T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
MATEMATİKSEL FİZİK BİLİM DALI

İKİ BOYUTLU RİEMANN-WEYL GEOMETRİSİNDE KÜTLEÇEKİM AYAR TEORİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇAĞLAR PALA

DENİZLİ, 26/07/2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Çağlar **PALA** tarafından hazırlanan "**İKİ BOYUTLU RİEMANN-WEYL GEOMETRİSİNDE KÜTLEÇEKİM AYAR TEORİSİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 26/07/2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü FİZİK ANABİLİM DALI MATEMATİKSEL FİZİK BİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Muzaffer ADAK Pamukkale Üniversitesi	....
Doç. Dr. Özcan SERT Pamukkale Üniversitesi	....
Dr. Öğrt. Ü. Aziz KOLKIRAN İzmir Katip Çelebi Üniversitesi	....

Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 31/07/2019 tarih ve 31/21 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Prof. Dr. Uğur YÜCEL

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Bu tezin tasarımı, hazırlanması, yürütülmesi, araştırmalarının yapılması ve bulgularının analizlerinde bilimsel etiğe ve akademik kurallara özenle riayet edildiğini; bu çalışmanın doğrudan birincil ürünü olmayan bulguların, verilerin ve materyallerin bilimsel etiğe uygun olarak kaynak gösterildiğini ve alıntı yapılan çalışmalara atfedildiğine beyan ederim.

Çağlar PALA

İMZA

ÖZET

İKİ BOYUTLU RİEMANN-WEYL GEOMETRİSİNDE KÜTLEÇEKİM AYAR TEORİSİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ÇAĞLAR PALA
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
FİZİK ANABİLİM DALI
MATEMATİKSEL FİZİK
(TEZ DANIŞMANI : PROF. DR. MUZAFFER ADAK)
DENİZLİ, 26/07/2019

Einstein'ın kütleçekim teorisi olan, genel görelilik teorisi, matematiksel olarak zarif ve güneş sistemi ölçeğinde oldukça başarılı olmasına rağmen en son astrofiziksel ve kozmolojik gözlemler ile teorinin kuantizasyonu için gösterilen beyhude çabalar ortaya koymaktadır ki, söz konusu olguları da içerecek şekilde değiştirilmesi gerekmektedir. Bunu yapmanın değişik yolları vardır. Bu çerçevede, tez çalışmasında Riemann ötesi geometrik yapının kullanıldığı bir yöntem takip edilmiştir. Bununla birlikte ayar teorisi yaklaşımı uygulanmış ve kütleçelim lokal olarak ayar değişmez bir lagrangian ile modellenmiştir. Ayar yaklaşımında metrik, kütleçekim alanını ve tüm bağlantı, ayar potansiyelini temsil eder. Nonmetricity ve eğrilik için kuadratik olan, parite koruyan ve korumayan terimleri içeren en genel lagrangian belirlenmiştir. Koordinat bağımsız formalizm olan dış cebir ile ortonormal bazda çalışılmıştır. Problem simetrik teleparalel kütleçekim kapsamında ele alındığında tüm eğrilik (ayar potansiyelinin alan şiddetini temsil eder) sıfırlanmaktadır. Matematiksel kolaylık adına 2-boyutlu bir manifold ile çalışılmıştır. Ancak uygulanan yöntemler tüm boyutlarda geçerlidir.

ANAHTAR KELİMELER : Riemann dışı geometri; Ayar teorisi; Lagrange formülasyonu; Varyasyon hesabı

ABSTRACT

GAUGE THEORY OF GRAVITY IN TWO DIMENSIONAL RIEMANN-WEYL GEOMETRY
MSc THESIS
ÇAĞLAR PALA
PAMUKKALE UNIVERSTY INSTUTE OF SCIENCE
PHYSICS
MATHEMATICAL PHYSICS
(SUPERVISOR : PROF. DR. MUZAFFER ADAK)
DENİZLİ, 26/07/2019

Although the Einstein's theory of gravity, the so-called general relativity, is mathematically elegant and very successful in the solar system, there are strong reasons motivated by recent astrophysical and cosmological observations and by vain efforts of its quantization that it needs to be modified. That can be accomplished in various ways. We adhere going beyond the Riemannian geometry. On the other hand gauge approach is applied and gravity is modeled by a locally gauge invariant Lagrangian in which the metric represents the gravitational field and the full connection is interpreted as the gauge potential. We consider the most general Lagrangian quadratic in the nonmetricity and the curvature containing the parity conserving and violating terms. We work in terms of the coordinate independent formalism, the so-called the exterior algebra. When the problem is treated in the context of the symmetric teleparallel gravity, the full curvature (the field strength of the gauge potential) is forced to vanish in that work. For the sake of simplifying the mathematics we prefer study in 2-d manifold. Nevertheless, methods are valid for all dimensions.

KEYWORDS : Non-Riemannian geometry; Gauge theory; Lagrange formulation; Calculation of variation

İÇİNDEKİLER

SEMBOL LİSTESİ

M	: manifold
g	: (0,2)-tip simetrik ve dejenere olmayan metrik tensörü
∇	: bağlantı
$\partial_\alpha(p)$	: $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(p)\}$, kısaltma
$T_p(M)$	: p noktasındaki teğet uzayı
$CT(M)$	: koordinat teğet demeti
$T_p^*(M)$	: p noktasındaki koteğet uzayı
$CT^*(M)$	: koordinat koteğet demeti
$OT(M)$	: ortonormal teğet demeti
$OT^*(M)$	: ortonormal koteğet demeti
δ^α_β	: Kronecker sembolü
d	: dış türev operatörü
D	: kovaryant dış türev operatörü
ι	: iç çarpım operatörü
$*$	: Hodge operatörü
$\otimes$	: genel tensör çarpımı
$\wedge$	: antisimetrik tensör çarpımı
$\Lambda_{(AB)}$	: tüm bağlantı 1-formunun simetrik parçası
$\Lambda_{[AB]}$	: tüm bağlantı 1-formunun antisimetrik parçası
$\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1,1)$	: Minkowski metriğinin bileşenleri, köşegen matris kısaltması
ω_{ab}	: Levi-Civita bağlantı 1-formu
δ	: Varyasyon

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Einstein genel görelilik teorisinin değiştirilmesi/genelleştirilmesi kapsamında 2-boyutlu Riemann-Weyl geometrisinde yeni bir kütleçekim teorisi incelenmiştir.

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım ve her zaman yararlanacağım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren, bilim yapma sürecimde örnek alınacak bir şahsiyet ve bilim insanı olarak büyük motivasyon sağlayan, tüm anlayışsızlıklarıma, eksikliklerime ve başarısızlıklarıma rağmen sabırla bana emek harcayan, akademik işbirliğinin yanında kişisel ve aile temasını, yakınlığını, dostluğunu ve muhataplığını paylaşan sayın hocam Prof. Dr. Muzaffer ADAK' a sonsuz teşekkürlerimi sunar, tüm akademik yaşamım boyunca kendisinden istifade etme imkanı bulmayı dilerim. Ayrıca çalışmalarımın belirli dönemlerinde ihtiyacım olduğunda ve talep ettiğimde beni geri çevirmeyen, işbirliğini ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Özcan SERT' e içten teşekkürlerimi ve başarı dileklerimi iletirim. Son olarak kıymetli aileme; bulunduğum noktada olmamdaki tüm emekleri için, bulundukları noktada olmaları adına tarifsiz hissiyatımı ve sonsuz şükranlarımı sunarım.

1 GİRİŞ

Einstein'ın kütleçekim teorisi, genel görelilik teorisi, matematiksel olarak zarif ve güneş sistemi ölçeğinde oldukça başarılı olmasına rağmen en son astrofiziksel ve kozmolojik gözlemler ile teorinin kuantizasyonu için gösterilen beyhude çabalar ortaya koymaktadır ki, söz konusu olguları da içerecek şekilde değiştirilmesi gerekmektedir. Bu konuda literatürde çeşitli yöntemlerle çalışmalar mevcuttur. Bu tez çalışmasında Riemann ötesi geometrik yapının kullanıldığı bir yöntem takip edilmiştir. Diğer taraftan ayar teorisi, modern fizikte doğayı açıklamak adına başarılı bir yaklaşım olarak belirmiştir. Örneğin, elektromanyetik ve zayıf nükleer etkileşimler $SU(2) \otimes U(1)$ -ayar teorisi olarak birleştirilmiştir; elektrozayıf teori. $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ -ayar teorisi ise aynı yaklaşımı daha ileri taşıyarak güçlü nükleer etkileşimleri de içerir; standart model [1]. Kaynak [2]'deki çalışmada yazar, kütleçekimin lokal olarak ayar değişmez bir lagrangian ile modellenebileceğini belirtmektedir. Bu yapıda metrik kütleçekim alanını ve tüm bağlantı da ayar potansiyelini temsil etmektedir. Simetrik teleparalel kütleçekim teorilerinde tüm eğrilik (ayar potansiyelinin alan şiddetini temsil eder) sıfırlanmaktadır. Fakat Riemann eğriliğinin (sadece Levi-Civita bağlantısı ile ilişkili olan) sıfırlanması zorunluluğu yoktur. Bu çalışma, simetrik teleparalel geometrinin ötesinde olan Riemann-Weyl geometrisinde yapılmıştır. Yeni geometride hem nonmetricity hem de tüm eğrilik tensörleri sıfırdan farklıdır. Bu çalışmada nonmetricity ve eğrilik için kuadratik olan, parite koruyan ve korumayan terimleri içeren en genel lagrangian belirlenmiştir. Koordinat bağımsız formalizm olan dış cebir ile ortonormal bazda çalışılmıştır. Bu bazda ayar grubu (genel lineer dönüşümler altında dahil) Lorentz grubu olmaktadır (bölüm 2.2 incelenebilir).

Genel olarak üzerinde çalışılan geometri üç tensör ile sınıflandırılabilir. Eğrilik, burulma ve nonmetricity tensörleri. Tüm tensörler sıfır ise Minkowski geometrisi, sadece eğrilik sıfırdan farklı ise Riemann geometrisi, eğrilik ve burulma sıfırdan farklı ise Riemann-Cartan geometrisi, sadece burulma sıfırdan farklı ise Weitzenböck (veya teleparalel) geometrisi, sadece nonmetricity sıfırdan farklı ise simetrik teleparalel geometri elde edilir. Tüm tensörlerin sıfırdan farklı olduğu durumda literatürde mutabık kalınan bir isim olmamakla birlikte Riemann-dışı geometri [3] veya metrik afin geometri [4] şeklinde kullanılmları vardır.

Nonmetricity ve tüm eğrilikte kuadratik olan en genel lagrangian yazılarak kütleçekimi modellenmiştir. Ardından bağımsız değişkenlere göre varyasyon hesabı yapılmıştır. Tüm bağlantı 1-formunun varyasyonundan elde edilen alan denklemi yardımıyla burulma tensörünü sıfırlayan lagrange çarpanı hesaplanmıştır. Bu sonuç, koçerçeve varyasyonundan elde edilen alan denklemine yerleştirilmiştir. Böylece, bu çalışmada ortaya atılan yeni kütleçekim teorisinin alan denklemmleri elde edilmiştir. Çalışmanın son kısmında küresel simetrik statik çözüm bulma çabaları olmuştur. Bu noktada hesaplamalarda yoğun olarak MAPLE / REDUCE ve paketi ATLAS / EXCALC bilgisayar sistemleri kullanılmıştır [9], [10].

2 MATEMATİKSEL TEMELLER

Bu tez çalışmasının kapsamı iki boyut ile belirlenmiş olmasına rağmen bu bölümdeki içerik tüm boyular için geçerlidir. Genel olarak uzayzaman $\{M, g, \nabla\}$ üçlüsüyle gösterilebilir. Burada M iki boyutlu yönlendirilebilir ve diferansiyellenebilir manifoldu, g (0,2)-tip simetrik ve dejenere olmayan metrik tensörü, ∇ tensörlerin (hatta spinörlerin) paralel taşınmasını tanımlayan bağlantıyı temsil eder. $\{x^\alpha(p)\}$, $\alpha = \hat{0}, \hat{1}$, koordinat sistemi üzerinde herhangi bir $p \in M$ noktasındaki koordinat fonksiyonu olsun. Bu koordinat sistemi $\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(p)\}$ veya kısaca $\partial_\alpha(p)$ ile gösterilen referans çerçevesini (koordinat çerçevesi) oluşturur. Bu çerçeve p noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$ için baz vektörlerini içerir. M manifoldu üzerindeki tüm noktaların teğet uzaylarının birleşimi koordinat teğet demetini meydana getirir; $CT(M) = \bigcup_{p\in M} T_p(M)$. Benzer şekilde, koordinat fonksiyonlarının diferansiyelleri, diğer bir ifadeyle baz kovektörleri, p noktasındaki $T_p^*(M)$ koteğet uzayı için koordinat koçerçevesini oluştururlar. Yine benzer şekilde, manifold üzerindeki tüm $T_p^*(M)$ koteğet uzaylarının birleşimi koordinat koteğet demetini meydana getirir; $CT^*(M) = \bigcup_{p\in M} T_p^*(M)$. Bunlar arasındaki dualite (ikilik) aşağıdaki şekilde verilebilir

$$dx^\alpha\left(\partial_\beta\right) = \delta^\alpha_\beta \tag{1}$$

Burada δ^α_β Kronecker sembolüdür.

Koordinat demetinde metrik şu formdadır

$$g = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha \otimes dx^\beta \tag{2}$$

Burada $\otimes$ simetrik tensör çarpımını temsil eder. Dikkat edilirse $g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = g_{\alpha\beta}(x)$ bileşenleri koordinat bağımlıdır. Diğer taraftan, $\{X_a\}$, $a = 0, 1$, ortonormal vektör kümesi olsun, bir başka deyişle ortonormal çerçeve. Buna göre metrik bileşenleri $g(X_a, X_b) = \eta_{ab}$ ile verilir, burada $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1)$ Minkowski metriğidir. $\{X_a\}$ kümesi, her zaman verilen bir $\{\partial_\alpha\}$ koordinat çerçevesinden (veya tam tersi) türetilebilir. Bu türetme $h^\alpha{}_a$ dubleti (veya tersi $h^a{}_\alpha$) ile gerçekleştirilebilir

$$X_a(x) = h^\alpha{}_a(x)\partial_\alpha \quad \leftrightarrow \quad \partial_\alpha = h^a{}_\alpha(x) X_a(x) \tag{3}$$

burada $h^\alpha{}_a(x) h^a{}_\beta(x) = \delta^\alpha_\beta$ ve $h^a{}_\alpha(x) h^\alpha{}_b(x) = \delta^a_b$. Buna göre ortonormal koçerçeve $\{e^a\}$, dualite bağıntısı yardımıyla elde edilebilir

$$e^a(X_b) = \delta^a_b\ . \tag{4}$$

Bu eşitlik, (1) dualite ilişkisinin eşdeğer bir ifadesinden başka birşey değildir. Her zaman, (3) ile tanımlanan dublet ile ortonormal koçerçeveden koordinat çerçevesine geçmek mümkündür

$$dx^\alpha = h^\alpha{}_a(x) e^a(x) \quad \leftrightarrow \quad e^a(x) = h^a{}_\alpha(x) dx^\alpha \tag{5}$$

$\{X_a(p)\}$ kümesi, $T_p(M)$ teğet uzayının ortonormal baz kümesi iken duali olan $\{e^a(p)\}$ kümesi de $T_p^*(M)$ koteğet uzayının ortonormal kobaz kümesi olur. $\{X_a(p)\}$ ortonormal bazlarının birleşimi $OT(M)$ ortonormal teğet demetini oluştururken, $\{e^a(p)\}$ ortonormal kobazlarının birleşimi de $OT^*(M)$ ortonormal koteğet demetini oluşturur.

