

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

131438

TÜRLÜ KOVARYANS KAVRAMLARI VE OLASILIKTA
KULLANILIŞLARI

Biröl TOPÇU

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2003

Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. Yalçın TUNCER danışmanlığında Birol TOPÇU tarafından hazırlanan bu çalışma 27/03/2003 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından İstatistik Anabilim Dalı'nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Soner GÖNEN



Prof.Dr. Yalçın TUNCER



Prof.Dr. Fikri ÖZTÜRK



Prof.Dr. Cihan ORHAN



Doç.Dr. Yılmaz AKDİ



Yukarıdaki sonucu onaylarım



Prof. Dr. Metin OLGUN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

TÜRLÜ KOVARYANS KAVRAMLARI VE OLASILIKTA KULLANILIŞLARI

Birol TOPÇU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Yalçın TUNCER

Bu çalışmada, iç çarpım (moment) kovaryansı, dağılım kovaryansı ve kuantil (yüzdeler) kovaryans fonksiyonları tanımları verilerek, bu tanımlanan kovaryans fonksiyonlarının sağlamakta oldukları analitik özellikler incelenmiştir.

Kovaryans fonksiyonları arasındaki ilişkiler üzerinde durularak, iç çarpım (moment) kovaryansı, dağılım kovaryansı ve kuantil (yüzdeler) kovaryans fonksiyonlarının bağımlılık kavramları ile aralarında bulunan ilişkiler incelenmiş ve uygulamalar verilmiştir.

2003, 69 sayfa

ANAHTAR KELİMELELER : İç çarpım, fonksiyonel uzay, iç çarpım (moment) kovaryansı, dağılım kovaryansı, kuantil (yüzdeler) kovaryans, kadran bağımlılığı, monoton birliktelik (association)

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

VARIOUS COVARIANCE CONCEPTS AND THEIR USE IN PROBABILITY

Birol TOPÇU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor : Prof. Dr. Yalçın TUNCER

In this study, inner product (moment) covariance, distribution covariance and quantile covariance functions are discussed. Analytical properties of these covariance functions are examined.

The relations between these covariance functions and dependency concepts are examined through properties of these covariance functions related to each other, and some applications exposing the dependency concept are given.

2003, 69 pages

Key Words : Inner product, functional space, inner product (moment) covariance, distribution covariance, quantile covariance, quadrant dependence, monotone association

TEŞEKKÜR

Bu alıőmayı bana vererek, alıőmamın her safhasında bilgilerini, deneyimini, gürüşlerini benimle paylaşan her konuda desteğini gürdüğüm ve hayata dair pek çok şeyi bana kazandıran değerli hocam, Sayın Prof. Dr. Yalçın TUNCER (Ankara Üniversitesi İstatistik Bölümü)' e minnettarım.

Bana alıőma fırsatı veren Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü' ne, değerli hocalarıma ve arkadaşlarıma katkılarından dolayı sonsuz teőekkürler.

Ayrıca, hayatım boyunca ve Doktora çalıőmalarım sırasında göstermiş oldukları destek, sabır ve fedakarlıkları için aileme sonsuz teőekkürler.

Birol TOPÇU
Ankara, Mart 2003

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Kovaryans ve İlgili Kavramların Kısa Bir Tarihçesi.....	1
1.2. Kovaryansla İlgili Bazı Notlar	7
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR.....	16
2.1. İç Çarpım, L^p Fonksiyonel Uzayı, ve Kuantil Fonksiyonu.....	16
2.2. Çok Değişkenli Dağılımlar.....	21
2.3. Bağımlılık Kavramları.....	24
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	29
3.1. Kovaryans Türleri.....	29
3.1.1. İç Çarpım (Moment) Kovaryansı.....	29
3.1.1.1. İç Çarpım (Moment) Kovaryansının Özellikleri.....	30
3.1.2. Dağılım Kovaryansı.....	31
3.1.2.1. Dağılım Kovaryansının Özellikleri.....	34
3.1.3. Kuantil (Yüzdelik) Kovaryansı.....	35
3.1.3.1. Kuantil (Yüzdelik) Kovaryansının Özellikleri.....	37
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	41
4.1. Kovaryans Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler ve Bağımlılık Kavramları İle Olan İlişkileri.....	41
4.1.1. Kovaryans Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler.....	41
4.1.2. Kovaryans Fonksiyonlarının Bağımlılık Kavramları İle Olan İlişkileri.....	48
4.2. Kovaryans Kavramlarına İlişkin Örnekler.....	51
5. TARTIŞMA ve SONUÇ.....	66
KAYNAKLAR.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	69

SİMGELER DİZİNİ

\Re	Reel sayılar
$E(.)$	"." nın beklenen değeri
$\frac{\partial a}{\partial b}$	a' nın b' ye göre türevi
$Cov(.,.)$	".,." nın kovaryansı
$Cov^{(E)}(.,.)$	".,." nın iç çarpım (moment) kovaryansı
$Cov^{(F)}(.,.)$	".,." nın dağılım kovaryansı
$Cov^{(Q)}(.,.)$	".,." nın kuantil (yüzdelik) kovaryansı

1. GİRİŞ

1.1. Kovaryans ve İlgili Kavramların Kısa Bir Tarihçesi

Tarihçe konusunda bir çok kaynak bulunmaktadır. Aşağıdaki açıklama Kruskal, W.H.' nin "Ordinal Measure of Association (1958)", Mari, D.D. ve Kotz, S.' nin "Correlation and Dependence (2001)" başlıklı eserlerine dayanmaktadır.

Kovaryans ve birliktelik (association) gibi ölçülerin tartışılmaya başlanması XIX. yüzyılın son yılları ile XX. yüzyılın başlarına rastlamaktadır. Bu ölçülerin bugünkü biçimleri, Francis Galton, Frank Edgeworth ve Karl Pearson' un korelasyon katsayısını istatistik analizinin bir aracı olarak popüler hale getirmelerinden sonra istatistik literatürüne girmiştir. Kuşkusuz, niceliklerin korelasyon katsayısıyla ilişkisine yönelik olasılık tartışmaları bir süredir devam etmekteydi. İlk aşamalara ait tartışmalar, H. Walker (1929) ve Karl Pearson' un (1920-1928) eserlerinde yer almaktadır.

Francis Galton (1822-1911) için "korelasyonun babası" deyiimi sıkça kullanılmaktadır. Gerçekten, Galton, 1885' de korelasyon katsayısının yapısını ortaya çıkarmış ve bu ölçünün kullanımının savunuculuğunu yapmış, geniş ölçüde kabul edilmesine yardımcı olmuştur. 1892' de F.Y. Edgeworth, adını "korelasyon katsayısı" olarak değiştirmiş ve K. Pearson, 1896' da analitik iç-çarpım formülünü elde etmiştir. Elde edilen bu formül, Pearson korelasyon katsayısı olarak adlandırılır. Önceleri, bu nicelik "Galton" ya da Galton' un fonksiyonu olarak adlandırılmıştı. Pearson 1904' te Galton için yazdığı biyografide, Galton' un dizilerin ya da derecelerin korelasyonunu ilk defa denediğini, ancak söz konusu yaklaşımı bırakarak daha sonraları standart iki değişkenli normal korelasyon teorisine dönmüşecek bir yaklaşımı benimsediğini belirtmektedir. Galton' un tanımlamış olduğu korelasyon ölçüsü, kendi başına marjinal çeyreklikler arası dizilerin ve koşullu medyanların iniş

sıralarının bir fonksiyonunu ifade etmektedir.

Bazı bilim adamlarının korelasyonun gelişmesinde yapmış oldukları yenilikler, Pearson' un çalışmalarını doğru çıkarmıştır. Yapılan uzun çalışmalardan ve gelişim döneminden sonra Pearson' un elde etmiş olduğu formül kullanışlı hale getirilmiştir. Fancher, 1883' de Galton tarafından dikkate alınmayan ancak önerilen sınav sonuçları arasındaki bağlantı ile ilgilenmiştir.

Galton' un şimdilerde hata terimi olarak bilinen ilişkili değişkenler ile ilgili çalışmaları kendisinin uzun yıllarını almış ve bu çalışmalarının sonucunda Galton, önemli bilimsel katkılarda bulunmuştur.

Galton' dan daha önce çalışma yapanlar arasında Amerikan matematikçi Robert Adrain ile Carrickfergus (1807), meşhur Fransız matematikçi Pierre-Simon Laplace (1810), İtalyan astronom Giovanni Antonio Amadeus Plana (1820) ve Fransız fizikçi Auguste Bravais (1846) bulunmaktadır. Bu bilim adamlarından birkaçı, bağımlılık ölçüsü problemi ile ilgilenmişler, fakat kullanışlı formüller elde edememişlerdir. Ancak, deneysel verilerle sınırlı deneme çalışmaları, teorik analize katkıda bulunmuştur. Özellikle Laplace (1811), Plana (1818-1820) ve Gauss (1823) şimdilerde çoklu normal dağılım olarak adlandırılan konu üzerine çalışmışlar, $Q(\cdot)$ kuadratik fonksiyonu göstermek üzere

$$\exp(Q(x_1, x_2, \dots, x_n))$$

üstel ifadesinde çarpım terimlerinin katsayılarının kullanışlılığı ile ilgilenmişlerdir. Bravais (1846), ikili yoğunluk fonksiyonunu gözönüne alarak geometrik yaklaşımı kullanmış ve iki değişken vasıtası ile korelasyon' un varlığını ifade etmiştir. Ayrıca Bravais, "Correlated Averages" isimli çalışmasında üç değişkenli korelasyon ile ilgilenmiştir. Bravais' den kırk yıl sonra İngiliz matematikçi J. Hamilton Dickson (1886), Francis Galton tarafından kendisine verilen problemler üzerinde çalışmış,

iki değişkenli korelasyon için Bravais' in elde etmiş olduğu sonuçların bazıları ile ilgilenmiş ve kendisini bu konularda yetiştirmiştir.

C.R. Rao (1983), kısa bir süre korelasyon katsayısı için R sembolünün kaynağını hedef alarak korelasyon katsayısının gelişmesi ve başlangıcı üzerine çalışmış ve Karl Pearson' un vermiş olduğu sonuçlara ulaşmıştır.

F. Galton' un, *Natural Inheritance* (1908) başlıklı klasik bilimsel incelemesinde, Pearson' un meydana getirdiği tanımlamaları kaleme alarak araştırmada geniş bir bakış açısı meydana getirmiştir.

Çarpım-moment korelasyon katsayısı ilk olarak Karl Pearson (1896) tarafından

$$r = \frac{S(x, y)}{n\sigma_x\sigma_y}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Pearson' un tanımlamış olduğu formül şimdilerde,

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n\sigma_x\sigma_y}$$

ile verilmektedir. Bu formül daha sonra Johnson (1995) tarafından çok sayıda değişken için geliştirilmiştir.

Bir diğer özellik, birliktelik (association) ölçüleri üzerindeki çalışmaların örneklem istatistiklerinin normallik koşulları altında korelasyon katsayısının hesaplanmasında kullanılmasıdır. Birliktelik (association) kadran (quadrant) ölçüsü, 1899' da Sheppard tarafından nüfus yöntemi üzerine düşünülerek ortaya atılmıştır. Buna karşın, Fechner 1899' da

iki zamanlı seriler ile daha karmaşık (kompleks) içeriği olan benzer bir nicelik ortaya atmıştır. Fechner' in çift zamanlı serilere ilişkin önerisi ilk olarak Fransa' da bilinir hale gelmiştir. Bundan sonra t' nin basit lineer fonksiyonu 1905 yılında G.F. Lipps tarafından ortaya atılmıştır. G.F. Lipps bu konuyu 1906 yılında tekrar ele almış ve niceliklerin ilk iki momentini bularak bunların bağımsızlık testinde kullanılabileceğini savunmuştur.

Fransa' da Binet ve meslektaşları (1897-1898) sonradan Spearman' ın ayak-kuralı olarak bilinecek olan, sıralı fonksiyonlarla birlikteliğin ölçülmesini öne sürmüşlerdir. Birkaç yıl sonra 1904' te İngiliz psikolog Spearman dizilere dayalı birlikteliğin örneklem ölçütleri ile ilgilenmiştir.

