

73093

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SCHWARZ-PICK TEOREMİNİN r -
 r -YARIÇAPLI DAİRENİN BİRİM DAİREYE
KONFORM TASVİRİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

T. G.
Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi

Muhammet KAMALI

Yönetici: Prof.Dr. Mustafa BAYRAKTAR

Doktora Tezi

ÖZET

R bir kompleks cebir olmak üzere $a \in R$ için a 'nın spektrumu kullanılarak Schwarz lemmasının cebirsel karakterizasyonu verildi.

$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ ve $\bar{U} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ kompleks düzlemde kapalı daireler, $B(\bar{D})$, \bar{D} de tarifli sınırlı analitik fonksiyonların cebiri iken $\phi(\alpha) = a$ ($\alpha \in \mathbb{C}$) olacak şekilde $\phi: B(\bar{D}) \rightarrow R$ izomorfizmi tanımlandı. R 'nin bir a elemanının bazı şartlara sahip olması halinde \bar{D} 'nin \bar{U} ye konform tasvirlerinin cebirsel karakterizasyonu bu a elemanı kullanılarak yapıldı. $r=1$ özel halinde, kapalı birim dairenin kendi üzerine konform tasvirlerinin cebirsel karakterizasyonunun aynı şartlara sahip bir $a \in R$ ile verilebileceği görüldü.

Schwarz-Pick teoremini karakterize eden bir cebirsel karakterizasyon sunuldu.

SUMMARY

An algebraic characterization of Schwarz Lemma was given using the spectrum for an element $a \in R$, a complex algebra.

Let $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ and $\bar{U} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ be closed disks in complex plane while $B(\bar{D})$ is the algebra of bounded analytical functions then $\phi: B(\bar{D}) \rightarrow R$ was defined by $\phi(\alpha) = a\alpha$. ($\alpha \in \mathbb{C}$, a constant). When the element $a \in R$ has some conditions, the algebraic characterization of the conformal mappings of \bar{D} onto \bar{U} was made using this element. In the special case $r=1$ it is observed that the algebraic characterization of conformal mappings of the closed unit disc onto itself, can be give with the same conditions for an element $a \in R$.

An algebraic characterization of Schwarz-Pick theorem was presented.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemyen, sayın hocam Prof.Dr. Mustafa BAYRAKTAR'a teşekkürlerimi arz ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
SUMMARY	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1, GİRİŞ	1
2, ÖN BİLGİLER	3
3, r YARIÇAPLI DAİRENİN BİRİM DAİREYE KONFORM TASVİRİ	9
3.1. Konform Tasvir	9
3.2. Gayri Euclidyen (G.E) Geometri	15
4. SINIRLI ANALİTİK FONKSİYONLAR HALKASI	19
5. r -YARIÇAPLI DAİRENİN BİRİM DAİREYE KONFORM TASVİRİNİN VE SCHWARZ-PICK TEOREMİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU	24
KAYNAKLAR	33

1. GİRİŞ

1940 ve daha sonraki yıllarda analitik fonksiyonlar teorisi ile cebir arasında ilişki kuran bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar sonucu, kompleks düzlemdeki bölgelerin konform eşdeğerliliği bölge üzerindeki analitik fonksiyonların cebirsel yapısı ile tespit edilmiştir.

D kompleks düzlemde bir bölge ve $A(D)$, D de bütün tek değerli analitik fonksiyonların halkası (cebiri) olsun. D_1 ve D_2 kompleks düzlemde herhangi bir bölge iken D_1 in D_2 bölgesi üzerine bir birebir konform tasvir mevcutsa (veya anti-konform tasvir mevcutsa) $A(D_1)$ ve $A(D_2)$ arasında bir izomorfizm (anti-izomorfizm) vardır.

1948 de L. Bers bunun tersinin de doğru olduğunu gösterdi. Bers şunu ispatladı: Şayet $\phi:A(D_1)\rightarrow A(D_2)$ ye sabitleri koruyan bir izomorfizm ise, $f\in A(D_1)$ için $\phi(f)=f\circ\psi$ olacak şekilde D_1 i D_2 üzerine tasvir eden bir ψ konform dönüşümü vardır (5).

Kompleks düzlemde sınırlı bir D bölgesinin her z sınır noktası için z noktasında kaldırılamayan bir singülerliğe sahip bir $f\in B(D)$ olacak şekilde D bölgesi üzerinde tanımlı tek değerli ve sınırlı analitik fonksiyonların halkası $B(D)$ olsun. Böyle bir $B(D)$ halkası için 1942 yılında C. Chevalley ve S. Kakutani tarafından aşağıdaki teorem ileri sürülmüş ve ispatlanmıştır: $\phi:B(D)\rightarrow B(D')$ ye her $\alpha\in\mathbb{C}$ için $\phi(\alpha)=\alpha$ özelliğini sağlayan bir halka izomorfizmi ve $\phi(f)=g$ olsun. D den D' üzerine her $z'\in D'$ noktası için $g(z')=f\{\psi^{-1}(z')\}$ olacak şekilde birebir bir ψ konform dönüşümü vardır. Burada $z'=\psi(z)$ dir.

W. Rudin, L. Bers'in teoremini aşağıdaki şekilde açık Riemann yüzeylerine genelleştirmiştir: R_1 ve R_2 açık Riemann yüzeyleri, $A(R_1)$ ve $A(R_2)$, R_1 ve R_2 üzerinde tarifli tek değerli analitik fonksiyonların cebiri olsun. Eğer $A(R_1)$ ve $A(R_2)$ izomorf iseler bu taktirde R_1 ve R_2 konform eşdeğerdir (11).

1964 de A. Beck yayınladığı bir çalışma ile analitik fonksiyonlar teorisinde "iki dairesel halka konform ise yarıçaplarının oranı sabittir" ifadesini cebirsel olarak karakterize etti (4).

Bu tez beş bölümden ibarettir.

Birinci bölüm giriş bölümü olup, ikinci bölümde diğer bölümlerde kullanılan tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde konform tasvir kavramı ve $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ r yarıçaplı kapalı dairenin, $\bar{U} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ kapalı birim daire üzerine konform tasviri verildi. Ayrıca Gayri Euclidyen (G,E) geometri kavramı üzerinde duruldu. Schwarz-Pick teoremi ifade ve ispat edildi.

Dördüncü bölümde sınırlı analitik fonksiyonların $B(D)$ halkası ile ilgili bazı tanım ve teoremlerden bahsedildi. Cebir kavramı verildi. Spektrum, spektral yarıçap tanımları ve ilgili teoremler sunuldu.

Beşinci bölümde, $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ r yarıçaplı kapalı daire ve $\bar{U} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ de kapalı birim daire olmak üzere \bar{D} tarifli sınırlı analitik fonksiyonların halkası (cebiri) ele alındı. Schwarz teoreminin bir cebirsel karakterizasyonu sunuldu. $r=1$ özel halinde bu karakterizasyon ifadesinin Schwarz Lemmasının cebirsel karakterizasyonu olduğu görüldü. **Schwarz** teoreminin başka bir neticesi olarak $z=0$ noktasını $w=0$ noktasını tekabül edecek şekilde \bar{D} nin \bar{U} üzerine konform tasvirinin cebirsel karakterizasyonu elde edildi. Problem daha da genel halde düşünülerek $\alpha \neq 0$ olmak üzere α , \bar{D} nin bir iç noktası iken α yı $w=0$ noktasına tekabül edecek şekilde \bar{D} yi \bar{U} ye konform tasvir eden dönüşüm cebirsel karakterize edildi. $r=1$ özel halinde bu karakterizasyonun kapalı birim diskin kendi üzerine konform tasvirinin cebirsel karakterizasyonu olduğu görüldü. Son olarak Schwarz-Pick teoreminin bir cebirsel karakterizasyonu ve bunun da bir sonucu takdim edildi.

2. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1: R boş olmayan bir cümle ve R de toplama ($+$) ve çarpma (\cdot) denilen iki tane ikili işlem verilmiş olsun. Bu $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(R, +, \cdot)$ ya halka denir.

R1. $(R, +)$ değişmeli bir gruptur.

R2. $(R, +, \cdot)$ daki çarpma işlemi birleşme özelliğine sahiptir. Yani her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ dir.

R3. $(R, +, \cdot)$ daki çarpma, toplama üzerinde dağılma özelliğine sahiptir. Yani, her $a, b, c \in R$ için

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \text{ ve } a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

dir.

R halkasının çarpma işlemine göre özdeş elemanı varsa, yani, her $a \in R$ için $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$ olacak şekilde R de 1_R ile gösterilen bir eleman varsa $(R, +, \cdot)$ ya birim elemanlı halka denir. Şayet bu $(R, +, \cdot)$ halkası çarpma işlemine göre değişmeli ise $(R, +, \cdot)$ ya değişmeli halka adı verilir.

Tanım 2.2: R halkasının boş olmayan I altcümlesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa I ya ideal (iki yanlı ideal) denir:

I1. Her $x, y \in I$ için $x - y \in I$ dir.

I2. Her $x \in I$ ve her $r \in R$ için $rx \in I$ ve $xr \in I$ dir.

X, R halkasının bir altcümlesi ve X i ihtiva eden R nin ideallerinin ailesi de $B = \{I_i : X \subseteq I_i\}$ olsun. Bu taktirde

$$\bigcap_{I_i \in B} I_i$$

idealine X tarafından gerilen ideal denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir, X in sonlu olması halinde $\langle X \rangle$ idealine sonlu gerilen ideal, X in tek noktadan ibaret olması halinde, yani, $X = \{p\}$ ise $\langle X \rangle = \langle p \rangle$ idealine esas ideal denir.

Tanım 2.3: a , R halkasının sıfırdan (özdeş elemandan) farklı bir elemanı olsun. $a \cdot b = 0$ ($ba = 0$) olacak şekilde sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa, a ya sol (sağ) sıfır bölen denir. R nin

bir elemanı hem sağ hemde sol sıfır bölense bu elemana kısaca sıfır bölün denir, Değişmeli halkalarda bu ayırımı gerek yoktur

Tanım 2,4: Birim elemanlı ve değişmeli bir halkanın sıfır bölünü yoksa bu halkaya tamlık bölgesi denir.

Tanım 2,5: R bir halka ve $x \in R$ olsun. x in R de çarpmaya göre tersi varsa x^{-1} e R de aritmetik birim denir. Aksi halde x R de aritmetik birim değildir diyeceğiz.