Ortonormal demette metrik (2) şu formda olur

$$g = \eta_{ab} e^a(x) \otimes e^b(x) \tag{6}$$

Burada not edilmesi gereken nokta; ortonormal çerçevede Minkowski metriği η_{ab} koordinattan bağımsız iken $e^a(x)$ kobazları koordinat bağımlıdır.

Koordinat veya ortonormal bazların dışında her zaman için *karma çerçeve*de çalışmak da mümkündür. Bu çerçevede, en genelde, hem metrik bileşenleri hem de kobazlar koordinat bağımlıdır. Küçük Yunan harflerinin koordinat (holonomik) indisleri ve küçük Latin harflerinin de ortonormal (anholonomik) indisler için kullanıldığı gibi büyük Latin harfleri de karma indisler için kullanılırsa (2) veya (6) ifadelerindeki metrik şu forma dönüşür

$$g = g_{AB}(x) e^A(x) \otimes e^B(x) \tag{7}$$

burada $A, B, \ldots = \bar{0}, \bar{1}$.

Bu tez çalışmasında dış cebir kullanılmıştır. Dış cebir dilinde koçerçeveler "baz 1-form" olarak ya da kısaca "1-form" olarak adlandırılır. Daha açık bir ifadeyle dx^α koordinat 1-formlarını ve e^a ortonormal 1-formları temsil eder. Burada kullanılan d dış cebirdeki "dış türev" işlemidir ve herhangi bir 0-form x^α ifadesini 1-form dx^α ifadesine dönüştürür. Koçerçevenin dış türevi de anholonomik 2-form olarak tanımlanır.

dx^α ifadesi bir tam form olduğundan, Poincare lemması ($d^2 = 0$) gereği $d(dx^\alpha) = 0$ olduğu açıktır. Bununla beraber anholonomik e^a ifadesinin sıfır olma zorunluluğu yoktur, $de^a \neq 0$. Bazen literatürde koordinat indisleri holonomik indisler olarak ve ortonormal indisler de anholonomik indisler olarak kullanılmaktadır. Bu noktada şu not edilmeli; koordinat çerçevesinde $d(dx^\alpha) = 0$ fakat $dg_{\alpha\beta} \neq 0$, ortonormal çerçevede $de^a(x) \neq 0$ fakat $d\eta_{ab} = 0$, karma çerçevede ise $de^A(x) \neq 0$ ve $dg_{AB}(x) \neq 0$ yazılabilir. Manifoldun oryantasyonu Hodge (map) operatörü tarafından belirlenmiştir, $*1 = \frac{1}{2!}\epsilon_{ab} e^a \wedge e^b = e^0 \wedge e^1$. Burada $\wedge$ dış çarpım işlemidir. $\epsilon_{01} = +1$ olarak seçilen ϵ_{ab} tümüyle antisimetrik Levi-Civita tensörü olarak adlandırılır.

Bu noktadan sonra $e^{ab} \equiv e^a \wedge e^b$ kısaltması kullanılacaktır. Dış cebirdeki bir diğer önemli operatör iç çarpım operatörüdür, $\iota_{X_a} \equiv \iota_a$ veya $\iota_{\partial_\alpha} \equiv \iota_\alpha$

$$\iota_a e^b = \delta_a^b \quad \leftrightarrow \quad \iota_\alpha dx^\beta = \delta_\alpha^\beta \tag{8}$$

bu eşitlikler dualite ilişkilerinin farklı bir gösteriminden başka birşey değildir, sırasıyla (4) ve (1). Burada ι_a ve ι_α operatörleri birbirlerine $\iota_\alpha = h^a{}_\alpha \iota_a$ ifadesiyle bağlıdırlar ve bir 0-formun iç çarpımı tanım olarak sıfırdır. Bu özellik Hodge operatörü ile birlikte çok kullanışlı bir özdeşliği sağlarlar, $*(\psi \wedge e_a) = \iota_a * \psi$. Burada ψ herhangi bir p-formdur.

∇ bağlantı terimi, $\Lambda^a{}_b$ bağlantı 1-formu kullanılarak hesap edilir. (3) veya eşit olarak (5) ifadelerinde herhangi bir p-form için verilen koordinat ve ortonormal çerçeve arasındaki dönüşümler altında, bağlantı 1-formu kovaryant olarak aşağıdaki şekilde dönüşür

$$\Lambda^a{}_b = h^a{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\beta h^\beta{}_b + h^a{}_\alpha dh^\alpha{}_b \quad \leftrightarrow \quad \Lambda^\alpha{}_\beta = h^\alpha{}_a \Lambda^a{}_b h^b{}_\beta + h^\alpha{}_a dh^a{}_\beta \tag{9}$$

Herhangi bir (p,q)-tip tensör-değerli dış form $\mathfrak{T}^{a_1a_2\cdots a_p}{}_{b_1b_2\cdots b_q}$ için ortonormal çerçevede kovaryant dış türev aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\begin{aligned} D\mathfrak{T}^{a_1a_2\cdots a_p}{}_{b_1b_2\cdots b_q} = d\mathfrak{T}^{a_1a_2\cdots a_p}{}_{b_1b_2\cdots b_q} + \Lambda^{a_1}{}_c \wedge \mathfrak{T}^{ca_2\cdots a_p}{}_{b_1b_2\cdots b_q} + \cdots + \Lambda^{a_p}{}_c \wedge \mathfrak{T}^{a_1a_2\cdots c}{}_{b_1b_2\cdots b_q} \\ -\Lambda^c{}_{b_1} \wedge \mathfrak{T}^{a_1a_2\cdots a_p}{}_{cb_2\cdots b_q} - \cdots - \Lambda^c{}_{b_q} \wedge \mathfrak{T}^{a_1a_2\cdots a_p}{}_{b_1b_2\cdots c} \end{aligned} \tag{10}$$

Cartan yapı eşitlikleri nonmetricity tensör 1-formunu, burulma tensör 2-formunu ve eğrilik tensör 2-formunu tanımlar. Bunların karma çerçevedeki açık ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibidir

$$Q_{AB} := -\frac{1}{2} Dg_{AB} = \frac{1}{2}(-dg_{AB} + \Lambda_{AB} + \Lambda_{BA})\,, \tag{11}$$

$$T^A := De^A = de^A + \Lambda^A{}_B \wedge e^B\,, \tag{12}$$

$$R^A{}_B := D\Lambda^A{}_B := d\Lambda^A{}_B + \Lambda^A{}_C \wedge \Lambda^C{}_B\,. \tag{13}$$

Bu ifadeler tam olarak bağımsız değildirler çünkü Bianchi özdeşliklerini sağlarlar

$$DQ_{AB} = \frac{1}{2}(R_{AB} + R_{BA})\,, \tag{14}$$

$$DT^A = R^A{}_B \wedge e^B\,, \tag{15}$$

$$DR^A{}_B = 0\,. \tag{16}$$

Cartan yapı eşitlikleri koordinat çerçevesinde şu şekilde yazılabilir,

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(-dg_{\alpha\beta} + \Lambda_{\alpha\beta} + \Lambda_{\beta\alpha})\,, \tag{17}$$

$$T^\alpha = \Lambda^\alpha{}_\beta \wedge dx^\beta\,, \tag{18}$$

$$R^\alpha{}_\beta = d\Lambda^\alpha{}_\beta + \Lambda^\alpha{}_\gamma \wedge \Lambda^\gamma{}_\beta\,, \tag{19}$$

ve ortonormal çerçevede de aşağıdaki gibidirler

$$Q_{ab} = \frac{1}{2}(\Lambda_{ab} + \Lambda_{ba})\,, \tag{20}$$

$$T^a = de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b\,, \tag{21}$$

$$R^a{}_b = d\Lambda^a{}_b + \Lambda^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b\,. \tag{22}$$

Bu salt matematiksel ifadelerin geometrik anlamları, M manifoldu üzerindeki kapalı bir eğri üzerinde vektörlerin paralel taşınması çalışıldığında daha açık olacaktır. Böyle bir eğri üzerinde taşınan vektörün son uzunluğu ile ilk uzunluğu farklıysa nonmetricity, son ve ilk vektörler arasında bir açı oluşmuşsa eğrilik ve teğet demeti üzerinde son ve ilk vektörler arasında bir yerdeğiştirme oluşmuşsa burulma vardır denebilir.

2.1 Tüm bağlantının ayrıştırılması

Karma çerçevede tüm bağlantı 1-formu benzersiz olarak aşağıdaki gibi ayrıştırılabilir [4],[5],[6]

$$\Lambda^A{}_B = \underbrace{(g^{AC} dg_{CB} + p^A{}_B)/2 + \omega^A{}_B}_{Metrik} + \underbrace{K^A{}_B}_{Burulma} + \underbrace{q^A{}_B + Q^A{}_B}_{Nonmetricity} \tag{23}$$

Burada $\omega^A{}_B$ Levi-Civita bağlantı 1-formudur,

$$\omega^A{}_B \wedge e^B = -de^A \,, \tag{24}$$

$K^A{}_B$ koburulma tensör 1-formudur,

$$K^A{}_B \wedge e^B = T^A \,, \tag{25}$$

p_{AB} ve q_{AB} terimleri de aşağıdaki gibi tanımlanır

$$p_{AB} = -(\imath_A dg_{BC})e^C + (\imath_B dg_{AC})e^C \,. \tag{26}$$

$$q_{AB} = -(\imath_A Q_{BC})e^C + (\imath_B Q_{AC})e^C \,, \tag{27}$$

Bu ayrıştırma kendi içinde tutarlıdır. Bunu görebilmek için (23) ifadesi sağdan e^B ile çarpılarak yukarıda verilen tanımlar kullanılır. d ve D operatörleri önündeki indisleri dikey olarak yer değiştirirken özellikle dikkat edilmesi gerekir zira, $dg_{AB} \neq 0$ ve $Dg_{AB} \neq 0$. Tüm bağlantının simetrik parçası (11) ifadesinden elde edilir

$$\Lambda_{(AB)} = Q_{AB} + \frac{1}{2} dg_{AB} \tag{28}$$

ve geriye kalan antisimetrik parça

$$\Lambda_{[AB]} = \frac{1}{2} p_{AB} + \omega_{AB} + K_{AB} + q_{AB} \,. \tag{29}$$

Eğer sadece $Q_{AB} = 0$ ise bağlantı "metrik uyumludur" denir. Eğer $Q_{AB} = 0$ ve $T^A = 0$ ise bağlantı Levi-Civita formuna dönüşür. Koordinat çerçevesinde ayrıştırma (23) şuna indirgenir

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \underbrace{g^{\alpha\sigma}(\iota_\gamma dg_{\sigma\beta} + \iota_\beta dg_{\sigma\gamma} - \iota_\sigma dg_{\beta\gamma})dx^\gamma/2}_{Metrik} + \underbrace{K^\alpha{}_\beta}_{Burulma} + \underbrace{q^\alpha{}_\beta + Q^\alpha{}_\beta}_{Nonmetricity} \tag{30}$$

Burada sağ taraftaki ilk grup Christoffel sembollerini verir. Ortonormal çerçevede şöyle verilirler

$$\Lambda_{ab} = \omega_{ab} + K_{ab} + q_{ab} + Q_{ab} \,. \tag{31}$$

Buradan Levi-Civita bağlantı 1-formu ortonormal koçerçeve cinsinden çözülürse

$$\omega_{ab} = \frac{1}{2}\left[-\iota_a de_a + \iota_b de_a + (\iota_a \iota_b de_c)e^c\right] \tag{32}$$

ve koburulma da burulma cinsinden çözülürse

$$K_{ab} = \frac{1}{2}\left[\iota_a T_b - \iota_b T_a - (\iota_a \iota_b T_c)e^c\right] \,. \tag{33}$$

Bununla birlikte q_{ab} ifadesi nonmetricity cinsinden yazılabilir

$$q_{ab} = -(\imath_a Q_{bc})e^c + (\imath_b Q_{ac})e^c \,. \tag{34}$$

Literatürde koordinat çerçevesinde [4], ortonormal çerçevede [7] ve karma çerçevede [8] çalışmalar mevcuttur. Hesaplamalarda aşağıdaki özdeşlikler kullanışlı olmaktadır.

$$D * e_a = -Q \wedge *e_a + *e_{ab} \wedge T^b \,, \tag{35}$$

$$D * e_{ab} = D\epsilon_{ab} = -Q \wedge *e_{ab} \,, \tag{36}$$

$$D\eta_{ab} = -2Q_{ab} \,, \quad D\eta^{ab} = +2Q_{ab} \,, \quad D\delta^a_b = 0 \,. \tag{37}$$

Burada $Q := Q^a{}_a = \eta^{ab} Q_{ab} = \Lambda^a{}_a$ nonmetricity iz 1-formudur.

