ANKARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM TEORİSİ

Nilifer TOPSAKAL

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2003

Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU danışmanlığında, Nilifer TOPSAKAL tarafından hazırlanan bu çalışma 12.06.2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı`nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Doç. Dr. Afet GOLAYOĞLU

Yard. Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN SALINIM TEORİSİ

Nilifer TOPSAKAL
Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde birinci basamaktan gecikmeli diferensiyel denklemlere ilişkin başlangıç değer problemleri tanıtıldı. Ayrıca salınım tanımları ile birlikte diferensiyel denklemler için bilinen bazı sonuçlar verildi. İkinci bölümde lineer tek gecikmeli kararlı ve kararsız denklemler hakkında bilinen önemli salınım sonuçları ifade edildi ve bunlara uygun örnekler seçildi. Üçüncü bölümde $y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, y(t-r_i)=0$ şeklinde çok gecikmeli diferensiyel denkleminin salınımlı çözümlere sahip olmasını sağlayan yeter koşullardan söz edildi. Dördüncü bölümde değişken katsayılı çok gecikmeli diferensiyel denklemlerin bütün çözümlerini salınımlı yapan sonuçlar incelendi. Beşinci bölümde kuvvet terimli, gecikmeli bir denklemin salınımlılığına ilişkin bir sonuç verildi. Son olarak, altıncı bölümde lineer olmayan gecikmeli $y'(t)+p(t)f(y(g(t)))=0$ denklemine ilişkin bazı önemli salınım sonuçları ifade edildi.

2003, 72 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Gecikmeli diferensiyel denklem , salınımlı çözüm, salınımlı olmayan çözüm.

ABSTRACT

Master Thesis

OSCILLATION THEORY OF FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RETARDED ARGUMENTS

Nilifer TOPSAKAL
Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU

This work consists of six chapters. In the first chapter, initial value problems including first order delay differential equations are introduced. Moreover, definitions of oscillation are given and some basic results about ordinary differential equations are summarized. In the second chapter, some well known oscillation results about stable and unstable linear differential equations with a single delay are given, as well as some suitable examples are set up. In the third chapter, some sufficient conditions that make the equation $y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, y(t-r_i)=0$ oscillates are expressed. In the fourth chapter, some results are studied on oscillation of equations with several delay arguments and variable coefficients. In the fifth chapter, a result is given for equations with delays and forcing terms. Finally, in the sixth chapter, some important results are stated about the nonlinear equations $y'(t)+p(t)f(y(g(t)))=0$.

2003, 72 pages

Key Words : Differential equations with delay arguments , oscillation solution, nonoscillation solution

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışma boyunca bana destek olan saygı değer hocam Prof. Dr. Hüseyin BEREKETOĞLU ' na teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Nilifer TOPSAKAL

Ankara, Haziran 2003

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1.1. Temel Kavramlar

Salınım teorisindeki çalışmaların pek çoğu ikinci ya da daha yüksek basamaktan adi diferensiyel denklemler etrafında yoğunlaşmıştır. Çünkü birinci basamaktan adi diferensiyel denklemler genel olarak salınımlı çözümlere sahip olmazlar. Halbuki, adi gecikmeli diferensiyel denklemler (AGDD) için durum oldukça farklıdır. Zira, birinci basamaktan bir AGDD salınımlı çözümlere sahip olabilir. Bu ayrıcalık açık olarak denklemdeki gecikme argümentlerinden kaynaklanır. Birinci basamaktan AGDD ler için salınım problemleri teorik ve keza pratik açıdan önemlidir. Bu konuda ilk kez Bernoulli (1728) sonlu boyutlu bir tüp içindeki ses titreşimlerini incelerken rastladığı birinci basamaktan AGDD in çözümlerini ve özelliklerini araştırdı. Uzun bir aradan sonra Myskis birinci basamaktan AGDD ler için çok sayıda salınım problemini inceledi ve bunları kitabında topladı (Myskis 1972). Özellikle 1950 den sonra AGDD lerin salınım teorisi çok sayıda uygulamalı matematikçinin ve keza diğer bilim adamlarının ilgisini çekti ve bu ilgi sistematik olarak günümüze kadar sürdü.

Örnek 1.1.1. Gecikmeli birinci basamaktan

$$y'(t)+y\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0 \tag{1.1.1}$$

denklemi salınımlı $y=\sin t$ ve $y=\cos t$ çözümlerine sahiptir. Keza

$$y'(t)-y\left(t+\frac{\pi}{2}\right)=0 \tag{1.1.2}$$

denklemi de salınımlı $y=\sin t$ ve $y=\cos t$ çözümlerine sahiptir. Bununla birlikte, gecikmesiz

$$y'(t)+y(t)=0 \tag{1.1.3}$$

denkleminin salınımlı çözümleri yoktur.

Bu örnek birinci basamaktan gecikmeli diferensiyel denklemleri salınım açısından neden incelemek gerektiğini matematiksel olarak yeterince açıklamaktadır.

1.2. Başlangıç Değer Problemleri

$$x'(t) = f(t,x) \tag{1.2.1}$$

adi diferensiyel denklemini

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.2.2}$$

başlangıç koşulu ile birlikte ele alalım. f 'e göre belli koşulların sağlanması halinde (1.2.1)-(1.2.2) başlangıç değer probleminin bir tek çözüme sahip olup

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,ds \quad , \quad t \geq t_0 \quad , \tag{1.2.3}$$

integral denklemine eşdeğer olacağı iyi bilinmektedir.

Şimdi

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), x(t-r)) \ , \quad r > 0 \ , \ t \geq t_0 \tag{1.2.4}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Bu denklemin ikinci yanı sadece şu anki $x(t)$ konumuna değil aynı zamanda r birim önceki $x(t-r)$ konuma da bağlıdır. Böyle bir denkleme geçmiş belleğe sahip olması anlamında bir *adi gecikmeli diferensiyel denklem* (AGDD) denir. (1.2.4) denklemi

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s), x(s-r))\,ds \tag{1.2.5}$$

integral denklemine eşdeğerdir. (1.2.4) ün bir çözümünü tanımlamak için $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulu yerine geçen ve $[t_0 - r, t_0]$ üzerinde tanımlı olan bir $\phi(t)$ *başlangıç fonksiyonunun* bilinmesi gereklidir.

Böylece $[t_0, T]$, $T \leq +\infty$ üzerinde (1.2.4) denklemini ve $E_{t_0} = [t_0 - r, t_0]$ aralığında

$$x(t) = \phi(t) \tag{1.2.6}$$

başlangıç koşulunu sağlayan bir sürekli x fonksiyonunun aranması işine GDD ler için bir *başlangıç değer problemi* adı verilir. Burada $x(t_0 + 0) = \phi(t_0)$ kabul edilmeli ve $[t_0, T]$ aralığının uç noktalarındaki türevlerden daima tek yanlı türevler anlaşılmalıdır.

Belli varsayımlar altında (1.2.4)-(1.2.6) başlangıç değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliği her zaman garanti edilebilir.

Gecikme $r = r(t)$ şeklinde t nin fonksiyonu olduğu zaman, $x(t)$ aynı şekilde (1.2.4) denklemini $t \geq t_0$ için sağlamalı ve

$$E_{t_0} = \{t_0\} \cup \{t - r(t) : t - r(t) < t_0 \ , \ t \geq t_0\}$$

cümlesi üzerinde verilen $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu ile çakışması gerekmelidir. Çözüm $[t_0, T]$ aralığında istenirse, o zaman E_{t_0} başlangıç cümlesi

$$E_{t_0} = \{t_0\} \cup \{t - r(t) : t - r(t) < t_0 \ , \ t_0 \leq t \leq T\}$$

dir. Başlangıç cümlesinin t_0 başlangıç noktasına bağlı olduğu aşağıdaki örneklerde görülebilir.

Örnek 1.2.1.

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x\left(t - \cos^2 t\right)\right) \qquad (1.2.7)$$

denklemi için $t_0 = 0$ ise, bu durumda $E_0 = [-1, 0]$ olup $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu $[-1, 0]$ aralığında verilmelidir.

Örnek 1.2.2.

$$x'(t) = a\, x\left(\frac{t}{2}\right) \qquad (1.2.8)$$

denklemi için

$$E_0 = \{0\} \text{ve}\, E_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

dir.

1.3. Salınım Tanımları

Önce aşağıdaki örnekleri göz önüne alalım.

Örnek 1.3.1.

$$y'' + y = 0 \tag{1.3.1}$$

denklemi $y(t) = \cos t$ ve $y(t) = \sin t$ periyodik çözümlerine sahiptir.

Örnek 1.3.2.

$$y''(t) - \frac{1}{t}\, y'(t) + 4t^2\, y(t) = 0 \tag{1.3.2}$$

denkleminin $y(t) = \sin t^2$ çözümü periyodik değildir ama salınım karakterine haizdir.

Örnek 1.3.3.

$$y''(t) + \frac{1}{2}\, y(t) - \frac{1}{2}\, y(t - \pi) = 0 \ , \ t \geq 0 \ , \tag{1.3.3}$$

denkleminin $y(t) = 1 - \sin t$ çözümü katlı sıfırların bir sonsuz dizisine sahip olduğu için bu çözüm de salınım karakterine sahiptir.

Örnek 1.3.4.

$$y''(t) - y(-t) = 0 \tag{1.3.4}$$

denklemi bir salınımlı $y_1(t) = \sin t$ çözümüne ve bir de salınımlı olmayan (salınımsız) $y_2(t) = e^t + e^{-t}$ çözümüne sahiptir.

Şimdi

$$y''(t) + a(t)\, y(t - r(t)) = 0 \tag{1.3.5}$$

denklemini ele alalım. Bu denklemin $y(t)$ çözümleri $[T_y, \infty)$ üzerinde mevcut olmak üzere her $T \geq T_y$ için $\sup\{\, |y(t)| : t \geq T \,\} > 0$ sağlansın. Başka bir ifadeyle, herhangi bir sonsuz $[T, \infty)$ aralığında $|y(t)|$ 0 olsun. Böyle bir çözüme çoğunlukla bir *düzgün çözüm* (regular solution) denir. Buna göre aşikar olmayan bir çözüm daima bir düzgün çözümdür. Şimdi düzgün çözümlerin salınımlı olması ile ilgili olarak literatürde en sık karşılaşılan iki farklı tanım biçiminden söz edelim.

Tanım 1.3.1. Aşikar olmayan $y(t)$ çözümü $t \geq t_0$ için keyfi sayıda çok sıfıra sahip ise (yani, $\lim_{n \to \infty} t_n = +\infty$ olacak şekilde $y(t)$ nin sıfırlarının bir $\{t_n\}$ dizisi varsa), bu durumda $y(t)$ çözümüne *salınımlıdır* denir. Aksi durumda, $y(t)$ ye *salınımlı olmayan* çözüm denir.

Salınımlı olmayan çözümler için her $t \geq t_1$ için $y(t) \neq 0$ olacak şekilde daima bir t_1 noktası vardır.

Tanım 1.3.2. Aşikar olmayan $y(t)$ çözümü, T herhangi bir sayı olmak üzere (T, ∞) üzerinde işaret değiştiriyorsa, bu durumda $y(t)$ çözümüne *salınımlıdır* denir.

(1.3.5) deki $r(t) \equiv 0$ ve $a(t)$ sürekli ise, bu iki tanım eşdeğerdir. Çünkü böyle bir durumda çözümün tekliği nedeniyle katlı sıfırlar oluşmaz. Fakat, Örnek 1.3.3 de görüldüğü üzere bir gecikmeli denklem katlı sıfırlara sahip olabilmektedir. Bu iki tanım, özellikle daha yüksek basamaklı adi diferensiyel denklemler için de farklıdır. Zira böylesi denklemlerin çözümleri katlı sıfırlara sahip olabilir.

Tanım 1.3.1, Tanım 1.3.2 den daha geneldir. Gerçekten (1.3.3) denkleminin $y(t) = 1 - \sin t$ çözümü birinci tanıma göre salınımlı olduğu halde, ikinci tanıma göre salınımlı değildir.

Salınım teorisinde çok önemli bir yeri olan Sturm karşılaştırma teoremi

$$y''(t) + a(t)\, y(t) = 0 \tag{1.3.6}$$

denklemine uygulanırsa, aşağıdaki sonuçlar bulunur:

Sonuç 1.3.1. (1.3.6) lineer adi diferensiyel denkleminin bütün çözümleri ya salınımlıdır ya da salınımlı değildir.

Bu sonuca göre (1.3.6) denklemine, her çözümü salınımlı ise, *salınımlı denklem*; aksi durumda *salınımlı olmayan denklem* denir.

Sonuç 1.3.2. (1.3.6) denklemi salınımlı ve her $t \geq t_0$ için $a(t) \leq b(t)$ ise, bu durumda

$$y''(t) + b(t)\, y(t) = 0 \tag{1.3.7}$$

denklemi de salınımlıdır. Ayrıca, (1.3.7) denklemi salınımlı değilse, o zaman (1.3.6) denklemi de salınımlı değildir.

Örneğin, Euler

$$y''(t) + \frac{a}{t^2}\, y(t) = 0 \tag{1.3.8}$$

denklemi $a = \dfrac{1}{4}$ için salınımlı değilken; $a = \dfrac{1+\varepsilon}{4}$ $(\varepsilon > 0)$ için salınımlıdır. Buradan Sonuç 1.3.2 ye göre aşağıdaki kriter bulunur:

$t^2 a(t) \leq \dfrac{1}{4}$ ise, (1.3.6) denklemi salınımlı değildir; ve $t^2 a(t) > \dfrac{1+\varepsilon}{4}$ $(\varepsilon > 0)$ ise, (1.3.6) denklemi salınımlıdır.

Sonuç 1.3.2 den aşağıdaki sonuç yazılabilir:

Sonuç 1.3.3. $a(t) \leq 0$ ise, bu durumda (1.3.6) denklemi salınımlı değildir.

Örnek 1.3.5. İkinci basamaktan gecikmeli

$$y''(t) + y(\pi - t) = 0 \tag{1.3.9}$$

denklemi hem bir salınımlı $y_1(t) = \sin t$ çözümüne ve hem de bir salınımlı olmayan $y_2(t) = e^t - e^{\pi - t}$ çözümüne sahiptir. Öte yandan, gecikmeli

$$y''(t) - y(t - \pi) = 0 \tag{1.3.10}$$

denkleminin $y = \sin t$ ve $y = \cos t$ gibi salınımlı çözümleri varken, adi diferensiyel

$$y''(t) - y(t) = 0$$

denkleminin salınımlı çözümleri yoktur.

2. TEK GECİKMELİ LİNEER DENKLEMLER

Bu bölümde sadece bir gecikme içeren bazı gecikmeli diferensiyel denklemler ele alınarak bunların çözümlerini salınımlı kılan önemli sonuçlardan söz edilecektir.

2.1. Tek Gecikmeli Kararlı Tip Denklemler

Bu kesimde aşağıda verilen gecikmeli diferensiyel eşitsizliklerin ve denklemin çözümlerinin salınımlı olması durumu ele alınacaktır:

$$y'(t)+p(t)y(g(t))\le 0, \tag{2.1.1}$$

$$y'(t)+p(t)y(g(t))\ge 0, \tag{2.1.2}$$

$$y'(t)+p(t)y(g(t))=0, \tag{2.1.3}$$

burada $p,g\in C[R^+,R^+]$, $g(t)<t$ ve $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=+\infty$.

(2.1.3) formunda bir denkleme bir *kararlı tip denklem* denir.

Teorem 2.1.1.

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds>\frac{1}{e} \tag{2.1.4}$$

ise, bu durumda

(i) (2.1.1) eşitsizliği nihayet pozitif çözümlere sahip değildir;

(ii) (2.1.2) eşitsizliği nihayet negatif çözümlere sahip değildir;

(iii) (2.1.3) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Kanıt. Genelliği bozmadan $g(t)$ yi azalmayan alalım. Aksi durumda $\sigma(t)=\max(g(s),\, s\in[0,t])$ alınır ve (2.1.4) eşitsizliği $\varliminf\limits_{t\to\infty}\int_{\sigma(t)}^{t} p(s)ds>\frac{1}{e}$ ifadesine eşdeğer olur. İlk olarak (i) durumunu ispatlayalım. $y(t)$, $t\ge t_1$ için $y(g(t))>0$ olacak şekilde (2.1.1) eşitsizliğinin nihayet bir pozitif çözümü olsun. (2.1.4) den dolayı

$$\int_{g(t)}^{t} p(s)ds \ge c > \frac{1}{e} \quad , t \ge t_2 , \tag{2.1.5}$$

olacak biçimde $t_2 \ge t_1$ vardır. $t \ge t_1$ için $y'(t) < 0$ olduğundan, (2.1.1) den

$$y'(t) + p(t)y(t) \le 0 \tag{2.1.6}$$

dır. (2.1.6) eşitsizliğini $y(t)$ ile bölüp $g(t)$ den t ye integre edersek

$$\ln\frac{y(t)}{y(g(t))} + \int_{g(t)}^{t} p(s)ds \le 0 \quad , t \ge t_2 ,$$

ve buradan

$$\ln\frac{y(g(t))}{y(t)} \ge \int_{g(t)}^{t} p(s)ds \ge c \quad , t \ge t_2 ,$$

bulunur. $x \ge 0$ için $e^x \ge e\,x$ olduğundan,

$$\frac{y(g(t))}{y(t)} \ge ec \quad , t \ge t_2 ,$$

çıkar. Yukarıdaki işlemlerin tekrar edilmesiyle,

$$\frac{y(g(t))}{y(t)} \ge (ec)^k \quad , t \ge t_k , \tag{2.1.7}$$

olacak biçimde bir $\{t_k\}$ dizisi vardır. (2.1.5) den dolayı $t \ge t_k$ için

$$\int_{g(t)}^{t^*} p(s)ds \ge \frac{c}{2} \qquad \text{ve} \qquad \int_{t^*}^{t} p(s)ds \ge \frac{c}{2}$$

olacak şekilde bir t^* vardır. (2.1.1) eşitsizliğinin $g(t)$ den t^*'a kadar integre edilmesiyle

$$y(t^*) - y(g(t)) + \int_{g(t)}^{t^*} p(s)y(g(s))ds \le 0$$

ve buradan

$$y(g(t)) \ge y(g(t^*))\frac{c}{2} \tag{2.1.8}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer olarak

$$y(t) - y(t^*) + \int_{t^*}^{t} p(s)y(g(s))ds \le 0$$

ve dolayısıyla

$$y\left(t^*\right) \geq y(g(t))\frac{c}{2} \tag{2.1.9}$$

olur. (2.1.8) ve (2.1.9) un birleştirilmesiyle

$$y\left(t^*\right) \geq y\left(g\left(t^*\right)\right)\left(\frac{c}{2}\right)^2 \tag{2.1.10}$$

eşitsizliği bulunur. (2.1.7) ve (2.1.10) dan her $t \geq t_k$ için

$$\left(\frac{2}{c}\right)^k \geq \frac{y\left(g\left(t^*\right)\right)}{y\left(t^*\right)} \geq (ec)^k \tag{2.1.11}$$

elde edilir.