Ele alınan herbir ikili dağılım ile iki ayrı bağımsız (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) ikili rasgele değişkenleri için Π_c ,

$$\begin{aligned}\Pi_c &= \Pr \{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} \\ &= \Pr \{X_1 > X_2 \text{ ve } Y_1 > Y_2\} + \Pr \{X_1 < X_2 \text{ ve } Y_1 < Y_2\}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır ve bunun tamamlayıcısı olan

$$\Pi_d = \Pr \{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}$$

şeklinde ifade edilir.

Π_c niceliği bağımsız olarak de Finetti tarafından bir birliktelik ölçüsü olarak 1937 yılında ortaya atılmıştır. De Finetti Π_c ' yi modifiye etmiş ve yorumlamıştır.

$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, n -birimlik rasgele bir örnekleme dayalı Π_c ' nin doğal tahmin edicisi, gözlemlerin uyumlu (concordance) çiftlerinin tekrar eden ilişkisidir.

$$P_c = \frac{\text{uyumluluk (concordance) sayısı } (X_i, Y_i), (X_j, Y_j)}{n(n-1)}, i \neq j$$

$$P_c = \frac{\text{uyumluluk (concordance) sayısı } (X_i, Y_i), (X_j, Y_j)}{\frac{1}{2}n(n-1)}, i > j$$

dir. Benzer biçimde, P_d de tanımlanabilir.

Bu durumda, τ' nun tahmini olan t , $P_c - P_d$ ya da $2P_c - 1 = 1 - 2P_d$ 'ye eşittir. t hesabının grafiksel metodu, S.A. Holmes (1928) tarafından ileri sürülmüştür.

$$\Pi_{cc} = \text{Pr} \{ \text{Bağımsız üç gözlemden ikinci ve üçüncü gözlemin, birinci gözlem ile uygun (concordant) olması} \}$$

olmak üzere, W. Hoeffding (1947) t' nin beklenen değerini, $Et = \tau$ ve varyansını,

$$Vart = \frac{8}{n(n-1)} \Pi_c (1 - \Pi_c) + 16 \frac{1}{n} \frac{n-2}{n-1} (\Pi_{cc} - \Pi_c^2)$$

biçiminde ifade etmiştir. Ayrıca, $Vart$ için bir üst sınır H.E. Daniels ve M.G. Kendall (1947) tarafından

$$Vart \leq \frac{2(1 - \tau^2)}{n}$$

olarak verilmiştir.

Alman eğitim psikologu G. Deuchler t uyumluluk (concordance) ölçüsünü 1909' da başlayan ve uzun süre devam eden makalelerinde ele almıştır.

Deuchler ilk olarak Lipps' in önerisini değerlendirmiş sonrasında ise konuyu daha ileri seviyelere taşımıştır. Bununla ilgili bilgiler özellikle 1914-1915-1916 ve 1917 yıllarında yaptığı çalışmalarda yer almaktadır. Bu çalışmalarda Deuchler bağımsızlık hipotezi altında t' nin tam dağılımını ele almış ve sonradan Kendall tarafından üzerine çalışılan aynı yinelemeli (recursion) formülü elde etmiştir. Bunun sayesinde $n = 2, 3, 4, 5$ için bağımsızlık hipotezi altında t' nin kesin dağılımını bulmuştur. Deuchler günümüzde bilinen t ile inversiyon sayıları arasındaki ilişkiyi saptamıştır ve bağımsızlık hipotezi altında inversiyon sayılarının dağılımı için oluşturma fonksiyonunu geliştirmiştir. Ayrıca, Deuchler genel olarak t' nin dağılımının yakınsaklığı konusunu da ele almıştır. Spearman tarafından ortaya atılan iki ölçüme ilişkin olarak bir kritik oluşturulmuş ve son olarak 2×2 tabloları hakkında detaylı bir tartışma yazısı sunmuştur. Deuchler birlikteliğin değişik yöntemlerini çocukların aritmetik becerileri üzerinde yapılan araştırma için de uygulamıştır.

1924 yılında Esscher bağımsız olarak Kendall' ın τ' sunun ve τ' nun tahmini olan t' nin bir birliktelik ölçüsü olduğunu ortaya atmıştır. Bu çalışmadan sonra Lindeberg (1925-1929), τ ve t olgularını normallik kısıtı olmaksızın ele almış ve τ' nun açık bir tanımını vererek ilk olarak genel t değişkenini saptamıştır. 1928' de S.D. Holmes t' yi doğal korelasyon katsayısına yakınlaştırma olarak öne sürmüştür. Holmes' in yaklaşımı P. Sandiford (1928) tarafından tanımlanmış ve son zamanlarda H.D. Griffin (1958) bu konu üzerinde ilgilenmiştir. Yaklaşım doğası gereği grafiksel olup genel olarak bilinmeyen t' nin tam olarak hesaplanmasını yansıtmaktadır.

Bağımsızlık durumunda, t' nin elde edilen dağılımı yinelemeli olarak hesaplanabilir. Bunun ile ilgili en kapsamlı cetvel L. Kaarsemaker ve A. van Wijngaarden (1953) tarafından verilmiştir. Ayrıca, ikili normal durumda t' nin dağılımı E.C. Fieller, H.O. Hartley ve E.S. Pearson (1957) tarafından araştırılmıştır.

Π_c ve Π_d nicelikleri üzerindeki birlikteliğin ölçüsü olan τ ,

$$\tau = \Pi_c - \Pi_d = 2\Pi_c - 1 = 1 - 2\Pi_d$$

biçiminde verilir. Yani, τ ilgili dağılımlar üzerindeki iki gözlem için Π_c ve Π_d ' nin olasılıkları arasındaki fark ya da $(X_1 - X_2)$ ve $(Y_1 - Y_2)$ ' nin işaretleri arasındaki korelasyon katsayısıdır.

τ ile ilgili temel fikrin, G.T. Fechner' in 1897 yılında yapmış olduğu çalışmasından geldiği sanılmaktadır. Bununla ilgili bazı detaylar ilk olarak 1905 yılında G.F. Lipps tarafından ele alınmıştır. Son olarak, 1938 yılında M.G. Kendall tarafından τ ' nun en çok bilinen bağımsızlık önerisi verilmiştir. M.G. Kendall, τ ve birliktelik örneklem teorisinin tartışmalarını titiz ve eksiksiz olarak vermiştir. Bunun için, bu ölçü Kendall' ın τ ' su olarak da adlandırılmaktadır.

Shannon-Wiener bilgi kavramına dayanan birliktelik ölçüleri son yıllarda yeniden popülerlik kazanmıştır. Fieller, Hartley ve Pearson (1957) korelasyon istatistiklerinin hesaplanmasıyla elde edilen birlikteliğin örneklem sıralı ölçüsünü ele almışlardır. Burada ele alınan iki değişkenli sıralı birliktelik ölçüleri ile yakından ilgili olan kısmi ve çoklu birlikteliğin ölçülmesi zaman zaman çalışma konusu edilmiştir.

1.2. Kovaryansla İlgili Bazı Notlar

Hatırlatma amacıyla, istatistikte önemli bir yer tutan kovaryans fonksiyonunun

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

biçiminde ifade edildiği malûmdur. X ve Y değişkenlerinin biri birlerine pozitif kadrans anlamında bağımlı olması durumunda, Lehmann (1966)

tarafından $Cov(X, Y) = 0$ olmasının kadransızlığı ile eşdeğer olduğu ortaya konmuştur. Esary, Proschan ve Walkup (1967)'in çalışmalarında, f ve g sırası ile X ve Y değer uzayları üzerinde tanımlı iki fonksiyon ise ve bu tür fonksiyonlar \mathcal{G} gibi bir ailede toplanırsa $\forall f, g \in \mathcal{G}$ için

$$Cov^{(E)}(f(X), g(Y)) \geq 0$$

ifadesi ile monoton bir birliktelik (association) içinde bulunmaları üzerinde durmuşlar. Ayrıca, Esary ve Proschan (1972) ile Barlow ve Proschan (1975) yapmış oldukları çalışmalar ile böyle bir birlikteliğin kadransız anlamındaki bağımlılıktan da güçlü olduğunu ifade etmişlerdir.

Hoeffding (1940) tarafından dağılım kovaryansı olarak adlandırılan ve

$$Cov^{(F)}(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} [F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)] dx dy$$

şeklinde tanımlanan kovaryans fonksiyonu, Mardia ve Thompson (1972)'nin çalışmaları ile geliştirilerek $\forall r, s \in \mathcal{N}$ ve $r, s > 1$ için

$$Cov^{(F)}(X^r, Y^s) = rs \iint_{\mathbb{R}^2} u^{r-1} v^{s-1} \{F(u, v) - F_U(u)F_V(v)\} dv du$$

biçiminde ifade edilmiştir. Dağılım kovaryansının monoton birliktelik (association) için uygun olduğu Tuncer, Kotz ve Bairamov (2000)'ün çalışmasında ele alınmıştır.

Kowalczyk ve Pleszcynska (1977), "İki Boyutlu Dağılımların Monoton Bağımlılık Fonksiyonları" başlıklı çalışmalarında, X ile Y arasındaki pozitif kadransız bağımlılığı (PKB), bölüm 2, tanım 2.3.1' den $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ için

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

dir.

$$P(X \leq x) = P(X \leq x, Y > y) + P(X \leq x, Y \leq y)$$

eşitliğinden

$$P(X \leq x, Y > y) \leq P(X \leq x) [1 - P(Y \leq y)]$$

eşitsizliği elde edilir. $[1 - P(Y \leq y)] = P(Y > y)$ olduğundan

$$P(X \leq x | Y > y) \leq P(X \leq x)$$

dir.

Buna göre, verilmiş bir y için

$$\mathfrak{R}^2 = \mathfrak{R}^2 \cap (Y \leq y) \cup \mathfrak{R}^2 \cap (Y > y)$$

olduğu dikkate alınır ve

$$A_y = \mathfrak{R}^2 \cap (Y > y) = \{-\infty < x < \infty, Y > y\}$$

tanımı yapılırsa, X rasgele değişkeninin A_y bölgesine düşen kısmını X_y ile göstermek mümkündür.

$F_X = P(X \leq x)$, $G_y = P(X_y \leq x)$ denilirse, pozitif kadrana bağımlılığında $\forall x \in \mathfrak{R}$ için $G_y \leq F$ olmaktadır. Halbuki,

$$E[X] = \int_0^{\infty} [1 - F_X(x)] dx - \int_{-\infty}^0 F_X(x) dx$$

$$E[X_y] = \int_0^{\infty} [1 - G_y(x)] dx - \int_{-\infty}^0 G_y(x) dx$$

olduğundan

$$\begin{aligned} E[X_y] - E[X] &= \int_0^{\infty} [F_X(x) - G_y(x)] dx + \int_{-\infty}^0 [F_X(x) - G_y(x)] dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_X(x) - G_y(x)] dx \quad , \forall x \in \mathfrak{R}, \exists y \in \mathfrak{R}; \end{aligned}$$

olup, $\forall x \in \mathfrak{R}$ için $G_y(x) \leq F_X(x)$ ise

$$EX_y \geq EX$$

elde edilir ve bunun tersi de doğru olduğundan

$$EX_y \geq EX \iff P(X < x \mid Y > y) \leq P(X \leq x) \quad (1.1)$$

dir. (1.1)'i sağlayan tüm (X, Y) sıralı ikililerinin kümesi “beklenen değer kadrans bağımlılığı (EQD)” olarak tanımlanmaktadır.

Aşağıda tanım 2.4' de verildiği gibi, $x(p)$ ve $y(p)$, sırası ile X ve Y rasgele değişkenlerinin p . kuantil (yüzdellik) değerini göstermek üzere, herhangi bir $0 < p < 1$ değeri için

$$\begin{aligned} L_{X,Y}^*(p) &= E[X_y] - E[X] \\ &= E[X \mid Y > y(p)] - E[X], \quad 0 < p < 1 \end{aligned}$$

$$\mu_{X,Y}(p) = \begin{cases} \mu_{X,Y}^+(p) = \frac{L_{X,Y}^*(p)}{E[X|X>x_p]-E[X]} & , L_{X,Y}^*(p) \geq 0 \text{ ise} \\ \mu_{X,Y}^-(p) = \frac{L_{X,Y}^*(p)}{[E[X]-E[X|X<x_{1-p}]]} & , L_{X,Y}^*(p) \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlayarak, $\mu_{X,Y}(p)$ fonksiyonuna, Kowalczyk ve Pleszczynska tarafından X ve Y ' nin monoton bağımlılık fonksiyonu adı verilmiştir. Açıkça, X değişkeninin sürekli olduğu ve $f(x)$ gibi bir olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olduğu durumlarda

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{x_p} xf(x)dx + \int_{x_p}^{\infty} xf(x)dx \\ &= P(X \leq x_p)E[X | X < x_p] + P(X > x_p)E[X | X > x_p] \end{aligned}$$

eşitliği (-) ile çarpılıp, her iki tarafına $E[X | X > x_p]$ eklendiğinde

$$\begin{aligned} E[X | X > x_p] - E[X] &= -P(X \leq x_p)E[X | X < x_p] \\ &\quad - P(X > x_p)E[X | X > x_p] + E[X | X > x_p] \\ &= P(X \leq x_p)(E[X | X > x_p] - E[X | X < x_p]) \end{aligned}$$

gibi değişik bir formülasyon elde edilir.