2.2 Genel lineer koordinat dönüşümü

Bu bölümde $x^\mu \to x^{\mu'}$ ile verilen ve aşağıdaki formda genel lineer koordinat dönüşümü varsayılacaktır

$$x^{\mu'} = \Gamma^{\mu'}{}_\mu x^\mu + \xi^{\mu'} \tag{38}$$

Burada $\Gamma^{\mu'}{}_\mu = \Gamma^{\mu'}{}_\mu(x)$ rotasyon ile ilgili ve $\xi^{\mu'} = \xi^{\mu'}(x)$ öteleme ile ilgili parçayı oluştururlar. Bu koordinat dönüşüm eşitliğinin her iki tarafına dış türev uygulanırsa

$$dx^{\mu'} = \Omega^{\mu'}{}_\mu dx^\mu \tag{39}$$

Burada $\Omega^{\mu'}{}_\mu := [\partial_\mu \Gamma^{\mu'}{}_\nu(x)]x^\nu + \Gamma^{\mu'}{}_\mu(x) + \partial_\mu \xi^{\mu'}(x)$. Ortonormal çerçevede aynı dönüşümün etkisini incelemek için dubletlerden faydalanırız

$$dx^{\mu'} = h^{\mu'}{}_{a'} e^{a'} \quad \text{and} \quad dx^\mu = h^\mu{}_a e^a \tag{40}$$

Burada $h^{\mu'}{}_{a'} = h^{\mu'}{}_{a'}(x'(x))$ ve $h^\mu{}_a = h^\mu{}_a(x)$. Bu ifadeleri eşitlikte yerine yazılır ve $h^{b'}{}_{\mu'} h^{\mu'}{}_{a'} = \delta^{b'}_{a'}$ ilişkisi kullanılırsa şu sonuç elde edilir

$$e^{b'} = L^{b'}{}_b e^b \tag{41}$$

Burada $L^{b'}{}_{b} = L^{b'}{}_{b}(x'(x)) := h^{b'}{}_{\mu'}\Omega^{\mu'}{}_{\mu}h^{\mu}{}_{a}$. Buradan görülmektedir ki (38) ile verilen genel lineer koordinat dönüşümü altında, ortnormal koçerçevenin dönüşümü bir öteleme terimi içermemektedir. Son olarak ortonormal çerçevede metrik ifadesinin nasıl dönüştüğü incelenirse

$$g = \eta_{ab}e^{a} \otimes e^{b} = \eta_{a'b'}e^{a'} \otimes e^{b'} \tag{42}$$

Burada $\eta_{ab} = \eta_{a'b'} = \mathrm{diag}(-1, +1)$ Minkowski metriğidir. Yine burada $e^{a'} = L^{a'}{}_{a}e^{a}$ kullanılarak $\eta_{a'b'} = L^{a}{}_{a'}\eta_{ab}L^{b}{}_{b'}$ ifadesi elde edilir. Matris notasyonunda yazılırsa

$$e' = Le \quad \rightarrow \quad \eta' = L\eta L^{T} \tag{43}$$

Burada ^{T} transpoz matrisi temsil eder.

Görülmektedir ki, genel lineer koordinat dönüşümünden türetilen dönüşüm elemanları ortonormal demette Lorentz grubunu oluştururlar. Buna göre ortonormal koçerçevenin (41) ile verilen dönüşüm kuralı altında, ortonormal demette tüm bağlantı aşağıdaki gibi dönüşmelidir

$$\Lambda^{a'}{}_{b'} = L^{a'}{}_{a}\Lambda^{a}{}_{b}L^{b}{}_{b'} + L^{a'}{}_{a}dL^{a}{}_{b'} \tag{44}$$

Böylece nonmetricity tensör 1-formu, burulma tensör 2-formu ve eğrilik tensör 2-formu kovaryant olarak aşağıdaki şekilde dönüşebilirler

$$Q_{a'b'} = L^{a}{}_{a'}Q_{ab}L^{b}{}_{b'} \tag{45}$$

$$T^{a'} = L^{a'}{}_{a}T^{a} \tag{46}$$

$$R^{a'}{}_{b'} = L^{a'}{}_{a}R^{a}{}_{b}L^{b}{}_{b'} \tag{47}$$

Sonuç olarak, uzayzaman içinde nonmetricity olup olmamasından bağımsız olarak ortonormal demetin ayar grubu Lorentz grubudur [5].

3 BİR TEORİNİN *LAGRANGIAN* FORMALİZMİ

Bir kütleçekim teorisinin lagrange formalizminde öncelikle lagrangian içeren bir eylem yazılır

$$I = \int_M L \tag{48}$$

Burada L lagrangian 2-formdur. Bu eylemin ekstremumu alan denklemlerini verir. Diğer bir ifadeyle eylemin varyasyonu alınarak sıfıra eşitlendiğinde elde edilen ifade alan denklemleri olacaktır; $\delta I = 0$ yani $\delta L = 0$. Bu noktadan sonra "lagrangian" ve "lagrangian 2-form" ifadeleri eş olarak kullanılacaktır. En genelde lagrangian geometrik ve maddesel parçalar içerir. Ortonormal çerçevede varyasyon hesabındaki bağımsız değişkenler ortonormal koçerçeve e^a, tüm bağlantı 1-form $\Lambda^a{}_b$ ve madde alanını gösteren ψ ifadeleridir. Fakat metrik bağımsız bir değişken olamaz çünkü ortonormal çerçevede $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, +1)$ olduğundan $\delta\eta_{ab} = 0$ verecektir. Bu durumda $L = L[e^a, \Lambda^a{}_b, \psi]$ lagrangian ifadesinin varyasyonu şu şekilde yazılabilir

$$\delta L = \delta e^a \wedge \frac{\partial L}{\partial e^a} + \delta\Lambda_{ab} \wedge \frac{\partial L}{\partial \Lambda_{ab}} + \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} \tag{49}$$

3.1 Kuadratik Lagrangian için Varyasyon Hesabı

Lagrangian ifadesi kuadratik terimler içeriyorsa en genelde aşağıdaki şekilde yazılabilir

$$L = \alpha \wedge *\beta \tag{50}$$

Burada $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$. $\Lambda^p(M)$ ifadesi M manifoldu üzerinde herhangi bir p-formu temsil eder. Bu durumda aşağıdaki eylemin varyasonunun hesaplanması gerekir

$$I = \int_M \alpha \wedge *\beta \tag{51}$$

Hesaplar α, β değişkenlerine göre yapılır.

$$\delta I = \int_M \delta\alpha \wedge *\beta + \alpha \wedge \delta * \beta \tag{52}$$

Sağ taraftaki ikinci terim için detaylı bir hesaplama gerekir zira bu terim Hodge yıldız içermektedir.

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \delta * \beta &= \alpha \wedge \delta(\frac{1}{p!}\beta_{i_1 \dots i_p} * e^{i_1 \dots i_p}) \\ &= \alpha \wedge \frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1 \dots i_p}) * e^{i_1 \dots i_p} + \alpha \wedge \frac{1}{p!}\beta_{i_1 \dots i_p}\delta * e^{i_1 \dots i_p} \end{aligned} \tag{53}$$

Öncelikle ilk terimde $\theta \wedge *\gamma = \gamma \wedge *\theta$, where $\theta, \gamma \in \Lambda^p(M)$ özdeşliği kullanılırsa

$$\alpha \wedge \delta * \beta = \frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1 \dots i_p})e^{i_1 \dots i_p} \wedge *\alpha + \alpha \wedge \frac{1}{p!}\beta_{i_1 \dots i_p}\delta * e^{i_1 \dots i_p} \tag{54}$$

Daha sonra aşağıdaki hesaplar yapılır

$$
\begin{aligned}
\delta\beta &= \delta(\frac{1}{p!}\beta_{i_1\ldots i_p}e^{i_1\ldots i_p}) \\
&= \frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1\ldots i_p})e^{i_1\ldots i_p} + (\delta e^{i_1}) \wedge \frac{1}{(p-1)!}\beta_{i_1\ldots i_p}e^{i_2\ldots i_p} \\
&= \frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1\ldots i_p})e^{i_1\ldots i_p} + (\delta e^{i_1}) \wedge (\iota_{i_1}\beta),
\end{aligned}
\tag{55}
$$

$$
\frac{1}{p!}(\delta\beta_{i_1\ldots i_p})e^{i_1\ldots i_p} = \delta\beta - (\delta e^a) \wedge (\iota_a\beta), \tag{56}
$$

ve 54 denklemindeki ifade şu hali alır

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p!}(\beta_{i_1\ldots i_p})\delta * e^{i_1\ldots i_p} &= \frac{1}{p!}(\beta_{i_1\ldots i_p})\delta\Big[\frac{1}{(n-p)!}\epsilon^{i_1\ldots i_p}{}_{i_{p+1}\ldots i_n}e^{i_{p+1}\ldots i_n}\Big] \\
&= (\delta e^{i_{p+1}}) \wedge \frac{1}{p!(n-p-1)!}\epsilon^{i_1\ldots i_p}{}_{i_{p+1}\ldots i_n}\beta_{i_1\ldots i_p}e^{i_{p+2}\ldots i_n} \\
&= (\delta e^a) \wedge (\iota_a * \beta),
\end{aligned}
\tag{57}
$$

Bulunan bu sonuç (52) denkleminde kullanılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir

$$
\begin{aligned}
\delta I &= \int_M \alpha \wedge *\beta \\
&= \int_M \delta\alpha \wedge *\beta + \delta\beta \wedge *\alpha - \delta e^a \wedge [(\iota_a\beta) \wedge *a - (-1)^p \alpha \wedge (\iota_a * \beta)]
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Bu ifadedeki α, β değişkenlerinin bazı özel durumları için varyasyon hesapları detaylı olarak kaynak [8]' de verilmiştir.

4 İKİ BOYUTTA GENEL GÖRELİLİK TEORİSİ

İyi bilindiği üzere genel görelilik teorisinin alan denklemleri Einstein-Hilbert lagrangian ifadesinin varyasyonundan elde edilebilmektedir

$$L_{EH} = -\frac{1}{2\kappa} R_{ab}(\omega) \wedge *e^{ab} \tag{59}$$

Genel görelilik kapsamında (4 boyutta) uzayzaman sadece eğrilik içermektedir. Dahası, yukarıda verilen lagrangian ifadesinden de görüldüğü üzere eğrilik (Riamann eğriliği) sadece Levi-Civita bağlantısı ile ilişkilidir. Eğer genel görelilik Riemannsal olmayan uzayzamanlarda çalışılmak istenirse Levi-Civita bağlantısı yerine tüm bağlantının kullanılması gerekir.

Bu bölümün hedefi genel göreliliği Riemannsal uzayzaman kapsamında 2-boyutta incelemektir. Açıkça görülebildiği üzere L_{EH} lagrangian ifadesinin varyasyon hesabının yapılması gerekir.

$$\begin{aligned}
\delta L_{EH} &= -\frac{1}{2\kappa}\delta[R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b] \\
&= -\frac{1}{2\kappa}(\delta R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b + R^a{}_b(\omega) \wedge \delta * e_a{}^b) \\
&= -\frac{1}{2\kappa}[(\delta d\omega^a{}_b + \delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b + \omega^a{}_c \wedge \delta\omega^c{}_b) \wedge *e_a{}^b + R^a{}_b(\omega) \wedge \delta * e_a{}^b] \\
&= -\frac{1}{2\kappa}(d\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b + \underbrace{\delta\omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b}_{c\longleftrightarrow b} + \underbrace{\omega^a{}_c \wedge \delta\omega^c{}_b \wedge *e_a{}^b}_{c\longleftrightarrow a} + R^a{}_b(\omega) \wedge \delta\epsilon_a{}^b) \\
&= -\frac{1}{2\kappa}(d\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b + \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b)
\end{aligned} \tag{60}$$

Burada 2-boyutta $*e_a{}^b = \epsilon_a{}^b$ özdeşliği kullanılmıştır, böylece $\delta\epsilon_a{}^b = 0$ olur. Yukarıdaki ilk terim için şu matematiksel manipülasyonlar yapılırsa

$$\begin{aligned}
d(\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b) &= d\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b - \delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b \\
d\delta\omega^a{}_b \wedge *e_a{}^b &= \delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + mod(d)
\end{aligned} \tag{61}$$

Burada son terim ihmal edilebilir zira alan denklemlerine herhangi bir katkısı olmayacaktır. Böylece δL_{EH} ifadesi için şu sonuç elde edilir

$$\begin{aligned}
\delta L_{EH} &= -\frac{1}{2\kappa}(\delta\omega^a{}_b \wedge d * e_a{}^b + \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \delta\omega^a{}_b \wedge \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b) \\
&= -\frac{1}{2\kappa}\delta\omega^a{}_b \underbrace{(d * e_a{}^b + \omega^b{}_c \wedge *e_a{}^c - \omega^c{}_a \wedge *e_c{}^b)}_{D*e_a{}^b} \\
&= -\frac{1}{2\kappa}\delta\omega^a{}_b \wedge D * e_a{}^b \\
&= -\frac{1}{2\kappa}\delta\omega^a{}_b \wedge D\epsilon_a{}^b \\
&= 0
\end{aligned} \tag{62}$$

Burada $D\epsilon_a{}^b = 0$. Sonuç olarak görülmektedir ki, Einstein-Hilbert lagrangian ifadesinin varyasonu 2-boyutta sıfır vermektedir. Bu durumda herhangi bir alan denklemi elde edilemez ve genel göreliliğin 2-boyutta önemsiz bir teori olduğu sonucuna varılır.