Şimdi

$$(ec)^k > \left(\frac{2}{c}\right)^2 \tag{2.1.12}$$

olacak şekilde yeterince büyük bir k seçelim. Bu mümkündür, çünkü $ec > 1$ dir. Buradan (2.1.11) bir çelişkidir.

Paralel bir inceleme (2.1.2) için sağlanır. Buradan (iii) sonucu elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $p(t) \equiv p > 0$ ve $g(t) \equiv t - r$, $r > 0$, özel durumu için aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 2.1.2. (2.1.3) denklemindeki p ve r sayıları pozitif olsun. Eğer

$$pre \leq 1 \tag{2.1.13}$$

ise, bu durumda (2.1.3) denklemi bir salınımlı olmayan çözüme sahiptir (Ladas 1979).

Kanıt. (2.1.3) denkleminin $y(t) = \exp(\lambda t)$ formunda bir çözümüne bakalım. (2.1.3) denkleminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) \equiv \lambda + p\exp(-\lambda r) = 0$$

olup

$$F(0) = p > 0$$

ve

$$F\left(-\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r}+pe=\frac{pre-1}{r}\le 0$$

dır. Buradan $y(t)=\exp(\lambda t)$, (2.1.3) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olacak şekilde bir negatif gerçel $\lambda\in\left[-\frac{1}{r},0\right)$ sayısı vardır.

Sonuç 2.1.1. (2.1.3) denklemindeki p ve r pozitif sayılar ise, bu durumda

$$pre>1 \tag{2.1.14}$$

(2.1.3) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşuldur.

Örnek 2.1.1

$$y'(t)+\left(\frac{1}{e}\right)y(t-1)=0 \tag{2.1.15}$$

denklemi, $pre=1$ olduğundan, Teorem 2.1.2 nedeniyle salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir. Gerçekten

$$y(t)=\exp(-t)$$

verilen denklemin salınımlı olmayan bir çözümüdür.

Örnek 2.1.2.

$$y'(t)+\frac{1}{(e\ln 2)\,t}\,y\left(\frac{t}{2}\right)=0 \tag{2.1.16}$$

denklemini ele alalım, burada $p(t)=\frac{1}{(e\ln 2)\,t}$ dir. Açık olarak

$$\int_{\frac{t}{2}}^{t}p(s)ds=\frac{1}{e} \tag{2.1.17}$$

olduğundan, (2.1.16) denklemi (2.1.4) koşulunu sağlamaz. Gerçekten $\alpha=-\frac{1}{\ln 2}$ olmak üzere

$$y(t)=t^{\alpha}$$

verilen denklemin salınımlı olmayan bir çözümüdür.

Teorem 2.1.2 ve yukarıdaki örneklere göre (2.1.4) koşulu (2.1.3) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için olası en iyi koşuldur.

Sonuç 2.1.2. Daha kompleks formlu olan

$$y'(t)+p(t)y(g(t)-s(y(t)))=0 \tag{2.1.18}$$

gecikmeli denklemini ele alalım, burada $p(t)$ ve $g(t)$ Teorem 2.1.1 in koşullarını sağlamaktadır. $s(y)$ sınırlı, negatif olmayan, sürekli bir fonksiyon ise, bu durumda (2.1.18) denkleminin her çözümü (2.1.4) koşulu altında salınımlıdır.

Kanıt. Gerçekten, genelliği bozmadan (2.1.18) denkleminin bir pozitif $y(t)$ çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. Bu durumda yeterince büyük bir t_1 vardır öyle ki $t \geq t_1$ için

$$y(g(t)-s(y(t)))>0 \ .$$

Buradan $y'(t)\leq 0$ ve $y(g(t))\leq y(g(t)-s(y(t)))$ dir. Böylece

$$y'(t)+p(t)y(g(t))\leq 0$$

olur ki bu Teorem 2.1.1 ile çelişir.

Teorem 2.1.3. $p,\ g\in C[R^+,R^+]$, $g(t)<t$ ve azalmayan, $\lim_{t\to\infty} g(t)=+\infty$ ve

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{g(t)}^{t} p(s)ds>1 \tag{2.1.19}$$

ise, bu durumda (2.1.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Kanıt. Genelliği bozmadan $t\geq t_1$ için $y(g(t))>0$ olacak biçimde $y(t)>0$ salınımlı olmayan bir çözüm olsun. (2.1.3) denklemini $g(t)$ den t ye kadar integre edersek,

$$y(t)-y(g(t))+\int_{g(t)}^{t} p(s)y(g(s))ds=0$$

veya eşdeğer olarak

$$y(t)+y(g(t))\left[\int_{g(t)}^{t} p(s)ds-1\right]\leq 0 \tag{2.1.20}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Çünkü t yeterince büyük olduğu zaman (2.1.19) koşulundan

$$\int_{g(t)}^{t} p(s)ds > 1$$

dir.

Örnek 2.1.3.

$$y'(t)+\left[\left(\sqrt{2}+\frac{1}{e}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)+\cos t\right]y\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=0 \qquad (2.1.21)$$

denklemini ele alalım; burada

$$t\in R^{+} \text{ için } p(t)=\left(\sqrt{2}+\frac{1}{e}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)+\cos t>0.$$

Buna göre $t\in R^{+}$ için

$$\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} p(s)ds=\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t}\left[\left(\sqrt{2}+\frac{1}{e}\right)\left(\frac{2}{\pi}\right)+\cos s\right]ds=\sqrt{2}+\frac{1}{e}+\sin t+\cos t$$

elde edilir. Buradan

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} p(s)ds=\frac{1}{e}$$

olur ki bu Teorem 2.1.1 in (2.1.4) koşulunu sağlamaz. Bununla birlikte

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} p(s)ds=2\sqrt{2}+\frac{1}{e}>1$$

dir. Sonuç olarak (2.1.21) denklemi Teorem 2.1.3 ün (2.1.19) koşulunu sağlar. Buradan (2.1.21) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Bu örnekten,

$$\lim_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds$$

mevcut olmadığı zaman (2.1.4) ve (2.1.19) koşullarının kesişebildikleri anlaşılmaktadır.

Teorem 2.1.4. $p\ ,\ g\in C[R^{+},R^{+}]\ ,\ g(t)<t\ ,\ \lim_{t\to\infty} g(t)=+\infty$ ve

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds<\frac{1}{e} \tag{2.1.22}$$

ise, bu durumda (2.1.3) denklemi salınımlı olmayan çözüme sahiptir (Ladde 1979).

Kanıt. İspat için (2.1.3) denkleminin

$$y(t)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\lambda(s)ds\right] \tag{2.1.23}$$

formunda bir çözüme sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Böyle bir çözüm için

$$\lambda(t)=-p(t)\exp\left[-\int_{g(t)}^{t}\lambda(s)ds\right] \tag{2.1.24}$$

olur.

Amacımız (2.1.24) denklemini sağlayan reel değerli, sürekli bir $\lambda(t)$ fonksiyonunun varlığını göstermektir. Aşağıdaki gibi bir operatör tanımlayalım:

$$(T\lambda)(t)=\begin{cases} -p(t)\exp\left[-\int_{g(t)}^{t}\lambda(s)ds\right] & ,\quad t\geq t_0\,, \\ \phi(t)\ ,\ t_0-r\leq t\leq t_0\ , & \left(\inf_{t\geq t_0} g(t)=t_0-r\ ,\ r>0\right), \end{cases} \tag{2.1.25}$$

burada $r>0$. T operatörünün, sürekli fonksiyonlar $C[t_0-r,+\infty)$ uzayından yine kendi içine tanımlı olan azalmayan sürekli bir operatör olduğu açıktır.

(2.1.22) koşulundan

$$e\int_{g(t)}^{t} p(s)ds<1 \quad ,\ t\geq t_0\ , \tag{2.1.26}$$

olacak şekilde bir $t_0\in R^{+}$ bulunabilir. Şimdi

$$y_0(t)=-e\,p(t)\leq 0$$

olsun ve (2.1.25) deki $\phi(t)$ fonksiyonu $[t_0-r,t_0]$ üzerinde

$$y_0(t) \le \phi(t) \le 0 \tag{2.1.27}$$

eşitsizliğini sağlasın. Açıkça $y_0 \in C[t_0 - r, +\infty)$ olup (2.1.25) den (2.1.27) ye kadar olan ifadelerden

$$\begin{aligned}(Ty_0)(t) &= -p(t)\exp\left[-\int_{g(t)}^{t} y_0(s)ds\right] \\ &\ge -p(t)e = y_0(t) \ , \ t \ge t_0 \ ,\end{aligned}$$

olduğu görülür.

$t \in [t_0 - r, +\infty)$ için $x_0(t) \equiv 0$ alalım. Buradan

$$(Tx_0)(t) \le x_0(t)$$

dir. $y_0 \le x_0$ olduğu dikkate alınırsa, $Ty_0 \le Tx_0$ ve

$$y_0 \le Ty_0 \le Tx_0 \le x_0$$

bulunur.

$y_{n+1} = Ty_n$,

$$y_0 \le y_n \le y_{n+1} \le x_0$$

eşitsizliklerini sağlayan bir artan dizi olsun. Buradan $\{y_n\}$ dizisi bir λ limitine yakınsaktır. Lebesgue yakınsaklık teoreminden Ty_n de $T\lambda$ ya yakınsar. Buradan $T\lambda = \lambda$ dır. O halde λ , $[t_0 - r, +\infty)$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca, $t \ge t_0 - r$ için

$$y_0(t) \le \lambda(t) \le x_0(t) \ . \tag{2.1.28}$$

Bu ise (2.1.24) denkleminin $[t_0 - r, +\infty)$ üzerinde sürekli bir $\lambda(t)$ çözümüne sahip olduğunu ifade eder. Buradan

$$y(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right] \tag{2.1.29}$$

(2.1.3) denkleminin bir salınımlı olmayan çözümüdür.

Uyarı 2.1.1. $\lim_{t\to\infty} \int_{g(t)}^{t} p(s)ds$ mevcut olmadığı zaman, (2.1.4) ve (2.1.22) ya da (2.1.19) ve (2.1.22) koşulları arasında bir boşluk vardır ve bu boşluk bilindiği kadarıyla hala bir açık problem olarak sürmektedir.

Uyarı 2.1.2. (2.1.3) denkleminin salınımlı çözümleri üzerine ilk inceleme Myskis tarafından 1972 de yapılmıştır. Bu çalışmada

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,(t-g(t))<+\infty \quad , \quad \underline{\lim}_{t\to\infty}(t-g(t))\ \underline{\lim}_{t\to\infty}\ p(t)>\frac{1}{e} \tag{2.1.30}$$

şeklinde bir yeter koşul verilmiştir. Ancak buna göre (2.1.4) koşulunun (Ladde 1977) daha iyi olduğu açıktır.

Şimdi (2.1.3) denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışını inceleyelim. Bunun için $r>0$ bir sabit ve $p\in C[R^+,R^+]$ olmak üzere

$$y'(t)+p(t)y(t-r)=0 \quad , \quad t\ge t_0 \ , \tag{2.1.31}$$

denklemini ele alalım.

(2.1.31) denkleminin $t\in E_{t_0}=[t_0-r,\,t_0]$ için $y(t)=\phi(t)$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü $y(t;t_0,\phi)$ olsun. Burada $\phi(t)$, E_{t_0} üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Önce iyi bilinen aşağıdaki lemmayı ifade edelim (Driver 1977).

Lemma 2.1.1. $p(t)\equiv p>0$ ve $0\le pr<\frac{\pi}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\|\phi\|=\sup_{t_0-r\le s\le t_0}|\phi(s)|$$

olmak üzere

$$|y(t;t_0,\phi)|\le M\|\phi\|\exp(-\nu(t-t_0)) \ , \ t\ge t_0. \tag{2.1.32}$$

olacak biçimde M ve ν pozitif sabitleri vardır. Ayrıca $z(t;t_0,0)$,

$$z'(t)+p\,z(t-r)=h(t) \quad , \quad t\ge t_0 \quad , \tag{2.1.33}$$

denkleminin t_0 noktasında sıfır başlangıç fonksiyonunu sağlayan çözümü ise, bu durumda

$$|z(t;t_0,0)| \le \frac{M}{\nu}\exp(p+\nu)r \max_{t_0 \le s \le t} |h(s)| \tag{2.1.34}$$

dir.

Lemma 2.1.2. $0 \le \sigma(t) \le t$ sürekli ve $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = r < \infty$ var olmak üzere

$$y'(t) + y(t-\sigma(t)) = 0 \quad , \quad t \ge t_0, \tag{2.1.35}$$

denklemini ele alalım.

$$r < \frac{\pi}{2} \tag{2.1.36}$$

ise, bu durumda (2.1.35) denkleminin her çözümü $t \to \infty$ halinde sıfıra gider (Ladas, Sficas ve Stavroulakis 1983).

Kanıt. (2.1.35) denkleminin herhangi bir çözümü $y(t)$ olsun.

$$\sigma(t) \le r+1 \quad , \quad t \ge t_1,$$

ve

$$\frac{M}{\nu}\exp(1+\nu)r|r-\sigma(t)| \le \frac{1}{2} \quad , \quad t \ge t_1, \tag{2.1.37}$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde bir $t_1 \ge t_0 + 2r + 2$ seçelim, burada M ve V sabitleri $p=1$ halinde Lemma 2.1.1 deki gibi tanımlı sabitlerdir.

$x(t)$,

$$x'(t) + x(t-r) = 0 \quad , \quad t \ge t_1,$$

denkleminin $E_{t_1} = [t_1 - r, t_1]$ üzerinde $x_{t_1} = y_{t_1}$ başlangıç fonksiyonunu sağlayan çözümü olsun. (2.1.36) koşulu nedeniyle, Lemma 2.1.1 den dolayı, $x(t)$ çözümü $t \to \infty$ halinde sıfıra gider.

$$z(t) = y(t) - x(t)$$

olsun. Bu durumda $z(t)$, t_1 noktasında sıfır başlangıç fonksiyonu ile birlikte

$$z'(t) + z(t-r) = y(t-r) - y(t-\sigma(t)) \quad , \quad t \ge t_1,$$

denklemini sağlar. $p=1$ ve $h(s)=y(s-r)-y(s-\sigma(s))$ olmak üzere (2.1.34) den

$$|z(t)| \le \frac{M}{\nu}\exp(1+\nu)\, r \max_{t_1 \le s \le t} |y(s-r)-y(s-\sigma(s))| \tag{2.1.38}$$

bulunur. (2.1.35) denklemine ortalama değer teoreminin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} |y(s-r)-y(s-\sigma(s))| &= |\sigma(s)-r|\,|y'(\xi)| \\ &= |\sigma(s)-r|\,|y(\xi-\sigma(\xi))| \end{aligned}$$

elde edilir; burada ξ sayısı $s-r$ ile $s-\sigma(s)$ arasındadır. Buradan

$$B_1 = \max_{t_0 \le s \le t_1} |y(s)|$$

alınırsa,

$$\begin{aligned} \max_{t_1 \le s \le t} |y(s-r)-y(s-\sigma(s))| &\le \max_{t_1 \le s \le t} |\sigma(s)-r| \max_{t_0 \le s \le t} |y(s)| \\ &\le \max_{t_1 \le s \le t} |\sigma(s)-r| \left[B_1 + \max_{t_1 \le s \le t} |y(s)| \right] \end{aligned}$$

bulunur. (2.1.38) eşitsizliğinden

$$|y(t)|-|x(t)| \le \frac{M}{\nu}\exp(1+\nu)\, r \max_{t_1 \le s \le t} |\sigma(s)-r| \left[B_1 + \max_{t_1 \le s \le t} |y(s)| \right] \tag{2.1.39}$$

ve (2.1.37) eşitsizliğine göre de

$$|y(t)| \le |x(t)| + \frac{1}{2}\left[B_1 + \max_{t_1 \le s \le t} |y(s)| \right]$$

çıkar. Buradan her $T \ge t_1$ ve $t_1 \le t \le T$ için

$$|y(t)| \le |x(t)| + \frac{1}{2}\left[B_1 + \max_{t_1 \le s \le T} |y(s)| \right]$$

elde edilir. Her iki tarafın maksimumu alınır ve terimler yeniden düzenlenirse,

$$\max_{t_1 \le t \le T} |y(t)| \le 2 \max_{t_1 \le t \le T} |x(t)| + B_1$$

bulunur. Yani, $y(t)$ sınırlı bir fonksiyondur ve dolayısıyla

$$|y(t)| \le B \quad , \quad t \ge t_0 ,$$

olacak biçimde bir $B \ge B_1$ vardır. (2.1.39) eşitsizliği kullanılırsa,

$$|y(t)| \le |x(t)| + 2B\left(\frac{M}{\nu}\right)\exp(1+\nu)\, r \max_{t_1 \le s \le t} |\sigma(s)-r|$$

elde edilir. $\lim_{t\to\infty} \sigma(t) = r$ olduğundan yukarıdaki eşitsizlikten

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

bulunur. Bu ise lemmayı kanıtlar.