Tanım 2,6: I, R halkasının bir ideali olsun. R/I ,

$$(a+I)+(b+I) = (a+b)+I \text{ ve } (a+I)(b+I) = ab+I$$

işlemlerine göre bir halkadır. Bu halkaya R nin I ya göre bölüm halkası denir.

Tanım 2,7: $(R, +, \cdot)$ ve (R', \oplus, \otimes) birer halka olsun. Bu takdirde $\phi: R \rightarrow R'$ dönüşümü

$$\phi(a+b) = \phi(a) \oplus \phi(b) \text{ ve } \phi(a \cdot b) = \phi(a) \otimes \phi(b)$$

özelliklerini sağlıyorsa ϕ ye halka homomorfizmi, ϕ birebir ve üzerine ise ϕ ye izomorfizm denir.

R den R' ye bir ϕ izomorfizmi varsa R ve R' ye izomorftur denir ve bu husus $R \cong R'$ ile belirtilir.

Tanım 2,8: $\phi: R \rightarrow R'$ bir halka homomorfizmi olsun. Bu durumda

$$\{a \in R: \phi(a) = 0_{R'}\}$$

cümlesine ϕ nin çekirdeği denir ve $\text{çek}\phi$ ile gösterilir.

Teorem 2.9: $\phi: R \rightarrow R'$ üzerine bir halka homomorfizmi ise $R/\text{çek}\phi \cong R'$ dir.

İspat: $\text{çek}\phi = J$, R nin bir idealidir. Çünkü,

I1. $x, y \in \text{çek}\phi$ olsun. $\phi(x-y) = \phi(x) - \phi(y) = 0$ ise $x-y \in \text{çek}\phi$ dir.

I2. $x \in \text{çek}\phi$ ve $r \in R$ olsun. Bu durumda $\phi(xr) = \phi(x)\phi(r) = 0$ ve $\phi(rx) = \phi(r)\phi(x) = 0$ eşitliklerinden $xr \in \text{çek}\phi$ ve $rx \in \text{çek}\phi$ yazılır.

Her $a \in R$ için $\psi(\phi(a)) = a+J$ ile tanımlanan $\psi: R' \rightarrow R/J$ dönüşümünü gözönüne alalım.

$$\psi(R') = \{\psi(c) : c \in R'\} = \{\psi(\phi(a)) : a \in R\} = R/J$$

olduğundan ψ üzerine bir dönüşümdür. $a, b \in R$ olmak üzere $\phi(a) = \phi(b)$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $a - b \in J$ veya $a + J = b + J$ olmasıdır. Dolayısıyla ψ birebir bir dönüşümdür. Diğer taraftan her $a, b \in R$ için

$$\psi(\phi(a) + \phi(b)) = \psi(\phi(a)) + \psi(\phi(b))$$

ve

$$\psi(\phi(a)\phi(b)) = \psi(\phi(a))\psi(\phi(b))$$

olduğundan ψ bir izomorfizmdir.

Tanım 2.10: $I \neq R$ olmak üzere I, R nin bir ideali olsun. R ve I dan başka R nin I yı ihtiva eden ideali yoksa I ya R nin maksimal ideali denir.

Tanım 2.11: R özdeş elemanlı değişmeli halka olsun. Şayet R nin sıfırdan farklı her elemanı aritmetik birim ise R ye cisim denir.

Teorem 2.12: R birim elemanlı ve değişmeli bir halka ve I R nin bir has ideali olsun. I nin maksimal olması için gerek ve yeter şart R/I cisim olmasıdır.

İspat: I, R nin maksimal ideali olsun. R/I birim elemanlı ve değişmeli bir halkadır. R/I nin cisim olduğunu göstermek için $a + I \neq I$ ise $a + I$ nin R/I da aritmetik birim olduğunu göstermek yeter, $a + I \neq I$ olduğundan $a \notin I$ dır. Şu halde $I, I + \langle a \rangle = I + Ra$ idealinin has alt cümlesidir. Burada $Ra = \{ra : r \in R\}$ dır. I maksimal olduğundan $I + Ra = R$ olmak zorundadır. R birim elemanlı ve değişmeli olduğu için $1 = i + ra$ olacak şekilde $i \in I$ ve $r \in R$ vardır. Buradan $1 - ra = i \in I$ ve böylece

$$1 + I = ra + I = (r + I)(a + I)$$

elde edilir. Şu halde $a + I$ nin R/I da çarpmaya göre tersi $r + I$ olup R/I bir cisimdir.

Tersine olarak, şimdi R/I nin bir cisim olduğunu kabul ederek, I nin maksimal olduğunu gösterelim. R/I cisim olduğundan $1 + I \neq 0 + I = I$, yani $1 \notin I$ ve dolayısıyla $I \neq R$ dir. Kabul edelimki R nin J ideali I yı has olarak ihtiva etmektedir.

$a \in J - I$ olsun. Bu taktirde $a + I$ nin R/I da çarpmaya göre tersi

olacağından $(a+I)(b+I)=1+I$ yazılabilir. Buradan $ab+I=1+I$ ve $ab-1+c$ ise $1-ab-c \in J$ dir. Böylece $J=R$ ve dolayısıyla I maksimal idealdir.

Teorem 2.13: R ve R' iki halka $\phi: R \rightarrow R'$ üzerine homomorfizm olsun. Bu taktirde

- i. $(a), R$ nin bir esas ideali ise $\phi((a)), R'$ nin bir esas idealidir.
- ii. I, R nin maksimal ideali ise $\phi(I)$ de R' nin maksimal idealidir.

İspat: i. Bir $a \in R$ tarafından gerilen esas ideal $(a) = \{ar : r \in R\}$ olsun. $(a) \subset R$ olduğundan $\phi((a)) \subset R'$ dir. Göstermeliyiz ki $\phi((a)), \phi(a) \in R'$ elemanı tarafından gerilen bir esas idealdir. Şimdi herhangi $r' \in \phi((a))$ elemanı alalım. $r' = \phi(ar) = \phi(a) \cdot \phi(r)$ olduğundan $r' \in \phi(a)$ veya $\phi((a)) \subset \phi(a)$ dir. Aynı şekilde $\phi(a) \subset \phi((a))$ dır. Dolayısıyla $\phi((a)) = \phi(a)$ dır.
ii. I, R nin bir maksimal ideali olduğundan her $I \subset J \neq R$ için $I=J$ dir. ϕ homomorfizmi altında $\phi(I) \subset \phi(J) \neq \phi(R) = R'$ dir. Üstelik $I=J$ den $\phi(I) = \phi(J)$ dir. O halde $\phi(I), R'$ nin maksimal idealidir.

Teorem 2.14: R ve R' iki halka ve $\phi: R \rightarrow R'$ bir izomorfizm olsun. Bu taktirde I, R nin bir maksimal ideali ise $\phi(I)$ de R' nin bir maksimal idealidir.

İspat, teorem 2.13 in bir neticesidir.

Tanım 2.15: L boş olmayan bir cümle ve F bir cisim olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa L ye F cismi üzerinde Lineer uzay denir.

L1. $\dagger: L \times L \rightarrow L$, $\dagger(u, v) = u \dagger v$ olmak üzere (L, \dagger) değişmeli bir gruptur.

L2. $\cdot: F \times L \rightarrow L$, $\cdot(a, x) = a \cdot x$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar:

i. $a \cdot (x \dagger y) = a \cdot x \dagger a \cdot y$

ii. $(a \dagger b) \cdot x = a \cdot x \dagger b \cdot x$

iii. $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$

iv. $1 \cdot x = x$ (Burada $1, F$ nin birim elemanıdır).

Tanım 2.16: X boş olmayan bir cümle olsun, $d: X \times X \rightarrow R$ fonk-

siyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa d ye X de metrik (veya uzaklık fonksiyonu) ve (X, d) çiftincede metrik uzay denir.

$$M1. d(x, y) \geq 0 \text{ ve } d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2. d(x, y) = d(y, x)$$

$$M3. d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Tanım 2.17: C, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $x, y, z \in C$ ve her $a \in F$ için vektörler arasında çarpma denilen $.(x \cdot y) \in C$ işlemi aşağıdaki şartları sağlıyorsa C ye (F üzerinde) cebir denir.

$$C1. a(x \cdot y) = (ax) \cdot y = x \cdot (ay)$$

$$C2. x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ ve } (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

$$C3. x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Çarpma işlemi birim elemanlı ise yani, her $x \in C$ için $e \cdot x = x \cdot e = x$ olacak şekilde bir $e \in C$ varsa C ye birim elemanlı cebir denir. Her $x, y \in C$ için $x \cdot y = y \cdot x$ ise C ye değişmeli cebir adı verilir. F nin \mathbb{C} olması halinde C ye kompleks cebir denir.

Tanım 2.18: Bir N Lineer uzayı verilsin. Şayet herbir $x \in N$ in normu denilen ve aşağıdaki şartları sağlayan bir $\|x\|$ reelsayı mevcutsa, N ye normlu Lineer uzay denir.

$$N1. \|x\| \geq 0 \text{ ve } \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ dir.}$$

$$N2. \|ax\| = |a| \cdot \|x\| \text{ dir } (a \in F).$$

$$N3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ dir.}$$

Tanım 2.19: A normlu Lineer uzay olsun. Norm metriğine göre A tam ise, A ya Banach uzayı denir.

Tanım 2.20: C birim elemanlı kompleks bir cebir olsun. C de bir norm tarif edilmişse C ye normlu kompleks cebir denir. Ayrıca bu norm metriğine göre C Banach uzayı ve

$$\|xy\| \leq \|x\| \|y\| \text{ ve } \|e\| = 1$$

ise C ye Banach cebiri denir. C nin e yi ihtiva eden kapalı altcümlesine C nin alt Banach cebiri denir. \mathbb{C} en basit Banach cebiri örneğidir. Burada norm her $z \in \mathbb{C}$ için $\|z\| = |z|$ ve metrik ise her $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ için $d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\| = |z_1 - z_2|$ dir.

Örnek 2.21: \mathbb{C} de $S = \{z : \|z\| \leq 1\}$ kapalı birim diskini düşünelim. $C(S, \mathbb{C}) = \{f : f : S \rightarrow \mathbb{C} \text{ sürekli}\}$ cümlesi

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ ve $(fg)(x) = f(x)g(x)$ işlemlerine ve

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in S\}$$

normuna göre birim elemanlı ve değişmeli bir Banach cebiri-
dir (1).