5 İKİ BOYUTTA SİMETRİK TELEPARALEL KÜTLEÇEKİM TEORİSİ

Simetrik teleparalel kütleçekim Riemann dışı uzayzamanda çalışılan bir teori olduğu için Einstein-Hilbert lagrangian ifadesi aşağıda gösterildiği üzere tüm bağlantı kullanılarak yazılmalıdır

$$L_{EH}(\Lambda) = \frac{1}{2} R^a{}_b(\Lambda) \wedge *e_a{}^b \tag{63}$$

Bu lagrangian ifadesini çalışabilmek için öncelikle tüm bağlantının ayrıştırılması gerekir

$$\Lambda^a{}_b = \omega^a{}_b + K^a{}_b + q^a{}_b + Q^a{}_b \tag{64}$$

Simetrik teleparalel kütleçekim (STPG) kapsamında burulma sıfırdır, $K^a{}_b = 0$.

$$\begin{aligned} R^a{}_b(\Lambda) &= d\Lambda^a{}_b + \Lambda^a{}_c \wedge \Lambda^c{}_b \\ &= d(\omega^a{}_b + q^a{}_b + Q^a{}_b) + (\omega^a{}_c + q^a{}_c + Q^a{}_c) \wedge (\omega^c{}_b + q^c{}_b + Q^c{}_b) \\ &= d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b + q^a{}_c \wedge \omega^c{}_b + Q^a{}_c \wedge \omega^c{}_b + \\ &\quad dq^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge q^c{}_b + q^a{}_c \wedge q^c{}_b + Q^a{}_c \wedge q^c{}_b + \\ &\quad dQ^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge Q^c{}_b + q^a{}_c \wedge Q^c{}_b + Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \end{aligned} \tag{65}$$

$N^a{}_b = q^a{}_b + Q^a{}_b$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} R^a{}_b(\Lambda) &= R^a{}_b(\omega) + dN^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge N^c{}_b - \omega^c{}_b \wedge N^a{}_c + N^a{}_c \wedge N^c{}_b \\ &= R^a{}_b(\omega) + D(\omega)N^a{}_b + N^a{}_c \wedge N^c{}_b \end{aligned} \tag{66}$$

Bu sonuç kullanılarak (63) ifadesindeki Einstein-Hilbert lagrangian tekrar yazılırsa aşağıdaki sounç elde edilir

$$\begin{aligned} L_{EH}(\Lambda) &= \frac{1}{2} R^a{}_b(\Lambda) \wedge *e_a{}^b \\ &= \frac{1}{2} R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b + \frac{1}{2} D(\omega)N^a{}_b \wedge *e_a{}^b + \frac{1}{2} N^a{}_c \wedge N^c{}_b \wedge *e_a{}^b \end{aligned} \tag{67}$$

Son eşitlikteki ikinci terime bakıldığında

$$\begin{aligned} \underbrace{d(\frac{1}{2} N^a{}_b \wedge *e_a{}^b)}_{mod(d)} &= \frac{1}{2} D(\omega)N^a{}_b \wedge *e_a{}^b - \frac{1}{2} N^a{}_b \wedge D(\omega) * e_a{}^b \\ \therefore \frac{1}{2} D(\omega)N^a{}_b \wedge *e_a{}^b &= \frac{1}{2} N^a{}_b \wedge D(\omega) * e_a{}^b + mod(d) \end{aligned} \tag{68}$$

Burada $mod(d)$ ifadesi alan denklemlerine katkı sağlamayan tam formu temsil etmektedir. Yukarıdaki sonuç ile birlikte

$$L_{EH}(\Lambda) = \frac{1}{2} R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b + \frac{1}{2} N^a{}_b \wedge D(\omega) * e_a{}^b + \frac{1}{2} N^a{}_c \wedge N^c{}_b \wedge *e_a{}^b + mod(d) \tag{69}$$

Levi-Civita bağlantısı kapsamında burulma ve nonmetricity sıfır olduğundan yukarıdaki ikinci terimde $D(\omega) * e_a{}^b = 0$ olduğu gösterilebilir. Bu sonuç ile birlikte

$$L_{EH}(\Lambda) = \frac{1}{2}R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b + \frac{1}{2}N^a{}_c \wedge N^c{}_b \wedge *e_a{}^b + mod(d) \tag{70}$$

STPG çerçevesinde $\Lambda^a{}_b = 0$ olur, buna göre $R^a{}_b(\Lambda) = 0$ yazılır.

$$\begin{aligned}
0 = L_{EH}(\Lambda) &= \underbrace{\frac{1}{2}R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b}_{L_{EH}(\omega)} + \frac{1}{2}N^a{}_c \wedge N^c{}_b \wedge *e_a{}^b + mod(d) \\
\therefore L_{EH}(\omega) &= -\frac{1}{2}N^a{}_c \wedge N^c{}_b \wedge *e_a{}^b - mod(d) \\
&= -\frac{1}{2}q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \frac{1}{2}Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \wedge *e_a{}^b \\
&\quad - \frac{1}{2}q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \underbrace{\frac{1}{2}Q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge *e_a{}^b}_{a \longleftrightarrow b} - mod(d) \\
&= -\frac{1}{2}q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \frac{1}{2}Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \wedge *e_a{}^b \\
&\quad - \frac{1}{2}q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \wedge *e_a{}^b + \frac{1}{2}q^c{}_a \wedge Q^b{}_c \wedge *e_b{}^a - mod(d) \\
&= -\frac{1}{2}q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \frac{1}{2}Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \wedge *e_a{}^b \\
&\quad - \frac{1}{2}q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \wedge *e_a{}^b + \frac{1}{2}q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \wedge *e_a{}^b - mod(d) \\
&= -\frac{1}{2}q^a{}_c \wedge q^c{}_b \wedge *e_a{}^b - \frac{1}{2}Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \wedge *e_a{}^b - mod(d)
\end{aligned} \tag{71}$$

Yukarıda elde edilen sonucun 2-boyutta incelenmesi için öncelikle 2-boyutta geçerli olan aşağıdaki özdeşlikler verilir

$$*e_a{}^b = \epsilon_a{}^b \tag{72}$$

ve

$$q^a{}_c \wedge q^c{}_b = \epsilon^a{}_c \epsilon^c{}_b \, q \wedge q = 0 \tag{73}$$

Bu noktada Levi-Civita bağlantısı ile verilen Einstein-Hilbert lagrangian ifadesinin 2-boyuttaki karşılığı türetilmelidir. Bu noktadan sonra $mod(d)$ notasyonda ihmal edilecektir.

$$\begin{aligned}
L_{EH}(\omega) &= \frac{1}{2}R^a{}_b(\omega) \wedge *e_a{}^b \\
&= \frac{1}{2}R^a{}_b(\omega) \, \epsilon_a{}^b \\
&= (\frac{1}{2}d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b) \, \epsilon_a{}^b \\
&= (\frac{1}{2}\epsilon^a{}_b \, d\omega + \epsilon^a{}_c \, \epsilon^c{}_b \, \omega \wedge \omega) \, \epsilon_a{}^b \\
&= \frac{1}{2}\epsilon_a{}^b \epsilon^a{}_b \, d\omega \\
&= -d\omega
\end{aligned} \tag{74}$$

Burada

$$\epsilon_a{}^b \epsilon^a{}_b = \epsilon_0{}^1 \epsilon^0{}_1 + \epsilon_1{}^0 \epsilon^1{}_0 = -\epsilon_{01}\epsilon_{01} - \epsilon_{01}\epsilon_{01} = -2 \tag{75}$$

özdeşliği kullanılmıştır.

Görüldüğü üzere, genel Einstein-Hilbert lagrangian ifadesi 2-boyutta tam forma indirgenmektedir. Buna göre (71) eşitliğindeki lagrangian ifadesi şöyle yazılabilir

$$L_{EH}(\omega) = -d\omega = -\frac{1}{2}\epsilon_a{}^b Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b \tag{76}$$

Son eşitlikten de görüldüğü üzere sol taraf bir tam formdur ve Levi-Civita bağlantısı ile ilişkili Riemann lagrangian ifadesini oluşturur. Bu tam lagrangian ifadesini belirlemek için sadece $\epsilon_a{}^b Q^a{}_c \wedge Q^c{}_b$ teriminin hesap edilmesi yeterli olacaktır.

Sonuç olarak; yukarıda türetilen lagrangian ifadesi bir tam form olduğu için, bu ifade kullanılarak dinamik alan denklemlerinin türetilmesi mümkün değildir. Bu haliyle lagrangian, alan denklemleri baz alındığında 2-boyutlu simetrik teleparalel geometri kapsamında önemsiz olmaktadır. Anlamlı alan denklemleri türetebilmek için mevcut lagrangian ifadesine ek terimlerin eklenmesi gerekir. Bu sayede yeni lagrangian artık tam form olmayacak ve bunun üzerinden yapılan varyasyon hesaplarının sonrasında önemsiz olmayan alan denklemlerinin türetilmesi mümkün olabilecektir. Bu tezin danışmanının da katkıda bulunduğu böyle bir çalışma literatürde mevcuttur. Söz konusu çalışmada, kuadratik nonmetricity içeren bazı terimler lagrangian ifadesine eklenmiştir. Yapılan varyasyon hesapları sonrasında alan denklemleri türetilmiş ve önemsiz olmayan çözümler aranmıştır. Ayrıca çiftlenim terimlerinin bazı özel değerleri için lagrangian ifadesinin yukarıdakine benzer şekilde bir tam forma dönüşebildiği de gösterilmiştir [11].

6 İKİ BOYUTTA Q^2 ve R^2 İÇEREN KÜTLEÇEKİM TEORİSİ

Bu çalışmada aşağıda genel formu verilen lagrangian baz alınmıştır.

$$L[e^a, \Lambda^a{}_b, \lambda_a, \psi] = L_{Q^2} + L_{R^2} + \lambda_a \wedge T^a + L_m[e^a, \Lambda^a{}_b, \psi] \tag{77}$$

Burada λ_a burulmayı sıfırlayan lagrange çarpanı 0-formu, $L_m[e^a, \Lambda^a{}_b, \psi]$ madde lagrangian 2-formu, L_{Q^2} en genel kuadratik nonmetricity lagrangian terimini

$$\begin{aligned} L_{Q^2} = {} & n_1 Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + n_2(\iota_a Q^{ac}) \wedge *(\iota^b Q_{bc}) + n_3 Q \wedge *Q \\ & + n_4(Q_{ab} \wedge e^b) \wedge *(Q^{ac} \wedge e_c) + n_5(\iota_a Q) \wedge *(\iota_b Q^{ab}) \\ & + n_6(\iota_a Q^{ab}) \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) \end{aligned} \tag{78}$$

ve L_{R^2} de en genel kuadratik eğrilik lagrange terimini temsil etmektedir.

$$\begin{aligned} L_{R^2} = {} & c_1 R^a{}_b \wedge *R^b{}_a + c_2 R^a \wedge *R_a + c_3 \mathcal{R} \wedge *\mathcal{R} \\ & + c_4 R \wedge *R + c_5 \mathcal{R} \wedge R \end{aligned} \tag{79}$$

Bunlarla birlikte $R_a = \iota_b R^b{}_a$ Ricci eğrilik 1-formu, $\mathcal{R} = \iota_a R^a$ eğrilik sklaleri (0-form) ve $R = \eta^{ab} R_{ab}$ eğrilik iz 2-formu olarak tanımlanır. Burada şu noktanın vurgulanmasında fayda var; eğer lagrangian tek sayıda (çift sayıda) hodge yıldızı içeriyorsa parite dönüşümleri altında değişmezdir (değişmez değildir). Yukarıdaki lagrangian ifadesinde iki çiftlenim sabiti, sırasıyla n_6 ve c_5, parite korunumunu bozan terimlerdir.

e^a ve $\Lambda^a{}_b$ için bağımsız varyasyon hesapları sırasında aşağıdaki yararlı özdeşlikler kullanılmıştır.

$$\begin{aligned} & \delta(\alpha \wedge *\beta) = \delta\alpha \wedge *\beta + \delta\beta \wedge *\alpha - \delta e^a \wedge [(\iota_a \beta) \wedge *\alpha - (-1)^p \alpha \wedge (\iota_a * \beta)] \\ & \Omega = 0\,, \quad \iota_a \Omega = 0\,, \quad \iota_{\delta X_a} e^b = -\iota_{X_a} \delta e^a\,, \quad *(\alpha \wedge e_a) = \iota_a * \alpha \\ & e^a \wedge \iota_a \alpha = p\alpha \end{aligned} \tag{80}$$

Burada α and β herhangi bir p-form, Ω herhangi bir 3-formdur. λ_a için varyasyon şunu verir

$$T^a = de^a + \Lambda^a{}_b \wedge e^b = 0\,, \tag{81}$$

e^a için varyasyon şunu verir

$$D\lambda_a + \tau_a[Q] + \tau_a[R] + \tau_a[\psi] = 0\,, \tag{82}$$

$\Lambda^a{}_b$ için varyasyon şunu verir

$$\lambda_a \wedge e^b + \Sigma_a{}^b[Q] + \Sigma_a{}^b[R] + \Sigma_a{}^b[\psi] = 0\,. \tag{83}$$

6.1 Nonmetricity Terimleri için Varyasyon Hesapları

6.1.1 $L_1 = Q_{ab} \wedge *Q^{ab}$ için varyasyon

Bu terimin varyasyon hesabı yapılırken, $\delta(\alpha \wedge *\beta)$ için en genel ifadenin varyasyonu kullanılmıştır.

$$\delta(\alpha \wedge *\beta) = \delta\alpha \wedge *\beta + \delta\beta \wedge *\alpha - \delta e^a \wedge [(\iota_a\beta) \wedge *\alpha - (-1)^p \alpha \wedge (\iota_a * \beta)] \tag{84}$$

Burada $\alpha, \beta \in \bigwedge^p(M)$. Yukarıdaki L_1 lagrange teriminde $\alpha = Q_{ab}, \quad \beta = Q^{ab}$ için hesap yapıldığında

$$\begin{aligned} \delta L_1 &= \delta Q_{ab} \wedge *Q^{ab} + \delta Q^{ab} \wedge *Q_{ab} - \delta e^a \wedge [(\iota_a Q^{ij}) \wedge *Q_{ij} + Q_{ij} \wedge (\iota_a * Q^{ij})] \\ &= \delta Q^{ab} \wedge 2 * Q_{ab} - \delta e^a \wedge [(\iota_a Q^{ij}) \wedge *Q_{ij} + Q_{ij} \wedge (\iota_a * Q^{ij})] \end{aligned} \tag{85}$$

Λ^{ab} ve e^a için bağımsız varyasyon hesapları yapıldığından ötürü son ifadede $\delta\Lambda^{ab}$ ve δe^a terimlerinin görülmesi beklenir. Yukarıdaki eşitlikte δe^a mevcutken $\delta\Lambda^{ab}$ görülmemektedir. Açıkça $\delta\Lambda^{ab}$ terimini elde edebilmek için aşağıdaki matematiksel işlemler yapılır:

$$\begin{aligned} \delta Q^{ab} \wedge 2 * Q_{ab} &= \delta\frac{1}{2}(\Lambda^{ab} + \Lambda^{ba}) \wedge 2 * Q_{ab} \\ &= \delta\Lambda^{ab} \wedge *Q_{ab} + \underbrace{\delta\Lambda^{ba} \wedge *Q_{ab}}_{a \longleftrightarrow b} \\ &= \delta\Lambda^{ab} \wedge *Q_{ab} + \delta\Lambda^{ab} \wedge *Q_{ba} \\ &= \delta\Lambda^{ab} \wedge *Q_{ab} + \delta\Lambda^{ab} \wedge *Q_{ab} \\ &= \delta\Lambda^{ab} \wedge 2 * Q_{ab} \end{aligned} \tag{86}$$

Böylece şuna erişilir

$$\therefore \delta L_1 = \delta\Lambda^{ab} \wedge 2 * Q_{ab} - \delta e^a \wedge \underbrace{[(\iota_a Q^{ij}) \wedge *Q_{ij} + Q_{ij} \wedge (\iota_a * Q^{ij})]}_{i \longrightarrow b, \quad j \longrightarrow c} \tag{87}$$

$$\therefore \ \delta L_1 = \delta\Lambda^{ab} \wedge 2 * Q_{ab} - \delta e^a \wedge [(\iota_a Q^{bc}) \wedge *Q_{bc} + Q^{bc} \wedge (\iota_a * Q_{bc})] \tag{88}$$

6.1.2 $L_2 = (\iota_a Q^{ac}) \wedge *(\iota^b Q_{bc})$ için varyasyon

Eşitlik (84)' deki en genel ifadede aşağıdaki tanımlamalarla birlikte L_2 için varyasyon hesabı yapılırsa

tanımlar :