Elde edilen $\mu_{X,Y}(p)$ bağımlılık fonksiyonunun bazı analitik özellikleri aşağıda sıralanmıştır. Bu özellikler Kowalczyk, T. ve Pleszczynska, E. (1977)' de tartışılmaktadır:

1. $(X, Y) \in B$ ve $p \in (0, 1)$ için

$$-1 \leq \mu_{X,Y}(p) \leq 1$$

dir.

2. Ayrıca,

$$\mu_{X,Y}(p) = 1 \Leftrightarrow P(X < x_p, Y > y_p) = P(X > x_p, Y < y_p) = 0$$

ve

$$\mu_{X,Y}(p) = -1 \Leftrightarrow P(X < x_{1-p}, Y < y_p) = P(X > x_{1-p}, Y > y_p) = 0$$

dir.

3. $\forall a, b \in \mathfrak{R}$ ve $a \neq 0$ için

$$\mu_{aX+b, f(Y)}(p) = \begin{cases} (sgna)\mu_{X,Y}(p) & , Y' \text{ nin tüm } f \text{ artan} \\ & \text{fonksiyonu için} \\ (-sgna)\mu_{X,Y}(1-p) & , Y' \text{ nin tüm } f \text{ azalan} \\ & \text{fonksiyonu için} \end{cases}$$

4.

$$\mu_{X,Y}(p) \equiv 1(-1) \quad \Leftrightarrow X \doteq f(Y) \text{ olacak şekilde } \exists f, \text{ artan (azalan)} \\ \text{fonksiyonu vardır.}$$

$$\mu_{X,Y}(p) \equiv 0 \quad \Leftrightarrow E(X | Y) \doteq EX$$

$$\mu_{X,Y}(p) \equiv \mu_{X,Y}^+(p) \quad \Leftrightarrow (X, Y) \in EQD^+$$

5. $(X, Y) \in PKB$ ve $EX < \infty, EY < \infty$ ise $\mu_{Y,X} \geq 0$ dir.

6. (X, Y) kadrans bağımlı ise $\mu_{X,Y}(p) \equiv 0$ dir $\Leftrightarrow X$ ve Y bağımsızdır.

Ayrıca, Kowalczyk ve Pleszczyńska (1977), monoton bağımlılık fonksiyonları kavramına dayanan ve Kuantil (yüzdeler) kovaryans adı verilen kavramı

$$L_{X,Y}(p) = E(X - EX) I_{[Y \geq y(p)]}(Y)$$

fonksiyonu aracılığı ile

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = - \int_0^1 y(p) dL_{X,Y}(p)$$

biçiminde ifade etmişlerdir. Bundan sonra, Krajka ve Szynal (1993-1994)'ın yapmış oldukları çalışmalar ile Kuantil (yüzdeler) kovaryans kavramı geliştirilmiş ve bazı analitik özellikleri gösterilmiştir.

Burada tanımlanan $L_{X,Y}(p)$ fonksiyonu ile daha önce tanımlanan $L_{X,Y}^*(p)$ fonksiyonu biri birine eşit değildir. Fakat bu iki fonksiyon arasında $(1-p)L_{X,Y}(p) = L_{X,Y}^*(p)$ eşitliği ile verilen bir ilişki bulunmaktadır.

Ayrıca,

$$\begin{aligned} L_{X,Y}(p) &= \vartheta(A_p) \\ &= \iint_{A_p} (x - EX) dH(x, y) \end{aligned}$$

tanımlandığına göre, $H(x, y)$ bilindiğinde, $L_{X,Y}(p)$ yalnızca A_p kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon yani küme fonksiyonu olmaktadır. Öyle ki,

(i) $(x - EX)$ hem negatif hem de pozitif değerleri alabilmektedir. Ona göre,

$$-\infty < \vartheta < \infty$$

dır.

(ii) F_Y dağılım fonksiyonu ve $0 < p < 1$ olmak üzere,

$$y(p) = \inf \{x : F_Y(x) \geq p\}$$

tanımı kullanılarak, $p = 1$ durumunda $\{Y \geq y(p)\}$ kümesi boş küme olmaktadır. Buna göre, $L_{X,Y}(p)$ ' nin tanımından sifıra eşit olduğu anlaşılır. Yani

$$L_{X,Y}(1) = 0$$

dır. Kısaca, $A_1 = \phi$ için,

$$\vartheta(\phi) = 0$$

yazılabilir.

(iii) $Y \geq y(p)$ eşitsizliğinin geçerli olduğu blgeye $B = \{y : y \in \mathfrak{R}^1 \text{ ve } y \geq y(p)\}$ denilirse, B_i ' ler $B_i \cap B_j = \phi$, $\forall i \neq j$ olacak şekilde ayrık kmeler olmak zere, $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ yazılabilir.

$$E[(X - EX)I_B(Y)] = E[(X - EX)I_{\cup B_i}(Y)]$$

$I_{\cup B_i}(Y)$ indikatr (gsterge) fonksiyonu llebilir, $\cap B_i = \phi$ ve $I_{\cup B_i}(Y) = \sum I_{B_i}(Y)$ olduğundan,

$$E[(X - EX)I_{\cup B_i}(Y)] = E[(X - EX) \sum I_{B_i}(Y)]$$

dir. Ayrıca, Beppo-Levi Teoremi'nden,

$$E \left[(X - EX) \sum I_{B_i}(Y) \right] = \sum E [(X - EX) I_{B_i}(Y)]$$

dir. O nedenle,

$$\vartheta \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \vartheta (B_i)$$

dir. O halde, $\vartheta = L_{X,Y}$ şeklinde tanımlanan ϑ bir işaret ölçüsü olmaktadır (Bkz; Royden (1968)).

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Bu bölüm ileride ele alınacak bazı kavramların bir hatırlatması olarak düşünölmelidir.

2.1. İç Çarpım, \mathcal{L}_p Fonksiyonel Uzayı ve Kuantil Fonksiyonu

Tanım 2.1. (Vektör Uzayı) \mathcal{V} , \mathfrak{R}^1 ' de boş olmayan bir küme ve \oplus ile \otimes işlemleri,

$$\oplus : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \quad \text{ve} \quad \otimes : \mathfrak{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

biçiminde olmak üzere;

i) (\mathcal{V}, \oplus) ikilisi aşağıda verilen özellikleri sağlarsa bir değişmeli gruptur.

a) $(u \oplus v) \oplus y = u \oplus (v \oplus y)$

b) $u \oplus v = v \oplus u$

c) $\forall u \in \mathcal{V}$ için $u \oplus u^{-1} = u^{-1} \oplus u = e$ olacak şekilde $u^{-1} \in \mathcal{V}$ mevcut ise.

d) $\forall u \in \mathcal{V}$ için $u \oplus e = e \oplus u = u$ olacak şekilde $e \in \mathcal{V}$ mevcut ise. Ayrıca,

ii) $\forall u, v \in \mathcal{V}$ ve $a, b \in \mathfrak{R}$ için

a) $(a.b) \otimes v = a \otimes (b \otimes v)$

b) $(a + b) \otimes v = (a \otimes v) \oplus (b \otimes v)$

c) $a \otimes (v \oplus u) = (a \otimes v) \oplus (a \otimes u)$

d) $1 \otimes v = v$

özellikleri de sağlandığında, \oplus ve \otimes işlemleri altında \mathcal{V} kümesine \mathfrak{R} cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

Tanım 2.2. (İç çarpım) \mathcal{V} reel bir vektör uzayı olsun. \mathcal{V} uzayında, iç çarpım olarak adlandırılan

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$$
$$(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$$

gibi bir fonksiyon,

i) Simetri özelliği;

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{V} \text{ için, } \langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$$

ii) Bi-lineerlik özelliği;

$\forall \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{V}$ ve $\forall a, b \in \mathfrak{R}$ için,

$$\langle a\alpha + b\beta, c\gamma + d\delta \rangle = ac \langle \alpha, \gamma \rangle + bc \langle \beta, \gamma \rangle \\ + ad \langle \alpha, \delta \rangle + bd \langle \beta, \delta \rangle$$

iii) Pozitif tanımlı olma özelliği;

$$\langle \alpha, \alpha \rangle \geq 0 \quad , \quad \forall \alpha \neq 0 \in \mathcal{V}$$

$$\langle \alpha, \alpha \rangle = 0 \iff \alpha = 0 \text{ ise}$$

özelliklerini sağladığında $\langle u, v \rangle$ sayısına u ile v ' nin iç çarpımı ve $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir.

Bazen de, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ operatörüne iç çarpım fonksiyonu denildiği görülmektedir. n -boyutlu reel vektör uzayı \mathcal{V} ile, $\tilde{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ ve $\tilde{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ gibi iki vektör için Öklid iç çarpımı

$$\langle \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (2.1)$$

biçiminde tanımlandığı bilinmektedir. Ayrıca, $\underset{\sim}{u}$ ve $\underset{\sim}{v}$ ikilisi için $\langle \underset{\sim}{u}, \underset{\sim}{v} \rangle$ ile gösterilen tek bir reel sayı bulunur (Hoffman ve Kunze, 1971).

Tanım 2.3. (Norm) Bir \mathcal{V} iç çarpım uzayında, herhangi bir $v \in \mathcal{V}$ vektörü için,

$$\|\cdot\| \quad \mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$v \rightarrow \|v\|$$

fonksiyonu,

$$1. \forall v \in \mathcal{V} \text{ için, } \|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$2. \forall \alpha \in \mathfrak{R}^1 \text{ ve } \forall v \in \mathcal{V} \text{ için, } \|\alpha v\| = \langle \alpha v, \alpha v \rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha| \cdot \|v\|$$

Burada $|\alpha|$, α reel sayısının mutlak değerini belirtmektedir.

$$3. \forall u, v \in \mathcal{V} \text{ için, } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \text{ (üçgen eşitsizliği)}$$

$$4. \forall v \in \mathcal{V} \text{ için, } \|v\| = 0 \iff v = 0$$

özelliklerini sağladığında, norm adını alır.

Tanım 2.4. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)

f ve g fonksiyonları, herhangi bir A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar, f^2 ile g^2 'de μ ölçüsüne göre integrallenebilir olmak üzere

Cauchy-Schwarz Eşitsizliği, (Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olarak) $p = q = 2$ için,

$$\int_A |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int_A |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A |g|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.2)$$

biçiminde verilebilir.

Kuşkusuz, herhangi iki $f = X$ ve $g = Y$ rasgele değişkenleri olarak alındığında,

$$|EXY| \leq E|XY| \leq (E|X|^2)^{\frac{1}{2}} (E|Y|^2)^{\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

biçiminde de ifade edilir.

Tanım 2.5. (\mathcal{L}_p Fonksiyonel Uzayı)

(X, A, μ) bir ölçü uzayı ve f , ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, \mathcal{L}_p uzayı $0 < p < \infty$ için

$$\mathcal{L}_p = \left\{ f : \int_X |f(x)|^p d\mu < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in \mathcal{L}_p$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1$ için $\alpha f \in \mathcal{L}_p$ ' dir. Çünkü, $|f|^p$ integrallenebilir olduğunda $|\alpha|^p \cdot |f|^p$, de integrallenebilirdir. Dolayısıyla $|\alpha f|^p$ integrallenebilirdir ve benzer biçimde $g \in \mathcal{L}_p$ ise $\forall \beta \in \mathbb{R}^1$ için $\beta g \in \mathcal{L}_p$ ' dir. $f, g \in \mathcal{L}_p$ ise

$$|\alpha f + \beta g|^p \leq (|\alpha f| + |\beta g|)^p \leq (2 \cdot \max\{|\alpha f|, |\beta g|\})^p \leq 2^p \cdot (|\alpha f|^p + |\beta g|^p)$$

olduğundan $|\alpha f + \beta g|^p$ integrallenebilir ve $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}_p$ ' dir. Böylece, skalar çarpımı ve toplanabilirlik nedeniyle, \mathcal{L}_p bir vektör uzayıdır.