3. r YARIÇAPLI DAİRENİN BİRİM DAİREYE KONFORM TASVİRİ

3.1 Konform Tasvir

Teorem 3.1 (Maksimum prensibi): Farzedelim ki $f(z)$ G de analitiktir ve sabit değildir. Bu taktirde $f(z)$ nin $|f(z)|$ mutlak değeri G nin bir iç noktasında maksimum olamaz.

İspat: $f(z)$ nin G de aldığı değer $w_0 = f(z_0)$ ise $f(z), w_0$ -ın bir ε -civarına ait bütün değerleri alır. Şu halde $f(z)$ sabit değilse w_0 ın ε -civarında en az bir w_1 noktası vardır ve bu noktada $|w_1| > |w_0|$ dır (13),

Not 3.2: $f(z), G$ de analitik ve \bar{G} de sürekli ise $|f(z)|$ \bar{G} de süreklidir ve Weierstrass teoreminden dolayı \bar{G} nin en az bir noktasında maksimum değerini alır. Maksimum prensibinden $f(z), G$ de analitik olduğu için bu maksimum değerini ancak sınırda alabilir.

Lemma 3.3 (Schwarz Lemması): $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ve $f \in A(U)$ olsun. Ayrıca, $z \in U$ için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ şartları sağlansın. Bu taktirde $|f'(0)| \leq 1$ ve bütün $z \in U$ ler için $|f(z)| \leq |z|$ dir. Şayet $|f'(0)| = 1$ veya en az bir $z \neq 0$ için $|f(z)| = |z|$ ise $|c| = 1$ olacak şekilde bir c sabiti vardır, öyleki bütün $z \in U$ lar için $f(z) = cz$ dir.

İspat: $z \neq 0$ için $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ olacak şekilde $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunu tarif edelim. Bu halde $g(0) = f'(0)$ dır. Dolayısıyla $g \in A(U)$ dır. Maksimum prensibinden $0 < r < 1$ iken $|z| \leq r$ için $|g(z)| \leq r^{-1}$ olur. $r \rightarrow 1$ giderse bütün $z \in U$ lar için $|g(z)| \leq 1$ olur. Buradan da $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$ dir.

Şayet bazı $z \in U$ lar için $z \neq 0$ iken $|f(z)| = |z|$ veya $|f'(0)| = 1$ ise $|g(0)| = 1$ olacağından g maksimum değerini U nın içinde alır. Dolayısıyla g sabittir. Bu halde $|c| = 1$ şartıyla $g(z) = c$ ve $f(z) = c \cdot z$ elde edilir.

Teorem 3.4 (Schwarz Teoremi): $f(z), \bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ de analitik bir fonksiyon $f(0) = 0$ ve $|f(z)| \leq M$ olsun. Bu taktirde

$$|f(z)| \leq \frac{M}{r} \cdot |z|$$

dir.

İspat: $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ tarif edelim. Öyleki $z \neq 0$ için $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ olsun. Bu halde

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$$

dır. $f(0) = 0$ olduğundan $z = 0$ noktası $g(z)$ fonksiyonunun kaldırılabilir bir singüler noktadır. Yani $g(z) \in A(D)$ dir. Aynı zamanda $g(z)$ nin analitik bölgesi de $|z| \leq r$ dir. $|z| \leq r$ daire-sinde bir $z_0 \neq 0$ noktası ile $|z_0| < k < r$ eşitsizliklerini sağlayan k yarıçaplı daireyi gözönüne alalım.

$$|g(z_0)| \leq \max_{|z|=k} |g(z)| = \max_{|z|=k} \frac{|f(z)|}{z} = \frac{1}{k} \max_{|z|=k} |f(z)|$$

olup, k, z_0 a bağlı olmadığından istenildiği kadar r ye yakın alınabilir. $k \rightarrow r$ için $\max_{|z|=k} |f(z)|$ küçülmeyip sınırlı olduğundan limit alınırsa

$$|g(z_0)| \leq \lim_{k \rightarrow r} \frac{1}{k} \max_{|z|=k} |f(z)| = \frac{1}{r} \cdot M$$

elde edilir. z_0 keyfi olduğundan her iç nokta için

$$|g(z)| \leq \frac{M}{r}$$

olur. Böylece,

$$|f(z)| \leq \frac{M}{r} \cdot |z|$$

ve

$$|g(0)| = |f'(0)| \leq \frac{M}{r}$$

bulunur.

Şayet bazı $z \in \bar{D}$ ve $z \neq 0$ için $|f(z)| = \frac{M}{r}$. $|z|$ veya $|f'(0)| = \frac{M}{r}$ ise g maksimum değerini \bar{D} nin içinde alır. Maksimum prensibinden g sabit olmak zorundadır. Bu halde

$$g(z) = \frac{M}{r} \text{ olup } f(z) = \frac{M}{r} \cdot z$$

elde edilir.

Tanım 3.5: f, G bölgesinde tarifli ve tekdeğerli analitik bir fonksiyon olsun. $z_1, z_2 \in G$ ve $z_1 \neq z_2$ için $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna G de Schlicht (birebir) denir.

Teorem 3.6: Bir Schlicht fonksiyonun tersi de Schlichttir.

İspat: f Schlicht ise $z_1, z_2 \in G$ için $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ dir. Farzedelim ki f nin tersi g olsun ve g Schlicht olmasın.

Yani $g(f(z_1))=w_1$, $f(z_2)=w_2$ farklı noktalarını aynı noktaya tasvir eder. $g(w_1)=g(w_2)$ olacağından $(f \circ g)(w_1)=(f \circ g)(w_2)$ olup $w_1=w_2$ elde edilir. O halde bu tezat g ninde birebir olduğunu gösterir.

Teorem 3.6: $w=f(z)$, z_0 da analitik olsun. Bu taktirde $f(z)$ nin z_0 ın bir civarında topolojik olması için yani $f(z)$ nin z_0 ın bir civarında aldığı w - değerleri w_0 -ın bir civarını yalnız bir defa örtmesi için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (13).

Tanım 3.6': Tarif bölgesinin her noktasında açıları ve yönleri muhafaza eden topolojik transformasyonlara konform denir.

Teorem 3.7: G bir bölge ve $f \in A(G)$ olsun. Şayet her $z \in G$ için $f'(z_0) \neq 0$ ise f, G yi konform tasvir eder.

İspat: Farzedelim ki, f herhangi bir $z_0 \in G$ noktasının komşuluğunda analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ olsun. $z=z_0$ da α açısı altında kesişen diferensiyelenebilir $x_1=x_1(t), y_1=y_1(t)$ ve $x_2=x_2(t), y_2=y_2(t)$ yaylarını alalım. z de bu yayların denklemleri sırasıyla $z_1=z_1(t)$ ve $z_2=z_2(t)$ dir. Şayet bu eğriler üzerinde z_1 ve z_2 , z_0 dan r uzaklıkta olan noktalar ise

$$z_1 - z_0 = re^{i\theta_1}, \quad z_2 - z_0 = re^{i\theta_2}$$

dir. Dolayısıyla z_0 ı z_1 ve z_2 ye birleştiren doğru parçalarının teşkil ettiği açı $\theta_2 - \theta_1$ dir. Üstelik $r \rightarrow 0$ iken bu açı α ya gider. Dolayısıyla

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = e^{i(\theta_2 - \theta_1)} \quad \text{ve} \quad \alpha = \lim_{r \rightarrow 0} \arg \left\{ \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right\}$$

dır.

Şimdi w_1 ve w_2 , sırasıyla z_1 ve z_2 nin resimleri olsunlar. Bu taktirde yukardaki iki eğrinin resimleri $w_0 = f(z_0)$ noktasında

$$\beta = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \arg \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} \right\}$$

altında kesişirler. Buradan

$$\beta = \lim_{r \rightarrow 0} \arg \left\{ \frac{f(z_2) - f(z_0)}{f(z_1) - f(z_0)} \right\}$$

dır, $r \rightarrow 0$ için z_1 ve z_2 , z_0 a gider. Dolayısıyla

$$\beta = \lim_{r \rightarrow 0} \arg \left\{ \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right\} = \alpha$$

bulunur.

Lemma 3.8: G bir bölge ve $f \in A(G)$ sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu taktirde $f(G)$ de bir bölgedir (8).

Teorem 3.9: G sonlu düzlemde basit irtibatlı bir bölge ve $\alpha \in G$ keyfi bir nokta olsun. Bu taktirde G yi konform olarak $|w| < 1$ diski üzerine tasvir eden ve $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) > 0$ şartını sağlayan bir tek $w = f(z)$ fonksiyonu vardır.

İspat: Aksini düşünelim f_1, f_2 teoremin şartlarını sağlayan iki farklı fonksiyon olsun. Bu halde $i=1,2$ için $f(\alpha) = 0$ ve $f'(\alpha) > 0$ yazılır. Ayrıca $g = f_1 \circ f_2^{-1}$ olsun. $U = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ diyelim. g dönüşümü $g: U \rightarrow U$ olup

$$g(0) = f_1(f_2^{-1}(0)) = f_1(\alpha) = 0$$

$$g'(0) = f_1'(f_2^{-1}(0)) \cdot (f_2^{-1})'(0) = f_1'(\alpha) \cdot \frac{1}{f_2'(\alpha)} > 0$$

şartları sağlanır. g birim daireyi birim daireye dönüştürdüğünden $g^{-1}: U \rightarrow U$ dönüşümü de aynı şartlara sahiptir. $w = g(z)$ denirse $z = g^{-1}(w)$ olur. Schwarz Lemmasının g ye uygulanmasıyla $|g(z)| \leq |z|$ ve $|g^{-1}(w)| \leq |w|$ veya $|w| \leq |z|$, $|z| \leq |w|$ yazılır. Böylece, $|w| = |z|$ ya da $|g(z)| = |z|$ yazılabilir. $|g(z)| = |z|$ olduğundan $\theta \in \mathbb{R}$ için $g(z) = e^{i\theta} \cdot z$ dir. Fakat $g'(0) > 0$ olduğundan $g'(0) = e^{i\theta} > 0$ dir. Buradan $\theta = 0$ olması gerekir. $\theta = 0$ iken $e^{i\theta} = 1$ olduğundan $g(z) = z$ dir. Böylece

$$(f_1 \circ f_2^{-1})(z) = z \text{ ve } f_1(f_2^{-1}(z)) = z$$

olup buradan $f_1=f_2$ bulunur,

Tanım 3.10: Bir analitik fonksiyonun konjügesi tarafından tasvirine, şayet türev sıfır değilse, indirekt konform denir. Böyle bir tasvir açıları muhafaza eder fakat yönün işaretini değiştirir.