Şimdi aşağıdaki sonuç ispatlanabilir.

Teorem 2.1.5. $p \in C[R^+, R^+]$, $r > 0$ sabit ve

$$\int_{t_0}^{\infty} p(t)dt = +\infty \tag{2.1.40}$$

olsun. Ayrıca $\lim_{t\to\infty} \int_{t-r}^{t} p(s)ds$ var ve

$$\lim_{t\to\infty} \int_{t-r}^{t} p(s)ds < \frac{\pi}{2} \tag{2.1.41}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda (2.1.31) denkleminin her çözümü $t \to \infty$ halinde sıfıra gider.

Kanıt. $$u = \sigma(t) \equiv \int_{t_0}^{t} p(s)ds \quad , \quad t \geq t_0 \, ,$$

alınsın. (2.1.40) koşulundan dolayı $\sigma^{-1}(t)$ vardır ve

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \infty \, .$$

Ayrıca,

$$\sigma(t-r) = \int_{t_0}^{t-r} p(s)ds = \int_{t_o}^{t} p(s)ds - \int_{t-r}^{t} p(s)ds = u(t) - \int_{\sigma^{-1}(u)-r}^{\sigma^{-1}(u)} p(s)ds$$

elde edilir. Yani,

$$t - r = \sigma^{-1}\left(u - \int_{\sigma^{-1}(u)-r}^{\sigma^{-1}(u)} p(s)ds \right)$$

dir. Buradan

$$z(u) = y\left(\sigma^{-1}(u)\right) \tag{2.1.42}$$

dönüşümü (2.1.31) denklemini

$$z'(u) + z\left(u - \int_{\sigma^{-1}(u)-r}^{\sigma^{-1}(u)} p(s)ds\right) = 0 \tag{2.1.43}$$

denklemine dönüştürür.

(2.1.41) koşuluna göre (2.1.43) denklemi Lemma 2.1.2 nin hipotezlerini sağlar ve dolayısıyla

$$\lim_{u \to \infty} z(u) = 0$$

dır. (2.1.42) den dolayı

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 2.1.4.

$$y'(t) + y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{2.1.44}$$

denklemini ele alalım. $\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} p(s)ds = \frac{\pi}{2}$ olduğundan (2.1.41) koşulu sağlanmaz. Gerçekten (2.1.44) denklemi $y(t) = \sin t$ çözümüne sahiptir ve bu çözüm $t \to \infty$ halinde sıfıra yaklaşmaz. Bu örnek, (2.1.31) denkleminin her çözümünün $t \to \infty$ halinde sıfıra yaklaşması için (2.1.41) koşulunun en iyi koşul olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.1.5.

$$y'(t) + p(2 + \cos t)\, y(t - 2\pi) = 0 \tag{2.1.45}$$

denklemini ele alalım; burada $0 < p < \frac{1}{8}$ ve $p(t) = p(2 + \cos t)$ dir. Açık olarak

$$\int_0^{\infty} p(t)dt = \infty \qquad \text{ve} \qquad \int_{t-2\pi}^{t} p(s)ds = 4p\pi < \frac{\pi}{2}.$$

Buradan Teorem 2.1.5 nedeniyle (2.1.45) denkleminin her çözümü $t \to \infty$ halinde sıfıra gider.

Uyarı 2.1.3. $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{t-r}^{t} p(s)ds$ mevcut değilse, (2.1.41) koşulu yerine

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{t-r}^{t} p(s)ds < 1 \tag{2.1.46}$$

koşulu alınabilir ve bu durumda Teorem 2.1.5 in hükmü yine doğru kalır(Kusano 1982).

Örnek 2.1.6.

$$y'(t) + p(2+\cos t)y(t-\pi) = 0 \quad , \quad t \geq 0, \tag{2.1.47}$$

denklemini ele alalım; burada $0 < p < \dfrac{1}{2(\pi+1)}$ dir. $p(t) = p(2+\cos t)$ için

$$\int_0^{\infty} p(t)dt = \infty$$

ve

$$\int_{t-\pi}^{t} p(s)ds = \int_{t-\pi}^{t} p(2+\cos s)ds = 2p(\pi + \sin t)$$

olduğunu belirtelim. Ayrıca,

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-\pi}^{t} p(s)ds = 2p(\pi+1) < 1 .$$

Buradan (2.1.46) koşulu sağlanır. Dolayısıyla, Uyarı 2.1.3 nedeniyle, (2.1.47) denkleminin her çözümü $t \to \infty$ halinde sıfıra gider.

Uyarı 2.1.4. Daha sonraki çalışmalarda (2.1.3) denklemini salınımlı kılan başka yeter koşullar bulunmuştur. Bunlar arasında en keskin olanı

$$\int_{g(t)}^{t} p(s)ds \geq \frac{1}{e}$$

dir (Elbert ve Stavroulakis 1995). Bu koşul (Li 1995) makalesinde sadece $g(t)=t-r$ özel durumu için ifade edilmiştir.

Ayrıca,

$$a=\liminf_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t}p(s)ds\le\frac{1}{e}$$

ve

$$m=\liminf_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t}p(s)ds>1-\frac{a^2}{4}$$

koşulları altında (2.1.3) denkleminin salınımlı olacağı (Erbe ve Zhang 1988) makalesinde ispatlanmıştır.

2.2. Salınım Katsayılı Denklemler

Bu kesimde gecikmeli diferensiyel

$$y'(t)+p(t)y(t-r)\le 0 \tag{2.2.1}$$

$$y'(t)+p(t)y(t-r)\ge 0 \tag{2.2.2}$$

eşitsizlikleri ile

$$y'(t)+p(t)y(t-r)=0 \tag{2.2.3}$$

denklemi ele alınmaktadır ve $p(t)$ katsayısının her yerde pozitif olduğu kabul edilmese bile aşağıdaki sonuçların doğru oldukları gösterilmektedir.

Teorem 2.2.1. $p(t)$ ayrık aralıkların en az bir $\{(\xi_n,t_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n-\xi_n=2r$, dizisi üzerinde pozitif olsun.

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{t_n-r}^{t_n}p(s)ds\ge 1 \tag{2.2.4}$$

ise, bu durumda

(i) (2.2.1) eşitsizliğinin nihayet pozitif çözümü yoktur;

(ii) (2.2.2) eşitsizliğinin nihayet negatif çözümü yoktur;

(iii) (2.2.3) denklemi sadece salınınlı çözümlere sahiptir.

Kanıt. İlk olarak (2.2.1) eşitsizliğinin nihayet pozitif çözümlere sahip olmadığını ispatlayalım. Bu amaç doğrultusunda, $y(t)$, t_0 yeterince büyük olmak üzere $t \geq t_0$ için $y(t) > 0$ olacak şekilde (2.2.1) in bir çözümü olsun. O halde $t > t_0 + r$ için $y(t-r) > 0$ olur. $\xi_n \to \infty$ olduğundan, bir N vardır öyle ki $n \geq N$, $\xi_n > t_0 + r$ için, ve (ξ_n, t_n) üzerinde $p(t) > 0$ olduğundan, $t \in (\xi_n, t_n)$ için $y'(t) < 0$ dır. Böylece $n \geq N$ ve $t \in (\xi_n + r, t_n)$ için $y(t-r) > y(t)$ dir. (2.2.1) eşitsizliğinin $n \geq N$ için $t_n - r$ den t_n ye kadar integre edilmesiyle

$$y(t_n) - y(t_n - r) + \int_{t_n - r}^{t_n} p(s) y(s-r) ds \leq 0$$

bulunur ve $y(t)$ azalan olduğundan

$$y(t_n) - y(t_n - r) + y(t_n - r) \int_{t_n - r}^{t_n} p(s) ds \leq 0$$

ya da

$$y(t_n) + y(t_n - r) \left[\int_{t_n - r}^{t_n} p(s) ds - 1 \right] \leq 0$$

bulunur. Bu ise, (2.2.4) den dolayı bir çelişkidir. Dolayısıyla (2.2.1) eşitsizliğinin nihayet pozitif çözümü yoktur.

(2.2.2) eşitsizliğinin nihayet negatif çözümünün olmadığını ispatlamak için (2.2.2) eşitsizliğinin bir çözümü $y(t)$ ise, bu durumda $-y(t)$ nin (2.2.1) eşitsizliğinin bir çözümü olduğunu söylemek yeterlidir.

Bu incelemeden görüldü ki (2.2.3) denklemi nihayet ne pozitif ne de negatif çözümlere sahiptir. Dolayısıyla (2.2.3) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Teorem 2.2.2. $p(t)$, $t_n - \xi_n \geq 2r$ ve $\lim_{n \to \infty} (t_n - \xi_n) = +\infty$ olmak üzere ayrık aralıkların en az bir $\{(\xi_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi üzerinde pozitif olsun. Ayrıca,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-r}^{t} p(s)ds > \frac{1}{e} \quad , \quad t \in \bigcup_{n=1}^{\infty}(\xi_n + r, t_n), \tag{2.2.5}$$

olsun. Bu durumda Teorem 2.2.1 in hükmü doğru kalır.

Kanıt. $y(t)$, t_0 yeterince büyük olmak üzere $t > t_0$ için $y(t) > 0$ olacak şekilde (2.2.1) in bir çözümü olsun. Buradan $t > t_0 + r$ için $y(t-r) > 0$ olur. $\xi_n \to \infty$ olduğundan bir N sayısı vardır öyle ki $n \geq N$ ve $\xi_n > t_0 + r$ için ve buradan $t \in \bigcup_{n=N}^{\infty}(\xi_n, t_n)$ için

$$y(t) > 0, \quad y(t-r) > 0 \text{ ve } y'(t) < 0$$

olur. Şimdi

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-r}^{t} p(s)ds > K > \frac{1}{e} \quad , \quad t \in \bigcup_{n=N}^{\infty}(\xi_n + r, t_n),$$

olacak biçimde bir K sayısı seçelim. Buradan bir N_1 vardır öyle ki

$$\int_{t-r}^{t} p(s)ds \geq K > \frac{1}{e} \quad , \quad t \in \bigcup_{n=N_1}^{\infty}(\xi_n + r, t_n),$$

dir. Ayrıca

$$\int_{t_n - r}^{\overline{\xi_n}} p(s)ds \geq \frac{K}{2} \quad , \quad \int_{\overline{\xi_n}}^{t_n} p(s)ds \geq \frac{K}{2}$$

olacak biçimde bir $\overline{\xi_n} \in (t_n - r, t_n)$ vardır. (2.2.1) eşitsizliğinden

$$y(\overline{\xi_n}) - y(t_n - r) + \int_{t_n - r}^{\overline{\xi_n}} p(s)y(s-r)ds \leq 0$$

elde edilir ki buradan

$$-y(t_n - r) + y(\overline{\xi_n} - r)\int_{t_n - r}^{\overline{\xi_n}} p(s)ds \leq 0 ,$$

$$-y(t_n - r) + y(\overline{\xi_n} - r)\frac{K}{2} \leq 0$$

olur. Benzer olarak

$$y(t_n) - y(\overline{\xi_n}) + \int_{\overline{\xi_n}}^{t_n} p(s)y(s-r)ds \leq 0$$

çıkar. Buradan

$$-y\left(\overline{\xi_n}\right)+y(t_n-r)\int_{\overline{\xi_n}}^{t_n}p(s)ds\le 0$$

ve

$$-y\left(\overline{\xi_n}\right)+y(t_n-r)\frac{K}{2}\le 0$$

bulunur. Buna göre

$$y\left(\overline{\xi_n}\right)\ge y(t_n-r)\frac{K}{2}\ge\left(\frac{K}{2}\right)^2 y\left(\overline{\xi_n}-r\right)$$

veya eşdeğer olarak $n=N_1\,,N_1+1,\ldots$ için

$$\frac{y\left(\overline{\xi_n}-r\right)}{y\left(\overline{\xi_n}\right)}\le\left(\frac{2}{K}\right)^2\quad,\quad \overline{\xi_n}\in(t_n-r,t_n)\quad, \tag{2.2.6}$$

elde edilir.

Öte yandan (2.2.1) eşitsizliğinden

$$y'(t)+p(t)y(t)\le 0\quad,\quad t\in\bigcup_{n=N_1}^{\infty}(\xi_n+r,t_n),$$

bulunur ve buradan

$$\frac{y'(t)}{y(t)}+p(t)\le 0\quad,\quad t\in\bigcup_{n=N_1}^{\infty}(\xi_n+r,t_n),$$

yazılabilir. Her iki yan integre edilirse

$$\ln\frac{y(t)}{y(t-r)}+\int_{t-r}^{t}p(s)ds\le 0\quad,\quad t\in\bigcup_{n=N_1}^{\infty}(\xi_n+2r,t_n),$$

dolayısıyla

$$\ln\frac{y(t-r)}{y(t)}\ge K,\quad,\quad t\in\bigcup_{n=N_1}^{\infty}(\xi_n+2r,t_n),$$

veya eşdeğer olarak

$$\frac{y(t-r)}{y(t)}\ge e^K\ge eK\quad,\quad t\in\bigcup_{n=N_1}^{\infty}(\xi_n+2r,t_n),$$

çıkar. Yukarıdaki işlemlerin tekrar edilmesiyle,

$$(eK)^m > \left(\frac{2}{K}\right)^2$$

ve $t_n - r < \xi_n + (m+1)r < t_n$ olacak şekilde yeterince büyük seçilen bir m için

$$\frac{y(t-r)}{y(t)} \geq (eK)^m \quad , \quad t \in \bigcup_{n=N_1}^{\infty} (\xi_n + (m+1)r, t_n)$$

elde edilir. Belirtelim ki $n \to \infty$ için $t_n - \xi_n \to \infty$ olduğundan, m nin böyle bir seçimi mümkündür. Buradan (2.2.6) ile bir çelişki elde edilir.

İspatın kalan kısmı Teorem 2.2.1 in kanıtına benzerdir.

Örnek 2.2.1.

$$y'(t) + (\sin t)\, y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \tag{2.2.7}$$

denklemi Teorem 2.2.1 in koşullarını sağladığı için (2.2.7) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

Örnek 2.2.2.

$$y'(t) + (\sin t)\, y(t - 2\pi) = 0$$

ve

$$y'(t) + \frac{\sin t}{2 + \sin t}\, y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

denklemleri sırasıyla, salınımlı olmayan

$$y(t) = e^{\cos t} \text{ ve } y(t) = 2 + \cos t$$

çözümlerine sahiptir. Belirtelim ki Teorem 2.2.1 ve 2.2.2 nin koşulları bu iki denklem için sağlanmamaktadır.

2.3. Tek Gecikmeli Kararsız Tip Denklemler

Bu kesimde

$$y'(t) = p(t)y(t-r), \quad p(t) \geq 0, \quad r > 0, \tag{2.3.1}$$

denklemi ele alınmaktadır. Böyle bir denkleme *kararsız tip denklem* denir. Kesim 2.1 de (2.1.3) denkleminin her çözümünü salınımlı kılan koşullar $p(t)$ ve r üzerinde verildi. Fakat (2.3.1) denklemi için benzer koşullar yoktur. Bunun sebebini sabit katsayılı durum için açıklamaya çalışalım.

Teorem 2.3.1. (2.3.1) denkleminde $p(t) \equiv p > 0$ ve $r > 0$ olsun. Bu durumda (2.3.1) denklemi daima sınırsız ve salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir.

Kanıt. $y(t) = e^{\lambda t}$ alalım. (2.3.1) denkleminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda) = \lambda - p\exp(-\lambda r) = 0$$

olup

$$F'(\lambda) = 1 + pr\exp(-\lambda r) > 0$$

dır. Yani $F(\lambda)$ monoton artandır. $F(0) = -p < 0$ ve $F(p) = p(1 - \exp(-pr)) > 0$ olduğundan $F(\lambda) = 0$ karakteristik denklemi bir $\lambda_0 \in (0, p)$ reel köküne sahiptir. Bu ise (2.3.1) denkleminin

$$y(t) = \exp(\lambda_0 t)\ ,\quad \lambda_0 > 0,$$

şeklinde salınımlı olmayan bir çözüme sahip olduğunu ifade eder.

Teorem 2.3.1 den, sabit katsayılı olması durumunda (2.3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığını garanti eden koşulların olmadığı anlaşılmaktadır.

