir t parametresine göre hareket eden bir nokta X olsun.

$$b_a = b_f + b_c + b_r$$

dir (Burada $b_c = 2A\dot{X}$ olup buna Pseudo Galile anlamında Coriolis ivmesi adını vereceğiz).

$\dot{A}$ matrisi regüler olmadığından

$$V_f = \dot{A}X + \dot{C} = 0$$

denkleminin çözümünü araştıramıyoruz, yani hareketin pol noktası genel olarak yoktur.

Sonuç 9.1.1 Bir $X \in E$ noktası E de sabit ise, X noktasının sönüklenme ivmesi bu noktanın mutlak ivmesine eşittir.

İspat :

$$V_a = \dot{A}X + A\dot{X} + \dot{C}$$

den her iki tarafın tekrar türevi alınırsa

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \dot{A}\dot{X} + \dot{A}\dot{X} + A\ddot{X} + \ddot{C}$$

X noktası sabit olduğundan türevleri sıfırdır.

$$\dot{V}_a = \ddot{A}X + \ddot{C} = b_f$$

$$b_a = b_f$$

dir.

KAYNAKLAR

- Hacısalihoglu, H. H. 1983. Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No:2, 895s., Ankara.
- Hacısalihoglu, H. H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2
- Hacısalihoglu, H. H. 1980. Dönüşümler ve Geometrilere. İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları Malatya.
- Hacısalihoglu, H.H. ve Özdamar, E. 1984. Topology of Dual Numbers and Theory of the Functions of Dual Variable With Dual Values. Journal of Sciences and Arts of Gazi University. Vol. 1. No: 2.
- Müller, H. R. 1963. Kinematik Dersleri (Çeviri). Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları No:27, 292s., Ankara.
- O' Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry. Academic Press, New York, London.
- Yaglom, I. M. 1979. A Simple Non-Euclidean Geometry and Its Physical Basis. 307s., New York.
- Çiğirim. Ü. 1993. Sayılar ve Geometrilere. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ergin, A. E. 1988. Lorentz Düzleminde Kinematik. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Hacısalihoglu, H. H. 1971. On The Rolling of One Curve or Surface Upon Another. Proceedings of the Royal Irish Academy. Volume 71. section A, Number 2.
- Özkın, İ. K. Kompleks Fonksiyonlar Teorisi Ders Notları, Ertem Matbaacılık, Ankara, 1989.
- Birman, G. S. ve Nomizu, K. 1984-A. Trigonometry in Lorentzian Geometry. Am. Math. Mont. 91(9), 543-549.
- Yaylı, Y. 1988. Hamilton Hareketleri ve Lie Grupları. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Hacısalihoglu, H. H. 1980. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometrilere. İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları. Mat. No. 1.

ÖZGEÇMİŞ

Hatay’da 1964 yılında doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Hatay’da tamamladı. 1985 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 1989 yılında mezun oldu. 1993 te Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 1995 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde doktora öğrenimine başladı.

1993 – 1998 yılları arasında Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi’nde, 1998 yılından bu yana da Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü’nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