Teorem 3.11(Schwarz Akis prensibi): x -eksenine nazaran simetrik basit irtibatlı bir G bölgesini gözönüne alalım. Farzedelim ki $w=f(z)$ G de analitik ve G nin ihtiva ettiği Δ reel eksen parçası üzerinde reeldir. Bu taktirde $f(z)$ konjüge noktalarda konjüge değerler alır. Yani,

$$f(z)=\overline{f(\bar{z})}$$

dır.

İspat: $f(z)$, G de analitik olduğundan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

dir, $f(\bar{z})$ aynı denklemleri sağladığından G de analitiktir. Diğer taraftan Δ da $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ dir. Dolayısıyla bütün G de $f(z)=\overline{f(\bar{z})}$ olur.

Teorem 3.12 : $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ ve $\bar{U} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ olmak üzere $\alpha \in \bar{D}$ nin bir iç noktası yani $|\alpha| < r$ olsun. $w=f(z)$ dönüşümünün \bar{D} yi \bar{U} ya konform olarak tasvir etmesi için gerek ve yeter şart

$$w=f(z)=r \cdot \frac{z-\alpha}{r^2-\bar{\alpha}z}$$

olmasıdır.

İspat: Gerek şart: r yarıçaplı daireyi birim daireye dönüştüren tasvir bir Möbiüs dönüşümüdür. Şayet $|z| \leq r$, üzerine bir $w=f(z)$ tasviri vasıtasıyla $|w| \leq 1$ 'e tasvir ediliyorsa $|\alpha| < r$ olacak şekilde bir $\alpha \in \bar{D}$ noktası mevcuttur. Bu noktada $w=0$ dır. Möbiüs dönüşümü simetriyi muhafaza ettiğinden yani simetrik noktaları simetrik noktalara dönüştürdüğünden α -nın $|z|=r$ çemberine göre simetriği $r^2/\bar{\alpha}$ noktası $w=0$ ın

$|w|=1$ çemberine nazaran simetriği olan $w=\infty$ 'a dönüşür. Aranan dönüşüm

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

olsun. Bu halde,

$$w = \frac{a}{c} \cdot \frac{z + \frac{b}{a}}{z + \frac{d}{c}}$$

ve $-\frac{b}{a} = \alpha$, $-\frac{d}{c} = \frac{r^2}{\bar{\alpha}}$ denirse,

$$w = -\frac{a \cdot \bar{\alpha}}{c} \cdot \frac{z - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}z}$$

bulunur. Diğer yandan $z=r$, $|w|=1$ çemberi üzerinde bir noktaya tekabül edeceğinden

$$1 = \left| -\frac{a \cdot \bar{\alpha}}{c} \right| \left| \frac{r - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}r} \right| = \left| \frac{a \cdot \bar{\alpha}}{c} \right| \cdot \frac{1}{r}$$

dir. $|w|=1$ olması için $\left| \frac{\bar{\alpha} \cdot a}{c} \right| = r$ olmalıdır, Böylece, $|z| < r$ dairesini $|w| < 1$ dairesine konform tasvir eden dönüşüm

$$w = r \cdot \frac{z - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}z} \quad (3.12.1)$$

dır.

Yeter şart: (3.12.1) mobius dönüşümü verilsin. $z = re^{it}$ olsun. Bu taktirde,

$$|f(re^{it})| = |w| = \left| r \frac{re^{it} - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}re^{it}} \cdot e^{i\theta} \right| = |r| \cdot \frac{|re^{it} - \alpha|}{|re^{-it} - \bar{\alpha}|} \cdot \frac{1}{r} = 1$$

dır. $|z|=r$ çemberi üzerindeki bütün z noktaları için $|w|=1$ dir. $|z| < r$ için $|w| < 1$ olduğunu göstermeliyiz. α, D nin bir iç noktası yani, $|\alpha| < r$ olsun.

$$1 - |w|^2 = 1 - \left| \frac{r(z - \alpha)}{r^2 - \bar{\alpha}z} \right|^2 = 1 - r^2 \frac{(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha})}{(r^2 - \bar{\alpha}z)(r^2 - \alpha\bar{z})} = \frac{(r^2 - |z|^2)(r^2 - |\alpha|^2)}{|r^2 - \bar{\alpha}z|^2}$$

$|z| < r$ iken $r^2 - |z|^2 > 0$ ve $|\alpha| < r$ iken $r^2 - |\alpha|^2 > 0$ olduğundan $1 - |w|^2 > 0$ ve $|w|^2 < 1$ veya $|w| < 1$ bulunur.

Teorem 3.13: $\alpha, \bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ nin bir iç noktası yani $|\alpha| < r$ ve $0 \leq \theta < 2\pi$ olsun. \bar{D} kapalı r yarıçaplı daireyi $\bar{U} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ kapalı birim dairesine konform tasvir eden bütün dönüşümler

$$w = f(z) = r \cdot \frac{z - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}z} e^{i\theta} \quad (3.13.1)$$

şeklinde dir(8).

Tanım 3.14: Bir G bölgesinde analitik olan ve her $z \in G$ için $|f(z)| < M$ şartını sağlayan $M > 0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonuna bu bölgede sınırlıdır denir.

Teorem 3.15: $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ ve α, \bar{D} nin bir iç noktası yani, $|\alpha| < r$ olsun. $w = f(z)$ dönüşümünün \bar{D} yi \bar{D} ye konform olarak tasvir etmesi için gerek ve yeter şart, $0 \leq \theta < 2\pi$ olmak üzere

$$w = r^2 \cdot \frac{z - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}z} e^{i\theta}$$

olmasıdır.

Bu teorem ispatı teorem 3.12 nin ispatına benzer olduğundan verilmeyecektir.

3.2 Gayri Euclidyen (G.E) Geometri

Birim dairesini sabit bırakan mobiüs dönüşümlerinin grubu ile rijid düzlem hareketlerinin (kayma ve dönme) grubu arasında çok benzerlik vardır. Bu mukayesede doğruların rolünü, birim çembere dik çemberlerin birim dairesinin iç bölgesine ait kısımları oynar. İşte bunun içindir ki, bu çember parçalarına G.E doğrular denir. $|z| < 1$ dairesine G.E düzlem (hiperbolik düzlem) ve $|z| < 1$ i sabit bırakan mobiüs dönüşümlerinde G.E hareketler denir. Euclid düzleminde bir doğru üzerinde olmayan bir noktadan o doğruyu kesmeyen (o doğruya paralel) yalnız bir tek doğru geçer. G.E düzleminde bir G,E doğrusunun üzerinde olmayan bir noktadan bu

doğruyu kesmeyen sonsuz sayıda G.E doğrular geçer.

G.E hareketler, G.E doğruları aralarında değiştiren mobiüs dönüşümleri olduğundan kesişen iki G.E doğrunun arasındaki açıyı muhafaza ederler. Dolayısıyla Euclid açısı G.E açı olarak alınabilir. Diğer taraftan iki nokta arasındaki Euclid mesafesi G.E hareketlerinde değişir. Dolayısıyla G.E hareketlerine nazaran invariant kalan iki nokta arasında da bir G.E mesafe tarif etmek icap eder.

G,E düzlemde P ve Q gibi iki nokta gözönüne alalım. Bu noktalardan geçen Δ , G.E doğrusu birim çemberini S ve T noktalarında keser. Δ nin üzerinde S,P,Q,T sırasında olan P ve Q noktalarının G,E mesafelerini tarif etmek maksadıyla S,T,Q,P sırasında olan bu dört noktanın çifte oranını gözönüne alalım,

$$\lambda = (S,T,Q,P)$$

diyelim. λ , birim dairesini sabit bırakan mobiüs dönüşümlerine nazaran invariant kaldığından λ nin herhangi bir $\Psi(\lambda)$ fonksiyonu da invariantdir. Tanım olarak P nın Q ye olan mesafesini

$$D(P,Q) = \frac{1}{2} \log (S,T,Q,P) \quad (3.2.1)$$

olarak alacağız.

(3.2.1) ifadesini daha açık olarak yazalım. P ve Q nın koordinatlarına z_1 ve z_2 diyelim. z_1 i $w_1=0$ a dönüştüren mobiüs dönüşümü, $|k|=1$ için

$$w = k \cdot \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$$

dir. z_2 nin görüntüsü w_2 ise

$$D(z_1, z_2) = D(0, w_2)$$

yazılır. Burada

$$r = |w_2| = \left| \frac{z_2 - z_1}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|$$

olduğundan

$$D(0, w_2) = \frac{1}{2} \log (-1, 1, r, 0) = \frac{1}{2} \log \frac{1+r}{1-r}$$

dir(14).

Teorem 3.16 (Genelleştirilmiş Schwarz-Pick teoremi): $f(z)$ aşağıdaki şartları sağlayan analitik bir fonksiyon olsun;

- i. $|z| < r$ için $f(z)$ analitik,
- ii. $|z| < r$ için $|f(z)| < r$

dır. Bu taktirde,

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{r^2 - \overline{f(z_2)}f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \overline{z_2}z_1} \right| \quad (3.16.1)$$

olur.

Şayet f mobius dönüşümü ise (3.16.1) de eşitlik vardır.

İspat: $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ olmak üzere z_0 , \bar{D} nin bir iç noktası, $w_0 = f(z_0)$, z_0 a tekabül eden $|w| \leq r$ deki bir nokta olsun. Bu iki daireye,

$$t = r^2 \cdot \frac{z - z_0}{r^2 - \overline{z_0}z} \cdot e^{i\theta} \quad \text{ve} \quad h = e^{i\phi} \cdot r^2 \cdot \frac{w - w_0}{r^2 - \overline{w_0}w}$$

mobius dönüşümlerini tatbik ederek z_0 ve w_0 noktalarını 0 noktasına dönüştürmüş olalım. g fonksiyonunu $g = h \circ f \circ t^{-1}$ olarak tanımlayalım. $g(z)$, $|z| < r$ de analitik ve $|g(z)| < r$ olup $g(0) = h(f(t^{-1}(0))) = h(f(z_0)) = h(w_0) = 0$ olduğundan Schwarz teoreminin şartları sağlanır. Böylece, Schwarz teoremi kullanılarak $|g(t)| \leq |t|$ yazılır. G.E düzlemde bu eşitsizliğin anlamı

$$D(0, g(t)) \leq D(0, t)$$

dir. G.E düzlemde, G.E mesafeler mobius dönüşümüne nazaran invariant olduklarından t, h dönüşümleri gerisin geriye o düzlemlere tatbik edildikleri taktirde,

$$D(w_0, w) \leq D(z_0, z)$$

dir. z_0 keyfi z herhangi bir nokta olduğundan z_1 ve z_2 gibi herhangi iki nokta için

$$D(w_1, w_2) \leq D(z_1, z_2)$$

dır. Bu halde

$$|e^{i\phi} \cdot r^2 \cdot \frac{f(z_1) - f(z_2)}{r^2 - \overline{f(z_2)}f(z_1)}| \leq |e^{i\theta} \cdot r^2 \cdot \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \overline{z_2}z_1}|$$

veya buradan da

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{r^2 - \overline{f(z_2)}f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \overline{z_2}z_1} \right|$$

yazılır.