Teorem 2.3.2. $p(t) \equiv p > 0$ olmak üzere sabit katsayılı (2.3.1) denklemini ele alalım.

$$\frac{(1/2 + k)\pi}{r} = p(-1)^{k+1} \tag{2.3.2}$$

denkleminin bir k tamsayı çözümü varsa, bu durumda (2.3.1) denklemi sınırlı salınımlı bir çözüme sahiptir.

Kanıt. $\beta \neq 0$ olmak üzere $\lambda = \alpha + i\beta$ ve $y(t) = \exp(\lambda t)$ olsun. Buradan karakteristik denklem

$$\begin{aligned} \alpha &= p e^{-\alpha r} \cos \beta r \\ \beta &= -p e^{-\alpha r} \sin \beta r \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

dir. Amacımız (2.3.3) cebirsel sisteminin $(0, \beta)$ reel çözümüne sahip olduğunu göstermektir.

$\alpha = 0$ için (2.3.3) den $\cos \beta r = 0$ bulunur ve buradan

$$\beta r = \left(\frac{1}{2} + k\right)\pi \quad , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ ,$$

dir. (2.3.3) ün ikinci eşitliğinden

$$\beta = -p \sin \beta r = p(-1)^{k+1}$$

elde edilir. Yukarıdaki iki denklemin birleştirilmesiyle

$$\frac{(1/2 + k)\pi}{r} = p(-1)^{k+1}$$

bulunur. Eğer bu cebirsel denklem bir k tamsayı çözümüne sahip ise, bu durumda $\beta = p(-1)^{k+1}$ olmak üzere $y(t) = \cos \beta t$ (2.3.1) denkleminin bir çözümüdür.

Örnek 2.3.1.

$$y'(t) = y\left(t - \frac{3}{2}\pi\right) \tag{2.3.4}$$

denklemini ele alalım. Bu denklem için (2.3.2) denklemi $k = 1$ tamsayı çözümüne sahiptir. Buradan $\beta = 1$ olup $y(t) = \cos t$, (2.3.4) denkleminin sınırlı salınımlı bir çözümüdür.

Uyarı 2.3.1. $pr < e$ olduğu zaman (2.3.1) denkleminin genellikle salınımlı çözümlere sahip olmadığı söylenebilir (Driver, Sassev ve Slater 1973).

Uyarı 2.3.2. Teorem 2.3.1 den her çözümün salınımlı olmasını garanti eden yeter koşulların bulunması yönünde bir çaba göstermenin boşuna olduğu anlaşılmaktadır. Bununla birlikte, salınımlı ya da salınımsız çözümlerin varlığını garanti eden yeter koşulların bulunması değerli bir çalışma olur. Maalesef, bilindiği kadarıyla şimdiye kadar bu problem hakkında yapılmış önemli bir çalışma yoktur. Daha sonra, (2.3.1) in bir salınımsız çözümünün varlığı ile ilgili olarak bir yeter koşuldan söz edilecektir.

Şimdi (2.3.1) denkleminin salınımlı çözümlerinin bazı özelliklerini göz önüne alalım. $y(t)$, (2.3.1) denkleminin bir çözümü olsun ve $N(t)$ de $y(t)$ nin $[t-r,t]$ aralığındaki sıfırlarının sayısını tanımlasın. $\nu(t)$, $[t-r,t]$ aralığında işaret değiştiren sıfırların sayısı olsun. Açık olarak

$$\limsup_{t\to\infty} N(t) \geq 1 \tag{2.3.5}$$

ise, bu durumda $y(t)$ çözümü salınımlı olup $\nu(t) \leq N(t)$ dir. Yeterince büyük t için $N(t) \equiv 0$ ise, bu durumda $y(t)$ salınımsızdır.

Aşağıdaki iki lemma, bir teorem ve iki sonuç (Birkoff 1966) makalesinden alınmıştır.

Lemma 2.3.1. (2.3.1) denklemindeki $p(t)$ pozitif veya negatif sabit işaretli bir fonksiyon ve t_0, t_1, t_2 noktaları $y(t)$ nin ardışık üç sıfırı olsun. $y(t)$, t_1 de işaret değiştirmiyorsa, bu durumda

$$\nu(t_2) \leq \nu(t_0) - 2$$

dir.

Kanıt. Genelliği bozmadan (t_0, t_2) üzerinde $y(t) \geq 0$ olsun. Bu durumda herhangi bir $(t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, aralığında $y'(t)$ negatiften pozitife doğru işaret değiştirir. Dolayısıyla $y(t-r) = y'(t) / p(t)$ ifadesi de aynı şekilde işaret değiştirir. O halde $\nu(t)$, t_1 noktasında bir eksilir. Ayrıca $y'(t)$, t_2 den önce pozitiften negatife doğru işaret değiştirdiğinden dolayı $\nu(t)$ bir daha eksilir. Böylece $y(t)$ sabit işaretli olduğundan $\nu(t)$ nin artmayacağı gerçeği de dikkate alınırsa, ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.3.2. (2.3.1) denkleminde $p(t) > 0$ ise, bu durumda $\nu(a)$ tek olduğu zaman $\nu(t)$ ifadesi a noktasında artar (yani, a noktasında +1 sıçramasına sahiptir). Eğer $p(t) < 0$ ise, bu durumda $\nu(a)$ çift olduğu zaman $\nu(t)$ artar.

Kanıt. $v(a)$, a noktasında +1 sıçramasına sahip ise, o zaman $y(a-r)\neq 0$ dır (aksi takdirde $v(a)$ artamazdı). Ayrıca $y(t)$, a noktasında işaret değiştirmelidir ve dolayısıyla $y(a^+)y'(a^+)>0$ iken $y(a^-)y'(a^-)<0$ dır. (2.3.1) denkleminden

$$p(a)y(a-r)y(a^-)<0\ ,\ p(a)y(a-r)y(a^+)>0$$

çıkar. Buradan $p(a)>0$ ise, $v(a)$ tek olduğu zaman $y(a-r)$ ve $y(a^-)$ zıt işaretlidir. Eğer $p(a)<0$ ise, bu durumda $v(a)$ çift olduğu zaman $y(a-r)$ ve $y(a^-)$ aynı işaretli olurlar.

Bu lemmaların birleştirilmesiyle aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.3.3. $p(t)>0$ ve $v(a)\leq 2k$ ise, bu durumda her $t\geq a$ için $v(t)\leq 2k$ dır. $p(t)<0$ ve $v(a)\leq 2k+1$ ise, bu durumda her $t\geq a$ için $v(t)\leq 2k+1$ dir.

Sonuç 2.3.1. $p(t)>0$ ve $y(t)$ salınımlı ise, bu durumda $v(t)\geq 1$ dir. Yani $y(t)$, uzunluğu r olan her aralıkta en az bir kez işaret değiştirir.

Sonuç 2.3.2. $p(t)<0$ ise, bu durumda ya yeterince büyük her t için $v(t)\leq 1$ dir (böyle bir durumda $y(t)$ yavaş salınımlı veya $v(t)\equiv 0$ ise salınımsız olur) ya da her t için $v(t)\geq 2$ dir.

Şimdi (2.3.1) denkleminin salınımlı olmayan çözümlerinin varlığı konusunda önemli sayılan bir karşılaştırma teoreminden söz edelim (Birkoff ve Kotin 1966).

Teorem 2.3.4. $y_i(t)$ $(i=1,2)$,

$$y_i'(t)=p_i(t)y_i(t-r)\quad ,\quad i=1,2\quad ,$$

denkleminin çözümleri olsun. Kabul edelim ki

$$|p_1(t)|\leq p_2(t).$$

$[a-r,a]$ üzerinde

$$|\,y_1(t)|\leq y_2(t)$$

ise, bu durumda $t \geq a$ için $|y_1(t)| \leq y_2(t)$ dir.

Kanıt. Herhangi bir $t \in [a, a+r]$ için

$$|y_1(t)| = \left| y_1(a) + \int_a^t p_1(t) y_1(t-r) dt \right|$$

$$\leq y_2(a) + \int_a^t p_2(t) y_2(t-r) dt = y_2(t)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik tümevarım yöntemi yardımıyla $[a+n-1, a+n]$ aralıkları için de yazılabilir ve dolayısıyla sözü edilen $|y_1(t)| \leq y_2(t)$ eşitsizliği $t \geq a$ için sağlanmış olur.

Teorem 2.3.5.

$$p(t) \geq \frac{1}{t \ln t \ln\ln t \ldots \underbrace{\ln\ldots\ln t}_{n\ terim} \underbrace{\ln\ldots\ln(t-r)}_{n+1\ terim}} \tag{2.3.6}$$

ise, bu durumda (2.3.1) denklemi bir sınırsız salınımlı olmayan çözüme sahiptir.

Kanıt. Gerçekten

$$y'(t) = \frac{1}{t \ln t \ln\ln t \ln\ldots\ln t \underbrace{\ln\ldots\ln(t-r)}_{n+1\ terim}} y(t-r) \tag{2.3.7}$$

denklemi $y(t) = \underbrace{\ln\ldots\ln t}_{n+1\ terim}$ şeklinde salınımlı olmayan bir çözüme sahiptir. O halde istenen sonuç Teorem 2.3.4 den bulunur.

Teorem 2.3.6.

$$\int^{\infty} |p(t)| dt < \infty$$

ise, bu durumda (2.3.1) denkleminin her çözümü $t \to \infty$ halinde sonlu bir limite gider.

Kanıt. (2.3.1) denkleminden

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} p(s) y(s-r) ds$$

ve buradan

$$|\, y(t)| \leq c + \int_{t_0}^{t} |\, p(s+r)|\, |y(s)|\, ds \tag{2.3.8}$$

yazılabilir. Çünkü herhangi bir çözümün başlangıç fonksiyonu daima sürekli kabul edilmektedir ve dolayısıyla kapalı bir aralıkta sınırlıdır. (2.3.8) eşitsizliğinden

$$|\, y(t)| \leq c \exp \int_{t_0}^{t} |\, p(s+r)|\, ds < \infty$$

elde edilir. Yani (2.3.1) denkleminin her çözümü bir sonlu M sabiti tarafından sınırlıdır.

Öte yandan $t < t'$ ise,

$$|y(t) - y(t')| \leq M \int_{t}^{t'} |\, p(s)|\, ds$$

eşitsizliği bulunur. Buradan ve $\int^{\infty} |\, p(t)|\, dt < \infty$ hipotezinden $t \to \infty$ halinde $|y(t) - y(t')|$ sıfıra gider.

Uyarı 2.3.3. Teorem 2.3.6 dan

$$\int^{\infty} |\, p(t)|\, dt = \infty$$

koşulunun (2.3.1) denkleminin sınırlı olmayan çözümlerinin varlığı için gerekli olduğu anlaşılır.

Teorem 2.3.7.

$$p(t) > 0 \;,\; \int_{t_0}^{\infty} p(t) dt = \infty$$

ise, bu durumda (2.3.1) denkleminin her salınımlı olmayan çözümü $t \to \infty$ halinde sonsuza gider.

Kanıt. Gerçekten $t \geq T$ için $y(t) > 0$ ve $y(t-r) > 0$ ise, $y'(t) > 0$ dır. (2.3.1) denkleminden

$$y(t) \geq y(T) + y(T-r)\int_{T}^{t} p(s)ds$$

elde edilir. $t \to \infty$ halinde $y(t) \to \infty$ olur.

$t \geq T_1$ için $y(t) < 0$ ve $y(t-r) < 0$ ise, o zaman $y'(t) < 0$ olur. (2.3.1) denkleminden

$$y(t) - y(T_1) = \int_{T_1}^{t} p(s)y(s-r)ds$$

$$\leq y(T_1 - r)\int_{T_1}^{t} p(s)ds \quad , \quad t \geq T_1 ,$$

olduğu görülür. Buradan $t \to \infty$ halinde $y(t) \to -\infty$ dur. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 2.3.2. Teorem 2.3.7, (2.3.1) denkleminin bir salınımlı çözümü için doğru olmayabilir.

3. ÇOK GECİKMELİ SABİT KATSAYILI LİNEER DENKLEMLER

Bu bölümde birinci basamaktan sabit katsayılı, çok gecikmeli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlı ve salınımlı olmayan davranışlarıyla ilgili bazı sonuçlardan söz edilecektir.

$p_i > 0$, $r_i > 0$ sabitler olmak üzere çok gecikmeli birinci basamaktan

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i y(t-r_i)=0 \tag{3.1}$$

diferensiyel denklemini ele alalım. (3.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter koşulları vermeden önce aşağıdaki lemmayı ifade edelim (Ladas ve Stavroulakis 1983).

Lemma 3.1. y , $[-r,+\infty)$ üzerinde tanımlı, sürekli ve pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$y'(t)+p\,y(t-r)\leq 0 \quad , \quad t\geq 0, \tag{3.2}$$

gecikmeli diferensiyel eşitsizliğinin bir çözümü ise, bu durumda

$$\left(\frac{pr}{2}\right)^2 y(t-r)\leq y(t)\,,\, t\geq \frac{3r}{2},. \tag{3.3}$$

dir; burada p ve r pozitif sayılardır.

Kanıt. Verilen bir $s\geq r$ için (3.2) eşitsizliğinin her iki tarafı s den $s+r/2$ ye kadar integre edildikten sonra y nin $[0,\infty)$ üzerinde azalan olduğu gerçeği uygulanırsa, $s>r$ için

$$-y(s)+\left(\frac{pr}{2}\right)y\left(s-\frac{r}{2}\right)\leq y\left(s+\frac{r}{2}\right)-y(s)+\left(\frac{pr}{2}\right)y\left(s-\frac{r}{2}\right)\leq 0$$

elde edilir. Verilen bir $t\geq 3r/2$ için $s=t-\dfrac{r}{2}$ alınırsa,

$$y\left(t-\frac{r}{2}\right)\geq\left(\frac{pr}{2}\right)y(t-r)$$

ve

$$y(t) \geq \left(\frac{pr}{2}\right) y\left(t-\frac{r}{2}\right) \quad , \quad t \geq \frac{3r}{2},$$

bulunur. Bu iki eşitsizliğin birleştirilmesiyle istenilen (3.3) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1. (3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul, her $\lambda > 0$ için

$$-\lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i \exp(\lambda r_i) > 0 \tag{3.4}$$

dır.

Kanıt. İlk olarak (3.4) koşulunun sağlanmadığını kabul edelim. Buna göre

$$-\lambda_0 + \sum_{i=1}^{n} p_i \exp(\lambda_0 r_i) = 0$$

olacak biçimde bir $\lambda_0 > 0$ seçilebilir. Buradan $[-r_n, \infty)$ üzerinde $y(t) = \exp(-\lambda_0 t)$ ile tanımlı y fonksiyonu (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olur.

Tersine olarak, (3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olmadığını kabul edelim. Bu da (3.1) denkleminin en azından bir tane salınımlı olmayan çözümünün var olduğunu gösterir. Genelliği bozmadan $y(t)$, (3.1) denkleminin nihayet pozitif olan bir çözümü olsun. (3.1) den dolayı bu çözüm azalandır. (3.1) in bir çözümünün sola doğru olan her dönüşümü yine bir çözüm olduğundan, (3.1) denkleminin azalan ve pozitif olan bir $y(t)$ çözümü seçilebilir.

Tüm r_i ler sıfır olduğu zaman (3.4) koşulunun sağlanamayacağı açıktır. Bu nedenle

$$r_n = \max(r_1, ..., r_n) > 0$$

olsun.

$$\Lambda = \{\lambda > 0 \mid y'(t) + \lambda\, y(t) < 0 \text{ yeterince büyük } t \text{ için }\}$$

cümlesini ele alalım. (3.1) den

$$y'(t) + p_n\, y(t - r_n) \leq 0 \quad , \quad t \geq 0, \tag{3.5}$$

bulunur.

Öte yandan y azalan olduğundan, (3.5) den

$$y'(t)+p_n\, y(t)<0 \quad , \quad t\geq 0,$$

ve dolayısıyla $p_n \in \Lambda$ olur. Ayrıca Lemma 3.1 den,

$$y(t-r_n)\leq \left(\frac{2}{p_n r_n}\right)^2 y(t) \quad , \quad t\geq \frac{3r_n}{2},$$

yazılabilir. y azalan olduğundan,

$$0=y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, y(t-r_i)\leq y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i y(t-r_n)$$

$$\leq y'(t)+\left(\frac{2}{p_n r_n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)y(t) \quad , \quad t\geq \frac{3r_n}{2} \ ,$$

sağlanır. Dolayısıyla $\left(\frac{2}{p_n r_n}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right)$, Λ cümlesinin bir üst sınırıdır. Λ boş olmayan ve sınırlı bir cümle olduğundan $\lambda_0=\sup\Lambda$ alınabilir.

$\lambda\in\Lambda$ verilsin ve z fonksiyonu $[-r_n,\infty)$ üzerinde $z(t)=y(t)e^{\lambda t}$ ile tanımlansın. O halde

$$z'(t)=(\,y'(t)+\lambda\, y(t)\,)e^{\lambda t}<0 \quad , \quad t\geq T,$$

olacak biçimde uygun bir $T\in(0,\infty)$ vardır ve buradan z, $[T,\infty)$ üzerinde azalandır. $t\geq T+r_n$ için

$$0=y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, y(t-r_i)=y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, z(t-r_i)e^{-\lambda\,(t-r_i)}$$

$$> y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, z(t)e^{-\lambda\,(t-r_i)}=y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{\lambda r_i}\, y(t)$$

elde edilir. Bu da $\sum_{i=1}^{n} p_i e^{\lambda r_i}\in\Lambda$ ve $\sum_{i=1}^{n} p_i e^{\lambda r_i}\leq\lambda_0$ olduğunu gösterir. $\lambda\in\Lambda$ keyfi olduğundan,

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, e^{\lambda_0 r_i}\leq\lambda_0$$

sonucuna varılır ve dolayısıyla (3.4) koşulu sağlanmaz. Böylece kanıt tamamlanır.