$\alpha = \iota_a B^a \longrightarrow B^a = Q^{ai}$

$\beta = \iota_b C^b \longrightarrow C^b = Q^{bi}$

$$
\begin{aligned}
\therefore \delta L_2 &= \delta Q^{ai} \wedge *(e_a \wedge \iota_b Q^b{}_i) + \delta Q^{ai} \wedge *(e_a \wedge \iota_b Q^b{}_i) \\
&\quad + \delta e^a \wedge [(\iota_a \iota_c Q^{ci}) \wedge *(\iota_b Q^b{}_i) - (\iota_a Q^{ci}) \wedge *(e_c \wedge \iota_b Q^b{}_i) \\
&\quad - (\iota_a Q^{ci}) \wedge *(e_c \wedge \iota_b Q^b{}_i) + (\iota_c Q^{ci}) \wedge *(e_a \wedge \iota_b Q^b{}_i)] \qquad (89) \\
&= 2\delta Q^{ai} \wedge *(e_a \wedge \iota_b Q^b{}_i) \\
&\quad + \delta e^a \wedge [-(\iota_a Q^{ci})(\iota_b Q^b{}_i) * e_c - (\iota_a Q^{ci})(\iota_b Q^b{}_i) * e_c \\
&\quad + (\iota_c Q^{ci})(\iota_b Q^b{}_i) * e_a] \qquad (90)
\end{aligned}
$$

$Q_{ab} \in \Lambda^1(M_2)$ olduğu için $\iota_a \iota_c Q^{ci} = 0$. Ayrıca $*(e_c \wedge \underbrace{\iota_b Q^b{}_i}_{0-form}) = (\iota_b Q^b{}_i) * e_c$.

$$
\begin{aligned}
\therefore \delta L_2 &= 2\frac{1}{2}\delta(\Lambda^{ai} + \Lambda^{ia}) \wedge (\iota_b Q^b{}_i) * e_a + \delta e^a \wedge [(\iota_c Q^{ci})(\iota_b Q^b{}_i) * e_a - 2(\iota_a Q^{ci})(\iota_b Q^b{}_i) * e_c] \\
&= \delta \Lambda^{ai} \wedge (\iota_b Q^b{}_i) * e_a + \underbrace{\delta \Lambda^{ia} \wedge (\iota_b Q^b{}_i) * e_a}_{a \longleftrightarrow i} + \delta e^a \wedge [\dots] \\
&= \delta \Lambda^{ai} \wedge [\underbrace{(\iota_b Q^b{}_i) * e_a}_{i \longrightarrow b \longrightarrow c} + \underbrace{(\iota_b Q^b{}_a) * e_i}_{i \longrightarrow b \longrightarrow c}] \\
&\quad + \delta e^a \wedge [\underbrace{(\iota_c Q^{ci})(\iota_b Q^b{}_i) * e_a}_{i \longrightarrow c \longrightarrow d} - \underbrace{2(\iota_a Q^{ci})(\iota_b Q^b{}_i) * e_c}_{c \longrightarrow b,\, i \longrightarrow d}] \\
&= \delta \Lambda^{ab} \wedge [(\iota_c Q^c{}_b) * e_a + \iota_c Q^c{}_a) * e_b] \\
&\quad + \delta e^a \wedge [(\iota_d Q^{dc})(\iota_b Q^b{}_c) * e_a - 2(\iota_a Q^{bd})(\iota_c Q^c{}_d) * e_b]
\end{aligned}
$$

Böylece şuna erişilir

$$
\therefore \;\; \delta L_2 = \delta \Lambda^{ab} \wedge [(\iota^c Q_{cb}) * e_a + \iota^c Q_{ca}) * e_b] + \delta e^a \wedge [(\iota_d Q^{dc})(\iota^b Q_{bc}) * e_a - 2(\iota_a Q^{bd})(\iota^c Q_{cd}) * e_b] \qquad (91)
$$

6.1.3 $L_3 = Q \wedge *Q$ için varyasyon

Eşitlik (84)' deki en genel ifadede $\alpha = Q, \quad \beta = Q$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\delta L_3 &= \delta Q \wedge *Q + \delta Q \wedge *Q - \delta e^a \wedge [(\iota_a Q) \wedge *Q + Q \wedge (\iota_a \; *Q)] \\
&= \delta Q \wedge 2 * Q - \delta e^a \wedge [(\iota_a Q) \wedge *Q + Q \wedge (\iota_a \; *Q)]
\end{aligned}
$$

Son ifade, aşağıda verilen eşitlikle yeniden düzenlenir.

$$
Q = Q^a{}_a = \Lambda^a{}_a = \eta_{ab} \Lambda^{ab} \qquad (92)
$$

Son olarak şuna erişilir

$$
\therefore \;\; \delta L_3 = \delta \Lambda^{ab} \wedge 2\eta_{ab} * Q - \delta e^a \wedge [(\iota_a Q) \wedge *Q + Q \wedge (\iota_a \; *Q)] \qquad (93)
$$

6.1.4 $L_4 = (\iota_a Q) \wedge *(\iota_b Q^{ab})$ için varyasyon

$[A \wedge *B = B \wedge *A, \quad A, B \in \Lambda^p(M)]$ özdeşliği kullanılarak L_4 terimi aşağıdaki şekilde yazılır

$$L_4 = (\iota_b Q^{ab}) * (\iota_a Q) = (\iota_a Q^{ab}) * (\iota_b Q) \tag{94}$$

Eşitlik (84)' deki en genel ifadede aşağıdaki tanımlamalarla birlikte L_4 için varyasyon hesabı yapılırsa

definitions :

$\alpha = \iota_a Q^{ab} \qquad \beta = \iota_b R \longrightarrow R := Q$

$$\begin{aligned}
\therefore \delta L_4 &= \delta Q^{ab} \wedge *(e_a \wedge \iota_b Q) + \delta Q \wedge *(e_a \wedge \iota_b Q^{ab}) \\
&\quad + \delta e^a \wedge [(\iota_a \iota_b Q^{bc}) \wedge *(\iota_c Q) - (\iota_a Q^{bc}) \wedge *(e_b \wedge \iota_c Q) \\
&\quad - (\iota_a Q) \wedge *(e_b \wedge \iota_c Q^{bc}) + (\iota_c Q^{bc}) \wedge *(e_a \wedge \iota_b Q)] \\
&= \delta Q^{ab} \wedge (\iota_b Q) * e_a + \delta Q^{ij} \wedge \eta_{ij} (\iota_b Q^{ab}) * e_a \\
&\quad + \delta e^a \wedge [\underbrace{-(\iota_a Q^{bc})(\iota_c Q) * e_b}_{b \longleftrightarrow c} - (\iota_a Q)(\iota_c Q^{bc}) * e_b + (\iota_c Q^{bc})(\iota_b Q) * e_a] \\
&= \delta \Lambda^{ab} \wedge \frac{1}{2}(\iota_b Q) * e_a + \underbrace{\delta \Lambda^{ba} \wedge \frac{1}{2}(\iota_b Q) * e_a}_{a \longleftrightarrow b} + \underbrace{\delta Q^{ij} \wedge \eta_{ij}(\iota_b Q^{ab}) * e_a}_{i \longrightarrow a \longrightarrow d,\ j \longrightarrow b \longrightarrow c} \\
&\quad + \delta e^a \wedge [(\iota_b Q)(\iota_c Q^{bc}) * e_a - (\iota_a Q)(\iota_c Q^{bc}) * e_b - (\iota_b Q)(\iota_a Q^{cb}) * e_c]
\end{aligned}$$

Sonuç olarak şuna erişilir

$$\therefore \begin{array}{c} \delta L_4 = \delta \Lambda^{ab} \wedge \left[\frac{1}{2}(\iota_b Q) * e_a + \frac{1}{2}(\iota_a Q) * e_b + \eta_{ab}(\iota_c Q^{dc}) * e_d\right] \\ + \delta e^a \wedge [(\iota_b Q)(\iota_c Q^{bc}) * e_a - (\iota_a Q)(\iota_c Q^{bc}) * e_b - (\iota_b Q)(\iota_a Q^{cb}) * e_c] \end{array} \tag{95}$$

6.1.5 $L_5 = (Q_{ab} \wedge e^b) \wedge *(Q^{ac} \wedge e_c)$ için varyasyon

Bu terimin varyasyonu için doğrudan eşitlik (84)' deki ifade kullanılabilir.

$$\begin{aligned}
\delta L_5 &= \delta(Q_{ab} \wedge e^b) \wedge *(Q^{ac} \wedge e_c) + \delta(Q^{ac} \wedge e_c) \wedge *(Q_{ab} \wedge e^b) \\
&\quad + \delta e^i \wedge [\iota_i (Q^{ac} \wedge e_c) \wedge *(Q_{ab} \wedge e^b) - (Q_{ab} \wedge e^b) \iota_i * (Q^{ac} \wedge e_c)] \\
&= \delta(Q_{ab} \wedge e^b + Q_{ab} \wedge \delta e^b) * (Q^{ac} \wedge e_c) + \delta(Q^{ac} \wedge e_c + Q^{ac} \wedge \delta e_c) * (Q_{ab} \wedge e^b) \\
&\quad + \delta e^i \wedge [\iota_i (Q^{ac} \wedge e_c) \wedge *(Q_{ab} \wedge e^b)]
\end{aligned}$$

Burada $\iota_i * (Q^{ac} \wedge e_c) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&= (\delta Q_{ab} \wedge e^b) * (Q^{ac} \wedge e_c) + (Q_{ab} \wedge \delta e^b) * (Q^{ac} \wedge e_c) \\
&\quad + \underbrace{(\delta Q^{ac} \wedge e_c) * (Q_{ab} \wedge e^b)}_{c \longleftrightarrow b} + \underbrace{(Q^{ac} \wedge \delta e_c) * (Q_{ab} \wedge e^b)}_{c \longleftrightarrow b} \\
&\quad - \delta e^i \wedge [\iota_i (Q^{ac} \wedge e_c) * (Q_{ab} \wedge e^b)] \\
&= 2(\delta Q_{ab} \wedge e^b) * (Q^{ac} \wedge e_c) + 2(Q_{ab} \wedge \delta e^b) * (Q^{ac} \wedge e_c) \\
&\quad - \underbrace{\delta e^i \wedge [\iota_i (Q^{ac} \wedge e_c) * (Q_{ab} \wedge e^b)]}_{i \longrightarrow b \longrightarrow d} \\
&= 2\frac{1}{2}\delta(\Lambda_{ab} + \Lambda_{ba}) \wedge e^b * (Q^{ac} \wedge e_c) - 2\delta e^b \wedge Q_{ab} * (Q^{ac} \wedge e_c) \\
&\quad - \delta e^b \wedge [\iota_b (Q^{ac} \wedge e_c) * (Q_{ad} \wedge e^d)] \\
&= \delta\Lambda_{ab} \wedge e^b * (Q^{ac} \wedge e_c) + \underbrace{\delta\Lambda_{ba} \wedge e^b * (Q^{ac} \wedge e_c)}_{a \longleftrightarrow b} \\
&\quad - \delta e^b \wedge [2Q_{ab} * (Q^{ac} \wedge e_c) + \iota_b (Q^{ac} \wedge e_c) * (Q_{ad} \wedge e^d)] \\
&= \delta\Lambda_{ab} \wedge [e^b * (Q^{ac} \wedge e_c) + e^a * (Q^{bc} \wedge e_c)] \\
&\quad - \delta e^b \wedge [2Q_{ab} * (Q^{ac} \wedge e_c) + (\iota_b Q^{ac}) e_c * (Q_{ad} \wedge e^d) - Q^{ac}\delta_{bc} * (Q_{ad} \wedge e^d)] \\
&= \delta\Lambda_{ab} \wedge [e^a * (Q^{bc} \wedge e_c) + e^b * (Q^{ac} \wedge e_c)] \\
&\quad - \delta e^b \wedge [2Q_{ab} * (Q^{ac} \wedge e_c) - \underbrace{Q^a{}_b * (Q_{ad} \wedge e^d)}_{d \longrightarrow c} + (\iota_b Q^{ac}) e_c * (Q_{ad} \wedge e^d)] \\
&= \delta\Lambda_{ab} \wedge [e^a * (Q^{bc} \wedge e_c) + e^b * (Q^{ac} \wedge e_c)] \\
&\quad - \delta e^b \wedge [2Q_{ab} * (Q^{ac} \wedge e_c) - Q_{ab} * (Q^{ac} \wedge e_c) + (\iota_b Q^{ac}) e_c * (Q_{ad} \wedge e^d)] \\
&= \delta\Lambda_{ab} \wedge [e^a * (Q^{bc} \wedge e_c) + e^b * (Q^{ac} \wedge e_c)] \\
&\quad - \underbrace{\delta e^b \wedge [Q_{ab} * (Q^{ac} \wedge e_c) + (\iota_b Q^{ac}) e_c * (Q_{ad} \wedge e^d)]}_{b \longleftrightarrow a} \\
&= \delta\Lambda_{ab} \wedge [e^a * (Q^{bc} \wedge e_c) + e^b * (Q^{ac} \wedge e_c)] \\
&\quad - \delta e^a \wedge [Q_{ab} * (Q^{bc} \wedge e_c) + \underbrace{(\iota_a Q^{bc}) e_c * (Q_{bd} \wedge e^d)}_{b \longleftrightarrow d}]
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak şuna erişilir

$$
\therefore \begin{aligned}
\delta L_5 = &\ \delta\Lambda_{ab} \wedge [e^a * (Q^{bc} \wedge e_c) + e^b * (Q^{ac} \wedge e_c)] \\
&+ \delta e^a \wedge [-Q_{ab} * (Q^{bc} \wedge e_c) - (\iota_a Q^{cd}) \wedge e_c * (Q_{bd} \wedge e^b)
\end{aligned} \tag{96}
$$

6.1.6 $L_6 = (\iota_a Q^{ab}) \wedge (e^c \wedge Q_{bc})$ için varyasyon

Bu terimde hodge star ifadesi olmadığından (84) eşitliği kullanılamaz.

$$
\begin{aligned}
\delta L_6 &= \delta(\iota_a Q^{ab}) \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) + (\iota_a Q^{ab}) \wedge \delta(e^c \wedge Q_{bc}) \\
&= (\iota_{\delta a} Q^{ab}) \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) + (\iota_a \delta Q^{ab}) \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) + (\iota_a Q^{ab}) \wedge \delta(e^c \wedge Q_{bc})
\end{aligned} \tag{97}
$$

Öncelikle yukarıdaki son eşitlikteki ilk terim incelenir. Bu inceleme sırasında aşağıda verilen özdeşliklerden yararlanılır:

$$i)\ e^a \wedge \iota_a \omega = p\omega \qquad ,\omega \in \Lambda^p(M) \tag{98}$$

$$ii)\ \delta(\iota_a e^b) = (\delta\iota_a)e^b + \iota_a(\delta e^b) = 0 \Rightarrow (\delta\iota_a)e^b = -\iota_a(\delta e^b) \tag{99}$$

Böylece ilk terim şu hale gelir

$$\begin{aligned} \therefore [(\delta\iota_a)Q^{ab}] \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) &= \iota_{\delta a}(e^i \wedge \iota_i Q^{ab}) \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) \\ &= (\iota_{\delta a} e^i \wedge \iota_i Q^{ab} - e^i \iota_{\delta a}\iota_i Q^{ab}) \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) \\ &= -\iota_a \delta e^i \wedge \iota_i Q^{ab} \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) \end{aligned} \tag{100}$$

Yukarıdaki son ifadeyi türetebilmek için aşağıdaki gibi bir 3-form ifadesi kullanılabilir. 2-boyutta çalışıldığı için bu 3-form ifadesi doğal olarak sıfırdır.