Şayet bir nokta çifti için $D(w_1, w_2) = D(z_1, z_2)$ ise, $w = f(z)$ r yarıçaplı daireyi sabit birakan bir mobius dönüşümünden ibarettir. $w = f(z)$ bir mobius dönüşümü değilse o zaman her nokta çifti için

$$D(w_1, w_2) < D(z_1, z_2)$$

olur.

Bu teoremin ifadesinde $r=1$ alınarak aşağıdaki Schwarz-Pick teoremi elde edilir.

Teorem 3.17 (Schwarz-Pick teoremi): $w = f(z)$, $|z| < 1$ için analitik ve $|z| < 1$ için $|f(z)| < 1$ şartlarını sağlasın. Bu halde $z_1, z_2 \in U$ için

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{1 - \overline{f(z_2)}f(z_1)} \right| \leq \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_2}z_1} \right|$$

dir.

İspat: Teorem 3.16 da $r=1$ alınırsa kolayca görülür.

4. SINIRLI ANALİTİK FONKSİYONLAR HALKASI

G , kompleks düzlemde bir bölge ve $A(G)$, G de tarifli tek değerli analitik fonksiyonların cümlesi olsun. $f, g \in A(G)$ olmak üzere

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z)$$

$$(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z) :$$

olarak tarif edilirse, $A(G)$ bu işlemlere göre bir halkadır. G de tarifli tek değerli analitik fonksiyonlar sınırlı ise bu halkayı $B(G)$ ile göstereceğiz.

Burada $B(G)$ halkası ile ilgili bazı teoremler verilecektir. Bu teoremler verilirken G bölgesinin sınırlı olduğu ve her $z \in \bar{G} - G$ (G nin sınırı) için z de kaldırılamaz singülerliğe sahip bir $f \in B(G)$ fonksiyonu mevcut olduğu kabul edilecektir.

Tanım 4.1: G ve G' iki bölge olsun. G yi konform olarak G' ye dönüştüren tek değerli analitik $z' = \psi(z)$ fonksiyonu varsa G ve G' bölgeleri konform olarak denktir denir ve $G \sim G'$ yazılır,

Tanım 4,2: $\phi: A(G) \rightarrow A(G')$ homomorfizm ve her $c \in \mathbb{C}$ için $\phi(c) = c$ oluyorsa ϕ homomorfizmine c -homomorfizmi denir. Şayet ϕ izomorfizm ise ϕ ye c -izomorfizmi denir.

Tanım 4,3: $f \in B(G)$ olsun. $s(f) = \{z \in G: f(z) = 0\}$ cümlesine f nin sıfır cümlesi denir.

G kompleks düzlemde herhangi bir bölge $B(G)$, G üzerinde analitik ve sınırlı olan bütün fonksiyonların halkası ve $a \in G$ keyfi fakat sabit olsun. a da sıfır olan bütün $f \in B(G)$ fonksiyonlarının cümlesini I_a ile gösterelim. Yani,

$$I_a = \{f \in B(G): f(a) = 0\}$$

dır.

Lemma 4.4: I_a , $B(G)$ nin $z-a$ tarafından gerilen bir maksimal idealidir,

İspat: Bir kere I_a , $B(G)$ nin bir idealidir. Çünkü $f, g \in I_a$ ise $(f-g)(a) = f(a) - g(a) = 0$ yani $f-g \in I_a$ ve $h \in B(G)$ için $(f \cdot h)(a) = f(a) \cdot h(a) = 0$ yani $f \cdot h \in I_a$ ($h \cdot f \in I_a$) dır.

I_a nın $B(\mathbb{C})$ de $z-a$ tarafından gerilen bir ideal olduğunu gösterelim, $z-a \in I_a$ dan $\langle z-a \rangle \subseteq I_a$ yazılır. $f \in I_a$ ise $f(a)=0$ olur. Bu ise $f(z)=(z-a) \cdot g(z)$ olacak şekilde $g \in B(G)$ olmasını gerektirir. Yani $f \in \langle z-a \rangle$ dir. Dolayısıyla $I_a \subseteq \langle z-a \rangle$ olup

$$I_a = \langle z-a \rangle$$

dir.

Şimdi de I_a nın $B(G)$ de maksimal olduğunu gösterelim. Bir an için I_a nın maksimal ideal olmadığını farzedelim. Bu durumda $I_a \subsetneq \langle g \rangle \subsetneq B(G)$ olacak şekilde $B(G)$ nin bir $\langle g \rangle$ has ideali vardır. O halde $\langle g \rangle$ aritmetik birim ihtiva etmez. Bu da en az bir $z \in G$ için $g(z)=0$ olmasını gerektirir. $I_a \subsetneq \langle g \rangle$ olduğundan $z-a \in \langle g \rangle$ dir. Dolayısıyla $z-a = g \cdot h$ olacak şekilde $h \in B(G)$ vardır. $z-a$ nın G de a dan başka sıfırı olmadığından $g(a)=0$ olmalıdır. Buradan da $g \in \langle z-a \rangle$ olduğu anlaşılır. Yani $\langle g \rangle \subsetneq \langle z-a \rangle$ dir. $\langle z-a \rangle \subsetneq \langle g \rangle$ kabulü hatırlanırsa $\langle g \rangle = \langle z-a \rangle = I_a$ olup I_a , $B(G)$ nin maksimal idealidir.

Lemma 4.5: $B(G)$ bir tamlık bölgesidir.

İspat: $(fg)(z)=f(z) \cdot g(z)$ dir. $f(z) \cdot g(z)=0$ olması için ya $f(z)=0$ ya da $g(z)=0$ olması gerektiğinden $B(G)$ sıfır bölensizdir. O halde $B(G)$ tamlık bölgesidir.

Tanım 4.6: ψ, G üzerinde bir dönüşüm olsun. ψ nin eşleniğini $\bar{\psi}$ ile gösterelim. $\bar{\psi}$ konform bir dönüşüm ise ψ -ye anti-konform dönüşüm denir. $\psi: G_1 \rightarrow G_2$ anti-konform bir dönüşüm ise G_1 ve G_2 anti-konform denktir denir.

Lemma 4.7: $B(G)/I_a$ bölüm halkası \mathbb{C} kompleks sayılar cismine izomorftur(7).

Teorem 4.8: Her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $\phi(\alpha)=\alpha$ olacak şekilde $\phi: B(G) \rightarrow B(G')$ ye bir halka izomorfizmi ve $\phi(f)=g$ olsun. Bu taktirde her $z' \in G'$ için $g(z')=f\{\psi^{-1}(z')\}$ olacak şekilde $\psi: G \rightarrow G'$ ($z'=\psi(z)$) birebir konform dönüşümü vardır.

İspat: $\phi: B(G) \rightarrow B(G')$ ye $\phi(\alpha)=\alpha$ olacak şekilde bir halka izomorfizmi olduğundan $B(G)$ nin I_a maksimal idealine $B(G')$ nin I_{α} maksimal ideali tekabül eder. Eğer $\alpha'=\psi(\alpha)$ dersek, bu taktirde, $z'=\psi(z)$, G den G' üzerine birebir dönüşüm tarif eder. $z'=\psi(z)$ nin G den G' üzerine

ne bir konform dönüşüm olduğunu ispatlamak için G' üzerinde ki $g_0 \in B(G_2)$ fonksiyonunu $g_0(z) = z$ olarak tarif edelim ϕ izomorfizmi vasıtasıyla G üzerinde g_0 a tekabül eden fonksiyon $f_0 = \phi^{-1}(g_0) \in B(G)$ olsun. Bu taktirde her $\alpha \in G$ için $f_0(z) - f_0(\alpha) \in I_\alpha$ ve

$$\begin{aligned} \phi(f_0(z) - f_0(\alpha)) &= \phi(f_0(z)) - \phi(f_0(\alpha)) \\ &= g_0(z) - f_0(\alpha) \\ &= z - f_0(\alpha) \end{aligned}$$

dır. Buradan $z - f_0(\alpha) \in I_\alpha$ ve $z - f_0(\alpha) \in I_{\psi(\alpha)}$ dır. Böylece $\psi(\alpha) = f_0(\alpha)$ dır. Sonuç olarak $z' = \psi(z)$ G den G' üzerine bir konform dönüşümdür.

Teorem 4,9: G_1 ve G_2 kompleks düzlemde herhangi iki bölge ve $A(G_1)$ ve $A(G_2)$ bu bölgeler üzerindeki tek değerli analitik fonksiyonların halkası olsun. Bu taktirde $G_1 \sim G_2$ olması için gerek ve yeter şart $A(G_1) \cong A(G_2)$ olmasıdır.

Bu teoremin ispatı (7) ve (11) de verilmiştir.

Tanım 4,10: $a \in \mathbb{C}$ olmak üzere $(af)(z) = af(z)$ olarak tarif edilen skalerle çarpma işlemi için $a, b \in \mathbb{C}$ ve $f, g \in B(G)$ olduğunda

- i, $a(bf) = (ab)f$
- ii. $a(f+g) = af+ag$
- iii. $(a+b)f = af+bf$
- IV. $a(fg) = (af)g = f(ag)$
- V. $1x = x$

şartları sağlandığından $B(G)$ aynı zamanda bir cebirdir. $B(G)$ de bir $f \in B(G)$ fonksiyonu için norm

$$\|f\| = \sup_{z \in G} \{|f(z)|\}$$

şeklinde tarif edilir. Bu şekilde tarif edilen $\| \cdot \|$ fonksiyonu, $f, g \in B(G)$ için

$$\|fg\| \leq \|f\| \|g\|$$

eşitsizliğini sağladığından $B(G)$ aynı zamanda normlu kompleks cebirdir.

$B(G)$ deki metrik, her $f, g \in B(G)$ için

$$d(f, g) = \|f - g\|$$

olarak tarif edilen norm metriğidir. $B(G)$ bu metriğe göre bir Banach uzayı olup, $B(G)$ aynı zamanda Banach cebiridir.