\mathcal{L}_p uzayının diğer bir özelliği de $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla psedö metrik bir uzay olmalıdır.

Böyle bir uzaydaki fonksiyonlar için, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in \mathcal{L}_p$ ve $g \in \mathcal{L}_q$ ise $f \cdot g \in \mathcal{L}_1$ ya da

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

olarak bilinen Hölder eşitsizliği ile $p \geq 1$, $f, g \in \mathcal{L}_p$ olması durumunda

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

biçimindeki Minkowski eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.6. (Kuantil Fonksiyonu)

Herhangi bir $p \in (0, 1)$ için $x(p)$ ile ifade edilen X rasgele değişkeninin p . kuantil fonksiyonu, $F_X(x)$, X ' in dağılım fonksiyonunu göstermek üzere

$$x(p) = \inf \{x : F_X(x) \geq p\}$$

şeklinde tanımlanır.

2.2. Çok Değişkenli Dağılımlar

$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu gösterilmek üzere bu fonksiyon

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathfrak{R}^n \rightarrow [0, 1]$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. x_1, x_2, \dots, x_n değişkenlerinden birinin bile $-\infty$ ' a yaklaşması halinde,

$$\lim_{x_i \rightarrow -\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \exists i \text{ için}$$

elde edilir.

2. x_1, x_2, \dots, x_n değişkenlerinin tümünün $+\infty$ ' a yaklaşması halinde,

$$\lim_{x_i \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1, \forall i \text{ için}$$

elde edilir. Ayrıca, limit işlemini ardarda uygulayarak, x_1, x_2, \dots, x_n değişkenlerinin her alt kümesinin marjinal dağılımı

$\forall i$ için,

$$\lim_{x_i \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

$\forall i \neq j$ için,

$$\lim_{\substack{x_i \rightarrow +\infty \\ x_j \rightarrow +\infty}} F(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

⋮

tümünü için de,

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty, x_2 \rightarrow +\infty, \dots, x_n \rightarrow +\infty} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

biçiminde elde edilebilir.

3. $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu, x_1, x_2, \dots, x_n değişkenlerinin her alt kümesinde azalmayan bir fonksiyondur.

$F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ ve e_i vektörlü ortogonal koordinat sisteminde i . standart kartezyen koordinatı temsil etmek üzere, $\tau > 0$ için,

$$\Delta_i F = F(x_1, x_2, \dots, x_i + \tau, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

biçiminde tanımlanan i . fark işlemcisi,

$$\Delta_i F \geq 0, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta_j \Delta_i F \geq 0, \quad \forall i \neq j = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta_k \Delta_j \Delta_i F \geq 0, \quad \forall i \neq j, i \neq k, k \neq j = 1, 2, \dots, n$$

⋮

$$\Delta_n \Delta_{n-1} \dots \Delta_2 \Delta_1 F \geq 0$$

anlamına gelir.

4. $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu, x_1, x_2, \dots, x_n değişkenlerinin her biri açısından sağdan sürekli bir fonksiyondur. Yani; her x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) ve herhangi bir $\tau > 0$ için,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\tau \rightarrow 0} F(x_i + \tau e_i)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\substack{\tau_i \rightarrow 0 \\ \tau_j \rightarrow 0}} F(x_i + \tau_i e_i + \tau_j e_j)$$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lim_{\substack{\tau_1 \rightarrow 0 \\ \tau_2 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \tau_n \rightarrow 0}} F\left(x_i + \sum_{k=1}^n \tau_k e_k\right)$$

dir.

Ayrıca $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ için Fréchet sınırları; her X_i rasgele değişkeninin marjinal dağılımı $F_{X_i}(x_i)$ ile gösterilmek ve $[0, 1]$ aralığında bulunmak üzere, Fréchet alt sınırı,

$$F^-(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max\left(\sum_{j=1}^n F_{X_j}(x_j) - (n-1), 0\right)$$

şeklinde ve Fréchet üst sınırı da

$$F^+(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min(F_{X_1}(x_1) + F_{X_2}(x_2) + \dots + F_{X_n}(x_n))$$

şeklinde dir.

Ayrıca, herhangi bir $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ için,

$$0 \leq F^-(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq F^+(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 1$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.3. Bağımlılık Kavramları

2.3.1. Pozitif (Negatif) Kadran Bağımlılığı

X ve Y iki rasgele değişken olmak üzere

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq (\leq) P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

eşitsizliği $\forall x, y$ için sağlanıyor ise X ve Y rasgele değişkenleri "pozitif (negatif) kadran bağımlıdır" denir. Kısaca, $PKB(X, Y)$ ($NKB(X, Y)$) şeklinde gösterilir.

2.3.2. Pozitif Regresyon Bağımlılığı

Eğer $\forall y$ için x artar iken,

$$P[Y \leq y | X = x]$$

x ' in artmayan bir fonksiyonu ise, Y rasgele değişkeni X rasgele değişkeni üzerinde "pozitif regresyon bağımlıdır" denir ve $PRB(Y | X)$ biçiminde gösterilir.

Pozitif regresyon bağımlılık kavramı ilk önce J.W. Tukey (1958) ve E.L. Lehmann (1959) tarafından ileri sürülmüştür.

2.3.3. Monoton Birliktelik (Association)

$\forall f$ ve g sırasıyla X ve Y rasgele değişkenlerinin değer uzayları üzerinde tanımlı ve azalmayan fonksiyonlar olmak üzere, $Ef(X)$, $Eg(Y)$ ile $Ef(X)g(Y)$ mevcut iken,

$$Cov(f(X), g(Y)) \geq 0 \quad (2.4)$$

eşitsizliği varsa, X ve Y rasgele değişkenlerinin “monoton bir birliktelik (association)” sergilediği söylenir ve $MB(X, Y)$ şeklinde kısaltılabilir.

En basit biçimiyle, eğer $X, Y \in \mathcal{L}_2$ iken

$$Cov(X, Y) = EXY - EXEY \quad (2.5)$$

negatif değil ise, X ve Y rasgele değişkenlerinin monoton bir birliktelikte olduğu açıktır.

(2.4) eşitsizliği ile verilen monoton birliktelik, (2.5) eşitliği ile tanımlanan monoton birliktelikten daha güçlü bir birlikteliktir.

Monoton birliktelik kavramının aşağıdaki özelliklere sahip olması beklenir.

1. Rasgele değişkenli monoton birlikteliklerin bazı alt cümleleri monoton birlikteliktir.

Alt cümlelerdeki değerler üzerinde azalmayan f ve g fonksiyonları alındığında,

$$Cov(f, g) \geq 0 \quad (2.6)$$

dir (Esary, J.D., Proschan, F. ve Walkup, D.W. (1967)).

2. X vektörü X_1, X_2, \dots, X_n rasgele değişkenlerinin bir kümesini ve Y de $Y_1, \tilde{Y}_2, \dots, Y_n$ rasgele değişkenlerinin bir kümesini temsil etsin. X ve \tilde{Y} biri birinden bağımsız olsa bile, bunların birleşiminin biri biriyle monoton bir birliktelik içinde olan değişkenler kümesi oluşturmaktadır. Ona göre, f ve g azalmayan fonksiyonlar olmak üzere, $f(X, Y)$ ve $g(X, Y)$ için

$$\text{Cov}(f(X, Y), g(X, Y)) \geq 0$$

dir (Esary, J.D., Proschan, F. ve Walkup, D.W. (1967)).

Ayrıca,

3. Bir tek rasgele değişkenden oluşan cümlelerin monoton birlikteliğe sahip olduğu (Esary, J.D., Proschan, F. ve Walkup, D.W. (1967));

4. Monoton birlikteliğe sahip iki rasgele değişkenin azalmayan fonksiyonlarının da monoton birliktelik olduğu (Esary, J.D., Proschan, F. ve Walkup, D.W. (1967))

bilinmektedir.

2.3.4. Sol Kuyruğundan Azalan Bağımlılık

Her y için x artar iken,

$$P[Y \leq y \mid X \leq x]$$

fonksiyonu artmayan ise, Y rasgele değişkeni X rasgele değişkeni üzerinde “sol kuyruğundan azalan bağımlılık” gösteriyor denir ve $SOKAB(Y \mid X)$ ile ifade edilir.

2.3.5. Sağ Kuyruğundan Artan Bağımlılık

Her y için x artar iken,

$$P[Y > y | X > x]$$

fonksiyonu azalmayan ise, Y rasgele değişkeni X rasgele değişkeni üzerinde “sağ kuyruğundan artan bağımlılık” gösteriyor denir ve $SAKAB(Y | X)$ ile gösterilir.

2.3.6. Stokastik Olarak Artan Bağımlılık

Her y için x artar iken,

$$P[Y > y | X = x]$$

fonksiyonu artmayan ise, Y rasgele değişkeni stokastik olarak X rasgele değişkenine artan bir bağımlılık gösteriyor denir ve $SOAB(Y | X)$ şeklinde ifade edilir.

2.3.7. İkinci Dereceden Toplam Pozitif Bağımlılık

S. Karlin tarafından ileri sürülen bu kavram, $x_1 < x_2$ ve $y_1 < y_2$ koşuluna göre $f(x, y)$ ' de ortak bir yoğunluk fonksiyonu olmak üzere,

$$\det \begin{pmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) \end{pmatrix} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, X ve Y arasındaki bağımlılık “ikinci dereceden toplam pozitif bağımlılık” olarak nitelendirilir ve $TPB_2(X, Y)$ biçiminde kısaltılabilir (S. Karlin, 1968).

2.3.8. Monoton Olabilirlik Oranı Bağımlılığı

Monoton olabilirlik oranı bağımlılığı, $f(x, y)$ biçiminde bir olasılık yoğunluk fonksiyonu bulunan X ve Y rasgele değişkenlerinin ikinci dereceden toplam pozitif bağımlı olma özelliği ile eşdeğerdir. Toplam pozitif bağımlılık kavramı, (2.3.7)' de verildiği şekilde tanımlanır.

Yoğunluk fonksiyonunun bu özelliği sağlaması, pozitif regresyon bağımlılığının (PRB) ve pozitif kadrans bağımlılığının (PKB) da sağlanması anlamına gelmektedir.

Bağımlılık kavramları bu şekilde tanımlandıktan sonra bu bağımlılık kavramları arasındaki ilişkiler şu şekilde verilebilir:

Lehmann (1966) ve Esary, Prochan ile Walkup (1967)' nin yapmış oldukları çalışmaların sonucunda,

$$PRB(Y | X) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow SOKAB(Y | X) \Rightarrow \\ \Rightarrow SAKAB(Y | X) \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow MB(X, Y) \Rightarrow PKB(X, Y)$$

biçiminde ifade edilen bir sonuç bulunmuştur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Kovaryans Türleri

Birinci bölümde, kısa bir tarihçesi verilen kovaryans kavramı çeşitli matematiksel biçimlerde ifade edilmektedir. Ayrıca, bunlar eşdeğer formülasyonlar olamamaktadır. Bu nedenle, bu bölümde; iç çarpım (moment) kovaryansı, dağılım kovaryansı ve kuantil (yüzdeler) kovaryans kavramlarının tanımları verilmiş ayrıca bu üç kavramın analitik özellikleri üzerinde durulmuştur.

3.1.1. İç Çarpım (Moment) Kovaryansı

(Ω, A, P) gibi bir olasılık uzayında tanımlı X ve Y gibi iki belirgin rasgele değişken için, bilindiği gibi kovaryans fonksiyonu

$$Cov(X, Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) \quad (3.1)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, μ_X ve μ_Y sırası ile X ve Y rasgele değişkenlerinin beklenen değerlerini ifade etmektedir. Bu şekilde tanımlanan kovaryans fonksiyonu bir iç çarpımdır. Bu nedenle bu kovaryans fonksiyonuna iç çarpım kovaryansı da denir. Ayrıca, Cauchy-Schwarz eşitsizliği nedeniyle de $X, Y \in \mathcal{L}_2$ için, $Cov(X, Y) < \infty$ olmaktadır.