Teorem 3.1 sadece teorik açıdan değerlidir. Koşullarını gerçeklemek kolay değildir. Dolayısıyla pratik önemi yoktur. Bu nedenle koşulları p_i ve r_i cinsinden veren aşağıdaki sonuçları ifade edelim.

Teorem 3.2.

$$F(\lambda_0)=\lambda_0+\sum_{i=1}^{n} p_i \exp(-\lambda_0 r_i)>0 \tag{3.6}$$

ise, bu durumda (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır; burada λ_0

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\, r_i \exp(-\lambda_0 r_i)=1 \tag{3.7}$$

denklemini sağlamaktadır (Zhang 1984).

Kanıt. (3.1) denkleminin karakteristik denklemi

$$F(\lambda)=\lambda+\sum_{i=1}^{n} p_i \exp(-\lambda r_i)=0 \tag{3.8}$$

dir. Buradan

$$F'(\lambda)=1-\sum_{i=1}^{n} p_i\, r_i \exp(-\lambda r_i)=0 \tag{3.9}$$

ve

$$F''(\lambda)=\sum_{i=1}^{n} p_i\, r_i^2 \exp(-\lambda r_i)>0$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.6) denklemindeki λ_0, $F(\lambda)$ fonksiyonunun bir minimum noktasıdır. Sonuç olarak (3.6) koşulu karakteristik denklemin reel köke sahip olmadığını gösterir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Uyarı 3.1. Teorem 3.2 uygulanabilir değerde bir teoremdir. Zira, (3.7) denklemi en azından nümerik metotlar ya da grafik metotları kullanılarak çözülebilir. λ_0 bulunduktan sonra (3.6) koşulu kolaylıkla kontrol edilebilir. Bu yüzden (3.6) koşulu (3.1) denkleminin salınımlı olması için mümkün olan en iyi yeter koşuldur. Gerçekten, (3.6) nın sol yanı sıfıra eşit ise, o zaman $\exp(\lambda_0 t)$ ifadesi (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olur.

Şimdi geniş bir uygulama alanına sahip olan ve (3.1) denkleminin salınımlı olmasını sağlayan çok genel yeter koşullardan söz edelim.

Teorem 3.3.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{r_i}\left(1-\ln\frac{N_i}{p_i r_i}\right) > 0 \tag{3.10}$$

olacak şekilde $N_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} N_i = 1$ bulunabiliyorsa, bu durumda (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Kanıt.

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i \exp(-\lambda r_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(N_i\lambda + p_i \exp(-\lambda r_i)\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda)$$

yazılabilir; burada $f_i(\lambda) = N_i\lambda + p_i \exp(-\lambda r_i)$ dir. Açık olarak

$$\min F(\lambda) \geq \sum_{i=1}^{n} \min f_i(\lambda) \tag{3.11}$$

dir.

$$f_i'(\lambda) = N_i - p_i r_i \exp(-\lambda r_i)$$

bulunur. $f_i(\lambda)$ fonksiyonunun λ_i ekstrem noktası

$$\lambda_i = -\frac{1}{r_i}\ln\frac{N_i}{p_i r_i}$$

olduğundan

$$\min f_i(\lambda) = \frac{N_i}{r_i}\left(1-\ln\frac{N_i}{p_i r_i}\right)$$

elde edilir. Buradan (3.10) nedeniyle

$$\min F(\lambda) > 0$$

olur ki bu (3.1) denkleminin karakteristik denkleminin reel köke sahip olmadığını gösterir. Böylece kanıt tamamlanır.

Uyarı 3.2. Belirtelim ki $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n$ halinde (3.1) denkleminin salınımlı olması için mümkün olan en iyi yeter koşul elde edilir.

Teorem 3.3 den N_i nin seçimine bağlı kalarak (3.1) denkleminin bütün çözümlerini salınımlı kılan çok sayıda yeter koşul bulunabilir. Aşağıdaki sonuçlar farklı N_i kullanarak bulunurlar.

Teorem 3.4. Aşağıdaki koşullardan her biri (3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için birer yeter koşuldur.

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i r_i > \frac{1}{e}$.

(ii) $\displaystyle\left(\prod_{i=1}^{n} p_i\right)^{\frac{1}{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) > \frac{1}{e}$.

(iii) $\displaystyle\sum_{i\neq j} p_i r_i + p_j r_j e > \exp\left(-\frac{\sum_{i\neq j} p_i}{\sum_{i\neq j} p_i + p_j e}\right)$ olacak biçimde bir j vardır.

(iv) $\displaystyle\ln\left(\sum_{i\neq j}(p_i r_i) + p_j r_{\max}\right) > \frac{p_j (r_{\max}/r_j)\ln(r_{\max}/r_j)}{\sum_{i\neq j} p_i + p_j (r_{\max}/r_j)} - 1$

olacak biçimde bir j vardır.

(v) $\displaystyle\ln\left(\sum_{i\neq j}(p_i r_i) + p_j r_{\min}\right) > \frac{p_j (r_{\min}/r_j)\ln(r_{\min}/r_j)}{\sum_{i\neq j} p_i + p_j (r_{\min}/r_j)} - 1$

olacak biçimde bir j vardır.

(vi) $\ln\left(r_{\max}\sum_{j=1}^{n} p_j \exp\left(\frac{r_j}{r_{\max}}\right)\right) > \dfrac{\sum_{j=1}^{n}\frac{r_{\max}}{r_j} p_j e^{r_j/r_{\max}} \ln\left(\frac{r_{\max}}{r_j}\right) e^{r_j/r_{\max}}}{\sum_{j=1}^{n}\frac{r_{\max}}{r_j} p_j e^{r_j/r_{\max}}} - 1.$

Kanıt. Bu teoremin ispatı Teorem 3.3 ün bir uygulaması olarak yapılabilir. Bu amaç için Teorem 3.3 ün koşullarını sağlayan N_i nin aşağıdaki seçimlerini gerçeklemek yeterlidir:

(i) $N_i = \dfrac{p_i r_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i r_i}$, $i = 1,2,...,n$.

(ii) $N_i = \dfrac{r_i}{\sum_{i=1}^{n} r_i}$, $i = 1,2,...,n$.

(iii) $N_i = \dfrac{p_i r_i}{\sum_{k \neq j} p_k r_k + p_j r_j e}$, $i \neq j$ ve $N_j = \dfrac{p_j r_j e}{\sum_{k \neq j} p_k r_k + p_j r_j e}$.

(iv) $N_i = \dfrac{p_i r_i}{\sum_{k \neq j} p_k r_k + p_j r_{\max}}$, $i \neq j$ ve $N_j = \dfrac{p_j r_{\max}}{\sum_{k \neq j} p_k r_k + p_j r_{\max}}$.

(v) $N_i = \dfrac{p_i r_i}{\sum_{k \neq j} p_k r_k + p_j r_{\min}}$, $i \neq j$ ve $N_j = \dfrac{p_j r_{\min}}{\sum_{k \neq j} p_k r_k + p_j r_{\min}}$.

(vi) $N_j = \dfrac{r_{\max} p_j \exp(r_j / r_{\max})}{r_{\max}\sum_{i=1}^{n} p_i \exp(r_i / r_{\max})}$, $j = 1,2,...,n$.

N_i nin bu tanımlarından, $\sum_{i=1}^{n} N_i = 1$ olduğu açıktır. Ayrıca (i)-(vi) koşullarında karşılık gelen N_i ler (3.10) koşulunu sağlar.

Uyarı 3.3. $r_{\max} = r_j$ olduğu zaman (iv)$\rightarrow$(i) olup (v) koşulunun

$$r_{\min}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\right) > e^{-1} \tag{3.12}$$

koşulundan daha iyi olduğunu belirtelim.

Teorem 3.5.

$$r_{\max}\sum_{j=1}^{n} p_j \exp\left(r_j / r_{\max}\right) < 1 \tag{3.13}$$

ise, bu durumda (3.1) denklemi bir salınımlı olmayan çözüme sahiptir.

Kanıt. (3.1) denkleminin karakteristik

$$F(\lambda) = \lambda + \sum_{i=1}^{n} p_i \exp(-\lambda r_i) = 0$$

denklemini ele alalım. Açık olarak

$$F(0) = \sum_{i=1}^{n} p_i > 0$$

ve

$$F\left(-\frac{1}{r_{\max}}\right) = -\frac{1}{r_{\max}} + \sum_{i=1}^{n} p_i \exp\frac{r_i}{r_{\max}} < 0$$

dır. Dolayısıyla $F(\lambda) = 0$ bir $\lambda_0 \in \left(-\frac{1}{r_{\max}}, 0\right)$ reel köküne sahiptir, yani (3.1) denklemi bir $y(t) = \exp(\lambda_0 t)$ salınımlı olmayan çözümüne sahiptir.

Örnek 3.1. $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = 1$, $r_1 = \frac{1}{e}$ ve $r_2 = \frac{1}{2e}$ olmak üzere

$$y'(t) + \frac{1}{2} y\left(t - \frac{1}{e}\right) + y\left(t - \frac{1}{2e}\right) = 0 \tag{3.14}$$

denklemi için

$$\sum_{i=1}^{n} p_i r_i = \frac{1}{e}$$

sağlanır. Buradan Teorem 3.4 ün (i) koşulu sağlanmaz. Ancak Teorem 3.4 ün (ii) koşulu sağlanır. O halde (3.13) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Örnek 3.2.

$$y'(t)+e^{-\frac{a\pi}{2}}\,y\left(t-\frac{\pi}{2}\right)+a\,e^{-a2\pi}\,y(t-2\pi)=0 \tag{3.15}$$

denklemi, $a=\dfrac{111}{120}$ olduğu zaman $y_1(t)=e^{-at}\sin t$ ve $y_2(t)=e^{-at}\cos t$ salınımlı çözümlerine sahip olur. Bu denklem için Teorem 3.4 ün (i) koşulu sağlanırken, aynı teoremin (ii) koşulu sağlanmaz.

Örnek 3.3.

$$y'(t)+\frac{1}{10e}\left[y(t-1)+y(t-9)\right]=0 \tag{3.16}$$

denklemi Teorem 3.4 ün (i) ve (ii) koşullarını sağlamazken, aynı teoremin (iii) koşulunu sağlar. Gerçekten $p_1=p_2=\dfrac{1}{10e}$, $r_1=1$, $r_2=9$ için

$$\ln(p_1 r_1+p_2 r_2 e)=\ln\left(\frac{1}{10e}+\frac{9}{10}\right)$$

ve

$$-\frac{p_1}{p_1+p_2 e}=-\frac{1}{1+e}$$

olup

$$\ln\left(\frac{1}{10e}+\frac{9}{10}\right)>-\frac{1}{1+e}$$

dir. Buradan (3.16) denklemi Teorem 3.4 ün (iii) koşulunu sağlar. O halde (3.16) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

4. ÇOK GECİKMELİ DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER DENKLEMLER

Bu bölümde çok gecikmeli değişken katsayılı

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\,y(t-r_i(t))=0 \tag{4.1}$$

denklemi hakkında bazı sonuçlardan söz edilecektir; burada $i\in I_n=\{1,2,\ldots,n\}$ için $p_i(t)\geq 0$ ve $r_i(t)>0$ sürekli fonksiyonlardır.

Teorem 4.1. Bir $i\in I_n$ için ya

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-r_i(t)}^{t} p_i(s)\,ds>\frac{1}{e} \tag{4.2}$$

veya

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{t-r_{\min}(t)}^{t}\sum_{i=1}^{n} p_i(s)\,ds>\frac{1}{e} \tag{4.3}$$

ise, bu durumda (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır, burada

$$r_{\min}(t)=\min\{r_1(t),\ldots,r_n(t)\}$$

dir (Ladas ve Stavroulakis 1982).

Kanıt. Genelliği bozmadan $t\geq t_0$ için bir pozitif salınımlı olmayan $y(t)>0$ çözümü var olsun. O halde $i\in I_n$ ve $t\geq t_1$ için $y(t-r_i(t))>0$ olacak biçimde bir t_1 var demektir. (4.1) denkleminden

$$y'(t)+p_i(t)\,y(t-r_i(t))\leq 0 \tag{4.4}$$

ve

$$y'(t)+y(t-r_{\min}(t))\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\leq 0 \tag{4.5}$$

bulunur. (4.4) ve (4.5) eşitsizliklerinin karşılaştırılmasıyla, Teorem 2.1.1 ile bir çelişki elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Şimdi (4.1) denkleminin salınımlılığı için başka yeter koşullardan söz eden sonuçları verelim (Arino, Gyori ve Jawhari 1984).

$$\lambda_i^* = \lim_{t\to\infty} \int_{t-r_i(t)}^{t} \lambda(s)ds \tag{4.6}$$

ve

$$p_{ij}^* = \lim_{t\to\infty} \int_{t-r_j(t)}^{t} p_i(s)ds \tag{4.7}$$

olsun.

Lemma 4.1. (4.1) denkleminde $i \in I_n$ için $r_i(t) = r_i > 0$ ve artan olsun. Ayrıca bir $i \in I_n$ için

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t}^{t+r_i^*} p_i(s)ds > 0 \tag{4.8}$$

olacak biçimde $r_i^* < r_i$ mevcut olsun. Bu durumda herhangi bir $r \geq 0$ için

$$\frac{y(t)}{y(t-r)} \geq N \tag{4.9}$$

olacak şekilde bir $N > 0$ sayısı vardır; burada $y(t)$, (4.1) in herhangi bir pozitif çözümüdür.

Kanıt. (4.1) denkleminin t den ∞ 'a kadar integre edilmesiyle

$$y(t) \geq \int_{t}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)y(s-r_i)ds$$

$$\geq \int_{t}^{t+r_i^*} p_i(s)y(s-r_i)ds$$

$$\geq y\left(t+r_i^* - r_i\right) \int_{t}^{t+r_i^*} p_i(s)ds,$$

yani

$$\frac{y(t)}{y(t+r_i^* - r_i)} \geq \int_{t}^{t+r_i^*} p_i(s)ds > d > 0$$

elde edilir. Herhangi bir $r \geq 0$ için $k\left(r_i - r_i^*\right) > r$ olacak biçimde bir k vardır. Buradan

$$\frac{y(t)}{y(t-r)} \geq \frac{y(t)}{y(t-k(r_i-r_i^*))}$$

$$=\prod_{j=1}^{k} \frac{y(t-(j-1)(r_i-r_i^*))}{y(t-j(r_i-r_i^*))} \geq d^k > 0$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

Teorem 4.2. Lemma 4.1 in koşullarına ek olarak aşağıdaki koşullardan herhangi birinin sağlandığını kabul edelim.

1. Bir $i, j \in I_n$ için $p_{ij}^* = \varliminf_{t\to\infty} \int_{t-r_j}^{t} p_i(s)ds > \frac{1}{e}$. (4.10)

2. $\left(\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^*\right)^{1/n} > \frac{1}{e}$. (4.11)

3. $\sum_{i=1}^{n} p_{ii}^* + 2\sum_{i<j}^{n} \sqrt{p_{ij}^* p_{ji}^*} > \frac{n}{e}$. (4.12)

Bu durumda (4.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Kanıt. Kabul edelim ki (4.1) denklemi salınımlı olmayan bir $y(t)$ çözümüne sahiptir. Genelliği bozmadan $y(t)$,

$$y(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \lambda(s)ds\right) \tag{4.13}$$

formunda pozitif bir çözüm olsun. (4.13) çözümü (4.1) denkleminde konursa,

$$\lambda(t) - \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \exp \int_{t-r_i}^{t} \lambda(s)ds = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. Buradan (4.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması (4.14) denkleminin $\lambda(t)$ çözümüne sahip olmaması ile eşdeğer olduğu görülebilir. Lemma 4.1 den $i \in I_n$ için λ_i^* sınırlıdır. (4.14) denkleminden $j \in I_n$ için

$$\lambda_j^* = \lim_{t\to\infty} \int_{t-r_j}^{t} \lambda(s)ds = \lim_{t\to\infty} \int_{t-r_j}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)\exp \int_{s-r_i}^{s} \lambda(\sigma)d\sigma\, ds$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} p_{ij}^* \exp \lambda_i^* \tag{4.15}$$

bulunur. $x \geq 0$ için $\max x\exp(-x) = \frac{1}{e}$ olduğundan, (4.15) eşitsizliğinden

$$p_{ij}^* \leq \lambda_i^* \exp(-\lambda_i^*) \leq \frac{1}{e} \tag{4.16}$$

elde edilir. (4.15) eşitsizliklerinin toplanmasıyla,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}^* \exp \lambda_i^* \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^* \right) \exp \lambda_i^*$$

$$\geq n \left[\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^* \right]^{1/n} \exp \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^*}{n}$$

ve buradan

$$\left[\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^* \right]^{1/n} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^*}{n} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^*}{n} \right) \leq \frac{1}{e} \tag{4.17}$$

çıkar. (4.15) eşitsizliğinden

$$\lambda_j^* \exp(-\lambda_j^*) \geq \sum_{i=1}^{n} p_{ij}^* \exp(\lambda_i^* - \lambda_j^*)$$

olur. Bu eşitsizliklerin toplanmasıyla,

$$\frac{n}{e} \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* \exp(-\lambda_j^*) \geq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_{ij}^* \exp(\lambda_i^* - \lambda_j^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{ii}^* + \sum_{i\neq j} p_{ij}^* \exp(\lambda_i^* - \lambda_j^*)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_{ii}^* + \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \left[p_{ij}^* \exp(\lambda_i^* - \lambda_j^*) + p_{ji}^* \exp(\lambda_j^* - \lambda_i^*) \right]$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} p_{ii}^{*} + \sum_{i \neq j} \sqrt{p_{ij}^{*} p_{ji}^{*}} = \sum_{i=1}^{n} p_{ii}^{*} + 2 \sum_{\substack{i<j \\ i,j=1}}^{n} \sqrt{p_{ij}^{*} p_{ji}^{*}} \tag{4.18}$$

olduğu görülür. Buradan (4.16), (4.17) ve (4.18) bağıntıları, sırasıyla, (4.10), (4.11) ve (4.12) koşullarıyla çelişir. Dolayısıyla kanıt tamamlanmış olur.