Tanım.4.11: A kompleks bir Banach cebiri ve e , A nın birim elemanı olsun. $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e, \text{ nın } A \text{ da tersi yoktur}\}$ cümlesine $x \in A$ nın spektrumu denir.

Teorem 4.12: A da tersi alınabilir elemanların cümlesi G olsun, Eğer $x \in A$ ve $\|x\| < 1$ ise $e + x \in G$ dir. Ayrıca

$$(e+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \text{ ve } \|(e+x)^{-1} - e\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$$

dır(10).

Teorem 4.13: Her $x \in A$ için, $\sigma(x)$ boş değildir.

İspat: $x \in A$ yı ve $\lambda_0 \notin \sigma(x)$ i sabit alalım. Bu taktirde $(x - \lambda_0 e)^{-1} \neq 0$ dir. Hahn Banach teoremi $f(\lambda_0) \neq 0$ olacak şekilde A üzerinde bir sınırlı lineer ϕ fonksiyonelinin varlığını gerektirir. Burada $f(\lambda) = \phi\{(x - \lambda e)^{-1}\}$ ve $\lambda \notin \sigma(x)$ dir. Şayet $\sigma(x)$ boş ise, f, ∞ da 0 değerini alan bir tam fonksiyondur. Böylece Liouville teoreminden dolayı her λ için $f(\lambda) = 0$ olur. Bu ise $f(\lambda_0) \neq 0$ a tezattır. Dolayısıyla $\sigma(x)$ boş değildir (10).

Lemma 4.14: Her $x \in A$ için $\sigma(x)$ kompakttır.

İspat: $\lambda \in \sigma(x)$ ise $x - \lambda e \notin G$ dir. Üstelik G bir açık cümle olduğundan tümleyeni A nın kapalı bir altcümlesidir. Dolayısıyla $\{x - \lambda e\}$ kapalıdır. $\lambda \rightarrow x - \lambda e$ tasviri kompleks düzlemin A içine bir sürekli tasviri olduğundan $\sigma(x)$ kapalıdır(10).

Tanım 4.15: Herhangi $x \in A$ için, x in $\rho(x)$ spektral yarıçapı $\sigma(x)$ i ihtiva eden merkezi başlangıçta en küçük kapalı dairenin yarıçapına denir, Bazen spektral yarıçapa x in normu da denir. Yani

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$$

dir,

Teorem 4.16 (Spektral Yarıçap Formülü): Her $x \in A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{1/n} = \rho(x)$$

dir(10).

Not 4.17: Banach cebirleri ile analitik fonksiyonlar arasında çok yakın ilgi vardır. Meselâ, $\sigma(x)$ in boş olmadığını ispat ederken, tam fonksiyonlarla ilgili olan Liouville teoremini kullandık. Spektral yarıçap formülü de kuvvet serileri hakkındaki teoremlerden elde edilir.

A nın bir elemanının A da tersi alınabilir olması veya olmaması sırf cebirsel bir özelliktir. Böylece x in spektrumu veya $\rho(x)$ spektral yarıçap teoreminin ifadesinde dikkati çeken husus, tamamen farklı yollarla elde edilen iki sayının eşit olmasıdır(10),

5. r-YARIÇAPLI DAİRENİN BİRİM DAİREYE KONFORM TASVİRİNİN VE SCHWARZ-PICK TEOREMİNİN CEBİRSEL KARAKTERİZASYONU

$\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ kompleks düzlemde kapalı bir daire ve $B(\bar{D})$, \bar{D} de tarifli bütün sınırlı analitik fonksiyonların cümlesi olsun. $B(\bar{D})$, fonksiyonların bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre değişmeli ve birim elemanlı bir halka (cebir) dir. Şimdi bu $B(\bar{D})$ cebiri ile izomorf bir R cebiri alalım. $B(\bar{D})$ den R ye olan izomorfizm ϕ olsun. $B(\bar{D})$ nin elemanlarını f, g, h, \dots ile, R nin elemanlarını ise a, b, c, \dots ile gösterelim. 1 , $B(\bar{D})$ nin, e ise R nin birim elemanı olsun. $\phi: B(\bar{D}) \rightarrow R$ bir izomorfizm olduğundan $\phi(1) = e$ dir. Üstelik her n tamsayısı için $\phi(n1) = ne$ dir. Dolayısıyla $\phi(\pm \frac{m}{n}) = \pm (\frac{m}{n})e$ dir. $\phi(-1) = -e$ dir. Bu $-e$ nin R de iki karekökü vardır. Bunlardan biri $i.1$ in ϕ altındaki resmi, diğeri ise $-i.1$ in ϕ altındaki resmidir. Cebirsel olarak bunları aynı farzedebiliriz. Çünkü bunların birini diğere dönüştüren R nin bir otomorfizmi vardır. Dolayısıyla $-e$ nin karekökü olarak $i.1$ in resmi olan $i.e$ yi alabiliriz (4). \mathbb{C} kompleks sayılar cismi ve \mathbb{C}_r kompleks rasyonel sayılar cismi (yani \mathbb{C}_r deki her kompleks sayı reel ve imajiner kısımları rasyonel sayı olan kompleks sayı) ise \mathbb{C} ve \mathbb{C}_r , $A(D)$ nin althalkasıdır(3).

Lemma 5.1: Her $a \in \mathbb{C}_r$ için $\phi(a) = a$ (veya $\phi(a) = \bar{a}$) dir.

İspat: \mathbb{C}_r , 1 ve i tarafından gerildiği için $a = r_1 + ir_2$ olacak şekilde r_1, r_2 rasyonel sayıları vardır.

$\phi(1) = e$ ve $\phi(i) = i$ (veya $\phi(i) = \bar{i} = -i$) olduğundan $\phi((r_1 + ir_2).1) = r_1e + r_2i.e$ (veya $\phi((r_1 + ir_2).1) = r_1e - r_2ie$) dir.

Lemma 5.2: Her c reel sayısı için $\phi(c1) = ce$ dir.

İspat: c rasyonel sayı ise lemma 5.1 den dolayı $\phi(c1) = ce$ dir. Şayet c irrasyonel sayı ise her r rasyoneli için $c-r \neq 0$ dir. Dolayısıyla $(c-r)^{-1} = \frac{1}{c-r}$ mevcuttur. Bu taktirde $\phi((c-r).1) = \phi(c1) - re$ ve $\phi(\frac{1}{c-r}.1) = \frac{e}{\phi(c1) - re}$ dir. O halde $\phi(c1)$ de bir irrasyonel sayı ve dolayısıyla $\phi(c1) = ce$ dir (5).

Netice 5.3: $c \in \mathbb{C}$ ise $\phi(c1) = ce$ dir.

Lemma 5.4: $f \in B(\bar{D})$ ve f nin kapalı değer bölgesi \bar{R}_f olsun. Bu taktirde $\lambda \in \bar{R}_f$ olması için gerek ve yeter şart $f - \lambda 1$ nin $B(\bar{D})$ de aritmetik birim olmamasıdır.

İspat: $\lambda \in \bar{R}_f$ ise $f(z_0) = \lambda$ olacak şekilde bir $z_0 \in \bar{D}$ vardır. Dolayısıyla $(f - \lambda 1)(z_0) = 0$ dır. O halde $f - \lambda 1$, $B(\bar{D})$ de aritmetik birim değildir.

Tersine $f - \lambda 1$, $B(\bar{D})$ de aritmetik birim olmasın. Bu taktirde en az bir $z_0 \in \bar{D}$ için $(f - \lambda 1)(z_0) = 0$ dır. Buradan $f(z_0) = \lambda$ yani $\lambda \in \bar{R}_f$ elde edilir.

Lemma 5.5: $\lambda \in \bar{R}_f$ olması için gerek ve yeter şart $\phi(f) - \lambda e$ nin R de aritmetik birim olmamasıdır.

İspat: Lemma 5.4 den $\lambda \in \bar{R}_f$ iken $f - \lambda 1$, $B(\bar{D})$ de aritmetik birim değildir. ϕ bir izomorfizm olduğundan $\phi(f - \lambda 1) = \phi(f) - \lambda e$, R de aritmetik birim değildir.

Tanım 5.6: $f \in B(\bar{D})$ olsun.

$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : f - \lambda 1, B(\bar{D}) \text{ de aritmetik birim değildir.}\}$
cümlesine f nin spektrumu denir.

Tanım 5.7: $a \in R$ olsun.

$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda e, R \text{ de aritmetik birim değildir.}\}$
cümlesine a nın spektrumu denir.

Tanım 5.8: $a \in R$ olsun.

$$\rho(a) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

değerine a 'nın spectral yarıçapı denir. O halde $\rho(a) = MM(\phi^{-1}(a))$ dır. (MM: Maksimum modül).

Aşağıdaki teoremlerde geçen cebirlerin her biri kompleks cebir olarak düşünülecektir.

Bu girişten sonra cebirsel karakterizasyonla ilgili ilk teoremimizi verebiliriz.

Teorem 5.9 (Schwarz's teoreminin cebirsel karakterizasyonu):

R keyfi bir cebir, $a, b, c \in R$ ve $\phi : B(\bar{D}) \rightarrow R$ sabitleri koruyan bir izomorfizm olsun. Şayet $\phi^{-1}(b) = z$ ise $\rho(a) = M$ cebirsel olarak Schwarz's teoremini karakterize eder.

İspat: $\phi^{-1}(c) = \psi(z)$, $b, c \in \mathbb{R}$ ve $a = b, c$ olsun. Buradan $z \neq 0$ için

$$\psi(z) = \frac{f(z)}{z}$$

dir. ($f(z) = \phi^{-1}(a)$ dir.) $f(0) = 0$ olduğundan $z=0$, $\psi(z)$ fonksiyonu için kaldırılabilir bir singüler noktadır. Maksimum prensibinden dolayı aynı merkezli $k < r$ yarıçaplı dairelerde

$$|\psi(z)| \leq \frac{M}{k}$$

dir. Çünkü $\rho(a) = MM(\phi^{-1}(a)) = M$ dir. Son eşitsizlikte $k \rightarrow r$ yapılırsa $|\psi(z)| \leq \frac{M}{r}$ yani $|f(z)| \leq \frac{M}{r} \cdot |z|$ elde edilir.

Teorem 5.9'ın bir neticesi olarak $M=1$ ve $r=1$ alınır. Schwarz Lemmasının bir cebirsel karakterizasyonu elde edilir. Bu karakterizasyon aşağıda verilmiştir.