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_a[\underbrace{\delta e^i}_{1-form} \wedge \underbrace{\iota_i Q^{ab}}_{0-form} \wedge \underbrace{(e^c \wedge Q_{bc})}_{2-form}] \\ &= \iota_a \delta e^i \wedge \iota_i Q^{ab} \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) - \delta e^i \wedge \iota_a \iota_i Q^{ab} \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) \\ &\quad - \underbrace{\delta e^i \wedge \iota_i Q^{ab} \wedge \iota_a e^c \wedge Q_{bc}}_{i \longrightarrow a \longrightarrow d} + \underbrace{\delta e^i \wedge \iota_i Q^{ab} \wedge e^c \wedge \iota_a Q_{bc}}_{i \longrightarrow a \longrightarrow c \longrightarrow d} \end{aligned}$$

Burada $\iota_a \iota_i Q^{ab} = 0$.

$$\begin{aligned} &= \iota_a \delta e^i \wedge \iota_i Q^{ab} \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) - \delta e^a \wedge \iota_a Q^{bd} \wedge \iota_d e^c \wedge Q_{bc} + \delta e^a \wedge \iota_a Q^{bc} \wedge e^d \wedge \iota_c Q_{bd} \\ &= \iota_a \delta e^i \wedge \iota_i Q^{ab} \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) - \delta e^a \wedge \iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} + \delta e^a \wedge \iota_a Q^{bc} \wedge e^d \wedge \iota_c Q_{bd} \\ &= \iota_a \delta e^i \wedge \iota_i Q^{ab} \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) - \delta e^a \wedge [\iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} - \iota_a Q^{bc} \wedge (\iota_c Q_{bd}) e^d] \end{aligned}$$

Böylece şunlar yazılabilir

$$\begin{aligned} &\therefore \iota_a \delta e^i \wedge \iota_i Q^{ab} \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) = \delta e^a \wedge [\iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} - \iota_a Q^{bc} \wedge (\iota_c Q_{bd}) e^d] \\ &\therefore (\iota_{\delta a} Q^{ab}) \wedge (e^c \wedge Q_{bc}) = -\delta e^a \wedge [\iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} - \iota_a Q^{bc} \wedge (\iota_c Q_{bd}) e^d] \end{aligned} \tag{101}$$

Şimdi eşitlik (97)' deki ikinci terim incelenebilir.

$$\begin{aligned} 0 &= \iota_a(\underbrace{\delta Q^{ab}}_{1-form} \wedge \underbrace{e^c}_{1-form} \wedge \underbrace{Q_{bc}}_{1-form}) \\ &= \iota_a \delta Q^{ab} \wedge e^c \wedge Q_{bc} - \delta Q^{ab} \wedge \iota_a e^c \wedge Q_{bc} + \delta Q^{ab} \wedge e^c \wedge \iota_a Q_{bc} \\ &= \iota_a \delta Q^{ab} \wedge e^c \wedge Q_{bc} - \delta Q^{ab} \wedge [Q_{ab} - (\iota_a Q_{bc}) e^c] \end{aligned}$$

Böylece

$$\therefore \iota_a \delta Q^{ab} \wedge e^c \wedge Q_{bc} = \delta Q^{ab} \wedge [Q_{ab} - (\iota_a Q_{bc}) e^c] \tag{102}$$

Son olarak eşitlik (97)' deki üçüncü terim incelenir.

$$
\begin{aligned}
(\iota_a Q^{ab}) \wedge \delta(e^c \wedge Q_{bc}) &= \underbrace{(\iota_a Q^{ab}) \wedge \delta e^c \wedge Q_{bc}}_{c \longleftrightarrow a} + \underbrace{(\iota_a Q^{ab}) \wedge e^c \wedge \delta Q_{bc}}_{c \longleftrightarrow a} \\
&= \delta e^a \wedge (\iota_c Q^{bc}) Q_{ab} - \delta Q_{ab} \wedge (\iota_c Q^{bc}) e^a
\end{aligned}
\tag{103}
$$

Şimdi bulunan tüm sonuçlar eşitlik (97)' de yerine yerleştirilirse

$$
\begin{aligned}
\therefore \delta L_6 &= -\delta e^a \wedge [\iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} - \iota_a Q^{bc} \wedge (\iota_c Q_{bd}) e^d] + \delta Q^{ab} \wedge [Q_{ab} - (\iota_a Q_{bc}) e^c] \\
&\quad + \delta e^a \wedge (\iota_c Q^{bc}) Q_{ab} - \delta Q_{ab} \wedge (\iota_c Q^{bc}) e^a \\
&= \delta e^a \wedge [-\iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} + \iota_a Q^{bc} \wedge (\iota_c Q_{bd}) e^d + (\iota_c Q^{bc}) Q_{ab}] \\
&\quad + \delta Q^{ab} \wedge [Q_{ab} - (\iota_a Q_{bc}) e^c - (\iota^c Q_{bc}) e_a] \\
&= \delta e^a \wedge [-\iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} + \iota_a Q^{bc} \wedge (\iota_c Q_{bd}) e^d + (\iota_c Q^{bc}) Q_{ab}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta \Lambda^{ab} \wedge [Q_{ab} - (\iota_a Q_{bc}) e^c - (\iota^c Q_{bc}) e_a] \\
&\quad \underbrace{+ \frac{1}{2} \delta \Lambda^{ba} \wedge [Q_{ab} - (\iota_a Q_{bc}) e^c - (\iota^c Q_{bc}) e_a]}_{a \longleftrightarrow b} \\
&= \delta e^a \wedge [-\iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} + \iota_a Q^{bc} \wedge (\iota_c Q_{bd}) e^d + (\iota_c Q^{bc}) Q_{ab}] \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta \Lambda^{ab} \wedge [2Q_{ab} - (\iota_a Q_{bc}) e^c - (\iota^c Q_{bc}) e_a - (\iota_b Q_{ac}) e^c - (\iota^c Q_{ac}) e_b]
\end{aligned}
$$

Son olarak aşağıdaki sonuca erişilir

$$
\therefore \begin{aligned}
\delta L_6 &= \delta e^a \wedge [-\iota_a Q^{bc} \wedge Q_{bc} + \iota_a Q^{bc} \wedge (\iota_c Q_{bd}) e^d + (\iota_c Q^{bc}) Q_{ab}] \\
&+ \delta \Lambda^{ab} \wedge \left[Q_{ab} - \frac{1}{2} (\iota_a Q_{bc}) e^c - \frac{1}{2} (\iota^c Q_{bc}) e_a - \frac{1}{2} (\iota_b Q_{ac}) e^c - \frac{1}{2} (\iota^c Q_{ac}) e_b \right]
\end{aligned}
\tag{104}
$$

6.2 Eğrilik Terimleri için Varyasyon Hesapları

6.2.1 $L_1 = R^a{}_b \wedge *R^b{}_a$ için varyasyon

Bu terim için eşitlik (84)' deki en genel ifadede $\alpha = R^a{}_b$, $\beta = R^b{}_a$, $p = 2$ kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\delta L_1 &= \delta R^a{}_b \wedge *R^b{}_a + \underbrace{\delta R^b{}_a \wedge *R^a{}_b}_{a \longleftrightarrow b} \underbrace{- \delta e^c \wedge [(\iota_c R^b{}_a) \wedge *R^a{}_b - R^a{}_b \wedge (\iota_c * R^b{}_a)]}_{a \longleftrightarrow c} \\
&= \delta R^a{}_b \wedge 2 * R^b{}_a + - \delta e^a \wedge [(\iota_a R^b{}_c) \wedge *R^c{}_b] \\
&= \delta \Lambda^a{}_b \wedge 2D * R^b{}_a - \delta e^a \wedge [(\iota_a R^b{}_c) \wedge *R^c{}_b]
\end{aligned}
\tag{105}
$$

Burada $\delta R^a{}_b \wedge \Psi = \delta \Lambda^a{}_b \wedge D\Psi$ özdeşliği kullanıldı; Ψ herhangi bir (n-2)-form.

$$
\therefore \delta L_1 = \delta \Lambda^a{}_b \wedge 2D * R^b{}_a - \delta e^a \wedge [(\iota_a R^b{}_c) \wedge *R^c{}_b] \tag{106}
$$

6.2.2 $L_2 = R^a \wedge *R_a$ için varyasyon

Eşitlik (84)' deki en genel ifadede aşağıdaki tanımlamalarla birlikte L_2 için varyasyon hesabı yapılırsa:
$\alpha = \iota_a B^a \longrightarrow B^a = R^{ai}$
$\beta = \iota_b C^b \longrightarrow C^b = R^b{}_i$

$$\begin{aligned}
\delta L_2 &= \delta B^a \wedge *(e_a \wedge \iota_b C^b) + \delta C^a \wedge *(e_a \wedge \iota_b B^b) \\
&\quad + \delta e^a \wedge [(\iota_a \iota_c B^c) \wedge *(\iota_b C^b) - (\iota_a B^c) \wedge *(e_c \wedge \iota_b C^b) \\
&\quad - (\iota_a C^c) \wedge *(e_c \wedge \iota_b B^b) + (\iota_c B^c) \wedge *(e_a \wedge \iota_b C^b)] \\
&= \delta R^{ai} \wedge *(e_a \wedge \iota_b R^b{}_i) + \delta R^a{}_i \wedge *(e_a \wedge \iota_b R^{bi}) \\
&\quad + \delta e^a \wedge [(\iota_a \iota_c R^{ci}) \wedge *(\iota_b R^b{}_i) - (\iota_a R^{ci}) \wedge *(e_c \wedge \iota_b R^b{}_i) \\
&\quad - (\iota_a R^c{}_i) \wedge *(e_c \wedge \iota_b R^{bi}) + (\iota_c R^{ci}) \wedge *(e_a \wedge \iota_b R^b{}_i)] \\
&= \delta R^{ab} \wedge *(e_a \wedge R_b) + \delta R^a{}_b \wedge *(e_a \wedge R^b) \\
&\quad + \delta e^a \wedge [(\iota_a R^b) \wedge *R_b - R^b \wedge (\iota_a * R_b) + 2(\iota_a R^{cb}) \wedge (\iota_c * R_b)] \\
&= \delta R^a{}_b \wedge 2 * (e_a \wedge R^b) \\
&\quad + \delta e^a \wedge [(\iota_a R^b) \wedge *R_b - R^b \wedge (\iota_a * R_b) + 2(\iota_a R^{cb}) \wedge (\iota_c * R_b)] \\
&= \delta \Lambda^a{}_b \wedge 2D[*(e_a \wedge R^b)] + \delta e^a \wedge [\iota_a (R^b \wedge *R_b) + 2(\iota_a R^{cb}) \wedge (\iota_c * R_b)]
\end{aligned} \tag{107}$$

Burada $*(K \wedge e_a) = \iota_a \wedge *K$ ve $\delta R^a{}_b \wedge \Psi = \delta \Lambda^a{}_b \wedge D\Psi$ özdeşlikleri kullanıldı; K herhangi bir form ve Ψ herhangi bir (n-2)-form. Buna göre sonuç

$$\therefore \delta L_2 = \delta \Lambda^a{}_b \wedge [-2D(\iota_a * R^b)] + \delta e^a \wedge [\iota_a (R^b \wedge *R_b) + 2(\iota_a R^{cb}) \wedge (\iota_c * R_b)] \tag{108}$$

6.2.3 $L_3 = \mathcal{R} \wedge *\mathcal{R}$ için varyasyon

Eşitlik (84)' deki en genel ifadede aşağıdaki tanımlamalarla birlikte L_3 için varyasyon hesabı yapılırsa:
$\alpha = \iota_a B^a \longrightarrow B^a = R^a$
$\beta = \iota_b C^b \longrightarrow C^b = R^b$

$$
\begin{aligned}
\delta L_3 = {} & \delta R^a \wedge *(e_a \wedge \iota_b R^b) + \delta R^a \wedge *(e_a \wedge \iota_b R^b) \\
& + \delta e^a \wedge [(\iota_a \iota_c R^c) \wedge *(\iota_b R^b) - (\iota_a R^c) \wedge *(e_c \wedge \iota_b R^b) \\
& - (\iota_a R^c) \wedge *(e_c \wedge \iota_b R^b) + (\iota_c R^c) \wedge *(e_a \wedge \iota_b R^b)] \\
= {} & \delta R^a \wedge \iota_a * \mathcal{R} + \delta R^a \wedge \iota_a * \mathcal{R} \\
& + \delta e^a \wedge [-(\iota_a R^c) \wedge \iota_c * \mathcal{R} - (\iota_a R^c) \wedge \iota_c * \mathcal{R} + \mathcal{R} \wedge \iota_a * \mathcal{R}] \\
= {} & 2\delta R^a \wedge \iota_a * \mathcal{R} + \delta e^a \wedge [-(\iota_a R^c) \wedge 2\iota_c * \mathcal{R} + \mathcal{R} \wedge \iota_a * \mathcal{R}] \\
= {} & \delta R^a \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} + f(\delta e^a)
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Burada $*(e_a \wedge \mathcal{R}) = *(\mathcal{R} \wedge e_a) = \iota_a * \mathcal{R}$ ve $\iota_a \iota_c R^c = 0$ özdeşlikleri kullanıldı; $\mathcal{R}$ bir 0-form, R^c bir 1-form. Şimdi son eşitlikteki δR^a terimi incelenirse

$$
\begin{aligned}
R^a = \iota_b R^{ba} \Rightarrow \delta R^a &= \delta(\iota_b R^{ba}) \\
&= \iota_{\delta b} R^{ba} + \iota_b \delta R^{ba}
\end{aligned}
\tag{110}
$$