Aynı zamanda (3.1)'deki kovaryans ($Cov(X, Y)$) fonksiyonunun

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (3.2)$$

şeklinde de ifade edilebileceği açıktır. Ancak (3.1) ve (3.2) ile verilen eşitlikler $X \in \mathcal{L}_2$, $Y \in \mathcal{L}_2$ olduğu zaman geçerlidir. Bu yüzden, (3.2)

eşitliği ile verilen kovaryans fonksiyonu aynı zamanda moment kovaryansı olarak adlandırılmaktadır.

(3.1) ve (3.2)' yi diğer kovaryans formülasyonundan ayırt etmek için, E beklenen değer ya da momentleri göstermek üzere,

$$Cov(X, Y) = Cov^{(E)}(X, Y) \quad (3.3)$$

ile göstermek mümkündür. Bu yüzden, iç çarpım (moment) kovaryansı kısaca, İngilizce literatürde ki gibi E -kovaryansı olarak adlandırılabilir.

3.1.1.1. İç Çarpım (Moment) Kovaryansının Özellikleri

İç çarpımının bir vektör uzayı üzerinde tanımlı ve ikili lineer (bi-linear) bir fonksiyon olması nedeniyle, kovaryans fonksiyonu bilinen ve aşağıda özetlenen analitik özellikleri taşımaktadır.

1. Simetriklik özelliği mevcuttur:

$$Cov(X, Y) = Cov(Y, X) \quad (3.4)$$

2. Elemanlarına göre tek fonksiyondur:

$$Cov(-X, Y) = Cov(X, -Y) = -Cov(X, Y) \quad (3.5)$$

3. Konumdan etkilenmez fakat ölçekten etkilenir:

$$Cov(a + bX, c + dY) = bdCov(X, Y) \quad (3.6)$$

4. Monoton f ve g fonksiyonları için $Cov(f(X), g(Y))$ ile $Cov(X, Y)$ aynı işareti taşırlar.

3.1.2. Dağılım Kovaryansı

Kovaryans kavramının değişik bir türü de dağılım kovaryansı olarak adlandırılan ve

$$Cov^{(F)}(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} [F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)] dx dy \quad (3.7)$$

biçiminde ifade edilen fonksiyondur (Hoeffding (1940)). Burada, F dağılımı X ve Y rasgele değişkenlerinin ortak dağılımını, F_X ile F_Y dağılımları da marjinal dağılımları temsil etmektedir. (3.7) eşitliği ile verilen, $Cov^{(F)}(X, Y)$ fonksiyonu eşitliğin sağ tarafındaki integral sonlu olduğunda geçerli olmaktadır.

Hoeffding (1940)' in vermiş olduğu tanımdan yola çıkarak ve Hartley (1950), Jogdeo (1968), Konijn (1959), Lehmann (1966) ve Mardia (1967)' nin çalışmalarını dikkate alarak, $r, s \geq 1$ için, Mardia (1967)' nin öne sürdüğü süreklilik şartları altında dağılım kovaryansı genelleştirilebilir. Gerçekten de, bunun için ilk önce (3.2) ifadesinin

$$Cov^{(E)}(X^r, Y^s) = E(X^r Y^s) - E(X^r)E(Y^s) \quad (3.8)$$

biçiminde genelleştirilebileceği ve (3.8)' in sağ tarafındaki terimler için

$$\begin{aligned} E(X^r Y^s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s dF(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{[u \leq x^r, v \leq y^s]}(u, v) du dv \right] dF(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^r Y^s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{[u^{\frac{1}{r}} \leq x, v^{\frac{1}{s}} \leq y]}(x, y) dF(x, y) \right] dudv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{u^{\frac{1}{r}}}^{\infty} \int_{v^{\frac{1}{s}}}^{\infty} dF(x, y) \right] dudv \\
&= rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u^{r-1} v^{s-1} \int_u^{\infty} \int_v^{\infty} dF(x, y) \right] dudv \\
&= rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^{r-1} v^{s-1} \int_u^{\infty} \int_v^{\infty} dF(x, y) dudv \\
&= rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^{r-1} v^{s-1} P(X > u, Y > v) dudv
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
E(X^r) E(Y^s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^s dF(x) dF(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{[u \leq x^r]}(u) du I_{[v \leq y^s]}(v) dv \right] dF(x) dF(y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} I_{[u^{\frac{1}{r}} \leq x]}(x) dF(x) \int_{-\infty}^{\infty} I_{[v^{\frac{1}{s}} \leq y]}(y) dF(y) \right] dv du
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^r)E(Y^s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \int_{\frac{1}{v}}^{\infty} dF(x)dF(y) \right] dvdu \\
&= rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[u^{r-1}v^{s-1} \int_u^{\infty} \int_v^{\infty} dF(x)dF(y) \right] dvdu \\
&= rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^{r-1}v^{s-1} \int_u^{\infty} \int_v^{\infty} dF(x)dF(y) dvdu \\
&= rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^{r-1}v^{s-1} P(X > u) P(Y > v) dvdu
\end{aligned}$$

elde edilebileceği açıktır. Bu bulunan ifadeleri (3.8)' de yerine koyarsak, (3.7) eşitliği ile verilen dağılım kovaryansı daha da geliştirilerek, $\forall r, s \in \mathcal{N}$ ve $r, s > 1$ için

$$\begin{aligned}
Cov^{(E)}(X^r, Y^s) &= rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^{r-1}v^{s-1} [P(X > u, Y > v) \\
&\quad - P(X > u)P(Y > v)] dvdu \\
&= rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^{r-1}v^{s-1} \{ [1 - F_U(u) - F_V(v) + F(u, v)] \\
&\quad - (1 - F_U(u))(1 - F_V(v)) \} dvdu
\end{aligned}$$

$$Cov^{(E)}(X^r, Y^s) = rs \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^{r-1} v^{s-1} [F(u, v) - F_U(u)F_V(v)] dv du \quad (3.9)$$

elde edilir. Dikkat edilirse, yukarıdaki ifadenin her iki tarafı da mevcut ise, bunlar eşdeğerdir. Ama bir tarafın mevcudiyeti diğer tarafın mevcudiyetini de gerektirmemektedir. Bu nedenle biz, sağ tarafı için

$$Cov^{(F)}(X^r, Y^s) = rs \iint_{\mathbb{R}^2} u^{r-1} v^{s-1} [F(u, v) - F_U(u)F_V(v)] dv du \quad (3.10)$$

ifadesini kullanacağız (Mardia ve Thompson (1972)). (3.8)' e benzer bir biçimde, (3.10) eşitliğinin sağ tarafındaki integral sonlu ise $Cov^{(F)}(X^r, Y^s)$ tanımlı olmaktadır.

Bu durumda (3.10) eşitliği ile verilen dağılım kovaryansının (3.7) eşitliğindeki dağılım kovaryansını gerektirdiği kuşkusuzdur.

(3.7) ve (3.10) eşitlikleri ile verilen dağılım kovaryansını kısaca F -kovaryansı olarak adlandırmak mümkündür.

3.1.2.1. Dağılım Kovaryansının Özellikleri

Dağılım kovaryansı aşağıdaki analitik özellikleri taşımaktadır.

1. Her zaman tek fonksiyon değildir:

Dağılım kovaryansının tek fonksiyon olabilmesi için

$$Cov^{(F)}(-X, Y) = Cov^{(F)}(X, -Y) = -Cov^{(F)}(X, Y)$$

eşitliklerinin sağlanması gereklidir. Ancak, dağılımlar söz konusu olduğuna göre bu tür kovaryansın tek fonksiyon olduğunu savunmak güçleşmektedir. Kısaca, $F(x, -y) = -F(x, y)$ anlamsız bir ifadedir.

2. Yer değiştirme özelliği, ancak

$$F(x, y) = F(y, x) \quad (3.11)$$

durumunda geçerli olmaktadır.

3. $Cov^{(E)}(X, Y)$ ile $Cov^{(F)}(X, Y)$, (3.9) ile verilen eşitlikten dolayı her ikisinin de mevcut olması halinde aynıdır.

3.1.3. Kuantil (Yüzdellik) Kovaryansı

X ve Y rasgele değişkenlerinden birisinin beklentisinin sonsuz olması durumunda iç çarpım (moment) kovaryansının tanımı geçerli olamamaktadır. Bu durumda kuantil (yüzdellik) kovaryans adı verilen bir kovaryans kavramı geliştirilmiştir. Kuantil (yüzdellik) kovaryans kavramı, Kowalczyk ve Pleszczyńska (1977) tarafından geliştirilen monoton bağımlılık fonksiyonları kavramına dayanmaktadır.

Birinci bölümde de açıklandığı gibi, $E(X)$ ve $E(Y)$ beklenen değerlerinden biri sonsuz ise (örneğin, $E(Y) = \infty$ ve $X \in \mathcal{L}_1$ ise), $p \in (0, 1)$ için

$$\begin{aligned} L_{X,Y}(p) &= E \{ (X - EX) I_{[Y \geq y(p)]}(Y) \} \\ \bar{L}_{X,Y}(p) &= E \{ (X - EX) I_{[Y < y(p)]}(Y) \}; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$E(X) = \infty$ ve $Y \in \mathcal{L}_1$ olması durumunda da,

$$\begin{aligned} L_{Y,X}(p) &= E \{ (Y - EY) I_{[X \geq x(p)]}(X) \} \\ \bar{L}_{Y,X}(p) &= E \{ (Y - EY) I_{[X < x(p)]}(X) \} \end{aligned} \quad (3.13)$$

fonksiyonları tanımlanabilir. Her zaman olduğu gibi, burada, $I[\cdot]$ gösterge (indikatör) fonksiyonunu simgelemektedir. (3.12) ve (3.13) eşitlikleri ile verilen fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan

$$\begin{aligned} Cov^{(Q)}(X, Y) &= - \int_0^1 y(p) dL_{X,Y}(p) \\ &= \int_0^1 y(p) d\bar{L}_{X,Y}(p) \end{aligned} \quad (3.14)$$

ve

$$\begin{aligned} Cov^{(Q)}(Y, X) &= - \int_0^1 x(p) dL_{Y,X}(p) \\ &= \int_0^1 x(p) d\bar{L}_{Y,X}(p) \end{aligned} \quad (3.15)$$

fonksiyonları kuantil (yüzdeler) kovaryans fonksiyonları olarak adlandırılmaktadır ve Q -kovaryans olarak nitelendirebiliriz. Birinci bölümdeki açıklamalarda da (bkz., s. 13-15) görüldüğü gibi $L_{X,Y}(p)$ bir küme fonksiyonu olup; integral, işaretli ölçülere göre integrasyon biçiminde yorumlanmalıdır (Royden, (1968)).

Burada $x(p)$ ve $y(p)$, Tanım 2.4' te verildiği gibi herhangi bir $p \in (0, 1)$ için sırası ile X ve Y rasgele değişkenlerinin p . kuantil değerlerini ifade etmektedir.

3.1.3.1. Kuantil (Yüzdellik) Kovaryansının Özellikleri

Kuantil (yüzdellik) kovaryansının sağlamakta olduğu bazı analitik özellikler aşağıdaki şekilde verilebilir:

1. Açıkça,

$$Cov^{(Q)}(X, Y) \neq Cov^{(Q)}(Y, X) \quad (3.16)$$

dir.

Kuantil (yüzdellik) kovaryansın tanımından görüldüğü gibi $Cov^{(Q)}(X, Y)$, Y ' nin beklentisinin olmadığı durumlarda; $Cov^{(Q)}(Y, X)$, X ' in beklentisinin olmadığı durumlarda tanımlanmıştır.

Bu kovaryansların biri birine eşit olduğu durumlar aşağıda ele alınmıştır.

2. X rasgele değişkeni Y rasgele değişkeninden Q -ilişkisz ise

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = 0$$

dir.

Y rasgele değişkeni X rasgele değişkeninden Q -ilişkisz ise

$$Cov^{(Q)}(Y, X) = 0$$

dir.

X ve Y rasgele değişkenlerinin Q -ilişkisz olması

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = Cov^{(Q)}(Y, X) = 0$$

olması demektir (Krajka, A. ve Szynal, D. (1994)).

3. X ve Y rasgele değişkenleri için $Cov^{(Q)}(X, Y)$ ve $Cov^{(Q)}(Y, X)$ tanımlı olduğu durumda, X değişkeni Y ' den bağımsız ise

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = 0 \quad (3.17)$$

ve Y değişkeni X ' den bağımsız ise

$$Cov^{(Q)}(Y, X) = 0 \quad (3.18)$$

dır (Krajka, A. ve Szynal, D. (1994)).