Uyarı 4.1. Kesim 2.1 dekine benzer olarak

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) y(t - r_i) \leq 0, \tag{4.19}$$

$$y'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) y(t - r_i) \geq 0, \tag{4.20}$$

eşitsizlikleri ele alınabilir. Bu durumda Teorem 4.1 ve Teorem 4.2, (4.19) un nihayet pozitif çözüme sahip olamadığını ve (4.20) nin nihayet negatif çözüme sahip olamadığını garanti eden koşulları ifade etmektedirler.

Teorem 4.3. $p_i(t) > 0$, $r_i(t) > 0$ sürekli fonksiyonlar, $r_i(t)$ bir r_0 düzgün üst sınırına sahip ve

$$\underline{\lim}_{t \to \infty} \sum_{i=1}^{n} p_i(t) r_i(t) > \frac{1}{e} \tag{4.21}$$

ise, bu durumda (4.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Hunt ve Yorke 1984).

Kanıt. Bu teorem Teorem 3.4 ün bir doğal genelleştirilmiş durumudur. Genelliği bozmadan (4.1) denkleminin $[-r_0, +\infty)$ üzerinde pozitif bir $y(t)$ çözümüne sahip olduğunu kabul edelim. (4.21) koşulundan dolayı, $t \geq 0$ için $\sum_{i=1}^{n} p_i(t) r_i(t) > \mu$ olacak biçimde bir $\mu > \frac{1}{e}$ sayısının var olduğu kabul edilebilir. Bu durumda

$$x(t) = -\ln y(t)$$

$[-r_0, \infty)$ üzerinde mevcut ve artan olup

$$x'(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \exp[x(t) - x(t - r_i(t))] \tag{4.22}$$

dir. Şimdi $r(t)\le r_0$ olacak biçimde bir $r(t)$ gecikmesinin oluşturulması istenmektedir. Bu $r(t)$ gecikmesi için

$$x_0'(t)=p(t)\exp[x_0(t)-x_0(t-r(t))]$$

denkleminin bir $x_0(t)$ çözümü vardır; burada $p(t)\equiv \mu/r(t)$ ve $x_0(t)$ mümkün olduğu kadar yavaş büyümektedir. Özellikle ikisi de tanımlandığı zaman $x_0(t)\le x(t)$ elde edilecektir. $t\to t^*<\infty$ olduğu zaman $x_0(t)\to\infty$ olduğu gösterildiğinde bir çelişkiye varılmış olunacaktır. Özel olarak $x_0(t)$, $[-r_0,0]$ üzerinde sabit ve $x(t)$ den daha küçük olmak üzere

$$x_0'(t)=\inf_{0<r\le r_0}\frac{\mu}{r}\exp[x_0(t)-x_0(t-r)] \quad , \quad t>0, \tag{4.23}$$

eşitliğini sağlamış olsun. Buradan

$$f(t,r)=\frac{\mu}{r}\exp[x_0(t)-x_0(t-r)]$$

alınırsa ve her t için (ki bunlar için $x_0(t)$ tanımlıdır) $r\to 0$ iken $f(t,r)\to\infty$ olduğuna dikkat edilirse, gerçekten $(0,\infty)$ üzerinde

$$x_0'(t)=f(t,r(t))=\frac{\mu}{r(t)}\exp[x_0(t)-x_0(t-r(t))] \quad , \quad t>0, \tag{4.24}$$

denklemini ve $0<r(t)\le r_0$ eşitsizliğini sağlayan bir $r(t)$ fonksiyonunun mevcut olduğu görülür.

$[-r_0,0]$ üzerinde $x(t)$ artan ve $x_0'(t)=0$ olduğundan, bu aralıkta $x_0'(t)<x'(t)$ dir. $t\ge 0$ için $x(t)$ ve $x_0(t)$ tanımlı ve $x'(t)\le x_0'(t)$ olsun. Böylesi bütün t lerin infimumu t_0 olsun. Bu durumda $x'(t_0)\le x_0'(t_0)$ iken, $[-r_0,t_0)$ üzerinde $x'(t)>x_0'(t)$ dir. Öte yandan

$$\begin{aligned}
x'(t_0)&=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\exp[x(t_0)-x(t_0-r_i(t))] \\
&>\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\exp[x_0(t_0)-x_0(t_0-r_i(t))] \\
&\ge\sum_{i=1}^{n}p_i(t)r_i(t)\inf_{0<r\le r_0}\frac{1}{r}\exp[x_0(t_0)-x_0(t_0-r)]
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i(t) r_i(t)}{\mu} x_0'(t_0) \geq x_0'(t_0)$$

yazılabilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla ikisi tanımlı olduğu zaman $x'(t) > x_0'(t)$ dir.

$x_0(t)$ sürekli fonksiyonu $(0,\infty)$ üzerinde $x_0'(t) > 0$ iken $[-r_0, 0]$ üzerinde $x_0'(t) = 0$ eşitliğini sağlar. $x_0'(t)$, $(0,\infty)$ üzerinde artan bir fonksiyon olmasın. t_0 bütün t lerin supremumu olsun ki bu t ler için $x_0'(t)$, $(0,t]$ üzerinde artandır. $x_0(t)$ ve f sürekli olduklarından, $x_0'(t)$, $(0,\infty)$ üzerinde süreklidir. Buradan $t \in [t_0, t_1]$ için $x_0'(t) < 2x_0'(t_0)$ olacak biçimde bir $t_1 > t_0$ vardır. Şimdi $r_1 = \mu / 2x_0'(t_0)$ olmak üzere $r < r_1$ ise, bu durumda

$$f(t,r) > \frac{\mu}{r} > \frac{\mu}{r_1} = 2x_0'(t_0).$$

Gerçekten her $t \in [t_0, t_1]$ için

$$x_0'(t) = \inf_{r \in [r_1, r_0]} f(t,r).$$

Artık $t_2 - r_1 < t_0$ ve $t \in [t_0, t_2]$ için $x_0'(t) > x_0'(t_2 - r_1)$ olsun diye t_0'a yeterince yakın bir $t_2 \in (t_0, t_1)$ seçilebilir. Çünkü $x_0'(t)$, $[0, t_0]$ üzerinde artandır ve $[0,\infty)$ üzerinde süreklidir. $x_0'(t)$ sürekli olduğundan, $\frac{\partial f}{\partial t}$ var ve süreklidir. $r \in [r_1, r_0]$ ve $t \in [t_0, t_2]$ ise, bu durumda

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{(t,r)} = \frac{\mu}{r}\left(x_0'(t) - x_0'(t-r)\right)\exp[x_0(t) - x_0(t-r)]$$

$$\geq \frac{\mu}{r}\left(x_0'(t) - x_0'(t_2 - r_1)\right)\exp[x_0(t) - x_0(t-r)] > 0$$

olur. Çünkü $t - r < t_2 - r_1 < t_1$ dir. Böylece $[t_0, t_2]$ üzerinde $x_0'(t)$ artandır, ve dolayısıyla $[0, t_2]$ üzerinde artan olur ki bu t_0 tanımı ile çelişir. Sonuç olarak $x_0'(t)$, $[0,\infty)$ üzerinde artandır.

$$f(t, r(t)) = \inf_{0 < r \leq r_0} f(t,r)$$

olsun diye $[0,\infty)$ üzerinde $r(t) \le r_0$ olduğunu hatırlayalım. $x_0(t)$ sürekli olduğundan, $\frac{\partial f}{\partial t}$ var ve süreklidir. $r(t) \ne r_0$ ise,

$$0 = \left.\frac{\partial f}{\partial r}\right|_{(t,r(t))} = \frac{\mu}{(r(t))^2}\left(r(t)x_0'(t - r(t)) - 1\right)\exp\left[x_0(t) - x_0(t - r(t))\right]$$

ve buradan

$$r(t) = \frac{1}{x_0'(t - r(t))}$$

bulunur. $r(t) = r_0$, $\left.\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)\right|_{(t,r_0)} \le 0$ ise, $r_0 \le \frac{1}{x_0'(t - r_0)}$ olur. (4.24) denkleminden

$$\begin{aligned} x_0'(r_0) &= \frac{\mu}{r(r_0)}\exp\left[x_0(r_0) - x_0(r_0 - r(r_0))\right] \\ &\ge \frac{\mu}{r(r_0)}\exp\left[r(r_0)x_0'(r_0 - r(r_0))\right] \\ &\ge \mu e\, x_0'(r_0 - r(r_0)) \ge \mu e\, x_0'(0) \end{aligned}$$

dır; burada $x_0'(0)$ ifadesi x in 0 daki sağdan türevidir. Benzer olarak,

$$x_0'(2r_0) \ge \mu e\, x_0'(r_0) \ge (\mu e)^2 x_0'(0)$$

ve genellikle, k bir tamsayı ise,

$$x_0'(k\, r_0) \ge (\mu e)^k x_0'(0).$$

$\mu e > 1$ olduğundan, $x_0'(t_0) > 1/r_0$ olacak biçimde bir t_0 vardır. $a = x_0'(t_0)$, $b = \mu e$, $t_1 = t_0 + r_0$ ve herhangi bir $n \ge 1$ için

$$t_{n+1} = t_n + \frac{1}{ab^{n-1}}$$

olsun. $t \ge t_1$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= \frac{\mu}{r(t)}\exp\left[x_0(t) - x_0(t - r(t))\right] \\ &\ge \frac{\mu}{r(t)}\exp\left[r(t)x_0'(t - r(t))\right] \\ &\ge \mu e\, x_0'(t - r(t)) \ge b\, x_0'(t_0) = ab \end{aligned}$$

ve $x_0'(t-r(t))>a$ olduğundan $r(t)\le 1/a$ bulunur. Benzer olarak, $t\ge t_2$ ise, bu durumda $t-r(t)\ge t_2-1/a=t_1$ ve dolayısıyla $x_0'(t)\ge b\,x_0'(t_1)\ge ab^2$ ve $r(t)\le 1/x_0'(t_1)\le 1/ab$ olur. Tümevarım yönteminden her n için $x_0'(t_n)\ge ab^n$ sonucuna varılır. Öte yandan, $n\to\infty$ için $x_0'(t_n)\ge ab^n\to\infty$ iken,

$$t_n \to t_1 + \frac{1/a}{1-1/b}.$$

(4.23) denkleminden $x_0'(t)\to\infty$ olduğu zaman $x_0(t)\to\infty$ olur. O halde t bir $t^*<\infty$ noktasına yaklaşırken $x_0(t)\to\infty$ olur ve böylece kanıt tamamlanır.

Uyarı 4.2. Teorem 2.1.3 e benzer olarak

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{t-r_{\min}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)\,ds > 1 \tag{4.25}$$

koşulunun (4.1) denkleminin bütün çözümlerinin salınımlı olması için bir yeter koşul olduğu görülebilir.

Aşağıdaki teorem (4.1) denkleminin salınımlı olmayan çözümlerinin varlığı için yeter koşulları ifade etmektedir (Ladde 1979).

Teorem 4.4. $r_{\max}(t)=\max\limits_{1\le i\le n}(r_1(t),\dots,r_n(t))$ olmak üzere

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{t-r_{\max}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)\,ds < \frac{1}{e} \tag{4.26}$$

ise, bu durumda (4.1) denklemi salınımlı olmayan çözümlere sahiptir.

Kanıt. (4.1) denkleminin bir çözümünün

$$y(t)=\exp\left[\int_0^t \lambda(s)\,ds\right] \tag{4.27}$$

şeklinde olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $\lambda(t)$,

$$\lambda(t)=-\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left[-\int_{t-r_i(t)}^{t}\lambda(s)ds\right] \tag{4.28}$$

denklemini sağlar. Amacımız (4.28) denklemini sağlayacak şekilde reel-değerli sürekli bir $\lambda(t)$ fonksiyonunun varlığını göstermektir. Bunun için

$$(T\lambda)(t)=\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left[-\int_{t-r_i(t)}^{t}\lambda(s)ds\right] & , \quad t\geq t_0 \ , \\ \phi(t) \ , & t_0-r\leq t\leq t_0 \ , \end{cases} \tag{4.29}$$

şeklinde bir operatör tanımlayalım; burada $r(t)=\min\limits_{1\leq i\leq n\,,\,t\geq t_0} r_i(t)$ .T operatörü sürekli fonksiyonlar $C[t_0-r,+\infty)$ uzayından yine kendi içine tanımlı olan azalmayan ve sürekli bir operatördür. (4.26) koşulundan

$$\int_{t-r_{\max}(t)}^{t}\sum_{i=1}^{n} p_i(s)ds<\frac{1}{e} \quad , \quad t\geq t_0 , \tag{4.30}$$

olacak biçimde bir t_0 bulunabilir. $y_0(t)=-e\sum_{i=1}^{n} p_i(t)$ ve $x_0(t)\equiv 0$, $t\geq t_0-r$, ve

$$y_0(t)\leq\phi(t)\leq x_0(t),\ t\in[t_0-r,t_0],$$

alalım. Teorem 2.1.4 ün ispatında olduğu gibi,

$$y_0\leq Ty_0\leq Tx_0\leq x_0 \tag{4.31}$$

dır. $Ty_n=y_{n+1}$ şeklinde tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi artan bir dizi olup

$$y_0\leq y_n\leq y_{n+1}\leq x_0 \tag{4.32}$$

eşitsizliklerini sağlar. Teorem 2.1.4 ün kanıtında ki işlemlerin tekrarlanmasıyla $T\lambda=\lambda$ sonucuna varılır. Açık olarak

$$y_0(t)\leq\lambda(t)\leq x_0(t) \quad , \quad t\geq t_0-r , \tag{4.33}$$

dir. Bu da (4.28) denkleminin $[t_0-r,+\infty)$ üzerinde sürekli olan ve (4.33)' ü sağlayan bir $\lambda(t)$ çözümüne sahip olduğunu gösterir. Böylece (4.27) fonksiyonu (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümüdür.

Uyarı 4.3. Teorem 4.4 den (4.26) koşulu altında yeterince büyük bir t_0 başlangıç noktasına karşılık olarak bir pozitif çözümün varlığı garanti edilmektedir. Eğer (4.26) koşulu yerine

$$\int_{t-r_{\max}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} p_i(s)ds \leq e^{-1} \ , \quad t \in H_{t_0} \ , \tag{4.34}$$

koşulu alınırsa, o zaman (4.1) denklemi bir t_0 başlangıç noktasına karşılık gelen bir pozitif çözüme sahip olur. Burada $H_{t_0} = \{t \geq t_0 \, , t - r_{\max}(t) \geq t_0 \}$ dır.

Şimdi daha genel olan

$$y'(t) + p(t)y(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)y(t - r_i(t)) = 0 \tag{4.35}$$

denklemini ele alalım; burada $p(t)$ ve $i \in I_n$ için $p_i(t) \geq 0$, $r_i(t) > 0$ fonksiyonları süreklidir.

$$y(t) = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} p(u)du\right] z(t) \ , \quad t \geq t_0 , \tag{4.36}$$

dönüşümü (4.35) denklemine uygulanırsa, $t \geq t_0$ için

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t)\exp\left[\int_{t-r_i(t)}^{t} p(u)du\right] z(t - r_i(t)) = 0 \tag{4.37}$$

elde edilir.

$$q_i(t) = p_i(t) \exp \int_{t-r_i(t)}^{t} p(u)du \ , \ i \in I_n \ , \tag{4.38}$$

alınırsa, (4.37) denklemi

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)z(t - r_i(t)) = 0 \tag{4.39}$$

halini alır. (4.36) dönüşümü salınımlılığı korur. Dolayısıyla (4.1) denklemi için yukarıda verilen sonuçlar (4.35) denklemine uygulanabilir. Örnek olarak aşağıdaki teorem ifade edilebilir (Ladde 1977).

Teorem 4.5. $q_i(t)$, (4.38) ile tanımlanmak üzere aşağıdaki koşullardan herhangi biri sağlanıyorsa, bu durumda (4.35) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır:

(i) $$\underline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t-r_i(t)}^{t} q_i(s)ds > \frac{1}{e} \quad , \quad \text{bir } i \in I_n \text{ için.} \tag{4.40}$$

(ii) $$\underline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t-r_{\min}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} q_i(s)ds > \frac{1}{e}. \tag{4.41}$$

(iii) $$\underline{\lim}_{t\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} q_i(t) r_i(t) \right) > \frac{1}{e}. \tag{4.42}$$

(iv) $$\left[\prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t-r_j(t)}^{t} q_i(s)ds \right]^{1/n} > \frac{1}{e} \text{ ve } q_i(t) \text{ Lemma 4.1 in koşullarını sağlar.}$$

(v) $$\overline{\lim}_{t\to\infty} \int_{t-r_{\max}(t)}^{t} \sum_{i=1}^{n} q_i(s)ds > 1. \tag{4.43}$$

5. KUVVET TERİMLİ LİNEER DENKLEMLER

Bu bölümde

$$y'(t)+\sum_{i=1}^{n} p_i(t)y(t-r_i(t))=q(t) \tag{5.1}$$

formunda kuvvet terimli bir denklem ele alınmakta ve bununla ilgili olarak aşağıdaki sonuç ispatlanacaktır (Onose 1978).