İlk terim için aşağıdaki işlemler yapılır

$$
\begin{aligned}
\iota_{\delta b} R^{ba} &= \iota_{\delta b}(R^{ba}{}_{cd}\, e^{cd})\frac{1}{2} \\
&= (\iota_{\delta b} e^c)\, \underbrace{R^{ba}{}_{cd}\, e^d)}_{\iota_c R^{ba}} \\
&= -(\iota_b \delta e^c) \iota_c R^{ba}
\end{aligned}
\tag{111}
$$

Burada son eşitlikte $\delta(\iota_b e^c) = 0 = \iota_{\delta b} e^c + \iota_b \delta e^c \Rightarrow \iota_{\delta b} e^c = -(\iota_b \delta e^c)$ kullanıldı. Bulunan bu sonuç (110) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\delta R^a = -(\iota_b \delta e^c) \iota_c R^{ba} + \iota_b \delta R^{ba}
\tag{112}
$$

Şimdi bulunan sonuç (109) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\delta L_3 &= [-(\iota_b \delta e^c) \iota_c R^{ba} + \iota_b \delta R^{ba}] \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} + f(\delta e^a) \\
&= -(\iota_b \delta e^c) \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} + \iota_b \delta R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} + f(\delta e^a)
\end{aligned}
\tag{113}
$$

Son ifadede birinci ve ikinci terimler incelenir. İlk terim için

$$
\begin{aligned}
0 &= \iota_b(\delta e^c \wedge \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R}) \qquad \text{, since inside the brackets reads 3-form} \\
&= \iota_b \delta e^c \wedge \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} - \delta e^c \wedge \iota_b \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} + \delta e^c \wedge \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_b \iota_a * \mathcal{R} \\
&= (\iota_b \delta e^c) \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} - \delta e^c \wedge \underbrace{(\iota_b \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} - \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_b \iota_a * \mathcal{R})}_{\iota_b(\iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R})}
\end{aligned}
\tag{114}
$$

$\therefore (\iota_b \delta e^c) \iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} = \delta e^c \wedge \iota_b(\iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R})$

Şimdi (113) eşitliğindeki ikinci terim için

$$
\begin{aligned}
0 &= \iota_b(\delta R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R}) \qquad \text{, since inside the brackets reads 3-form} \\
&= \iota_b \delta R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} + \delta R^{ba} \wedge 2\iota_b\iota_a * \mathcal{R} \qquad (115)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \iota_b \delta R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R} = -\delta R^{ba} \wedge 2\iota_b\iota_a * \mathcal{R}$$

(114) ve (115) ifadeleri (113) eşitliğinde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\delta L_3 &= \underbrace{-\delta e^c \wedge \iota_b(\iota_c R^{ba} \wedge 2\iota_a * \mathcal{R})}_{a \longleftrightarrow c} - \delta R^{ba} \wedge 2\iota_b\iota_a * \mathcal{R} + f(\delta e^a) \\
&= -\delta R^{ba} \wedge 2\iota_b\iota_a * \mathcal{R} - \delta e^a \wedge \iota_b(\iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_c * \mathcal{R}) + f(\delta e^a) \qquad (116) \\
&= \delta R^a{}_b \wedge 2\iota^b\iota_a * \mathcal{R} - \delta e^a \wedge \iota_b(\iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_c * \mathcal{R}) + f(\delta e^a) \\
&= \delta \Lambda^a{}_b \wedge 2D(\iota^b\iota_a * \mathcal{R}) - \delta e^a \wedge \iota_b(\iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_c * \mathcal{R}) + f(\delta e^a)
\end{aligned}
$$

Şimdi δL_3 ifadesinin açıkça elde edilmesi için $f(\delta e^a)$ teriminin açık hali yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\delta L_3 &= \delta \Lambda^a{}_b \wedge 2D(\iota^b\iota_a * \mathcal{R}) \\
&\quad + \underbrace{\delta e^a \wedge [-\iota_b(\iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_c * \mathcal{R}) - (\iota_a R^c) \wedge 2\iota_c * \mathcal{R} + \mathcal{R} \wedge \iota_a * \mathcal{R}]}_{f(\delta e^a)} \qquad (117)
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki ifadede yeni tanımlanan $f(\delta e^a)$ terimi incelenir.

$$
\begin{aligned}
f(\delta e^a) &= \delta e^a \wedge [-\underbrace{\iota_b\iota_a}_{\leftrightarrows} R^{bc} \wedge 2\iota_c * \mathcal{R} + \iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_b\iota_c * \mathcal{R} - (\iota_a R^c) \wedge 2\iota_c * \mathcal{R} + \mathcal{R} \wedge \iota_a * \mathcal{R}] \\
&= \delta e^a \wedge [\underbrace{\iota_a\iota_b R^{bc}}_{\iota_a R^c} \wedge 2\iota_c * \mathcal{R} + \iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_b\iota_c * \mathcal{R} - (\iota_a R^c) \wedge 2\iota_c * \mathcal{R} + \mathcal{R} \wedge \iota_a * \mathcal{R}] \qquad (118) \\
&= \delta e^a \wedge (\iota_a R^c \wedge 2\iota_c * \mathcal{R} + \iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_b\iota_c * \mathcal{R} - \iota_a R^c \wedge 2\iota_c * \mathcal{R} + \mathcal{R} \wedge \iota_a * \mathcal{R}) \\
&= \delta e^a \wedge (\iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_b\iota_c * \mathcal{R} + \mathcal{R} \wedge \iota_a * \mathcal{R})
\end{aligned}
$$

Bulunan son sonuç (117) eşitliğinde kullanılırsa

$$\therefore \delta L_3 = \delta \Lambda^a{}_b \wedge 2D(\iota^b\iota_a * \mathcal{R}) + \delta e^a \wedge (\iota_a R^{bc} \wedge 2\iota_b\iota_c * \mathcal{R} + \mathcal{R} \wedge \iota_a * \mathcal{R}) \qquad (119)$$

$$\therefore \delta L_3 = \delta \Lambda^a{}_b \wedge 2D(\mathcal{R} * e_a{}^b) + \delta e^a \wedge (\iota_a R^{bc} \wedge 2\mathcal{R} * e_{cb} + \mathcal{R}^2 * e_a) \qquad (120)$$

6.2.4 $L_4 = R \wedge *R$ için varyasyon

Eşitlik (84)' deki en genel ifade doğrudan kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\delta L_4 &= \delta R \wedge *R + \delta R \wedge *R - \delta e^a \wedge [(\iota_a R) \wedge *R - R \wedge (\iota_a * R)] \\
&= 2\delta R \wedge *R - \delta e^a \wedge [(\iota_a R) \wedge *R] \\
&= \delta(\eta_{ba} R^{ab}) \wedge 2 * R - \delta e^a \wedge (\iota_a R \wedge *R) \qquad (121) \\
&= \delta R^a{}_b \wedge 2\eta^b{}_a * R - \delta e^a \wedge (\iota_a R \wedge *R) \\
&= \delta \Lambda^a{}_b \wedge 2D(\eta^b{}_a * R) - \delta e^a \wedge (\iota_a R \wedge *R)
\end{aligned}
$$

Burada $\delta R^a{}_b \wedge \Psi = \delta\Lambda^a{}_b \wedge D\Psi$ özdeşliği kullanıldı; Ψ herhangi bir (n-2)-form. Buna göre sonuç

$$\therefore \delta L_4 = \delta\Lambda^a{}_b \wedge 2D(\eta^b{}_a * R) - \delta e^a \wedge (\iota_a R \wedge *R) \tag{122}$$

6.2.5 $L_5 = \mathcal{R} \wedge R$ için varyasyon

Bu terim için doğrudan aşağıdaki şekilde hesap yapılabilir

$$\begin{aligned}\delta L_5 &= \delta\mathcal{R} \wedge R + \mathcal{R} \wedge \delta R \\ &= \delta(\iota_a R^a) \wedge R + \mathcal{R} \wedge \delta(\eta_{ba} R^{ab}) \\ &= \delta R^a{}_b \wedge \eta^b{}_a \mathcal{R} + (\iota_{\delta a} R^a) \wedge R + (\iota_a \delta R^a) \wedge R \\ &= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a \mathcal{R}) + (\iota_{\delta a} R^a) \wedge R + (\iota_a \delta R^a) \wedge R\end{aligned} \tag{123}$$

Yukarıdaki ifadede son iki terim incelenir. Öncelikle ikinci terimde aşağıdaki matematiksel işlemler yapılırsa

$$0 = \iota_{\delta a}(R^a \wedge R) = (\iota_{\delta a} R^a) \wedge R - R^a \wedge (\iota_{\delta a} R) \tag{124}$$

Burada parantez içindeki ifade bir 3-form olduğu için 2-boyutta sıfırlanır.

$$\begin{aligned}(\iota_{\delta a} R^a) \wedge R &= R^a \wedge (\iota_{\delta a} R) \\ &= R^a \wedge \eta_{dc}(\iota_{\delta a} R^{cd}) \\ &= R^a \wedge \eta_{dc}\iota_{\delta a}(R^{cd}{}_{,mn}\, e^{mn})\frac{1}{2} \\ &= R^a \wedge \eta_{dc}(\iota_{\delta a} e^m) R^{cd}{}_{,mn}\, e^n \\ &= -R^a \wedge \eta_{dc}(\iota_a \delta e^m)(\iota_m R^{cd}) \\ &= -R^a \wedge (\iota_a \delta e^b)(\iota_b R) \\ &= -(\iota_a \delta e^b) R^a \wedge (\iota_b R)\end{aligned} \tag{125}$$

Yukarıdaki ifadede şu kullanılırsa

$$0 = \iota_b(R^a \wedge R) \Rightarrow R^a \wedge (\iota_b R) = (\iota_b R^a) \wedge R \tag{126}$$

aşağıdaki sonuca erişilir

$$(\iota_{\delta a} R^a) \wedge R = -(\iota_a \delta e^b)(\iota_b R^a) \wedge R \tag{127}$$

Son ifadede aşağıdaki işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}0 &= \iota_a[\delta e^b \wedge (\iota_b R^a) R] \\ &= (\iota_a \delta e^b) \wedge (\iota_b R^a) R - \delta e^b \wedge (\iota_b R^a)(\iota_a R)\end{aligned} \tag{128}$$

şunu verir

$$(\iota_a \delta e^b) \wedge (\iota_b R^a) R = \delta e^b \wedge (\iota_b R^a)(\iota_a R) \tag{129}$$

böylece aşağıdaki sonuca ulaşılır

$$(\iota_{\delta a} R^a) \wedge R = -\delta e^a \wedge (\iota_a R^b)(\iota_b R) \tag{130}$$

Şimdi yukarıda türetilen ifadeler (123) eşitliğinde kullanılırsa δL_5 terimi şu şekilde düzenlenir

$$\delta L_5 = \delta \Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a \mathcal{R}) - \delta e^a \wedge (\iota_a R^b)(\iota_b R) + (\iota_a \delta R^a) \wedge R \tag{131}$$

Yukarıdaki son terimde şu işlemler yapılır

$$\begin{aligned} 0 = \iota_a(\delta R^a \wedge R) \Rightarrow (\iota_a \delta R^a) \wedge R &= \delta R^a \wedge \iota_a R \\ &= (\delta(\iota_b R^{ba})) \wedge \iota_a R \\ &= (\iota_{\delta b} R^{ba}) \wedge (\iota_a R) + (\iota_b \delta R^{ba}) \wedge \iota_a R \end{aligned} \tag{132}$$

son ifadedeki ikinci terimde şu işlemler yapılır

$$\begin{aligned} 0 = \iota_b(\delta R^{ba} \wedge (\iota_a R)) \Rightarrow (\iota_b \delta R^{ba}) \wedge (\iota_a R) &= \underbrace{-\delta R^{ba} \wedge \iota_b \iota_a R}_{a \longleftrightarrow b} \\ &= -\delta R^a{}_b \wedge \iota_a \iota^b R \\ &= -\delta \Lambda^a{}_b \wedge D(\iota_a \iota^b R) \end{aligned} \tag{133}$$

Elde edilen sonuçlar (132) eşitliğinde kullanlırsa

$$(\iota_a \delta R^a) \wedge R = (\iota_{\delta b} R^{ba}) \wedge (\iota_a R) - \delta \Lambda^a{}_b \wedge D(\iota_a \iota^b R) \tag{134}$$

Elde edilen son sonuç (131) eşitliğinde kullanılır ve δL_5 terimi yeniden düzenlenirse

$$\delta L_5 = \delta \Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a \mathcal{R}) - \delta e^a \wedge (\iota_a R^b)(\iota_b R) - \delta \Lambda^a{}_b \wedge D(\iota_a \iota^b R) + (\iota_{\delta b} R^{ba}) \wedge (\iota_a R) \tag{135}$$

Şimdi yukarıdaki son terim incelenir

$$\begin{aligned} \iota_{\delta b} R^{ba} \wedge \iota_a R &= \frac{1}{2} \iota_{\delta b}(R^{ba}{}_{,cd}\, e^{cd}) \wedge \iota_a R \\ &= -(\iota_b \delta e^c)(\iota_c R^{ba}) \wedge \iota_a R \end{aligned} \tag{136}$$

Son ifadede şu matematiksel işlemler yapılırsa

$$0 = \iota_b(\delta e^c \wedge \iota_c R^{ba} \wedge \iota_a R) = (\iota_b \delta e^c)(\iota_c R^{ba}) \wedge \iota_a R - \delta e^c (\iota_b \iota_c R^{ba}) \wedge \iota_a R + \delta e^c \wedge \iota_c R^{ba}(\iota_b \iota_a R) \tag{137}$$

böylece

$$\begin{aligned} -(\iota_b \delta e^c)(\iota_c R^{ba}) \wedge \iota_a R &= \delta e^c \wedge [\iota_c R^{ba}(\iota_b \iota_a R) - (\iota_b \iota_c R^{ba}) \wedge \iota_a R] \\ &= \underbrace{\delta e^c \wedge [\iota_c R^{ba}(\iota_b \iota_a R) + (\iota_c R^a) \wedge \iota_a R]}_{a \longrightarrow c} \\ &= \delta e^a \wedge [\iota_a R^{bc}(\iota_b \iota_c R) + (\iota_a R^b) \wedge \iota_b R] \end{aligned} \tag{138}$$