4. X ve Y rasgele değişkenleri için $Cov^{(Q)}(X, Z)$ ve $Cov^{(Q)}(Y, Z)$ tanımlı olsun. Bu durumda verilmiş $a, b, c, d, e \in \mathfrak{R}$ için

$$Cov^{(Q)}(aX + bY + c, dZ + e) = adCov^{(Q)}(X, Z) + bdCov^{(Q)}(Y, Z) \quad (3.19)$$

ile bu tür kovaryansın ölçekten etkilendiği ve ikili lineerlik özelliğini taşıdığı (bi-lineer olduğu) görülmektedir.

Bunun için, $U = aX + bY + c$ ve $V = dZ + e$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} L_{U,V}(p) &= E \{ (U - EU) I_{[V > v(p)]}(V) \} \\ &= aL_{X,V}(p) + bL_{Y,V}(p) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan, $dL_{X,Y}(p)$ ve $dL_{Y,Y}(p)$ fonksiyonları hesaplanarak tanımda yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa sonuç kolayca görülebilir.

5. Kesin artan (azalan) h gibi bir fonksiyon için

$$Cov^{(Q)}(X, h(Y)) = \int_0^1 h(y(p)) d\bar{L}_{X,Y}(p) \quad (3.20)$$

$$\left(Cov^{(Q)}(X, h(Y)) = \int_0^1 h(y(p)) d\bar{L}_{X,Y}(1-p) \right) \quad (3.21)$$

dir.

6. $X \in \mathcal{L}_1$ ve $E(Y) = \infty$ kesikli rasgele değişkeni için;

$$L_{X,Y}(p) = EXI[Y > y(p)] + \{1 - p - P[Y > y(p)]\} E[X | Y = y(p)] \\ - (1 - p) E(X)$$

yazılabilir (Krajka, A. ve Szynal, D. (1994)). Her zaman olduğu gibi burada $y(p)$, herhangi bir $p \in (0, 1)$ için Y rasgele değişkeninin p . kuantil (yüzdellik) değerini ifade etmektedir. Yukarıda verilen $L_{X,Y}(p)$ fonksiyonu yardımı ile kuantil (yüzdellik) kovaryans

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = - \int_0^1 y(p) dL_{X,Y}(p)$$

biçiminde verilebilir.

Krajka ve Szynal' in 1993 yılında yapılan çalışmalarından; (X, Y) , sürekli ve kesin monoton marjinal dağılım fonksiyonlarına sahip bir çift rasgele değişken olmak üzere, $X \in \mathcal{L}_1$ ve $L_{X,Y}(p)$, $p \in (0, 1)$ türevlenebilir ise

$$Xy(P) \left(\frac{f(X, y(P))}{f_X(x)f_Y(y(P))} - 1 \right) \in \mathcal{L}_1 \quad (3.22)$$

olduğunda

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = E \left[Xy(P) \left(\frac{f(X, y(P))}{f_X(x)f_Y(y(P))} - 1 \right) \right] \quad (3.23)$$

olduğu elde edilmiştir. Burada P simgesi, X rasgele değişkeninden bağımsız olarak $(0, 1)$ üzerinde düzgün dağılan bir rasgele değişkeni ve $f(.,.)$ ' de, (X, Y) çiftinin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Kovaryans Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler ve Bağımlılık Kavramları İle Olan İlişkileri

4.1.1. Kovaryans Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde tanımları ve bazı analitik özellikleri verilmiş olan kovaryans fonksiyonu türlerinin kendi aralarında bulunan ilişkiler üzerinde durulacaktır.

İç çarpım (moment) kovaryansı ($Cov^{(E)}(X, Y)$), dağılım kovaryansı ($Cov^{(F)}(X, Y)$) ve kuantil (yüzdeler) kovaryansı ($Cov^{(Q)}(X, Y)$) tanımları sırası ile (3.2), (3.7) ve (3.14) eşitlikleri ile verildi. Krajka ve Szydal (1994)' ün yaptıkları çalışmalar sonucu olarak, kovaryans fonksiyonu türlerinin aralarındaki ilişki, aşağıdaki gibi özetlenebilir.

$X \in \mathcal{L}_1$, $Y \in \mathcal{L}_1$ ve $XY \in \mathcal{L}_1$ olacak şekilde (X, Y) sürekli dağılım fonksiyonlarına sahip rasgele değişkenler çifti için

$$Cov^{(E)}(X, Y) = Cov^{(F)}(X, Y) = Cov^{(Q)}(X, Y) \quad (4.1)$$

yazılabilir.

Gösterim: Kovaryans fonksiyonunun (3.2) eşitliği ile verilen tanımından

$$Cov^{(E)}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (4.2)$$

dır.

Burada

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \int_a^b \int_c^d xyf(x,y)dydx \\
 &= \int_a^b x \left[\int_c^d yf(x,y)dy \right] dx
 \end{aligned}$$

olmak üzere, parantezin içerisindeki ifadeye kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\left(\begin{array}{l} y = u \quad \Rightarrow dy = du \\ f(x,y)dy = dv \quad \Rightarrow v = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= \int_a^b x \left[y \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} \Big|_c^d - \int_c^d \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dy \right] dx \\
 &= \left(y \int_a^b x \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx \right) \Big|_c^d - \int_a^b \int_c^d x \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dy dx \quad (4.3) \\
 &= I_1 - I_2
 \end{aligned}$$

olur. Burada,

$$I_1 = y \int_a^b x \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx$$

integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\left(\begin{array}{l} x = u \quad \Rightarrow dx = du \\ \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx = dv \quad \Rightarrow v = F(x, y) \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= y \left(xF(x, y) \Big|_a^b - \int_a^b F(x, y) dx \right) \Big|_c^d \\ &= xyF(x, y) \Big|_{a,c}^{b,d} - \int_a^b yF(x, y) dx \Big|_c^d \end{aligned}$$

ve benzer biçimde,

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_c^d \left(\int_a^b x \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx \right) dy \\ &= - \int_c^d \left(xF(x, y) \Big|_a^b - \int_a^b F(x, y) dx \right) dy \\ &= - \int_c^d (xF(x, y) dy) \Big|_a^b + \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx \end{aligned}$$

elde edilir.

I_1 ve I_2 , (4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= xyF(x,y) \Big|_{a,c}^{b,d} - \int_a^b yF(x,y)dx \Big|_c^d \\
 &\quad - \int_c^d (xF(x,y)dy) \Big|_a^b + \int_a^b \int_c^d F(x,y)dydx
 \end{aligned}$$

bulunur.

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

kısmi integrasyon uygulandığında

$$E(X) = xF(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)dx$$

ve aynı biçimde

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= \int_c^d yf(y)dy \\
 &= yF(y) \Big|_c^d - \int_c^d F(y)dy
 \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu bulunan ifadeler (4.2) eşitliğinde yerine konulursa

$$\begin{aligned}
Cov^{(E)}(X, Y) &= xyF(x, y) \Big|_{a,c}^{b,d} - \int_a^b yF(x, y)dx \Big|_c^d \\
&- \int_c^d (xF(x, y)dy) \Big|_a^b + \int_a^b \int_c^d F(x, y)dydx \\
&- \left\{ \left(xF(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)dx \right) \left(yF(y) \Big|_c^d - \int_c^d F(y)dy \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Bulunan bu son eşitlik düzenlenip, $a, c \rightarrow -\infty$; $b, d \rightarrow \infty$ durumunda limit alınırsa

$$\begin{aligned}
Cov^{(E)}(X, Y) &= \int_a^b \int_c^d F(x, y)dydx - \int_a^b F(x)F(y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F(x, y) - F(x)F(y)] dydx \\
&= Cov^{(F)}(X, Y)
\end{aligned}$$

dir.

O halde, söz konusu koşullara göre,

$$Cov^{(E)}(X, Y) = Cov^{(F)}(X, Y) \quad (4.4)$$

dir. Öte taraftan,

$$\begin{aligned}
L_{X,Y}(p) &= E(X - EX) I[Y \geq y(p)] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X)) f(x, y) dy dx
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
E(X) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy dx &= E(X) \int_{y(p)-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy \\
&= E(X) [1 - F(y(p))]
\end{aligned}$$

olduğundan

$$L_{X,Y}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (xf(x, y) dy dx - E(X) [1 - F(y(p))])$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dp} L_{X,Y}(p) &= \frac{d}{dp} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dy dx - E(X) [1 - F(y(p))] \right) \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y(p)) y'(p) dx + E(X) f(y(p)) y'(p) \\
&= - \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y(p)) y'(p) dx + E(X)
\end{aligned}$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} Cov^{(Q)}(X, Y) &= - \int_0^1 y(p) dL_{X, Y}(p) \\ &= - \int_0^1 y(p) \left(- \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y(p)) y'(p) dx + E(X) \right) dp \\ &= \int_0^1 y(p) \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y(p)) y'(p) dx dp - E(X) \int_0^1 y(p) dp \\ &= \int_0^1 y(p) \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y(p)) \frac{1}{f(y(p))} dx dp - E(X) E(Y) \\ &= E(XY) - E(X) E(Y) \\ &= Cov^{(E)}(X, Y) \end{aligned}$$

dır. O halde, söz konusu koşullarda,

$$Cov^{(E)}(X, Y) = Cov^{(Q)}(X, Y) \quad (4.5)$$

dir.

(4.4) ve (4.5) eşitliklerinden

$$Cov^{(E)}(X, Y) = Cov^{(F)}(X, Y) = Cov^{(Q)}(X, Y)$$

elde edilir.

Ayrıca, (3.2) eşitliği ile verilen iç çarpım (moment) kovaryansı mevcut iken (3.7) eşitliği ile tanımlanan dağılım kovaryansı mevcuttur. Fakat dağılım kovaryansı mevcut iken iç çarpım (moment) kovaryansı mevcut olmayabilir. Mardia ve Thompson (1972) buna ilişkin örnek vermektedir.

(3.14) ve (3.15) eşitlikleri ile ifade edilen kuantil (yüzdeler) kovaryans tanımı, iç çarpım (moment) kovaryansı ve dağılım kovaryansı tanımlarından daha zayıftır.

(X, Y) rasgele bir değişken çifti olmak üzere, iç çarpım (moment) kovaryansı $(Cov^{(E)}(X, Y))$ ve dağılım kovaryansı $(Cov^{(F)}(X, Y))$ mevcut değil iken kuantil (yüzdeler) kovaryansın $(Cov^{(Q)}(X, Y))$ mevcut olduğuna ilişkin örnekler Krajka ve Szydal (1993)' in yapmış oldukları çalışmada görülebilmektedir.

4.1.2. Kovaryans Fonksiyonlarının Bağımlılık Kavramları İle Olan İlişkileri

Bağımlılık kavramları arasındaki ilişkilerden söz ederken, bu bağımlılık kavramları arasındaki ilişki kısaca,

$$PRB(Y | X) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow SOKAB(Y | X) \Rightarrow \\ \Rightarrow SAKAB(Y | X) \Rightarrow \end{array} \right\} \Rightarrow MB(X, Y) \Rightarrow PKB(X, Y) \quad (4.6)$$

biçiminde bir şema ile ifade edilmişti. (4.6) ile verilen şemadan da görüldüğü üzere, verilen bağımlılık kavramları arasında en güçlü bağımlılığı pozitif regresyon bağımlılığı $(PRB(Y | X))$ ortaya koymaktadır. Sol kuyruğundan azalan bağımlılık $(SOKAB(Y | X))$ ve sağ kuyruğundan artan bağımlılık $(SAKAB(Y | X))$ ise pozitif regresyon bağımlılığına $(PRB(Y | X))$ göre daha zayıf bir bağımlılık gösterse de,

güçlü bir bağımlılık yapısı olarak kabul edilebilir. Bunun yanında, monoton birliktelik (association) kavramı; pozitif regresyon bağımlılığı, sol kuyruğundan azalan bağımlılık ve sağ kuyruğundan artan bağımlılığa göre daha zayıf bir bağımlılık yapısı ortaya koymaktadır. Pozitif kadran bağımlılığı ($PKB(X, Y)$) ise, bağımlılık kavramları içerisinde en zayıf olanı olarak görülmektedir.

f ve g sırasıyla X ve Y değer uzayları üzerinde tanımlı monoton ve ölçülebilir iki fonksiyon olsun. Bu tür fonksiyonlar \mathcal{G} gibi bir ailede toplanırsa, $\forall f, g \in \mathcal{G}$ için

$$Cov^{(E)}(f(X), g(Y)) \geq 0 \quad (4.7)$$

eşitsizliği ile X ve Y değişkenlerinin “monoton bir birliktelik (association)” içinde bulunduğundan daha önce bahsedilmişti. Açıkça, (4.7) eşitsizliği ancak f, g ve $fg \in \mathcal{L}_1$ olduğu zaman geçerli olmaktadır. Üstelik (4.7) eşitsizliği ile verilen ilişki

$$Cov^{(E)}(X, Y) \geq 0 \quad (4.8)$$

eşitsizliğini gerektirmektedir.