Netice 5.10 (Schwarz lemmasının cebirsel karakterizasyonu): \mathbb{R} keyfi bir cebir, $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $\phi: B(\bar{U}) \rightarrow \mathbb{R}$ sabitleri koruyan bir izomorfizm olsun. Şayet $\phi^{-1}(b) = z$ ise $\rho(a) = 1$ cebirsel olarak Schwarz lemmasını karakterize eder.

Bu neticenin ispatı yukarıdaki ispatta $M=1$ ve $r=1$ alınarak kolayca bulunur.

Teorem 4.9'ın diğer bir neticesi şudur: $z=0$ 'ı $w=0$ a tekabül edecek şekilde $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ r yarıçaplı dairenin $\bar{U} = \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\}$ birim daire üzerine konform tasviri $z=0$ noktası etrafında dönmelerden ve kısaltmadan oluşur. Bununla ilgili karakterizasyon aşağıda verilmiştir.

Netice 5.11: $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ r yarıçaplı daire, $B(\bar{D}), \bar{D}$ de sınırlı analitik fonksiyonlar cebiri ve $f \in B(\bar{D})$ olsun. Ayrıca $f \in B(\bar{D})$ Schlicht fonksiyonu için $f(0) = 0$ ve $MM(f) = 1$ olsun.

Bu taktirde,

$$f(z) = \frac{1}{r} \cdot e^{i\theta} \cdot z$$

dir.

İspat: $w = f(z)$ Schlicht olduğundan $z = f^{-1}(w) \in B(\bar{U})$ dir.

Schwarz's teoreminden dolayı

$$|f(z)| \leq \frac{M}{r} \cdot |z|$$

dir. f nin \bar{D} yi \bar{U} birim diskine dönüştürdüğü gözönüne alınırsa $M=1$ için

$$|f(z)| \leq \frac{1}{r} \cdot |z| \text{ veya } r \cdot |w| \leq |z| \quad (5.11.1)$$

bulunur.

Tersine $z=f^{-1}(w)$ dönüşümü kapalı birim çemberi \bar{D} ye dönüştürdüğünden $M=r$ ve $r=1$ olup

$$|f^{-1}(w)| \leq \frac{r}{1} \cdot |w| \text{ ve } |z| \leq r|w| \quad (5.11.2)$$

dır. (5.11.1) ve (5.11.2) birlikte düşünülürse

$$r \cdot |w| \leq |z| \text{ veya } \left| \frac{w}{z} \right| \leq \frac{1}{r}$$

olur. Buradan anlaşılırki

$$f(z) = \frac{1}{r} \cdot e^{i\theta} \cdot z$$

dir.

Bu dönüşüm $z=0$ 'ı, $w=0$ 'a tekabül ettirecek şekilde \bar{D} yi kapalı birim diske konform tasvir eden bir dönüşümdür.

Çalışmamızın burasında Teorem 5.13. de α, \bar{D} nin bir iç noktası olmak üzere $\alpha \in \bar{D}$ noktasını $w=0$ noktasına tekabül ettirecek şekilde \bar{D} yi \bar{U} birim diskine konform tasvir eden dönüşümün karakterizasyonunu vereceğiz. Önce karakterizasyonda kullanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 5.12: $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, r yarıçaplı kapalı daire, $B(\bar{D})$ \bar{D} de sınırlı analitik fonksiyonların cebiri olmak üzere $f \in B(\bar{D})$ aşağıdaki şartları sağlasın:

- i. $\alpha \in \bar{D}$ olmak üzere $f(\alpha) = 0$ dır.
- ii. $MM(f) = 1$ dir.
- iii. f schlichttir.

Bu takdirde $|\lambda| = r$ olmak üzere

$$f(z) = \lambda \cdot \frac{z - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}z} \quad (5.12.1)$$

dir.

İspat: α da sıfır olan $B(\bar{D})$ ye ait fonksiyonların cümlesi I_α olsun. I_α cümlesi $B(\bar{D})$ nin bir maksimal idealini teşkil eder. Bu maksimal ideal $h(z) = z - \alpha$ tarafından gerilir. Yani,

$I_\alpha = \langle z-\alpha \rangle$ dır. Aradığımız fonksiyon I_α da olacaktır. Schlicht, Maksimum modülü 1 ve I_α da olan fonksiyonları araştırmalıyız. Göstermeliyiz ki aranan fonksiyonlar (5.12.1) tipindedir.

$\alpha=0$ ise netice 5.11 den $|\lambda|=r$ olmak üzere $f(z)=\lambda \cdot \frac{z}{r^2}$

istenilen schlicht fonksiyondur.

$\alpha \neq 0$ olsun. $\alpha \in \bar{D}$ iken her $z \in \bar{D}$ için $MM(z-\alpha) \neq 1$ dir. Dolayısıyla $f(z) \neq z-\alpha$ dır. $f(\alpha)=0$ ve $MM(f)=1$ olduğundan $f(z)=(z-\alpha) \cdot g(z)$ ifadesindeki $g(z)$ fonksiyonu $g(z)=\frac{\lambda}{r^2-\bar{\alpha}z}$ olmak zorunda dır. ($|\lambda|=r$ dir). f schlicht, $f(\alpha)=0$ ve $MM(f)=1$ olduğundan $|\lambda|=r$ olmak üzere aradığımız f fonksiyonu

$$f(z)=\lambda \cdot \frac{z-\alpha}{r^2-\bar{\alpha}z}$$

dır. Üstelik Teorem 3.13 den dolayı $f(\alpha)=0$, f schlicht ve $MM(f)=1$ olan fonksiyonlar $|\lambda|=r$ olmak üzere 5.12.1 tipindedir.

Teorem 5.13: $\bar{D}=\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$, $B(\bar{D})$, \bar{D} de sınırlı analitik fonksiyonların cebiri, $R, B(\bar{D})$ ye izomorf herhangi bir cebir ve $\phi, B(\bar{D})$ den R üzerine sabitleri koruyan bir izomorfizm olsun. Üstelik farzedelim ki $a \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanmaktadır:

- i. Her bir $\lambda_0 \in \sigma(a) = \bar{U}$ için bir tek z_0 mevcuttur ($|z_0| \leq r$).
- ii. $b \in R$ olmak üzere her $a \in \mathbb{C}$ için $\langle b-\alpha \rangle$, R nin bir maksimal ideali, $\phi^{-1}(b)=z$ ve $a \in \langle b-\alpha \rangle$ dir.
- iii. $\rho(a)=MM(\phi^{-1}(a))=1$ dir.

Bu taktirde $\phi^{-1}(a)$, \bar{D} yi \bar{U} birim dairesine konform tasvir eder ve

$$\phi^{-1}(a)=\lambda \cdot \frac{z-\alpha}{r^2-\bar{\alpha}z}$$

şeklindedir.

İspat: $a \in \langle b-\alpha \rangle$ olduğundan $(b-\alpha) \cdot c=a$ olacak şekilde en az bir $c \in R$ vardır. ϕ izomorfizm olduğu için $\phi^{-1}(a)=\phi^{-1}(b-\alpha) \cdot \phi^{-1}(c)$ ve $\phi^{-1}(a)=\{\phi^{-1}(b)-\phi^{-1}(\alpha)\} \cdot \phi^{-1}(c)$ yazılabilir. Buradan

$$\phi^{-1}(a)=(z-\alpha)\phi^{-1}(c)$$

bulunur, Lemma 5.12 den dolayı $MM(\phi^{-1}(a))=1$ olması için

$$\phi^{-1}(c) = \frac{\lambda}{r^2 - \bar{\alpha}z}$$

olmak zorundadır. Açıkça $\phi^{-1}(c) \in B(\bar{D})$ dir, Bu eşitlikten

$$c = \frac{\phi(\lambda)}{\phi(r^2) - \phi(\bar{\alpha}z)} = \frac{\lambda e}{rere - \bar{\alpha}ebe}$$

ve $c \in \mathbb{R}$ dir. Diğer yandan $a = (b - \alpha e)c$ eşitliğinden $a = (b - \alpha e) \cdot \frac{\lambda e}{r^2 e - \bar{\alpha}ebe} \in (b - \alpha e)$ dir. Buradan

$$\phi^{-1}(a) = \lambda \frac{z - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}z}$$

bulunur. İyi bilindiği gibi bu dönüşüm \bar{D} yi \bar{U} ya konform olarak tasvir eden dönüşümdür. Aynı zamanda bu $\phi^{-1}(a)$ dönüşümü tektir. Çünkü $\lambda_0 \in \sigma(a)$ olduğundan $\lambda_0 \in \bar{R}_{\phi^{-1}(a)}$ dir. Lemma 5.4 ve i) den $\bar{R}_{\phi^{-1}(a)}$ daki her değere bir tek z_i tekabül ettiğinden $\phi^{-1}(a) \in B(\bar{D})$ birebirdir. ϕ izomorfizm ve $\langle b - \alpha e \rangle$, R nin bir maksimal ideali olduğu için $\phi^{-1}(b - \alpha e)$ de $B(\bar{D})$ nin bir maksimal idealidir. Bu maksimal ideal $\phi^{-1}(b - \alpha e) = \phi^{-1}(b) - \phi^{-1}(\alpha e) = z - \alpha$ tarafından gerilir. Dolayısıyla ii) den $\phi^{-1}(a) \in \langle z - \alpha \rangle$ dir. $\phi^{-1}(a)$ schlicht ve $\langle z - \alpha \rangle$ idealinde bulunan bir fonksiyondur. Bu idealde bulunan schlicht ve maksimum modülü 1 olan fonksiyonlar lemma 5.12 den dolayı

$$\phi^{-1}(a) = \lambda \cdot \frac{z - \alpha}{r^2 - \bar{\alpha}z}$$

şeklindedir.

Netice 5.14: $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ birim daire, $B(\bar{U})$, \bar{U} da sınırlı analitik fonksiyonların cebiri, R , $B(\bar{U})$ ya izomorf herhangi bir cebir ve ϕ , $B(\bar{U})$ dan R üzerine sabitleri koruyan bir izomorfizm olsun. Ayrıca kabul edelimki $a \in R$ için aşağıdaki şartlar sağlanır:

- i. Her $\lambda_0 \in \sigma(a) = \bar{U}$ için bir tek $z_0 \in \bar{U}$ vardır ($|z_0| \leq 1$).
- ii. $b \in R$ olmak üzere her $\alpha \in \mathbb{C}$ için $(b - \alpha e)$ R nin bir maksimal ideli, $\phi^{-1}(b) = z$ ve $a \in (b - \alpha e)$ dir.

iii. $\rho(a) = \text{MM}(\phi^{-1}(a)) = r$ dir.