Son sonuçlar (135) eşitliğinde kullanılırsa δL_5 için aşağıdaki sonuca erişilir

$$\begin{aligned}
\delta L_5 &= \delta\Lambda^a{}_b[D(\eta^b{}_a\mathcal{R}) - D(\iota_a\iota^b R)] + \delta e^a \wedge [\iota_a R^{bc} \wedge \iota_b\iota_c R + \iota_a R^b \wedge \iota_b R - \iota_a R^b \wedge \iota_b R] \\
&= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a\mathcal{R} - \iota_a\iota^b R) + \delta e^a \wedge (\iota_a R^{bc} \wedge \iota_b\iota_c R) \\
&= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a\mathcal{R} - \iota_a\iota^b R) + \delta e^a \wedge \iota_a(\iota_b\iota_c R \wedge R^{bc}) \\
&= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a\mathcal{R} - \iota_a\iota^b R) + \delta e^a \wedge \iota_a(\iota_c R \wedge \iota_b R^{bc}) \\
&= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a\mathcal{R} - \iota_a\iota^b R) + \delta e^a \wedge \iota_a(\iota_c R \wedge R^{c}) \\
&= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a\mathcal{R} - \iota_a\iota^b R) + \delta e^a \wedge \iota_a(-R \wedge \iota_c R^{c}) \\
&= \delta\Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a\mathcal{R} - \iota_a\iota^b R) + \delta e^a \wedge (-\iota_a R)\mathcal{R}
\end{aligned} \tag{139}$$

$$\therefore \delta L_5 = \delta\Lambda^a{}_b \wedge D(\eta^b{}_a\mathcal{R} - \iota_a\iota^b R) + \delta e^a \wedge (-\iota_a R)\mathcal{R} \tag{140}$$

6.3 Alan Denklemi Terimlerinin Belirlenmesi

Bu bölümde alan denklemlerinde görülen nicelikler tanımlanacaktır. $\tau_a[\psi] := \partial L_m/\partial e^a$ madde enerji-momentum 1-formu ve $\Sigma_a{}^b[\psi] := \partial L_m/\partial\Lambda^a{}_b$ madde açısal momentum 1-formu temsil eder. Bunlarla birlikte $\tau_a[Q]$ nonmetricity enerji-momentum 1-formudur

$$\begin{aligned}
\tau_a[Q] = n_1\,{}^1\tau_a[Q] + n_2\,{}^2\tau_a[Q] + n_3\,{}^3\tau_a[Q] + n_4\,{}^4\tau_a[Q] \\
+ n_5\,{}^5\tau_a[Q] + n_6\,{}^6\tau_a[Q]
\end{aligned} \tag{141}$$

Burada

$$\begin{aligned}
{}^1\tau_a[Q] &:= -[(\iota_a Q^{bc}) \wedge *Q_{bc} + Q^{bc} \wedge (\iota_a * Q_{bc})] \\
{}^2\tau_a[Q] &:= (\iota_d Q^{dc})(\iota^b Q_{bc}) * e_a - 2(\iota_a Q^{bd})(\iota^c Q_{cd}) * e_b \\
{}^3\tau_a[Q] &:= -[(\iota_a Q) \wedge *Q + Q \wedge (\iota_a * Q)] \\
{}^4\tau_a[Q] &:= -[Q_{ab} * (Q^{bc} \wedge e_c) + (\iota_a Q^{cd}) \wedge e_c * (Q_{bd} \wedge e^b)] \\
{}^5\tau_a[Q] &:= (\iota_b Q)(\iota_c Q^{bc}) * e_a - (\iota_a Q)(\iota_c Q^{bc}) * e_b - (\iota_b Q)(\iota_a Q^{cb}) * e_c \\
{}^6\tau_a[Q] &:= -(\iota_a Q^{bc})Q_{bc} + (\iota_a Q^{bc})(\iota_c Q_{bd})e^d + (\iota_c Q^{bc})Q_{ab}\,.
\end{aligned} \tag{142}$$

$\tau_a[R]$ ise eğrilik enerji-momentum 1-formudur

$$\tau_a[R] = c_1\,{}^1\tau_a[R] + c_2\,{}^2\tau_a[R] + c_3\,{}^3\tau_a[R] + c_4\,{}^4\tau_a[R] + c_5\,{}^5\tau_a[R] \tag{143}$$

Burada

$$\begin{aligned}
{}^1\tau_a[R] &:= -(\iota_a R^b{}_c) \wedge *R^c{}_b \\
{}^2\tau_a[R] &:= \iota_a(R^b \wedge *R_b) + 2(\iota_a R^{cb}) \wedge (\iota_c * R_b) \\
{}^3\tau_a[R] &:= (\iota_a R^{bc}) \wedge 2\mathcal{R} * e_{cb} + \mathcal{R}^2 * e_a \\
{}^4\tau_a[R] &:= -(\iota_a R) \wedge *R
\end{aligned} \tag{144}$$

$$ {}^5\tau_a[R] := -(\iota_a R)\mathcal{R}\,. $$

${\Sigma_a}^b[Q]$ nonmetricity açısal momentum 1-formudur

$$ \begin{aligned} {\Sigma_a}^b[Q] = n_1\,{}^1{\Sigma_a}^b[Q] + n_2\,{}^2{\Sigma_a}^b[Q] + n_3\,{}^3{\Sigma_a}^b[Q] + n_4\,{}^4{\Sigma_a}^b[Q] \\ + n_5\,{}^5{\Sigma_a}^b[Q] + n_6\,{}^6{\Sigma_a}^b[Q] \end{aligned} \tag{145} $$

Burada

$$ \begin{aligned} {}^1{\Sigma_a}^b[Q] &:= 2 * {Q_a}^b \\ {}^2{\Sigma_a}^b[Q] &:= (\iota_c Q^{cb}) * e_a + (\iota^c Q_{ca}) * e^b \\ {}^3{\Sigma_a}^b[Q] &:= 2\delta_a^b * Q \\ {}^4{\Sigma_a}^b[Q] &:= e_a \wedge *(Q^{bc} \wedge e_c) + e^b \wedge *(Q_{ac} \wedge e^c) \\ {}^5{\Sigma_a}^b[Q] &:= \frac{1}{2}(\iota^b Q) * e_a + \frac{1}{2}(\iota_a Q) * e^b + \delta_a^b(\iota_c Q^{dc}) * e_d \\ {}^6{\Sigma_a}^b[Q] &:= {Q_a}^b - \frac{1}{2}(\iota_a Q^{bc})e_c - \frac{1}{2}(\iota^b Q_{ac})e^c - \frac{1}{2}(\iota^c Q_{ac})e^b - \frac{1}{2}(\iota_c Q^{bc})e_a\,. \end{aligned} \tag{146} $$

Son olarak, ${\Sigma_a}^b[R]$ eğrilik açısal momentum 1-formudur

$$ {\Sigma_a}^b[R] = c_1\,{}^1{\Sigma_a}^b[R] + c_2\,{}^2{\Sigma_a}^b[R] + c_3\,{}^3{\Sigma_a}^b[R] + c_4\,{}^4{\Sigma_a}^b[R] + c_5\,{}^5{\Sigma_a}^b[R] \tag{147} $$

Burada

$$ \begin{aligned} {}^1{\Sigma_a}^b[R] &:= 2D * {R^b}_a \\ {}^2{\Sigma_a}^b[R] &:= -2D(\iota_a * R^b) \\ {}^3{\Sigma_a}^b[R] &:= 2D(\mathcal{R} * {e_a}^b) \\ {}^4{\Sigma_a}^b[R] &:= 2D(\delta_a^b * R) \\ {}^5{\Sigma_a}^b[R] &:= D(\delta_a^b\mathcal{R} - \iota_a\iota^b R)\,. \end{aligned} \tag{148} $$

Şimdi λ_a ifadesi, bağlantı alan denklemi (83)' e iç çarpım (ι_b) uygulanarak hesaplanabilir.

$$ \lambda_a = -\frac{1}{2}\iota_b\left({\Sigma_a}^b[Q] + {\Sigma_a}^b[R] + {\Sigma_a}^b[\psi]\right)\,. \tag{149} $$

Daha sonra bu sonuç koçerçeve alan denklemi (82)' te kullanılır. Böylece çözülmek üzere eşitlik (81), (82), (149) ve $\partial L_m/\partial\psi = 0$ alan denklemleri elde edilmiş olur.

6.4 Bazı Küresel Simetrik Statik Çözüm Sınıfları

Metrik için aşağıdaki ansatz ele alınsın

$$ e^0 = f(r)dt\,, \quad e^1 = g(r)dr \tag{150} $$

Bununla birlikte $x^\alpha = (t, r)$ koordinat haritasında nonmetricity için de bağımsız olarak aşağıdaki ansatz yapılsın

$$
\begin{aligned}
&Q^{00} = h_1(r)dt + h_2(r)dr\,, \quad Q^{11} = h_3(r)dt + h_4(r)dr \\
&Q^{01} = h_5(r)dt + h_6(r)dr
\end{aligned} \tag{151}
$$

Bilgisayar sistemi REDUCE ve paketi EXCALC ile [9],[10] doğrulandığı üzere yukarıdaki ansatz konfigürasyonu sıfır burulma koşulunu sağlamaktadır (81). Bağlantı 1-form bileşenleri $\Lambda_{ab} = \omega_{ab} + q_{ab} + Q_{ab}$ ise (150) ve (151) ifadelerinin (32) ve (34) eşitliklerinde kullanılmasıyla hesaplanabilir

$$
\begin{aligned}
\Lambda_{00} &= \frac{1}{fg}\left(gh_1e^0 + fh_2e^1\right)\,, \\
\Lambda_{10} &= \frac{1}{fg}\left[\left(f' - fh_2 - 2gh_5\right)e^0 + gh_3e^1\right]\,, \\
\Lambda_{01} &= \frac{1}{fg}\left[\left(-f' + fh_2\right)e^0 + \left(-2fh_6 - gh_3\right)e^1\right]\,, \\
\Lambda_{11} &= \frac{1}{fg}\left(gh_3e^0 + fh_4e^1\right)
\end{aligned} \tag{152}
$$

Burada üstel indis ('), r' ye göre türevi temsil etmektedir. Böylece alan denklemleri (82) ve (149) çok karmaşık diferansiyel denklem seti verirler.

Çözüm için denemeler sırasında gözlendiği üzere aşağıdaki konfigürasyon altında f ve h_i fonksiyonları rastgele seçilebilir olmaktadır. Bu koşullar altında teori önemsiz olmaktadır.

$$
\begin{aligned}
&g(r) = 1/f(r)\,, \\
&c_3 = -c_2 = c_1 \neq 0\,, \quad c_4 = c_5 = 0\,, \\
&n_3 = -n_4 = -n_5/2 = n_2 \neq 0\,, \quad n_1 = n_6 = 0
\end{aligned} \tag{153}
$$

7 SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Einstein genel görelilik teorisinin değiştirilmesi amacıyla Riemann ötesi geometrik yapının kullanıldığı bir yöntem takip edilmiştir. Bununla birlikte ayar teorisi yaklaşımı uygulanmış ve kütleçelim lokal olarak ayar değişmez bir lagrangian ile modellenmiştir. Nonmetricity ve eğrilik için kuadratik olan, parite koruyan ve korumayan terimleri içeren en genel lagrangian belirlenmiştir. Belirlenen bu lagrangian terimlerinin her biri üzerinde tüm bağlantı ve koçerçeve için bağımsız varyasyon hesapları yapılmış ve bu hesaplar sonucu alan denklemleri elde edilmiştir. Başlangıçta en genel lagrangian üzerinde herhangi bir kısıt koymadan elde edilen bu alan denklemleri kullanılarak analitik çözüm olup olmadığı araştırılmıştır. Seçilen en genel lagrangian ifadesinnin içerdiği terim sayısının fazla olması bir çözüm bulunmasını zorlaştırmıştır. Bu kapsamda nonmetricity ve metrik tensörlerinde yer alan serbest fonksiyon değişkenleri için birtakım önermelerle çözüm aranmıştır. Konuyla ilgili ilerleyen süreçte çalışılabilecek noktalar arasında yukarıda sözü edilen, en genel lagrangian ifadesinden türetilen alan denklemlerine (bilgisayar sistemlerinin de yardımıyla) çözüm aramak sayılabilir. Serbest değişken sayısı azaltılarak ve/veya değişkenler için farklı önermeler denenerek matematiksel bir çözüm aranabilir. Tez çalışma ekibinin de planları arasında bu devam yolu yer almaktadır. Bunun dışında tez sırasında uygulanmış bir diğer yöntem ise, başlangıçta seçilen lagrangian ifadesinin değiştirilmesi olacaktır. Bu anlamda daha basit ve daha az terim içeren lagrangian ifadeleri için türetilen alan denklemleri incelenebilir. Bu yöntem kapsamında tez ekibi tarafından kayda değmeyen denemeler yapılmış olup ilerleyen süreçte daha detaylı çalışılması planlanmıştır.

8 KAYNAKLAR

[1] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (Wiley, New York, 1987).

[2] M. Adak, Gauge approach to the symmetric teleparallel gravity, *Int. J. Geomet. Meth. Modern Phys.* **15** (2018), 1850198

[3] I. M. Benn, T. Dereli and R. W. Tucker, Double-dual solutions of generalized theories of gravitation, *Gen. Relat. Gravit.* **13** (1981), 581-589.

[4] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke and Y. Ne'eman, Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance, *Physics Reports* **258** (1995), 1-171.

[5] I. M. Benn, T. Dereli and R. W. Tucker, A critical analysis of some fundamental differences in gauge approaches to gravitation *J. Phys. A* **15** (1982), 849-866.

[6] R. W. Tucker and C. Wang, Black holes with Weyl charge and non-Riemannian waves, *Class. Quantum Grav.* **12** (1995), 2587-2606.

[7] T. Dereli and R. W. Tucker, Non-metricity induced by dilaton gravity in two dimensions, *Class. Quantum Grav.* **11** (1994), 2575-2584.

[8] M. Adak, M. Kalay and Ö. Sert, Lagrange formulation of the symmetric teleparallel gravity, *Int. J. Mod. Phys. D* **15** (2006), 619-634.

[9] A. C. Hearn, REDUCE User's Manual Version 3.8 (2004), http://www.reduce-algebra.com/docs/reduce.pdf.

[10] E. Schrüfer, EXCALC: A system for doing calculations in the calculus of modern differential geometry (2004), http://www.reduce-algebra.com/docs/excalc.pdf.

[11] M. Adak, T. Dereli, The quadratic symmetric teleparallel gravity in two dimensions, *EPL* **82** (2008), 30008.

9 ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Çağlar PALA
Doğum Yeri ve Tarihi	: SİNOP, 09.05.1985
Lisans Üniversite	: Elk. - Elt. Müh., Ege Üniversitesi
Y.Lisans Üniversite	: Fizik, Pamukkale Üniversitesi (devam)
Elektronik Posta	: caglar.pala@gmail.com
İletişim Adresi	: Erciyes Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü, KAYSERİ