Teorem 5.1. Aşağıdaki koşulların sağlandıklarını kabul edelim:

(i) $q(t)$, $p_i(t)\geq 0$, $r_i(t)>0$ fonksiyonları süreklidir; burada $i\in I_n$;

(ii) $Q'(t)=q(t)$, $Q(t'_m)=q_1$, $Q(t''_m)=q_2$, $\lim\limits_{m\to\infty} t'_m=\infty$, $\lim\limits_{m\to\infty} t''_m=\infty$, ve $t\geq 0$ için $q_1\leq Q(t)\leq q_2$ olacak şekilde bir $Q(t)$ fonksiyonu ve iki q_1, q_2 sabiti ile birlikte $\{t'_m\}$, $\{t''_m\}$ dizileri vardır;

(iii) $i\in I_n$ için $p_i(t)$, Teorem 4.1, 4.2, 4.3 ün koşullarını ve (4.25) bağıntısını sağlar.

Bu durumda (5.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Kanıt. $y(t)$, $t\geq t_1$ için $y(t)>0$ ve $y(t-r_i(t))>0$ olacak biçimde bir salınımlı olmayan çözüm olsun ve ayrıca

$$x(t)\equiv y(t)-Q(t)$$

olsun. Bu durumda $t\geq t_1$ için

$$x'(t)=y'(t)-Q'(t)=-\sum_{i=1}^{n} p_i(t)y(t-r_i(t))\leq 0$$

olur. Kabul edelim ki $t\geq t_2\geq t_1$ için $x(t)+q_1\leq 0$ dır. $x(t)+Q(t)\equiv y(t)>0$ olduğundan,

$$x(t'_m)+Q(t'_m)=y(t'_m) \quad , \quad t'_m>t_2$$

bulunur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla her $t\geq t_2$ için $x(t)+q_1>0$ olur.

$$z(t)\equiv x(t)+q_1$$

olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
z'(t) = x'(t) = y'(t) - Q'(t) &= -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) y(t - r_i(t)) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} p_i(t) \left[x(t - r_i(t)) + Q(t - r_i(t)) \right] \\
&\le -\sum_{i=1}^{n} p_i(t)\, z(t - r_i(t))
\end{aligned}
$$

dir. Yani,

$$z'(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) z(t - r_i(t)) \le 0$$

eşitsizliği ilerde pozitif bir çözüme sahiptir. Fakat bu (iii) koşuluna göre imkansızdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 5.1.

$$y'(t) + y(t - \pi) = \sin t \tag{5.2}$$

denklemi Teorem 5.1 in tüm koşullarını sağlar. Dolayısıyla (5.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

6. LİNEER OLMAYAN GECİKMELİ DENKLEMLER

Bu bölümde birinci basamaktan lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklem ve eşitsizliklerin çözümlerinin salınımlı ve salınımsız davranışları incelenmektedir.

Önce lineer olmayan

$$y'(t)+p(t)f(y(g(t)))=0 \tag{6.1}$$

gecikmeli diferensiyel denklemi hakkında yapılan sonuçları göz önüne alalım. (6.1) denklemindeki f, p ve g fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) $g \in C(R^+, R)$; $t \in R^+$ için $g(t)<t$; $g(t)$, R^+ üzerinde kesin artan ve $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = +\infty$;

(ii) $p(t)$ lokal integrallenebilir ve $p(t) \geq 0$;

(iii) $y \neq 0$ için $y f(y) > 0$, $f \in C(R,R)$, f azalmayan ve

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{f(y)} = M < +\infty . \tag{6.2}$$

Lemma 6.1. (i) koşulunun sağlandığını kabul edelim. $\{t_n\}$, t_0 keyfi bir sayı olmak üzere $t_n = g^{-1}(t_{n-1})$ ile tanımlı bir dizi olsun. Bu durumda $n \to \infty$ için $t_n \to \infty$.

Kanıt. İddianın doğru olmadığını kabul edelim. O halde $t_n \to \beta < +\infty$ alınabilir. g ve g^{-1} nin sürekliliğinden

$$\beta = \lim_{n \to \infty} t_n = \lim_{n \to \infty} g^{-1}(t_{n-1}) = g^{-1}(\beta) > \beta$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

Teorem 6.1. (i), (ii) ve (iii) koşulları sağlansın. Ayrıca M (6.2) deki gibi olmak üzere

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \int_{g(t)}^{t} p(s)\,ds > M \tag{6.3}$$

olsun. Bu durumda (6.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Kanıt. Yeterince büyük t^* için

$$\int_{g(t)}^{t} p(s)ds > M + K \quad , \quad t \geq t^* , \tag{6.4}$$

yazılabilir, burada $K > 0$ dır. $y(t)$, (6.1) denkleminin bir salınımlı olmayan çözümü olsun. Genelliği bozmadan $t \geq t_0 > g(t^*)$ için $y(t) > 0$ alalım. Bu durumda $t > t_1 = g^{-1}(t_0)$ için

$$y'(t) = -p(t) f(y(g(t))) \leq 0$$

olur. Buradan y artmayan olup $t \to \infty$ için sonlu negatif olmayan bir α limitine sahiptir. $\alpha = 0$ olduğu iddia edilmektedir. Eğer değil ise, o zaman $\alpha > 0$ ve $f(\alpha) > 0$ olur.

$$\int_{g(s_n)}^{s_n} p(s)ds > M + K \tag{6.5}$$

olacak şekilde $s_0 = t_0$ ve $s_n = g^{-1}(s_{n-1})$ olsun. (6.1) denkleminin t_0 dan s_n'e kadar integre edilmesiyle

$$y(s_n) - y(t_0) = -\int_{t_0}^{s_n} p(s) f(y(g(s)))ds$$

elde edilir. Bu son eşitlik, (i) den (iii) ye kadar olan koşullar ve (6.5) eşitsizliği birlikte kullanılırsa,

$$\begin{aligned} y(s_n) - y(t_0) &\leq -f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} \int_{s_{i-1}}^{s_i} p(s)ds \\ &= -f(\alpha) \sum_{i=1}^{n} \int_{g(s_i)}^{s_i} p(s)ds \\ &< -f(\alpha) n (M + K) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $n \to \infty$ halinde $y(s_n) \to \infty$ olur ki bu iddia edildiği gibi $t \geq t_0$ ve $\alpha = 0$ için $y(t) \geq \alpha > 0$ ile çelişir. Dolayısıyla $y(t)$ artmayan olup $t \to \infty$ halinde sıfıra yakınsar. (6.1) denkleminden

$$y(t) - y(g(t)) + \int_{g(t)}^{t} p(t) f(y(g(s)))ds = 0$$

çıkar. Buradan

$$y(t)-y(g(t))\left[1-\frac{f(y(g(t)))}{y(g(t))}\int_{g(t)}^{t}p(s)ds\right]\leq 0$$

ve dolayısıyla yeterince büyük t için

$$\int_{g(t)}^{t}p(s)ds<\frac{y(g(t))}{f(y(g(t)))}$$

bulunur. O halde

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\int_{g(t)}^{t}p(s)ds\leq M$$

dir ki bu (6.3) koşulu ile bir çelişkidir.

Uyarı 6.1. Teorem 6.1, f nin hem lineer hem de sublineer durumlarını kapsar. (6.2) deki $M=0$ ise, f fonksiyonu *sublineerdir*.

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{f(y)}=+\infty \tag{6.6}$$

durumunda f fonksiyonuna bir *genelleştirilmiş superlineer fonksiyon* denir. Superlineer durumu incelemek, aşağıdaki örnekte olduğu gibi daha zordur.

Örnek 6.1.

$$y'(t)+\left(t-\sqrt{t}\right)^{3}t^{-2}y^{3}\left(t-\sqrt{t}\right)=0\ ,\ t\geq 2, \tag{6.7}$$

gecikmeli diferensiyel denklemi için $t\to\infty$ halinde

$$\int_{g(t)}^{t}p(s)ds=\int_{t-\sqrt{t}}^{t}\frac{\left(s-\sqrt{s}\right)^{3}}{s^{2}}ds\to\infty$$

olduğu halde, $y(t)=1/t$ bu denklemin salınımlı olmayan bir çözümüdür.

Teorem 6.2. (6.3) koşulu yerine

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t}p(s)ds>\frac{M}{e} \tag{6.8}$$

alınmak üzere Teorem 6.1 in bütün hipotezleri sağlanmış olsun. Bu durumda (6.1) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Kanıt. $t \geq t_0 > 0$ için $y(t) > 0$, $y(g(t)) > 0$, salınımlı olmayan bir çözüm olsun. Dolayısıyla $y'(t) \leq 0$ olup $t \to \infty$ için $y(t) \to \alpha \geq 0$. Teorem 6.1 de olduğu gibi $t \to \infty$ için $y(t) \to 0$.

$$\int_{t^*}^{t} p(s)ds > \frac{M}{2e} \quad \text{ve} \quad \int_{g(t)}^{t^*} p(s)ds > \frac{M}{2e} \tag{6.9}$$

olacak biçimde bir $t^* \in (g(t), t)$ vardır. (6.1) denklemini t^* dan t ye kadar integre edersek,

$$\begin{aligned} y(t^*) - y(t) &= \int_{t^*}^{t} p(s) f(y(g(s)))ds \\ &\geq f(y(g(t))) \int_{t^*}^{t} p(s)ds > f(y(g(t)))\frac{M}{2e} \end{aligned}$$

ve aynı denklemin $g(t)$ den t^* a kadar integre edilmesiyle

$$\begin{aligned} y(g(t)) - y(t^*) &= \int_{g(t)}^{t^*} p(s) f(y(g(s)))ds \\ &\geq f(y(g(t^*))) \int_{g(t)}^{t^*} p(s)ds > f(y(g(t^*)))\frac{M}{2e} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$y(t^*) > f(y(g(t)))\frac{M}{2e} \geq \frac{f(y(g(t)))}{y(g(t))} f(y(g(t^*)))\left(\frac{M}{2e}\right)^2$$

ve (6.2) koşulundan

$$\frac{y(g(t^*))}{y(t^*)} \leq \frac{y(g(t))}{f(y(g(t)))} \frac{y(g(t^*))}{f(y(g(t^*)))} \left(\frac{2e}{M}\right)^2 < \infty \tag{6.10}$$

bulunur.

$$w(t) = \frac{y(g(t))}{y(t)} \geq 1$$

alınırsa, (6.10) dan $\varliminf_{t\to\infty} w(t) = \ell \geq 1$ çıkar; burada ℓ sonludur. (6.1) denkleminden

$$\ln w(t) = \int_{g(t)}^{t} p(s)\frac{f(y(g(s)))}{y(g(s))}w(s)ds$$

$$= w(\xi)\frac{f(y(g(\xi)))}{y(g(\xi))}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds \ .$$

elde edilir, burada $g(t) < \xi < t$ .Yukarıdaki denklemin alt limiti alınırsa

$$\ln \ell \geq \frac{\ell}{M}\varliminf_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds$$

bulunur. $\max\limits_{\ell\geq 1}\dfrac{\ln \ell}{\ell} = \dfrac{1}{e}$ olduğundan,

$$\frac{M}{e} \geq \varliminf_{t\to\infty}\int_{g(t)}^{t} p(s)ds$$

olur ki bu (6.8) ile çelişir.

Örnek 6.2

$$y'(t) - \frac{2}{(e\ln\lambda)t}y(\lambda t) = 0 \quad , \quad 0 < \lambda < 1, \qquad (6.11)$$

denklemi için

$$\int_{\lambda t}^{t} -\frac{2}{(e\ln\lambda)s}ds = \frac{2}{e}$$

dir. O halde (6.11) denklemi Teorem 6.2 nin koşullarını sağlar ve dolayısıyla (6.11) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

Şimdi $g(t) = t - r(t)$ olmak üzere (6.1) denkleminin asimptotik davranışı hakkında bilinen bazı sonuçlardan söz edelim (Haddock 1974).

Teorem 6.3. $p, r \in C[R^+, R^+]$, $p(t) > 0$, $f \in C[R,R]$, $0 \leq r(t) \leq q$ ve $y \neq 0$ için $y f(y) > 0$ olsun.

$$\int^{\infty} p(t)dt = \infty$$

ise, bu durumda (6.1) denkleminin salınımlı olmayan her çözümü $t \to \infty$ halinde sıfıra gider.

Kanıt. $y(t) > 0$ yeterince büyük t ler için (6.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. O halde $y'(t) < 0$ ve hipotezlerden $\lim_{t \to \infty} y(t) = C \geq 0$ mevcuttur.

$C = 0$ olduğunu gösterelim. Aksi takdirde $C > 0$ olur ki bu durumda bir $t \geq t^*$ için $f(y(t - r(t))) \geq d > 0$ ve $f(C) \geq d > 0$ olacak biçimde bir $t^* \geq t_0$ vardır. Buradan $t \geq t^*$ için $y'(t) \leq -p(t)d$ ve dolayısıyla

$$y(t) \leq y(t^*) - d \int_{t^*}^{t} p(s)ds$$

bulunur. Böylece yeterince büyük t ler için $y(t)$ negatif olacaktır. Bu da $y(t) > 0$ gerçeği ile çelişir. O halde $C = 0$ dır. Benzer bir inceleme $y(t)$ nihayet negatif olduğu zaman da sağlanır.

Aşağıdaki sonuçlar (6.1) denkleminin sınırlı salınımlı çözümlerinin asimptotik davranışları için yeter koşulları ihtiva etmektedir.

Teorem 6.4. $p,\ r \in C[R^+, R^+]$, $p(t) > 0$, $f \in C[R, R]$, $0 \leq r(t) \leq q$ ve $y \neq 0$ için $y f(y) > 0$ olsun. $t \to \infty$ halinde $p(t) \to 0$ veya $b(t)r(t) \to 0$ ise, bu durumda (6.1) denkleminin tüm sınırlı salınımlı çözümleri $t \to \infty$ halinde sıfıra gider; burada $b(t) = \sup_{s \in [0,t]} p(s)$ dir.

Kanıt. $y(t)$, (6.1) denkleminin sınırlı salınımlı bir çözümü olsun. Hükmün yanlış olduğunu kabul edelim. O halde bir $\varepsilon > 0$ ve $\{t_n\}$, $\{t_n^*\} \to \infty$ dizileri vardır, öyle ki her bir n için ya

$$y(t_n)=0,\ y(t_n^*)=\varepsilon\ ,\ y'(t_n^*)\geq 0 \text{ ve } t_n<t<t_n^*<t_{n+1} \text{ olduğunda } 0<y(t)<\varepsilon$$

veya

$$y(t_n)=0\ ,\ y(t_n^*)=-\varepsilon\ ,\ y'(t_n^*)\leq 0 \text{ ve } t_n<t<t_n^*<t_{n+1} \text{ oluğunda } 0>y(t)>-\varepsilon \text{ dur.}$$

Aşağıdaki işlemler her iki durum içinde sağlanır. İlkini kabul edelim. $y'(t)$ yi t_n den t_n^*'a kadar integre edersek,

$$\varepsilon=y(t_n^*)-y(t_n)\leq\int_{t_n}^{t_n^*}p(s)\,|\,f(\,y(s-r(s)))|ds\leq M\int_{t_n}^{t_n^*}p(s)ds \tag{6.12}$$

olur; burada M, $|f(\,y(\,.))|$ nin bir sınırıdır. $t\to\infty$ için $b(t)r(t)\to 0$ olsun. $b(t)$ sürekli ve monoton artan olduğundan,

$$\varepsilon\leq M\int_{t_n}^{t_n^*}b(s)ds\leq M\,b(t_n^*)(t_n^*-t_n)$$

veya

$$t_n^*-t_n\geq\frac{\varepsilon}{M\,b(t_n^*)}.$$

n sayısı $b(t_n^*)r(t_n^*)<\dfrac{\varepsilon}{M}$ olacak şekilde yeterince büyük seçilsin. Bu durumda

$$r(t_n^*)<\frac{\varepsilon}{M\,b(t_n^*)}\leq t_n^*-t_n$$

olur ki bu $t_n<t_n^*-r(t_n^*)\leq t_n^*$ eşitsizliğini ifade eder. Buradan $y(t_n^*-r(t_n^*))>0$ olup

$$y'(t_n^*)=-p(t_n^*)f(y(t_n^*-r(t_n^*)))<0$$

dır. Bu da $y'(t_n)\geq 0$ olmasıyla çelişir. Şimdi $t\to\infty$ için $p(t)\to 0$ olsun. (6.12) eşitsizliğinden

$$\varepsilon\leq M\int_{t_n}^{t_n^*}p(s)ds=M\ p(\xi)(t_n^*-t_n)$$

veya

$$t_n^*-t_n\geq\frac{\varepsilon}{M\ p(\xi)}$$

olur; burada $t_n<\xi<t_n^*$.

$p(t) \to 0$ olduğundan, $n \to \infty$ halinde $p(\xi) \to 0$ olur. Buna göre n sayısı $t_n^* - t_n > q$ olacak şekilde yeterince büyük seçilebilir. Buradan

$$t_n < t_n^* - r\left(t_n^*\right) \leq t_n^*$$

olup önceki gibi bir çelişki elde edilir. Bu da kanıtı tamamlar.