Bu taktirde $\phi^{-1}(a)$ birim daireyi kendi üzerine konform tasvir eder ve

$$\phi^{-1}(a) = \lambda, \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \quad (|\lambda|=1)$$

dir.

Netice 5.14, teorem 5.13 in $r=1$ özel hali olduğu açıktır. Yani, teorem 5.13 de $r=1$ alındığında netice 5.14 in ifade ve ispatı kolayca yapılabilir. Şimdi genelleştirilmiş Schwarz Pick teoreminin cebirsel karakterizasyonunu verelim.

Teorem 5.15: $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}, B(\bar{D}), \bar{D}$ de sınırlı analitik fonksiyonların cebiri, $R, B(\bar{D})$ ye izomorf herhangi bir cebir $\phi : B(\bar{D}) \rightarrow R$ sabitleri koruyan bir izomorfizm olsun. Ayrıca her bir $z \in \bar{D}$ için bir tek $\lambda \in \sigma(a) = \bar{D}$ olduğunu kabul edelim. Öte yandan $|z_1| < r, |z_2| < r$ ve $\rho(a) = r$ olmak üzere $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(a)$ için

$$\phi^{-1}(a)(z_1) = \lambda_1, \phi^{-1}(a)(z_2) = \lambda_2$$

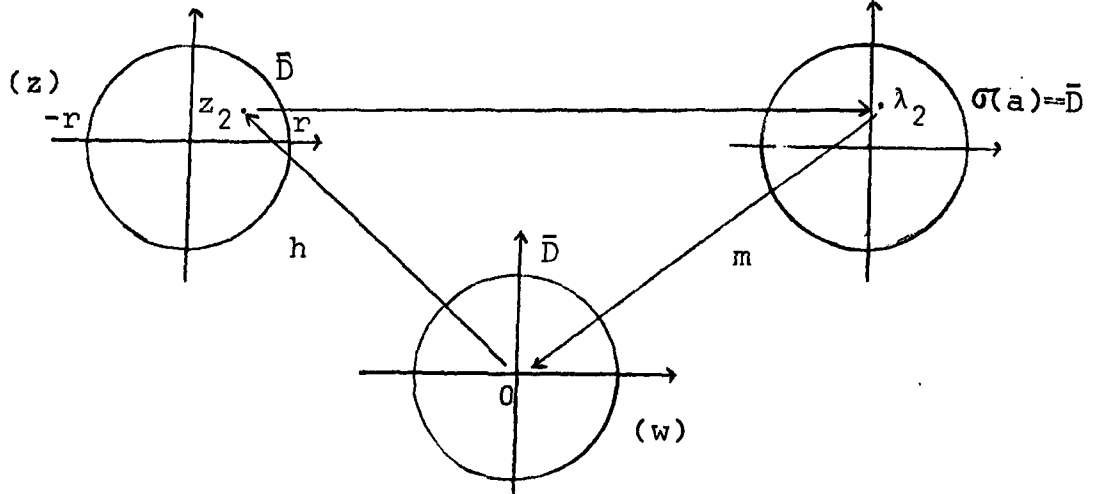
olsun. Bu taktirde

$$\left(r^2 \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 e}}{r^2 - \bar{\lambda}_2 e \lambda_1 e} \right) \leq \rho \left(r^2 \frac{z_1 e^{-z_2 e}}{r^2 - \bar{z}_2 e z_1 e} \right)$$

dır.

İspat: $|z_2| < r$ yi sabit alalım. Eğer $|\lambda_2| = r$ ise $\lambda_2 \in \bar{R}_{\phi^{-1}(a)}$ olduğundan maksimum prensibinden $\phi^{-1}(a) = f$ sabittir. Dolayısıyla iddia aşıkardır.

Şimdi $|\lambda_2| < r$ olduğunu kabul edelim. R keyfi bir cebir ve $b, c, d \in R$ için $d = b \cdot c$ olsun. $\phi^{-1}(b) = z$ ise $\rho(a) = r$ Schwarz's Teoremini karakterize eder. Bu durumda $\phi^{-1}(d) = g$ denirse $g(0) = 0$ ve $\text{MM}(g) = r$ şartlarını sağlayan $g \in B(\bar{D})$ fonksiyonu vardır. $|z_2| < r, |\lambda_2| < r$ iken,



Şekil 5.1

$$h = r^2 \cdot \frac{z + z_2}{r^2 + \bar{z}_2 z}, \quad m = r^2 \cdot \frac{z - \lambda_2}{r^2 - \bar{\lambda}_2 z}$$

olmak üzere g fonksiyonu, yukarıda tanımlı m ve h ile gösterdiğimiz iki mobius dönüşümünün f ile lineer terkibi olarak yazabiliriz (Şekil 5.1). Gerçekten $f = \phi^{-1}(a)$ olmak üzere $g = m \circ f \circ h$ olsun. $|z_2| < r$ olduğundan $h, m \in B(\bar{D})$ olup $g: \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ dir. Üstelik

$$\begin{aligned} g(0) &= m(f(h(0))) \\ &= m(f(z_2)) \\ &= m(\lambda_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olup g fonksiyonu Schwarz'ın teoreminin şartlarını sağlar. Dolayısıyla $w \in \bar{D}$ için

$$|g(w)| \leq |w|$$

dir. Bu eşitsizlikten

$$\left| m\left(f\left(r^2 \frac{w + z_2}{r^2 + \bar{z}_2 w}\right)\right) \right| \leq |w|$$

ve

$$w = r^2 \cdot \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \bar{z}_2 z_1}$$

alınırsa,

$$\left| m\left(f\left(r^2, \frac{r^2 \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \bar{z}_2 z_1} + z_2}{r^2 + \bar{z}_2 r^2 \cdot \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \bar{z}_2 z_1}}\right)\right) \right| \leq \left| r^2, \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \bar{z}_2 z_1} \right|$$

$$\Rightarrow \left| m\left(f\left(r^2, \frac{r^2 z_1 - r^2 z_2 + r^2 z_2 - z_2 \bar{z}_2 z_1}{r^4 - r^2 \bar{z}_2 z_1 + r^2 \bar{z}_2 z_1 - r^2 z_2 \bar{z}_2}\right)\right) \right| \leq \left| r^2, \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \bar{z}_2 z_1} \right|$$

$$\Rightarrow \left| m\left(f\left(r^2, \frac{(r^2 - z_2 \bar{z}_2) z_1}{r^2 (r^2 - z_2 \bar{z}_2)}\right)\right) \right| \leq \left| r^2, \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \bar{z}_2 z_1} \right|$$

$$\Rightarrow \left| m(f(z_1)) \right| \leq \left| r^2, \frac{z_1 - z_2}{r^2 - \bar{z}_2 z_1} \right|$$

olur. Böylece

$$\left| r^2 e, \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 e}}{r^2 e - \bar{\lambda}_2 e \lambda_1 e} \right| \leq \left| r^2 e, \frac{z_1 e^{-z_2 e}}{r^2 e - \bar{z}_2 e z_1 e} \right|$$

dır. Bu son eşitsizlikten

$$\left(r^2 e, \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 e}}{r^2 e - \bar{\lambda}_2 e \lambda_1 e} \right) \leq \rho \left(r^2 e, \frac{z_1 e^{-z_2 e}}{r^2 e - \bar{z}_2 e z_1 e} \right)$$

dır.

Teorem 5.15 de özel olarak $r=1$ alınması halinde Schwarz-Pick teoreminin cebirsel ifadesi elde edilir.

Netice 5.16: $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ ve $B(\bar{U})$, \bar{U} da sınırlı analitik fonksiyonların cebiri, $R, B(\bar{U})$ ya izomorf herhangi bir cebir ve $\phi: B(\bar{U}) \rightarrow R$ sabitleri koruyan bir izomorfizm olsun. Ayrıca her bir $z \in \bar{U}$ için bir tek $\lambda \in \sigma(a) = \bar{U}$ olduğunu kabul edelim. Öte yandan $|z_1| < 1, |z_2| < 1$ ve $\rho(a) = 1$ olmak üzere $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(a)$ için $\phi^{-1}(a)(z_1) = \lambda_1, \phi^{-1}(a)(z_2) = \lambda_2$ olsun. Bu taktirde

$$\left(\frac{\lambda_1 e^{-\lambda_2 e}}{1 - \bar{\lambda}_2 e \lambda_1 e} \right) \leq \rho \left(\frac{z_1 e^{-z_2 e}}{1 - \bar{z}_2 e z_1 e} \right)$$

dir.

KAYNAKLAR

1. Bayraktar, M., 1987, Fonksiyonel Analiz. Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Erzurum, s 154-170.
2. Bayraktar, M., 1988, Soyut Cebir ve Sayılar Teorisi. Atatürk Üniversitesi Basımevi, Erzurum, s 177-205.
3. Bayraktar, M., 1988, Üstyarı düzlemin birim daireye konform tasvirinin cebirsel karakterizasyonu. Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, Erzurum, s 1-8.
4. Beck, A., 1964, On ring on ring. Proc. Amer. Math. Soc., 15, 350-353.
5. Bers, L., 1948, On rings of analytic functions. Bull. Amer. Math. Soc., 54, 311-315.
6. Conway, J.B., 1986, Functions of One Complex Variable. Springer-Verlag, Berlin, p 123-160.
7. Kakutani, S., 1955, Rings of analytic functions. Proc. Michigan conference on functions of a complex variable, 71-84.
8. Kodaira, K., 1977, Introduction to Complex Analysis. Cambridge University Press-Cambridge, p 117-133.
9. Marsden, J.E., 1973, Basic Complex Analysis University of California, Berkeley, p 155.
10. Rudin, W., 1974, Real and Complex Analysis. McGraw-Hill, New York, p 386-402.
11. Rudin, W., 1955, An algebras characterization of conformal equivalence (abstract). Bull. Amer. Math. Soc. 61, p 543.
12. Spiegel, M., 1974, Theory and Problems of Complex Variables. McGraw-Hill, New York, p 132.
13. Uluçay, C., 1978, Fonksiyonlar Teorisi ve Riemann Yü Yüzeyleri. Ankara Üniversitesi Basımevi, Ankara, s 266-275.
14. Uluçay, C., 1955, Konform Tasvir. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul, s 28-47.
15. Wermer, J., 1953, On algebras of continuous functions. Proc. Amer. Math. Soc., 510, 866-868.