X ile Y rasgele değişkenleri (4.7) anlamında monoton bir birliktelik (association) içinde ise, (4.6)’ dan bu rasgele değişkenlerin aynı zamanda kadran anlamında da bağımlı olduğu anlaşılmaktadır.

Pozitif kadran bağımlılığının (PKB) sağlandığı hallerde (3.10) eşitliği ile verilen dağılım kovaryansının

$$Cov^{(F)}(X, Y) \geq 0$$

eşitsizliğini sağladığından kuşku yoktur.

Buna ilaveten, (3.14) ve (3.15) eşitlikleri ile tanımlanan kuantil (yüzdeler) kovaryansında, $\forall f, g \in \mathcal{G}$ için

$$Cov^{(Q)}(f(X), g(Y)) \geq 0 \quad (4.9)$$

şeklinde yazmak mümkündür.

(4.9) eşitsizliği mevcut ise kuantil (yüzdeler) kovaryansın “monoton birliktelik (association)” için uygun bir kriter olduğu söylenebilir.

Benzer biçimde, f ile g gibi her ikisi de reel ve her değişkende azalmayan (artmayan) iki fonksiyon verilmiş olsun. Ayrıca, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ile $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ rasgele vektörleri için $E(f(X))$, $E(g(Y))$ ve $E(f(X)g(Y))$ beklentileri mevcut olmak koşulu ile

$$Cov^{(E)}(f(X), g(Y)) \geq 0 \quad (4.10)$$

eşitsizliği ile X ve Y rasgele vektörlerinin monoton birlikteliği (association) ifade edilebilir.

Bu durumda dağılım kovaryansı da (F -kovaryansı), $\forall f, g \in \mathcal{G}$ için

$$Cov^{(F)}(f(X), g(Y)) \geq 0 \quad (4.11)$$

şeklinde monoton birliktelik (association) için uygun olduğunu ifade etmek mümkündür.

Benzer biçimde, kuantil (yüzdeler) kovaryans için

$$Cov^{(Q)}(f(X), g(Y)) \geq 0 \quad (4.12)$$

eşitsizliği geçerli ise, bu durumda kuantil (yüzdeler) kovaryansın monoton birliktelik (association) için uygun olduğu aksi durumda, monoton birlikteliğe uygun olmadığı ifade edilebilecektir.

4.2. Kovaryans Kavramlarına İlişkin Örnekler

Aşağıda verilen Örnek 1 ile iç çarpım (moment) kovaryansı olmamasına rağmen kuantil (yüzdeler) kovaryansın hesaplanabileceği gösterilmiş olur.

Örnek 1: (X, Y) gibi rasgele bir değişken çiftinin ortak dağılım fonksiyonu bilinmesin, fakat bunlar arasında

$$X = YI[|Y| \leq 1]$$

gibi bir ilişki bulunduğu varsayalım. Ayrıca, Y ' nin marjinal yoğunluk fonksiyonunun

$$f(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad -\infty < y < \infty$$

olduğu kabul edilsin. Buna göre,

$EX = 0$, $E|Y| = \infty$ ve $E|XY| < \infty$ olduğu durumda (3.2) eşitliği ile tanımlanan iç çarpım (moment) kovaryansı bağımlılık karakteristiği olarak kullanılamaz. Ancak, kuantil (yüzdeler) kovaryansını aşağıda verilen şekilde hesaplamak mümkündür.

(3.12) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} L_{X,Y}(p) &= E \{ (X - EX) I_{[Y \geq y(p)]}(Y) \} \\ &= E \{ X I_{[Y \geq y(p)]}(Y) \} \\ &= E \{ YI[|Y| \leq 1] I_{[Y \geq y(p)]}(Y) \} \end{aligned}$$

dir.

$y(p) = F^{-1}(p) \implies F(y(p)) = p$ olduğu dikkate alınrsa,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\pi(1+y^2)} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \arctan y + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Ayrıca, $p = \frac{1}{\pi} \arctan y + \frac{1}{2} \implies y = \tan \pi \left(p - \frac{1}{2} \right)$ gözönüne alınrsa

$$L_{X,Y}(p) = EYI \left\{ \tan \pi \left(p - \frac{1}{2} \right) < Y < 1 \right\}, \quad p \in \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4} \right)$$

dir. Buradan,

$$L_{X,Y}(p) = \int_{\tan \pi \left(p - \frac{1}{2} \right)}^1 \frac{y}{\pi(1+y^2)} dy$$

yazılabilir.

Buradan $dL_{X,Y}(p)$ hesaplanacak olursa,

$$\begin{aligned} dL_{X,Y}(p) &= -\frac{d}{dp} \tan \left(\pi p - \frac{\pi}{2} \right) \left[\tan \left(\pi p - \frac{\pi}{2} \right) \frac{1}{\pi(1 + \tan^2 \pi \left(p - \frac{1}{2} \right))} \right] \\ &= -\frac{\pi}{\sin^2 \pi p} \left(-\frac{\cos \pi p}{\sin \pi p} \right) \frac{1}{\pi(1 + \tan^2 \pi \left(p - \frac{1}{2} \right))} \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli açılımlar ve düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$dL_{X,Y}(p) = \frac{\cos \pi p}{\sin \pi p}$$

elde edilir.

(3.14) eşitliği ile verilen kuantil (yüzdeler) kovaryansın tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned} Cov^{(Q)}(X, Y) &= - \int_0^1 y(p) dL_{X,Y}(p) \\ &= - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} - \frac{\cos \pi p \cos \pi p}{\sin \pi p \sin \pi p} dp \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\cos^2 \pi p}{\sin^2 \pi p} dp \end{aligned} \quad (5.1)$$

biçiminde elde edilir. (5.1) ile verilen eşitlikte, $\pi p = u$ değişken değiştirilmesi yapılırsa

$$\begin{aligned} Cov^{(Q)}(X, Y) &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov^{(Q)}(X, Y) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 u} du - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} du \right] \\
&= \frac{4 - \pi}{2\pi}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Örnek 2: Bu örnek (4.1) ile verilen eşitliği gösteren bir uygulamadır. Marjinaleri $(0, 1)$ aralığındaki düzgün dağılım olan iki boyutlu Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) dağılımını gözöntüne alalım. Bu dağılıma ilişkin dağılım ve olasılık yoğunluk fonksiyonları sırası ile aşağıdaki gibidir.

$$F(x, y) = xy \{1 + \alpha(1 - x)(1 - y)\}$$

$$f(x, y) = 1 + \alpha(1 - 2x)(1 - 2y), \quad 0 < x, y < 1, \quad -1 \leq \alpha \leq 1$$

Bu varsayımlar altında, $Cov^{(E)}(X, Y)$, $Cov^{(F)}(X, Y)$ ve $Cov^{(Q)}(X, Y)$ kovaryanslarına bakalım.

(3.2) eşitliği ile verilen tanımdan iç çarpım (moment) kovaryansı

$$Cov^{(E)}(X, Y) = EXY - EXEY$$

biçimindedir. Buradan,

$$EXY = \int_0^1 \int_0^1 xy f(x, y) dx dy$$

$$\begin{aligned}
EXY &= \int_0^1 \int_0^1 xy [1 + \alpha(1-2x)(1-2y)] dx dy \\
&= \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{36}
\end{aligned}$$

ve

$$EX = \frac{1}{2}$$

$$EY = \frac{1}{2}$$

olduğundan iç çarpım (moment) kovaryansı

$$\begin{aligned}
Cov^{(E)}(X, Y) &= EXY - EXEY \\
&= \left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha}{36} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \\
&= \frac{\alpha}{36}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

olarak bulunur.

(3.7) eşitliği ile ifade edilen dağılım kovaryansının tanımından

$$Cov^{(F)}(X, Y) = \int_0^1 \int_0^1 (xy + \alpha xy(1-x)(1-y) - xy) dx dy$$

$$\begin{aligned}
Cov^{(F)}(X, Y) &= \alpha \int_0^1 \int_0^1 xy(1-x)(1-y) dx dy \\
&= \frac{\alpha}{36}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

dır.

Kuantil (yüzdelik) kovaryansı hesaplamak için (3.14) eşitliği ile verilen

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = - \int_0^1 y(p) dL_{X,Y}(p)$$

tanımı kullanalım.

$F_Y(y) = y = p \Rightarrow y(p) = p$ bilindiğine göre,

$$\begin{aligned}
L_{X,Y}(p) &= E \{ (X - EX) I_{[Y \geq y(p)]}(Y) \} \\
&= E \{ (X - \frac{1}{2}) I_{[Y \geq y(p)]}(Y) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{X,Y}(p) &= \iint_{\substack{0 < x < 1 \\ y > p}} \left(x - \frac{1}{2} \right) f(x, y) dx dy, \quad 0 < p < 1 \\
&= \int_0^1 \int_p^1 \left(x - \frac{1}{2} \right) [1 + \alpha(1-2x)(1-2y)] dy dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{X,Y}(p) &= \int_0^1 \int_p^1 \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right) + \alpha \left(x - \frac{1}{2}\right) (1 - 2x) (1 - 2y) \right\} dy dx \\
&= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx + \alpha \left\{ \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) (1 - 2x) dx \int_p^1 (1 - 2y) dy \right\} \\
&= -\frac{1}{6}\alpha p^2 + \frac{1}{6}\alpha p
\end{aligned} \tag{5.4}$$

biçiminde elde edilir.

(5.4) eşitliği, p değişkenine göre türevlenirse

$$\frac{d}{dp} L_{X,Y}(p) = -\frac{1}{3}\alpha p + \frac{1}{6}\alpha$$

bulunur.

Böylece, kuantil (yüzdeler) kovaryans

$$\begin{aligned}
Cov^{(Q)}(X, Y) &= - \int_0^1 y(p) dL_{X,Y}(p) \\
&= - \int_0^1 p \left(-\frac{1}{3}\alpha p + \frac{1}{6}\alpha \right) dp \\
&= - \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}\alpha p^2 + \frac{1}{6}\alpha p \right) dp
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cov^{(Q)}(X, Y) &= \frac{1}{3}\alpha \int_0^1 p^2 dp - \frac{1}{6}\alpha \int_0^1 p dp \\
&= \frac{1}{9}\alpha - \frac{1}{12}\alpha \\
&= \frac{\alpha}{36}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

olarak elde edilir.

Böylece (5.2), (5.3) ve (5.5) eşitlikleri ile ifade edilen iç çarpım (moment), dağılım ve kuantil (yüzdeler) kovaryansların hesaplanmaları sonucunda bu kovaryans fonksiyonu türlerinin biri birine eşit oldukları görülür.