Sonuç 6.1. $p, r \in C[R^+, R^+]$, $p(t) > 0$, $f \in C[R^+, R^+]$, $0 \leq r(t) \leq q$ ve $y \neq 0$ için $y f(y) > 0$ olsun. Ayrıca $p(t)$ sınırlı, $\int^{\infty} p(t)dt = \infty$ ve $t \to \infty$ halinde $r(t) \to 0$ ise, bu durumda (6.1) denkleminin tüm sınırlı çözümleri $t \to \infty$ halinde sıfıra gider.

Şimdi birinci basamaktan lineer olmayan gecikmeli

$$y'(t) + a(t)y(t) + p(t)f(\, y(t - r_1), \ldots, y(t - r_m)) \leq 0, \tag{6.13}$$

$$y'(t) + a(t)y(t) + p(t)f(\, y(t - r_1), \ldots, y(t - r_m)) \geq 0, \tag{6.14}$$

diferensiyel eşitsizliklerini ve

$$y'(t) + a(t)y(t) + p(t)f(\, y(t - r_1), \ldots, y(t - r_m)) = 0, \tag{6.15}$$

diferensiyel denklemini ele alalım; burada $p \in C[R^+, R^+]$, $a \in C[R^+, R]$, $r_i \in C^1[R^+, R^+]$, $r_i'(t) > 0$, $r_i(t) > 0$ ve $t \to \infty$ halinde $t - r_i(t) \to \infty$, $i \in I_m$ dir. Ayrıca, $i \in I_m$ için y_i ler aynı işaretli olmak üzere

$$f \in C[R^m, R] \text{ ve } f(y_1, y_2, \ldots, y_m)y_1 > 0 \tag{6.16}$$

olsun. Buradan aşağıdaki sonuç ispatlanabilmektedir (Onose 1984).

Teorem 6.5. Yukarıdaki koşullara ek olarak

$$\liminf_{t \to \infty} \int_{t - r_i(t)}^{t} a(s)ds \geq k_i > -\infty\ , \quad i \in I_m\,, \tag{6.17}$$

olsun; burada k_i ler sabittir. Ayrıca, her $s \in R^m$ için

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \quad , \quad K > 0\ , \tag{6.18}$$

$$|\, f(s_1, s_2, \ldots, s_m)| \geq K |s_1|^{\alpha_1} |s_2|^{\alpha_2} \ldots |s_m|^{\alpha_m} \tag{6.19}$$

sağlanacak ve

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-r_*(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{eKC} \tag{6.20}$$

olacak şekilde negatif olmayan K, α_j sayıları mevcut olsun; burada

$$C = \min_{1\le i\le m} \exp k_i \ \text{ ve } \ r_*(t) = \min\left(r_1(t),\ldots,r_m(t)\right) \tag{6.21}$$

dir. Bu durumda (6.13) eşitsizliğinin nihayet pozitif çözümü yoktur.

Kanıt. İspat tekniği olarak, nihayet pozitif olan bir çözümün varlığının bir çelişkiye neden olacağını göstermek şeklinde ifade edilebilir. $y(t)$, yeterince büyük T sabiti için $y(t)>0$, $t\ge T$, olacak şekilde (6.13) eşitsizliğinin bir çözümü olsun. $t\to\infty$ halinde $t-r_i(t)\to\infty$ olduğundan, $t\ge T_1$ için $t-r_i(t)\ge T$ olacak şekilde bir $T_1>T$ sayısı vardır ve böylece

$$t\ge T_1 \text{ için } y\left(t-r_i(t)\right)>0 \ , \ i\in I_m \ ,$$

dir. (6.13) den $t\ge T_1$ için

$$\exp\left(\int_T^t a(s)ds\right)\left(y'(t)+a(t)y(t)+p(t)f\left(y\left(t-r_1(t)\right),\ldots,y\left(t-r_m(t)\right)\right)\right)\le 0 \ ,$$

bulunur ve bu ise $t\ge T_1$ için şunu ifade eder:

$$\left(y(t)\exp\left(\int_T^t a(s)ds\right)\right)' + \left(\exp\left(\int_T^t a(s)ds\right)\right)p(t)f\left(y\left(t-r_1(t)\right),\ldots,y\left(t-r_m(t)\right)\right)\le 0 . \tag{6.22}$$

$$z(t) = y(t)\exp\int_T^t a(s)ds$$

dönüşümü yapılırsa, (6.22) denklemi $t\ge T_1$ için

$$z'(t)+\left(\exp\left(\int_T^t a(s)ds\right)\right)p(t)f\left(\left(\exp\left(-\int_T^{t-r_1(t)} a(s)ds\right)\right)z\left(t-r_1(t)\right),\right.$$
$$\left.\ldots,\left(\exp\left(-\int_T^{t-r_m(t)} a(s)ds\right)\right)z\left(t-r_m(t)\right)\right)\le 0 \tag{6.23}$$

şeklini alır.

$t \geq T_1$ için $z(t-r_i(t))>0$ ve $f>0$ olduğundan, $t \geq 2T_1$ için $z'(t)<0$ çıkar. Buradan

$$t \geq 2T_1 \text{ için } z(t)<z(t-r_*(t)) .$$

$t \geq 2T_1$ için $w(t)=z(t-r_*(t))/z(t)$ alalım ve bunun için $w(t)>1$ olduğunu belirtelim. (6.23) denkleminin her iki yanı $z(t)$ ile bölünür ve sonra $t \geq 2T_1$ için $t-r_*(t)$ den t ye kadar integre edilirse, $t \geq 3T_1$ için

$$\ln z(t)-\ln z(t-r_*(t))+\int_{t-r_*(t)}^{t}\left[\left(\exp\left(\int_T^s a(u)du\right)\right)p(s)f\left(\left(\exp\left(-\int_T^{s-r_1(s)}a(u)du\right)\right)z(s-r_1(s)),\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots,\left(\exp\left(-\int_T^{s-r_m(s)}a(u)du\right)\right)z(s-r_m(s))\right)/z(s)\right]ds \leq 0,$$

ve buradan da $t \geq 3T_1$ için

$$\ln w(t) \geq \int_{t-r_*(t)}^{t}\left[\left(\exp\left(\int_T^s a(u)du\right)\right)p(s)f\left(\left(\exp\left(-\int_T^{s-r_1(s)}a(u)du\right)\right)z(s-r_1(s)),\right.\right.$$
$$\left.\left.\ldots,\left(\exp\left(-\int_T^{s-r_m(s)}a(u)du\right)\right)z(s-r_m(s))\right)/z(s)\right]ds$$

elde edilir. (6.18), (6.19), ve $z(t)$ nin azalmayan özelliğinden

$$\ln w(t) \geq K\int_{t-r_*(t)}^{t}\left[\left(\exp\left(\int_T^s a(u)du\right)\right)p(s)\left[\left(\exp\left(-\int_T^{s-r_1(s)}a(u)du\right)\right)z(s-r_1(s))\right]^{\alpha_1}\right.$$
$$\left.\ldots\left[\left(\exp\left(-\int_T^{s-r_m(s)}a(u)du\right)\right)z(s-r_m(s))\right]^{\alpha_m}/z(s)\right]ds$$

$$\geq K\int_{t-r_*(t)}^{t}\left[\exp\left(\int_T^s a(u)du\right)\right]^{\alpha_1+\ldots+\alpha_m}p(s)\left[\exp\left(-\int_T^{s-r_1(s)}a(u)du\right)\right]^{\alpha_1}$$
$$\ldots\left[\exp\left(-\int_T^{s-r_m(s)}a(u)du\right)\right]^{\alpha_m}\left(\frac{z(s-r_*(s))}{z(s)}\right)ds$$

$$\geq K \int_{t-r_*(t)}^{t} \left[\exp\left(\int_{s-r_1(s)}^{s} a(u)du\right)\right]^{\alpha_1} \left[\exp\left(\int_{s-r_2(s)}^{s} a(u)du\right)\right]^{\alpha_2}$$

$$\ldots\left[\exp\left(\int_{s-r_m(s)}^{s} a(u)du\right)\right]^{\alpha_m} p(s)\left(\frac{z(s-r_*(s))}{z(s)}\right)ds$$

$$\geq KC \int_{t-r_*(t)}^{t} p(s)w(s)ds\ ,\ t \geq t_0 \geq 3T_1\ , \tag{6.24}$$

bulunur, burada t_0 yeterince büyük bir sabit ve C sabiti (6.21) deki gibidir. (6.20) den, $t \geq t_2 \geq t_0$ için

$$\int_{t-r_*(t)}^{t} p(s)ds \geq N > \frac{1}{eKC}$$

olacak şekilde bir N sabiti vardır, burada t_2 yeterince büyüktür.

Buradan t_3 yeterince büyük olmak üzere herhangi bir t , $t \geq t_3 > t_2$, için

$$t^* - r_*\left(t^*\right) < t < t^*$$

ve

$$\int_{t}^{t^*} p(s)ds \geq \frac{N}{2} \quad , \quad \int_{t^*-r_*(t^*)}^{t} p(s)ds \geq \frac{N}{2} \tag{6.25}$$

olacak şekilde bir t^* vardır.

Şimdi (6.23) eşitsizliğini t den t^*' a kadar ve yine $t^* - r_*\left(t^*\right)$ dan t ye kadar integre edersek ve (6.24) ün bulunmasındaki incelemeyi kullanırsak,

$$z(t) - z\left(t^*\right) \geq KC \int_{t}^{t^*} p(s)z(s - r_*(s))ds$$

$$\geq KC\ z\left(t^* - r_*\left(t^*\right)\right)\int_{t}^{t^*} p(s)ds$$

$$\geq \frac{NKC}{2}\ z\left(t^* - r_*\left(t^*\right)\right) \tag{6.26}$$

ve

$$z\left(t^{*}-r_{*}\left(t^{*}\right)\right)-z(t)\geq K\,C\int\limits_{t^{*}-r_{*}\left(t^{*}\right)}^{t}p(s)\,z\left(s-r\,(s)\right)ds$$

$$\geq K\,C\;z\left(t-r_{*}\left(t\right)\right)\int\limits_{t^{*}-r_{*}\left(t^{*}\right)}^{t}p(s)\,ds$$

$$\geq\frac{N\,K\,C}{2}\,z\left(t-r_{*}(t)\right)\qquad(6.27)$$

bulunur. (6.26) ve (6.27) den,

$$z(t)\geq\frac{N\,K\,C}{2}\,z\left(t^{*}-r_{*}\left(t^{*}\right)\right)\geq\frac{(N\,K\,C)^{2}}{4}\,z\left(t-r_{*}(t)\right)$$

ve $t\geq t_3$ için

$$\frac{4}{(N\,K\,C)^{2}}\geq\frac{z\left(t-r_{*}(t)\right)}{z(t)}=w(t)$$

elde edilir. Buradan $w(t)$ sınırlıdır.

$$\liminf_{t\to\infty}w(t)=\ell$$

olsun. Bu durumda $\ell\geq1$ ve ℓ sonludur. (6.24) ün her iki yanının $\liminf$ 'i alınırsa,

$$\ln\ell\geq\ell\,K\,C\left(\liminf\int\limits_{t-r_{*}(t)}^{t}p(s)\,ds\right)$$

olur.

$\max\limits_{x\geq1}(\ln x-a\,x)=-\ln a-1$ gerçeği kullanılırsa, yukarıdaki eşitsizlik

$$\max_{\ell\geq1}\left\{\ln\ell-\ell\,K\,C\liminf\int\limits_{t-r_{*}(t)}^{t}p(s)\,ds\right\}=-\ln\left(K\,C\liminf\int\limits_{t-r_{*}(t)}^{t}p(s)\,ds\right)-1\geq0$$

şeklini alır. Bu son eşitsizlikten

$$\ln\left(K\,C\liminf\int\limits_{t-r_{*}(t)}^{t}p(s)\,ds\right)\leq-1$$

yani,

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-r_*(t)}^{t} p(s)ds \le \frac{1}{eKC}$$

elde edilir ki bu (6.20) ile çelişir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Benzer muhakeme yapılarak aşağıdaki sonuç ispatlanabilir.

Teorem 6.6. (6.14) eşitsizliği Teorem 6.5 in hipotezlerini sağlarsa, o zaman (6.14) ün nihayet negatif olan bir çözümü yoktur.

Teorem 6.5 ve 6.6 dan (6.15) denkleminin nihayet ne pozitif ne de negatif olan çözümlere sahip olduğu sonucu çıkar.

Sonuç 6.2. Teorem 6.5 in hipotezleri altında (6.15) denkleminin her çözümü salınımlıdır.

Örnek 6.3.

$$y'(t) - y(t) + \exp\left(\frac{\pi}{2}\right) y\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad (6.28)$$

denklemi Sonuç 6.2 nin koşulunu sağlar. Dolayısıyla (6.28) denkleminin her çözümü salınımlıdır. Gerçekten $y(t) = (\exp t)\sin t$, (6.28) denkleminin salınımlı bir çözümüdür.

Uyarı 6.2. (6.20) koşulu yerine

$$\limsup_{t\to\infty} \int_{t-r_*(t)}^{t} p(s)ds > \frac{1}{KC} \qquad (6.29)$$

alınacak olursa, o zaman Teorem 6.5 yine doğru kalır. Bu uyarı Teorem 6.1 in ispat metodu kullanılarak sağlanabilir.

Uyarı 6.3. Birinci basamaktan

$$y'(t) + a(t)y(t) + \sum_{i=1}^{n} p_i(t) f_i(y(t - r_1(t)), \ldots, y(t - r_m(t))) \le 0 \qquad (6.30)$$

diferensiyel eşitsizliği için (6.20) koşulu yerine

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-r_0(t)}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} k_i \; p_i(s) \right) ds > \frac{1}{eC} \tag{6.31}$$

koşulu ele alınırsa, o zaman Teorem 6.5 in hükmü yine doğru kalır.

KAYNAKLAR

Arino, O., Gyori, I. and Jawhari, A. 1984. Oscillation criteria in delay equations. J. Differential Equations., 53; 115-123.

Birkoff, G. and Kotin, 1966. Asymptotic behavior of solutions of first order linear differential delay equations. JMAA, 13; 8-18.

Birkoff, G. and Kotin, K. 1966. Integro differential delay equations of positive type. J. Differential Equations., 2; 320-327.

Driver, R. D. and Sasser, D. W. and Slater, M. L. 1973. The equation $x'(t) = a\,x(t) + b\,x(t-r)$ with small delay. Amer. Math. Monthly., 80; 990-995.

Driver, R. D. 1977. Ordinary and delay differential equations. Springer-Velag, Berlin and New York.

Elbert, A. and Stavroulakis, L. P. 1995. Oscillation and nonoscillation criteria for delay differential equations. Proc. Amer. Math. Soc., 123; 1503-1510.

Erbe, L. H. and Zhang, B. G. 1988. Oscillation for first order linear differential equations with deviating arguments. Differential and Integral Equations., 1; 305-314.

Haddock, J. R. 1974. On the asymptotic behavior of solutions of $x'(t) = -a(t)f(x(t-r(t)))$. SIAM Math. Anal., 5; 569-573.

Hunt, B. R. and Yorke, J. A. 1984. When all solutions of $x'(t) = -\sum q_i(t)x(t-r_i(t))$ oscillate. J. Differential Equations., 53; 139-145.

Kusano, T. 1982. On even order functional differential equations with advanced and retarded arguments. J. Differential Equqtions., 45; 75-84.

Ladas, G. 1979. Sharp conditions for oscillations caused by delays. Applicable Anal., 9; 95-98.

Ladas, G. and Stavroulakis, I. P. 1982. Oscillations caused by several retarded and advanced arguments. J. Differential Equations., 44; 135-152.

Ladas, G. and Stavroulakis, I. P. 1983. A necessary and sufficient conditions for oscillation of first order delay differential equations. Amer. Math. Monthly., 90; 637-640.

Ladas, G., Sficas, Y. G. and Stavroulakis, I. P. 1983. Asymptotic behavior of solutions of retarded differential equations. Proc. Amer. Math. Soc., 88; 247-253.

Ladde, G. S. 1977. Oscillations caused by retarded perturbations of first order linear ordinary differential equations . Atti. Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Math. Natur., 63; 351-359.

Ladde, G. S. 1979. Stability and oscillation in single species process with past memory. Int. J. System. Sci., 10; 621-647.

Li, B. 1995. Oscillations of delay differential equations with variable coefficients. JMAA, 192; 312-321.

Myskis, A. D. 1972. Linear differential equations with retarded argument. Moscow, Nauka, Russian.

Onose, H. 1978. Oscillation of a functional differential equation arising from an indistrual problem. J. Austral. Math. Soc. Ser., A 26; 323-329.

Onose, H. 1984. Oscillatory properties of the first order nonlinear advanced and delayed differential inequalities. Nonlinear Analysis., 8; 171-180.

Zhang, B. G. 1984. A survey of the oscillation of solution to first order differential equations with deviating arguments. Proceeding of VI th Nonlinear Analysis International Conference, held at Arlington, Texas, June 18-22.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1996 yılında Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2000 yılında aynı bölümden matematikçi ünvanıyla mezun oldu. Eylül 2000 de Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans sınavını kazandı. Aralık 2002 de Cumhuriyet Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünce açılan araştırma görevlisi sınavını kazandı. Halen aynı bölümde bu görevine devam etmektedir.