Kısaca,

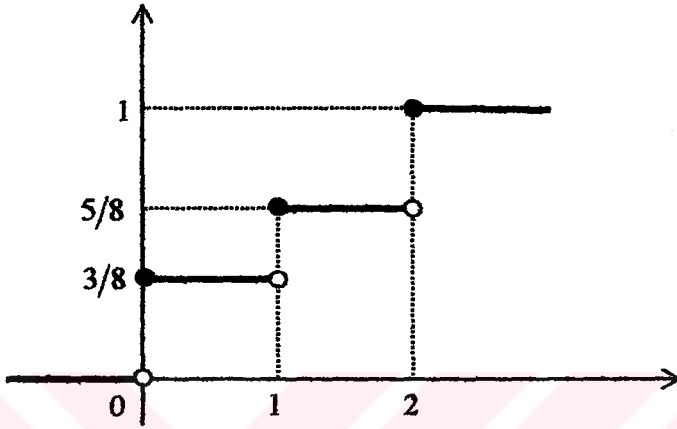
$$Cov^{(E)}(X, Y) = Cov^{(F)}(X, Y) = Cov^{(Q)}(X, Y)$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 3: (4.1) ile ifade edilen eşitlik kesikli durumda da geçerlidir:

$$P(X = x, Y = y) = \frac{1}{8} |x - y|, \quad x, y = 0, 1, 2$$

biçiminde tanımlanan kesikli dağılımın $F_Y(y)$ marjinal dağılımı



olup, buradan

$$y(p) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq p < \frac{3}{8} \\ 1 & , \frac{3}{8} \leq p < \frac{5}{8} \\ 2 & , p \geq \frac{5}{8} \end{cases}$$

elde edilir. Kesikli rasgele değişkenler için

$$L_{X,Y}(p) = E\{XI[Y > y(p)]\} + \{1 - p - P[Y > y(p)]\} E[X | Y = y(p)] - (1 - p)E(X)$$

yazılabilir (Krajka, A. ve Szydal, D. (1994)). Buna göre,

$$y(p) = 0, 0 \leq p < \frac{3}{8} \text{ ise;}$$

$$\begin{aligned}
 E\{XI[Y > 0]\} &= \sum_{x=0}^2 \sum_{y=1}^2 x \cdot P(X = x, Y = y) \\
 &= \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P[Y > 0] &= \sum_{y=1}^2 P(Y = y) \\
 &= \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[X | Y = 0] &= \sum_{x=0}^2 x \cdot P(X = x | Y = 0) \\
 &= \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 L_{X,Y}(p) &= \frac{3}{8} + (1 - p - \frac{5}{8}) \cdot \frac{5}{3} - (1 - p) \cdot 1 \\
 &= -\frac{2}{3}p, \quad 0 \leq p < \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Aynı şekilde, $y(p) = 1, \frac{3}{8} \leq p < \frac{5}{8}$ ise;

$$\begin{aligned}
 E\{XI[Y > 1]\} &= \sum_{x=0}^2 \sum_{y=2}^2 x \cdot P(X = x, Y = y) \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P[Y > 1] &= \sum_{y=2}^2 P(Y = y) \\
 &= \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[X | Y = 1] &= \sum_{x=0}^2 x \cdot P(X = x | Y = 1) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
 L_{X,Y}(p) &= \frac{1}{8} + (1 - p - \frac{3}{8}) \cdot 1 - (1 - p) \cdot 1 \\
 &= -\frac{2}{8}, \quad \frac{3}{8} \leq p < \frac{5}{8}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak, benzer biçimde $y(p) = 2, p \geq \frac{5}{8}$ ise;

$$\begin{aligned}
 E\{XI[Y > 2]\} &= \sum_{x=0}^2 \sum_{y>2} x \cdot P(X = x, Y = y) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$P[Y > 2] = 0$$

$$\begin{aligned}
 E[X | Y = 2] &= \sum_{x=0}^2 x \cdot P(X = x | Y = 2) \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}L_{X,Y}(p) &= 0 + (1-p-0) \cdot \frac{1}{3} - (1-p) \cdot 1 \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}p, \quad p \geq \frac{5}{8}\end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan,

$$L_{X,Y}(p) = \begin{cases} -\frac{2}{3}p & , 0 \leq p < \frac{3}{8} \\ -\frac{2}{3} & , \frac{3}{8} \leq p < \frac{5}{8} \\ -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}p & , p \geq \frac{5}{8} \end{cases}$$

yazılır.

Türev alınırsa,

$$dL_{X,Y}(p) = \begin{cases} -\frac{2}{3} & , 0 \leq p < \frac{3}{8} \\ 0 & , \frac{3}{8} \leq p < \frac{5}{8} \\ \frac{2}{3} & , p \geq \frac{5}{8} \end{cases}$$

elde edilir.

Kuantil (yüzdeler) kovaryansın tanımından

$$Cov^{(Q)}(X, Y) = - \int_0^1 y(p) dL_{X,Y}(p)$$

$$\begin{aligned}
Cov^{(Q)}(X, Y) &= - \left\{ \int_0^{\frac{2}{3}} 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) dp + \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{8}} 1 \cdot 0 dp + \int_{\frac{5}{8}}^1 2 \cdot \frac{2}{3} dp \right\} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Aynı dağılım için $Cov^{(E)}(X, Y)$ ve $Cov^{(F)}(X, Y)$ fonksiyonlarını hesaplayalım.

$$P(X = x, Y = y) = \frac{1}{8} |x - y|, \quad x, y = 0, 1, 2$$

biçiminde tanımlanan kesikli dağılım için

$$P(X = x) = \sum_{y=0}^2 \frac{1}{8} |x - y| = \frac{1}{8} (|x| + |x - 1| + |x - 2|)$$

$$EX = \sum_{x=0}^2 xP(X = x) = \frac{1}{8} \sum_{x=0}^2 x (|x| + |x - 1| + |x - 2|) = 1$$

$$P(Y = y) = \sum_{x=0}^2 \frac{1}{8} |x - y| = \frac{1}{8} (|-y| + |1 - y| + |2 - y|)$$

$$EY = \sum_{y=0}^2 yP(Y = y) = \frac{1}{8} \sum_{y=0}^2 y (|-y| + |1 - y| + |2 - y|) = 1$$

$$E(XY) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xyP(X = x, Y = y) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 xy \frac{1}{8} |x - y| = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur. Bu değerler iç çarpım (moment) kovaryansı tanımında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
Cov^{(E)}(X, Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= \frac{1}{2} - 1.1 \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

bulunur.

Aynı dağılım için, dağılım kovaryansına bakalım.

$$P(X = x) = \sum_{y=0}^2 \frac{1}{8} |x - y| = \frac{1}{8} (|x| + |x - 1| + |x - 2|)$$

$$P(Y = y) = \sum_{x=0}^2 \frac{1}{8} |x - y| = \frac{1}{8} (|-y| + |1 - y| + |2 - y|)$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x=0}^x \sum_{y=0}^y \frac{1}{8} |x - y|$$

$$P(X \leq x) = \sum_{y=0}^y \left(\sum_{x=0}^2 \frac{1}{8} |x - y| \right) = \sum_{y=0}^y \left[\frac{1}{8} (|x| + |x - 1| + |x - 2|) \right]$$

$$P(Y \leq y) = \sum_{x=0}^x \left(\sum_{x=0}^2 \frac{1}{8} |x - y| \right) = \sum_{x=0}^x \left[\frac{1}{8} (|-y| + |1 - y| + |2 - y|) \right]$$

değerlerini dağılım kovaryansı tanımında yerine yazılırsa

$$Cov^{(F)}(X, Y) = \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 [P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x)P(Y \leq y)]$$

$$= \sum_{x=0}^2 \sum_{y=0}^2 \left\{ \left(\sum_{x=0}^x \sum_{y=0}^y \frac{1}{8} |x-y| \right) - \right.$$

$$\left. \left(\sum_{y=0}^y \left[\frac{1}{8} (|x| + |x-1| + |x-2|) \right] \right) \left(\sum_{x=0}^x \left[\frac{1}{8} (|-y| + |1-y| + |2-y|) \right] \right) \right\}$$

ve bu toplam hesaplanırsa

$$Cov^{(F)}(X, Y) = -\frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

Bu da yine bölüm 4' te, (4.1) ile verilen eşitliğe bir uygulama olarak görülebilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, iç çarpım (moment) kovaryansı, dağılım kovaryansı ve kuantil (yüzdeler) kovaryans fonksiyonları ve bu fonksiyonların bağımlılık kavramları ile olan ilişkileri üzerinde durulmuştur.

İç çarpım (moment) kovaryansı, dağılım kovaryansı ve kuantil (yüzdeler) kovaryans fonksiyonları kısmında, kovaryans fonksiyonlarının tanımları verilmiş ve bu kovaryans fonksiyonlarının analitik özellikleri gösterilmiştir. Adı geçen kovaryans fonksiyonlarının biri birleri arasında bulunan ilişki kısaca bir teorem ile ifade edilmiştir. Bu teoremin elde edilmesi kovaryans hakkında fikir elde edemediğimiz durumlarda önem taşımaktadır. Çünkü kovaryans kavramının tanımlı olması durumunda, monoton biriktelik (association) kavramı ve bağımlılık kavramları ile olan ilişkilerini elde etmek mümkün olmaktadır. Ayrıca rasgele değişkenlerin bağımlılığı birçok sonuç çıkarımı prosedüründe büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu nedenle böyle bir özelliğin karakterizasyonu önemlidir.

Çalışmanın bağımlılık kavramları ile ilgili olan kısmında; iç çarpım (moment) kovaryansı, dağılım kovaryansı ve kuantil (yüzdeler) kovaryans fonksiyonunun çeşitli bağımlılık kavramları ve monoton biriktelik (association) kavramı ile olan ilişkisi elde edilmiştir. Bu bölüme ait bulguların istatistikî sonuç çıkarımında yararlı olacağı düşünülmektedir.

KAYNAKLAR

- Barlow, R.E. ve Proschan, F. 1975. *Statistical Theory of Reliability and Life testing*. Rinehart & Winston
- Esary, J.D., Proschan, F. ve Walkup, D.W. 1967. Association of random variables with applications. *the Annals of mathematical statistics*, 39; 1466-1474.
- Esary, J.D. ve Proschan, F. 1972. Relationships among some concepts of bivariate dependence. *Ann. Math. Statist.* 43; 651-655.
- Fieller, E.C., Hartley, H.O. ve Pearson, E.S. 1957. Tests for rank correlation coefficients. *Biometrika.* 44; 470-481.
- Griffin, Harold D. 1958. Graphic computation of tau as a coefficient of disarray. *Journal of the American Statistical Association.* 53; 441-447.
- Hoeffding, W. 1940. *Mastabinvariante Korrelations Theorie*. *Schriften Math. Inst. Univ. Berlin*, 5; 187-233.
- Hoffman, K.M. ve Kunze, R.A. 1971. *Linear Algebra*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Kaarsemaker, L. ve van Wijngaarden, A. 1953. Tables for use in rank correlation. *Statistica.* 7; 41-54.
- Karlin, S. 1968. *Total Positivity I*. Academic Press, San Diego, California.
- Kendall, M.G. 1938. A new measure of rank correlation. *Biometrika.* 30; 81-93.
- Krajka, A. ve Szynal, D. 1994. On Q-covariance and its applications. *Proceeding of the International Conference on Linear Statistical Inference (Linstat'93)* editörleri T. Calinski ve R. Kala, Kluwer Academic Publishers, Hollanda.
- Krajka, A. ve Szynal, D. 1993. On a notion of Q-covariance. *Manuscript*.
- Kruskal, W.H. 1958. Ordinal measures of association. *American Statist. Association Journal.* 49; 814-861.

- Kolmogorov, A.N. ve Fomin, S.V. 1970. Introductory Real Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- Kowalczyk, T. ve Pleszczyńska, E. 1977. Monotone dependence functions of bivariate distributions. *Ann. Statist.* 5; 1221-1227.
- Lehmann, E.L. 1966. Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist.*, 37; 1137-1153.
- Lipps, G.F. 1905. Die Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Merkmalen eines Gegenstandes. *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sachsische Geseellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse.* 57; 1-32.
- Royden, H.L. 1968. Real Analysis. Macmillan Publishing Co., New York.
- Mardia, K.V. ve Thompson, J.W. 1972. Unified treatment of moment formulae. *Sankhya A* 34; 121-132.
- Mari, D.D. ve Kotz, S. 2001. Correlation and Dependence. Imperial College Press, London.
- Sandiford, P. 1928. Educational Psychology. An Objective Study, Longmans, Green and Co., London, New York and Toronto.
- Tuncer, Y., Kotz, S. ve Bairamov, I. 2000. L_p Covariances, Ank. Univ. Çalışma raporu.
- Young, W.H. 1916. On Multiple Integration by Parts and The Second Theorem of The Mean. *Proc. London Math. Soc., Series 2*, 16; 273-293.

ÖZGEÇMİŞ

Ankara'da 1972 yılında doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1990 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden 1995 yılında Matematikçi ünvanıyla mezun oldu. Temmuz 1995-Temmuz 1997 yılları arasında, Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. Ağustos 1998 yılında Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimine başladı.

Temmuz 1995-Ağustos 1998 yılları arasında Afyon Kocatepe Üniversitesi'nde, Ağustos 1998 tarihinden bu yana da Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.